"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Departamento de Matemáticas

Sugerencias para la enseñanza de sumas y sucesiones de números en el bachillerato

TESIS

Que para obtener el grado de

Maestría en Ciencias

con especialidad en Matemática Educativa

Presenta:

L.M. Carol Yareli Gaxiola Hernández

Directora:

Dra. Silvia Elena Ibarra Olmos

Hermosillo, Sonora, México, octubre de 2016

SINODALES

Dr. Rafael Pantoja Ranjel
Universidad de Guadalajara, Guadalajara, Jalisco

M.C. Manuel Alfredo Urrea Bernal
Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora

Dra. María Mercedes Chacara Montes
Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora

Dra. Silvia Elena Ibarra Olmos
Universidad de Sonora, Hermosillo, Sonora

Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tegnología (CONACYT) por su apoyo a lo largo de este proceso, por su ayuda en el desarrollo de mi formación y permitio la culminación exitosa de este proyecto.

Al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora y al Programa de Maestría en Ciencas con Especialidad en Matemática Educativa , a todo su personal académico y administrativo. Por el apoyo que tuve a lo largo de mi formación como Maestra en Ciencias.

Todo mi agradecimiento para la Dra. Silvia Elena Ibarra Olmos por darme su apoyo a lo largo de mi formación como Maestra en Ciencias, por darme su confianza y dedicación para adquir conocimientos, habilidades y experiencias; que me proporcionaron un mayor acercamiento a la investigación de la problemática de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

A mis profesores, quienes formaron parte del proceso de mi formación así como de la terminación de este proyecto. Especialmente a Manuel Urrea quien proporciono su apoyo para una parte esencial de nuestra propuesta, lo cual nos permitio dar un mayor soporte al trabajo; a mis profesores Ramiro Avila, Guadalupe del Castillo, Jose Luis Días, Mercedes Chancara, quienes a lo largo de estos dos años de trabajo me proporcionaron su apoyo y motivación para el desarrollo y fundamento de los elementos que incorporan este trabajo.

Al Dr. Rafael Pantoja quien me permitio conocer un poco de las aportaciones de las nuevas herramientas tecnologicas como apoyo en los procesos de enseñansa y aprendizaje, además de brindarme una nueva perspectiva de las herramientas tecnologícas como aporte en el diseño de propuestas didácticas.

Dedicatoria

Agradezco a mi familia por darme el apoyo en cada una de las etapas de mi vida, por su motivación y entusiasmo en cada una de mis metas, por estar siempre en los momentos importante y darme la confianza para seguir adelante. En especial a mis padres Vidal Gaxiola y Carolina Hernández que han guiado mis pasos para llegar a ser la persona que soy, es gracias a ellos este gran logro; a mi hermano Alejandro por su amor, comprensión y apoyo.

A Javier por apoyarme en todo este proceso y ser un gran compañero, amigo y novio, por su motivación e interés en cada momento, un gran logro en nuestras vidas.

A mis amigos por su apoyo y confianza, una gran parte de mi vida.

Que te conceda lo que tu corazón desea; que haga
que se cumplan todos tus planes. (Salmos 20:4)

Carol Yareli

Índice

Introducción

Como parte de la integración de nuevos enfoques de trabajo para la educación en México, en especial para la Educación Media Superior, la cual ha retomado nuevos elementos dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje, se considera importante incorporar una serie de elementos que funjan como apoyo para la práctica docente de profesores de matemáticas que imparten Educación Media Superior en el bachillerato general.

El proyecto centra su atención en el bachillerato general, tomando como base los módulos de aprendizaje que se utilizan en el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, con la finalidad de aportar en el proceso de adecuación a un enfoque por competencias. En esta dirección, el trabajo realizado consistió en el diseño de una guía de apoyo para el uso del módulo de aprendizaje Matemáticas 1, centrando nuestra atención en el estudio de sucesiones numéricas.

El diseño mencionado cuenta con siete capítulos, los cuales se describen continuación. En el primer capítulo, denominado Antecedentes, se describe la incorporación de un enfoque por competencias y las funciones que todo profesor que imparte Educación Media Superior debe desarrolla. Se retoman los aspectos que el profesor debe considerar como parte de sus prácticas docentes, primero con una visión general de lo que implica la implementación de un enfoque por competencias a través de la resolución de problemas, así como las características que debe cumplir todo profesor que imparte Educación Media Superior en el bachillerato general.

El estudio de enfoca en el papel que juega el profesor de matemáticas y cómo debe incorporar estos aspectos en su actuación en el salón de clases, especialmente para la implementación del tema de sucesiones, por esta razón se presenta una visión general de la importancia del tema de sucesiones al largo del currículo escolar, así como una descripción de su evolución histórica, como apoyo al desarrollo del tema. Asimismo, se analizaron algunas investigaciones respecto a las dificultades y aportaciones que se presentan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de este contenido matemático.

El capítulo dos centra su atención en describir y justificar la problemática, haciendo hincapié en la fundamentación del diseño propuesto, en donde se incorporan los elementos que permiten definir la importancia de aportar herramientas de apoyo para las prácticas docentes del profesor de matemáticas, especialmente para los profesores que imparten Educación Media Superior. Así como el planteamiento de los objetivos que guían nuestro proyecto, los cuales corresponde al diseño de una guía de apoyo al módulo de aprendizaje del Colegio de Bachilleres, del tema de sucesiones numéricas.

En el capítulo tres se incorporan las herramientas teóricas que fundamentan el diseño, puntualizando en aquellos elementos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática, que permitan incorporar los aspectos necesarios para la estructura y diseño de nuestra propuesta. Como parte de estas herramientas se encuentran las trayectorias y configuraciones didácticas, particularmente las facetas epistémica y docente, para establecer los significados institucionales y las funciones que el profesor de matemáticas debe desarrollar respectivamente; además de incorporar los criterios de idoneidad didáctica de cada una de las dimensiones, para identificar los aspectos del módulo de aprendizaje que son necesario fortalecer.

En el capítulo cuatro se hace una descripción de los elementos que se incorporan en el diseño, detallando los resultados que se obtuvieron del análisis de idoneidad didáctica del módulo de aprendizaje en cada una de sus dimensiones, en donde se incorporan aquellos indicadores en los que se necesita realizar alguna aportación. También se presentan las acciones e instrumentos necesarios para recabar información sobre la opinión de los profesores del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora que imparten las asignaturas de matemáticas, respecto a los módulos de aprendizaje que se utilizan en esta institución y la forma cómo lo implementan.

Como parte del capítulo cinco se incorpora una descripción de la sección del módulo que centra su atención en el estudio de sucesiones numéricas, así como la estructura del diseño. En donde se describe cada uno de los elementos que integran la guía, especificando el papel que cada uno de estos juega como herramientas para el profesor de matemáticas.

Capítulo 1 Antecedentes

Con el propósito de establecer una relación entre los subsistemas de la Educación Media Superior (EMS) y elevar la calidad de la educación, en 2008 se instituyó la llamada Reforma Integral para la EMS, compuesta por cuatro ejes principales: Marco Curricular Común enfocado en competencias, definición y regulación de las modalidades de oferta, mecanismo de gestión de la Reforma y certificación del Sistema Nacional de Bachillerato (SNB), en donde se especifican las características con que debe de cumplir la EMS en México.

Dicha reforma tiene como reto principal que todos los estudiantes que egresan de la educación básica cuenten con la oportunidad para ingresar al bachillerato, tomando en cuenta las necesidades que se presentan en la sociedad, sin perder de vista que el objetivo principal es que todo estudiante cuente con una educación certificada y de calidad, así como con la oportunidad de ingresar a la Educación Superior.

Sin embargo, esto no es un trabajo fácil, pues deben tomarse en cuenta muchos factores de los cuales depende la EMS. Por lo que se constituyó un Marco Curricular Común (MCC) por el cual estuvieran dirigidos los diferentes subsistemas y modalidades que componen el SNB, basado en desempeños terminales, el cual establece los conocimientos y competencias con los que todo estudiante egresado de bachillerato debe cumplir.

Es importante conocer el enfoque que representa cada sistema educativo, pues la EMS en México está conformada por cuatro niveles: bachillerato general, bachillerato tecnológico, profesional técnico y profesional técnico bachiller (CONALEP). Además, cada uno de ellos cuenta con ciertas características (Tabla 1.1), tomando como base el objetivo general que instituye el MCC.

Nivel	*Características generales*
Bachillerato general	Formar a jóvenes en diferentes disciplinas y ciencias, que les brinden herramientas para posteriormente cursar estudios superiores. Su objetivo es ofrecer una educación de carácter formativa e integral, que incluya la adquisición de conocimientos científicos, técnicos y humanísticos con las metodologías de investigación y de dominio del lenguaje.

Bachillerato tecnológico	Incluye los fundamentos del bachillerato general y el dominio de una especialidad técnica que permite a los educandos, además de ingresar a la educación superior, contar con un título que les posibilita incorporarse a la actividad productiva.
Profesional técnico	Preparar jóvenes como profesionales técnicos en actividades industriales y de servicios, con carácter terminal.
Profesional técnico bachiller (Conalep)	Preparar jóvenes como profesionales técnicos en actividades industriales y de servicios, teniendo la oportunidad de continuar con sus estudios superiores.

Tabla 1.1 Características generales de los niveles de EMS en México (SEP, 2014a)

Como cada uno de los subsistemas cuenta con características diferentes, la formación de los estudiantes es distinta para cada caso. Es decir, cada nivel pretende cubrir las necesidades de una cierta población. Para el caso del bachillerato general que concentra la mayor cantidad de estudiantes (SEP, 2014a), se ofrece una educación de carácter formativa e integral, enfocada principalmente a los jóvenes que necesitan herramientas para su formación superior.

Por otra parte, el MCC de la Reforma Integral de Educación Media Superior (RIEMS) expresa que el profesor debe trabajar bajo el enfoque de competencias para que el estudiante adquiera ciertos desempeños. Las competencias son de diferentes tipos: genéricas, disciplinares y profesionales, por esta razón es importante que el profesor conozca las necesidades de los estudiantes para que pueda promover que desarrollen las competencias adecuadas para alcanzar el perfil de egreso que constituye la RIEMS, y en consecuencia desenvolverse en el ámbito social, además de adentrarse en el ámbito laboral.

Como se mencionó anteriormente cada uno de los subsistemas que integran la EMS en México cuenta con características propias, por lo tanto, es necesario contar con un perfil idóneo para sus docentes con algunas especificaciones respecto a sus prácticas. En este caso se enfoca la atención en el bachillerato general, por lo que se advierte que la Dirección General de Bachillerato (DGB) integra una serie de atributos que debe adquirir todo docente que se incorpore a laborar en este subsistema (DGB, 08 de mayo de 2013):

- Disponibilidad para aprender por cuenta propia y a través de la interacción con otros.
- Habilidad para estimular la curiosidad, la creatividad y el análisis.

- Aptitudes para fomentar la comunicación interpersonal y el trabajo en equipo.
- Imaginación para identificar y aprovechar oportunidades diversas de aprendizaje.
- Autoridad moral para transmitir valores a través del ejemplo.
- La comprensión amplia de los fundamentos normativos, filosóficos y metodológicos que sustentan el bachillerato general y que orientan la práctica educativa en la institución.
- El manejo de las teorías y el conocimiento de la evolución del campo disciplinario, objeto de su función académica.
- El conocimiento de las características psicológicas que particularizan a los estudiantes, así como las condiciones biosocioeconómicas y culturales en las que se desarrollan.
- El conocimiento teórico y metodológico de la psicopedagogía y de la cultura en general.
- El conocimiento permanentemente actualizado sobre el acontecer nacional e internacional relevante para el desarrollo del estudiante, para sí mismo y para la institución, y significativo para la explicación de los cambios que puedan afectarlos.
- El dominio e integración de los conocimientos disciplinarios y pedagógicos que requiere para la planeación, desarrollo y evaluación cotidiana de las actividades inherentes a su función.
- El uso y fomento de su creatividad en el proceso de aprendizaje y enseñanza.
- La observación y análisis de los procesos de desarrollo individual y grupal, que fomenten el interés de los estudiantes a realizarse como seres humanos autónomos.
- El uso adecuado de los recursos materiales, humanos y técnicos que tengan a su alcance para el desarrollo de la práctica educativa.
- La comunicación pertinente con el estudiante y con los grupos colegiados de la institución.
- La correcta expresión oral, escrita y corporal como manifestación de la función académica que desempeña.
- La generación de un ambiente de respeto y confianza, en donde muestre el aprecio que tiene por la población estudiantil, los compañeros de trabajo y la institución a la que pertenece.

- El interés por su superación como académico en lo disciplinario, lo psicopedagógico y en su práctica cotidiana, de manera responsable y comprometida.
- La generación en los estudiantes de una actitud de interés por su proceso de pensamiento y por la construcción de su propio conocimiento trascendiendo las prácticas estereotipadas.
- La expresión y promoción de valores que hagan del académico mismo y de los estudiantes individuos dignos, íntegros, responsables, honestos y comprometidos, con una actitud crítica y transformadora de su entorno social, político, económico y cultural.
- La disposición para participar en grupos colegiados y eventos institucionales que le permitan intercambiar experiencias y enriquecer su práctica.
- El reconocimiento de los alcances que su actividad formativa tiene en el desarrollo actual y futuro del estudiante y de sí mismo.

Por esta razón, uno de los mecanismos de gestión de la RIEMS es el desarrollo docente, el cual establece que debe existir un cambio gradual de la práctica docente, por lo que es necesario que los profesores no sólo cuenten con un amplio dominio de conocimientos de su disciplina, sino que también adquieran habilidades y estrategias que permitan promover un aprendizaje colaborativo, la resolución de problemas y el trabajo en torno a proyectos (SEMS, 2008).

Asimismo, debe existir una actualización y profesionalización de los profesores, para que puedan adaptar sus clases a este enfoque, adquiriendo una visión amplia de lo que representa el introducir nuevas prácticas docentes a través del desarrollo de competencias, para lograr una educación de calidad en el nivel medio superior.

El contar con una formación continua fomenta el impulso a lograr que el profesor construya bases sólidas sobre sus conocimientos, además de introducir nuevas capacidades que le permitan ampliar su visión respecto al papel que éste juega en el salón de clases; para crear la relación estudiante-profesor, que conlleve a la obtención de resultados óptimos tanto de los estudiantes como del mismo profesor.

1.1 Desarrollo de competencias docentes

Con la integración de la Reforma Integral de la EMS en México, se da suma importancia al papel que toma el profesor, pues es quien promoverá el desarrollo de las competencias en los estudiantes. Por esta razón, a través del Acuerdo Secretarial 447 se especifica el perfil con el que debe contar el docente, en el cual se definen las competencias que este último debe poner en práctica.

Se debe tomar en cuenta que la implementación de una Reforma, como lo es la RIEMS, depende de diversos factores para que pueda cumplir con los objetivos instituidos. A pesar de ser el profesor uno de sus principales factores, es importante reconocer que la educación es un proceso complejo que necesita de un esfuerzo por parte de todos sus mecanismos (Tabla 1.2).

Marco curricular común	***Nivel Interinstitucional*** *Consenso entre instituciones de EMS en torno al SNB*
Modelo educativo de la institución	**Nivel Institucional** Aportes de cada institución para reflejar su filosofía e identidad
Planes y programas de estudio	Oferta educativa concreta de las instituciones para responder a la demanda de los estudiantes
Adecuaciones por centro escolar	**Nivel Escuela** Aportes de cada plantel en términos de adecuaciones curriculares, tutoría y actividades complementarias
Currículum impartido en el aula	**Nivel Aula** Decisiones del docente sobre planeación, desarrollo y evaluación del proceso de aprendizaje

Tabla 1.2 Concentración de los distintos niveles de la RIEMS (SEMS, 2008)

Sin embargo, como lo afirma la RIEMS “los profesores, como actores clave en la EMS, deberán integrarse a los procesos de diseño curricular y toma de decisiones, de manera que su experiencia contribuya a la Reforma integral” (SEMS, p. 86). Por esta razón es importante que el profesor conozca e intérprete de forma adecuada las competencias que debe desarrollar, además de incorporarlas a su práctica docente.

Las competencias del Acuerdo Secretarial 447, establecido por la Subsecretaría de Educación Media Superior (SEMS), específica las características con las que debe cumplir todo profesor que imparta EMS en la modalidad escolarizada (SEMS, 29 de octubre de 2008), son las siguientes:

- Organiza su formación continua a lo largo de su trayectoria profesional.
- Domina y estructura los saberes para facilitar experiencias de aprendizaje significativo.
- Planifica los procesos de enseñanza y de aprendizaje atendiendo el enfoque por competencias, y lo ubica en contextos disciplinares, curriculares y sociales amplios.
- Lleva a la práctica procesos de enseñanza y de aprendizaje de manera efectiva, creativa e innovadora a su contexto institucional.
- Evalúa los procesos de enseñanza y aprendizaje con un enfoque formativo.
- Construye ambientes para el aprendizaje autónomo y colaborativo.
- Contribuye a la generación de un ambiente que facilite el desarrollo sano e integral de los estudiantes.
- Participa en los proyectos de mejora continua de su escuela y apoya la gestión institucional.

El introducir las competencias que deben cumplir los profesores forma parte de la implementación de esta Reforma, en donde se pretende obtener una educación certificada y de calidad, como se mencionó anteriormente, por lo que es importante que el profesor cuente con el apoyo necesario para desarrollar cada una de estas competencias.

En la actualidad no se cuenta con una formación determinada para los profesores que imparten EMS, como en el caso de la Educación Básica, que cuenta con instituciones que forman a sus profesores con un cierto enfoque. La mayoría de los profesores que imparten clases en este nivel educativo no poseen una formación como docente de bachillerato; lo que constituye una situación compleja, agregando a esto un caso especial, en donde algunos profesores no tienen un grado de nivel superior (Alcántara & Zorrilla, 2010). Este hecho puede convertirse en una limitación para el desarrollo de competencias docentes, puesto que podría ser que los profesores no poseyeran las aptitudes necesarias para que los estudiantes de EMS logren los desempeños terminales que establece el MCC, o más aún que los conocimientos que se fomentan puedan ser no adecuados.

De esta manera, y como apoyo para los profesores en la introducción de la RIEMS, se constituye un Programa de Formación Docente de Educación Media Superior (PROFORDEMS), en el cual se especializa a profesores de la EMS para lograr el perfil docente con el que deben de cumplir. El informe oficial del Programa Sectorial de Educación 2013-2018 (SEP, 2014b), testifica que gracias a dicho programa se inició el proceso de capacitación de 27.7 mil docentes, lo que representa 2.5% más respecto a los formados en el 2013 (27,020).

El contar con un apoyo en la interpretación de la Reforma fomenta un avance en la introducción de un nuevo enfoque, que permita al profesor desarrollar las competencias establecida por la RIEMS. Sin embargo, en algunos casos existe una resistencia por la introducción de la RIEMS, pues es necesario adecuar las prácticas docentes a un nuevo enfoque, lo que involucra un mayor esfuerzo y dedicación por parte de los profesores. Silva (2012, p.17) argumenta que las principales causas por las cuales los profesores no aplican las reformas son:

- Mala interpretación de las reformas
- Falta de material o infraestructura
- Falta de experiencia y recursos
- Falta de apoyo de la administración
- Presión para obtener buenos resultados en las pruebas
- Mucho contenido en poco tiempo
- Por sus creencias
- Por miedo al cambio

Es indispensable que los profesores que imparten EMS cuenten con una nueva perspectiva, es decir, que reflexionen sobre la forma en que se pretende implementar estos dos procesos de la educación: enseñanza y aprendizaje. En donde no se tenga como único objetivo la obtención de conocimientos, sino que se busque construir habilidades y nuevas formas de pensamiento, además de forjar un ambiente agradable que favorezca la actitud de los estudiantes.

Es verdad que incorporar este enfoque no es un trabajo fácil, no obstante, en algunos casos esta reforma formó una nueva visión sobre la forma de implementar la EMS. Alcántara y Zorrilla (2010) organizaron una serie de entrevistas, en donde se tuvo como objetivo mostrar las repercusiones que la RIEMS ha tenido en profesores de bachillerato con respecto a la forma en que efectúan sus clases. Algunos profesores señalan obtención de resultados favorables como el cambio en la dinámica que se genera en el salón de clases, permitiendo reflexionar y perfeccionar las estrategias que se implementan.

También es importante tomar en cuenta que la formación en competencias, que se propone a los profesores de bachillerato, no está especializada en las áreas en que éstos se desenvuelven, es decir, si bien se promueve un conjunto de competencias como formación para los profesores de la EMS, no se retoman para cada disciplina. No es igual crear un ambiente de reflexión y razonamiento para áreas como la literatura, la historia o la matemática, por lo que es importante incorporar de forma adecuada dichas competencias a cada una de estas disciplinas.

1.1 Competencias docentes especializadas en el área de matemáticas

Al centrar nuestra reflexión en el caso de los profesores de matemáticas, es necesario traducir lo que establece la RIEMS para esta disciplina, en particular especificar como promover competencias al enseñar o aprender matemáticas. Es indispensable interpretar lo que se establece en el Acuerdo Secretarial 447 y adecuarlo a un ambiente propio para el estudio y la enseñanza de las matemáticas, considerando así el perfil de egreso de todo estudiante de bachillerato.

Sin embargo, las competencias que se presentan en dicho Acuerdo podrían considerarse como competencias genéricas, es necesario que estas competencias puedan ser identificadas en este caso, por el profesor de matemáticas. Como argumenta Gómez solo existen "listados de competencias genéricas y específicas en las que no es posible identificar la relación entre ellas, ni su función en la actuación del profesor de matemáticas" (2007, p. 104).

Es indispensable que el profesor de matemáticas, al igual que otras disciplinas que integran la EMS, reflexione e intérprete de forma analítica las competencias docentes que debe desarrollar, adaptándolas a la disciplina de interés. Enfocar cada una de las competencias docentes al área de matemáticas representa un esfuerzo por parte de los profesores, pues ésta es una de las claves para implementar la RIEMS.

Además de incorporar en su práctica docente las estrategias necesarias para promover que los estudiantes desarrollen ciertas competencias, de acuerdo al Acuerdo Secretarial 444 se establecen las competencias que constituyen el marco curricular común del SNB. Por lo cual es indispensable que el profesor a través de su práctica docente, pueda crear una relación entre las competencias docentes y las competencias que debe promover.

Una parte del trabajo del profesor es interpretar las competencias que debe promover. Por una parte, las competencias genéricas están enfocadas en todo estudiante de bachillerato con la finalidad de aportar las herramientas necesarias para su actuación a lo largo de su vida, que son transversales pues no depende de una disciplina particular. Por otra parte, se encuentran las competencias disciplinares básicas las cuales describen las competencias que todo estudiante de bachillerato debe desarrollar de acuerdo a una disciplina.

Si bien estas competencias se encuentran establecidas en dicho Acuerdo, para el caso de las competencias disciplinares no se cuenta con una interpretación a fondo de lo que conlleva promover estas competencias, como sí sucede en el caso de competencias genéricas, en donde se establecen los atributos que promueven el desarrollo de estas competencias. Así que forma parte del trabajo del profesor de matemáticas interpretar las competencias disciplinares y la forma de promoverlas.

Uno de los cuestionamientos que plantea Ibáñez (2013) es: *¿Qué facilita el proceso para formarse y aprender a formar en competencias?,* para ejemplificar la gran preocupación de los profesores por introducir en su trabajo un nuevo enfoque para la educación. En este sentido se plantean dos aspectos: la mediación en el cambio de planear por objetivos a planear por procesos, así como la identificación de momentos significativos en el proceso de aprendizaje.

Una de las acciones que el profesor de matemáticas debe considerar es la interpretación de las competencias disciplinares matemáticas; en su interés por contribuir con un apoyo en la práctica docente Marín, Guzmán y Zapata (2012) crean una propuesta para los atributos de las competencias disciplinares del área de matemáticas, definiéndolas de la siguiente forma:

1. **Construye e interpreta modelos matemáticos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.**
   Atributos:
    1. Identifica y representa la situación problema, diferenciando variables y constantes.
    2. Sigue instrucciones y procedimientos en situaciones problema de manera reflexiva, contribuyendo al alcance de un objetivo y concluye soluciones del modelo matemático de manera generalizada.
    3. Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
    4. Analiza críticamente los factores que influyen en la toma de decisiones.
    5. Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.

6. Reconoce la necesidad de solicitar apoyo ante una situación que lo rebase.

2. **Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.**

   Atributos:

   1. Comprende el texto del planteamiento problema, en el lenguaje cotidiano. Identifica y representa la situación problema, diferenciando variables y constantes.
   2. Analiza las diferentes alternativas de solución, apoyándose en diversas herramientas como tablas, graficas, diagramas, ecuaciones, etc.
   3. Modela la información de la alternativa elegida para posteriormente resolverla.
   4. Resuelve el problema, utilizando el algoritmo adecuado para el modelo.

3. **Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.**

   Atributos:

   1. Elige alternativas al proponer explicaciones de los resultados obtenidos.
   2. Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
   3. Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.
   4. Verifica la información obtenida y, la extrapola a una familia de situaciones-problema similares.

4. **Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático y el uso delas tecnologías de la información y comunicación.**

   Atributos:

   1. Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.
   2. Identifica y representa la situación problema, diferenciando variables y constantes.
   3. Estructura ideas de manera clara y coherente.
   4. Evalúa y argumenta soluciones basados en conocimientos y procesos matemáticos.

5. **Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.**

   Atributos:

1. Analiza ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
2. A partir de diferentes medios, extrae la información que involucra variables independientes y dependientes, construye su modelo matemático, gráfica y predice su comportamiento.
3. Analiza, plantea e interpreta relaciones funcionales en los fenómenos reales.

6. **Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.**

   Atributos:

   1. Toma lecturas de las manifestaciones de un problema real de su entorno y cuantifica en unidades las propiedades físicas obtenidas.
   2. Cuantifica evidencias obtenidas para su representación matemática y las interpreta
   3. Reconoce y clasifica las características físico-espaciales de un problema y/o su contexto.
   4. Describe las propiedades físicas del espacio que lo rodea para su contrastación experimental o matemática con fenómenos similares.

7. **Elige un enfoque determinista o un aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno y argumenta su pertinencia.**

   Atributos:

   1. Elige información de acuerdo a categorías jerárquicas y relaciones
   2. Compara alternativas propuestas la que mejor explique el ¿por qué? de un argumento
   3. Evalúa argumentos y opiniones para determinar entre ellos de acuerdo a su relevancia y pertinencia, en el planteamiento y solución de situaciones problema.

8. **Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.**

   Atributos:

   1. Conoce los elementos de las gráficas y su relación con el lenguaje matemático.
   2. Identifica y emplea las distintas metodología y simbología que se utiliza en matemáticas, Identifica analíticamente los componentes de información de una tabla, grafica, y le encuentra su pertinencia
   3. Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones

4. Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.

Sin embargo, el contar con esta propuesta no va más allá de proporcionar un apoyo para la interpretación de las competencias disciplinares que se deben promover en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Forma parte del trabajo del profesor reflexionar e interpretar cada uno de los atributos y desarrollar estrategias que permitan adaptarlas en el salón de clases, con la finalidad de que los estudiantes puedan desarrollar estas competencias, además de poseer un amplio dominio de los conocimientos matemáticos que le permitan incorporar todos estos factores dentro de su práctica docente.

El papel de todo profesor de matemáticas de la EMS, implica un dominio de los conocimientos matemáticos referentes al programa que está impartiendo, además de fomentar las estrategias adecuadas para implementar estos conocimientos en el salón de clases, es decir, apropiar sus conocimientos a las necesidades de sus estudiantes.

Una de las características que se presenta entre el grupo académico del área de matemáticas, es el hecho de que los profesores que imparten los programas de matemáticas cuentan con una formación en áreas relacionadas con las matemáticas, no son específicamente una formación como matemáticos. Tal es el caso del Bachillerato General en la modalidad escolarizada, para el cual la DGB presenta un Profesiograma con un perfil idóneo y un perfil afín para cada una de las asignaturas que constituyen la EMS, la asignatura de matemáticas dicho profesiograma cuenta con una gran diversidad de formaciones para los profesores que cumplen con el perfil para impartir la asignatura de matemáticas (DGB, 2014).

Lo anterior impulsa al cuestionamiento sobre las prácticas y conocimientos del profesor de matemáticas. En este sentido Gómez (2007) presenta un cuestionamiento *¿Cuáles deben ser los conocimientos y capacidades de un profesor que actúa eficaz y eficientemente?*, del cual surgen diferentes reflexiones que no están centradas únicamente en los conocimientos matemáticos, sino en las habilidades y actitudes que cada profesor posee. Esto es, se destacan taxonomías referentes a los conocimientos con los que debe contar todo profesor, se establece una relación entre éstas, considerando de suma importancia el conocimiento de la disciplina, cómo representar estos conocimientos en el salón de clases, conocer a sus estudiantes y contar con estrategias de instrucción.

Es importante identificar lo que significa ser un profesor matemáticamente competente. De acuerdo a Niss (2006) contar con una *competencia matemática* significa tener conocimiento para entender, hacer, usar y poseer una opinión ampliamente fundamentada sobre las matemáticas, así como contar con una gran variedad de situaciones y contextos en donde las matemáticas jueguen un papel importante.

Por otra parte, Godino y Batanero (2008) establecen algunas nociones respecto a las competencias que el profesor de matemáticas debe desarrollar, por lo que denominan que son necesarias las competencias de *análisis*, *síntesis* y *acción didáctica*. Lo cual permita a los profesores "analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sintetizar el complejo de conocimientos aportados por la Didáctica de la Matemática, y actuar con idoneidad en el diseño, implementación y evaluación de la propia práctica docente".

Forma parte del trabajo del profesor llevar a cabo una planificación previa a su actuación en el salón de clases, tomando en cuenta el contenido matemático que se estudia además de reconocer las capacidades de los estudiantes con respecto a éste. Godino, Rivas, Castro y Konic argumentan que "una de las tareas clave del profesor de matemáticas es la selección y adaptación de situaciones–problema que promuevan la contextualización de los contenidos matemáticos, su aplicación y ejercitación" (2012, p. 4).

Es un papel importante el que juega el profesor como guía para la construcción del conocimiento, como parte de su práctica docente debe considerar la adaptación de cada una de las acciones que debe desarrollar, tomando en cuenta todo lo que establecen los mecanismos de la EMS (Ilustración 1.1), de acuerdo a la asignatura de interés, en donde se especifican las características que debe poseer todo profesor.

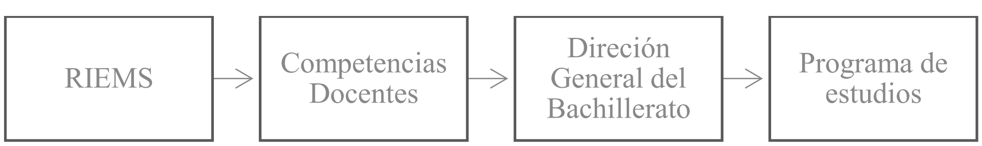


Ilustración 1.1 Mecanismos de la EMS. Elaboración propia.

Al igual que la RIEMS, la DGB instituye una serie atributos con los que debe de contar todo profesor que impartan EMS en el Bachillerato General, pero estos mecanismos lo hacen de una forma general, no se establece una adaptación de las competencias y atributos que los profesores de matemáticas u otras áreas deben de cumplir.

Sin embargo, cuando se habla de un área, y más aun de un contenido matemático los programas de estudio establecen una serie de acciones que el profesor debe realizar. En el área de matemáticas estas acciones están enfocadas en el contenido matemático y las competencias genéricas y disciplinares que los estudiantes deben desarrollar, es decir, para el caso de las sucesiones numéricas, tema contenido el programa de estudio de “Matemáticas I” (DGB, 2013), se especifican las siguientes acciones:

- Comunica ideas y conceptos con claridad en relación con el tema de las Series y Sucesiones Aritméticas y Geométricas y los ejemplifica en el contexto de los estudiantes.
- Provee de bibliografía relevante para la investigación sobre series y sucesiones y orienta a los estudiantes en la consulta de fuentes para la investigación.
- Establece criterios y métodos de evaluación del aprendizaje con base en el enfoque de competencias y lo comunica de manera clara a los estudiantes.
- Fomenta la autoevaluación y coevaluación entre los estudiantes para analizar la solución de problemas.
- Alienta que los estudiantes expresen opiniones personales, en un marco de respeto, y las toma en cuenta.

Al centrar nuestra atención en el tema de sucesiones de números es necesario reflexionar e indagar sobre las características que adquiere en el currículo escolar en México, dando paso a un análisis cognitivo de la trayectoria que el estudio de este conocimiento matemático adquiere.

1.2 Las sucesiones numéricas en el currículo escolar

En la educación, no solo de las matemáticas, cuando se habla de estudiar o adquirir un nuevo conocimiento es importante establecer las aptitudes y habilidades que los estudiantes poseen, así como los conocimientos previos que han adquirido. En el caso de las matemáticas constantemente se presentan dificultades cuando se estudia un nuevo conocimiento, construir un significado adecuado de un contenido matemático genera ciertas dificultades en los estudiantes.

En el caso del estudio de sucesiones de números, un tema que está presente en los diferentes niveles educativos de México, se caracteriza por presentar dificultades al ser estudiado principalmente por ser un tema relacionado con el pensamiento algebraico lo cual implica el estudio de patrones, así como la generalización.

Es importante identificar el lugar que ocupa nuestro tema de interés en los diferentes niveles educativos, además de caracterizar las dificultes que presentan los estudiantes y los estudios que se han llevado a cabo alrededor de esta problemática, con el objetivo de proporcionar una visión amplia sobre el estudio de las sucesiones de números y su impacto en la educación.

1.2.1 Sucesiones numéricas en la Educación Básica

En el caso de la Educación Básica, las sucesiones numéricas comienzan a estudiarse con la introducción de los números naturales, así como con la identificación de patrones de sucesiones geométricas. El estudio de sucesiones se enfoca, principalmente, en la identificación de patrones que éstas adquieren, para proporcionar los términos que hagan falta o indicar los elementos que continúan en una sucesión.

El estudio de este conocimiento matemático se refleja desde el inicio de su Educación Básica en donde los niños deben desarrollar ciertas habilidades, principalmente en el uso de los números naturales, para interpretar cantidades de hasta dos cifras. Además de comenzar a identificar regularidades entre elementos de un conjunto de acuerdo a su forma, color o cardinalidad.

De acuerdo al programa de estudio de preescolar (SEP, 2011a), se puede observar que uno de los estándares curriculares está enfocado en el estudio de patrones, a partir de los cuales se promueve que los niños puedan ordenar un conjunto de números de forma ascendente y descendente, identificar el patrón de una sucesión usando criterios de repetición e incremento, así como los elementos faltantes.

Uno de los ejes que integra la Educación Básica es el "Sentido numérico y pensamiento algebraico", en donde se pretende formar en los estudiantes una pensamiento reflexivo y analítico, además de utilizar los números y sus operaciones en diferentes contextos. Los objetivos principales (SEP, 2011b) de este eje son:

- La modelización de situaciones mediante el uso del lenguaje aritmético.
- La exploración de propiedades aritméticas que en la secundaria podrán ser generalizadas con el álgebra.
- La puesta en juego de diferentes formas de representar y efectuar cálculos.

En particular, la educación primaria familiariza a los estudiantes con situaciones en las que puedan estudiar los términos de una sucesión y sus características y en la educación secundaria se comienza el estudio de sucesiones, de tal forma que los estudiantes sean quienes las construyan y que puedan argumentar las características de una sucesión, además de poder expresar una sucesión en términos algebraicos.

El estudio de sucesiones representa la identificación y obtención de patrones, el cual está presente en la educación básica desde el primer año de primaria, sin embargo, constantemente se encuentran dificultades en los estudiantes. Osorio (2012) argumenta algunas dificultades que los alumnos que están por ingresar en la EMS poseen, relacionados principalmente con los procedimientos que se utilizan para hacer la generalización de una sucesión.

El proceso de generalización proporciona una herramienta para el pensamiento algebraico, lo cual se ve reflejado en la forma que los estudiantes desarrollan su pensamiento lógico inductivo, en donde es necesario que ellos puedan generar sus propios procedimientos y esto les permita generar argumentos sólidos sobre las acciones que desarrollan al llevar a cabo un proceso de generalización.

Asimismo, se especifica la dificultad por encontrar un patrón en las sucesiones, en ocasiones es difícil poder encontrar las propiedades que representan cierto comportamiento y más aún poder construir una generalización, por lo que es necesario fomentar en los estudiantes un razonamiento reflexivo, el cual permita prestar atención en las características que modelan cierto cambio. Una de las reflexiones de Osorio (2012) es el uso de sucesiones figúrales las cuales pueden proporcionar una mayor familiaridad con el estudio de patrones, además que los estudiantes puedan reflexionar sobre sus estrategias.

1.2.1 Sucesiones numéricas en la Educación Media Superior

En los subsistemas de la EMS que constituyen la DGB, se estudia el tema "Sumas y sucesiones de números" en el programa Matemáticas I, en donde se espera que el estudiante pueda manejar la expresión algebraica de los términos de una sucesión numérica.

Aun cuando las sucesiones numéricas son un tema que se estudia desde la Educación básica, se encuentran dificultades en los estudiantes, Chalé y Acuña (2013) argumentan que una de estas dificultades es "el proceso de detección del patrón que subyace a una secuencia a partir del análisis de figuras no es espontáneo" (p. 2), lo que se refleja en la deficiencia del pensamiento algebraico, pues constantemente se presentan problemas.

La permanencia de dicha deficiencia repercute en la Educación Superior, donde el tema de sucesiones toma un papel importante, en algunas áreas de la matemática como: aritmética, algebra, cálculo, trigonometría, análisis matemático, análisis complejo, etcétera. Pues frecuentemente, se presentan dificultades en el aprendizaje y la enseñanza de los conceptos algebraicos, lo que representa un aspecto importante en este nivel educativo.

1.3 Un bosquejo sobre la evolución histórica de las sucesiones numéricas

Para conocer la importancia del estudio de sucesiones se retoma un poco de la evolución que éste ha tenido a lo largo de la historia, en la actualidad se cuentan con grandes aportes que se han realizado al área de las matemáticas, no obstante, se debe tener en cuenta que los objetos matemáticos que se conocen hoy en día han adquirido diferentes enfoques a lo largo de los años. Tal es el caso de los números y su representación, uno de los elementos principales de nuestro objeto matemático de interés como lo son las sucesiones numéricas, que han estado presente desde civilizaciones muy antiguas.

Conocer las aportaciones que se han realizado al área de las matemáticas, en especial para el caso de sucesiones, aporta una visión sobre los procesos por los cuales un conocimiento matemático tuvo que pasar, para conocer sus aplicaciones y los diferentes enfoques que las civilizaciones aplicaron en el estudio de sucesiones. Además, se considera que conocer la evolución que el objeto matemático de interés presenta a lo largo de la historia, proporciona una visión de las opciones que se tienen en el salón de clases.

Babilonia

Una de las civilizaciones que realizó un gran aporte a las matemáticas, fue la civilización babilonia, quienes no solo poseían sistemas de numeración con diferente base, sino que contaba con procedimientos abstractos que permitían resolver problemas algebraicos de alto nivel, sin embargo, no contaban con una notación algebraica como la que se utiliza en la actualidad.

Entre las aplicaciones que desarrolló esta civilización se puede identificar un problema enfocado en calcular el tiempo para doblar una cantidad de dinero al interés del 20 por ciento anual, propuesto por los babilonios (2000 a.C. - 600 a.C.), en donde se puede reconocer la aplicación de progresiones geométricas para el cálculo de interés compuesto (Boyer, 2007, p.54).

Uno de los aspectos que destacan entre las aportaciones de esta civilización es el procedimiento que desarrollaban para el cálculo de la raíz, en especial $\sqrt{2}$. Si bien no se puede saber con exactitud cuál fue el procedimiento para calcular la raíz cuadrada, se tiene que los babilonios emplearon un procedimiento muy eficaz para evaluar la raíz cuadrada (Collete,1986, p.28).

> Sea $x = \sqrt{b}$ y sea b_1 una aproximación de esta raíz.
>
> Supongamos que a_1 es otra aproximación, tal que $a_1 = \frac{b}{b_1}$.
>
> Si $b_1$es demasiado pequeño, entonces, evidentemente a_1 es demasiado grande.
>
> Elijamos entonces la media aritmética $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$.
>
> Si $b_2$es demasiado grande, entonces, $a_2 = \frac{b}{b_2}$ será demasiado pequeño.
>
> Luego, será lo suficiente tomar la media aritmética $b_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$.
>
> Este procedimiento se continúa indefinidamente.

Utilizando este procedimiento confirma que ciertamente se puede acercar al valor numérico $\sqrt{2}$, es decir, se supone que $b_1 = 1$ considerando que la raíz de un número es menor al mismo número, a excepción del valor de 1 ya que $\sqrt{1}$ es precisamente 1; por consiguiente, se obtiene lo siguiente:

$$b_1 = 1, a_1 = 2 \quad \rightarrow \quad {b_1}^2 = 1, {a_1}^2 = 4$$

$$b_2 = 1.5, a_2 \approx 1.33 \quad \rightarrow \quad {b_2}^2 = 2.25\,, {a_2}^2 \approx 1.77$$

$$b_3 \approx 1.4166, a_3 \approx 1.4117 \quad \rightarrow \quad {b_3}^2 \approx 2.0069\,, {a_3}^2 \approx 1.9930$$

$$b_4 \approx 1.414215, a_4 \approx 1.414211 \quad \rightarrow \quad {b_4}^2 \approx 2.000006\,, {a_4}^2 \approx 1.999993$$

se observa que los valores b_n y a_n con $n \in \mathbb{N}$, van acotando al valor numérico de $\sqrt{2}$, además de identificar que los valores $b_1, b_2, b_3, \ldots$ pueden ser definidos mediante la relación recursiva siguiente:

$$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2}$$

de tal forma que

$$x_1 = \frac{x_0 + \frac{2}{x_0}}{2} = \frac{1 + \frac{2}{1}}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$x_2 = \frac{x_1 + \frac{2}{x_1}}{2} = \frac{1.5 + \frac{2}{1.5}}{2} \approx \frac{2.8333}{2} \approx 1.4166$$

$$x_3 = \frac{x_2 + \frac{2}{x_2}}{2} \approx \frac{1.4166 + \frac{2}{1.4166}}{2} \approx \frac{2.8284}{2} \approx 1.414215$$

$$x_4 = \frac{x_3 + \frac{2}{x_3}}{2} \approx \frac{1.414215 + \frac{2}{1.414215}}{2} \approx \frac{2.828427}{2} \approx 1.41421356$$

en donde se puede ver que al igual que el procedimiento que seguían los babilonios, aun cuando no contaban con un lenguaje algebraico, desarrollaban procedimientos con un gran nivel de abstracción.

El conocer el procedimiento para calcular la raíz cuadrada de un número proporcionaba un aporte para calcular la longitud de la diagonal de cualquier cuadrado, esto se encuentra en la tablilla babilónica YBC 7289 (Ilustración 1.2), la cual contiene un cuadrado con lados de longitud 30 milímetros y se muestra una aproximación a $\sqrt{2}$ para conocer la longitud de la diagonal de dicho cuadrado.

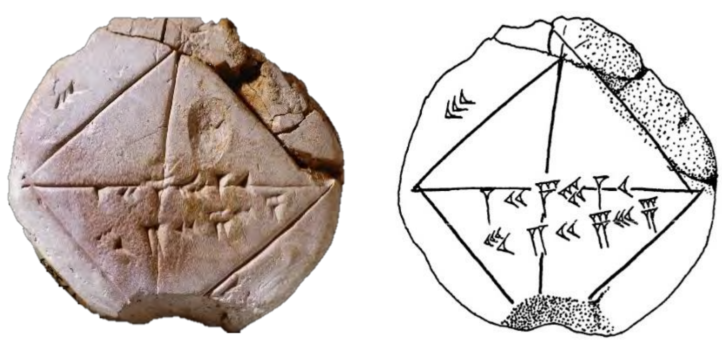


Ilustración 1.2 Tablilla babilónica YBC 7289 y réplica de las anotaciones de la tablilla (Beery & Swetz, 2016)

En la tablilla se puede observar que en la primera línea se hace un acercamiento al valor de $\sqrt{2} \approx 1.4142135623$; a través de los jeroglíficos se pueden observar los valores $1,24,51$ y 10, que de acuerdo a su sistema sexagesimal se puede calcular de la siguiente forma:

$$1; 24.51.10 = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \approx 1 + 0.4 + 0.01416 + 0.00004 \approx 1.41421296$$

Y en la segunda línea se puede observar que este valor es multiplicado por 30, que es la longitud del cuadrado, lo cual hace alusión a la fórmula para calcular la longitud de la diagonal de cualquier cuadrado que se utiliza en la actualidad, de lo que se obtiene lo siguiente:

$$42;25{,}30 = 42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2} \approx 42 + 0.416 + 0.00972 \approx 42.42638$$

$$30\sqrt{2} \approx 42.426406$$

Asimismo, se puede encontrar que esta civilización contaba con los conocimientos necesarios para el estudio de series, como el caso de Neugebauer quien encontró la colección del Louvre (Collete, 1986, p.28), en donde se podía observar las siguientes series:

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^9 = 2^9 + 2^9 - 1$$

y

$$1^1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = \left[1\frac{1}{3} + 10\frac{2}{3}\right]55 = 385$$

A través de estos ejemplos se observan algunas de las aplicaciones que los babilonios realizaron con base en algunas sucesiones y series, aun cuando no hace explicito si ellos contaban con estos conocimientos, se puede encontrar que habían adquirido grandes conocimientos matemáticos.

Egipto

En la antigüedad el uso de sucesiones estaba presente en sus actividades de la vida cotidiana, en donde las matemáticas tomaban una postura de utilidad, su principal finalidad era aportar soluciones a las actividades que desarrollaban en su vida diaria. Si bien los documentos más significativos que se han encontrado de esta civilización son el papiro de Rhind y el papiro de Moscú, que en su mayoría contienen problemas aplicados principalmente del área de geometría, no obstante, se cuentan con problemas respecto al estudio del álgebra.

En la civilización egipcia se puede identificar que contaban con herramientas necesarias para el estudio de progresiones aritméticas y progresiones geométricas, en donde aplicaban procedimientos para hacer repartición de alimentos. Dentro de estos problemas se destacan los problemas número 39, 40 y 64 que hacían referencia a progresiones aritméticas, aun cuando ellos no contaban con las herramientas matemáticas de la actualidad, podían desarrollar los procedimientos complejos que abastecían sus necesidades. Por otra parte, el problema 79 centraba su atención en progresión geométrica.

Problema 40. Distribuir 100 hogazas de pan entre 5 personas, de manera que $\frac{1}{7}$ del total de las tres primeras sea igual al total de las dos últimas. ¿Cuál es la diferencia?

Problema 64. Divide 10 hekat de cebada entre 10 hombres de manera que la diferencia entre cada hombre y el siguiente sea $\frac{1}{8}$ de hekat. ¿Qué parte le corresponde a cada hombre?

De acuerdo al papiro se puede identificar que Amhes seguía un procedimiento que se puede traducir a lo que hoy se conoce para el estudio de sucesiones aritméticas

$$s = (a_1 + a_n)\frac{n}{2} \rightarrow a_n = \frac{s}{n} + (n-1)\frac{d}{2}$$

En donde se presentaban problemas que contaban con un enfoque práctico, si bien se trataban de responder problemas de repartición a través de establecer una regla, se observa que detrás de ello se encontraba la construcción de una sucesión que permitía obtener la respuesta. Por otra parte, el problema 79, se trata de un problema planteado como un acertijo:

Problema 79. Siete casas, 49 gatos, 343 ratones, 2401 espigas de trigo, 16807 medidas de grano.

Grecia

Fue en la época de los griegos cuando las matemáticas comenzaron a tomar un enfoque diferente, dado que ellos construyeron un lenguaje matemático y las acciones que se desarrollaban contaban con cierta formalidad. Los procedimientos y afirmaciones que se realizaban contaban con una mayor fundamentación, pues era necesario demostrar dichos procesos. El estudio de las matemáticas contaba con un nuevo propósito, ya no centraba su atención en la resolución de problemas de la vida cotidiana, sin embargo, se retomaban conocimientos matemáticos que otras civilizaciones ya utilizaban.

Una de las grandes obras que se pueden encontrar es la obra "Elementos" escrita por Euclides, que muestra grandes aportaciones al área de la geometría; no obstante, existen aportaciones que esta civilización realizó a diferentes áreas de la matemática. Dicha obra está compuesta por 13 libros, tres de ellos centrados en la Teoría de números que son los libros 7,8 y 9, de los cuales se destacan proposiciones importantes.

En el Libro 7 se encuentran la definición de números pares, números impares y producto de números pares e impares, así como los números primos y números perfectos, si bien no se hace énfasis en el papel que estos conjuntos de números pueden aportar al estudio de sucesiones por la forma de construir estos números, se reconoce que estas definiciones representan una evolución importante, ya que en la actualidad se definen los números pares y números impares con base en el concepto de múltiplo, definición que se encuentra en dichos libros con un enfoque geométrico.

El Libro 8 se centra principalmente en el estudio de sucesiones de números en proporción continua y que siguen una progresión geométrica, sin embargo, no hace referencia a estas definiciones. Se puede identificar que los griegos contaban con una escritura más avanzada, a través de definiciones y proposiciones que permitieran demostrar estas afirmaciones.

> **Proposición 2**. Hallar tantos números como uno proponga continuamente proporcionales, los menores en una razón dada.

De tal proposición se puede construir una sucesión geométrica, dada una razón**.** Si bien, no se contaba con una definición para sucesión se observa que ciertamente la utilizaban para definir un conjunto de números con una propiedad en común.

Por otra parte, el Libro 9 contiene proposiciones en donde se hace un acercamiento al estudio de series, centrado principalmente en la suma de números pares y la suma de números impares

> **Proposición 21**. Si se suman tantos números pares como se quiera, el total es un número par.

> **Proposición 22**. Si se suman tantos números impares como se quiera y su cantidad es par, el total será par.

> **Proposición 23**. Si se suman tantos números impares como se quiera y su cantidad es impar, también el total será impar.

Si bien no se hace énfasis en la propiedad de orden que conlleva la definición de sucesión, se presta atención en propiedades con las que cumplen la suma de números pares y la suma de números impares. Asimismo, se hace alusión a una sucesión importante dentro del estudio de las matemáticas, en donde se hace referencia al conjunto de números primos:

Proposición 20. Hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos.

Los conocimientos matemáticos que se incorporan en la obra de Euclides concentran grandes aportaciones a las diferentes áreas de las matemáticas, sin embargo, se tienen otras aplicaciones que la civilización griega desarrolló en el estudio de sucesiones de números. Una de las aportaciones más representativas, en el estudio de sucesiones, de la civilización griega fue la construcción de *números figurales*, que era una conexión entre la geometría y la aritmética. Los números se construían a partir de configuraciones geométricas (Ilustración 1.3), recurriendo a figuras como triángulos, cuadrados, pentágonos y hexágonos.

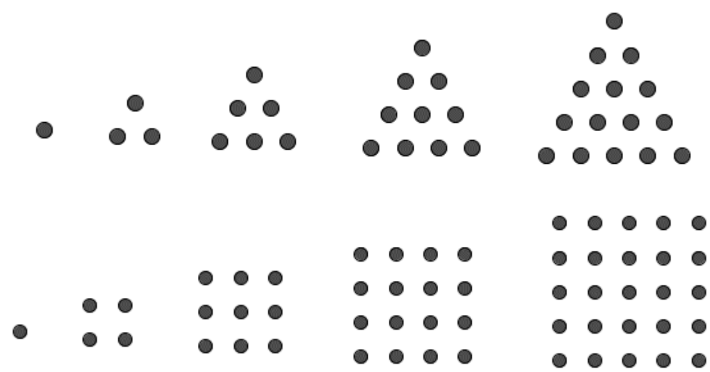


Ilustración 1.3 Números triangulares y números cuadrados

A través de la construcción de estos números se puede identificar la construcción de sucesiones significativas, las cuales permiten conocer propiedades del conjunto de los números naturales como:

- ***Números triangulares*** se puede obtener la sucesión $1,3,6,10,15,\ldots$ que es precisamente la suma de los primeros n naturales: $N = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- ***Números cuadrados*** que representa la sucesión $1,4,9,16,25,\ldots$ y que se obtiene de sumar los primeros n números impares: $N = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$
- ***Números pentagonales*** que representa la sucesión $1,5\,,12,22,35,\ldots$ y se obtienen de la siguiente forma: $N = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$
- ***Números hexagonales*** que representa la sucesión $1,6,15,28\,,45,\ldots$ y se obtienen de la siguiente forma: $N = 1 + 4 + 7 + \cdots + (4n - 3) = 2n^2 - n$

Por otra parte, se puede encontrar dentro de los trabajos de Zenón de Elea (fl. ca. 450 a.C.), los argumentos que presenta para demostrar la inconsistencia de los conceptos que los pitagóricos habían establecido sobre el espacio y tiempo, sin percatarse de una propiedad importante como lo es la continuidad. Por lo cual Zenón propuso cuatro paradojas: 1) la de la *Dicotomía*, 2) la de *Aquiles*, 3) la de la *Flecha*, y 4) la del *Estadio*.

Dicotomía: antes de que un objeto pueda recorrer una distancia dada, debe recorrer en primer lugar la mitad de esta distancia inicial, y antes de recorrer éste deberá recorrer el primer cuarto de la distancia inicial, y antes aun el primer octavo, y así indefinidamente a través de una cantidad infinita de subdivisiones.

De acuerdo a la paradoja de la Dicotomía se observa que para que un objeto pueda recorrer una distancia debe recorrer un número infinito de segmentos en un tiempo finito, en donde su primer segmento está dado por la sucesión $\frac{1}{2^n}$, cuando n tiende a infinito, es decir, que su primer segmento no tiene una longitud.

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \dots$$

- **Aquiles:** se encuentra Aquiles compitiendo en una carrera contra una tortuga a la que se ha dado una ventaja inicial, la paradoja trata de demostrar que a pesar de que tan veloz corra Aquiles, éste no podrá alcanzar a la tortuga. Ya que Aquiles debe llegar primero a donde inicio la tortuga, pero para eso la tortuga ya habrá avanzado una cierta distancia, aunque sea pequeña, y cuando Aquiles haya recorrida esta distancia la tortuga habrá recorrido alguna distancia, así el proceso continuo indefinidamente.

Arquímedes, quien realizó aportaciones al área de la geometría, trabajó en algunas sucesiones y series a partir de cálculos numéricos en su estimación aproximada de la razón de una circunferencia a su diámetro, utilizó polígonos regulares inscritos en una circunferencia (Ilustración 1.4) y calculando el perímetro de estos, comenzando con el hexágono y hasta llegar al polígono de 96 lados, duplicando sucesiva el número de lados del polígono.

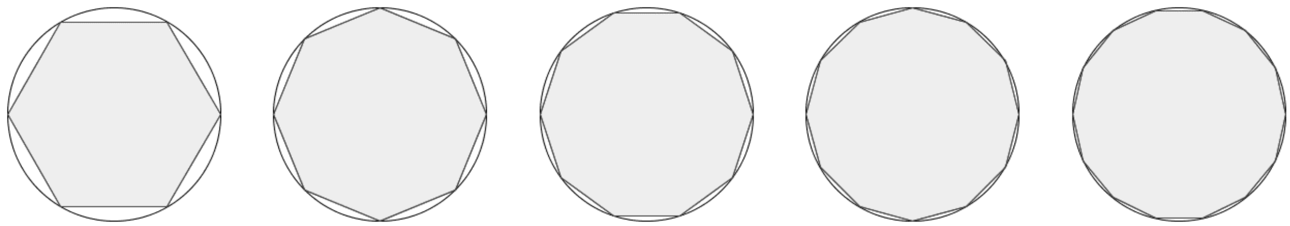


Ilustración 1.4 La medida del círculo

Utilizó el procedimiento conocido como el algoritmo de Arquímedes, en donde construyó una sucesión $P_n, p_n, P_{2n}, p_{2n}, P_{4n}, p_{4n}, \ldots$, donde P_n y p_n son los perímetros del polígono circunscrito e inscrito de n lados, respectivamente. Lo cual permitió encontrar un valor de π mediante la aproximación de polígonos circunscritos en la circunferencia expresada por la desigualdad:

$$3\frac{10}{71}\pi < 3\frac{10}{71}$$

Una de las proposiciones que se encuentra en el libro *Sobre las espirales* de Arquímedes, en donde presenta una demostración de la cuadratura de la parábola, a partir de la suma de una serie infinita de áreas, cada una de ellas cuatro veces mayor que la siguiente.

La cuadratura de la parábola mediante la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{4^n} = A + \frac{A}{4} + \frac{A}{16} + \frac{A}{64} + \cdots = T\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}\right) = \frac{4}{3}A$$

Aun cuando en la época que Arquímedes presentó estos conocimientos matemáticos, no se aceptaban los procesos infinitos, se hace notar que pensaba en procesos en donde era necesario desarrollar procesos muy grandes o indefinidos.

China

Otra de las civilizaciones en donde se identifica el uso de sucesiones y algunas aplicaciones es la civilización china, que contaba con dos sistemas de numeración. Uno de éstos se basa en el principio multiplicativo, mientras que el otro se enfoca en una notación posicional, en donde se observa claramente que el sistema de numeración a base de varillas es representado a partir de una sucesión figural.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨

Y para los nueve primeros múltiplos de diez se tenía la siguiente representación:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

La edad media

Uno de los representantes de esta época es Leonardo de Pisa (1180-1250), a quien se le conoce como Fibonacci, en su obra se encuentran problemas que hace referencia a sucesiones numéricas, especialmente una que se relaciona con el problema número 79 que Ahmes presenta en el papiro de Rhind sobre progresiones geométricas:

> Siete viejas van a Roma; cada vieja tiene siete mulas; cada mula lleva siete sacos; cada saco contiene siete hogazas; con cada hogaza van siete cuchillos, y cada cuchillo lleva siete vainas.

Sin embargo, dentro de sus aportaciones a las matemáticas se encuentra una sucesión numérica muy importante, ya que a través de ella se pueden modelar muchos aspectos de la naturaleza, sucesión que lleva su nombre. Dicha sucesión surge del siguiente cuestionamiento:

> ¿Cuántas parejas de conejos se producirán en un año, comenzando con una pareja única, si cada mes cualquier pareja engendra otra pareja otra pareja, que se reproduce a su vez desde el segundo mes?

de acuerdo a la pregunta se tendría que representando a la pareja de conejos pequeños como x y a la pareja de conejos adultos como X, la crianza sería de la siguiente forma:

<table>
<tr><td>mes</td><td colspan="3"></td><td>Parejas</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="3">x</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="3">$\boldsymbol{X}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">$\boldsymbol{X}$</td><td>x</td><td>2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$\boldsymbol{X}$</td><td>x</td><td>$\boldsymbol{X}$</td><td>3</td></tr>
</table>

5	$\boldsymbol{X}$		x	$\boldsymbol{X}$		$\boldsymbol{X}$		x	5
6	$\boldsymbol{X}$	x	$\boldsymbol{X}$	$\boldsymbol{X}$	x	$\boldsymbol{X}$	x	$\boldsymbol{X}$	8

a través de esto se puede construir la sucesión de Fibonacci $1,1,2,3,5,8,13,\ldots$ la cual se obtiene de sumar los dos términos anteriores de la sucesión y se puede expresar como:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ con } n \geq 3$$

Renacimiento

Dentro de esta época se encuentran algunas aportaciones a conocimientos matemáticos con los que ya se contaban, Diofanto de Alejandría retomó los números figurados para introducir una variante de la cual se obtuvo los *números piramidales* (Ilustración 1.5), que se obtienen apilando en capas los sucesivos números poligonales de un mismo orden.

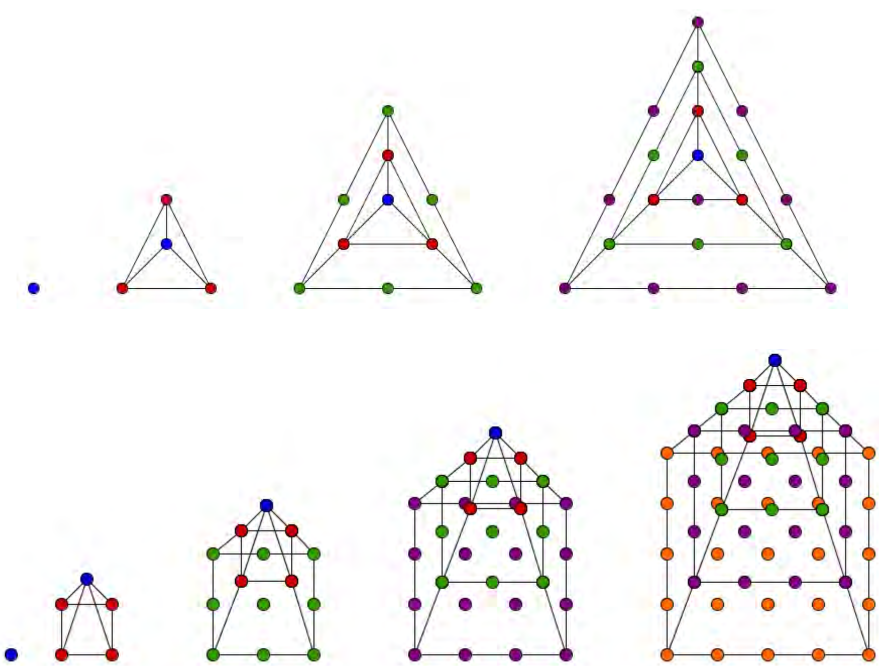


Ilustración 1.5 Números piramidales triangulares y cuadrados

Al igual que los números figurales estos números pueden obtenerse a partir de una sucesión:

- Triangulares: suma de los primeros n números triangulares y se representa por la sucesión $1, 4, 10, 20, 35, \ldots$ y pueden ser definidos por:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{n^3+3n^2+2n}{6}$$

- Cuadrados: suma de los primeros n números cuadrados y se representa por la sucesión $1, 5, 14, 30, 55, \ldots$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

Edad contemporánea

Entre los matemáticos que destacan en esta época, respecto al estudio de sucesiones, se encuentra Pascal (1623-1662), quien relacionó el estudio de probabilidades con el triángulo aritmético, al cual atribuyeron el nombre de Pascal por las propiedades que descubrió:

> En todo triángulo aritmético, si dos celdas son contiguas en la misma base, entonces el número que figura en la superior es al número que figura en la inferior como el número de celdas desde la superior al extremo más alto de dicha base al número de las que van de la inferior hasta el extremo más bajo, ambas inclusive.

1	1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	...	
1	3	6	10	15	...		
1	4	10	20	...			
1	5	15	...				
1	6	...					
1	...						

Ilustración 1. 6 Triángulo de Pascal

Lo que impulsó a Pascal a desarrollar una fórmula que permitiera conocer la suma de las potencias m-enésimas de los n primeros números naturales, haciendo uso del método de razonamiento por recurrencia y el análisis infinitesimal, lo cual equivale a la fórmula del cálculo

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Otro grande matemático que realizó aportaciones, principalmente en el estudio del cálculo fue Isaac Newton (1642-1727), quien a través de series infinitas estableció el teorema binomial, enfocándose en el cálculo de áreas encerradas en curvas cuyas ordenadas eran de la forma $(1-x^2)^n$, con x en el intervalo $[0,x]$.

Otro personaje importante fue Gottfried Leibniz (1646-1716), quien al igual que Newton, se interesó en el estudio de series infinitas, retomando los números figurales y agregando una variante. Leibniz comenzó con un problema que permitió identificar algunas propiedades, en donde era necesario calcular la suma de los inversos de los números triangulares.

Tomó el inverso de los números triangulares y lo descompuso de tal forma que pudiera obtener una suma de fracciones:

$$\frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Al realizar la suma de los

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots$$
$$= 2\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\right)$$

de donde se obtiene que la serie infinita es 2.

A través de su primer resultado, concluyó que podría sumar cualquier serie infinita, lo cual lo llevó a obtener nuevos resultados, entre ellos a establecer una conexión entre el triángulo aritmético o triángulo de Pascal con el triángulo armónico.

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} & \frac{1}{30} & \cdots & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{1}{60} & \cdots & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{20} & \frac{1}{60} & \cdots & & & \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{30} & \cdots & & & & \\
\frac{1}{6} & \cdots & & & & &
\end{array}$$

Ilustración 1.7 Triángulo armónico

En el triángulo armónico (Ilustración 1.7) a excepción de la primera fila y la primera columna, cada término se obtiene calculando la diferencia entre el término que está encima de él y el término que está encima del que se encuentra a su derecha.

Asimismo, Leonhard Euler (1707-1783) presentó grandes aportaciones a diferentes áreas de las matemáticas que van desde la notación que se utiliza en la actualidad, tales como:

- e que representa el número cuyo logaritmo hiperbólico es igual a 1.
- El símbolo para el número π
- i que representa $\sqrt{-1}$

así como algunas sucesiones importantes, de las cuales se destaca:

- $e^x = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i$

Augustin Louis Cauchy (1789-1857) fue pionero en el análisis matemático y la teoría de grupos de permutaciones, contribuyendo de manera medular a su desarrollo. También investigó la convergencia y la divergencia de las series infinitas, ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidad y física matemática. Además, caracterizó el concepto de límite mediante las sucesiones.

De esta manera, se pueden encontrar a grandes matemáticos que aportaron un gran avance en el estudio de sucesiones y series, como lo son Joseph-Louis Lagrange, Joseph Fourier y Carl Friedrich Gauss.

De acuerdo a la evolución del estudio de sucesiones numéricas se identifica que un aspecto importante es su aplicación en las actividades de la vida cotidiana, en donde se puede identificar situaciones que pueden ser modeladas por sucesiones numéricas y que aportan una mayor visualización e interés. Asimismo, se puede identificar que el estudio de los números figurales aporta en la construcción e identificación de patrones que promuevan la reflexión para la construcción de expresiones algebraicas de sucesiones representativas.

Además de mostrar su aplicación en nuestro entorno, la sucesión de Fibonacci genera una gran cantidad de aplicaciones respecto a la naturaleza, contextos que promueven una mayor reflexión sobre las propiedades de esta sucesión. Tomar en cuenta cada uno de los enfoques permite contar con herramientas de apoyo los procesos de enseñanza y aprendizaje de las sucesiones de números.

1.4 Acciones y dificultades en el estudio de sucesiones numéricas

El estudio de sucesiones está íntimamente relacionado con la identificación y obtención de patrones, temática que está presente en la educación básica desde el primer año de primaria, sin embargo, constantemente se encuentran dificultades en los estudiantes. Chalé y Acuña (2013) argumentan para estas dificultades que "el proceso de detección del patrón que subyace a una secuencia a partir del análisis de figuras no es espontáneo" (p. 2).

En ocasiones es difícil para los estudiantes hacer una generalización o identificar el comportamiento del patrón de una sucesión numérica, Cañadas, Castro y Castro (2012) argumentan que "la generalización puede verse como una «generalización de patrones», y esto ha hecho que se considere una de las rutas destacadas para introducir a los estudiantes en el álgebra pero no la única".

Otros autores señalan deficiencias en el pensamiento algebraico de los estudiantes, pues constantemente se presentan problemas con la generalización. Osorio (2012) argumenta que algunas dificultades que los alumnos que están por ingresar en la EMS poseen, están relacionadas principalmente con los procedimientos que se utilizan para hacer la generalización de una sucesión.

Asimismo, se especifica la dificultad por encontrar un patrón en las sucesiones, en ocasiones es difícil poder identificar las propiedades que representan cierto comportamiento y más aún poder construir una generalización, por lo que es necesario fomentar en los estudiantes un razonamiento reflexivo, el cual permita prestar atención en las características que modelan cierto cambio. Una de las reflexiones de Osorio (2012) es el uso de sucesiones figurales las cuales pueden proporcionar una mayor familiaridad con el estudio de patrones, además que los estudiantes puedan reflexionar sobre sus estrategias.

Por otra parte, Ortega (2012) especifica algunas de las dificultades que los estudiantes presentan en el proceso de aprendizaje de sucesiones, entre las cuales se destacan las siguientes:

- Confunden los conceptos de término e índices.
- Obtienen la ley general analizando los primeros términos sin analizar los términos superiores.
- Confunden progresión aritmética y geométrica.
- No son capaces de identificar las sucesiones como un conjunto de elementos que tienen características comunes.

- Confunden la suma de los términos de una progresión con la búsqueda del término general.
- No son capaces de detectar regularidades.
- Es una representación gráfica saben obtener el siguiente término de la representación, pero no el término general de la sucesión.
- No saben contextualizar el problema.
- No saben partir del término general para encontrar la sucesión.
- No siguen el razonamiento para la obtención de la suma de los primeros n términos de una progresión, solo memorizan.
- No saben razonar que las sumas de los términos de una progresión se pueden expresar en función de la diferencia o razón.

De acuerdo a estos puntos y con el objetivo de promover competencias matemáticas Ortega (2012) propone una unidad didáctica, en donde se consideran los conocimientos matemáticos previos con el propósito que los estudiantes construyan sus propios conocimientos y que sea parte del trabajo del profesor dirigir dicho proceso. Como aporte a la diversidad respecto a las diferentes necesidades de los estudiantes propone un conjunto de problemas en cuatro niveles: refuerzo, ampliación y actividades graduadas.

El enfatizar en las posibles dificultades que presentan los procesos de enseñanza y aprendizaje del tema de sucesiones numéricas proporciona una visión de las herramientas que el profesor, como guía de estos procesos, debe de considerar para obtener un mejor desempeño. Además de caracterizar aquellos aspectos en donde es necesario poner mayor énfasis, de acuerdo a los objetivos establecidos.

Además de proporcionar una mayor reflexión sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, especialmente en nuestra área de interés las sucesiones de números; en donde se han identificados diferentes propuestas como Cañadas et al. (2012), Osorio (2012), Olaya (2014), Mateos (2012) quienes resaltan la importancia de contar con diferentes representaciones de una sucesión en los procesos de enseñanza y aprendizaje del tema de sucesiones. Es decir, expresar una sucesión en diferentes sistemas de representación permite a los estudiantes desarrollar e impulsar sus estrategias en la identificación de un patrón, y más aún en una generalización.

Es sustancial destacar que el proceso de generalización puede ser expresado en diferentes sistemas de representación, como argumentan Cañadas et al. (2012), los estudiantes pueden identificar el patrón que sigue una sucesión, lo cual permita generalizar de acuerdo a la siguiente clasificación:

- **Generalización aritmética:** Por ser una de las representaciones más familiares para los estudiantes, es la generalización que la mayoría de los estudiantes logran identificar. Es decir, el uso de números permite destacar e identificar un patrón centrando esto en casos particulares, sin lograr detectar una generalización para cualquier término de una sucesión.
- **Generalización gráfica:** Generalmente este tipo de representación se presenta entre las representaciones de los estudiantes cuando el problema o ejercicio se representaron de esta forma en el planteamiento de la situación problema o sucesión. Puede ser un buen aporte para la identificación de patrones, ya que esto permite visualizar aquellos componentes de la sucesión que permanecen fijos y aquellos que varían respecto a un término y otro.
- **Generalización verbal:** En ocasiones es difícil para los estudiantes lograr una expresión algebraica de una sucesión numérica, sin embargo, a través de sus argumentos y justificaciones pueden expresar verbalmente el comportamiento del patrón, además pueden alcanzar a identificar cualquier término de la sucesión.
- **Generalización algebraica:** Es la representación que presenta una mayor dificultad para los estudiantes, por lo cual pocos seleccionan esta herramienta como estrategia para la identificación de la expresión de una sucesión. Sin embargo, lograr esta generalización es uno de los objetivos en el estudio de sucesiones.

Cada una de las generalizaciones cuenta con ciertas propiedades, sin embargo, esto no significa que los estudiantes no puedan visualizar las propiedades de diferentes representaciones y que esto le proporcione las herramientas necesarias para lograr la generalización a través de diferentes representaciones. Es indispensable reconocer que la clasificación de estos procesos de generalización conlleva una conexión entre sí, es decir, al contar con diferentes representaciones los estudiantes cuentan con herramientas que proporcionan una mayor visión del proceso de generalización.

Si bien una de las características del pensamiento algebraico es lograr una generalización algebraica, el uso de otras representaciones aporta herramientas para el desarrollo de estrategias que permitan identificar el patrón de una sucesión numérica y más aún, el establecer una relación entre los sistemas de representación contribuye al reconocimiento del enésimo término de una sucesión.

Olaya (2014) presenta una propuesta destacando la importancia de promover que los estudiantes cuenten con la habilidad de **ver**, **decir**, **registrar** y **comunicar**, a través de la resolución de problemas, lo cual proporcionará las herramientas necesarias para los procesos de generalización. De esta forma se contribuye a enriquecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, promoviendo el uso de estrategias que permitan la observación, experimentación y verificación de regularidades, lo cual se asegura estimulará en los estudiantes un razonamiento inductivo y la construcción de sus propios conocimientos.

Ver	Describir	Escribir
• Trabajar con casos particulares • Organizar los casos particulares • Identificar el patrón	• Formular conjeturas • Comprobar la conjetura propuesta	• Generalizar • Demostrar la expresión propuesta para generalizar

Ilustración 1.8 Relación entre el método de Cañadas y Castro y la propuesta de Olaya

Asimismo, establece una relación entre el “método de Cañadas y Castro” que establece los pasos que los estudiantes realizan en el proceso de generalización, dentro de los cuales se pueden desarrollar las habilidades con las que cuenta su propuesta (Ilustración 1.8), la cual tiene el propósito de establecer algunas de las estrategias que los estudiantes ponen en práctica en los procesos de generalización, cuando se estudia el tema de sucesiones.

Olaya (2014) desarrolló un material que le permitió identificar algunas de las estrategias que los estudiantes utilizan en el proceso de generalización, en donde se presentaban sucesiones en diferentes representaciones, de las cuales se pueden destacar las siguientes:

- Encontrar los términos faltantes de una sucesión figural para encontrar el valor correspondiente al término que se quiere conocer.
- Construcción de los términos de la sucesión usando tablas de correspondencia.
- Búsqueda de un término de la sucesión usando relaciones aritméticas.
- Búsqueda de un término de la sucesión a partir de la fórmula de recurrencia.

- Encontrar regularidades a partir de casos particulares.
- Utilizar la representación verbal para expresar la generalización de una sucesión.
- Recurrir a casos especiales para comprobar sus conjeturas.

Si bien existen casos en los que se recurre a la representación algebraica, de acuerdo a Olaya (2014) las estrategias que se presentan con mayor frecuencia están enfocadas principalmente en la representación verbal y numérica, las más utilizadas entre los estudiantes, y que en su mayoría no logran una generalización algebraica. De lo que se deducen algunas estrategias propuestas para la implementación del tema de sucesiones.

- El contar con una ilustración de la sucesión proporciona a los estudiantes una estrategia factible para identificar los factores que varían, así como los que permanecen constantes. Con esto se promueve que los estudiantes observen las regularidades de la sucesión y puedan definir el patrón que sigue.
- El uso de tablas permite que los estudiantes clasifiquen la información y puedan trabajar con casos particulares, identificando el patrón y relacionando esto con los términos de la sucesión. Además de hacer énfasis en la importancia del conjunto de los números naturales en el estudio de sucesiones.
- El uso de diferentes representaciones promueve un mayor interés entre los estudiantes, además de proporcionar herramientas, respecto a las estrategias que puede utilizar.

Como parte de su propuesta de Olaya (2014) se integran cuatro categorías:

- **Las situaciones de acción:** que funcionan sobre el ambiente y favorecen el nacimiento de teorías implícitas.
- **Las situaciones de formulación:** que favorecen la adquisición de modelos y lenguajes explícitos.
- **Las situaciones de validación:** en donde se les pide a los estudiantes que den explicaciones sobre las teorías utilizadas y también expliciten los medios que subyacen a los procesos demostrativos.
- **Las situaciones de institucionalización:** cuyo objetivo es establecer o darle un status oficial a los conocimientos que se construyeron durante el desarrollo de las actividades propuestas.

Por su parte, Mateos (2012) presenta algunas propuestas para el proceso de enseñanza de sucesiones numéricas, en donde argumenta la importancia de expresar diferentes representaciones de una sucesión, así como los aspectos importantes del proceso de generalización. Destaca la forma de presentar un problema de sucesiones, en donde el proceso no sea impuesto por las estrategias de alguien más, por lo que establece elementos importantes que deben tomarse en cuenta en el proceso de generalización lineal:

- Una **ilustración o enunciado de contexto** de la sucesión que sirva como un referente de la situación que se está presentando, además de reforzar la visualización, que dé la oportunidad de enfatizar en aquellos aspectos que varían o se mantienen fijos.
- Cuestionamientos con diferentes niveles sobre la sucesión numérica, lo cual oriente la identificación de una regularidad en el estudio de una situación problema:
    - Cuestiones introductorias
    - Cuestiones de generalización próxima
    - Cuestiones de generalización lejana

Asimismo, establece algunas orientaciones didácticas que funjan como apoyo para el profesor, destacando entre ellas:

- El uso de contextos como promotor de estrategias de resolución, promoviendo el uso de diferentes representaciones de una sucesión.
- Impulsar la participación de los estudiantes a través de dibujos y representaciones geométricas, así como el uso de recursos manipulativos.
- Discusión de las diferentes estrategias de resolución.
- Promover la comprobación del dominio de las reglas que se construyan.

De acuerdo a la reflexión de cada una de las investigaciones mencionadas anteriormente, se pueden identificar aquellos aspectos relevantes dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje del tema de sucesiones, promoviendo un interés por aportar en la actuación de los profesores de matemática de bachillerato.

Capítulo 2 Problemática, justificación y objetivos

La problemática que se aborda está situada en el nivel medio superior, pues es uno de los pilares que componen la educación, además de ser el vínculo entre la educación básica y la educación superior. Se trata del nivel educativo en donde se concentra la mayor demanda, justamente el Sistema Educativo Nacional (ciclo escolar 2013-2014) presentó que 4.6 millones de estudiantes de la matrícula total forman parte de la EMS (incluida la modalidad mixta), lo que equivale al 13.1% de la población escolar; además se considera que este nivel educativo contará con un mayor crecimiento, debido a que en este periodo el 72.6% está centrada en la Educación básica.

Como se mencionó anteriormente, existen diferentes subsistemas que componen la EMS en México, incorporados al SNB, de los cuales el bachillerato general ocupa 61.9% y el bachillerato tecnológico ocupa el 29.9%, el resto lo ocupa el bachillerato general con capacitación para el trabajo: Profesional Técnico Bachiller (CONALEP) con 6.5% y Profesional Técnico con 1.7%, por lo cual se hace énfasis en el bachillerato general por conformar uno de los subsistemas que contempla un porcentaje importante en la EMS.

Una de las características que conforma el perfil del docente, establecido por el SNB, es el apoyo de la formación de los estudiantes con base en diferentes ambientes, ir más allá de las prácticas tradicionales. En el Acuerdo Secretarial 447, se establece:

> Que el trabajo de los docentes, a partir de un enfoque basado en competencias, permitirá que los estudiantes adquieran las competencias que son parte del Marco Curricular Común que da sustento al SNB, eje en torno al cual se lleva a cabo la Reforma Integral de la EMS (SEMS, 2008).

Todo profesor, sin importar el campo en el que se desempeñe, debe contar con las herramientas y aptitudes para lograr establecer una buena relación entre sus prácticas docentes y los objetivos plasmados en la RIEMS. Esto con la finalidad de mejorar la calidad de la EMS, tomando en cuenta las características que se especifican en los programas de estudio de la DGB, los cuales tienen el propósito de fortalecer y consolidar la identidad de la EMS.

Una de las características que representa a la EMS es la formación de los profesores que imparten educación en este nivel, pues al contrario de la Educación Básica, no cuentan con una formación propia. Como lo instituye el Profesiograma establecido por la DGB:

> Los docentes de todas de las asignaturas del Bachillerato General de los tres componentes de formación (Básico, Propedéutico y Profesional) deben contar con título profesional de **licenciatura, de técnico superior universitario y de posgrado**, que acredite la formación afín a la asignatura que impartirá (2014, p. 4).

Por la naturaleza del presente proyecto, que está situado en el área de Matemática Educativa, se debe centrar el interés en el campo de la matemática, cuyo estudio, de acuerdo a los programas correspondientes deben proporcionar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes. Los mencionados programas de estudio de Matemáticas, especifican las características que deben de considerarse para un buen desarrollo de conocimientos y competencias, también se integran actividades de enseñanza y aprendizaje, que son propuestas como apoyo para los docentes.

En el caso del Estado de Sonora, si se habla de instituciones educativas relevantes en el nivel medio superior, una de las más representativas es el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, (COBACH), que cuenta con una población de 26,438 estudiantes y 7,040 estudiantes de escuelas incorporadas. Lo que representa un 70.5% de los estudiantes de Bachillerato General del Estado, de acuerdo a los datos del ciclo 2013-2014 que presenta el Sistema Educativo Nacional.

En el marco de la RIEMS, COBACH ha integrado módulos de aprendizaje atendiendo a los programas de estudio establecido por la DGB, con el propósito de fomentar en los estudiantes nuevas estrategias de aprendizaje, basados en la resolución de problemas. De acuerdo con los autores del Módulo de aprendizaje “Matemáticas 1”, éste está diseñado con la visión siguiente:

> Esta visión se centra en la resolución de problemas como estrategia para aprender, dejando atrás el aprendizaje memorístico. Es muy importante entonces que en este módulo trabajes atendiendo a las indicaciones del mismo y de tu profesora o profesor, trabajando en ocasiones de forma individual, en otras en pequeños equipos y en otras en discusiones grupales (Vargas et al., 2014).

No es suficiente contar con nuevos módulos para garantizar el aprendizaje en los estudiantes, pues es necesario hacer un uso adecuado de ellos. El profesor de matemáticas debe “conocer y ser capaz de aplicar las prácticas operativas y discursivas, necesarias para resolver los problemas” (Godino et al., 2012). Además de contar con los conocimientos y capacidades para trabajar con los objetos matemáticos intervinientes y emergentes que se presentan en cada situación.

El módulo de Matemáticas 1 está diseñado por bloques, cada uno de los cuales está formado por un conjunto de secuencias didácticas, las cuales cuentan con objetivos específicos; no obstante, es indispensable dirigir correctamente las actividades de estas secuencias para lograr los objetivos establecidos. Sin embargo, no se cuenta con algún material de apoyo para los profesores, en donde se especifiquen los objetivos de las actividades contenidas en el módulo.

Para el caso de la Educación Básica de México con el desarrollo de los nuevos planes y programas de estudio, se elaboraron guías para el maestro correspondientes a cada uno de los grados que se cursan en dicho nivel educativo, las cuales "se constituyen como un referente que permite apoyar su práctica en el aula, que motiva la esencia del ser docente por su creatividad y búsqueda de alternativas situadas en el aprendizaje de sus estudiantes" (SEP, 2011a, p.8). Por lo cual, sería recomendable que el profesor de bachillerato contara con una guía, orientada a lo que establece la DGB para el programa Matemáticas I, con el objetivo de desarrollar tanto las competencias como los conocimientos matemáticos que el estudiante de primer semestre debe de tener.

En busca de elementos para justificar la importancia del proyecto de intervención, se entrevistó a autoridades académicas del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, para conocer información sobre el estado de la institución respecto al proceso de implementación de la RIEMS. Dentro de los aspectos que se destacaron fue el interés por contribuir con apoyo para los profesores; en este sentido, además del programa PROFORDEMS, se realizó la actualización de los módulos de aprendizaje del COBACH, basados en los programas de matemáticas que establece la DGB y en un enfoque en competencias, que funcionen como cuadernos de trabajo o guías de aprendizaje. Sin embargo, algunos profesores manifiestan cierto rechazo hacia los módulos, debido a que este enfoque puede resultar complicado; por lo que se pretende implementar una guía dirigida hacia los profesores, en donde se integren diferentes características con las que cuentan los módulos.

De acuerdo a los puntos anteriormente se considera indispensable proporcionar a los profesores un apoyo para lograr implementar de forma adecuada lo que establece la RIEMS y el enfoque por competencias por el cual fueron diseñados los módulos de aprendizaje de COBACH, pues no es solo la introducción de dichos módulos, sino también contar con herramientas que permitan desarrollar lo que se establece en ella; tal como sucede en la educación básica, como se mencionó anteriormente, es un nivel educativo en donde se cuentan con guía para los profesores.

Las actividades de aprendizaje y enseñanza que proporciona el programa de estudio, forman una base para la construcción de una guía para el profesor, pues es necesario seguir los lineamientos contenidos en el programa, así como los lineamientos que conforman la RIEMS.

Se pretende mostrar al profesor una herramienta de apoyo, principalmente para el Bloque 3 del módulo Matemáticas 1: Realiza sumas y sucesiones de números, en donde se comienza el estudio de sucesiones como desarrollo del pensamiento algebraico; un tema de suma importancia en el currículo escolar en la Educación Básica, así como en la EMS y en la Educación Superior.

El proyecto de intervención estará dirigido principalmente a los profesores del subsistema del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora (COBACH), en donde se cuenta con módulos de aprendizaje para cada uno de los cursos de matemáticas. Se plantea como objetivo general del proyecto el siguiente:

Objetivo general:

> Diseñar una guía de apoyo para la actividad docente en el bachillerato, centrada en el tema "Sumas y Sucesiones de números".

Objetivos específicos:

- Identificar y destacar los propósitos con los que cuenta cada una de las actividades que integran las secuencias didácticas respecto al tema de sucesiones y series del módulo de aprendizaje.
- Proporcionar estrategias para el docente, que permitan orientar el desempeño de los estudiantes, con respecto a los significados y objetos matemáticos contenidos en las secuencias didácticas de interés.
- Integrar recursos tecnológicos a través de un software de geometría dinámica, que funjan como apoyo para las prácticas docentes en el tema señalado.
- Proporcionar actividades complementarias como apoyo a las secuencias didácticas mencionadas.

Capítulo 3 Fundamentos teóricos y metodológicos

Para fundamentar el proyecto de intervención se recurren a elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), el cual aporta herramientas para el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Dicho enfoque pone especial atención en los objetos matemáticos involucrados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y la forma en que dichos objetos se relacionan con respecto a un conocimiento particular.

Con la intención de lograr la articulación de diferentes teorías de la matemática educativa se constituye el marco teórico EOS, en donde se integran nociones que permiten fundamentar teóricamente los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por esta razón para el proceso de estudio de un conocimiento matemático, el marco teórico EOS clasifica sus nociones teóricas en cinco grupos: sistemas de prácticas, configuración de objetos y procesos matemáticos, configuración didáctica, dimensión normativa e idoneidad didáctica (Godino, 2012).

Una de las herramientas que sustenta el proyecto son las facetas de idoneidad didáctica que instituye el EOS, a través del cual se realizó el análisis y valoración a priori de la idoneidad didáctica del bloque referente al tema "Sumas y sucesiones de números", con la intención de identificar las dimensiones en las cuales es necesario contar apoyo o retroalimentación. Por lo cual se toma como referencia los criterios de idoneidad didáctica para las seis dimensiones (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica) que componen el proceso de instrucción matemática, para recabar información sobre la estructura y organización del diseño del módulo de aprendizaje.

Además, con base en la idoneidad interaccional, se puso especial énfasis en las configuraciones y trayectorias didácticas epistémica y docente, para identificar los objetos matemáticos que integran nuestro significado institucional de referencia y pretendido, así como las funciones que los profesores deben desarrollar para implementar dichos significados.

Para integrar fundamentos que apoyaran las configuraciones y trayectorias didácticas, para la faceta epistémica se identificó la relación que existe entre el programa de estudio Matemáticas 1 que establece la DGB y lo que la institución de COBACH está implementando para el tema de series y sucesiones, esto permitió conocer los objetos matemáticos que intervienen en el proceso de instrucción matemática, así como la relación que existe entre ellos. Por otro lado, se consideró el Acuerdo Secretarial 447 y el perfil que la DGB establece para los docentes que impartan EMS en su modalidad escolarizada y las funciones docentes que EOS aporta para la práctica que el profesor de matemáticas; estableciendo una relación de las funciones del profesor de matemáticas con las competencias docentes que éste debe desempeñar, para definir la configuración docente.

Asimismo, con base en la revisión bibliográfica sobre investigaciones en torno al contenido matemático "sucesiones de números" sobre las dificultades de los estudiantes y las aportaciones que se han hecho al respecto, se incorporaron algunas orientaciones didácticas y actividades apropiadas que funjan como base para las acciones que el profesor debe desarrollar. Además de incorporar la herramienta tecnológica GeoGebra como herramienta de apoyo para los profesores, en especial para el diseño de Applets respecto a las actividades que integran el módulo.

En el diagrama de la Ilustración 4.1, se presenta de manera sintetizada las herramientas teóricas y su relación con las acciones metodológicas que están involucradas en nuestro proyecto de intervención.

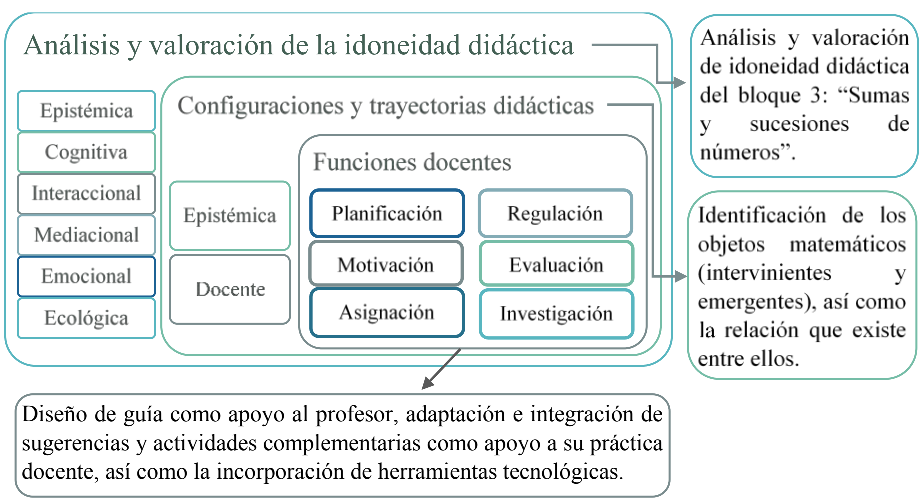


Ilustración 4.1 Herramientas teóricas y acciones metodológicas

Como producto final se diseñó una estructura para la guía, además de integrar sugerencias como apoyo a la implementación del bloque 3 "Sumas y sucesiones de números", en donde se presentan diferentes opciones con respecto al enfoque y los propósitos contenidos en el módulo; asimismo se considera el diseño de algunas actividades complementarias con apoyo de la herramienta tecnológica GeoGebra.

Esto permitió llevar a cabo una revisión del módulo de aprendizaje con profesores que imparten la asignatura de Matemáticas 1 en COBACH, enfocada principalmente en la interpretación de dichos profesores respecto a una de las actividades del bloque referente a sucesiones de números, en donde se obtuvo información sobre el papel que juegan los elementos que incorpora el módulo en sus prácticas docentes, así como la interpretación de éstos. Además de conocer, a partir de su práctica discursiva, la forma que llevan a cabo dicha actividad, destacando algunas sugerencias y dificultades que se presentan en la implementación del módulo.

3.1 Nociones básicas del marco teórico

Como parte del proyecto se utilizan diferentes herramientas teóricas, como se mencionó anteriormente; no obstante, es necesario establecer la relación que existe entre estas herramientas y algunas nociones teóricas que el marco teórico EOS instituye, como el sistema de prácticas y la noción de significado que representan una parte importante en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de un conocimiento matemático.

Por lo que es importante resaltar e identificar las nociones básicas que sustentan el proyecto, para identificar estas nociones se llevó a cabo una revisión de los documentos base (Módulo, programa y acuerdo secretarial) para ilustrar como se constituye el marco teórico en este proyecto.

3.1.1 Sistema de prácticas

Una de las nociones que proporciona el EOS es *práctica matemática* la cual se define como "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino, Batanero y Font, 2009, p.4).

Cuando se propone el estudio de un contenido matemático, se integran una serie de acciones que permiten desarrollar dicho conocimiento, por lo cual es indispensable integrar un sistema de prácticas (operativo o discursivo) satisfactorio. Para lograr que un sistema de prácticas sea adecuado se debe crear una articulación entre los diferentes objetos matemáticos intervinientes en un sistema de práctica lo cual permitirá construir un significado adecuado.

El marco teórico EOS instituye una clasificación que permite establecer los objetos matemáticos primarios (Godino et al., 2009), dichos elementos son indispensables en la instrucción matemática, dentro de esta clasificación se encuentran los siguientes objetos matemáticos:

- *Elementos lingüísticos* (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...)
- *Situaciones – problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios, ...)
- *Conceptos- definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, ...)
- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos, ...)
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, ...)
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, ...).

El uso adecuado de estos objetos matemáticos, así como su articulación, proporciona una mayor satisfacción en la actividad matemática, lo cual admitirá la formación de configuraciones de objetos intervinientes y emergentes. Sin embargo, estos objetos no son los únicos elementos que integran la instrucción matemática, sino una parte de ella.

3.1.1.1 Significado

Los significados forman parte indispensable en los sistemas de práctica, ya que es necesario contar con un significado adecuado respecto a un conocimiento matemático, por lo cual el marco teórico proporciona dos tipologías de significados: institucionales y personales.

En el caso de los significados institucionales se cuenta con cuatro tipos, de acuerdo a Godino et al. (2009, p.5) se categorizan de la siguiente forma:

- *Implementado*: en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
- *Evaluado*: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.
- *Pretendido*: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
- *Referencial*: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido.

para el caso de los significados personales Godino et al. (2009, p.5) cuenta la siguiente clasificación:

- *Global*: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático.

- *Declarado*: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
- *Logrado*: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los *significados iniciales* o previos de los estudiantes y los que *finalmente alcancen*.

Si bien el EOS propone una tipología para los significados institucionales y significados personales, nuestro propósito es establecer un *significado institucional referencial* y un *significado institucional pretendido*. Como parte de la clasificación de los tipos de significados institucionales que propone el EOS, se expone la relación entre estas nociones y los significados que se usaran para el caso particular del estudio de sumas y sucesiones de números en el Colegio de Bachilleres (Ilustración 4.2).

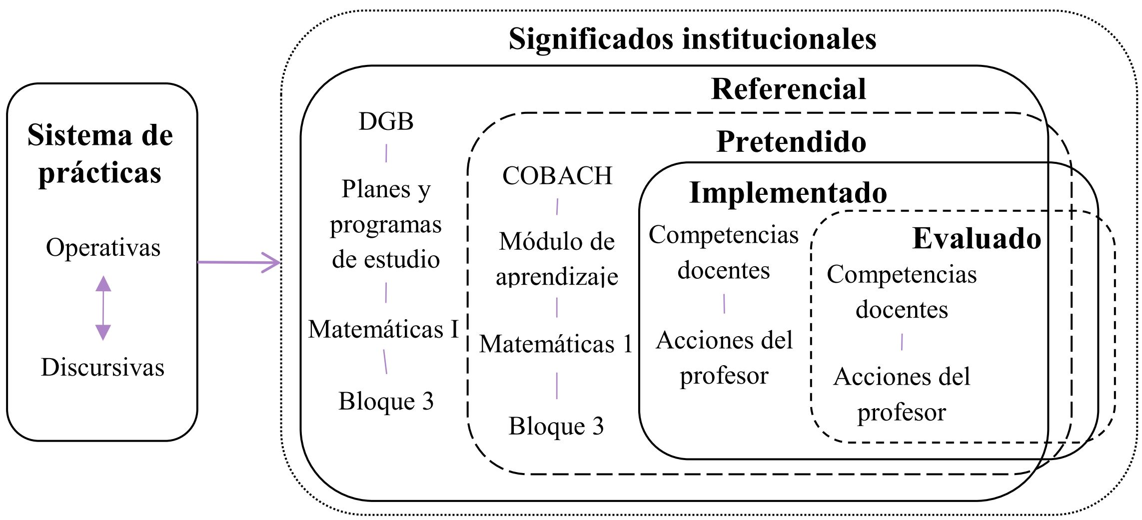


Ilustración 4.2 Tipos de significados institucionales aplicados al proyecto

El estudio de los significados institucionales de referencia y pretendido, permite crear una relación entre lo que establece la DGB y lo que la institución de COBACH está implementando, por esta razón se toma como instrumentos base el programa de estudio Matemáticas I que establece la DGB y el módulo de aprendizaje que COBACH ha proporcionado como nueva herramienta para el aprendizaje de los estudiantes.

Significado institucional referencial

El significado institucional referencial está definido por los programas de estudios que instituye la DGB, en donde se especifican los desempeños de los estudiantes y los objetos matemáticos que deben alcanzar para cada uno de los bloques que integran el programa de cada asignatura. Se pone especial énfasis en el programa Matemáticas I, específicamente en el Bloque III el cual tiene como nombre "Realiza sumas y sucesiones de números", dentro de los desempeños para el estudiante se establecen los siguientes:

- Identifica y diferencia las series y sucesiones numéricas y así como sus propiedades.
- Clasifica las sucesiones numéricas en aritméticas y geométricas.
- Determina patrones de series y sucesiones aritméticas y geométricas.
- Construye gráficas para establecer el comportamiento de sucesiones aritméticas y geométricas.
- Emplea la calculadora para la verificación de resultado en los cálculos de obtención de términos de las sucesiones.
- Realiza cálculos obteniendo el enésimo término y el valor de cualquier término en una sucesión aritmética y geométrica tanto finita como infinita mediante las fórmulas correspondientes.
- Soluciona problemas aritméticos y algebraicos usando series y sucesiones aritméticas y geométricas.

De acuerdo a dichos desempeños, así como las competencias que los estudiantes deben desarrollar, se proporcionan algunas fuentes de consulta a partir de las cuales se construye el significado referencial:

1. Leithold, L. (1994). Álgebra y trigonometría con geometría análitica. México: Harla.
2. Fleming, W., & Varberg, D. (1991). Álgebra y trigonometría con geometría análitica. México: Prentice-Hall.

De acuerdo a estas fuentes se identificaron los conceptos que integran el significado referencial, y que además permitieron articular los objetos matemáticos que instituye el módulo de aprendizaje con lo que establece la DGB. En primer instante se ubican los conceptos de sucesión y serie, así como su notación.

Leithold (1994, pp.679-684)	Fleming & Varberg (1991, p. 560)
Las ***sucesiones*** (o secuencias) de números son muy frecuentes en las matemáticas. Por ejemplo, los números $$2,4,6,8,10$$ forman una sucesión. A esta secuencia se le llama *finita,* pues tiene un número último o final. Si un conjunto de números de una sucesión no tiene un número final, se dice que la sucesión es *infinita*. Por ejemplo, $$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$ es una sucesión infinita. El primer elemento de una sucesión se denota por a_1; el segundo, por a_2; el tercero a_3; y así sucesivamente. El *n*-ésimo elemento es a_n, al que se llama *elemento general* de la sucesión. La suma de los elementos de una sucesión es una ***serie***.	Una ***sucesión numérica*** es una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos. Notación para las sucesiones numéricas $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ El subíndice indica la posición del término en la sucesión. En relación a una sucesión $a_1, a_2, a_3, \dots$, se introduce otra sucesión A_n llamada la suma de la sucesión por $$A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Tabla 4.1 Conceptos del significado de referencia

También es necesario identificar los diferentes tipos de sucesiones que existen, es decir, conocer las características de las sucesiones aritméticas y las sucesiones geométricas, para esto se examinaron los conceptos de los tipos de sucesión que forman parte del significado de referencia.

Leithold (1994, pp.695-705)	
Una ***sucesión aritmética*** es una sucesión en la que cualquier elemento excepto el primero, puede obtenerse sumando una constante al elemento anterior. A las sucesiones aritméticas se las llama también *progresiones aritméticas*.	Una ***sucesión geométrica*** es una sucesión en la que cualquier elemento después del primero, se obtiene multiplicando el elemento procedente por una constante. A las sucesiones geométricas también se las llama progresiones geométricas.

El termino constante que se suma en una sucesión aritmética recibe el nombre de diferencia común y se denota por d. La definición de una sucesión aritmética puede enunciarse simbólicamente expresando el valor del primer elemento a_1, el número de elementos N y la fórmula $$a_n = a_{n-1} + d$$ con la cual puede evaluarse cualquier elemento después del primero, a partir del elemento precedente. A esta fórmula se la llama fórmula de recurrencia. El N-ésimo elemento de una sucesión aritmética está dado por $$a_N = a_1 + (N-1)d$$	El multiplicador constante de una sucesión geométrica se llama razón común (o cociente común) y se denota por r. Una sucesión geométrica puede definirse indicando los valores a_1 y N, y una fórmula de recurrencia, $$a_{n+1} = a_n r$$ con la cual es posible determinar todos los elementos después del primer, a partir del elemento anterior. El N-ésimo elemento de una sucesión aritmética está dado por $$a_N = a_1 r^{N-1}$$
Fleming & Varberg (1991, pp. 568-578)	
Se llama ***sucesiones aritméticas*** si se denota a tal sucesión por $a_1, a_2, a_3, \ldots$ y satisface la fórmula recursiva $$a_n = a_{n-1} + d$$ donde d es un número fijo llamado la diferencia común. Obsérvese que el número de las d que deben sumarse con a_1 es una menos que el subíndice. Esto significa que $$a_n = a_1 + (n-1)d$$	Se llama ***sucesión geometría*** si se denota a tal sucesión por $a_1, a_2, a_3, \ldots$ y satisface la fórmula recursiva $$a_n = r a_{n-1}$$ donde r es un número fijo llamado razón común. En cada caso el exponente en r es uno menor que el subíndice en a. Así $$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Tabla 4.2 Conceptos del significado de referencia

Como parte de la construcción del significado institucional de referencia, se identificaron los objetos matemáticos intervinientes en el estudio de sucesiones, de los textos establecidos por el programa de Matemáticas I *(*Tabla 4. 3).

	Leithold (1994, pp.678-716)	Fleming & Varberg (1991)
Lenguajes	• Natural • Numérico • Algebraico	• Natural • Numérico • Tabular • Algebraico • Figural • Gráfico
Situaciones-problema	• Enfoque intramatemático • Sucesiones definidas de acuerdo a una función • Sucesiones iguales con una función sucesión diferente • Sucesiones numéricas • Ventas de inmuebles (ofertas y pagos) • Población (Crecimiento) • Ejercicios: Construcción de pirámides con diferentes productos, Construcción (gastos).	• Enfoque intramatemático • Sucesiones de acuerdo a una fórmula • Sucesiones particulares (Bernouilli, números: cuadrados, triangulares y pentagonales) • Escalones (altura) • Historias: Carl Gauss, rey de Persia (tablero de ajedrez), paradojas de Zenón. • Cultivo de bacterias (crecimiento poblacional) • Rebote de una pelota (altura) • Ejercicios: Peldaños de una escalera (medida), reloj, construcción de pirámides con diferentes productos.

Conceptos	• Sucesión numérica (aritmética, geométrica) • Número (real, par e impar) • Conjunto (finito, infinito) • Elemento • Función • Dominio • Orden • Razón • Serie (aritmética, geométrica)	• Sucesión numérica (aritmética, geométrica) • Patrón • Número • Suma de sucesiones • Función (línea, exponencial) • Dominio • Razón • Longitud
Proposiciones	• Notación de sumatoria (Ecuación) • N-ésimo elemento de una sucesión (aritmética, geométrica)	• Formula recursiva de una sucesión (aritmética, geométrica) • n-ésimo elemento de una sucesión (aritmética, geométrica)
Procedimientos	• Suma • Multiplicación • Identificación de elementos de una sucesión • Sumatoria de números enteros positivos (pares e impares)	• Suma • Multiplicación • Demostración • Identificación de términos de una sucesión
Argumentos	• Suma de los elementos de una sucesión • Notación • Generalización de una sucesión • Identificación entre progresión aritmética o progresión geométrica	• Notación • Relación entre una sucesión aritmética y una función lineal • Desventajas de una fórmula recursiva

Tabla 4. 3 Objetos matemáticos de los textos consultados.

También se establecen algunas fuentes de consulta electrónicas en donde se presentan nociones referentes al tema de sucesiones:

1. Pierce, R. (5 de octubre de 2011). *Disfruta las matemáticas*. Recuperado el 18 de Agosto de 2015, de http://www.disfrutalasmatematicas.com/algebra/sucesiones-series.html
2. Ayón, M., & Maldonado, T. (s.f.). *Xictli.* Recuperado el 18 de agosto de 2015, de Revista Oficial de la Unidad 094 D.F: http://www.unidad094.upn.mx/revista/54/03.html

De acuerdo a estas fuentes se pueden identificar los conceptos que al igual que los textos anteriores forman parte del significado de referencia, en donde se pueden observar los conceptos que se toman en cuenta en el estudio de sucesiones.

Pierce, R (2011)	Ayón y Maldonado
Una ***sucesión*** es un conjunto de cosas (normalmente números) una detrás de otra, en un cierto orden. Si la sucesión sigue para siempre, es una sucesión *infinita*, si no es una sucesión *finita*. Una sucesión es muy parecida a un conjunto, pero con los términos en orden (y el mismo valor sí puede aparecer muchas veces) $\{3,5,7,9,\dots\}$, es una ***sucesión aritmética*** (o progresión aritmética), porque la *diferencia* entre un término y el siguiente es una constante. En una ***sucesión geométrica*** cada término se calcula multiplicando el anterior por un número fijo.	Una ***sucesión*** es un conjunto ordenado de números u objetos formado de acuerdo con una ley. Cada elemento de ella se denomina *término*. Se dice que una sucesión es *finita* si hay un primer y un último término y se dice que es *infinita* si no tiene un primer o un último término. Una ***progresión aritmética*** es una serie de números en donde cada número difiere del número anterior en una cantidad fija llamada *diferencia común.* Una ***progresión geométrica*** es una serie de números llamados *términos* en donde cada uno de ellos equivale al número anterior multiplicado por una constante denominada *razón*.

Tabla 4.4 Conceptos de fuentes electrónicas

En cada una de las fuentes se proporciona un conjunto de ejemplos con los cuales se ilustran los conceptos y proposiciones que se están definiendo, además de identificar algunas sucesiones representativas como lo son los números figurales.

De acuerdo a los diferentes conceptos de sucesiones contenidos en el significado de referencia, se pueden observar dos definiciones de sucesiones, una enfocada en un conjunto ordenado y solo en un caso se define sucesión como una función. Sin embargo, se destaca la definición de una sucesión numérica a partir de un conjunto de números ordenados que cumplen con una regla.

Además de proporcionar información para el estudio de los tipos de sucesiones: aritméticas y geométricas; y las propiedades de cada una de estas sucesiones. También se incorporan las diferentes representaciones de una sucesión, y algunas aplicaciones de la vida real que pueden ser modelados con sucesiones numéricas.

Significado institucional pretendido

El significado institucional pretendido está compuesto por los sistemas de prácticas promovidos en el módulo Matemáticas 1 de COBACH, ya que éste forma parte del documento base para el diseño de la guía. Por esta razón se considera importante establecer los significados que integran dicho módulo, enfatizando en el Bloque 3: “Sumas y sucesiones de números”.

Dentro de los conceptos que COBACH instituye en su módulo de aprendizaje para el bloque de interés (Vargas et al., 2014), se encuentran los siguientes:

- ***Número múltiplo*:** un número entero m es múltiplo de otro número entero n si m se puede expresar como la multiplicación de n por un número entero.
- ***Número par y número impar*:** un número entero se dice que es par, si es divisible por 2 o múltiplo de 2; en cualquier otro caso se dice que es impar. Los enteros pares son, por lo tanto: $\{..., -12, -10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\}$
  Y los enteros impares son: $\{..., -11, -9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...\}$
- ***Sucesión*:** una sucesión es una colección ordenada de números que se construyen a partir de una regla dada. Esta regla puede darse mediante una expresión algebraica que se evalúa ordenadamente en los números naturales $1, 2, 3$ ...
- ***Sucesión aritmética*:** las sucesiones o progresiones aritméticas son aquellas en las que la diferencia entre dos términos consecutivos es una constante (k), y se pueden representar de la siguiente manera: $a, a + k, a + 2k, a + 3k, \dots, a + (n - 1)k$

- ***Sucesión geométrica*:** las sucesiones o progresiones geométricas son aquellas en las que el cociente de dos términos consecutivos es una constante (r), y se pueden representar de la siguiente manera: $a, a(r), a(r^2),\ a(r^3), \dots, a(r^{n-1}), \dots$
- ***Serie aritmética y serie geométrica*:** a la suma de los términos de una sucesión aritmética se le llama serie aritmética, y por lo regular se representa de la siguiente manera $S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ donde es un número natural, cuando es finita la sucesión, y $S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$, cuando la sucesión es infinita.
  Esta definición también es válida para las series geométricas, en cuyo caso los que se suman son los términos de una sucesión geométrica.

Sin embargo, el significado institucional pretendido no está definido únicamente por los conceptos que integran dicho bloque, sino por el papel que juegan en conjunto los objetos matemáticos y su integración. Es importante identificar los objetos matemáticos intervinientes y emergentes que forman parte de las secuencias didácticas que integran el bloque 3, en la Tabla 4.5 se ilustra cómo están presentes dichos objetos.

<table>
<tr><td colspan="4">Lenguajes</td></tr>
<tr><td colspan="2">Secuencia didáctica 1</td><td colspan="2">Secuencia didáctica 2</td></tr>
<tr><td colspan="2">• Natural
• Numérico
• Tabular
• Algebraico</td><td colspan="2">• Natural
• Numérico
• Tabular
• Figural
• Algebraico</td></tr>
<tr><td colspan="4">Conceptos</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Intervinientes</td><td>Emergentes</td></tr>
<tr><td>Secuencia didáctica 1</td><td colspan="2">• Números reales
• Números entero
• Números naturales
• Números consecutivos
• Conjuntos
• Expresión algebraica
• Múltiplo, divisor y factor</td><td>• Número par
• Número impar</td></tr>
</table>

Secuencia didáctica 2	• Números naturales • Sucesión numérica • Términos de una sucesión • Números ordinales • Expresión algebraica • Constante • Cociente	• Sucesión aritmética • Sucesión geométrica • Enésimo término • Serie aritmética • Serie geométrica
Proposiciones		
	Intervinientes	Emergentes
Secuencia didáctica 1	• División de números enteros • Representación de los números pares $2n \; \forall \; n \in \mathbb{Z}$ • Representación de los números pares $2n - 1 \; \forall \; n \in \mathbb{Z}$	• Cuando un número es par o impar • Generalización del producto de números pares (expresión algebraica) • Generalización del producto de números impares (expresión algebraica) • Producto de números pares • Producto de números impares • Propiedades de los números enteros
Secuencia didáctica 2	• Representación de una sucesión	• Representación de sucesión aritmética • Representación de sucesión geométrica • Representación de una serie aritmética
Procedimientos		
	Intervinientes	Emergentes
Secuencia didáctica 1	• Multiplicación • División • Producto de números pares consecutivos • Suma • Análisis y manejo de información en tablas	• Multiplicación de números consecutivos (pares e impares) • Producto de números impares consecutivos • Uso de la calculadora • Suma de números enteros

Secuencia didáctica 2	• Suma • Multiplicación • Orden de números • Comportamiento de una sucesión • Análisis y manejo de información en tablas	• Identificación del patrón de una sucesión • Identificación de sucesión aritmética o sucesión geométrica • Expresión del enésimo término de una sucesión • Suma de los elementos de una sucesión • Identificación de una sucesión respecto a una

Argumentos	
Secuencia didáctica 1	Secuencia didáctica 2
• Cuando dos números son múltiplos • Cuando dos números son impares • Cuando un número es par o impar • Producto de números pares consecutivos • Producto de números impares consecutivos	• Comportamiento de una sucesión • Expresión del enésimo término de una sucesión • Características de una sucesión aritmética o una sucesión geométrica • Identificación de la sucesión que modela una situación

Tabla 4.5 Objetos matemáticos del módulo de aprendizaje Matemáticas 1

A partir de estos objetos matemáticos, se promueve que los estudiantes desarrollen ciertas competencias con base en la resolución de situaciones problemas, en donde apliquen sus conocimientos previos. Se define el concepto de sucesión con base en un conjunto de números que establece una relación con el conjunto de los números naturales, así como el tipo de sucesiones y series numéricas.

Se promueven los diferentes tipos representación de una sucesión, a través de aplicaciones del concepto de sucesión se presentan situaciones problema que permitan emerger los conocimientos matemáticos.

3.1.2 Configuración y trayectoria didáctica

Es importante reconocer que en todo proceso de instrucción matemática es posible identificar seis dimensiones: epistémica, docente, dicente, mediacional, cognitiva y emocional, lo cual no define que dichas dimisiones cuenten con la misma potencia en todo proceso. Es decir, cada una de estas dimensiones cuenta con ciertos elementos, y cuando se toma en cuenta la interacción entre todas estas dimensiones se habla de una configuración didáctica y una trayectoria didáctica.

De acuerdo a Godino, Contreras y Font (2006) una *trayectoria muestral* del proceso de instrucción matemática describe la secuencia particular de funciones y componentes que ha tenido lugar a lo largo del tiempo. De acuerdo a esto se distingue entre seis tipos de procesos y sus correspondientes trayectorias muestrales:

- ***Trayectoria epistémica***, que es la distribución a lo largo del tiempo de la enseñanza de los componentes del significado institucional implementado. Estos componentes (problemas, acciones, lenguaje, definiciones, propiedades, argumentos) se van sucediendo en un cierto orden en el proceso de instrucción.
- ***Trayectoria docente****:* distribución de las tareas/acciones docentes a lo largo del proceso de instrucción.
- ***Trayectoria discente****:* distribución de las acciones desempeñadas por los estudiantes (una para cada estudiante).
- ***Trayectoria mediacional****,* que representa la distribución de los recursos tecnológicos utilizados (libros, apuntes, manipulativos, software, etc.).
- ***Trayectoria cognitiva:*** cronogénesis de los significados personales de los estudiantes.
- ***Trayectoria emocional****:* distribución temporal de los estados emocionales (actitudes, valores, efectos y sentimientos) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.

Además, es importante destacar que en cada uno de los procesos es necesario identificar los objetos matemáticos que se incorporan y la relación que existe entre estos, por lo cual es necesario conocer la configuración didáctica que cuenta con seis dimensiones, al igual que su trayectoria. Sin embargo, se tomarán como base las dimensiones epistémica y docente, las cuales se definen de la siguiente forma:

- **Configuración epistémica:** sistema de objetos y funciones semióticas que se establecen entre ellos relativos a la resolución de una situación problema.
- **Configuración docente:** descripción de las actividades o acciones docentes que circunscriben una situación problema asociada a una configuración epistémica.

- **Configuración discente:** sistema de funciones/acciones que desempeña un alumno a propósito de una configuración epistémica.

Estas dos herramientas permiten conocer los objetos matemáticos y los procesos que forman parte de la instrucción matemática de acuerdo a un conocimiento matemático, además de establecer una relación entre los objetos matemáticos que integran el significado institucional de referencia y el significado institucional pretendido.

3.1.2.1 Dimensión epistémica

En la trayectoria epistémica se presta atención en los objetos matemáticos que integran las configuraciones didácticas que constituyen las dos secuencias didácticas del bloque 3, para identificar el papel que juegan estos objetos y como es su evolución, la forma en que son agrupados y la relación que existe entre ellos.

De acuerdo al significado pretendido, se puede identificar la configuración y trayectoria epistémica que constituye el módulo de aprendizaje para el tema de sucesiones y series numéricas, en donde se identifican los objetos matemáticos intervinientes y emergentes, así como la relación entre estos objetos. Como parte de la trayectoria epistémica se definen seis estados posibles (Godino et al., 2006), según el tipo de entidad que se estudia en cada momento:

- ***Situacional*:** se enuncia un ejemplar de un cierto tipo de problemas.
- ***Actuativo*:** se aborda el desarrollo o estudio de una manera de resolver los problemas.
- ***Lingüístico*:** se introducen notaciones, representaciones gráficas, etc.
- ***Conceptual*:** se formulan o interpretan definiciones de los objetos puestos en juego.
- ***Proposicional*:** se enuncian e interpretan propiedades.
- ***Argumentativo*:** se justifican las acciones adoptadas o las propiedades enunciadas.

De acuerdo a la estructura del módulo de aprendizaje, se identifican las trayectorias epistémicas que determinan las secuencias didácticas del bloque 3, para conocer los objetos matemáticos que incorporan dicho bloque. Asimismo, se instaura la configuración epistémica para conocer la relación que existe entre los objetos matemáticos a través de las actividades que integran las secuencias.

Trayectoria epistémica de la secuencia didáctica 1. Representaciones algebraicas

Conf. Epist.	U. Epist.	Descripción	Estado
1	1	Enunciado del conjunto de los números enteros y números naturales	Conceptual
	2	Enunciado de ejemplos de cómo definir un número aplicando la definición de divisor, múltiplo o factor	Proposicional
	3	Enunciado de la definición de múltiplo	Conceptual
	4	Aplicación de la definición de múltiplo	Actuativo
	5	Enunciado de la definición de número par y número impar	Conceptual
	6	Aplicación de las definiciones de número par y número impar	Actuativo
2	7	Introducción de la expresión algebraica de números pares y números impares	Lingüístico
	8	Descripción de la notación para el producto de dos números pares cualesquiera	Argumentativo
	9	Enunciado de una propiedad del producto de dos números pares cualesquiera	Situacional
	10	Aplicación de las propiedades de los números pares y su notación	Actuativo
	11	Enunciado de ejercicio: selección de dos números naturales consecutivos y realizar el producto de dichos números	Situacional
	12	Descripción de una acción futura para formular conjeturas respecto al producto de dos números naturales consecutivos y argumentar	Actuativo
	13	Enunciado de ejercicio: selección de tres números naturales consecutivos y realizar el producto de dichos números	Situacional
	14	Descripción de una acción futura para formular conjeturas respecto al producto de dos números (pares o impares) consecutivos y argumentar	Actuativo
3	15	Recuerdo de la definición de múltiplo y su relación con la notación de números pares y números impares	Proposicional

	16	Descripción de la expresión algebraica de algunos casos particulares	Argumentativo

Tabla 4.6 Trayectoria epistémica de la secuencia didáctica 1, Bloque 3 de Matemáticas 1.

Configuración Epistémica 1

Con base a la estructura del módulo se identifican las configuraciones epistémicas de acuerdo a la actividad de inicio, desarrollo y cierre. En particular la Configuración Epistémica 1 centra su atención en lo conceptual, en donde se retoman los conjuntos de números enteros y naturales con el propósito de reconocer la relación que existe entre estos dos conjuntos para identificar cuando un número es múltiplo de otro, recurriendo a definiciones como divisor y factor, para casos particulares, por ejemplo:

Números	**Múltiplos**		**Argumentos**
$\mathbf{-4}$	4	-16	Porque $-4 = (-4)\times(-1)$ y $-16 = (-4)\times 4$
$\mathbf{-9}$	27	-36	Porque -9 es divisor de 27 y de -36
$\mathbf{-12}$	48	-24	Porque -12 es factor de 48 y -24
21	210	-105	Porque $210 = 21\times 10$ y $-105 = 21\times(-5)$

Con la finalidad de que puedan reflexionar respecto a los múltiplos de cualquier número dado, es decir, que si se da un número n se pueda identificar la sucesión de los números múltiplos:

$$\boldsymbol{m = \cdots - 4n,\ -3n,\ -2n,\ -n,\ 0,\ n,\ 2n,\ 3n,\ 4n,\ \ldots}$$

Además de promover que los estudiantes puedan utilizar estas definiciones en la construcción de otros conjuntos de números enteros como: números pares y números impares. A través del uso de la definición de múltiplo o divisor se promueve que los estudiantes puedan identificar que el conjunto de los números pares $2,4,6,8,10,\ldots$ cuenta con una propiedad importante, todo número par es divisible por dos o bien 2 es un factor de todo número par; dicha propiedad permite establecer cuando un número es par, así como la construcción de una representación algebraica que permita identificar esta propiedad.

Configuración Epistémica 2

Por otra parte, la Configuración Epistémica 2 centra su atención en lo Actuativo, en donde se pueda hacer uso de los objetos matemáticos que se han proporcionado a través de definiciones o propiedades de los números pares, para identificar las propiedades que cumple la notación de estos números y su papel en el producto de dos números pares consecutivos cualesquiera, primero proporcionando argumentos de estas propiedades y después presentando situaciones, en un principio para casos particulares, en donde puedan observar cómo es que la notación juega un papel importante para identificar las propiedades que cumplen el producto de los siguientes números:

- **Producto de dos números pares consecutivos**, que permita observar porqué este producto es múltiplo de 4 y que se representa como $2n[2(n+1)] = 4[(n)(n+1)]$.
- **Producto de dos números naturales consecutivos** que se representan como:
  - $n(n+1) = n^2 + n$, para hacer énfasis en dos números naturales cualesquier consecutivos.
  - $2n(2n+1) = 4n^2 + 2n = 2(n^2 + n)$, en donde se puede observar la relación con la representación anterior, pero haciendo énfasis que el producto siempre será un número par.
  - $(n-1)n = n^2 - n$, para hacer referencia al número natural anterior a nuestro número n, para considerar diferentes representaciones de un mismo producto.
- **Producto de dos números pares o dos números impares consecutivos** que representan como:
  - $(n-1)(n+1) = n^2 - n + n - 1 = n^2 - 1$, lo cual permita observar que no importa si son números pares o números impares, se cumple que el producto de dos números consecutivos de estos conjuntos se puede expresar a partir del número intermedio.
  - $n\,(n+2) = n^2 + 2n$, contar con diferentes representaciones para el mismo producto.
  - $(2n-1)(2n+1) = 4n^2 - 2n + 2n - 1 = 2^2n^2 - 1 = (2n)^2 - 1$, además de dar la oportunidad a otras representaciones como esta, en donde se pueda argumentar el caso de los números pares, que también cumple con la propiedad.

Configuración Epistémica 3

Posteriormente, la Configuración Epistémica 3 se enfoca en recapitular y hacer énfasis en los objetos matemáticos que se presentaron en la secuencia didáctica, con el propósito de institucionalizar los conocimientos matemáticos que se pusieron en práctica a lo largo de la secuencia didáctica, argumentando las propiedades y definiciones que permitieron identificar las expresiones para diferentes productos, como la expresión de los números pares e impares.

- Todo número par puede expresarse como $2n$, donde n es un número entero.
- Todo número impar puede expresarse como $2n + 1$, donde n es un número entero

Así como la ejemplificación de la expresión de números que cumplen con cierta condición:

- Dos números consecutivos: $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{n+1}$
- La suma de dos números consecutivos: $\boldsymbol{n} + (\boldsymbol{n} + \mathbf{1})$
- El producto de dos números enteros consecutivos: $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n} + \mathbf{1})$ o $\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n} + \mathbf{1})$
- El triple de un número: $\mathbf{3}\boldsymbol{x}$
- La mitad de un número: $\frac{\boldsymbol{y}}{\mathbf{2}}$
- La suma del triple de un número más la mitad de otro número: $\mathbf{3}\boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{y}}{\mathbf{2}}$

Trayectoria epistémica de la Secuencia Didáctica 2. Sucesiones y Series

Conf. Epist.	U. Epist.	Descripción	Estado
1	1	Enunciado de la definición de sucesión numérica	Conceptual
	2	Ilustración de una sucesión formada con latas sobrepuestas	Lingüístico
	3	Cuestionamientos sobre los términos de la sucesión	Actuativo
	4	Descripción de una acción futura para identificar la relación entre el término de la sucesión y el número de latas	Proposicional
	5	Descripción de una acción futura para identificar la relación entre dos términos consecutivos	Proposicional
	6	Descripción de una acción futura para formular una expresión algebraica que represente a cualquier término de la sucesión	Actuativo
2	7	Enunciado de problema: descripción del funcionamiento de una caja de ahorro	Situacional
	8	Descripción de una acción futura para identificar el ahorro total de cada mes	Actuativo

	9	Descripción de una acción futura para identificar la relación entre el ahorro total de un mes y el ahorro total del mes anterior	Proposicional
	10	Descripción de una acción futura para identificar la cantidad de veces que se acumula el aumento mensual	Proposicional
	11	Descripción de una acción futura para identificar el ahorro total para cualquier mes	Proposicional
3	12	Enunciado de ejercicio: expresar una sucesión numérica en diferentes representaciones (numérica, algebraica y verbal)	Actuativo y proposicional
	13	Enunciado para introducir la definición de sucesión aritmética y sucesión geométrica	Conceptual
4	14	Enunciado de problema: descripción del funcionamiento de una rifa para recabar fondos	Situacional
	15	Descripción de una acción futura para identificar la cantidad de dinero que se recaba al vender cierta cantidad de boletos	Actuativo
	16	Enunciado para introducir la definición de serie aritmética y serie geométrica	Conceptual
	17	Descripción de la fórmula para la suma de los primeros n naturales	Proposicional
	18	Descripción de una acción futura para verificar si los resultados obtenidos corresponden a los obtenidos usando la fórmula	Actuativo
5	19	Recuerdo de la definición de sucesión aritmética	Conceptual
	20	Descripción de una acción futura para verificar la diferencia entre dos términos consecutivos de una sucesión aritmética	
	21	Recuerdo de la definición de sucesión geométrica	Conceptual
	22	Descripción de una acción futura para verificar el cociente entre dos términos consecutivos de una sucesión geométrica	
	23	Recuerdo de la definición de serie.	Conceptual

Tabla 4.7 Trayectoria epistémica de la secuencia didáctica 2, Bloque 3 de Matemáticas 1

Configuración Epistémica 1

La Configuración Epistémica 1 se enfoca principalmente en lo actuativo y proposicional, ya que se promueve que los estudiantes puedan hacer uso de los objetos matemáticos que presentaron en la Secuencia Didáctica 1, para identificar las propiedades que la situación que se está presentando modela. Inicialmente a través de una ilustración se promueve que puedan hacer referencia a los

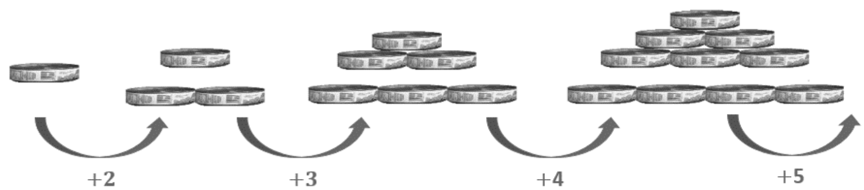


Ilustración 4.3 Sucesión de latas sobrepuestas

primeros términos de una sucesión de latas sobrepuestas, para identificar el procedimiento que permite construir los siguientes términos de dicha sucesión, así como el número de latas que se necesitan para construir algunos términos de la sucesión.

En un segundo momento se orienta al estudiante para que pueda identificar la relación que existe entre el número del término de la sucesión y el número de latas necesarias para la construcción de dicho término, enfocando su atención en el hecho de que a cada término se le agregan el número de latas correspondiente al número del término que se quiere conocer (Ilustración 4.3).

Además, a través de casos particulares construir la formula recursiva:

$$\boldsymbol{t_1 = 1}$$

$$\boldsymbol{t_2 = t_1 + 2 = 1 + 2 = 3}$$

$$\boldsymbol{t_3 = t_2 + 3 = 3 + 3 = 6}$$

$$\boldsymbol{t_4 = t_3 + 4 = 6 + 4 = 10}$$

$$\boldsymbol{t_5 = t_4 + 5 = 10 + 5 = 15}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{t_{12} = t_{11} + 12 = 66 + 12 = 78}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{t_n = t_{n-1} + n}$$

los estudiantes puedan construir los términos de la sucesión y establecer la representación algebraica de la sucesión.

Configuración Epistémica 2

En la Configuración Epistémica 2, al igual que la anterior, se enfoca en lo actuativo y proposicional, en donde es necesario que el estudiante pueda identificar la sucesión que modela el ahorro mensual de un trabajador que se encuentra en una caja de ahorro, pero en este caso el estudiante debe construir la sucesión de acuerdo a la información que se da, correspondiendo a los datos de la apertura de la apertura de la caja y el incremento que esta tendrá mensualmente.

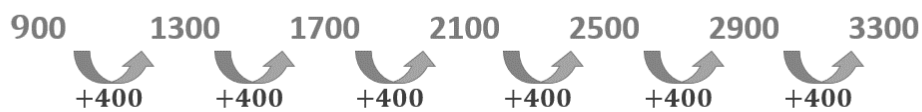


Ilustración 4.4 Sucesión de caja de ahorro

En primer instante se hace énfasis en el incremento mensual, para observar que existe una regularidad entre dos meses consecutivos, para promover que los estudiantes identifiquen el patrón de la sucesión que construyeron (Ilustración 4.4). Para obtener el número de veces que se acumuló este incremento, para establecer la relación que existe entre el número de meses que se ha realizado el ahorro y el incremento mensual, esto a partir de casos particulares como:

- En el **noveno** mes se acumuló $\mathbf{10}$ veces el incremento mensual y sobran 100.
- En el mes $\mathbf{18}$ se acumuló $\mathbf{19}$ veces el incremento mensual y sobran 100.

A través de estas observaciones se espera que los estudiantes puedan definir la expresión algebraica:

$$t_1 = 900 = 2(400) + 100$$

$$t_2 = t_1 + 400 = 1300 = 3(400) + 100$$

$$t_3 = t_2 + 400 = 1700 = 4(400) + 100$$

$$t_4 = t_3 + 400 = 2100 = 5(400) + 100$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{t_n = t_{n-1} + 400}$$

$$\boldsymbol{t_n = 400(n+1) + 100 = 400n + 500}$$

Configuración Epistémica 3

Como seguimiento para promover la expresión algebraica de sucesiones, la Configuración Epistémica 3 se concentra en lo conceptual y proposicional, con la finalidad de establecer los tipos de sucesiones que existen, sucesiones aritméticas y sucesiones geométricas. Se comienza ejemplificando algunas sucesiones en diferentes representaciones: numérica, algebraica y verbal, para que el estudiante identifique las propiedades de estas y realice las representaciones pertinentes, como en la siguiente tabla:

Sucesiones numéricas expresadas de diferente manera		
Desarrollada	Expresión	Texto
$\mathbf{5, 7, 9, 11}, \dots$	$2n + 3$	El primer término es 5 y los demás términos se obtienen al sumar 2 al anterior.
$\mathbf{2, 10, 50, 250}, \dots$	$2(5^{n-1})$	El primer término es 2 y los demás términos se obtienen al multiplicar el anterior por cinco.
$\mathbf{5, 9, 13, 17}, \dots$	$4n + 1$	El primer término es 5 y los demás términos se obtienen sumando 4 al anterior.
$\mathbf{1, 3, 9, 27}, \dots$	3^{n-1}	El primer término es 1 y los demás términos se obtienen al multiplicar el anterior por 3.

Tabla 4.8 Actividad de cierre, Bloque 3 de Matemáticas 1

Se promueve que los estudiantes puedan reflexionar respecto al comportamiento de las sucesiones y que estas permitan reconocer que existen diferentes tipos de sucesiones, sucesiones aritméticas como la primera y tercera sucesión de la tabla; y sucesiones geométricas como la segunda y cuarta sucesión, para instituir la definición de cada una de estas sucesiones.

Configuración Epistémica 4

La Configuración Epistémica 4 se enfoca principalmente en lo conceptual y proposicional, en donde a partir de una situación problema se presenta algunas propiedades que permitan establecer la definición de serie. En primer instante se describe la forma de recaudar dinero a través de una rifa, en donde el costo del boleto se corresponderá con el número que se presenta, para conocer la cantidad recaudada si se venden 100 boletos.

Al iniciar las actividades, se recurre al uso de la calculadora como herramienta para realizar los cálculos necesarios respecto a los fondos de la venta de los boletos, para que los estudiantes puedan realizar cálculos sobre la cantidad que se recauda cuando vende ciertos boletos. Después de que los estudiantes realizan estos cálculos, se presenta la expresión algebraica de la serie que modela la venta de los boletos, a través de la fórmula:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

y se hace referencia a algunos casos particulares que permitan reconocer que la fórmula que se estableció es la adecuada para la suma de los primeros:

- Tres términos, se tiene que la suma de los primeros tres términos es $1 + 2 + 3 \ = 6$ y se corresponde con $S_3 = \frac{3(3+1)}{2} = \frac{12}{2} = 6$
- Seis términos, se tiene que la suma de los primeros tres términos es $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \ = 21$ y se corresponde con $S_6 = \frac{6(6+1)}{2} = \frac{42}{2} 21$
- Veinte términos, se tiene que la suma de los primeros tres términos es $1 + 2 + 3 + \cdots + 20 \ = 210$ y se corresponde con $S_{20} = \frac{20(20+1)}{2} = \frac{420}{2} = 210$
- Cien términos, se tiene que la suma de los primeros tres términos es $1 + 2 + 3 + \cdots + 100 \ = 21$ y se corresponde con $S_{20} = \frac{100(100+1)}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$

Configuración Epistémica 5

La Configuración Epistémica 5 se enfoca en recapitular y hacer énfasis en los objetos matemáticos que se presentaron en la secuencia didáctica con el propósito de institucionalizar los conocimientos matemáticos que se pusieron en práctica, dentro de los cuales se tiene las definiciones:

- Sucesión numérica
- Sucesión aritmética
- Sucesión geométrica
- Serie aritmética

Para el caso de la serie geométrica no se presenta la definición explicita, sin embargo, se hace referencia a ella con base en la definición de serie geométrica. Además de presentar algunos ejemplos, de los cuales se cuestiona como parte de la evaluación de sus conocimientos.

3.1.2.2 Dimensión docente

Como parte de la dimensión docente se deben considerar las funciones que el profesor debe desarrollar, tomando en cuenta todas aquellas acciones que pone en juego en sus prácticas docentes, así como la relación que existe entre estas para lograr la instrucción matemática. La forma en que cada una de estas acciones se desarrolla para alcanzar los objetivos establecidos por las dimensiones epistémica y cognitiva, fundamentan la configuración docente. De acuerdo a Godino et al. (2006) las funciones docentes se describen de la siguiente forma:

- **Planificación:** diseño del proceso, selección de los contenidos y significados a estudiar (construcción del significado pretendido y de la trayectoria epistémica prevista).
- **Motivación:** creación de un clima de afectividad, respeto y estímulo para el trabajo individual y cooperativo, a fin de que se implique en el proceso de instrucción.
- **Asignación de tareas:** dirección y control del proceso de estudio, asignación de tiempos, adaptación de tareas, orientación y estímulo de las funciones del estudiante.
- **Regulación:** fijación de reglas (definiciones, enunciados, justificaciones, resolución de problemas, ejemplificaciones), recuerdo e interpretación de conocimientos previos necesarios para la progresión del estudio, readaptación de la planificación prevista.
- **Evaluación:** observación y valoración del estado del aprendizaje logrado en momentos críticos (inicial, final y durante el proceso) y resolución de las dificultades individuales observadas.
- **Investigación:** reflexión y análisis del desarrollo del proceso para introducir cambios en futuras implementaciones del mismo, así como la articulación entre los distintos momentos y partes del proceso de estudio.

Dentro de las prácticas docentes se encuentra, de acuerdo a las funciones docentes que EOS proporciona, la relación que existe entre los aspectos que el profesor debe considerar como parte de su práctica docente. Por lo cual es necesario establecer una relación entre lo que establece la DGB y la RIEMS de acuerdo al perfil docente y las competencias que el profesor de EMS debe desarrollar; y las funciones y competencias que EOS define (Ilustración 4.5).

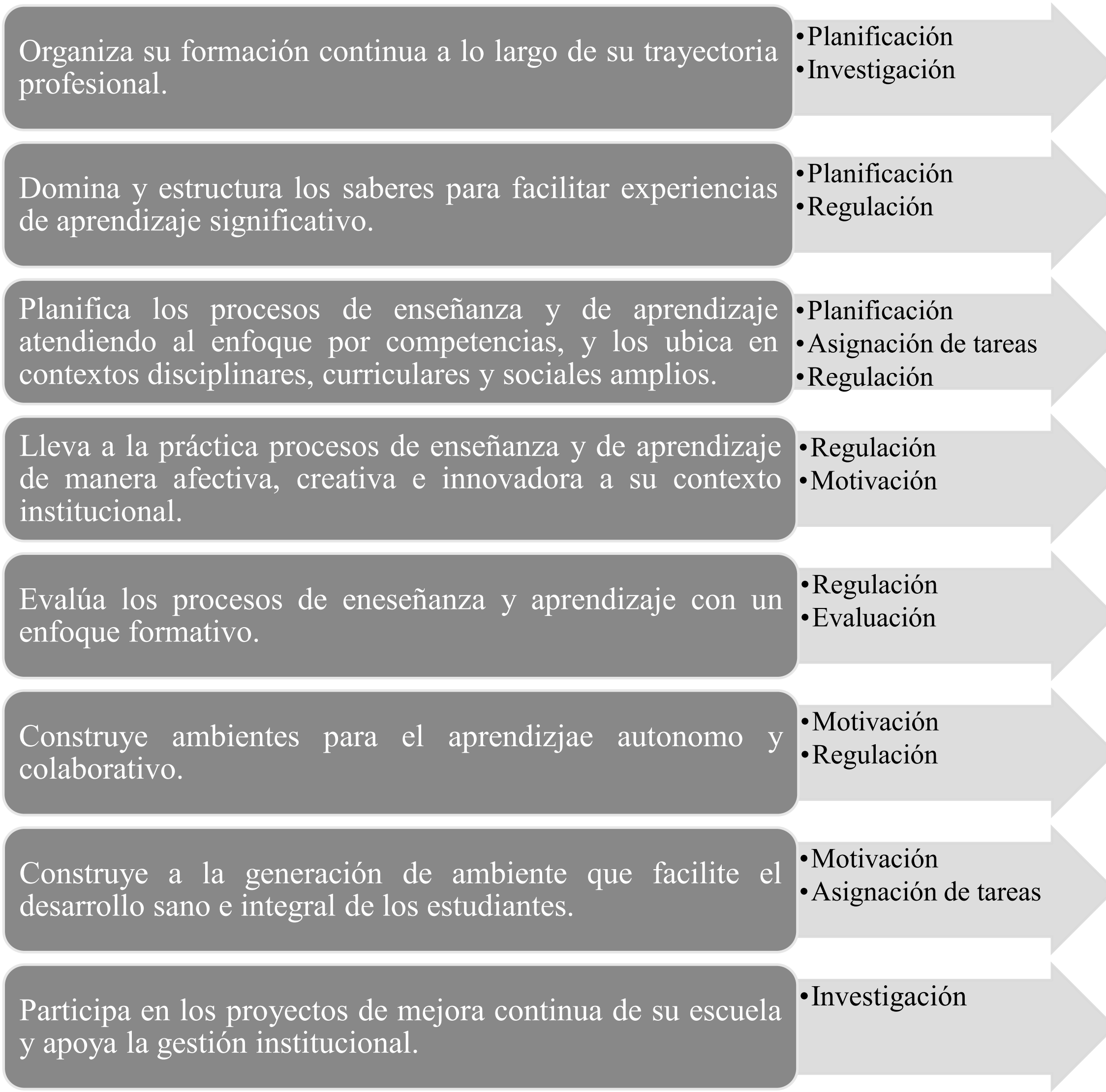


Ilustración 4.5 Relación entre las funciones docentes (EOS) y las competencias docentes (RIEMS)

Es indispensable identificar las acciones que el profesor de matemáticas debe desarrolla en la implementación del módulo de aprendizaje. Por lo cual se señalan aquellos elementos que este debe incorporar en su práctica docente, de acuerdo a esto se describe la trayectoria docente de acuerdo a la clasificación de sus funciones:

Planificación

- Identifica y reflexiona los aspectos que establece el programa de estudios “Matemáticas I” respecto al tema de series y sucesiones números.
- Analiza el módulo de aprendizaje Matemáticas 1.

- Establece el significado de referencia y el significado pretendido, a través de la identificación de objetos matemáticos que se involucran en el estudio de sucesiones numéricas.
- Diseña la trayectoria epistémica del estudio de sucesiones numéricas.
- Investiga sobre las nuevas propuestas respecto a los procesos de enseñanza y aprendizaje de sucesiones numéricas.
- Selecciona nuevas estrategias dentro de su práctica docente, de acuerdo a las necesidades de sus estudiantes.

Motivación

- Aplica estrategias de interés respecto al estudio de sucesiones de números.
- Fomenta la participación de sus estudiantes.
- Promueve las diferentes modalidades de trabajo.
- Emplea la manipulación de diferentes herramientas como apoyo a la visualización de las situaciones que se presentan.

Asignación de tareas

- Diseña los procesos de enseñanza y aprendizaje respecto al tema de sucesiones, tomando como base los conocimientos de los estudiantes.
- Reflexiona sobre las actividades que promoverá en el aula, considerando las necesidades de sus estudiantes respecto al estudio de sucesiones de números, así como las investigaciones respecto a los procesos de generalización.
- Considera las necesidades de los estudiantes y orienta su práctica docente con base en estas.

Regulación

- Estructura las acciones de los estudiantes de acuerdo al significado pretendido y la trayectoria epistémica.
- Establece y regula las definiciones y proposiciones adecuadas respecto al tema de sucesiones.
- Selecciona las situaciones problemas que impulsen un proceso de generalización óptimo.
- Selecciona la modalidad de trabajo adecuada para cada una de las actividades que se desarrollan en el salón de clases.

Evaluación

- Establece criterios y métodos de evaluación del aprendizaje con base en el enfoque de competencias.
- Fomenta la autoevaluación y coevaluación entre los estudiantes para analizar la solución de problemas.

Investigación

- Reflexiona e investiga sobre la enseñanza de sucesiones en el bachillerato y los procesos que desarrolla dentro de su práctica docente.
- Incorpora nuevos conocimientos y experiencias, como apoyo a las estrategias de enseñanza y aprendizaje de sucesiones numéricas que promueve.
- Investiga sobre el uso de tecnología y su aplicación en el salón de clases, atendiendo a las necesidades de sus estudiantes.

Como parte de la configuración docente se encuentran las prácticas docentes y la relación que existe entre cada una de las acciones que profesor de matemáticas debe desarrollar para lograr los objetivos que establece el significado institucional de referencia y el significado institucional pretendido.

3.2 Idoneidad didáctica

Una de las herramientas que EOS proporciona es la idoneidad didáctica, la cual permite reflexionar sobre la pertinencia de los conocimientos matemáticos, para el caso particular del diseño del módulo de aprendizaje de COBACH, centrando la atención en analizar y valorar el nivel de idoneidad que este tiene.

Se tomará como referencia los criterios de idoneidad didáctica (Godino, 2011) para recabar información sobre la estructura y organización del diseño del módulo de aprendizaje, a través de las seis dimensiones que componen el proceso de instrucción matemática.

Además, con base en la idoneidad interaccional, se pondrá especial énfasis en las configuraciones y trayectorias didácticas (epistémica y docente), como base para el diseño de nuestra guía, identificando los objetos matemáticos (intervinientes y emergentes) que se promueven en los sistemas de prácticas propuestos, y analizando los posibles conflictos semióticos que pudieran presentarse.

3.2.1 Dimensión epistémica

De acuerdo a los objetivos que se establece en el programa de estudio de Matemáticas 1, se considera la ***Idoneidad epistémica***, para identificar si existe una relación entre el significado institucional pretendido de los conocimientos matemáticos contenidos en las secuencias didácticas, con respecto al significado institucional de referencia del programa de estudios de Matemáticas I.

Como apoyo al análisis de idoneidad de la dimensión epistémica retomando los componentes e indicadores de la siguiente tabla:

Componentes	Indicadores
Situaciones-problemas	• Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación del estudio de sucesiones numéricas. • Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización).
Lenguajes	• Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre las mismas. • Uso de un nivel adecuado en el lenguaje que se emplea para dirigirse a los estudiantes. • Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación.
Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	• Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen. • Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado. • Se proponen situaciones donde los estudiantes tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos.
Argumentos	• Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen.

	• Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.
Relaciones	• Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí. • Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas.

Tabla 4.9 Criterios de idoneidad, dimensión epistémica (Godino, 2011)

3.2.2 Dimensión cognitiva

Como una de las dimensiones de la idoneidad didáctica, la idoneidad cognitiva centra su atención en la representatividad de los significados pretendidos. Es decir, no basta con retomar los conceptos y proposiciones que se establece en el programa, sino la forma en que serán implementados y la relación que existe entre ellos.

Se usará la ***Idoneidad cognitiva*** para considerar si el significado institucional pretendido forma parte de los conocimientos que los estudiantes han ido construyendo a través de la implementación de las actividades anteriores y que éste forme parte de su significado personal logrado.

Como apoyo al análisis de idoneidad de la dimensión cognitiva retomando los componentes e indicadores de la siguiente tabla:

Componentes	Indicadores
Conocimientos previos (se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	• Los estudiantes tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio). • Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	• Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo • Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes.

Aprendizaje: Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica	• Los diversos modos de evaluación indican que los estudiantes logran la apropiación de los conocimientos, comprensiones y competencias pretendidas: • Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia metacognitiva. • La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia. • Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.

Tabla 4.10 Ilustración 4.6 Criterios de idoneidad, dimensión cognitiva (Godino, 2011)

3.2.3 Dimensión interaccional

Considerar la relación que existe entre los sujetos involucrados en el proceso de instrucción matemática, representa un aspecto fundamental, ya que esto permitirá concretar los sistemas de prácticas de cada uno de ellos, además de evaluar su propio conocimiento se presenta la oportunidad de expresar los conocimientos que se han adquirido.

La ***idoneidad interaccional*** se usará para indagar la relación que existe entre profesor-estudiante y entre los estudiantes, así como las modalidades de trabajo y como éstas influyen en la construcción de los conocimientos matemáticos.

Como apoyo al análisis de idoneidad de la dimensión interaccional retomando los componentes e indicadores de la siguiente tabla:

Componentes	Indicadores
Interacción docentes-discentes	• El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.).

	• Reconoce y resuelve los conflictos de los estudiantes (se hacen preguntas y respuestas adecuadas, etc.). • Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento. • Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los estudiantes. • Se facilita la inclusión de los estudiantes en la dinámica de la clase.
Interacción entre estudiantes	• Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes. • Tratan de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos. • Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.
Autonomía	• Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos).
Evaluación formativa	• Observación sistemática del progreso cognitivo de los estudiantes.

Tabla 4.11 Criterios de idoneidad, dimensión interaccional (Godino, 2011)

3.2.4 Dimensión mediacional

Se usará la ***idoneidad mediacional*** para revisar la integración de recurso como herramientas de apoyo para la construcción y emergencia de objetos matemáticos, considerando el tiempo didáctico efectivo.

Componentes	Indicadores
Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores)	• Se usan materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido. • Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.
Número de estudiantes, horario y condiciones del aula	• El número y la distribución de los estudiantes permite llevar a cabo la enseñanza pretendida. • El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora). • El aula y la distribución de los estudiantes es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido.
Tiempo (De enseñanza colectiva/tutorización; tiempo de aprendizaje)	• El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida. • Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema. • Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.

Tabla 4.12 Criterios de idoneidad, dimensión mediacional (Godino, 2011)

3.2.5 Dimensión afectiva

Cuando se habla de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas constantemente se habla del bajo interés que existe en los estudiantes por el estudio de conocimientos propios de esta ciencia, aludiendo a esto se constituye la faceta afectiva. Como se mencionó anteriormente es necesario analizar las situaciones que se están presentando en el módulo y valorar si éstas son adecuadas para los estudiantes.

Dentro del análisis se debe identificar si se consideran las necesidades de los estudiantes, además de valorar si dichas situaciones están en un contexto que promueva el interés principalmente en el conocimiento matemático central “Sucesiones numéricas”. De acuerdo a EOS (Godino, 2011) se considerar tres componentes de idoneidad afectiva: Intereses y necesidades, actitudes y emociones; los cuales se analizan en la siguiente tabla de acuerdo a diferentes cuestionamientos.

Se usará la ***idoneidad afectiva*** para reflexionar sobre las situaciones problema que se están planteando en las actividades, si están adaptadas a contextos de interés de los estudiantes y si promueven la instrucción matemática. También considerar las oportunidades que se presentan al estudiante con respecto a sus prácticas matemáticas (operativas y discursivas) para la resolución de problemas.

Componentes	Indicadores
Intereses y necesidades	• Las tareas tienen interés para los estudiantes. • Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.
Actitudes	• Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. • Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Emociones	• Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas. • Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

Tabla 4.13 Criterios de idoneidad, dimensión afectiva (Godino, 2011)

3.2.6 Dimensión ecológica

Se utilizó la ***idoneidad ecológica*** para verificar si el enfoque del módulo corresponde a lo establecido con la RIEMS, además que los objetos matemáticos que lo integran sean los establecidos por el Programa de estudios Matemáticas I.

Componentes	indicadores
Adaptación al currículo	• Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.
Apertura hacia la innovación didáctica	• Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva. • Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo.
Adaptación socio-profesional y cultural	• Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes.
Educación en valores	• Se contempla la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico.
Conexiones intra e interdisciplinares	• Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares.

Tabla 4.14 Criterios de idoneidad, dimensión ecológica (Godino, 2011)

De acuerdo a cada uno de los componentes e indicadores se llevó a cabo un análisis del módulo de aprendizaje, valorando la incorporación y adaptación de todos los elementos que instituyen en bloque referente al estudio de sucesiones, para destacar aquellas dimensiones que necesitan un apoyo y retroalimentación, lo cual permitió establecer la estructura del diseño y contar con una primera versión del diseño de nuestra propuesta. Además de proporcionar la oportunidad de poner a prueba la pertinencia de cada uno de los elementos que se consideraron apropiados para el diseño de la guía para el profesor.

Capítulo 4 Elementos para el diseño de la propuesta

La recolección de información se concentra en dos aspectos: la obtención de información que se obtuvo del análisis y valoración de idoneidad didáctica a priori del módulo de aprendizaje del bloque respecto al estudio de series y sucesiones de números que se llevó a cabo, como se menciona en el capítulo interior, lo cual proporcionó los fundamentos para la estructura del diseño de nuestra guía, así como los elementos que la incorporan.

Por otra parte, se tienen los resultados de los argumentos que se presentaron en el curso taller, en donde se describen aquellos aspectos sobresalientes que se identificaron a través del análisis de los instrumentos y la videograbación del curso taller, enfocando nuestra reflexión en aquellos elementos que proporcionaron algunas reflexiones sobre nuestro diseño.

4.1 Análisis y valoración de idoneidad didáctica

De acuerdo a las herramientas teóricas que el EOS proporciona se llevó a cabo el análisis y valoración del Bloque 3 del módulo de aprendizaje Matemáticas 1, con el objetivo de identificar las dimensiones y componentes que necesitan algunas aportaciones.

4.1.1 Secuencia didáctica 1: Representaciones algebraicas

Dimensión epistémica

En la primera parte del bloque se cuenta con actividades que se concentran en la identificación de una representación algebraica para algunas situaciones, principalmente en el conjunto de los números pares y números impares, y se cuenta con algunas aplicaciones en un contexto intramatemático, centrando su atención en las propiedades del producto de números consecutivos de estos conjuntos de números. A través de las actividades se relacionan los objetos matemáticos para conectarlos de acuerdo a un objetivo claro, para concluir con la institucionalización de los conocimientos matemáticos.

Sin embargo, en lo que respecta a representación algebraica no se cuenta con muchas actividades de refuerzo, solo se concentra en el producto de números consecutivos (pares e impares). En la actividad de cierre se presentan algunos ejemplos de expresiones algebraicas para conjuntos de números que cumplen con alguna condición, pero no se muestran nuevas situaciones en donde los estudiantes puedan generar alguna expresión algebraica.

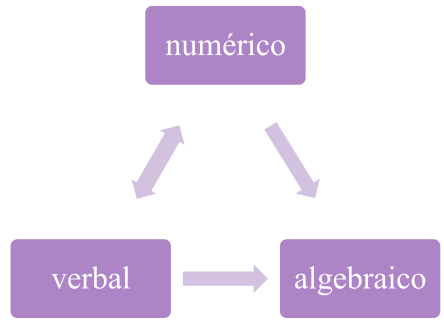


Ilustración 6.1 Representaciones de la secuencia didáctica 1

Las actividades se enfocan en las representaciones numérica y algebraica, y en algunos casos se recurre a la representación verbal como apoyo en la construcción de la representación algebraica, así como la relación entre algunas de estas representaciones (Ilustración 6.1), sin embargo, no se hace referencia a la representación gráfica.

De acuerdo a dichas representaciones se promueve que el estudiante identifique propiedades del conjunto de números enteros, pares e impares, que permitan formular sus propias conjeturas, además de establecer las representaciones apropiadas para las situaciones que se presentan, lo cual proporcione fundamentos para sus argumentos.

A lo largo de la secuencia didáctica se presentan las definiciones y proposiciones correctas, de acuerdo a los objetivos del bloque, no obstante, se presentan dificultades en las indicaciones para algunas de las actividades que el estudiante debe desarrollar, respecto a las acciones que éste debe realizar y a la conexión entre las indicaciones, por la ubicación de éstas. Además de contar con errores en la actividad de cierre, en donde se presentan una condición y su representación algebraica.

Condición	Expresión o expresiones
Dos números consecutivos	n y $n + 1$
La suma de dos números enteros consecutivos	$n + (n+1)$
El producto de dis números enteros consecutivos	$n\ x(n+1)$
El triple de un número	$3x$
La mitad de un número	$\frac{y}{2}$
La suma del triple de un número más la mitad de otro número.	$3x\ \frac{y}{2}$

Tabla 3.4

Ilustración 6.2 Sección del módulo de aprendizaje Matemáticas 1, p.74

Dimensión cognitiva

Se toma en cuenta los conocimientos matemáticos que se trabajaron en los bloques anteriores, así como la recapitulación de objetos matemáticos que tuvieron lugar en su Educación Básica, y se establece una conexión con la secuencia didáctica siguiente. Se presentan diferentes definiciones y procedimientos como base para la construcción de nuevos conocimientos, de acuerdo a las propiedades de los números enteros.

No se cuenta con actividades de refuerzo, respecto al estudio de números pares y números impares, solo se presenta la representación algebraica de éstos. Se presentan situaciones al alcance de los estudiantes, además de enfatizar los aspectos que permitan que los objetos matemáticos emerjan.

Dimensión interaccional

De acuerdo al significado pretendido se cuenta con una articulación adecuada de los objetos matemáticos que se presentan en la secuencia didáctica, en donde se espera que el profesor desarrolle un conocimiento adecuado para que se logren los objetivos finales.

No se cuenta con una especificación de acuerdo a las acciones que el profesor debe desarrollar cuando implementa las actividades o la intervención adecuada del profesor cuando se presentan conflictos y lograr resolver dichos conflictos.

Se promueve la participación de los estudiantes respecto a su práctica matemática para que su significado personal se corresponda con el significado pretendido, por lo cual se establece la participación de los estudiantes en diferentes modalidades para que cuente con la oportunidad de reflexionar de forma individual y con sus compañeros

Dimensión mediacional

Se utiliza como recurso el uso de tablas para identificar ciertas condiciones que cumple el producto de números consecutivos, además se sugiere el manejo de calculadora como herramienta para el cálculo de las operaciones. Además de establecer las modalidades de trabajo adecuadas para cada una de las actividades de la secuencia.

Dimensión afectiva

Las actividades de la secuencia didáctica tienen un enfoque intramatemático en donde se promueve la argumentación de los estudiantes, de acuerdo a las actividades que llevaron a cabo, centrando su atención en aspectos que permitan establecer la representación algebraica de las situaciones que se presentan. Sin embargo, no se hace referencia a situaciones de la vida cotidiana, en donde se pueda ver la aplicación de estos conocimientos matemáticos.

Dimensión ecológica

Los objetos matemáticos que se promueven forman parte de los conocimientos necesarios para el desarrollo de la secuencia didáctica siguiente, así como formar base de los conocimientos matemáticos necesarios para los bloques posteriores.

4.1.2 Secuencia didáctica 2: Sucesiones y series

Dimensión epistémica

En general está dimensión cuenta con un nivel alto, ya que los objetos matemáticos que se están promoviendo en el módulo se encuentran en relación con el significado de referencia. Se cuenta con una configuración y trayectoria epistémica adecuada, en donde los objetos matemáticos emergen correspondientes a los conocimientos previos de los estudiantes, además de integrar aspectos necesarios para el estudio de sucesiones y series.

Se presenta la definición de sucesiones numéricas, y la identificación de las propiedades de sucesiones aritméticas y sucesiones geométricas, así como la definición de series numéricas. A través de situaciones problemas, principalmente en su aplicación en la vida diaria, se promueve la identificación de patrones y la construcción de representación algebraica.

Las actividades se concentran en las representaciones numérica, verbal y algebraica (Ilustración 6.3), relacionando las propiedades que cada una de estas representaciones aporta en la identificación de regularidades en una sucesión.

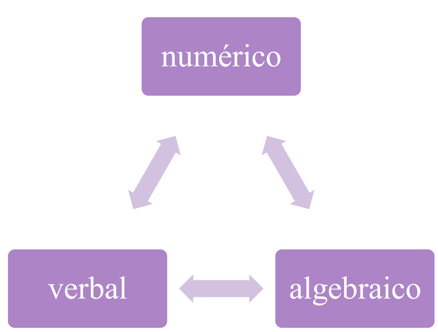


Ilustración 6.3 Representaciones de la secuencia didáctica 2

Se cuenta con dificultades en las indicaciones que se hacen respecto a las acciones que el estudiante debe desarrollar, especialmente en la referencia de las tablas, en donde es necesario crear relación entre los objetos matemáticos que se pusieron en juego anteriormente y las acciones que se deben realizar. Además, de contar con un error en la definición de sucesión geométricas. Para el caso de series geométricas, se presenta la definición de forma global.

Se fomenta la argumentación de los estudiantes respecto a sus conjeturas, así como la discusión grupal con base en sus conocimientos matemáticos y la formulación de conclusiones.

Dimensión cognitiva

Los objetos matemáticos intervinientes en la secuencia didáctica son adecuados para que los estudiantes puedan construir un significado personal adecuado, en donde se toma como base los objetos matemáticos de la secuencia didáctica anterior. De acuerdo al significado de referencia en donde se establece que los estudiantes puedan identificar y distinguir entre series y sucesiones numéricas, a través de las actividades se presentan estas definiciones, además de establecer las propiedades para sucesiones aritméticas y sucesiones geométricas.

Se presentan situaciones problemas en donde se puede aplicar el estudio de sucesiones, sin embargo, se concentra en sucesiones aritméticas, dejando de lado la identificación de progresiones geométricas, además de no contar con actividades de refuerzo.

Dimensión interaccional

De acuerdo al significado pretendido se cuenta con una articulación adecuada de los objetos matemáticos que se presentan en la secuencia didáctica, en donde se espera que el profesor desarrolle un conocimiento adecuado para que se logren los objetivos finales.

No se cuenta con una especificación de acuerdo a las acciones que el profesor debe desarrollar cuando implementa las actividades o la intervención adecuada del profesor cuando se presentan conflictos y lograr resolver dichos conflictos.

Se promueve la participación de los estudiantes respecto a su práctica matemática para que su significado personal se corresponda con el significado pretendido, por lo cual se establece la participación de los estudiantes en diferentes modalidades para que cuente con la oportunidad de reflexionar de forma individual y con sus compañeros.

Dimensión mediacional

Se presentan algunas aplicaciones de la vida cotidiana, que se pueden modelar a través de sucesiones o series, pero solo se concentra en la interpretación de tablas, no se cuenta con herramientas manipulativas que permitan una mayor visualización de las situaciones que se presentan.

El identificar la modalidad de trabajo permite la planeación del tiempo para desarrollar las actividades, además de una mejor distribución de los estudiantes para lograr que formulen sus propias argumentaciones.

Dimensión afectiva

Se presentan algunas situaciones problema contextualizadas, en donde los estudiantes puedan observar cómo las sucesiones y series numéricas pueden reflejar el comportamiento de situaciones de la vida cotidiana. Sin embargo, no se cuenta con aplicaciones, en donde se ilustre la efectividad de la modelación algebraica en situaciones sociales, laborales y de la naturaleza, a través del estudio de sucesiones y series numéricas.

Dimensión ecológica

Los conocimientos matemáticos que se promueven en la secuencia didáctica están enfocados para que el significado personal logrado de los estudiantes corresponda con el significado institucional de referencia.

Los objetos matemáticos que se promueven forman parte de los conocimientos necesarios para que los conocimientos del bloque emerjan, así como para los bloques posteriores. También se apoya en los conocimientos que los estudiantes de este nivel educativo deben de alcanzar para su educación en niveles posteriores

4.1.3 Reflexiones del análisis de idoneidad didáctica

De acuerdo al análisis de idoneidad didáctica del bloque respecto al tema “Sumas y sucesiones de números” pudo destacar diferentes aspectos que permitieron identificar los elementos que integran nuestro diseño. Como parte de ello se incorporó el diseño de applet, con el uso de GeoGebra, para impulsar aquellas dimensiones que contaban con un nivel bajo, lo cual permitió identificar las sugerencias necesarias para la implementación del bloque.

Una de los componentes que se destacó por contar con un nivel alto, fue la correspondencia entre los significados institucionales referencial y pretendido. Sin embargo, uno de los objetivos que establece el programa de estudio es la construcción de gráficas para establecer el comportamiento de sucesiones aritméticas y geométricas, y éste es un aspecto que no se explota en las actividades del módulo. Atendiendo a esto, se incorpora en los applets la representación gráfica como impulsor para identificar el comportamiento de una sucesión y establecer la relación que existe entre las diferentes representaciones de una sucesión.

Se cuenta con una configuración y trayectoria epistémica adecuada, en donde los objetos matemáticos emergen correspondientes a los conocimientos previos de los estudiantes, además de integrar aspectos necesarios para el estudio de sucesiones y series. No obstante, es necesario introducir nuevos materiales de apoyo para hacer más eficiente las actividades situaciones para reforzar los conocimientos matemáticos que integran las secuencias didácticas. Por esta razón la importancia de incorporar el diseño de applets como complemento a las actividades del módulo, así como las sugerencias necesarias para que el profesor pueda desarrollarlas en el salón de clases.

El proporcionar este tipo de herramientas contribuye con una mayor visión de las situaciones que se presentan en las actividades, lo cual permite que los estudiantes cuenten con mayores opciones para la selección de estrategias que más se adapten a sus habilidades y que el proceso de generalización no se enfoque únicamente en lograr una expresión algebraica, sino conocer porqué una expresión permite conocer los elementos de una sucesión, así como argumentar y justificar el que dicha expresión resulte ser la adecuada.

Además, es indispensable destacar que existen errores de edición en donde es necesario prestar atención ya que estos errores no solo se encuentran en las instrucciones e indicaciones que se presenta a los estudiantes, sino que se presenta un error respecto a uno de los objetos matemáticos destacables en el bloque como lo es la definición de sucesión, en donde se define sucesión aritmética de forma incorrecta. Por esta razón se incorporan las orientaciones necesarias para cada una de las actividades del bloque, enfatizando en los objetivos con los que cuenta cada una de ellas, fungiendo como apoyo para las prácticas docentes.

Una de las características del significado de referencia son las modalidades de trabajo, en donde se establece la forma de desarrollar cada una de las actividades con base en sus propósitos, por lo cual se establece la participación de los estudiantes en diferentes modalidades para que cuente con la oportunidad de reflexionar de forma individual y esto permita construir su propio conocimiento; y la reflexión en equipo para evaluar sus conjeturas con base en sus argumentos y los de sus compañeros.

4.2 Aportaciones de los profesores sobre la implementación del módulo

De acuerdo a las herramientas teóricas y el objetivo general, se llevó a cabo un curso taller enfocado en conocer el papel que juega el módulo de aprendizaje en la práctica docente de los profesores de matemáticas de COBACH, además de recolectar información sobre la interpretación que éstos tienen sobre los elementos que se incorporan en el módulo.

Con la finalidad de recopilar información que proporcionara una mayor visión de la pertinencia de nuestro diseño, así como aportación a los elementos y herramientas que se incorporan dentro del diseño de nuestra propuesta de una guía para el docente que imparte la asignatura de Matemáticas 1, enfatizando en el estudio de sucesiones numéricas.

4.2.1 Fase exploratoria

Se llevó a cabo un curso taller dirigido a profesores de matemáticas de COBACH de forma presencial con una duración de cinco horas, en donde se enfatizó respecto a la opinión y el uso de los módulos de Matemáticas que se utilizan en el plantel, tomando mayor énfasis en el módulo de Matemáticas 1 en donde se implementa el tema de sucesiones de números. En donde se llevaron a cabo las siguientes actividades:

- **Aplicación de un cuestionario**, respecto a los elementos del módulo de aprendizaje y la opinión de los profesores sobre su implementación en el salón de clases. Así como comentarios sobre aportaciones que se pudieran realizar a su estructura o enfoque.
- **Discusión de opiniones**, sobre el uso del módulo de aprendizaje en su práctica docente y su enfoque por competencias a través de la resolución de problemas, aportando en la descripción de las acciones que llevan a cabo en el salón de clases.
- **Análisis de una actividad**, para identificar los elementos que se consideran en la planeación e implementación de esta.

- **Reflexiones finales**, crear una discusión sobre los elementos que se consideraron en el análisis de la actividad.

Con la finalidad de conocer, a través de sus prácticas discursivas, el papel que juega el módulo de aprendizaje dentro de sus prácticas docentes, centrando la atención en el estudio de sucesiones numéricas, contenido matemático que se imparte en la asignatura de Matemáticas 1 de COBACH. Además, de indagar sobre las herramientas y elementos que los profesores seleccionan para el desarrollo del conocimiento matemático.

4.2.2 Sujetos de estudio

El curso taller estaba dirigido a seis profesores de COBACH que impartían asignaturas de matemáticas, los cuales tuvieron participación en la discusión de opiniones sobre el uso del módulo de aprendizaje y su enfoque por competencias, además de atribuir en las metodologías y materiales que utilizan en sus prácticas docentes.

A partir del registro de las asignaturas que estos habían impartido, se formaron equipos para las asignaturas de Matemáticas 1 y Matemáticas 3, con la finalidad de desarrollar un análisis enfocado en cada una de estas asignaturas. Del equipo de Matemáticas 1, se seleccionaron dos profesores los cuales contaban con las siguientes características:

Profesor A	Profesor B

• Maestría en Ingenieria en Sistemas Productivos
• 12 años de experiencia laboral
• Materias impartidas:
  • Matemáticas 1, 2 y 3
  • Probabilidad y Estadistica 1 y 2
	• Ingeniero Químico con Maestría en Docencia
	• 16 años de experiencia laboral
	• Materias impartidas:
	  • Matemáticas 1, 2, 3 y 4
	  • Cálculo Diferencial e Integral 1 y 2

De acuerdo a la selección de los profesores Ay B, se tomó en cuenta su participación en la resolución de los cuestionarios correspondientes al estudio de sucesiones numéricas, además de llevar a cabo el análisis de unas de las actividades del bloque enfocado en este contenido matemático.

4.2.3 Instrumentos de indagación

De acuerdo al objetivo general del proyecto, diseñar una guía de apoyo para la actividad docente en el bachillerato centrada en el tema “Sumas y Sucesiones de números”, se consideran diferentes herramientas para la toma de datos; a partir de las cuales se pueda recolectar la información necesaria para analizar la pertinencia y practicidad del diseño.

Se diseñó entonces un cuestionario dirigido a los profesores seleccionados para obtener información sobre su opinión personal y la selección de una actividad del módulo como hojas de trabajo, en donde se pudiera indagar respecto a la planificación en la resolución de esta actividad. Además de contar con una videograbación de los seis profesores durante todo el curso, para recopilar información respecto a las opiniones que aportaran los profesores, en las diferentes etapas del curso.

4.2.3.1Cuestionario de opinión de los docentes respecto al módulo

El diseño del cuestionario está orientado en tres aspectos considerados relevantes dentro del diseño de nuestra propuesta, las cuales se concentran primeramente en la opinión del módulo y sus elementos, la opinión respecto al bloque que concentra el estudio de sucesiones numéricas y en las aportaciones que se pudieran realizar al módulo, así como en la pertinencia de una guía de apoyo.

A través del cuestionario se esperaba obtener una visión de las herramientas y acciones que los profesores de matemáticas seleccionan dentro de su planeación para la asignatura de matemáticas 1, además de investigar sobre la opinión de los profesores respecto al enfoque por el cual se incorporaron las actividades del módulo y la forma en que promueven dicho enfoque.

Como primer elemento se incorporan los datos generales del profesor, es decir información respecto a las materias de matemáticas que había impartido y su experiencia laboral, con la finalidad de seleccionar a los profesores que contaran con experiencia en la implementación del tema de sucesiones numéricas y conocer su formación académica correspondiente.

Los primeros cuestionamientos se plantearon de forma general, con la finalidad de conocer los materiales de apoyo que los profesores utilizan para la implementación de sus clases e identificar si el módulo de aprendizaje es uno de ellos, además que esto permitiera obtener información respecto al papel que juega el módulo de aprendizaje, y las acciones que los profesores desarrollan en la implementación de éste.

También se incorporó una sección dirigida a profesores que utilizaban el módulo lo cual permitiera reflexionar sobre los aspectos por los cuales el profesor de matemáticas no considera las actividades del módulo como una base para la planeación de sus prácticas docentes.

1. ¿Qué material(es) utilizó usted para trabajar con sus estudiantes en el curso de Matemáticas 1?
2. ¿Usted utiliza el Módulo de Aprendizaje de Matemáticas 1? Si su respuesta es sí, describa la forma en que lo hace.
3. Si usted no utiliza el libro de texto del Módulo de Aprendizaje de Matemáticas 1, seleccione las razones que lo llevaron a tomar esa decisión.

Razones	Comentarios
Porque presentaba un nivel muy básico para los estudiantes	
Porque presentaba un nivel muy elevado para los estudiantes	
Porque presentaba un tratamiento inadecuado de los contenidos	
Porque no se ajustan a las actividades que se pueden realizar en clases	
Los profesores tenemos un libro de texto preferido	
Otras razones	

Con la finalidad de recopilar información de nuestro tema de interés, el estudio de sucesiones numéricas, se plantearon cuestionamientos que mostraran la visión de los profesores respecto al bloque 3 en donde se implementa este tema, enfatizando en la existencia de dificultades en la implementación dicho bloque, y aquellos elementos que se consideran como aportaciones para un mayor desempeño en la resolución de las secuencias didácticas y las actividades que las integran.

4. Por favor indique el grado de dificultad que percibió en las actividades del Módulo de Aprendizaje de Matemáticas 1.

Bloque 3	**Grado de dificultad**				
	Muy Difícil	Difícil	Aceptable	Fácil	Muy fácil
Sumas y sucesiones de números					

Comentarios:

5. ¿Considera que las actividades presentadas en el bloque 3 del Módulo de Aprendizaje de Matemáticas 1 son factibles para ser implementadas? Explique por qué.
6. ¿Agregaría algún elemento al bloque 3 del Módulo de Aprendizaje de Matemáticas 1? Explique su respuesta.

En la parte final se incorporaron algunos cuestionamientos que permitieran obtener una visión sobre aquellos elementos que los profesores consideran significativos dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, tomando como referencia el módulo de aprendizaje. Dichos cuestionamientos pretenden indagar aquellos elementos que consideran importantes como apoyo a la construcción de los conocimientos matemáticos de los estudiantes de bachillerato, además que estos permitan conocer su opinión respecto a los materiales de apoyo que los profesores para la implementación de las asignaturas de matemáticas.

También se incorporaron algunas interrogantes sobre la implementación de una guía de apoyo para los profesores, con lo cual se busca conocer su opinión sobre la pertinencia de nuestro diseño, así como las aportaciones para el diseño de esta.

7. En general, ¿cuáles son para usted los atributos más importantes que debe tener un texto para cumplir con los estudiantes, según orden de importancia?

Razones	# Orden de importancia	Comentarios
Contenidos presentados		
Propuesta metodológica		
Claridad del lenguaje		
Cantidad de ejemplos		
Cantidad de actividades		
Variedad en el nivel de dificultad de las actividades		
Variedad de actividades		
Pertinencia de las actividades		
Factibilidad de implementación de las actividades		
Otros (descríbalos)		

8. ¿Considera que el Módulo de Aprendizaje de Matemáticas 1 promueve una metodología de trabajo de acuerdo a lo que se establece en la RIEMS?
9. ¿Cree que es importante que el Módulo de Aprendizaje de Matemáticas 1 esté acompañado de una guía para el profesor? ¿Por qué?
10. Si usted considera que es necesaria una guía para los Módulos de Aprendizaje, entonces señale los aspectos que deberían incluirse en ésta.

4.2.3.2 Hojas de trabajo

En la sección del curso se tomó en cuenta la resolución de una de las actividades del bloque de sucesiones numéricas del módulo de aprendizaje de Matemáticas 1, particularmente la actividad 1 de la secuencia 2, actividad potencial para identificar diferentes propiedades que se ven involucradas en la implementación de está.

Secuencia Didáctica 2. Actividad 1:

En la **Figura 3.1** se muestran los tres primeros términos de una sucesión, formada por latas sobrepuestas.

Término 1	Término 2	Término 3	Término 4

Tabla 3.1

1. Construye el cuarto término.

2. ¿Cuántas latas tiene el quinto término?

3. ¿Cuántas latas tiene el doceavo término?

4. Describe el comportamiento del número de latas respecto al número del término.
   ____
   ____
   ____
   ____

5. Describe la relación que hay entre un término de la sucesión y el término anterior.
   ____
   ____
   ____
   ____

6. Encuentra una expresión algebraica que represente a cualquier término de la sucesión a partir del término anterior.

La selección de una actividad del módulo permitirá conocer con mayor detalle la opinión de los profesores sobre la implementación de esta, dando un aporte en el diseño de la propuesta de un guía para el profesor. Se espera que a través del análisis de esta actividad puedan identificar el propósito, conocimientos previos y emergentes, competencias que se promueven y posibles dificultades y/o errores, además de otros aspectos que se consideraran importantes.

4.2.4 Discurso de los profesores

De acuerdo a la información recabada de los cuestionarios y los videos de grabación, se enfocó la atención en aquellos aspectos relevantes para el diseño, y que contribuyeran en la propuesta, la cual cuente con las herramientas necesarias para brindar un apoyo para la práctica docente del profesor de Matemáticas 1 de COBACH que implementa las actividades del bloque 3: Sumas y sucesiones de números.

4.2.4.1 Cuestionario

Se presentan los resultados de aquellos aspectos respecto al módulo de aprendizaje en donde se ilustra la opinión que tienen los profesores sobre su enfoque y la estructura de éste, señalando aquellos elementos que los profesores identifican como un aspecto trascendental dentro de su práctica docente.

Se pudo obtener que los dos profesores utilizan el módulo de aprendizaje y que desarrollan algunas actividades en el salón de clases, sin embargo, éste no es el único material al cual recurren para la planeación de sus clases. Al igual que algunas de las actividades del módulo, se incorporan otros materiales como los módulos anteriores y otros libros de texto de donde retoman ejemplos o actividades, asimismo se toma como base material de internet como apoyo a las actividades que se desarrollan en el salón de clases.

Al centrar la atención en el bloque de sucesiones numéricas, se argumenta sobre las dificultades que se presentan en la implementación de éste, particularmente sobre la dificultad de los estudiantes en la resolución de las actividades, tales como:

> *Profesor A:* Es un tema, un poco difícil para los alumnos, pero creo que se aborda de una manera un poco complicada, cuando tratan de contextualizarlo, lo que provoca que el alumno tenga un poco de apatía, el tema es corto en la parte del libro, pero hay otras secciones demasiadas extensas.

> *Profesor B:* Para la secuencia 2 se inicia con una sucesión cuadrática, lo ideal sería empezar con una lineal.

Asimismo, se expresa que es posible llevar cabo las actividades propuestas para este bloque, sin embargo, se encuentran algunas dificultades en su resolución.

> *Profesor A:* Si son factibles, aunque al inicio crea un poco de problemas ya que es una sucesión cuadrática y el alumno hay que llevarlo de un problema lineal que cause menos confusión, creo que, aunque muchos alumnos no tienen problemas con esto otra gran parte si la tienen pues sus bases en matemáticas son muy deficientes.
>
> *Profesor B:* La mayoría de ellas, pero en otro orden.

Además, ambos profesores coinciden en que uno de los elementos que es necesario introducir en el bloque, es la fórmula de las series geométricas.

Por otra parte, se pudo observar cuáles son las propiedades con los que debe contar un texto para promover en los estudiantes un conocimiento matemático adecuado, de acuerdo a las opiniones de los profesores, aun cuando existió una diferencia entre el orden de importancia que cada uno de ellos considera para las propiedades de un texto; se destacó que una de las principales propiedades son los contenidos presentados, la propuesta metodológica y la pertinencia de las actividades. De acuerdo a las respuestas obtenidas del cuestionario, se obtuvo la siguiente clasificación de acuerdo al orden importancia que cada uno de los profesores les otorga a los elementos de un texto:

Profesor A	Profesor B
• Pertinencia de las actividades	• Propuesta metodológica
• Factibilidad de implmentación de las actividades	• Claridad del lenguaje
• Contenidos presentados	• Contenidos presentados
• Propuesta metodológica	• Pertinencia de las actividades
• Claridad de lenguaje	• Cantidad de ejemplos
• Variedad en el nivel de dificultad de las actividades	• Cantidad de actividades
• Variedad de actividades	• Variedad de actividades
• Cantidad de actividades	• Factibilidad de implementación de las actividades
• Cantidad de ejemplos	• Variedad en el nivel de dificultad de las actividades

De acuerdo a la metodología propuesta en el módulo, se obtuvo que ambos profesores coincidían con

Profesor A: Totalmente, ya que esta contextualizada en la mayoría de los temas, sin embargo, la extensión de los temas es demasiada.
Sí la promueve por que busca que los alumnos vayan creando su propio conocimiento.

Profesor B: Al momento que se presentan problemas contextualizados y preguntas guía, sí. Sin embargo, las lecturas son demasiado extensas y los alumnos se pierden, por lo que, es difícil que se logre el objetivo esperado.

Uno de los elementos finales obtenidos de la información recabada por los cuestionarios, fue el hecho que los profesores consideraban que no era necesario contar con una guía de apoyo para la implementación del módulo de Matemáticas 1.

4.2.4.2 Discusión

Uno de los aspectos que se resaltan es el proceso de implementación de las actividades de cada una de las secuencias didácticas que integran el módulo, ya que se hace énfasis en la forma que se desarrollan los contenidos matemáticos a través de situaciones problemas, con el interés de fomentar la construcción de conocimientos matemáticos a través del desarrollo de competencias; en donde se presenta una situación problema a partir de la cual se puedan construir los conocimientos matemáticos.

Los argumentos que presentaron los profesores se enfocaban en la necesidad de seleccionar aquellas actividades que permitieran obtener un avance viable para que los estudiantes lograran los objetivos establecidos, además de enfatizar la necesidad de adquirir materiales de apoyo como complemento en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Asimismo, se hacía referencia a la necesidad de realizar cambios en la metodología de trabajo establecida en los módulos de aprendizaje, es decir, se hacía referencia a realizar las actividades sin respetar la actividad de inicio, desarrollo y cierre; ya que especificaban que esto presentaba dificultades en los estudiantes, además de requerir de tiempo para lograr que éstos construyeran sus propios conocimientos con base en la resolución de situaciones problema.

El uso de situaciones problemas dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje, fue aceptado por los profesores, pero se hacía referencia a las dificultades que esto presentaba por lo que se retomaba lo que se considera un método tradicional, que consistía en presentar los conocimientos matemáticos y a partir de estos realizar ejemplos y actividades.

Profesor del curso: …pudiera funcionar también regresar un poquito a los métodos tradicionalistas sin dejar el constructivismo, es decir, decirle al alumno este es el concepto, estas son las operaciones y se puede utilizar en algún contexto, y se me hace que avanzaríamos más rápido, puede ser de alguna manera, si coincido con decir aquí te va el concepto se pueden relacionar las actividades contextualizadas y luego ya los ejercicios matemáticos, tiene muchas vertientes.

Al centrar la atención en el módulo de Matemáticas 1, se especifica que la gran cantidad de actividades que se integran en algunas de las secuencias los impulsa a seleccionar aquellas que consideran trascendentales para que los estudiantes cuenten con los conocimientos matemáticos establecidos para la asignatura. También se resaltó que en ocasiones es difícil implementar todas las actividades por cuestiones de tiempo, ya que esto los limita para cubrir todos los contenidos de la asignatura, razón por la cual consentían en la importancia de aportar los conceptos y definiciones matemáticas como introducción a los diferentes contenidos matemáticos, y a partir de estos desarrollar ejemplos y actividades.

Como parte del curso se analizó una actividad respecto al estudio de sucesiones de números, en donde se pudo observar su opinión sobre la implementación de las actividades, una parte del análisis de la actividad, era argumentar y discutir sobre las propiedades que se consideraban importantes para la implementación de ésta, con la recopilación de las hojas de trabajo se observó que los profesores identificaron los siguientes elementos:

Propósito: Identificar la relación entre sucesiones de números y su dependencia, así como su representación algebraica.

Conocimientos previos: Identificar una sucesión y el tipo o clasificación. Operaciones fundamentales como suma, multiplicación, resta y división.

Conocimientos que se promueven: Identificar términos de una sucesión y su forma algebraica.

Competencias que se promueven:

- Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
- Construye e interpreta modelos matemáticos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.

- Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

Posibles dificultades y/o errores: Conocimientos previos. Y se sugiere dar inicio con la actividad con una sucesión lineal a manera de ejemplo para un aprendizaje grupal.

A través de la discusión de su análisis se identificaron aspectos importantes de los cuales se resaltó la inquietud por las dificultades que presentan los estudiantes en la resolución de una sucesión cuadrática, especialmente en la identificación de una expresión algebraica.

Lo que dio lugar a la discusión sobre la pertinencia de utilizar una sucesión cuadrática en una actividad de inicio, de acuerdo a la experiencia que han tenido con la implementación de esta actividad, ya que se han presentado dificultades en los estudiantes principalmente para establecer la expresión algebraica de la sucesión numérica. Aspecto que consideraban no era adecuado para los estudiantes, ya que al implementar la actividad no lograban establecer una expresión algebraica general para la sucesión que modelaba esta actividad.

La discusión se centró en definir el propósito de la actividad y establecer si era adecuada como una actividad de inicio, ya que se argumentaba la importancia que los estudiantes contaran con los conocimientos matemáticos para desarrollar esta actividad.

4.2.4.3 Reflexiones del discurso de los profesores

Con base en el análisis de los cuestionarios y la videograbación de las discusiones que se realizaron, se estableció que los profesores consideran el módulo como parte de su práctica docente, para lo cual se toman en cuenta algunas de las actividades como apoyo en la construcción de conocimientos matemáticos. Además de establecer que existen dificultades en la implementación de las actividades, por el hecho de que los estudiantes presentan diferentes dificultades en la resolución de estas, razón por la cual seleccionan las actividades que consideran adecuadas.

El conocer la opinión de los profesores sobre el módulo de aprendizaje, así como el papel que juega dentro de sus prácticas docentes, permitió tener una visión de las acciones que éstos desarrollan en el salón de clases aportando en las características que habían sido consideradas para el diseño de nuestra guía, si bien en primer instante se consideró que no era necesario el contar con un apoyo para la implementación del módulo, observando que existían algunas dificultades.

La recopilación de información proporcionó tres enfoques diferentes sobre la visión que tienen los profesores sobre la incorporación de nuevos módulos de aprendizaje: la interpretación que se da a la metodología del módulo de aprendizaje, los materiales complementarios y la reflexión sobre los propósitos de las actividades.

Metodología del módulo

El establecer una metodología basada en la resolución de problemas presenta dificultades en la implementación, se pudo observar que promover que los estudiantes construyan sus propios conocimientos a través de la resolución de situaciones problemas representa un desafío, sin embargo, a largo del curso se obtuvo que una de las principales preocupaciones se centra en la recopilación de conceptos y definiciones como parte de un aprendizaje adecuado.

Se pierde de vista el papel de las competencias dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje, en donde el reflexionar y argumentar sobre las acciones que se están desarrollando también fomenta en los estudiantes la construcción del conocimiento, además de aportar en la habilidad para afrontar las situaciones problema que se le presentan.

Lo cual aporta en la fundamentación de nuestra propuesta, en donde se proporcione a los profesores una guía de apoyo en la implementación del módulo, resaltando aquellos aspectos que se encuentran detrás de la organización y diseño de las actividades de las secuencias didácticas.

Materiales complementarios

La opinión que se vio reflejada en la mayoría de los profesores fue la necesidad de recurrir a otros materiales para implementar sus clases, por las dificultades que presentan sus estudiantes o como apoyo a las actividades del módulo, por esta razón se incrementa el interés por diseñar herramientas de apoyo.

Por una parte, como herramienta para promover ciertas competencias en los estudiantes, en donde éstos tengan la oportunidad de crear sus propias conjeturas y a través de la manipulación de applets puedan comprobar o en su caso crear nuevas estrategias, con la finalidad de establecer conclusiones respecto a una situación problema. Y que esto a su vez permita promover la argumentación y reflexión de las acciones que están desarrollando fortaleciendo la construcción de conocimientos matemáticos.

Además, de aportar herramientas como apoyo en el aprendizaje de forma autónoma en donde los estudiantes cuenten con la oportunidad de tomar decisiones y que esto les permita sustentar su postura ante la resolución de una situación problema.

Propósitos de las actividades

A través del análisis de la actividad y los argumentos que estos presentaron, se pudo observar que los profesores no contaban con una buena interpretación de los propósitos de la actividad, expresando la dificultad que presentan los estudiantes en la resolución de esta actividad en particular, ya que enfocaban su atención en promover que los estudiantes construyeran una expresión algebraica general de una sucesión cuadrática. Sin embargo, no se hacía notar que el propósito de la actividad estaba enfocado en otras propiedades, es decir, que el estudiante pudiera establecer una expresión algebraica a través de la relación que existe entre dos términos consecutivos de la sucesión y definir su expresión recursiva, propósito que se refleja a través de los cuestionamientos que componen la actividad.

A partir de la discusión se observó que uno de los elementos importantes dentro del diseño, era establecer de forma clara y precisa los propósitos de las actividades, además de hacer hincapié en los objetivos de cada uno de los elementos que se integran las secuencias didácticas.

Capítulo 5 La propuesta: Guía de apoyo para la actividad docente

Como parte de la organización de la guía, se presta especial atención en la identificación de algunas de las características del módulo de aprendizaje de Matemáticas 1 que se consideran significativas, como lo es la integración de sugerencias que se han incorporado de acuerdo a las herramientas teóricas, que permitan un mayor desempeño de las prácticas docentes, además de proporcionar sugerencias con respecto a algunos avances que se han hecho del estudio de sumas y sucesiones de números.

La parte fundamental de la organización de nuestra guía es crear una relación entre los objetos matemáticos que se establecen en módulo de aprendizaje "Matemáticas 1" del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, y las competencias docentes que el profesor de matemáticas debe desarrollar para lograr los propósitos que define el programa de estudios, con base en las herramientas teóricas que EOS proporciona, como lo son las configuraciones didácticas y las funciones docentes. Para lo cual fue de suma importancia detectar las características que integran el módulo de aprendizaje, para describir las trayectorias y configuraciones didácticas que integran el bloque respecto a series y sucesiones de números.

5.1 Características del módulo de aprendizaje "Matemáticas 1"

Uno de los documentos base es el módulo de aprendizaje, el cual está diseñado a partir de un enfoque que centra su atención en el desarrollo de competencias. Por esta razón se hace énfasis tanto en el conocimiento matemático como en las capacidades y habilidades que los estudiantes deben desarrollar a lo largo de su EMS.

A partir de la resolución de situaciones problema se intenta dejar de lado los procesos de memorización y se aporta en el desarrollo de competencias genéricas y disciplinares, dando oportunidad a los estudiantes de desarrollar sus habilidades no solo en el salón de clases sino en el ámbito social. Además de dar la oportunidad a que sean los estudiantes quienes construyan su propio conocimiento a través de la formulación de conjeturas y conclusiones sobre las acciones y procedimientos que llevan a cabo.

El módulo está constituido por nueve bloques centrados en temas de algebra y aritmética, en donde se pretende establecer una relación entre los objetos matemáticos que se estudia en cada uno de estos bloques a través de secuencias didácticas, cada secuencia está integrada por actividades de inicio, desarrollo y cierre además de dos secciones como complemento a las actividades que ofrecen una visión del avance que los estudiantes han adquirido en la culminación de cada bloque.

Una parte importante es la estructura metodológica en donde se establecen las herramientas con las que cuenta el módulo, una de ellas es el uso de iconos para representar las acciones que deben llevarse a cabo cuando se realiza una actividad. Dentro de estas herramientas está la organización de las actividades, el uso de tecnología, la forma de trabajar cada una de las actividades: individual, equipos o grupal, entre otras.

Nuestro interés se centra principalmente en el bloque 3 “Sumas y sucesiones de números”, dicho bloque cuenta con dos secuencias didácticas que integran una serie de actividades que contemplan desde los números naturales hasta el estudio de series.

5.1.1 Sumas y sucesiones de números

El bloque correspondiente al tema de sumas y sucesiones de números se concentra en dos objetivos generales: la modelación algebraica y la identificación de patrones de sucesiones aritméticas y geométricas, en donde se hace uso de objetos matemáticos que se estudiaron en bloques anteriores y se integran nuevos objetos matemáticos que formaran las bases para los bloques previos.

La configuración epistémica se concentra en el estudio de diferentes objetos matemáticos que proporcionan las herramientas necesarias para la construcción del concepto matemático “sucesión”, el estudio se enfoca en diferentes conceptos como se muestra en la Ilustración 7. 1.

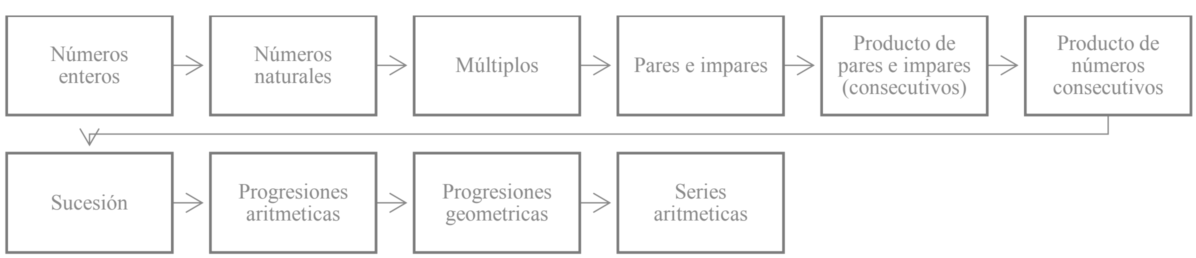


Ilustración 7. 1 Conceptos matemáticos incorporados en el bloque 3, de Matemáticas 1

A través de las actividades de cada una de las sucesiones didácticas se pretende integrar los conocimientos necesarios para que los estudiantes construyan su propio conocimiento de tal forma que emerjan los conceptos que formarán parte de su significado personal logrado.

Sin embargo, un aspecto importante es la forma de implementar las actividades que conforman el módulo de aprendizaje, dicha acción forma parte de la práctica docente en donde el profesor determina la función que jugará esta herramienta. Por esta razón es importante que el profesor cuente con sugerencias de apoyo, tanto de las actividades que se proporcionan como del diseño de actividades complementarias.

5.2 Estructura de la guía

Con base en el análisis de idoneidad didáctica del bloque “Sumas y sucesiones de números”, así como las competencias docentes que se establecen para el profesor, se identificaron algunos elementos importantes que contribuyen a elevar aquellos componentes que se destacaron por contar con un nivel bajo.

De acuerdo a las configuraciones y trayectorias se establecieron algunos de los elementos que formarán parte de nuestro diseño, es decir, destacar aspectos significativos de las actividades que integran el Bloque3. Además de aportar las herramientas necesarias para que el profesor pueda desarrollar adecuadamente los objetos matemáticos involucrados en el estudio de sucesiones numéricas.

Como parte del diseño de nuestra guía se identificaron elementos que formaran parte de su estructura, adentrando a las acciones que el docente debe desarrollar en el salón de clases, enfocado en tres elementos:

- **Orientaciones didácticas**: Su función es servir como apoyo a la práctica docente, se indican las competencias genéricas y disciplinares, los objetivos, conocimientos matemáticos, así como las posibles respuestas; lo cual proporciona herramientas para las funciones que el profesor debe desarrollar para la implementación de cada una de las actividades que integran las secuencias didácticas del módulo.
- **Applets complementarios**: Éste consiste en diseño de applets como apoyo a las actividades que integran el módulo, proporcionando una herramienta para el profesor, ya sea como implementación en el desarrollo de la actividad o como apoyo a la institucionalización de los conocimientos matemáticos. Además de proporcionar orientaciones didácticas para la manipulación de los elementos que integran el applet, así como el objetivo de cada uno de ellos.
- **Actividades complementarias**: Interesa aportar una serie de actividades como apoyo a los conocimientos matemáticos que se promueven en las actividades que integran el módulo,

además de presentar nuevos contextos para el estudio de sucesiones, a través de la resolución de hojas de trabajo y la manipulación de applets.

Si bien el diseño de la guía se concentra en estas tres vertientes, se integraron algunos elementos que proporcionaran un mayor aporte en la estructura de la guía.

5.2.1 Guía para el profesor

Como parte de la guía se han incorporado elementos, que proporcionen una herramienta para las prácticas docentes y las funciones que el profesor de matemáticas debe desarrollar. Por lo cual se incorporaron algunas secciones que proporcionaran al profesor los propósitos de cada una de los elementos que incorporan el módulo de aprendizaje.

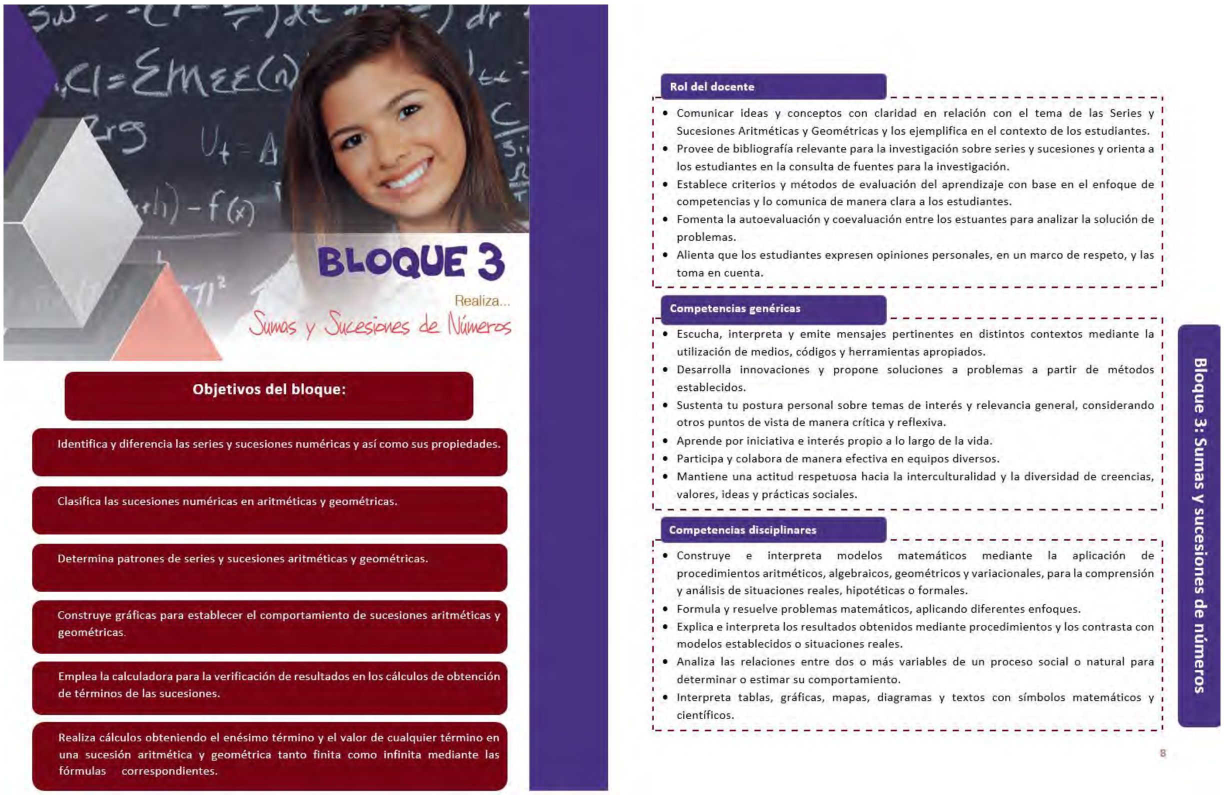
Modalidades de trabajo

De acuerdo a la estructura del módulo, se ha incorporado una sección en donde se describe el propósito de cada una de estas modalidades: individual, equipo y grupal. En cada una de las secuencias didácticas que integran el módulo se enfatiza en la modalidad de trabajo recomendada, sin embargo, es necesario identificar el propósito de ésta, por lo cual incorpora una sección en donde se hace una descripción detalla de la importancia de cada una en el salón de clases.

- Individual: enfatizar en la importancia que los estudiantes cuenten con momentos de reflexión propia, en donde pueda enfrentarse a sus problemas.
- Equipo: compartir ideas respecto a una problemática común, además de valorar su participación y la de sus compañeros de forma crítica y
- Grupal: Establecer una conclusión de acuerdo a las conjeturas y argumentos que se han desarrollado en las actividades, poniendo en juego los conocimientos matemáticos que se han implementado en la resolución de actividades.

Objetivos del bloque

El módulo de aprendizaje se encuentra diseñado en bloques, cada uno enfocado en algunos conocimientos matemáticos, con base en el significado de referencia se incorporan los objetivos del bloque 3, así como el rol del docente y las competencias a desarrollar, que son los elementos que incorporan esta sección (Ilustración 7.2). En donde se especifica los elementos que el programa de estudios "Matemáticas 1" establece para el estudio de series y sucesiones de números.


BLOQUE 3

Realiza...

Sumas y Sucesiones de Números

Objetivos del bloque:

- Identifica y diferencia las series y sucesiones numéricas y así como sus propiedades.
- Clasifica las sucesiones numéricas en aritméticas y geométricas.
- Determina patrones de series y sucesiones aritméticas y geométricas.
- Construye gráficas para establecer el comportamiento de sucesiones aritméticas y geométricas.
- Emplea la calculadora para la verificación de resultados en los cálculos de obtención de términos de las sucesiones.
- Realiza cálculos obteniendo el enésimo término y el valor de cualquier término en una sucesión aritmética y geométrica tanto finita como infinita mediante las fórmulas correspondientes.

Rol del docente

- Comunicar ideas y conceptos con claridad en relación con el tema de las Series y Sucesiones Aritméticas y Geométricas y los ejemplifica en el contexto de los estudiantes.
- Provee de bibliografía relevante para la investigación sobre series y sucesiones y orienta a los estudiantes en la consulta de fuentes para la investigación.
- Establece criterios y métodos de evaluación del aprendizaje con base en el enfoque de competencias y lo comunica de manera clara a los estudiantes.
- Fomenta la autoevaluación y coevaluación entre los estuantes para analizar la solución de problemas.
- Alienta que los estudiantes expresen opiniones personales, en un marco de respeto, y las toma en cuenta.

Competencias genéricas

- Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
- Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
- Sustenta tu postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.
- Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
- Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
- Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.

Competencias disciplinares

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Bloque 3: Sumas y sucesiones de números

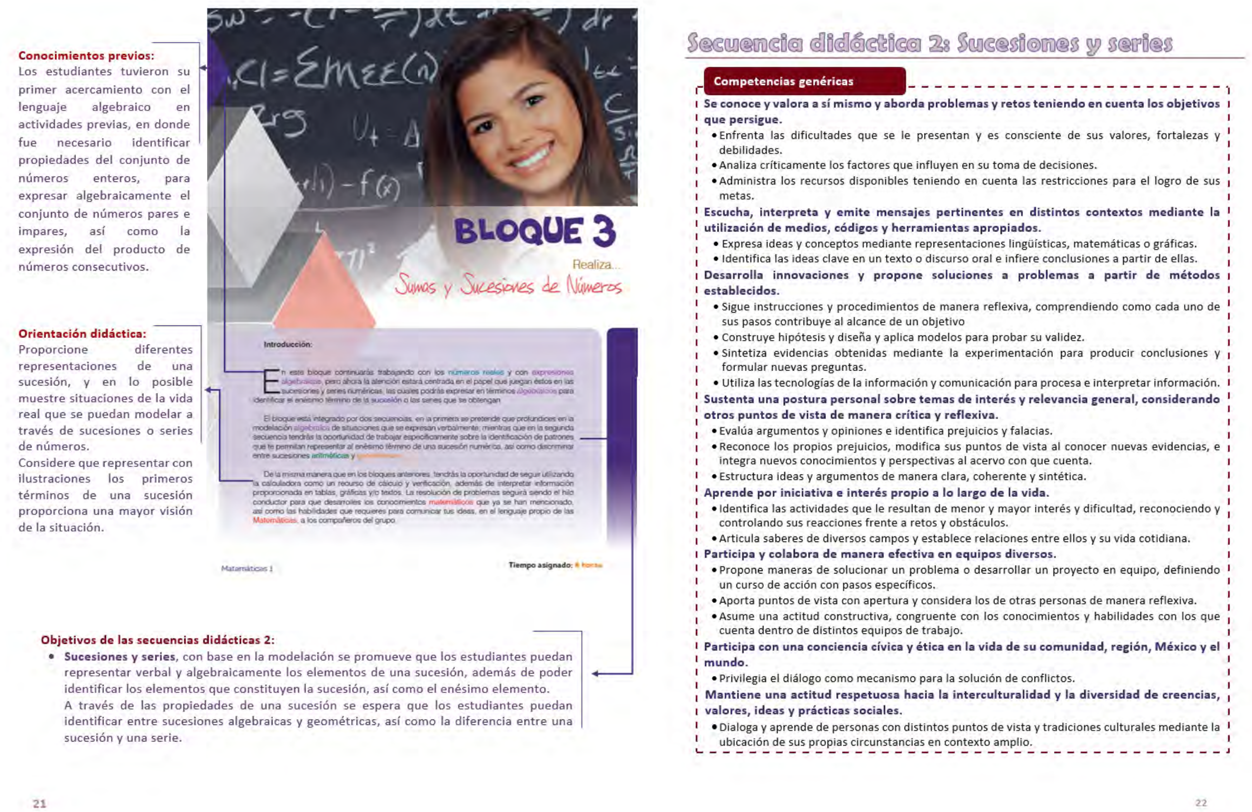
8

Ilustración 7.2 Sección de guía para bloque 3 (Anexo)

Si bien, el profesor de matemáticas cuenta con los documentos que establecen cada uno de los elementos que se incorporaron en el diseño de la guía para el inicio del bloque, se toma en cuenta la incorporación de cada uno de estos como parte de la planeación que el profesor debe considerar. En primer instante se presenta de forma general dichos aspectos, sin embargo, a lo largo de las actividades de las secuencias didácticas se desarrolla con mayor énfasis. Como argumenta Godino y Batanero (2008) una las primeras competencias que debe desarrollar el profesor es la capacidad de diseño, en donde debe tomar como consideración dentro de su planificación:

- Motivación curricular, en donde se hace específica la importancia del tema.
- Objetivos generales.
- Competencias generales y competencias matemáticas.
- Contenidos.

Con base en estos factores es que se lleva a cabo la planificación, en donde toma un papel importante el significado institucional de referencia y el pretendido, ya que de éstos dependen las acciones que se pondrán en práctica en el salón de clases. Por lo cual, al inicio de cada secuencia didáctica se indica las competencias genéricas y sus atributos correspondientes, que de acuerdo al análisis del módulo de aprendizaje se identificaron las competencias genéricas que se promueven con la implementación de las actividades que se incorporan en el bloque (Ilustración 7.3).



Conocimientos previos:
Los estudiantes tuvieron su primer acercamiento con el lenguaje algebraico en actividades previas, en donde fue necesario identificar propiedades del conjunto de números enteros, para expresar algebraicamente el conjunto de números pares e impares, así como la expresión del producto de números consecutivos.

Orientación didáctica:
Proporcione diferentes representaciones de una sucesión, y en lo posible muestre situaciones de la vida real que se puedan modelar a través de sucesiones o series de números.
Considere que representar con ilustraciones los primeros términos de una sucesión proporciona una mayor visión de la situación.

BLOQUE 3
Realiza...
Sumas y Sucesiones de Números

Introducción:

Matemáticas 1

Tiempo asignado:

Objetivos de las secuencias didácticas 2:
- **Sucesiones y series**, con base en la modelación se promueve que los estudiantes puedan representar verbal y algebraicamente los elementos de una sucesión, además de poder identificar los elementos que constituyen la sucesión, así como el enésimo elemento.
A través de las propiedades de una sucesión se espera que los estudiantes puedan identificar entre sucesiones algebraicas y geométricas, así como la diferencia entre una sucesión y una serie.

21

Secuencia didáctica 2: Sucesiones y series

Competencias genéricas

Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
- Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
- Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones.
- Administra los recursos disponibles teniendo en cuenta las restricciones para el logro de sus metas.

Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.

Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
- Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo
- Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
- Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.
- Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesa e interpretar información.

Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.
- Evalúa argumentos y opiniones e identifica prejuicios y falacias.
- Reconoce los propios prejuicios, modifica sus puntos de vista al conocer nuevas evidencias, e integra nuevos conocimientos y perspectivas al acervo con que cuenta.
- Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.

Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
- Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.
- Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.

Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
- Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
- Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
- Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.
- Privilegia el diálogo como mecanismo para la solución de conflictos.

Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.
- Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en contexto amplio.

22

Ilustración 7.3 Sección de guía, secuencia didáctica 2 (Anexo)

Asimismo, se expresan de forma general los conocimientos matemáticos que se pondrán en juego a través de la resolución de las actividades que la integran, haciendo referencia a los objetos matemáticos que se estudiaron en bloques anteriores y los contenidos en las actividades del bloque que se está estudiando, con base en los objetivos del bloque y las actividades de la secuencia.

Propósito de la actividad

Como parte del diseño se incorporaron diferentes elementos con el propósito de aportar una mayor cantidad de herramientas para el profesor, cada sección cuenta con dos hojas (Ilustración 7.4) del lado izquierdo se cuenta con una página del módulo, para que el profesor cuente con una referencia del material con el que trabajan los estudiantes y que esto permita llevar un orden respecto a las acciones que este debe desarrollar. Además, se indican los conocimientos matemáticos que se pondrán en juego en la actividad establecida, tomando en cuenta el propósito de la actividad, así como los posibles errores o dificultades que pudieran presentarse en el desarrollo de las actividades.

Ilustración 7.4 Sección de guía, actividad 1 (Anexo)

Como parte de la guía se contempla la importancia que tiene el definir los propósitos de cada uno de los elementos del módulo de aprendizaje, por tal razón se incorpora una página (*Ilustración 7.4*) complementaria para cada sección, en donde se estable el propósito de la actividad, con la finalidad de crear un apoyo para la implementación de las actividades del módulo de aprendizaje.

Conocimientos matemáticos

Uno de los aspectos trascendentales de las actividades es identificar los conocimientos matemáticos necesarios para la resolución de las actividades, en donde es indispensable reconocer aquellos conocimientos que han sido utilizados en los bloques anteriores, así como en el nivel educativo anterior.

Además, de brindar una base para las acciones que el profesor debe desarrollar para promover que los estudiantes desarrollen dichos conocimientos y obtener un mayor provecho de las actividades que se incorporan en las secuencias didácticas, para lograr los propósitos de estas.

Competencias disciplinares

Uno de las acciones del profesor es promover ciertas competencias, como apoyo se cuenta con una sección en donde se definen las competencias disciplinares que se promueven a través de la resolución de las actividades, además de contar con la descripción de los atributos necesarios para promover dichas competencias. A través de la aplicación de los atributos se espera proporcionar una herramienta para que el profesor cuente con un apoyo en su práctica docente, y que esto le permita promover que los estudiantes desarrollen ciertas competencias matemáticas.

Posibles respuestas

De acuerdo a las actividades y sus propósitos se incorporaron las posibles respuestas, en donde se muestre aquellos procedimientos o el tipo de argumentos que se espera que los estudiantes pueden presentar al llevar a cabo las actividades del bloque. Destacando la importancia de no ser la única respuesta, para algunos casos, ya que es necesario identificar que los estudiantes cuentan diferentes visiones y que esto les permite establecer diferentes estrategias, por lo cual se muestra un ejemplo de las respuestas que los estudiantes pueden presentar, pero no las únicas.

Errores y/o dificultades

El introducir este elemento como parte del diseño permite al profesor reflexionar un poco sobre las situaciones que se pueden presentar en la implementación de las actividades del bloque, por esta razón se incorporan algunas de los errores o dificultades que los estudiantes pueden presentar en la resolución de las actividades.

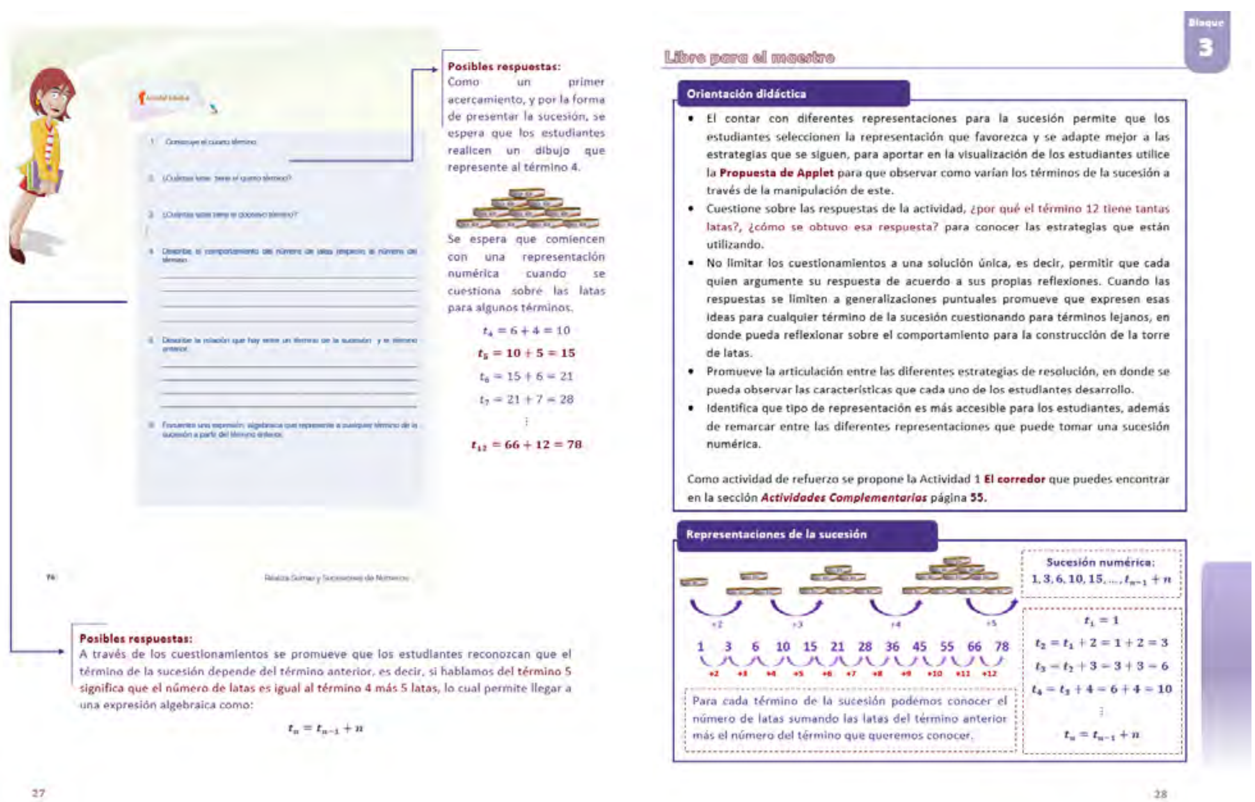
Orientaciones didácticas

El contar con diferentes elementos como parte del diseño de la guía tiene como propósito proporcionar un apoyo a los profesores que imparte la asignatura de Matemáticas 1, en donde se establecen ciertos objetivos. Así que se presentan algunas orientaciones didácticas que para apoyar la implementación de las actividades del bloque 3. Asimismo, interesa que el profesor cuente con una visión de las acciones que debe planear para después desarrollar en el salón de clases y tener las herramientas necesarias para las posibles situaciones que se pudieran presentar.

Este elemento espera proporcionar al profesor una visión de lo que se puede presentar en la implementación de las actividades, además de identificar las acciones a llevar a cabo dentro de sus prácticas docentes. Es decir, describir los aspectos relevantes en el desarrollo de las actividades y que esto permita planear aquellas acciones que debe poner en práctica en el salón de clases.

Representaciones de la sucesión

La incorporación de las diferentes representaciones de una sucesión, en este caso para cada una de las sucesiones que se presentan en las actividades, proporcionando a los profesores una visión de las posibles estrategias que los estudiantes utilizan como herramienta para el estudio de las situaciones problemas que se le presentan (Ilustración 7.5). Además de formar parte del material de apoyo para el profesor, en donde pueda acudir a ellas como aporte para la visualización de los estudiantes, y que esto contribuya al proceso de generalización.



Posibles respuestas:
Como un primer acercamiento, y por la forma de presentar la sucesión, se espera que los estudiantes realicen un dibujo que represente al término 4.

Se espera que comiencen con una representación numérica cuando se cuestiona sobre las latas para algunos términos.

$t_4 = 6 + 4 = 10$

$t_5 = 10 + 5 = 15$

$t_6 = 15 + 6 = 21$

$t_7 = 21 + 7 = 28$

$\vdots$

$t_{12} = 66 + 12 = 78$

Posibles respuestas:
A través de los cuestionamientos se promueve que los estudiantes reconozcan que el término de la sucesión depende del término anterior, es decir, si hablamos del término 5 significa que el número de latas es igual al término 4 más 5 latas, lo cual permite llegar a una expresión algebraica como:

$$t_n = t_{n-1} + n$$

27

Libro para el maestro

Bloque 3

Orientación didáctica

- El contar con diferentes representaciones para la sucesión permite que los estudiantes seleccionen la representación que favorezca y se adapte mejor a las estrategias que se siguen, para aportar en la visualización de los estudiantes utilice la **Propuesta de Applet** para que observar como varían los términos de la sucesión a través de la manipulación de este.
- Cuestione sobre las respuestas de la actividad, ¿por qué el término 12 tiene tantas latas?, ¿cómo se obtuvo esa respuesta? para conocer las estrategias que están utilizando.
- No limitar los cuestionamientos a una solución única, es decir, permitir que cada quien argumente su respuesta de acuerdo a sus propias reflexiones. Cuando las respuestas se limiten a generalizaciones puntuales promueve que expresen esas ideas para cualquier término de la sucesión cuestionando para términos lejanos, en donde pueda reflexionar sobre el comportamiento para la construcción de la torre de latas.
- Promueve la articulación entre las diferentes estrategias de resolución, en donde se pueda observar las características que cada uno de los estudiantes desarrollo.
- Identifica que tipo de representación es más accesible para los estudiantes, además de remarcar entre las diferentes representaciones que puede tomar una sucesión numérica.

Como actividad de refuerzo se propone la Actividad 1 **El corredor** que puedes encontrar en la sección ***Actividades Complementarias*** página **55**.

Representaciones de la sucesión

+2 +3 +4 +5

1 3 6 10 15 21 28 36 45 55 66 78

+2 +3 +4 +5 +6 +7 +8 +9 +10 +11 +12

Para cada término de la sucesión podemos conocer el número de latas sumando las latas del término anterior más el número del término que queremos conocer.

Sucesión numérica:
$1, 3, 6, 10, 15, \ldots, t_{n-1} + n$

$t_1 = 1$

$t_2 = t_1 + 2 = 1 + 2 = 3$

$t_3 = t_2 + 3 = 3 + 3 = 6$

$t_4 = t_3 + 4 = 6 + 4 = 10$

$\vdots$

$t_n = t_{n-1} + n$

28

Ilustración 7.5 Sección de guía, actividad 1 (Anexo)

5.2.2 Propuesta de applet

Una de las herramientas de apoyo, son los applets que fomentan una reflexión por parte de los estudiantes, a través de la manipulación de las herramientas que el programa de GeoGebra ofrece, se diseñaron applets que dieran la oportunidad a los estudiantes de reflexionar sobre las situaciones que se trabajan en las actividades del bloque, así como las actividades propuestas.

El diseño de cada uno de los applets tiene como fundamento que los estudiantes puedan poner a prueba sus conjeturas y que a partir de sus propuestas puedan comprobar que las regularidad y propiedades que identifican son adecuados, o en su caso que puedan reflexionar sobre las estrategias que éstos emplean en la resolución de las actividades, dando la oportunidad de realizar cambios en sus conjeturas y que a su vez esto permita construir argumentos sobre las decisiones que se están tomando.

Un parte importante es dar al estudiante la oportunidad de identificar sus limitaciones y dificultades por sí mismo, por esta razón se cuentan con herramientas que le permitan comprobar si las afirmaciones que realizan al momento de resolver una actividad son adecuadas y en su caso hacer uso del applet como apoyo para reflexionar sobre las estrategias de resolución que está poniendo en juego. Además de promover que los estudiantes

5.2.3 Actividades complementarias

Como parte de las herramientas de apoyo a la guía para el profesor, se tomó en cuenta la incorporación de algunas actividades que funjan como apoyo a las actividades del módulo de aprendizaje y que formen parte de la planeación del profesor de matemáticas. De acuerdo a algunas investigaciones se realizaron adaptaciones, respecto al propósito del bloque, de actividades que promovieran los conocimientos matemáticos que se establecen como objetivo.

La incorporación de estas actividades aportó en la propuesta de applet que proporcionaran una mayor visión de las situaciones problemas que se han incorporado, además de ilustrar algunas aplicaciones en las que se puede observar el estudio de sucesiones. Al igual que las actividades del módulo de aprendizaje, las actividades complementarias cuentan con una sección en donde se establecen:

- Propósito
- Conocimientos matemáticos

- Competencias disciplinares a promover
- Posibles respuestas
- Errores y/o dificultades
- Orientaciones didácticas
- Representaciones de la

Actividad 1. El corredor

De acuerdo al objetivo de la actividad 1 de la segunda secuencia didáctica, que proporciona una situación que puede ser modelada a través de una sucesión numérica, para que los estudiantes reflexionen sobre las propiedades que cumple la construcción de una torre de latas que sigue una regla de construcción. Además, identificar el patrón que sigue la sucesión para establecer los términos que componen, lo cual permita formular una expresión algebraica, a través del uso de una regla recursiva, para definir cualquier término de la sucesión identificando la relación que existe entre dos términos consecutivos.

La actividad del corredor es una adaptación de una situación de acuerdo a los ejemplos que Mateos (2012) realiza para el proceso de generalización, con la finalidad de diseñar una propuesta para los estudiantes de bachillerato.

Actividad 1. El corredor

Un corredor se prepara para un maratón en donde debe recorrer 42 km, y ha decidido prepararse con anticipación, para iniciar su entrenamiento puso como meta recorrer 5 km diarios, y aumentar 500 metros al inicio de cada semana.

Semana	1	2	3	4	5
Distancia (km)	5				

¿Cuánto tendrá que recorrer en su cuarta semana? __________

¿Y en su semana número 15? __________

Si el maratón es dentro de un año, ¿Podrá recorrer 42 km en su entrenamiento? Explica tu respuesta.

¿Cuántas semanas debe entrenar el corredor si desea recorrer exactamente 42 km en su última semana?

Se inicia la actividad con la descripción de la situación problema, en donde se realiza una propuesta para el entrenamiento de un corredor de maratones que va aumentando semana a semana, en la primera sección se comienza trabajando con cuestionamientos introductorios para que los estudiantes identifiquen las regularidades de los cambios que existirán en el entrenamiento, además de incorporar cuestionamientos de generalización próxima para que puedan identificar las estrategias que les permitan conocer los términos de la sucesión.

Como un segundo momento se promueve crear una reflexión sobre la situación, en donde se presenta un nuevo enfoque de la situación para que los estudiantes puedan reflexionar sobre las regularidades del comportamiento que el entrenamiento tendrá semana a semana; con esta finalidad se propone reflexionar sobre este entrenamiento y si es el adecuado para lograr un objetivo. En un primer instante se realiza una propuesta de entrenamiento que no permite lograr el objetivo, para que los estudiantes reflexionen sobre una propuesta apropiada para que el corredor pueda realizar con satisfacción el maratón (Ilustración 7. 6).

Ilustración 7. 6 Imagen incorporada en el applet (Nava Marchena , 2007)

Utiliza el applet **El corredor.ggb** para explorar el comportamiento del entrenamiento que debe seguir el corredor y comprobar si las opciones que proporcionaste son las adecuadas, operando el deslizador **Semana**.

Si el corredor quiere conocer la distancia que debe recorrer para cada una de las semanas, ¿cómo podría conocer esta distancia?

Activa la casilla **Exploración 1** y utiliza tu estrategia para indicar la distancia que debe recorrer el corredor para el número de semanas que se indica, y viceversa. Llena la siguiente tabla con los valores que ingresaste en el applet.

Semanas						
Recorrido						

Activa la casilla **Comprobación** para rectificar si tus respuestas son las adecuadas.
¿Qué estrategia seguiste para que los puntos correspondieran con el entrenamiento del corredor?

Además, como apoyo a la actividad se diseñó un applet para los estudiantes, que a través de su manipulación puedan realizar pruebas respecto a las conjeturas del comportamiento del entrenamiento (Ilustración 7.7). Los estudiantes cuentan con una opción para poner a prueba su estrategia y reflexionar sobre las regularidades que se observan en la situación problema, en donde deben ingresar los valores para la distancia recorrida en un número determinado de semanas y viceversa, valores que pueden comprobar gráficamente.

Se ha decidido realizar un cambio en el entrenamiento del corredor para ver algunas opciones que permitan que el corredor pueda realizar el maratón dentro de un año, ¿con qué opciones cuenta el corredor?
Ingresa los valores **Inicio** y **Aumento** para hacer los cambios necesarios en el entrenamiento del corredor, de acuerdo a las opciones que propusiste.
Si el corredor ha decidido que en su última semana de entrenamiento quiere recorrer una distancia de 50 km para asegurar que puede terminar el maratón, describe el entrenamiento que puede seguir el corredor para que pueda llevar a cabo el maratón dentro de un año.
Propuesta:

Asimismo, se cuenta con una opción para cambiar los valores de los cuales depende el comportamiento del entrenamiento, con la finalidad de que los estudiantes puedan observar las diferentes opciones que tienen para diseñar una propuesta de entrenamiento. Y que esto permita establecer una relación entre el entrenamiento semana a semana y la sucesión numérica que lo modela, promoviendo la construcción e identificación de sucesiones numéricas como apoyo para definir una propuesta de entrenamiento viable.

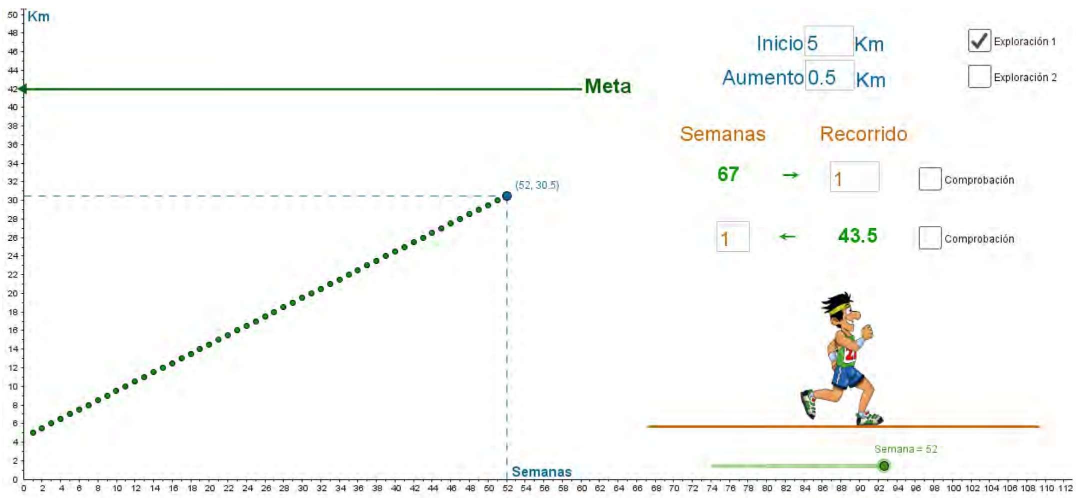


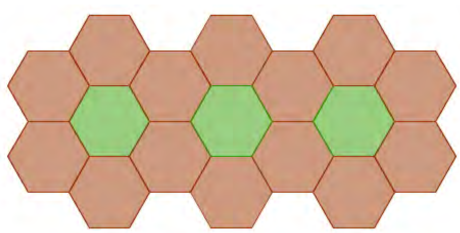
Ilustración 7.7 Applet de propuesta para la actividad del corredor

Actividad 2. Las jardineras

De acuerdo a las actividades propuestas en el módulo, se incorpora una segunda actividad en donde se pueda modelar una situación con el uso de sucesiones, en donde se deben hacer construcciones con baldosas hexagonales. El propósito es estudiar una situación para casos particulares en donde se puedan realizar conjeturas sobre el número de baldosas necesarias para construir una jardinera, y con apoyo de la ilustración de la muestra para la instalación de las jardineras los estudiantes puedan definir el número de baldosas necesarias dado un número de jardineras.

Actividad 2. Las jardineras

El Ayuntamiento quiere instalar jardineras y rodearlas con baldosas hexagonales, como se muestra a continuación:



¿cuántas baldosas necesitará para una calle en la que se dispondrán 5 jardineras? ____________

¿Y para una calle que dispondrá de 11 jardineras? ____________

Si un trabajador quiere diseñar una tabulación para conocer la cantidad de baldosas necesarias para cualquier cantidad de jardineras que le soliciten, como podría diseñar esta tabla.

Si se solicita instalar jardineras para un boulevard en donde es necesario colocar 100 jardineras, de acuerdo a la tabulación anterior ¿cuántas baldosas son necesarias para construir estas jardineras? ___________________

En primer instante se promueve que los estudiantes realicen conjeturas sobre la construcción de las jardineras, esto a través de cuestionamientos introductorios y propuestas de estrategias para conocer el número de baldosas necesarias para cualquier cantidad de jardineras por realizar, reflexionando sobre las regularidades que sigue la construcción de éstas. Y que esto les permita expresar el número de baldosas para una generalización lejana.

Como parte de la actividad se incorpora un applet en donde pueden observar los elementos que varían en la construcción de las jardineras (Ilustración 7. 8), a través de la manipulación de éste pueden observar otras opciones que permitan al estudiante desarrollar una estrategia para establecer el número de baldosas necesarias para cualquier cantidad de jardineras.

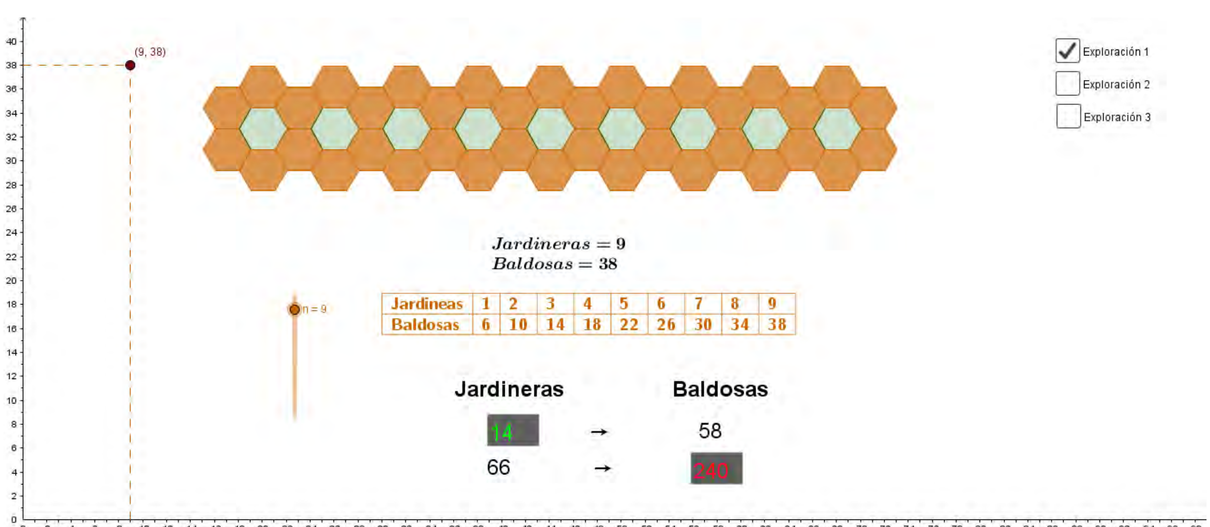


Ilustración 7. 8 Applet de propuesta para la actividad las jardineras

Se promueve que el estudiante argumente sobre los aspectos que ha tomado en cuenta para definir el número de baldosas necesarias para la construcción de jardineras, con la finalidad de impulsar la construcción de una expresión algebraica que modele la situación. Por esta razón el applet cuenta con una opción para que los estudiantes pongan a prueba su estrategia y que esto de la oportunidad a rectificar si las opciones que se están proporcionando son las adecuadas.

> Utiliza el applet **Las jardineras.ggb** para explorar la construcción de las jardineras, ¿cómo podría conocer el número de baldosas necesarias para cualquier cantidad de jardineras que sea necesario instalar?
>
> Activa la casilla **Exploración 1** y utiliza tu estrategia para indicar el número de baldosas o el número de jardineras adecuadas para los valores que se presentan en el Applet, ¿fue necesario hacer algún cambio a tu estrategia? Explica tu respuesta.

Se realiza un cambio en la forma de trabajo, en donde se establece el número de baldosas con el que se cuenta y el número de jardineras por construir, aspectos que el estudiante debe reflexionar para establecer una estrategia que le permita saber si es necesario adquirir más baldosas o si las baldosas con las que se cuenta son suficientes para construir las jardineras requeridas.

> Después de varias semanas de trabajo el encargado de administrar el material lleva un conteo del número de baldosas que resta en el almacén y se ha percatado que únicamente quedan 11 cajas de baldosas, cada una con 13 baldosas, y aún hace falta instalar 43 jardineras ¿cuántas jardineras se pueden construir con lo que se tiene en el almacén?
>
> ¿Es necesario comprar más material? Explica tu respuesta.
>
> Activa la casilla **Exploración 2** para comprobar tu respuesta.

Como parte del applet se incorpora una sección en donde los estudiantes puedan implementar la estrategia que definieron anteriormente (Ilustración 7. 9), a través de la manipulación del applet debe establecer los valores para el número de baldosas y jardineras que un empleado debe registrar como parte de su reporte semanal; además de poder comprobar si los valores que ingresaron son adecuados.

Ilustración 7. 9 Applet de propuesta para la actividad "Las jardineras"

Si el encargado del almacén quiere llevar un control de la cantidad de baldosas necesarias para los siguientes proyectos de tal forma que pueda conocer el número de jardineras que puede construir, indica los valores que este debe ingresar en su reporte semanal.

Activa la casilla **Exploración 3** y llena la siguiente tabla.

Semana	Baldosas en el almacén	Jardineras	Baldosas por comprar	Baldosas que sobran
1				
2				
3				
4				

El encargado de almacén quiere encontrar la forma de conocer el número de cajas que debe utilizar para cualquier número de jardineras a instalar, ¿cómo puede definir este número?

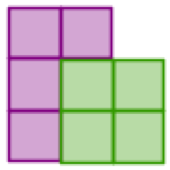
Actividad 3. El juego del Tetris

Se incorpora una actividad de Olaya (2014), en donde se hace referencia al juego "Tetris", esto con la finalidad de proporcionar a los estudiantes una visión del uso de sucesiones en juegos que ellos pueden utilizar. Como parte de esta actividad se realizaron algunas adaptaciones con la intención de que los estudiantes puedan realizar la actividad a través de un applet que simule el juego de Tetris.

Actividad 3. El juego del Tetris

Utiliza el applet **El juego del Tetris.ggb** para construir figuras usando las diferentes fichas del juego y llena la siguiente tabla.

Ejemplo:



Número de fichas: 2

Número de cuadros: 8

Número de fichas	1	2	3	4	5
Número de cuadros		8			

Si construimos una figura con 7 fichas, ¿Cuál será el número de cuadros que utilizaremos?

¿Y para una figura con 10 fichas?

Comprueba tus respuestas activando la casilla **Exploración 1**.

La primera parte de la actividad se centra en mostrar las características de las fichas que se utilizan en el juego, para que los estudiantes puedan analizar la relación que existe entre el número de fichas y el área que se cubre, esto a través del conteo de cuadros que se utilizan con cada ficha. El objetivo es que los estudiantes puedan observar que dicha relación estable una sucesión numérica, con la cual pueden conocer el número de cuadros que representa el utilizar una cierta cantidad de fichas.

Para realizar esta primera parte de la actividad se diseñó un applet que simula el juego (Ilustración 7. 10), en donde los estudiantes puedan tomar las fichas y construir algunas figuras para poder identificar la relación que existe entre el número de fichas y el número de cuadros que utilizan.

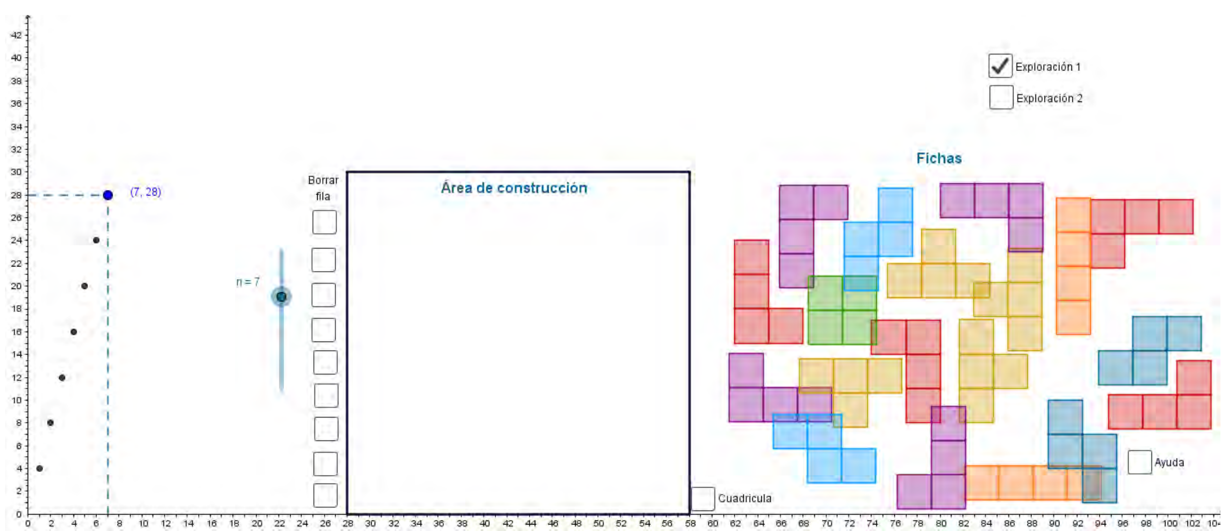


Ilustración 7. 10 Applet de propuesta para la actividad "El juego del Tetris"

Con apoyo de la Exploración 1, se promueve que los estudiantes puedan comparar sus respuestas con la representación gráfica de la sucesión que modela la situación, y que esto sirva como reflexión para la relación que existe entre las diferentes representaciones de una sucesión numérica.

Un jugador necesita conocer cuál es la mínima cantidad de fichas necesarias para construir figuras que le permitan avanzar en el juego, el cual tiene como objetivo colocar la mayor cantidad de fichas sin que el área de construcción se llene, si al llenar una fila puedes eliminarla. Por lo cual el jugador ha decidido investigar cómo avanzar en el juego, utilizando el applet y llenando la siguiente tabla.

Número de filas	Número de fichas	Número de cuadros
1		
2		
3		
4		
5		

Si el jugador quiere establecer un récord de 10 líneas, ¿Cuál es el mínimo número de fichas que necesita utilizar? Explica tu respuesta

¿Existe una relación entre la cantidad de cuadros y el número de fichas que utilizó? Explica tu respuesta

Si cuenta con un récord de 38 fichas ¿cuál es el máximo de líneas que pudo construir?

Si el jugador desea construir una regla que le permita conocer los cuadros que utilizará para cualquier cantidad de fichas ¿cómo podría definirla? Explica tu respuesta.

Después de conocer las fichas y su área, se presenta a los estudiantes una oportunidad para que analicen como es que funciona el juego, en donde ellos puedan analizar a través del applet cómo es que pueden avanzar. En primer instante se describe el objetivo el juego, para que reflexionen sobre la forma que deben colocar las fichas para conseguir un mejor resultado, esto promueve que los estudiantes realicen pruebas sobre la cantidad mínima de fichas que necesitan para cubrir un cierto número de filas.

A través del análisis de casos, se espera que el estudiante pueda definir una regla que permita conocer el número de fichas necesarias para poder romper un récord, estableciendo una relación entre el número de fichas y el área de la figura que forman, para que pueda construir la mayor cantidad de líneas posibles.

Activa la casilla **Exploración 2** y comprueba que la regla que propusiste es la correcta, comprobando que esta se cumple para algunos casos.

Número de fichas	15		26	27	
Número de cuadros		84			132

El jugador ha decidido establecer una regla que permita establecer un nuevo récord cada vez que juega, si conoce el número de cuadros necesarios para cubrir un área ¿cómo definiría está regla?

Como parte final de la actividad se propone que los estudiantes pongan a prueba su estrategia, y que a través de la manipulación del applet pueden observar si sus conjeturas son adecuadas (Ilustración 7. 11), por lo cual se presenta la exploración 2 en donde los estudiantes pueden ingresar los valores para conocer el número de cuadros estableciendo el número de fichas, y viceversa.

Ilustración 7. 11 Applet de propuesta para la actividad "El juego del Tetris"

Actividad 4. Números figurales

Una de las sucesiones que se incorpora en las actividades de la secuencia didáctica es la suma de los números naturales, a través de su fórmula recursiva y como una aplicación para el estudio de series, en donde se establece la fórmula algebraica para dicha sucesión numérica, sin hacer referencia a la construcción de ésta. Como una actividad complementaria se realiza la propuesta del estudio de los números figurales como una aportación para conocer cómo es que se establece la fórmula para los números triangulares, la cual corresponde a la sucesión mencionada anteriormente.

Como parte de la actividad se introducen los números triangulares y números cuadrados, para realizar una comparación entre los elementos de cada uno de estos números, en donde los estudiantes puedan observar cómo se construyen estos números y que esto permita establecer una relación entre ellos.

Actividad 4. Números figurales

Utiliza el applet **Números figurales.ggb** y activa la casilla Exploración 1, observa la sucesión de números cuadrados y llena la siguiente tabla.

Término	C_1	C_2	C_3	C_4	C_{10}	C_{25}	C_{51}
Número de puntos							

¿Qué características tiene cada uno de estos términos?

¿Cómo podríamos obtener el término C_n?

Expresión algebraica:

Utiliza la casilla comprobación para revisar si tus respuestas son correctas.

Se incorpora un applet con el cuál lo estudiantes puedan visualizar cómo es la construcción de los números figurales y que a través de esto pueda reflexionar sobre la construcción de los números triangulares y cuadrados, y su relación (Ilustración 7. 12).

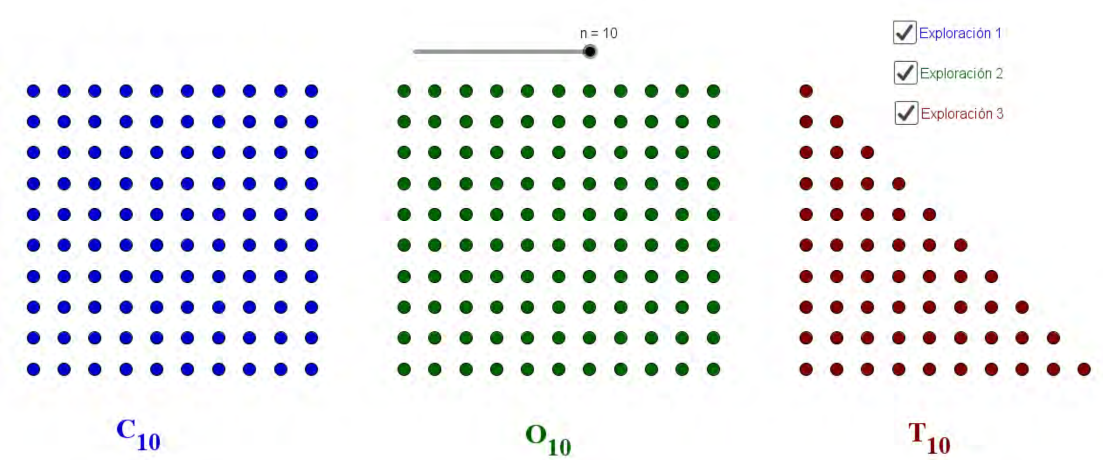


Ilustración 7. 12 Applet propuesto para la actividad "Números figurales"

De acuerdo a la propuesta de Olaya (2016) se diseñó una actividad en donde los estudiantes pudieran reflexionar sobre la sucesión que forman los números figurales. La actividad se concentra en tres sucesiones, con la finalidad de establecer la expresión algébrica de la sucesión de los números triangulares, sucesión que se estudió en algunas de las actividades de la secuencia didáctica 2 del módulo de aprendizaje.

Como primera sección de la actividad se analiza la construcción de los números cuadrados, para promover que los estudiantes reflexiones sobre la construcción de cada uno de sus términos y puedan construir su expresión algebraica, identificando las propiedades de su construcción con el uso del applet.

Activa la casilla Exploración 2, observa está nueva sucesión y llena la siguiente tabla.

Término	O_1	O_2	O_3	O_4	O_{10}	O_{25}	O_{51}
Número de puntos							

¿Qué características tiene cada uno de estos términos?

¿Cómo podríamos obtener el término O_n?

Expresión algebraica:

¿Qué relación existe entre los términos C_n y O_n?

Utiliza la casilla comprobación para revisar si tus respuestas son correctas.

Para la Exploración 2 se presenta la sucesión de los números oblongos, con la finalidad de establecer una relación entre la construcción de los números cuadrados y los números triangulares. Se comienza identificando las características de la construcción de sus términos, en donde los estudiantes puedan observar que el número de puntos que forman la base de los números cuadrados corresponde al número de puntos que forman la altura de los números oblongos y que su base se forma por el número de puntos de la base de los números cuadrados más uno.

Y que a partir de esta reflexión los estudiantes pueda observar que los números oblongos se pueden obtener con base en los números cuadrados, es decir, que para obtener el término C_n solo es necesario calcular $n \times n = n^2$ y para el caso de O_n se tiene que a partir de $n(n+1) = n^2 + n$ se obtiene cualquier término de la sucesión.

Activa la casilla Exploración 3, observa está nueva sucesión y llena la siguiente tabla.

Término	T_1	T_2	T_3	T_4	T_{10}	T_{25}	T_{51}
Número de puntos							

¿Qué características tiene cada uno de estos términos?

¿Qué relación existe entre los términos O_n y T_n?

¿Cómo podríamos definir el término T_n en función de O_n?

Expresión algebraica para T_n :

Como parte final se promueve que los estudiantes establezcan una relación entre la construcción de los números oblongos y los números triangulares, para que puedan establecer una expresión algebraica para los números triangulares, expresión que estuvieron trabajando con anterioridad.

Actividad 5. Las sucesiones numéricas en nuestro entorno

Como parte de la actividad de cierre se incorpora un video de reflexión sobre aquellos aspectos de la naturaleza y de nuestro ámbito social que pueden ser modelados a través de sucesiones numéricas, en donde se describe la relación que existe entre éstos y las matemáticas; Como apoyo a este video se integran diferentes enfoques en donde se puede observar un patrón de forma visual (Ilustración 7. 13), en especial para la naturaleza en donde se pueden observar algunas regularidades en su estructura.

Ilustración 7. 13 Secciones de video, las sucesiones numéricas en nuestro entorno

Para ilustrar como las sucesiones numéricas pueden modelar la belleza de la naturaleza se desarrolló a fondo una de las propiedades que se observa en la superficie de las piñas, en donde se pueden encontrar una serie de espirales que se forman con las espigas de este fruto. Como parte de reflexión de la aplicación de la sucesión de Fibonacci en la naturaleza, se promueve que los estudiantes puedan experimentar las propiedades de la piña, así como de otras plantas o vegetales en donde se puede observar este patrón.

La finalidad de incorporar un video es presentar a los estudiantes una visión de cómo las matemáticas se pueden aplicar en nuestro entorno, además de proporcionar situaciones que ellos puedan desarrollar, tal es el caso del estudio de la piña. En donde se promueve que los estudiantes realicen el experimento de contar las espirales que forman las espigas de una piña, primero que puedan identificar dichas espirales y puedan establecer conjeturas de acuerdo a lo que observaron con la experimentación, para después puedan formular conclusiones respecto a otras plantas, y que esto permita a los estudiantes argumentar y justificar sobre la aplicación de las sucesiones en nuestra vida diaria.

Reflexiones finales

Una vez concluido el diseño de la guía originalmente planeada, interesa exponer ahora una serie de reflexiones surgidas después del proceso que fue expuesto a lo largo de los capítulos anteriores. Dichas reflexiones han sido estructuradas partiendo de los objetivos que se declararon en el Capítulo 2, agregando algunos comentarios sobre aspectos que se considera importante destacar. Se finaliza esta sección exponiendo consideraciones sobre el impacto que el desarrollo de este trabajo en la formación personal de la autora, así como algunas sugerencias sobre cómo es posible continuar con el trabajo aquí presentado.

Sobre los propósitos de las actividades

Como en su momento se expuso, a partir de la revisión y análisis del módulo de aprendizaje, se identificaron los propósitos de cada una de las actividades incorporadas en el bloque respecto al estudio de sucesiones y series de números. Esto permitió establecer los conocimientos matemáticos y posibles respuestas que pueden presentarse en la implementación de estas actividades.

Usualmente los libros de texto contienen propuestas que seguramente resultan claras para quien los diseñó, pero no necesariamente para quien los instrumenta en un salón de clases, en este caso, el profesor. En este sentido, la guía hace una aportación en la interpretación de los componentes del módulo y un apoyo en su implementación, lo cual permita cumplir con los objetivos definidos para un contenido matemático.

Principalmente en las propuestas están guiadas a partir de un objetivo específico, en donde se espera que los resolutores logren construir cierto conocimiento; sin embargo, no en todas las ocasiones este puede identificarse adecuadamente, por cual pueden existir dificultades. Con base en esto la propuesta de una guía para el contenido de sucesiones numéricas, contribuye en la identificación y exposición de los objetos matemáticos intervinientes.

En donde se aporta una visión sobre las situaciones a las que el profesor puede enfrentarse, esto aportando en las funciones que debe desarrollar como parte de su actuación en el salón de clases. Además de lo anterior, advertir al docente sobre las dificultades que pueden presentar los estudiantes en la resolución de las tareas presentes en las secuencias didácticas, también puede resultar de utilidad, dada la riqueza de opiniones que pueden surgir en un aula en donde están coincidiendo un conglomerado de individuos con formaciones que no necesariamente son del mismo nivel.

Las diferentes variantes en las respuestas que pueden proporcionar los estudiantes son un aspecto relevante ante el cual el docente debe estar atento, buscando siempre rescatar la participación del alumnado. Hay que recordar que este hecho es promovido por el enfoque vigente en este nivel educativo, y la clase de matemáticas es un terreno muy fértil para su promoción.

En donde se puede recurrir a la formulación de argumentos, por parte de los estudiantes, como un primer aporte en la resolución de tareas, los cuales funciones como una adaptación de estrategias para las diferentes situaciones que se presentan.

Sobre la adaptación de propuestas

El contar con investigaciones y propuestas respecto al estudio de sucesiones de números permitió reconocer características que se presentan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de este contenido matemático. A través de la revisión y análisis de estas propuestas se instauraron estrategias como apoyo para las prácticas docentes de los profesores, las cuales impulsaran el proceso de generalización que desarrollan los estudiantes en el estudio de sucesiones.

Una de las aportaciones se enfoca en incorporar ilustraciones de la sucesión que se está modelando, por esta razón una de las características de las actividades complementarias es el uso ilustraciones como parte inicial de las tareas a realizar, además de ser retomadas para los applets como contribución en la visualización de las situaciones analizadas. El uso de ilustraciones como parte inicial del proceso de generalización crea un apoyo para los estudiantes, a través del análisis de estas pueden reflexionar sobre las propiedades y características de una sucesión, ya que en ocasiones es difícil para ellos reconocer su patrón.

Dado esto se intenta aportar en la perspectiva que se tiene respecto al estudio de casos para la determinación de variantes y constantes, como parte inicial del proceso de generalización, incitando en la formulación y comprobación de conjeturas. Lo cual otorga a los estudiantes una mayor motivación en la selección de estrategias, además de dar la oportunidad de poner a prueba sus conocimientos.

Asimismo, se toma en cuentan el identificar las representaciones de sucesiones como apoyo en la selección y construcción de estrategias para el proceso de generalización de los estudiantes, con base en esto se diseñaron las representaciones de las sucesiones que modelan las situaciones que se presentan en el módulo.

En ocasiones presenta una dificultad para los estudiantes establecer una expresión algebraica, sin embargo, pueden argumentar las propiedades de una sucesión de forma verbal o numérica, por esta razón se considera importante el establecer una relación entre cada una ellas. Es decir, tomar como base una generalización verbal para la fundamentar las bases que le permitan constituir una generalización aritmética o gráfica, lo cual impulse en la formulación de expresiones algebraicas.

De acuerdo a lo anterior, se pretende inducir en la conexión de representaciones como aporte en la selección y adaptación de estrategias para la resolución de sucesiones, lo cual muestre una mayor visión de sus propiedades. Es decir, que los estudiantes cuenten con la oportunidad de seleccionar la representación que mejor se adapte a sus habilidades y conocimientos matemáticos, dando la oportunidad de realizar conexiones entre los aspectos que puede observar a través del análisis de una situación.

Otra de las aportaciones que se consideraron dentro del diseño, fue estructurar las actividades a través de diferentes niveles de cuestionamiento aportando en la identificación de propiedades de una sucesión para lograr establecer una expresión algebraica, con base en esto se estructuraron las actividades complementarias y los componentes de los applets.

Es importante reconocer que el proceso de generalización es algo complejo, en donde el estudiante debe ir pasando por etapas de análisis, en donde pueda ir precisando las características que reconoce. En este sentido se enfatiza en la importancia de incorporar cuestionamientos en diferentes niveles, que promuevan la reflexión sobre las propiedades de una sucesión, orientando en la identificación de su patrón. El uso de cuestionamientos en diferentes niveles permite orientar a los estudiantes respecto a los aspectos que modelan una sucesión, para hacer énfasis en aquellas características de las cuales depende su comportamiento.

Si bien el área de Matemática Educativa ha permitido instaurar una línea de investigación respecto a la innovación en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la guía pretende incorporar propuestas que promuevan la construcción del conocimiento de los estudiantes, adaptando dichas propuestas a las necesidades de los estudiantes de bachillerato del Estado de Sonora.

Sobre las actividades complementarias

Como parte del diseño de la guía se incorporaron actividades para proporcionar una visión respecto a las aplicaciones de un contenido matemático, con la intención de promover en los estudiantes un interés por adentrarse en la resolución de problemas como aporte en la construcción se sus conocimientos, con base se en esto se espera que la propuesta de actividades promueva en los estudiantes su visión respecto al estudio de sucesiones.

La selección de actividades permitió contribuir con herramientas de apoyo para los profesores, promoviendo en la selección y adaptación de actividades complementarias. Dichas actividades pretenden demostrar que la incorporación de nuevos materiales lleva consigo un análisis y valoración de los componentes que instituyen el significado de referencia y el significado pretendido. En este sentido se pretende que las actividades contribuyan a alcanzar los objetivos establecidos para el estudio de sucesiones y series de números, promuevan que los estudiantes refuercen sus conocimientos a través de la toma de decisiones respecto a la selección y uso de estrategias.

La finalidad de incluir actividades de la vida cotidiana, tiene como fundamento el hecho de que se pongan en juego las visiones de los estudiantes al enfrentarse a una problemática, y que esto fomente en la construcción de sus propios conocimientos, como se hizo en las civilizaciones antiguas en donde se establecían conocimiento con la resolución de problemáticas de la vida real. Ya que esto coloca a los estudiantes en la postura de análisis y reflexión respecto a la resolución de una problemática, motivando su interés en la formulación de argumentos y conjeturas.

Sobre los recursos tecnológicos

Uno de los objetivos de este trabajo centraba su atención en la incorporación de recursos tecnológicos a través de un software de geometría dinámica, aspecto que se consideró como aporte en la resolución de las actividades. Como parte de esto se llevó a cabo el diseño para la propuesta de applets dirigida a los estudiantes, en donde se diera la oportunidad de manipular herramientas del software como aporte en la selección y estructuración de estrategias que utilizan como parte del proceso de generalización.

El contar con una herramienta tecnológica, como lo es el software de geometría dinámica, representa un aporte en la actualización de los profesores, con lo cual se pretende mostrar la importancia de incorporar materiales de apoyo en el estudio de sucesiones. Con base en esto se espera impulsar en el interés en el uso de herramientas computacionales como aporte en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Parte del perfil como docente del profesor de EMS se orienta en su actualización en el uso de tecnologías, por lo cual se muestran diferentes opciones en el uso de software como aporte en el diseño de applets, seleccionando opciones que faciliten la experiencia de los estudiantes, en el estudio de sucesiones. Sin perder de vista que no solo se trata de llevar al aula una computadora, sino de crear un material de apoyo para los profesores como aporte en la implementación de un contenido matemático; y para los estudiantes como contribución en la selección de estrategias y formulación de argumentos.

La manipulación de applets da la oportunidad a los estudiantes de construir sus propios conocimientos a través del estudio de casos, en donde puedan identificar las propiedades que modelan una situación como promotor en la identificación de patrones, además de brindar la confianza para poner en práctica sus habilidades matemáticas para la comprobación de sus inferencias teóricas. Esto refleja el papel que juega un applet dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, por lo cual se presenta una innovación en la aplicación que se puede dar al software de geometría dinámica, resaltado la importancia de la planificación y diseño de cada uno de sus componentes, como promotores en la resolución de sucesiones numéricas.

Asimismo, se incorporó como material de apoyo un video ilustrativo como parte de una actividad para reflexionar y analizar situaciones de nuestro entorno que pueden ser modelados con sucesiones, esto enfocado en motivar a los estudiantes en la visión que se tiene respecto al estudio de las matemáticas, además de aportar en la construcción de sus conocimientos a través de la experimentación.

Parte del diseño de la propuesta se enfocó en la incorporación de materiales de apoyo, sin embargo, se consideraron una tecnología nueva respecto a los objetivos que se definieron para el proyecto;

esto con la finalidad de proporcionar una visión de las contribuciones que se pueden realizar en los procesos de enseñanza y aprendiza de las matemáticas.

Al igual que el diseño de applets, el diseño de un video ilustrativo crea un aporte innovador como material de apoyo para el estudio de sucesiones, en donde se incorporaron elementos que mostraran la utilidad que tienen este contenido matemático dentro de nuestro entorno; lo anterior con la intención de establecer una relación entre los aspectos de formación académica y el ámbito social.

El incorporar el uso de herramientas tecnológicas como aporte en el estudio de sucesiones representa un enfoque sobre las diferentes estrategias que los estudiantes pueden utilizar en la identificación de un patrón, así como en la construcción de sucesiones, lo cual proporcione las bases para el desarrollo de competencias como aprender por iniciativa propia, interpretar analizar y emitir conceptos matemáticos.

Sobre las prácticas docentes

El presente trabajo permitió destacar las funciones que como profesor de matemáticas de la EMS deben desarrollarse, resaltando la importancia de contar con una planeación basada en investigaciones sobre las aportaciones que se han realizado de acuerdo a un contenido matemático. Sin embargo, su trabajo no solo se concentra en la selección de actividades o problemas sino en la habilidad de adaptar estas propuestas a las necesidades de sus estudiantes.

De acuerdo al enfoque que sigue la EMS se tiene como un factor importante la planificación de ambientes de trabajo de acuerdo a las necesidades de sus estudiantes, de tal forma que una de las acciones que como profesor deben llevarse a cabo, es la adaptación de propuestas. En este sentido, se pudo observar que el proceso que conlleva dicha planeación representa un arduo trabajo, y más aún cuando se trata de organizar los contenidos matemáticos de una asignatura.

Conforme a lo anterior, la propuesta de guía para el profesor aporta en las funciones que como docente debe desarrollar, estableciendo una relación entre un enfoque por competencias y los procesos de enseñanza y aprendizaje de sucesiones de números. A través de la selección y adaptación de estrategias que brinden un apoyo en la implementación del módulo de aprendizaje como parte de su práctica docente, sumando a esto la interpretación de normas que rigen su perfil como decente de EMS.

A pesar que se han realizado aportaciones en la implementación de un enfoque por competencias, hace falta proporcionar más herramientas de apoyo para el profesor, estableciendo una conexión directa entre las características que debe reunir como docente y su aplicación en el salón de clases. El instituir lazos entre estos elementos proporciona una mayor visión sobre el papel que juega el profesor como principal factor en los procesos de enseñanza y aprendizaje, y más aún orientar estos vínculos al área de las matemáticas.

Como profesor de matemáticas es importante contar con un amplio dominio de los objetos matemáticos intervinientes respecto a un tema, sin embargo, es necesario que estos conocimientos sean comunicados de forma clara y precisa. Por tal motivo es indispensable que exista una valoración de los conocimientos previos, remarcando en aquellos que exista deficiencias; así como los como los objetos matemáticos intervinientes, con la intención de aportar en las necesidades de sus estudiantes.

El reflexionar y analizar los aspectos que como profesor de la EMS deben ser tomados en cuenta como parte de su práctica docente, permitió reconocer el proceso de planeación de un contenido matemático. En donde se desarrollan competencias de análisis, reflexión, investigación, organización, evaluación, planificación, entre otras; lo cual representa parte del trabajo que conlleva impartir EMS.

Sobre la propuesta curricular y su enfoque por competencias

Una parte esencial del trabajo fue la revisión y análisis del currículo escolar, para la obtención de información sobre las orientaciones que ha tomado el estudio de sucesiones numéricas a través de la educación en México, primero como un aporte en los conocimientos previos de los estudiantes, y como aporte en vinculo respecto a los enfoques que toma este contenido matemático en cada uno de los niveles educativos.

El identificar que el estudio de sucesiones de números se encuentra presente desde la Educación Básica, muestra la importancia de este contenido matemático en la formación de los jóvenes que ingresan al nivel Medio Superior, en donde se refleja el énfasis de la construcción de este conocimiento como aporte en el paso de la aritmética al algebra.

En ocasiones no se hace notar que el estudio de sucesiones está presente desde el preescolar, cuando los niños comienzan a contar, comenzando el análisis del orden de un conjunto de números que cumplen con una regularidad, sumando a esto el análisis entre conjuntos de objetos como aporte en la identificación de regularidades. No se debe perder de vista que el proceso de generalización forma parte de la educación en México en todos sus niveles educativos, en donde se retoman los conocimientos previos y se adapta a las capacidades de los estudiantes, como promotor de sus significados personales.

Sin embargo, no solo se trata de conocer la trayectoria que ha tomado un contenido matemático, como lo son las sucesiones y series numéricas, sino establecer una conexión entre los enfoques que retoma este tema a través de los diferentes niveles educativos. Por esta razón es trascendental conocer los objetivos de los programas respecto al área de las matemáticas, es decir, declarar la relación que existe entre todos los contenidos matemáticos de una asignatura, como parte de la planeación del profesor de matemáticas.

En los programas de estudio de la Educación del área de matemáticas, se puede observar los objetivos que se tiene para cada uno de los cursos, en donde se define con detalle aspectos que aportan en la planificación, ambientes de trabajo, orientaciones didácticas, entre otros aspectos. Sin embargo, estas herramientas de apoyo no se encuentran para el nivel medio superior, dando lugar a las funciones que el profesor debe desempeñar como parte de su práctica, trabajo que se refleja en el diseño propuesto.

La armonía que debe de existir entre los objetivos que establecen los programas de estudio y su promoción en el salón de clases, juega un papel importante dentro del enfoque que deben de seguir los procesos de enseñanza y aprendizaje en la EMS. La incorporación de un enfoque por competencias refleja la importancia de promover en los estudiantes el desarrollo de habilidades y estrategias que les permitan desenvolverse en sus ámbitos académico y social, en donde se impulse la resolución de problemas como aporte en la construcción de sus propios conocimientos.

Sobre la influencia de las herramientas teóricas en el diseño

Uno de los elementos fundamentales del trabajo se ve reflejado en la selección y aplicación de las herramientas teóricas, ya que estas permitieron clarificar los aspectos que deben ser tomados en cuenta dentro de un diseño. Además de orientar la estructura metodológica del proyecto, tomando como base la correlación entre los documentos base para la EMS y las herramientas del EOS, fundamentando la organización y distribución de labores por realizar.

Aun cuando el interés de este trabajo centraba su atención en las dimensiones epistémica y docente, era importe reconocer los sistemas de prácticas que se promueven con las secuencias didácticas del módulo de aprendizaje, esto a través de la definición de los significados institucionales de referencia y pretendido. El inspeccionar y determinar los objetos matemáticos previos e intervinientes, permitieron realizar un análisis a fondo de las particularidades que se encuentran detrás del diseño de una de las actividades del bloque de interés.

De igual forma, el detallar todos esos componentes que forman parte de las secuencias didácticas mostró la conexión que existía entre los significados institucionales, creando una evaluación de la correspondencia que existe entre ellos; aportando para la valoración de las facetas epistémica y cognitiva de la idoneidad didácticas del módulo.

Por otra parte, se seleccionaron las funciones docentes que EOS establece, para crear un enlace entre estas y las competencias docentes que definen el perfil de los profesores que imparte EMS, esto permitió reconocer las acciones que este debe incorporar en su práctica docente, además de brindar un apoyo en la adaptación de estas acciones al área de las matemáticas. De acuerdo a la conexión de estos elementos se obtuvo una aportación en la selección de estrategias, en donde se pudo fundamentar la importancia que cada una estas representa como apoyo en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El tomar como base los significados institucionales y las funciones docentes, atribuyo en la construcción de las configuraciones y trayectorias epistémica y docente, las cuales permitieron llevar a cabo un análisis y valoración detallada de la idoneidad didáctica del bloque referente al estudio de sucesiones. Estos elementos se ven reflejados en el análisis del módulo, en donde se pudo definir aquellos criterios que era importante reforzar o proporcionar una retroalimentación, a partir de los cuales se basó la selección de estrategias tomadas en cuenta para el diseño de la guía.

Los resultados obtenidos del análisis de idoneidad didácticas, proporcionaron una visión de las características que había que tomar en cuenta para la elaboración de instrumentos que recolectara información sobre el discurso de los profesores respecto a la instrumentación del módulo de aprendizaje. Esto como parte de la identificación de elementos para la estructura de la propuesta, auxiliando en el establecimiento de estrategias que habían seleccionado a partir del análisis del módulo.

Cada una de las herramientas ocupó un lugar importante como parte del proyecto, guiando los pasos que había que seguir para establecer una conexión entre cada uno de los elementos que forman parte del perfil del docente de EMS. En este sentido se consiguió embonar cada componente, de tal forma que mostrara una conexión viable como aplicación de un enfoque por competencias, creando las bases que fundamentan la estructura y diseño de la propuesta.

Sobre el impacto de la realización de este trabajo en la formación profesional de la autora

La formación como Matemático Educativo permite observar aquellos aspectos relevantes dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que en ocasiones no pueden ser percibidos como parte del diseño de una propuesta. Esto como parte de la planeación que conlleva el diseño y estructuración de una guía, en donde es significativo establecer una relación entre los elementos base y las características de la propuesta.

A través del proceso que se llevó a cabo se pudo reflexionar sobre los aspectos que forman parte del perfil docente y el trabajo que conlleva la planificación de una asignatura, lo cual impulso en el desarrollo de habilidades de análisis y evaluación. Es decir, cada una de las etapas que se desarrollaron a lo largo de este proyecto permitieron obtener herramientas metodológicas que favorezcan en el diseño de futuras propuestas, parte de estas herramientas se ven reflejadas en los conocimientos adquiridos a partir del uso de recursos tecnológicos.

El incorporar nuevos materiales de apoyo, con la finalidad de obtener una mayor eficiencia, como parte de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas refleja el beneficio de contar con una actualización constante, respecto a la implementación de elementos innovadores que promuevan las habilidades de razonamiento como parte de la construcción de conocimientos. Es por esto que este trabajo impulsa a continuar reflexionando sobre los diferentes materiales de apoyo que pueden ser adaptados para las problemáticas que se presentan en el estudio de las matemáticas.

Trabajos posteriores

El diseño de la guía está enfocado en el tema matemático referente al estudio de sucesiones de números, sin embargo, esta puede ser retomada como parte de la estructura para la propuesta de los contenidos matemáticos del programa de estudios Matemáticas I, así como para las asignaturas de matemáticas, lo que promueva en la aportación de estrategias de apoyo para las prácticas docentes de los profesores de matemáticas de EMS.

Además de retomar los elementos que se incorporan como parte del diseño de la guía para una propuesta dirigida en el estudio de sucesiones de números, enfocando las orientaciones didácticas a las necesidades de un grupo en particular, así como crear aportaciones en el diseño propuesto. En este sentido puede realizarse nuevas propuestas sobre sobre actividades complementarias, el uso de applets y la implementación de videos como apoyo en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

La adaptación de actividades puede ser utilizada como aporte en el estudio de sucesiones de números en el bachillerato, retomando las aplicaciones que se presentan en las actividades como base para promover que los estudiantes construyan su propio conocimiento.

Referencias

Alcántara, A., & Zorrilla, J. F. (2010). Globalización y educación media superior en México. En busca de la pertinencia curricular. *Perfiles Educativos, 32*(127), 38-57.

Beery, J. L., & Swetz, F. J. (18 de Febrero de 2016). *Mathematical Association of America.* Recuperado el 29 de agosto de 2016, de The best known old babylonian tablet?: http://www.maa.org/press/periodicals/convergence/the-best-known-old-babylonian-tablet

Boyer, C. B. (2007). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza Editorial.

Cañadas, M., Castro , E., & Castro, E. (2012). Diferentes formas de expresar la generalización en problemas de sucesiones. *La Gaceta de la RSME, 15*(3), 561–573.

Chalé, S., & Acuña, C. (Noviembre,2013). El desarrollo del pensamiento algebraico: la visualización en el caso de los patrones. Santo Domingo, Republica Dominicana: I CEMACYC.

Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora. (2010). *Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora*. Recuperado el 15 de Diciembre de 2014, de http://www.cobachsonora.edu.mx/

Collete, J.-P. (1986). *Historia de las matemáticas 1.* México: Siglo XXI Editores.

Dirección General del Bachillerato. (8 de Mayo de 2013). *Dirección General del Bachillerato*. Recuperado el 14 de Mayo de 2015, de http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/01-dgb/bachillerato_general.php

Dirección General del Bachillerato. (2013). *Matemáticas I. Programas de estudio.*

Dirección General del Bachillerato. (2014). *Profesiograma para el Bachillerato General Modalidad Escolarizada.* México: DGB.

Euclides.org. (22 de Junio de 2003). Recuperado el 21 de marzo de 2016, de http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm

Fleming, W., & Varberg, D. (1991). Álgebra y trigonometría con geometría análitica. México: Prentice-Hall.

Godino, J. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *CIAEM-IACME*.

Godino, J. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en didática de la matemática. *Investigación en Educación Matemática XVI*, 49-68.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.*

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F., & Konic, P. (2012). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. *Revemat, 7*(2), 1-21.

Godino, J., & Batanero, C. (2008). Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. *Conferencia Invitada al VI CIBEM.* Puerto Montt (Chile).

Godino, J., Contreras, Á., & Font, V. (2006). análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la congnición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26*(1), 39-88.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Tesis Doctoral.* España: Universidad de La Rioja.

Ibáñez C., G. H. (2013). Formación para el desarrollo de competencias docentes. La experiencia del Programa de Formación Docente de Educación Media. *Didac*(62), 37-43.

Leithold, L. (1994). Álgebra y trigonometría con geometría análitica. México: Harla.

Marín, R., Guzmán, I., & Zapata, M. F. (2012). *La construcción de atributos. Una propuesta pedagógica viable en la evaluación de competencias matemáticas.* Chihuahua: I Congreso Internacional de Educación.

Nava Marchena , C. (2007). *Corredor para Storyboard.* Recuperado el 2016 de febrero de 24, de http://www.carlosnavam.com/2007/08/corredor-para-storyboard.html

Niss, M. A. (2006). What does it mean to be a competent mathematics teacher? *Praktika, 23o Panellenio Synedrio Mathematikis Paideias, Patra 24-26 Noembriou 2006* (págs. 39-47). Elleniki Mathematiki Etaireia, Patra.

Olaya Quemba, L. (2014). *Procesos de generalización en situaciones que involucran secuencias numéricas y geométricas una propuesta didáctica.* Tesis de Maestría, Universidad de Colombia, Facultad de Ciencias, Bogotá, Colombia.

Ortega Perez, M. (2012). *Unidad didáctica. Sucesiones matemáticas.Progresiones aritméticas y geometricas.* Tesis de Maestría.

Osorio, J. (2012). Procesos de generalización que intervienen en el aprendizaje del alumno al hacer uso de sucesiones. *Acta Latinoamerica ME, 25*, 75-81.

Secretaría de Educación Pública. (2011a). *Programa de estudio 2011. Guía para la educadora. Educación Básica. Preescolar.* México: SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2011a). *Programas de estudio 2011. Guía para la educadora. Educación Básica. Preescolar.* México: SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2011b). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica. Primaria.* México: SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2011c). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación básica. Secundaria. Matemáticas.* México: SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2014a). *Principales Cifras del Sistema Educativo Nacional. 2013-2014.* México: SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2014b). *Programa Sectorial de Educación 2013-2018. Logros 2014.* México: SEP. Recuperado el 23 de Marzo de 2015, de http://planeacion.sep.gob.mx/informes-oficiales/informeavance

Silva, M. (2012). *Sobre la resistencia de los profesores más experimentados a la nueva reforma educativa. Tesis de Maestría.* CICATA-IPN: México. Recuperado el 09 de Marzo de 2015, de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/silva_2012.pdf

Subsecretaría de Educación Media Superior. (21 de Octubre de 2008). *ACUERDO número 444 por el que se establecen las competencias que constituyen el marco curricular común del Sistema Nacional de Bachillerato.* México: SEMS.

Subsecretaría de Educación Media Superior. (29 de octubre de 2008). *ACUERDO número 447 por el que se establecen las competencias docentes para quienes impartan educación media superior en la modalidad escolarizada.* México: SEMS.

Subsecretaría de Educación Media Superior. (2008). *Reforma Integral de la Educación Media Superior en México: La Creación de un Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad.* México: SEMS.

Subsecretaría de Educación Media Superior. (2013). *Dirección General del Bachillerato*. Recuperado el 23 de marzo de 2015, de http://www.dgb.sep.gob.mx/index.php

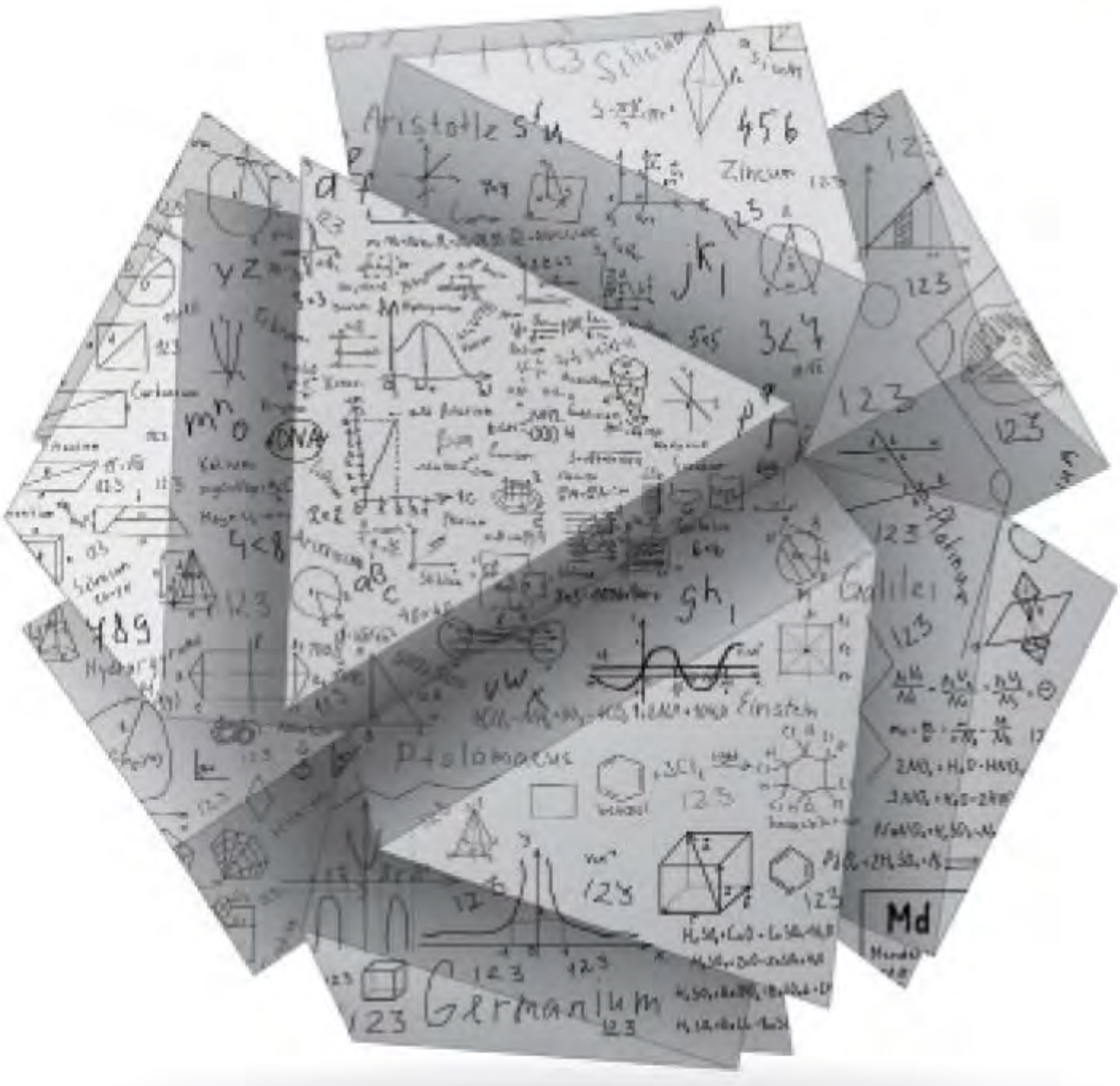
Vargas, R., Rodríguez, M., del Castillo, A., Villalba, M., Ibarra, S., Grijalva, A., . . . Bravo, J. (2014). *Matemáticas 1.* México: Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora. Recuperado el 05 de Diciembre de 2014, de http://www.cobachsonora.edu.mx:8086/portalcobach/pdf/modulosaprendizaje/Basica/Matematicas 1.pdf

ANEXO

COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE SONORA

Matemáticas 1

Aprendiendo a ser, hacer y vivir juntos



Libro para el maestro

Contenido

Contenido

Presentación

Como apoyo a la reciente integración de módulos de aprendizaje que se ha realizado en el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, se proporciona el siguiente material didáctico, el cual contribuya a la actividad docente y su actuación en el salón de clases.

Una de las bases de la Educación Media Superior es la RIEMS, en donde se especifica las características que deben cumplir todo estudiante de Educación Media Superior y el papel que jugará el profesor en los procesos de aprendizaje y enseñanza.

Con base en la resolución de problemas y el desarrollo de competencias de estudiantes y profesores, se diseñan las secuencias didácticas que conforman el módulo de aprendizaje. Sin embargo, es necesario identificar los objetivos y propósitos de las actividades que den soporte a las acciones que el profesor de matemáticas debe desarrollar al implementar el módulo de aprendizaje de Matemáticas 1.

De acuerdo a la estructura del módulo se proporcionarán herramientas que funjan como apoyo para la actividad docente, en donde se incorporen sugerencias didácticas de acuerdo a las acciones que el profesor puede desarrollar en el salón de clases.

- **Objetivo del bloque:** Indicar los objetivos que el programa de Matemáticas 1 establece para el bloque, además de incorporar el rol del docente y las competencias genéricas y disciplinares que se promueven en la resolución de las actividades que integran el bloque.
- **Objetivo de la secuencia didáctica:** Indicar las habilidades, conocimientos y actitudes que se promueven respecto al conocimiento matemático involucrados en las actividades de la secuencia didáctica, así como las competencias genéricas que se promueven a través de la resolución de dichas actividades.
- **Propósito de las actividades:** Determinar los objetivos que los estudiantes deben alcanzar con la resolución de las actividades.
- **Conocimientos matemáticos:** Identificar los objetos matemáticos que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, con base en el contenido matemático de cada uno de los bloques, así como los conocimientos

matemáticos que se han estudiado en los bloques anteriores, o en su educación básica.

- **Competencias disciplinares a promover:** Identificar las competencias disciplinares que se promueven, de acuerdo a las actividades y acciones que el estudiante debe desarrollar, especificando los atributos de dichas competencias.
- **Errores y/o dificultades:** Indicar algunos de los errores o dificultades que los estudiantes pueden presentar en la resolución de las actividades, como apoyo en su implementación.
- **Posibles respuestas:** Proporcionar las respuestas que pudieran formular los estudiantes, así como algunos de los conflictos a los que se pueden enfrentar en el desarrollo de las actividades.
- **Orientaciones didácticas:** Proporcionar algunas indicaciones respecto a las acciones que deben ponerse en práctica en la implementación de las actividades, de acuerdo a los objetivos del bloque y el propósito de las actividades.

Asimismo, se incorporan algunos elementos extras que funjan como apoyo a las actividades del módulo de aprendizaje, uno de estos es la **propuesta de applets** que tienen la finalidad de aportar a los estudiantes una visión de las problemáticas que se presentan en las secuencias didácticas y que a través de un software puedan manipular el dicho applet. Por otra parte, se encuentran las **actividades complementarias** que proporcionan diferentes aplicaciones respecto al contenido matemático, las cuales funjan como apoyo a las actividades que incorporan el módulo.

Estructura metodológica

Competencias a promover

Objetivos del bloque


BLOQUE 3

Realiza...

Sumas y Sucesiones de Números

Objetivos del bloque:

- Identifica y diferencia las series y sucesiones numéricas y así como sus propiedades.
- Clasifica las sucesiones numéricas en aritméticas y geométricas.
- Determina patrones de series y sucesiones aritméticas y geométricas.
- Construye gráficas para establecer el comportamiento de sucesiones aritméticas y geométricas.
- Emplea la calculadora para la verificación de resultados en los cálculos de obtención de términos de las sucesiones.
- Realiza cálculos obteniendo el enésimo término y el valor de cualquier término en una sucesión aritmética y geométrica tanto finita como infinita mediante las fórmulas correspondientes.

Rol del docente

- Comunicar ideas y conceptos con claridad en relación con el tema de las Series y Sucesiones Aritméticas y Geométricas y los ejemplifica en el contexto de los estudiantes.
- Provee de bibliografía relevante para la investigación sobre series y sucesiones y orienta a los estudiantes en la consulta de fuentes para la investigación.
- Establece criterios y métodos de evaluación del aprendizaje con base en el enfoque de competencias y lo comunica de manera clara a los estudiantes.
- Fomenta la autoevaluación y coevaluación entre los estuantes para analizar la solución de problemas.
- Alienta que los estudiantes expresen opiniones personales, en un marco de respeto, y las toma en cuenta.

Competencias genéricas

- Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
- Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
- Sustenta tu postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.
- Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
- Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
- Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.

Competencias disciplinares

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas ... científicos.

Bloque 3: Sumas y sucesiones de nú...

Conocimientos previos: Los estudiantes tuvieron su primer acercamiento con el lenguaje algebraico en actividades previas, en donde fue necesario identificar propiedades del conjunto de números enteros, para expresar algebraicamente el conjunto de números pares e impares, así como la expresión del producto de números consecutivos.

Orientación didáctica: Proporcione diferentes representaciones de una sucesión, y en lo posible muestre situaciones de la vida real que se puedan modelar a través de sucesiones o series de números.
Considere que representar con ilustraciones los primeros términos de una sucesión proporciona una mayor visión de la situación.

Introducción:

Tiempo asignado:

Matemáticas I

Objetivos de las secuencias didácticas 2:

- **Sucesiones y series**, con base en la modelación se promueve que los estudiantes puedan representar verbal y algebraicamente los elementos de una sucesión, además de poder identificar los elementos que constituyen la sucesión, así como el enésimo elemento. A través de las propiedades de una sucesión se espera que los estudiantes puedan identificar entre sucesiones algebraicas y geométricas, así como la diferencia entre una sucesión y una serie.

21

Secuencia didáctica 2: Sucesiones y series

Competencias genéricas

Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
- Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
- Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones.
- Administra los recursos disponibles teniendo en cuenta las restricciones para el logro de sus metas.

Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.

Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
- Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo
- Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
- Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.
- Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesa e interpretar información.

Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.
- Evalúa argumentos y opiniones e identifica prejuicios y falacias.
- Reconoce los propios prejuicios, modifica sus puntos de vista al conocer nuevas evidencias, e integra nuevos conocimientos y perspectivas al acervo con que cuenta.
- Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.

Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
- Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.
- Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.

Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
- Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
- Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
- Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.
- Privilegia el diálogo como mecanismo para la solución de conflictos.

Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.
- Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en contexto amplio.

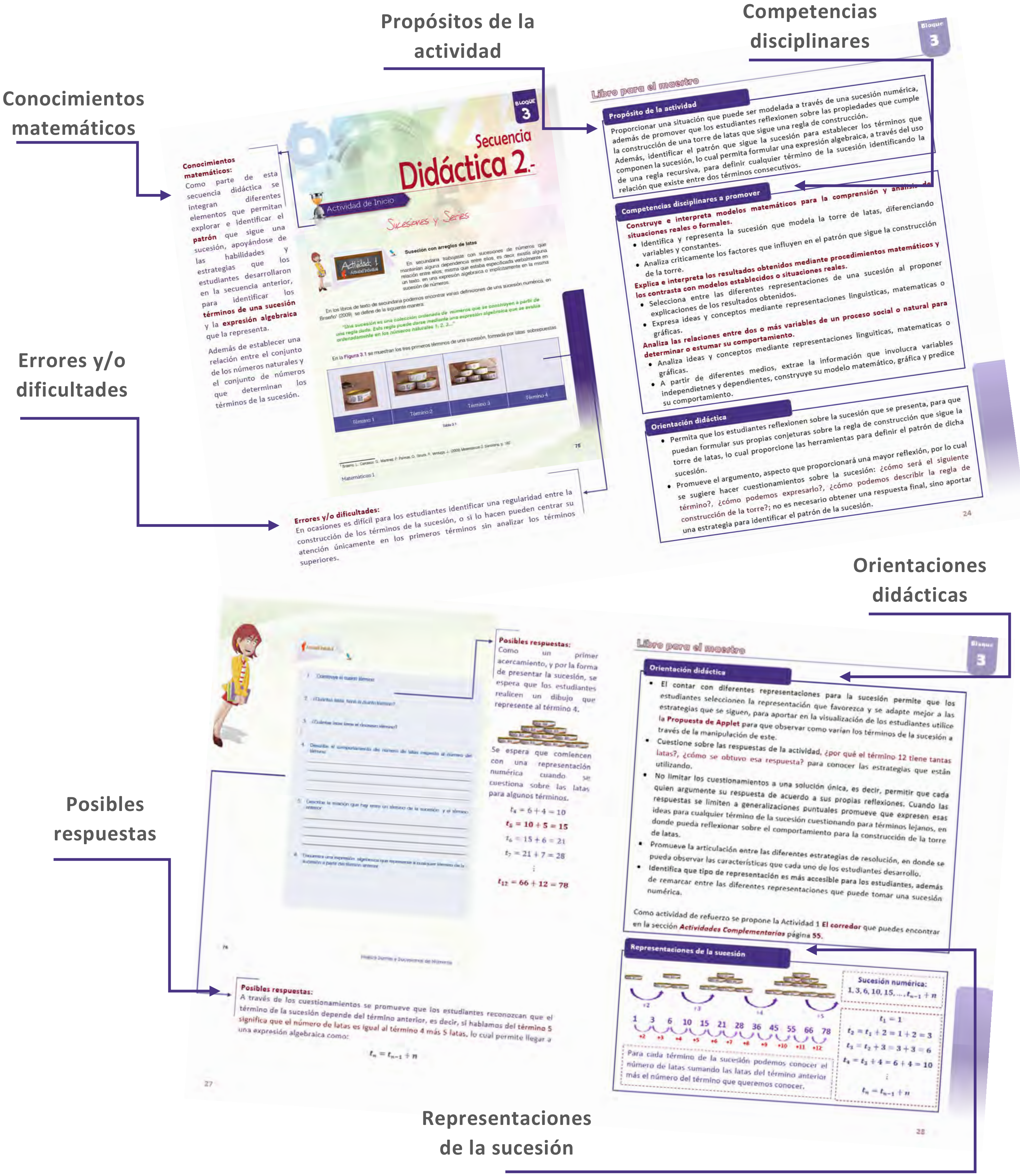
22

Conocimientos matemáticos

Objetivos de la secuencia didáctica

Competencias genéricas

Estructura metodológica



Modalidades de trabajo

Actividad Individual

El propósito del trabajo individual centra su atención en proporcionar al estudiante un momento de reflexión, en donde pueda evaluar sus conocimientos matemáticos, conocer sus habilidades y dificultades; lo cual permita establecer estrategias propias respecto a la situación que se le presenta. Asimismo, proporciona al estudiante una oportunidad para poner a prueba sus estrategias e identificar las estrategias que resulten efectivas, de acuerdo a los recursos disponibles y sus conocimientos matemáticos.

Se promueve un pensamiento reflexivo y analítico de acuerdo a las posibilidades con las que cuenta el estudiante para resolver un problema, considerando los aspectos relevantes que permitan construir una estrategia efectiva, desde su propia perspectiva, aportando así a una construcción de su propio conocimiento.

Por otra parte, se da la oportunidad al estudiante para definir metas y apropiarse de la situación, lo cual proporcione una herramienta de autoevaluación, respecto a los procedimientos y definiciones matemáticas que utiliza.

Actividad de Equipo

La discusión entre parejas o equipos representa una motivación entre los estudiantes, como resolutores de una misma situación problema, ya que permite el intercambio de ideas y conocimientos matemáticos, así como una confirmación de estrategias y procedimientos. Esto proporciona una discusión entre los aspectos que se consideren relevantes, aportando a su formación personal para escuchar e interpretar los argumentos de sus compañeros, así como fomentar la participación como resolutores de una problemática.

Reformular las estrategias que se desarrollaron como una familiarización a la situación que se está presentando, para valorar la eficacia de los procedimientos y argumentos que se pusieron en práctica. Así como la integración de una solución en conjunto, en donde cada estudiante pueda evaluar su postura y la de sus compañeros, con el propósito de promover la reflexión de sus conjeturas y estructuración de estrategias para la resolución de la situación.

Estimular la autocrítica de su actuar en la resolución de problemas, así como en la intervención apropiada en las discusiones, aportando en su formación y la de sus compañeros.

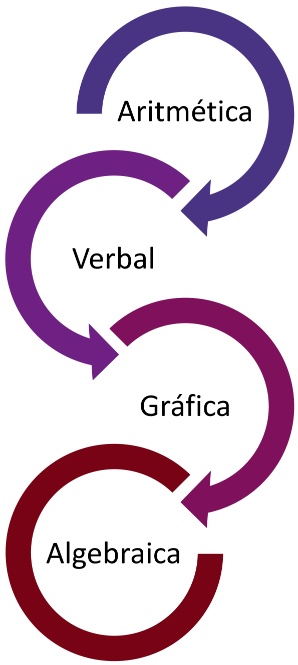
Actividad Grupal

Se promueve la discusión entre los estudiantes de forma grupal con el objetivo de presentar las diferentes posturas que cada estudiante o equipo puede tener respecto a una problemática, así como los procedimientos y estrategias que se pusieron en juego para la resolución de actividades o problemas; para estimular la participación por parte de los estudiantes y que ellos a partir de sus propias conjeturas puedan establecer una conclusión respecto a los diferentes conocimientos matemáticos que integran una secuencia didáctica, guiada por el profesor.

Valorar la participación de sus compañeros para identificar los razonamientos compartidos o discutir para obtener una conclusión grupal, además de promover la interpretación de los argumentos y la valoración en contrapuesta con sus propios argumentos.

Asimismo, se establece como conclusión los conocimientos matemáticos que se lograron a través de la resolución de las actividades, además de dar la oportunidad a los estudiantes de reflexionar sobre sus conclusiones y su relación con los argumentos del profesor.

Proceso de generalización



Una de las características que se presenta en el estudio de sucesiones es el uso de diferentes representaciones, que conllevan el **proceso de generalización**. Dentro de todo este proceso es indispensable reconocer el tipo de representación que los estudiantes utilizan con mayor frecuencia o que resulta más accesible para ellos, sin perder de vista que cada uno de ellos aporta una visión diferente a la problemática que se está estudiando.

Si bien el reconocer estás representaciones forma parte del proceso, en ocasiones es difícil lograr algún tipo de generalización. Es decir, para algunos estudiantes puede resultar una mejor estrategia el recurrir a la generalización aritmética o la generalización verbal, o combinación de estas representaciones, ya que encuentran más factible el identificar las propiedades o el patrón de una sucesión, sin lograr otro tipo de generalización. Sin embargo, es significativo el hecho de encontrar una relación entre todas ellas para obtener una mayor visualización de la problemática que se esté abordando, lo cual aporta en la selección de estrategias que los estudiantes utilizan.

Dentro de estas representaciones podemos encontrar la generalización **aritmética**, **verbal**, **gráfica** y **algebraica**, las cuales permiten identificar las propiedades de una sucesión, en diferentes niveles. Sin embargo, es parte del proceso seleccionar la representación o representaciones que más se adapte a los conocimientos matemáticos con los que cuenta el resolutor, por lo cual se puede observar que los estudiantes solo se inclinen por estrategias a través de la representación aritmética o verbal, que son las generalizaciones que se presentan con mayor frecuencia, en donde identifican las regularidades de una sucesión, sin embargo, solo centran su atención en casos particulares.

Por lo cual, es necesario tomar como base las estrategias que los estudiantes utilizan y promover que logren una generalización global, lo cual permita seleccionar la representación que aporte una mayor visión de la sucesión y con base en ésta lograr una generalización óptima. No se debe perder de vista que los estudiantes adaptan sus acciones de acuerdo a los conocimientos matemáticos y habilidades que ellos consideran a su alcance, por esta razón es significativo el proporcionar diferentes opciones con las que pueden llevar a cabo el proceso de generalización.

Generalización Aritmética	Generalización Verbal	Generalización Gráfica	Generalización Algebraica
• El estudiante centra su atención principalmente en los aspectos numericos, logra identificar el patron de una sucesión para casos particulares, pero es dificil lograr una generalización lejana.	• El estudiante puede indetificar las regularidades de una sucesión así como los terminos de esta, a través de argumentos en donde expresa su comportamiento y la forma de obtener un término determinado.	• Los estudiantes generalmente hacen refenrecia a la representación grafica cuando la situación problema hace referencia a esta, sin embargo, aporta en la identificación de patrones, pues permite identificar aquellos componentes que varian y los que se encuentran fijos.	• Los estudiantes en pocas ocasiones hacen referencia a esta representación, ya que ocasiona dificultades el establecer una relación entre un patrón o alguna regularidad y su expresión algebraica. Sin embargo, el objetivo es promover a través de las sus representaciones obtener una expresión algebraica.

A partir de esta reflexión se hace hincapié en la identificación de las estrategias que utilizan los estudiantes en la resolución de problemas, especialmente en el proceso de generalización, para establecer una relación entre las representaciones de un objeto matemático. Con la finalidad de proporcionar herramientas para el análisis de situaciones que los estudiantes desarrollan en el estudio de sucesiones numéricas.

Utilizar las diferentes representaciones de una sucesión proporcionara una mayor visión de la situación problema, además de promover en el desarrollo de diferentes estrategias para su resolución.

BLOQUE 3

Realiza...

Sumas y Sucesiones de Números

Objetivos del bloque:

- Identifica y diferencia las series y sucesiones numéricas y así como sus propiedades.
- Clasifica las sucesiones numéricas en aritméticas y geométricas.
- Determina patrones de series y sucesiones aritméticas y geométricas.
- Construye gráficas para establecer el comportamiento de sucesiones aritméticas y geométricas.
- Emplea la calculadora para la verificación de resultados en los cálculos de obtención de términos de las sucesiones.
- Realiza cálculos obteniendo el enésimo término y el valor de cualquier término en una sucesión aritmética y geométrica tanto finita como infinita mediante las fórmulas correspondientes.

Rol del docente

- Comunicar ideas y conceptos con claridad en relación con el tema de las Series y Sucesiones Aritméticas y Geométricas y los ejemplifica en el contexto de los estudiantes.
- Provee de bibliografía relevante para la investigación sobre series y sucesiones y orienta a los estudiantes en la consulta de fuentes para la investigación.
- Establece criterios y métodos de evaluación del aprendizaje con base en el enfoque de competencias y lo comunica de manera clara a los estudiantes.
- Fomenta la autoevaluación y coevaluación entre los estudiantes para analizar la solución de problemas.
- Alienta que los estudiantes expresen opiniones personales, en un marco de respeto, y las toma en cuenta.

Competencias genéricas

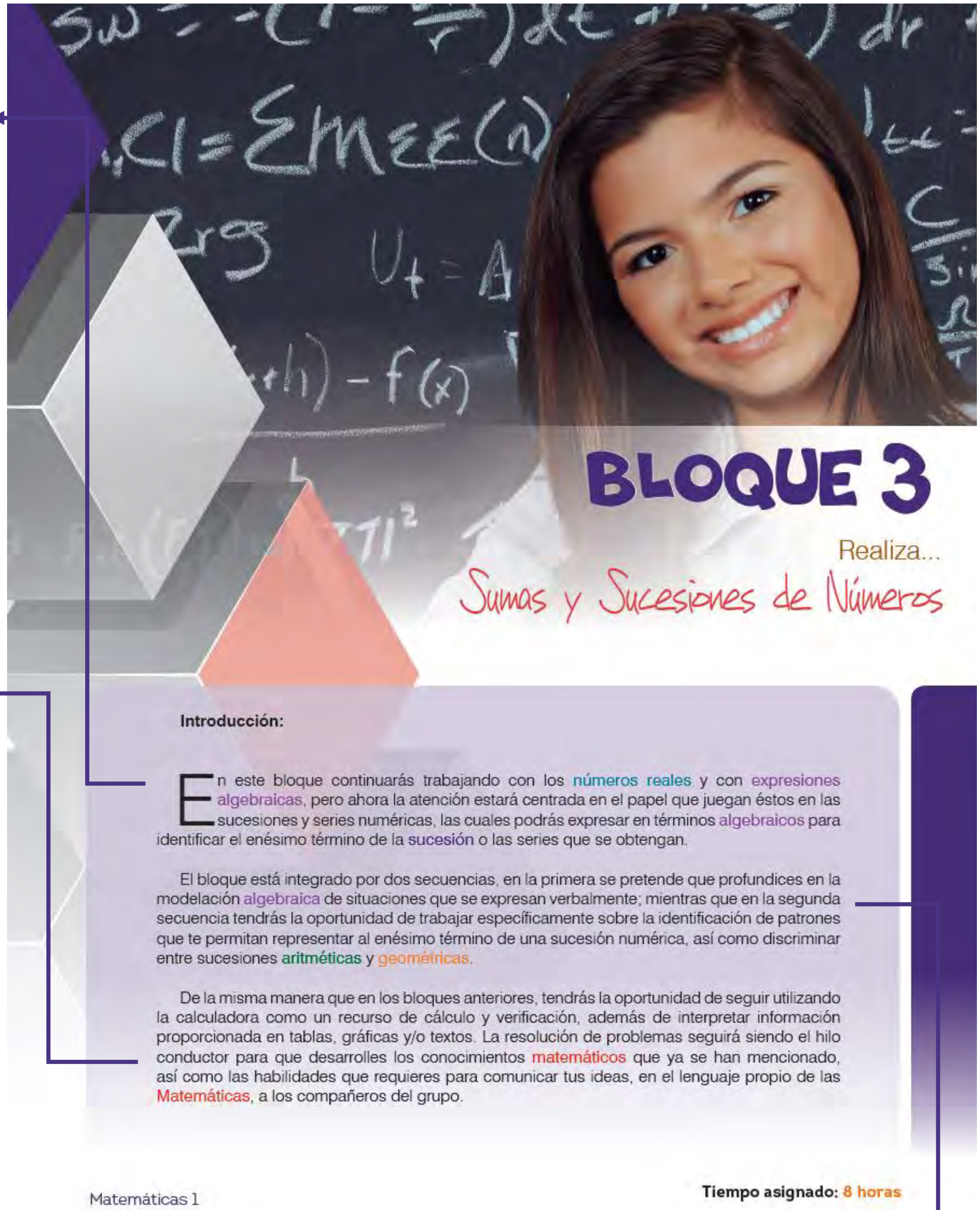
- Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
- Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
- Sustenta tu postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.
- Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
- Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
- Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.

Competencias disciplinares

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Conocimientos previos:
En los bloques anteriores se estudió el conjunto de números reales y las propiedades de éstos, así como las expresiones algebraicas.
En este bloque se hará uso de estos conocimientos para identificar y reconocer las propiedades que cumplen las sucesiones y series numéricas.

Orientación didáctica:
Utiliza herramientas tecnológicas como apoyo al desarrollo de las actividades, como el uso de calculadora y la manipulación de Applets.
De la oportunidad para que los estudiantes puedan desarrollar sus propias estrategias y que esto permita construir sus argumentos.



BLOQUE 3

Realiza...

Sumas y Sucesiones de Números

Introducción:

En este bloque continuarás trabajando con los números reales y con expresiones algebraicas, pero ahora la atención estará centrada en el papel que juegan éstos en las sucesiones y series numéricas, las cuales podrás expresar en términos algebraicos para identificar el enésimo término de la sucesión o las series que se obtengan.

El bloque está integrado por dos secuencias, en la primera se pretende que profundices en la modelación algebraica de situaciones que se expresan verbalmente; mientras que en la segunda secuencia tendrás la oportunidad de trabajar específicamente sobre la identificación de patrones que te permitan representar al enésimo término de una sucesión numérica, así como discriminar entre sucesiones aritméticas y geométricas.

De la misma manera que en los bloques anteriores, tendrás la oportunidad de seguir utilizando la calculadora como un recurso de cálculo y verificación, además de interpretar información proporcionada en tablas, gráficas y/o textos. La resolución de problemas seguirá siendo el hilo conductor para que desarrolles los conocimientos matemáticos que ya se han mencionado, así como las habilidades que requieres para comunicar tus ideas, en el lenguaje propio de las Matemáticas, a los compañeros del grupo.

Matemáticas 1

Tiempo asignado: 8 horas

Objetivos de las secuencias didácticas:

- **Representaciones algebraicas**, en esta secuencia se promueve la modelación algebraica como herramienta para la generalización de números pares e impares, así como la representación del producto de números consecutivos. Se espera que los estudiantes puedan argumentar sobre el comportamiento o propiedad que cumplen dichos productos.

Secuencia didáctica 1: Representaciones algebraicas

Competencias genéricas

Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.

- Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
- Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones.
- Administra los recursos disponibles teniendo en cuenta las restricciones para el logro de sus metas.

Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.

- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.
- Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.

Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

- Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo
- Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
- Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.
- Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesa e interpretar información.

Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.

- Evalúa argumentos y opiniones e identifica prejuicios y falacias.
- Reconoce los propios prejuicios, modifica sus puntos de vista al conocer nuevas evidencias, e integra nuevos conocimientos y perspectivas al acervo con que cuenta.
- Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.

Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.

- Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.
- Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.

Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

- Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
- Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
- Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.

- Privilegia el diálogo como mecanismo para la solución de conflictos.

Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.

- Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en contexto amplio.

Secuencia Didáctica 1.-

Actividad de Inicio

Representaciones Algebraicas

Actividad: 1
Actividad Individual

Números múltiplos

Los números enteros, como ya se vio en la escuela secundaria, forman un conjunto que usualmente se escribe como:

$Z=\{\ldots,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,\ldots\}$

Uno de sus subconjuntos más conocidos es el conjunto de *los* ***números naturales:***

$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,\ldots\}$

Entre los números enteros hay algunos que al dividirlos entre el número 2, el resultado es otro número entero, ***por ejemplo*** $(\frac{56}{2}=28)$; en este caso, como la división es exacta decimos que 56 es divisible por 2, afirmación que podemos hacer también de cualquiera de las maneras siguientes, tomando en cuenta que si $(\frac{56}{2}=28)$, entonces $56=2x28$:

a) 2 es un divisor de 56 .
b) 2 es un factor de 56 .
c) 56 es un múltiplo de 2 .

Recuerda que un número entero m es múltiplo de otro número entero n sí m se puede expresar como la multiplicación de n por un número entero, ***por ejemplo:***

- $m=12$ es múltiplo de $n=2$ porque $12=2\times6$
- $m=-15$ es múltiplo de $n=5$ porque $-15=5\times(-3)$
- $m=42$ es múltiplo de $n=6$ porque $42=6\times7$

1. **Para cada uno de los siguientes números enteros escribe dos múltiplos y argumenta tu respuesta:**

Números	Múltiplos		Argumentos
- 4			
- 9			
- 12			
21			

70 Realiza Sumas y Sucesiones de Números

Conocimientos matemáticos:

Los estudiantes han trabajado con el conjunto de números enteros y números naturales, además de identificar las propiedades que éstos cumplen, por lo cual se inicia la secuencia retomando dichos conocimientos.

Se pretende promover la reflexión y argumentación respecto a las propiedades múltiplo y divisor de los números enteros, e identificar cuando dos números cumplen con dichas propiedades.

Posibles respuestas:

Números	Múltiplos		Argumentos
-4	4	-16	Porque $-4 = (-4)\times(-1)$ y $-16 = (-4)\times4$
-9	27	-36	Porque -9 es divisor de 27 y de -36
-12	48	-24	Porque -12 es factor de 48 y -24
21	210	-105	Porque $210 = 21\times10$ y $-105 = 21\times(-5)$

Propósito de la actividad

Identificar los números múltiplos de un número dado, y de acuerdo a su definición expresar las propiedades que cumplen estos números. Promover la argumentación de una expresión general, lo cual permita reconocer todos los números múltiplos de un número dado. Es decir, que dado un número $\boldsymbol{n}$ el estudiante pueda identificar la sucesión de sus números múltiplos:

$$\boldsymbol{m = \cdots -4n,\ \ -3n,\ \ -2n,\ \ -n,\ 0,\ n,\ 2n,\ 3n,\ 4n,\ \ldots}$$

Competencias disciplinares a promover

Construye e interpreta modelos matemáticos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.

- Identifica las propiedades del conjunto de los números enteros para establecer los números múltiplos de un número dado.
- Sigue intrucciones y procedimientos de manera reflexiva para establecer los números múltiplos de un número dado.
- Utiliza de forma adecuada la definición de múltiplo, divisor y factor.

Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

- Selecciona los conocimientos matemáticos que permitan argumentar porque un número es múltiplo de otro.
- Expresa los números múltiplos de un número de acuerdo a la defición de divisor, factor o múltiplo.

Orientación didáctica

- Destacar la relación de los conceptos ***divisor***, ***factor*** y ***múltiplo***. En ocasiones los estudiantes presentan dificultades al intentar argumentar cuando dos números cumplen con alguna de estas relaciones, principalmente cuando se habla de identificar cuando un número es divisor o múltiplo de otro.
- Enfatizar sobre el conjunto de números con el que está trabajando, números enteros, lo cual presenta algunas confusiones, ya que en ocasiones se presentan argumentos como los siguientes:
    - **"5 es divisor de 12"** es verdad que el número 5 puede dividir a 12, sin embargo, no existe un número entero k tal que $5k = 12$.
    - **"3 es múltiplo de 9"** es verdad que existe un número que multiplicado por 9 es 3, sin embargo, dicho número no se encuentra en el conjunto de número enteros.
- Identifica si las definiciones de los estudiantes son las correctas, esto a través de los argumentos que formulan al definir los múltiplos de un número.

Conocimientos matemáticos:

Identificar la relación entre la definición de número múltiplo y la definición de número par y número impar.

Posibles respuestas:
Se espera que los estudiantes puedan argumentar respecto a la definición de número par y número impar.

35	Impar
-26	par
99	impar
-45	impar
18	Par

Un número entero se dice que es par, si es divisible por 2 o múltiplo de 2; en cualquier otro caso se dice que es impar. Los enteros pares son por lo tanto:
$\{\ldots,-12,-10,-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8,10,12,\ldots\}$

Y los enteros impares son:
$\{\ldots,-11,-9,-7,-5,-3,-1,1,3,5,7,9,11,\ldots\}$

Como una manera de resaltar que todos los pares son múltiplos de 2, este conjunto se escribe a veces como:
$\{\ldots, 2(-6), 2(-5), 2(-4), 2(-3), 2(-2), 2(-1), 2(0), 2(1), 2(2), 2(3), 2(4), 2(5), 2(6), \ldots\}$

2. **¿Cuáles de los siguientes números son pares y cuáles son impares?** Justifica tu respuesta.

35 ________ -26 ________ 99 ________ -45 ________ 18 ________

Desarrollo

Actividad: 2
Actividad Individual
Actividad de Equipo

Expresar características de los números algebraicamente

La escuela nos ha familiarizado con conjuntos numéricos como éstos, en los que podemos distinguir con facilidad un número par de un impar, pero algunos problemas matemáticos suelen exigir algo más que eso. Con frecuencia se requiere, por ejemplo, referirnos a un "par cualquiera" y entonces denotaremos este número como $2n$, donde n es un número entero, enfatizando así que todo número par es un múltiplo de 2 y que además todo número par es de esta forma. Para denotar los números impares, observamos que al restar el número 1 a un número par, se obtiene un impar, entonces podemos decir que los impares tienen la forma $2n - 1$.

Supongamos ahora que necesitamos referirnos al **"producto de dos pares consecutivos cualesquiera"**, algunas de nuestras opciones serían:

a) $(324)(326)$
b) rs donde r y s son números pares consecutivos cualesquiera
c) $m(m + 2)$ donde m es un entero par
d) $(2n)(2(n + 1))$ donde n es un número entero

En el primer inciso se trata de dos números pares consecutivos en particular y por lo tanto no se trata de **"dos pares consecutivos cualesquiera"**, se refiere

Conocimientos matemáticos:
Utilizar la definición de múltiplo para identificar las propiedades de los elementos del conjunto de los números pares y los números impares, para establecer una expresión algebraica que represente cada uno de estos conjuntos.

Propósito de la actividad

Reflexionar e identificar las propiedades del conjunto de los números pares y el conjunto de los números impares, lo cual permita promover la importancia de la expresión algebraica de los elementos de estos conjuntos como $\mathbf{2n}$ y $\mathbf{2n-1}$, respectivamente.
Con base en las propiedades y las expresiones de estos conjuntos se promueve que los estudiantes argumenten respecto a las características del producto de números pares consecutivos.

Competencias disciplinares a promover

Construye e interpreta modelos matemáticos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.

- Identifica las propiedades de un número, de acuerdo a la definición de múltiplo para definir los números pares y números impares.
- Sigue intrucciones y procedimientos de manera reflexiva, para definir la expresión algebraica del conjunto de números pares y númeors impares.
- Analiza criticamente las propiedades del conjunto de números pares y números impares.

Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

- Identifica las propiedades de un número, de acuerdo a la definición de múltiplo para definir los números pares y números impares.

Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

- Identifica las propiedades de un número, de acuerdo a la definición de múltiplo para definir los números pares y números impares.

Orientación didáctica

- Permite que los estudiantes puedan reflexionar de forma individual, los argumentos que se presentan en la definición de una expresión adecuada para el conjunto de números pares, y que esto proporcione argumentos para las discusiones posteriores.
- Promueva que los estudiantes reflexionen sobre las propiedades de los números pares, y a través de estos argumenten porque la expresión algebraica que establece en la definición para cualquier elemento del conjunto de los números pares es adecuada.
- Resalta que existencia de diferentes representaciones para un mismo producto y argumenta las propiedades que cada una de estas representaciones aporta.

solamente a los números pares escogidos. Los tres casos restantes son correctos, pero unas formas de escribir este producto son mejores que otras. En el inciso **b)**, r y s son dos pares consecutivos porque así lo especifica el texto que los acompaña, pero la relación entre dos pares consecutivos es muy precisa, y con esta manera de representarlos no se hace explícita esta relación.

Conocimiento matemático: Identificar las propiedades de los números pares, lo cual permita establecer una representación algebraica adecuada para el producto de números consecutivos.

Mientras que en el inciso **c)**, efectivamente m y $m+2$ son pares consecutivos puesto que m es un par, pero al igual que en el inciso **b)**, llamar m a un par no muestra su característica principal de ser un múltiplo de 2. En cambio en el inciso **d)**, se han tomado los enteros consecutivos n y $n+1$ para construir los pares consecutivos $2n$ y $2(n+1)$. Las ventajas de esta notación pueden apreciarse al resolver problemas como el planteado en el ejemplo siguiente.

Ejemplo: Justifica por qué el producto de dos enteros pares consecutivos es siempre un múltiplo de 4. Si $2n$ y $2(n+1)$ representan a dos enteros pares consecutivos cualesquiera, entonces el producto puede escribirse como:

$$(2n)[2(n+1)] = 4[(n)(n+1)]$$

Y como $(n)(n+1)$ es un número entero, puesto que n y $n+1$ son números enteros, entonces el producto de $2n$ y $2(n+1)$ se ha expresado como el producto del número 4 por otro número entero, por lo tanto es siempre un múltiplo de 4.

Actividad de Equipo

1. Usa la notación de los incisos **b)** o **c)**, para argumentar por qué el producto de dos enteros pares consecutivos es siempre un múltiplo de 4. Compara tu justificación con la que se muestra en el ejemplo anterior y describe las dificultades que has encontrado.

Dos números naturales consecutivos	Producto de los números
84,85	7140
$(n)(n+1)$	
$(2n)(2n+1)$	
$(n-1)(n)$	

Tabla 3.1

Conocimiento matemático: Identificar las propiedades del producto de números naturales, a través de casos particulares se espera que los estudiantes establezcan una expresión algebraica que permita observar dichas propiedades, haciendo referencia a sus conocimientos previos como el concepto de múltiplo.

Posibles respuestas:

Dos números naturales consecutivos	Producto de los números
84, 85	7140
319 ,320	102080
12, 13	156
123,124	15252
$(n)(n+1)$	n^2+n
$(2n)(2n+1)$	$4n^2+2n$
$(n-1)n$	n^2-n

Propósito de la actividad

Proporcionar diferentes expresiones algebraicas para el conjunto de los números pares, lo cual muestre la pertinencia de cada una de estas, para argumentar por qué se ha establecido a $2n$ para represente de los elementos de este conjunto. Además de hacer uso de esta representación para establecer que el producto de dos números pares consecutivos siempre es múltiplo de 4, promoviendo la argumentación de los estudiantes sobre la selección de representaciones algebraicas.

Competencias disciplinares a promover

Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

- Selecciona alternativas al proponer explicaiones de los resultados obtenidos.
- Expresa ideas y conceptos mediante diferentes representaciones para justificar una propiedad del producto de dos números pares consecutivos.
- Utiliza los conceptos de múltiplo, divisor o factor de forma adecuada para expresar cuando un número es par.

Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

- Identifica analíticamente las propiedades del conjunto de los números pares para establecer una representación adecuada para los elementos de éste conjunto.
- Argumenta las propiedades del producto de números pares consectuvios, a través de sus diferentes representaciones.

Orientación didáctica

- Promueva que los estudiantes reflexiones y argumenten sobre las características que cada una de las expresiones de números pares consecutivos que se han propuesto en la actividad, haciendo notar las contribuciones que cada una de estas representaciones aporta en el estudio de las propiedades del producto de números pares consecutivos.
- Fomenta que se formulen conjeturas de acuerdo a las propiedades que los estudiantes identifican en el producto de números pares consecutivos, argumentando sus conjeturas a partir de los casos que se estudiaron anteriormente y sus conocimientos matemáticos.

Nota: No perder de vista que cada una de las representaciones que se han propuesto en la actividad es correcta, sin embargo, algunas de ellas no permiten observar que un número par: es múltiplo de 2, tiene como factor al número 2 o que uno de sus divisores es el número 2.

Posibles respuestas:
Identificar que el producto de dos números consecutivos siempre es un múltiplo de dos.
Ejemplo: $7140 = 2(3570)$

Además, que puedan argumentar su respuesta con la expresión:

$$(2n)(2n+1) =$$
$$4n^2 + 2n = 2(2n^2 + n)$$

por lo tanto, el producto de números consecutivos es par.

BLOQUE 3

2. Usa la calculadora para completar la **Tabla 3.1**, escribiendo en la primera columna dos números naturales consecutivos, el primero de los cuales es par, y en la segunda columna el producto de estos dos números.

2.1 Formula una conjetura sobre el tipo de números que has obtenido en la columna de los productos.

2.2 Usa alguno de los resultados obtenidos en los tres últimos renglones de la para argumentar a favor de tu conjetura

Actividad Individual

3. Usa la calculadora para completar la **Tabla 3.2**, escribiendo en la primera columna tres números naturales consecutivos y en la segunda columna el producto del mayor por el menor. Toma el primer renglón como ejemplo

Tres números naturales consecutivos	Producto de los números
7,8,9	*63*
$(n-1), (n), (n+1)$	
$(n), (n+1), (n+2)$	

Tabla 3.2

3.1 Observa en cada renglón el producto que obtuviste en la segunda columna y describe la relación que existe entre el producto que calculaste y el número intermedio de la primera columna.

3.2 En los dos últimos renglones de la **Tabla 3.2**, escribe el producto de las expresiones como mejor te convenga, tomando en cuenta que lo usarás para argumentar por qué se cumple la relación que encontraste.

3.3 Usa uno de los dos últimos renglones de la **Tabla 3.2** para argumentar por qué se cumple la relación que encontraste.

Matemáticas 1 73

Posibles respuestas:
Se debe reconocer que el producto de los números (pares o impares) puede expresarse como el cuadrado del número intermedio menos uno.
Ejemplo: $63 = 8^2 - 1$

Posibles respuestas:
De acuerdo a la información de la tabla se espera que puedan observar que precisamente el producto de dos números (pares o impares) puede expresarse de la siguiente forma:

$$(n-1)(n+1) = n^2 - n + n - 1 = \mathbf{n^2 - 1}$$

También que puedan identificar que

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

por lo tanto,

$$n\,(n+2) = n^2 + 2n = \mathbf{(n+1)^2 - 1}$$

Posibles respuestas:

Tres números naturales consecutivos	Producto de los números
$7, 8, 9$	63
$21, 22, 23$	483
$42, 43, 44$	1848
$14, 15, 16$	224
$5, 6, 7$	35
$(n-1), (n), (n+1)$	$n^2 + n - n - 1$
$n, (n+1), (n+2)$	$n^2 + 2n$

Propósito de la actividad

Se espera que los estudiantes puedan identificar las propiedades del producto de dos números consecutivos, a partir de la observación de casos particulares, en donde se pueda identificar que el producto de números naturales consecutivos siempre es un número par. Además de estudiar de establecer que el producto de dos números consecutivos, pares o impares, puede expresarse a partir del número intermedio, como el cuadrado de este número menos uno.

Competencias disciplinares a promover

Construye e interpreta modelos matemáticos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.

- Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva para identificar las propiedades que cumple el producto de números consecutivos de un conjunto de números.
- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüisticas y algebraicas.
- Analiza críticamente los factores que influyen en la toma de decisiones.

Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.

- Comprende el texto del planteamiento problema, identifica y representa las propiedades del producto de números consecutivos.
- Analiza las diferentes alternativas de solución, apoyandose en los productos obtenidos en la resolución de tablas para obtener una conclusión.

Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

- Elige alternativas al proponer explicaciones de los resultados obtenidos.
- Expresa ideas y conceptos mediante representaicones lingüisticas y algebraicas.
- Verifica la información del producto de números consecutivos y la exptrapola a una familia de situciones problema similares.

Orientación didáctica

- Promueva que los estudiantes argumenten sobre las regularidades que identificaron en los productos realizados a través de la resolución de las tablas, enfatizando en aquellas que permitieron establecer una conclusión respecto a dichos productos.
- Ilustra la importancia de las expresiones algebraicas como un apoyo para reconocer las propiedades de un conjunto de números, es decir, el usar alguna expresión como: $(n)(n+1)=n^2+n$ o $(n-1)(n)=n^2-n$, con n par; es importante argumentar que el producto de número pares es un número par, y además que al restar o sumar un número par de otro número par obtenemos de nuevo un número par, por lo tanto n^2+n y n^2-n son números pares.

Actividad de Cierre

Actividad: 3
Actividad Grupal

En esta **Secuencia** se ha promovido que se haga la representación general, en términos de expresiones algebraicas, de números que tienen ciertas propiedades, ***por ejemplo:*** que son pares, que son impares, que son consecutivos, múltiplos y además algunas operaciones que se pueden realizar entre ellos.

Para los números enteros pares es importante destacar su característica principal que es el hecho de ser divisible por 2 y por tanto múltiplo de 2, por lo que en algunos de los problemas anteriores hemos usado la expresión $2n$ para referirnos a los números pares. No existe una razón especial para usar la letra n, los pares se pueden también escribir como $2m, 2k, 2i, 2j$ o cualquier otra letra multiplicada por 2, con la única condición que las letras, al igual que la n, representen cualquier número entero. Esto significa que los números pares tienen esta forma o dicho de otra manera:

Todo número par puede expresarse como $2n$, donde n es un número entero.

De la misma manera hemos visto que los números enteros impares son aquellos enteros que no son pares, por ello la manera de representar a cualquiera de ellos puede hacerse en los siguientes términos:

Todo número impar puede expresarse como $2n - 1$, donde n es un número entero.

De esta manera podemos encontrar la expresión algebraica para números que cumplan cierta condición o para establecer la relación que se pueda presentar entre dos o más números, como los que se muestran en la **Tabla 3.4.**

Condición	Expresión o expresiones
Dos números consecutivos	n y $n+1$
La suma de dos números enteros consecutivos	$n+(n+1)$
El producto de dis números enteros consecutivos	$n\,x(n+1)$
El triple de un número	$3x$
La mitad de un número	$\frac{y}{2}$
La suma del triple de un número más la mitad de otro número.	$3x\ \frac{y}{2}$

Tabla 3.4

Conocimiento matemático:
Reconocer la importancia de representar adecuadamente un conjunto de números, como el caso de números pares e impares. Además de contar con los argumentos necesarios para justificar dicha expresión, apoyados en los conceptos de múltiplo, divisor o factor.

Observaciones:
La tabla cuenta con algunos errores de edición en los que hay que poner atención, ya que estos pueden crear conflictos para los estudiantes.

Condición	Expresión o expresiones
Dos números consecutivos	n y $n+1$
La suma de dos números consecutivos	$n+(n+1)$
El producto de dos números enteros consecutivos	$n(n+1)$ o $n\times(n+1)$
El triple de un número	$3x$
La mitad de un número	$\frac{y}{2}$
La suma del triple de un número más la mitad de otro número	$3x+\frac{y}{2}$

Propósito de la actividad

De acuerdo al objetivo de la secuencia didáctica, se espera que a través de esta actividad se pueda institucionalizar los conocimientos matemáticos necesarios para reflexionar e identificar las expresiones algebraicas de algunos conjuntos de números, como es el caso de números pares y números impares. Así como argumentar la importancia de representar un conjunto de números con una propiedad a través de una expresión algebraica, la cual permita reconocer dicha propiedad.

Competencias disciplinares a promover

Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

- Selecciona alternativas al proponer explicaiones de los resultados obtenidos.
- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüística

Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

- Argumenta las propiedades del producto de números pares consectuvios, a través de sus diferentes representaciones.

Orientación didáctica

- Cuestione respecto a la expresión del conjunto de los números pares y el conjunto de números impares, para evaluar sus argumentos y destacar la importancia de las propiedades de estos conjuntos con base en los conocimientos matemáticos que se aplicaron en las actividades anteriores.
- Promueva que los estudiantes comiencen las discusiones, en donde puedan expresar sus conjeturas y las conclusiones que obtuvieron con la resolución de las actividades anteriores.
- De acuerdo a los argumentos que proporcionen los estudiantes, identifica si sus definiciones y conocimientos matemáticos son los adecuados.
- Promueva que los estudiantes expresen sus propias ideas respecto a la información contenida en la tabla, que puedan reflexionar e identificar algunos de los errores de edición contenidos en la tabla.

Conocimientos previos:
Los estudiantes tuvieron su primer acercamiento con el lenguaje algebraico en actividades previas, en donde fue necesario identificar propiedades del conjunto de números enteros, para expresar algebraicamente el conjunto de números pares e impares, así como la expresión del producto de números consecutivos.

BLOQUE 3

Realiza...

Sumas y Sucesiones de Números

Introducción:

En este bloque continuarás trabajando con los números reales y con expresiones algebraicas, pero ahora la atención estará centrada en el papel que juegan éstos en las sucesiones y series numéricas, las cuales podrás expresar en términos algebraicos para identificar el enésimo término de la sucesión o las series que se obtengan.

El bloque está integrado por dos secuencias, en la primera se pretende que profundices en la modelación algebraica de situaciones que se expresan verbalmente; mientras que en la segunda secuencia tendrás la oportunidad de trabajar específicamente sobre la identificación de patrones que te permitan representar al enésimo término de una sucesión numérica, así como discriminar entre sucesiones aritméticas y geométricas.

De la misma manera que en los bloques anteriores, tendrás la oportunidad de seguir utilizando la calculadora como un recurso de cálculo y verificación, además de interpretar información proporcionada en tablas, gráficas y/o textos. La resolución de problemas seguirá siendo el hilo conductor para que desarrolles los conocimientos matemáticos que ya se han mencionado, así como las habilidades que requieres para comunicar tus ideas, en el lenguaje propio de las Matemáticas, a los compañeros del grupo.

Matemáticas 1

Tiempo asignado: 8 horas

Orientación didáctica:
Proporcione diferentes representaciones de una sucesión, y en lo posible muestre situaciones de la vida real que se puedan modelar a través de sucesiones o series de números.
Considere que representar con ilustraciones los primeros términos de una sucesión proporciona una mayor visión de la situación.

Objetivos de las secuencias didácticas 2:

- **Sucesiones y series**, con base en la modelación se promueve que los estudiantes puedan representar verbal y algebraicamente los elementos de una sucesión, además de poder identificar los elementos que constituyen la sucesión, así como el enésimo elemento.
  A través de las propiedades de una sucesión se espera que los estudiantes puedan identificar entre sucesiones algebraicas y geométricas, así como la diferencia entre una sucesión y una serie.

Secuencia didáctica 2: Sucesiones y series

Competencias genéricas

Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.

- Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
- Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones.
- Administra los recursos disponibles teniendo en cuenta las restricciones para el logro de sus metas.

Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.

- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.

Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

- Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo
- Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
- Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.
- Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesa e interpretar información.

Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.

- Evalúa argumentos y opiniones e identifica prejuicios y falacias.
- Reconoce los propios prejuicios, modifica sus puntos de vista al conocer nuevas evidencias, e integra nuevos conocimientos y perspectivas al acervo con que cuenta.
- Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.

Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.

- Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.
- Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.

Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

- Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
- Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
- Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.

- Privilegia el diálogo como mecanismo para la solución de conflictos.

Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.

- Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en contexto amplio.

Conocimientos matemáticos:
Como parte de esta secuencia didáctica se integran diferentes elementos que permitan explorar e identificar el **patrón** que sigue una sucesión, apoyándose de las habilidades y estrategias que los estudiantes desarrollaron en la secuencia anterior, para identificar los **términos de una sucesión** y la **expresión algebraica** que la representa.

Además de establecer una relación entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de números que determinan los términos de la sucesión.

BLOQUE 3

Secuencia Didáctica 2.-

Actividad de Inicio

Sucesiones y Series

Actividad: 1
Actividad Individual

Suseción con arreglos de latas

En secundaria trabajaste con sucesiones de números que mantenían alguna dependencia entre ellos, es decir, existía alguna relación entre ellos; misma que estaba especificada verbalmente en un texto, en una expresión algebraica o implícitamente en la misma sucesión de números.

En los libros de texto de secundaria podemos encontrar varias definiciones de una sucesión numérica, en Briseño[1] (2009) se define de la siguiente manera:

"Una sucesión es una colección ordenada de números que se construyen a partir de una regla dada. Esta regla puede darse mediante una expresión algebraica que se evalúa ordenadamente en los números naturales 1, 2, 3..."

En la **Figura 3.1** se muestran los tres primeros términos de una sucesión, formada por latas sobrepuestas.

Término 1	Término 2	Término 3	Término 4

Tabla 3.1

[1] Briseño, L., Carrasco, G., Martínez, P., Palmas, O., Struck, F., Verdugo, J.: (2009) Matemáticas 2. Santillana, p. 162

Matemáticas 1 75

Errores y/o dificultades:
En ocasiones es difícil para los estudiantes identificar una regularidad entre la construcción de los términos de la sucesión, o si lo hacen pueden centrar su atención únicamente en los primeros términos sin analizar los términos superiores.

Propósito de la actividad

Proporcionar una situación que puede ser modelada a través de una sucesión numérica, además de promover que los estudiantes reflexionen sobre las propiedades que cumple la construcción de una torre de latas que sigue una regla de construcción.
Además, identificar el patrón que sigue la sucesión para establecer los términos que componen la sucesión, lo cual permita formular una expresión algebraica, a través del uso de una regla recursiva, para definir cualquier término de la sucesión identificando la relación que existe entre dos términos consecutivos.

Competencias disciplinares a promover

Construye e interpreta modelos matemáticos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.

- Identifica y representa la sucesión que modela la torre de latas, diferenciando variables y constantes.
- Analiza criticamente los factores que influyen en el patrón que sigue la construcción de la torre.

Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

- Selecciona entre las diferentes representaciones de una sucesión al proponer explicaciones de los resultados obtenidos.
- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones linguisticas, matematicas o gráficas.

Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estumar su comportamiento.

- Analiza ideas y conceptos mediante representaciones linguiticas, matematicas o gráficas.
- Extrae la información que involucra variables independietnes y dependientes, constryuye su modelo matemático, gráfica y predice su comportamiento.

Orientación didáctica

- Permita que los estudiantes reflexionen sobre la sucesión que se presenta, para que puedan formular sus propias conjeturas sobre la regla de construcción que sigue la torre de latas, lo cual proporcione las herramientas para definir el patrón de dicha sucesión.
- Promueva el argumento, aspecto que proporcionará una mayor reflexión, por lo cual se sugiere hacer cuestionamientos sobre la sucesión: ¿cómo será el siguiente término?, ¿cómo podemos expresarlo?, ¿cómo podemos describir la regla de construcción de la torre?; no es necesario obtener una respuesta final, sino aportar una estrategia para identificar el patrón de la sucesión.

Actividad Individual

1. Construye el cuarto término.

2. ¿Cuántas latas tiene el quinto término?

3. ¿Cuántas latas tiene el doceavo término?

4. Describe el comportamiento del número de latas respecto al número del término.

____
____
____
____

5. Describe la relación que hay entre un término de la sucesión y el término anterior.

____
____
____
____

6. Encuentra una expresión algebraica que represente a cualquier término de la sucesión a partir del término anterior.

76 Realiza Sumas y Sucesiones de Números

Posibles respuestas:
Como un primer acercamiento, y por la forma de presentar la sucesión, se espera que los estudiantes realicen un dibujo que represente al término 4.

Se espera que comiencen con una representación numérica cuando se cuestiona sobre las latas para algunos términos.

$$t_4 = 6 + 4 = 10$$

$$\boldsymbol{t_5 = 10 + 5 = 15}$$

$$t_6 = 15 + 6 = 21$$

$$t_7 = 21 + 7 = 28$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{t_{12} = 66 + 12 = 78}$$

Posibles respuestas:
A través de los cuestionamientos se promueve que los estudiantes reconozcan que el término de la sucesión depende del término anterior, es decir, si hablamos del término 5 significa que el número de latas es igual al término 4 más 5 latas, lo cual permite llegar a una expresión algebraica como:

$$\boldsymbol{t_n = t_{n-1} + n}$$

Orientación didáctica

- Cuestione sobre las respuestas de la actividad, ¿por qué el término 12 tiene tantas latas?, ¿cómo se obtuvo esa respuesta? para conocer las estrategias que están utilizando.
- No limitar los cuestionamientos a una solución única, es decir, permitir que cada quien argumente su respuesta de acuerdo a sus propias reflexiones. Cuando las respuestas se limiten a generalizaciones puntuales promueve que expresen esas ideas para cualquier término de la sucesión cuestionando para términos lejanos, en donde pueda reflexionar sobre el comportamiento de la torre de latas.
- Promueva la articulación entre las diferentes estrategias de resolución, en donde se pueda observar las características que cada uno de los estudiantes desarrollo.
- Identifica que tipo de representación es más accesible para los estudiantes, además de remarcar entre las diferentes representaciones que puede tomar una sucesión numérica.
- El contar con diferentes representaciones para la sucesión permite que los estudiantes seleccionen la representación que favorezca y se adapte mejor a las estrategias que se siguen, para aportar en la visualización de los estudiantes utilice la **Propuesta de Applet** para que observar como varían los términos de la sucesión a través de la manipulación de este.

Como actividad de refuerzo se propone la Actividad 1 **El corredor** que puedes encontrar en la sección ***Actividades Complementarias*** página **47**.

Representaciones de la sucesión

1 3 6 10 15 21 28 36 45 55 66 78

+2 +3 +4 +5 +6 +7 +8 +9 +10 +11 +12

Para cada término de la sucesión podemos conocer el número de latas sumando las latas del término anterior más el número del término que queremos conocer.

Sucesión numérica:

$$1, 3, 6, 10, 15, \dots, t_{n-1} + n$$

$$t_1 = 1$$

$$t_2 = t_1 + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$t_3 = t_2 + 3 = 3 + 3 = 6$$

$$t_4 = t_3 + 4 = 6 + 4 = 10$$

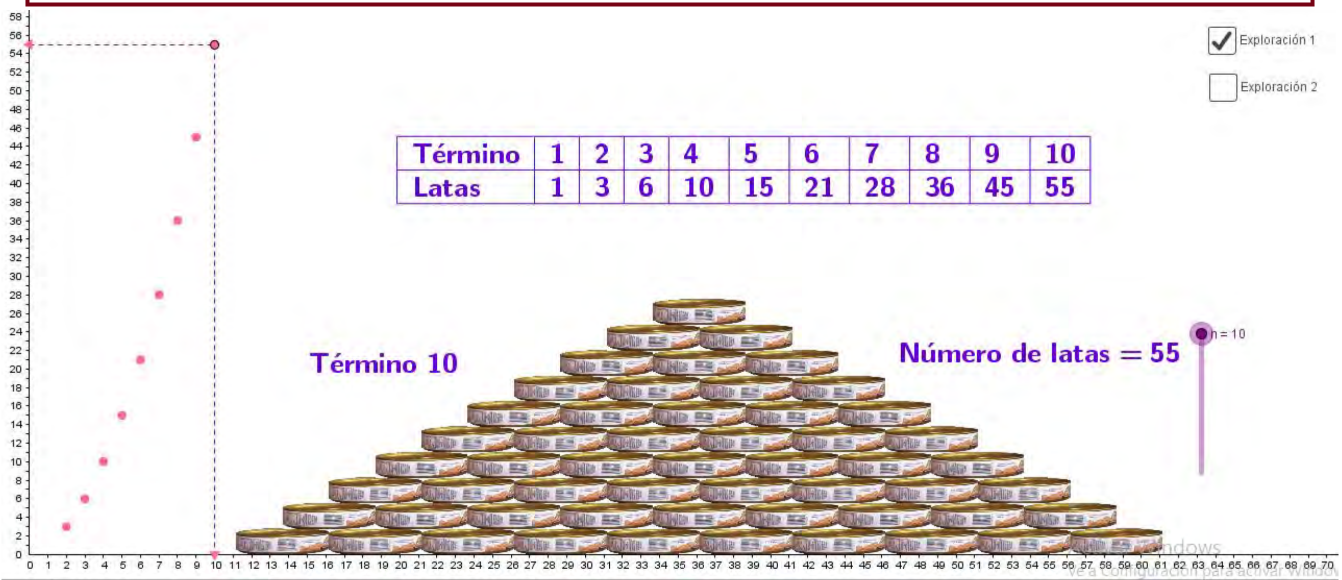
$$\vdots$$

$$t_n = t_{n-1} + n$$

Propuesta de Applet

Actividad 1. Arreglo de latas

El presente applet cuenta con diferentes representaciones de la sucesión de latas de la actividad 1, en donde se puede observar los términos de la sucesión.
Exploración 1: Se puede observar la función que existe entre los términos de la sucesión y el número de latas de cada término.
Exploración 2: Se puede ingresar un número entero que representa el término del cual se espera conocer el número de latas.



Controladores: El applet se manipula a través del deslizador, el cual varia el término e ilustración de la sucesión, así como su representación gráfica en la **Exploración 1**. En el caso de la **Exploración 2** es necesario introducir el número del término que se quiere conocer.

Propósito

Visualizar las diferentes representaciones de la situación que se plantea en la actividad, lo cual permita identificar los elementos que se mantienen fijos y aquellos que varían de un término a otro. Se espera que a través de la manipulación del applet se pueda reconocer el patrón que sigue la sucesión. Además, que aporte como una estrategia para argumentar las respuestas que se propusieron en la actividad respecto a las observaciones y reflexiones que se llevaron a cabo con la manipulación del applet.

Conocimientos matemáticos

Desarrollar el concepto de sucesión numérica a través de diferentes representaciones: verbal, gráfica y algebraica; destacando la importancia del conjunto de los números naturales en la construcción de una sucesión.
Además, identificar el patrón que sigue la sucesión para conocer sus términos, lo cual permita reconocer las propiedades de cualquier término de la sucesión y a su vez la expresión algebraica que la representa.

Competencias a promover

Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.

- Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.

Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

- Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.
- Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesa e interpretar información.

Construye e interpreta modelos matemáticos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.

- Identifica y representa la sucesión que modela la torre de latas, diferenciando variables y constantes.
- Analiza criticamente los factores que influyen en el patrón que sigue la construcción de la torre.

Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estumar su comportamiento.

- Analiza ideas y conceptos mediante representaciones linguiticas, matematicas o gráficas.
- Extrae la información que involucra variables independietnes y dependientes, constryuye su modelo matemático, gráfica y predice su comportamiento.

Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

- Conoce los elementos de la gráfica y su relación con los términos de la sucesión.

Orientación didáctica

- Como apoyo a la generalización, contar con una herramienta tecnológica aporta una mayor visualización de la situación que se presenta en la actividad, por lo cual se puede proporcionar el applet para que los estudiantes puedan manipularlo.
- Promueva que los estudiantes reflexiones sobre las conjeturas que establecieron en la actividad y que puedan argumentar si estas se corresponden con lo que ellos observan en el applet.
- Como reflexión final puedes cuestionar a los estudiantes sobre las estrategias que podrían seguir para la actividad después de utilizar el applet.

Posibles respuestas:

Es necesario identificar algunos aspectos de la situación, para poder construir la sucesión:

- Cantidad de apertura de la cuenta
- Cantidad del ahorro de los empleados
- Cantidad que aporta la empresa

Con esto se espera que puedan identificar que el primer término es $900, ya que son $500 de la apertura y $200 del trabajador y $200 de la empresa, lo cual permita reconocer que el incremento mensual es $400.

Como parte de la actividad se promueve identificar el ahorro total de acuerdo al comportamiento del incremento mensual, para reconocer que en el cuarto mes se acumula 5 veces el incremento más $100.

BLOQUE 3

Desarrollo

Caja de Ahorros

Para promover el ahorro en una empresa a los empleados de nuevo ingreso les proponen ingresar a la caja de ahorro. Para motivarlos la empresa les abre la cuenta depositándoles ***$ 500***, pero los empleados deberán ahorrar ***$ 200*** mensuales y la empresa les deposita otros ***$ 200*** cada mes.

Cuando el trabajador quiere retirar sus ahorros le entregan los ***$ 500*** más las aportaciones mensuales del trabajador y de la empresa.

Un trabajador que ingresa el primero de agosto de 2013, desea saber cuánto recibirá si retira sus ahorros. Para apoyarse al registrar los datos que obtiene al realizar los cálculos utiliza la siguiente tabla:

Cantidad ahorrada al terminar el mes											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$ 900											

Tabla 3.5

1. Completa la información que falta en la tabla en la **Tabla 3.5.**
2. ¿Cuál es la relación que hay entre la cantidad ahorrada en un mes respecto a la cantidad ahorrada el mes anterior?
3. ¿Cuánto se incrementa mensualmente el ahorro?
4. ¿En el cuarto mes, cuantas veces se acumuló la cantidad que se incrementa mensualmente?

Posibles respuestas:

Cantidad ahorrada al terminar el mes											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$900	$1300	$1700	$2100	$2500	$2900	$3300	$3700	$4100	$4500	$4900	$5300

Errores y/o dificultades:

En ocasiones es difícil para los estudiantes identificar una regularidad entre la construcción de los términos de la sucesión, o si lo hacen pueden centrar su atención únicamente en los primeros términos sin analizar los términos superiores.

Propósito de la actividad

Interpretar los datos que se dan sobre las cantidades de dinero que aporta una empresa y el trabajador, para crear una cuenta de ahorro, e identificar la sucesión que modela la cantidad ahorrada al terminar cada mes. Además, que puedan identificar el patrón de dicha sucesión, por lo cual se espera que puedan definir una expresión algebraica que la represente.

Competencias disciplinares a promover

Construye e interpreta modelos matemáticos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.

- Identifica e interpreta la información para representar la sucesión que modela el ahorro total mensual, diferenciando variables y constantes.
- Analiza criticamente los factores que influyen en el patrón que sigue el ahorro.

Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.

- Comprende la situación que define la apertura de la cuenta de ahorro e identifica las varibles
- Analiza las diferentes alternativas de solución, apoyándose en diversas herramientas, y modela la información de dicha alternativa.

Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estumar su comportamiento.

- Analiza ideas y conceptos mediante representaciones linguiticas, matematicas o gráficas.
- Extrae la información que involucra variables independietnes y dependientes, constryuye su modelo matemático, gráfica y predice su comportamiento.

Orientación didáctica

- Permite que los estudiantes que identifiquen los aspectos que modelan la cantidad de ahorro mensual, si se presentan dificultades para la identificación de la sucesión, cuestione sobre la relación que existe entre la cantidad de dinero que se ahorra cada mes respecto a los meses que han pasado.
- Los estudiantes pueden determinar el comportamiento de la sucesión a través de la fórmula de recurrencia, ya que es fue una de las estrategias de la actividad anterior, sin embargo, promueve la construcción de una expresión algebraica general.

Como actividad de refuerzo se propone la Actividad 2 **Las jardineras** que puedes encontrar en la sección ***Actividades Complementarias*** página **53**.

5. ¿En el noveno mes, cuantas veces se acumuló la cantidad que se incrementa mensualmente?

6. ¿Cuánto tendrá ahorrado al terminar el mes 18?

7. ¿Cuánto tendrá ahorrado al terminar el mes n ?

Posibles respuestas:
Identificar que para cada mes existe una relación entre el número de meses ahorrados y la cantidad que se incrementa mensualmente:

- En el **noveno** mes se acumuló **10** veces el incremento mensual y sobran 100.
- En el mes **18** se acumuló **19** veces el incremento mensual y sobran 100.

A través de estas observaciones se espera que los estudiantes puedan definir la expresión algebraica:

$$t_n = 400(n+1) + 100$$

Cambiando la forma de representar una sucesión

En secundaria trabajaste con sucesiones de números que mantenían alguna dependencia entre ellos, es decir, existía alguna relación entre ellos; misma que estaba especificada verbalmente en un texto, en una expresión algebraica o implícitamente en la misma sucesión de números.

Llena lo que falta en la **Tabla 3.6.**

Sucesiones numéricas expresadas de diferente manera		
Desarrollada	**Expresión**	**Texto**
	2n+3	
		El primer término es 2 y los demás términos se obtienen al multiplicar el anterior por cinco
5, 9, 13, 17...		
1, 3, 9, 27...		

Tabla 3.6

Conocimientos matemáticos:
Explorar e identificar una sucesión y su patrón para conocer sus propiedades, además de realizar diferentes representaciones de esta, ya sea numérico, algebraico o verbal.

Posibles respuestas:

Sucesiones numéricas expresadas de diferente manera		
Desarrollada	Expresión	Texto
$\mathbf{5, 7, 9, 11, \ldots}$	$2n+3$	**El primer término es 5 y los demás términos se obtienen al sumar 2 al anterior.**
$\mathbf{2, 10, 50, 250, \ldots}$	$\mathbf{2(5^{n-1})}$	El primer término es 2 y los demás términos se obtienen al multiplicar el anterior por cinco.
$\mathbf{5, 9, 13, 17, \ldots}$	$\mathbf{4n+1}$	**El primer término es 5 y los demás términos se obtienen sumando 4 al anterior.**
$\mathbf{1, 3, 9, 27, \ldots}$	$\mathbf{3^{n-1}}$	**El primer término es 1 y los demás términos se obtienen al multiplicar el anterior por 3.**

Errores y/o dificultades:
Los estudiantes pueden presentar dificultad para identificar el tipo de progresión que sigue cada sucesión, por lo cual puede tener dificultades para representar algebraicamente la sucesión.

Representaciones de la sucesión

900 $\xrightarrow{+400}$ 1300 $\xrightarrow{+400}$ 1700 $\xrightarrow{+400}$ 2100 $\xrightarrow{+400}$ 2500 $\xrightarrow{+400}$ 2900 $\xrightarrow{+400}$ 3300

Sucesión numérica:
$900, 1300, 1700, 2100, \ldots, t_{n-1} + 400$

Para cada mes podemos conocer el ahorro total, sumando el ahorro del mes anterior más 400 pesos.

Para cada mes podemos conocer el ahorro total, sumando el aumento mensual $n+1$ veces y 100 pesos.

$$t_1 = 900 = 2(400) + 100$$
$$t_2 = t_1 + 400 = 1300 = 3(400) + 100$$
$$t_3 = t_2 + 400 = 1700 = 4(400) + 100$$
$$t_4 = t_3 + 400 = 2100 = 5(400) + 100$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{t_n = t_{n-1} + 400}$$
$$\boldsymbol{t_n = 400(n+1) + 100 = 400n + 500}$$

Propósito de la actividad 3

Aplicar la definición de sucesión para identificar las sucesiones que están expresadas en la tabla, además de reconocer su patrón de acuerdo a las acciones y conocimientos matemáticos que han utilizado en las actividades anteriores, en donde se estudiaron dos sucesiones numéricas para las cuales se identificó algunas de sus propiedades y se formuló una expresión algebraica que permitiera conocer cualquier término de dicha sucesión. Además de proporcionar una primera visión de los tipos de sucesiones que existe.

Orientación didáctica

- Cuestione a los estudiantes respecto a las regularidades que identifican entre las sucesiones que se presentan en la tabla, así como las características de las diferentes representaciones que estas sucesiones.
- Promueva que reflexionen sobre las características de las sucesiones que se presentan y sobre las conclusiones que podrían formular los estudiantes.
- Se proponen algunas de las respuestas que los estudiantes pueden presentar, sin embargo, es importante reconocer que puede existir más de una respuesta correcta.
- Cuestione sobre las propuestas que se hacen para identificar como usan las propiedades de las sucesiones para llenar la tabla 3.6

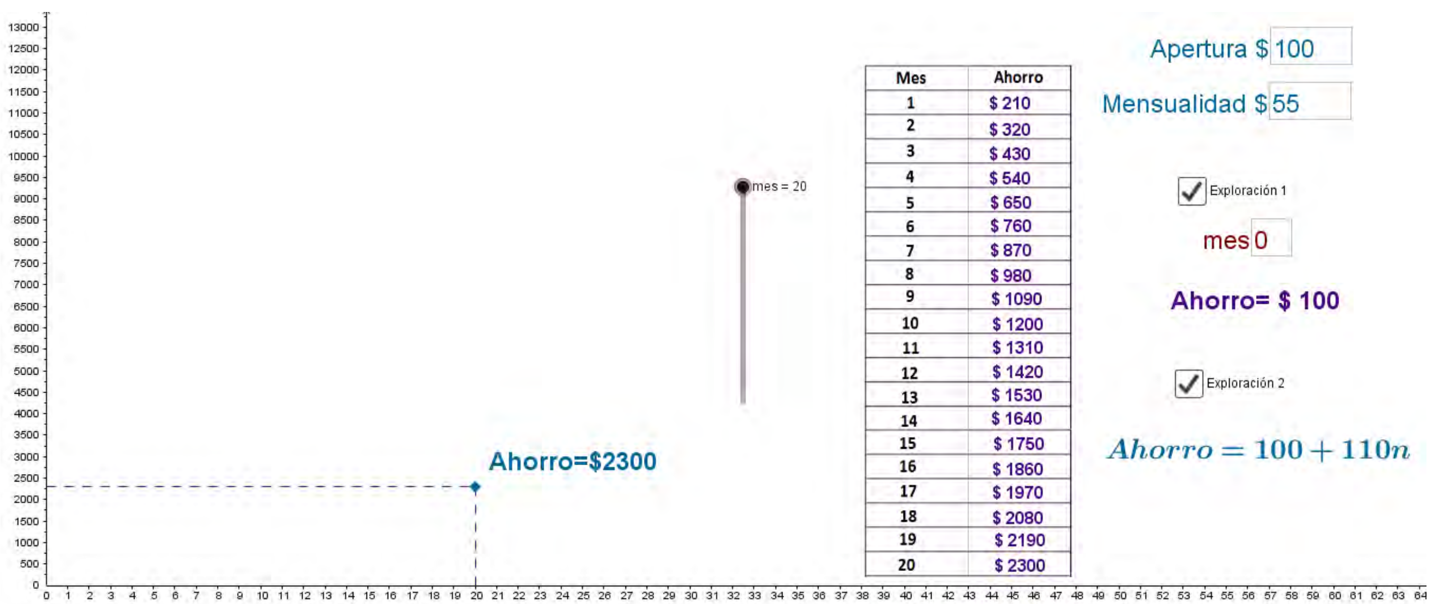
Actividad 2. Caja de ahorro

El presente applet centra su atención en la representación gráfica del ahorro que se obtendrá mes con mes, de los primeros 20 meses, además cuenta con la opción de ingresar los valores para la cantidad de Apertura y la cantidad de las mensualidades.

Nota: El applet está diseñado de acuerdo a la actividad 2, por lo cual el valor que se indique en la casilla Mensualidad representa la cantidad que aporta la empresa y que aporta el trabajador.

Exploración 1: de acuerdo al valor que se indique para mes, se muestra el ahorro total de acuerdo a los valores de Apertura y Mensualidad.

Exploración 2: Muestra una expresión general para calcular el ahorro que se tiene para cualquier mes



Propósito

Identificar la relación que existe entre la representación gráfica y la representación tabular de una sucesión, para determinar los elementos que se mantienen fijos y aquellos que varían de un mes a otro. Se espera que a través de la manipulación del applet se pueda reconocer el patrón que sigue el ahorro mensual de un trabajador, además, de aportar como una estrategia para argumentar las respuestas que se propusieron en la actividad respecto a las observaciones y reflexiones que se llevaron a cabo con la manipulación del applet.

Conocimientos matemáticos

Utilizar la definición de sucesión para identificar y definir la sucesión numérica que modela una situación, lo cual permita establecer el patrón que esta sigue y las propiedades de la sucesión, caracterizando los valores que numéricos que pertenecen a la sucesión. Además de establecer una representación algebraica de la sucesión.

Competencias a promover

Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.

- Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.

Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

- Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.
- Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesa e interpretar información.

Construye e interpreta modelos matemáticos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.

- Identifica y representa la sucesión que modela el ahorro mensual del trabajador, a partir de la información de la apertura de la cuenta, diferenciando variables y constantes.
- Analiza criticamente los factores que influyen en el patrón que sigue el incremento mensual de la cuenta de ahorro.

Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estumar su comportamiento.

- Analiza ideas y conceptos mediante representaciones linguiticas, matematicas o gráficas.
- Extrae la información que involucra variables independietnes y dependientes, constryuye su modelo matemático, gráfica y predice su comportamiento.

Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

- Conoce los elementos de la gráfica y su relación con los términos de la sucesión.

Orientación didáctica

- Como apoyo a la generalización, contar con una herramienta tecnológica aporta una mayor visualización de la situación que se presenta en la actividad. Proporciona el applet como referencia para la comprobación y reflexión de las propiedades de la sucesión que se está estudiando, para que los estudiantes puedan argumentar sus conjeturas.
- Realiza variaciones en la propuesta de ahorro para que los estudiantes identifiquen la sucesión para modelar esta situación, promoviendo que los estudiantes argumenten las propiedades de ahorro, como apoyo para establecer una expresión algebraica para dicha sucesión.

Observación:
La tabla que se pone como ejemplo corresponde a la **Tabla 3.6**, en donde se encuentran las sucesiones:

$$5, 7, 9, 11, \ldots, 2n + 3, \ldots$$

$$2, 10, 50, 250, \ldots, 2 \cdot 5^{n-1}, \ldots$$

$$5, 9, 13, 17, \ldots, 4n + 1, \ldots$$

$$1, 3, 9, 27, \ldots, 3^{n-1}, \ldots$$

Observación:
La sucesión aritmética que se pone como ejemplo corresponde a la siguiente:

$$\mathbf{1, 4, 7, 10, 13, \ldots, 1 + 3(n-1), \ldots}$$

Conocimientos matemáticos:
Caracterizar, de acuerdo a la definición de sucesión, las propiedades que permitan establecer el tipo de sucesión:

- Sucesión aritmética
- Sucesión geométrica

Además, identificar las propiedades de estos tipos de sucesiones y establecer una representación de dichas sucesiones.

En las *Actividades* cubiertas hasta este momento en el **BLOQUE 3** han aparecido varios tipos de sucesiones, por ejemplo en la **Tabla 3.5** se muestran cuatro. *La primera y la tercera tienen una característica común: sus términos, a partir del segundo se generan sumando una cantidad constante al término anterior, tal como ocurre también en la siguiente sucesión:*

$$1, 4, 7, 10, 14, \ldots,$$

Que también puede escribirse como:

$$1, 1 + 3, 1 + 2(3), 1 + 3(3), \ldots, 1 + (n - 1)(3),$$

En la cual sumamos tres unidades a cada término para obtener el siguiente. A las sucesiones que tienen estas características se les llama sucesiones o progresiones aritméticas.

> ***Las sucesiones o progresiones aritméticas son aquellas en las que la diferencia entre dos términos consecutivos es una constante (k), y se pueden representar de la siguiente manera:***
>
> $$a, a + k, a + 2k, a + 3k, \ldots, a + (n - 1)k$$
>
> ***Enésimo término***

En cambio la segunda y cuarta sucesión numérica de la **Tabla 3.5**, tienen un comportamiento similar al de la siguiente:

$$2, 8, 32, 128, \ldots,$$

Que también puede escribirse como:

$$2, 2(4), 2(4^2), 2(4^3), \ldots, 2(4^{n-1})$$

Donde se tiene que multiplicar cada término por cuatro para obtener el siguiente. A las sucesiones que se generan de esta manera se les llama sucesiones o progresiones geométricas.

> ***Las sucesiones o progresiones geométricas son aquellas en las que el cociente de dos términos consecutivos es una constante (r), y se pueden representar de la siguiente manera:***
>
> $$a, a(r), a(r^2), a(r^3), \ldots, a(r^{n-1}), \ldots$$
>
> ***Enésimo término***

Propósito de la lectura

Establecer una definición para los diferentes tipos de sucesiones que se han estudiado en la resolución de las actividades de la secuencia didáctica, sucesiones aritméticas y sucesiones geométricas, señalando las características de cada una; para que los estudiantes puedan identificar el tipo de sucesión que modela una situación.

Competencias disciplinares a promover

Construye e interpreta modelos matemáticos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.

- Identifica el tipo de sucesión que se modela una situación.
- Sigue procedimientos de forma reflexiva, para identificar el patrón de una sucesión y argumenta sus características.
- Expresa los conceptos de sucesión aritmética y sucesión geométrica en sus diferentes representaciones.
- Analiza criticamente los factores que influyen una sucesión para establecer su expresión algebraica.

Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.

- Identifica y representa el tipo de sucesión diferenciando variables y constantes.
- Analiza los diferentes alternativas de solución, apoyandose en la diferentes representaciones de una sucesión.

Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y cientifícos.

- Identifica analíticamente los componentes de la información que se plantea respecto a la definición de sucesión aritmética y sucesión geométrica.

Orientación didáctica

- Presenta sucesiones en diferentes representaciones y cuestione a los estudiantes respecto al tipo de sucesión que se está modelando, e identifica sin cuentan con los conocimientos matemáticos adecuados.
- Promueve la reflexión sobre las representaciones de una sucesión y la relación que existe entre estas.
- Utilice el programa **Construcción de sucesiones** ubicado en la página **39**, para diseñar sucesiones que pueda presentar a los estudiantes, con la finalidad de aportar en la identificación de las características de una sucesión numérica.

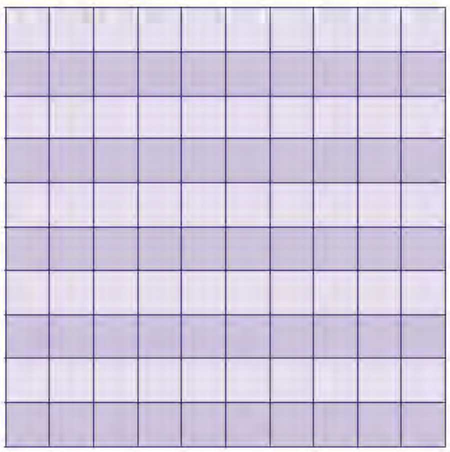
Actividad: 4
Actividad de Equipo

Suma de los términos de una sucesión numérica

Una *Actividad* muy común para recabar fondos en las escuelas son las rifas en sus diferentes variantes. En la mayoría de ellas el comprador sabe cuánto debe pagar antes de escoger el boleto o número con el que participará en la rifa, pero hay un tipo de rifa en la que el comprador no sabe de antemano cuánto debe pagar para participar en ella, pues el costo del boleto está en función del número seleccionado.

Seguramente tú ya has participado en este tipo de rifas, en las que el costo en pesos equivale al número que hayas seleccionado; ***por ejemplo*** si el número que obtuviste es el 5 te corresponde pagar cinco pesos, si el número es 16 te corresponde pagar 16 pesos, y así sucesivamente. Al organizar una de estas rifas se decide hacer 100 boletos numerados del 1 al 100.

1. Si cada cuadro de la siguiente cuadrícula representa uno de los boletos que se venderán, etiquétalos



Si ordenas los números de los boletos podrás darte cuenta que se obtiene una sucesión aritmética, ya que para obtener un nuevo término de la sucesión se le suma una unidad al término anterior. Una pregunta interesante en este tipo de situaciones es saber cuánto se reunirá de dinero si se venden todos los boletos.

2. Utilizando la calculadora, determina la cantidad de dinero que se reunirá, si se venden todos los boletos.

Conocimientos matemáticos: Analizar e identificar las características de una situación problema que es modelada a través de una serie numérica.

Posibles respuestas: Identificar la sucesión $1, 2, 3, 4, \ldots, 100$ para definir el valor de cada uno de los boletos en venta.

Y que se pueda definir que al ordenar los boletos se obtiene:

$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ boleto} & \rightarrow & 1 \text{ peso} \\ 2 \text{ boletos} & \rightarrow & 3 \text{ pesos} \\ 3 \text{ boletos} & \rightarrow & 6 \text{ pesos} \\ & \vdots & \\ 100 \text{ boletos} & \rightarrow & 5050 \text{ pesos} \end{array}$$

Propósito

Analizar y calcular la cantidad de dinero que se puede recaudar con la venta de boletos, definiendo el valor de éstos con una sucesión aritmética, y realizar la suma de estos términos para definir una serie numérica.

Competencias disciplinares a promover

Construye e interpreta modelos matemáticos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.

- Establece una relación entre los valores de los boletos y los números naturales para definir la sucesión que lo modela.
- Sigue instrucciones y procedimientos de forma reflexiva, para analizar la cantidad de dinero que se recauda con la venta de boletos.
- Analiza criticamente los factores que influyen en la construcción de una serie numérica.

Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y cientifícos.

- Identifica las caracteristícas de la sucesión aritmética que modela el valor de los boletos.
- Identifica analíticamente los componentes de la información que se plantea respecto a la definición de sucesión aritmética y sucesión geométrica

Orientación didáctica

- Destaque la importancia de la sucesión numérica que representa los valores de los boletos, para que los estudiantes puedan crear una relación la construcción de series numéricas.
- Promueve que loes estudiantes reflexionen sobre las estrategias que pueden seguir para realizar el cálculo de la cantidad que se puede recaudar con la venta de los boletos.

Posibles respuestas:
Identificar entre las posibles estrategias para calcular la cantidad de dinero que se obtendrá de la venta de boletos. Por ejemplo,

$$\begin{array}{ccccc} 1 & + & 100 & = 101 \\ 2 & + & 99 & = 101 \\ 3 & + & 98 & = 101 \\ \vdots & & \vdots & \vdots = 101 \\ 50 & + & 51 & = 101 \end{array}$$

Entonces tendríamos que la suma es 50 veces 101, lo cual corresponde a 5050.

Conocimientos matemáticos:
Establecer la definición de serie numérica y sus propiedades, así como su notación, para identificar las series aritméticas y poder definir las series geométricas.

A la suma de los términos de una sucesión geométrica se le llama ***serie geométrica***.

BLOQUE 3

3. ¿Cómo le hiciste para calcular el dinero que se reunirá, si se venden todos los boletos?

A la suma de los términos de una sucesión aritmética se le llama Serie aritmética, y por lo regular se representa de la siguiente manera:

$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ donde es un número natural, cuando es finita la sucesión, y
$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$, cuando la sucesión es infinita.

Esta definición también es válida para las series geométricas, en cuyo caso los que se suman son los términos de una sucesión geométrica.

4. Para resolver de una manera rápida el problema de la rifa es posible obtener una expresión algebraica como la siguiente:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Que representa la suma de los primeros n números de la sucesión aritmética. Con esta expresión algebraica calcula la suma de los primeros:

4.1 **Tres términos.**

4.2 **Seis términos.**

4.3 **20 términos.**

4.4 **100 términos.**

Y en cada caso verifica los resultados sumando cada uno de los números con la calculadora, salvo en el 4.4 porque ya lo hiciste en 2.

Matemáticas 1 81

Posibles respuestas:

Tres términos $\rightarrow \frac{3(4)}{2} = \frac{12}{2} = 6$ y tres boletos = $1+2+3=6$

Seis términos $\rightarrow \frac{6(7)}{2} = \frac{42}{2} = 21$ y Seis boletos = $1+2+3+4+5+6=21$

20 términos $\rightarrow \frac{20(21)}{2} = \frac{420}{2} = 210$ y 20 boletos = $1+2+3+\cdots+21=210$

100 términos $\rightarrow \frac{100(101)}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$ y 100 boletos = $1+2+3+\cdots+100=210$

Propósito de la actividad

Identificar la relación entre el valor de los boletos y las series numéricas, para identificar una serie aritmética, y establecer la representación algebraica de dicha serie.

Competencias disciplinares a promover

Construye e interpreta modelos matemáticos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.

- Identifica el tipo de serie que módela la situación.
- Establece una relación entre los valores de los boletos y los números naturales para definir la sucesión que lo modela.
- Sigue instrucciones y procedimientos de forma reflexiva, para proponer estrategias para cálcular el dinero recolectado.
- Analiza criticamente los factores que influyen en la construcción de una serie numérica, ya sea aritmética o geométrica.

Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científícos.

- Identifica las caracteristícas de la sucesión aritmética que modela el valor de los boletos.
- Identifica analíticamente los componentes de la información que se plantea respecto a la definición de sucesión aritmética y sucesión geométrica

Orientación didáctica

- Promueve que los estudiantes reflexiones sobre la expresión algebraica que se estableció para la serie numérica que modela la recolección de dinero.
- Discutan de forma grupal sobre las estrategias que pueden utilizar conocer la cantidad de dinero que se ha recaudado, si se conoce la cantidad de boletos que se han vendido.

Como actividad de refuerzo se propone la Actividad 4 **Números figurales** que puedes encontrar en la sección ***Actividades Complementarias*** página **76.**

Actividad de Cierre

Actividad: 5
Actividad Grupal

En esta **Secuencia** se presentaron situaciones que dieron origen a la formación de sucesiones numéricas en diferentes contextos como el meramente numérico, el de las figuras, los ahorros, rifas, etc., tuviste la oportunidad de trabajar con sucesiones aritméticas y geométricas, las cuales fueron definidas en el cuerpo de las actividades porque la situaciones plateadas así lo ameritaban.

De esta manera en la *Actividad 4* se definió lo que es una sucesión aritmética y una sucesión geométrica de la siguiente manera:

> ***Las sucesiones o progresiones aritméticas son aquellas en las que la diferencia entre dos términos consecutivos es una constante (k), y se pueden representar de la siguiente manera:***
>
> $$\underbrace{a,\ a+k,\ a+2k,\ a+3k,\ \ldots,\ a+(n-1)k}_{\textit{Enésimo término}}$$

Lo cual equivale a decir que los términos de una sucesión aritmética se obtienen sumando una constante al término anterior, por ejemplo en la siguiente sucesión:

6, 9, 12, 15, 18, 21, 24

¿Es cierto que la diferencia entre dos términos consecutivos es una constante (respetando el orden: el mayor menos el menor o viceversa)? Argumenta su respuesta

____

____

____

____

____

Si la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa, **¿cuál es el valor de k?**

82 Realiza Sumas y Sucesiones de Números

Conocimientos matemáticos:
Identificar una sucesión aritmética, así como sus propiedades.

Posibles respuestas:
Argumentar las propiedades de la sucesión aritmética

$$\mathbf{6, 9, 12, 15, 18, 21, 24}$$

para definir la constante de esta sucesión, que corresponde a $k = 3$, ya que la diferencia entre dos términos consecutivos.

Posibles respuestas:

$$6 \xrightarrow{+3} 9 \xrightarrow{+3} 12 \xrightarrow{+3} 15 \xrightarrow{+3} 18 \xrightarrow{+3} 21 \xrightarrow{+3} 24$$

El primer término de la sucesión es 6 y los siguientes términos se obtienen sumando 3 al anterior. Por lo cual su expresión algebraica es

$$a_n = 6 + 3(n - 1), \text{ para } n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

Propósito de la actividad

Utilizar la definición de sucesión numérica para analizar una sucesión y argumentar sus propiedades para seleccionar su tipo, en este caso sucesión aritmética.

Competencias disciplinares promover

Construye e interpreta modelos matemáticos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.

- Identifica el tipo de sucesión que se propone.
- Sigue procedimientos de forma reflexiva, para identificar el patrón de una sucesión y argumenta sus características.
- Analiza criticamente los factores que influyen una sucesión para establecer su propiedades.

Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.

- Identifica y representa el tipo de sucesión diferenciando variables y constantes.
- Analiza los diferentes alternativas de solución, apoyandose en la diferentes representaciones de una sucesión.

Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y cientifícos.

- Identifica analíticamente los componentes de la información que se plantea respecto a la definición de sucesión aritmética.

Orientación didáctica

- Promueve que los estudiantes argumenten respecto a las afirmaciones que realizan, e identifica que sus conocimientos matemáticos sean adecuados.
- Cuestione a los estudiantes sobre la construcción de sucesiones y cómo identificar entre los tipos de sucesiones, para que argumenten las características que ellos identifican.
- Reflexione con los estudiantes sobre las representaciones de la sucesión y su expresión general, destacando que la sucesión que se propone es una sucesión finita.

Observación:
Destacar que existe un error de edición en la definición, se hace mención de la sucesión aritmética pero la definición corresponde a una sucesión geométrica.

Conocimientos matemáticos:
Identificar una sucesión geométrica, así como sus propiedades.

Además de retomar la definición de series aritméticas y series geométricas.

Posibles respuestas:
Argumentar las propiedades de la sucesión aritmética

$$\mathbf{3, 15, 75, 375, 1875, 9375, \ldots}$$

entonces para cada término tenemos que:

$$3 = 3(1) = 3 \cdot 5^0$$
$$15 = 3(5) = 3 \cdot 5^1$$
$$75 = 3(25) = 3 \cdot 5^2$$
$$375 = 3(125) = 3 \cdot 5^3$$
$$1875 = 3(625) = 3 \cdot 5^4$$
$$9375 = 3(3125) = 3 \cdot 5^5$$
$$\vdots$$
$$a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$$

Las sucesiones o progresiones aritméticas son aquellas en las que la diferencia entre dos términos consecutivos es una constante (r), y se pueden representar de la siguiente manera:

$$a, a(r), a(r^2), a(r^3), \ldots\ a(r^{n-1}), \ldots$$

Enésimo término

Lo cual equivale a decir que los términos de una sucesión o progresión aritmética se obtienen multiplicando el término anterior por una constante, ***por ejemplo*** en la siguiente sucesión:

3, 15, 75, 375, 1875, 9375, ...

¿Es cierto que el cociente entre dos términos consecutivos es una constante (respetando el orden: el mayor entre el menor o viceversa)? Argumenta su respuesta

____

____

____

____

Si la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa, **¿cuál es el valor de r ?**

Además de caracterizar estos dos tipos de sucesiones, se señaló que hay ocasiones donde es necesario recurrir a la suma de los términos de una sucesión para resolver el problema que se plantea. En la Actividad 4 se presenta una situación como ésta y se resuelve con el uso de la herramienta aritmética normal, es decir utilizando la calculadora para sumar de manera directa los términos de la sucesión. Además se propone una forma simplificada de hacer el cálculo a través de una expresión algebraica, y con el uso de la calculadora se verificó que sí funciona para ese caso.

Además se definió lo que son las **series aritméticas** de la siguiente manera:

A la suma de los términos de una sucesión aritmética se le llama Serie aritmética, y por lo regular se representa de la siguiente manera:

$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ donde es un número natural, cuando es finita la sucesión, y $S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$, cuando la sucesión es infinita.

Y tal como se señala en la Actividad 4, si lo que se suma son los términos de una secesión o progresión geométrica, entonces lo que se tiene es una **serie geométrica**.

Posibles respuestas:

$$3 \xrightarrow{\times 5} 15 \xrightarrow{\times 5} 75 \xrightarrow{\times 5} 375 \xrightarrow{\times 5} 1875 \xrightarrow{\times 5} 9375 \xrightarrow{\times 5}$$

El primer término de la sucesión es 3 y los siguientes términos se obtienen multiplicando por 5 al anterior, por lo tanto, se tiene que $\boldsymbol{r = 5}$.

Propósito de la actividad

Utilizar la definición de sucesión numérica para analizar una sucesión y argumentar sus propiedades para seleccionar su tipo, en este caso sucesión geométrica.
Además de utilizar las definiciones de sucesión numérica para establecer la definición de series aritméticas y series geométricas, identificando sus propiedades.

Competencias disciplinares a promover

Construye e interpreta modelos matemáticos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.

- Identifica el tipo de sucesión que se propone.
- Sigue procedimientos de forma reflexiva, para identificar el patrón de una sucesión y argumenta sus características.
- Analiza criticamente los factores que influyen una sucesión para establecer su propiedades.

Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.

- Identifica y representa el tipo de sucesión diferenciando variables y constantes.
- Analiza los diferentes alternativas de solución, apoyandose en la diferentes representaciones de una sucesión.

Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y cientifícos.

- Identifica analíticamente los componentes de la información que se plantea respecto a la definición de sucesión geométrica.
- Reflexiona sobre la definición de serie aritmética y sus opropiedades para construir la definición de serie geometrica.

Orientación didáctica

- Promueve que los estudiantes reflexiones respecto a las propiedades de una sucesión y que formulen argumentos basados en la definición de sucesión geométrica como justificación para establecer las propiedades de la sucesión que se propone.
- Destaca la importancia de que los estudiantes identifiquen entre sucesiones aritméticas y geométricas, identificando las propiedades de cada una de ellas.
- Cuestiona a los estudiantes sobre la definición de serie geométrica, para identificar si cuentan con una adecuada definición de sucesión y serie numérica.

Construcción de sucesiones

Descripción

Como una herramienta de apoyo al uso del bloque "**Sumas y sucesiones de números**" del módulo Matemáticas 1, se proporciona un applet para la construcción de sucesiones numéricas: aritméticas y geométricas, en donde se puedan variar las propiedades de una sucesión. Por lo cual nuestra propuesta tiene como objetivo la construcción de sucesiones numéricas en donde se pueda observar las diferentes representaciones que está puede tomar, se cuenta con dos secciones una para las sucesiones aritméticas y otra para las sucesiones geométricas.

En primer instante este applet Construcción de sucesiones.ggb está dirigido a los profesores, como aporte en el apoyo de la implementación del tema de series y sucesiones numéricas, ya que el reconocer los diferentes sistemas de representación contribuye en el proceso de generalización que los estudiantes desarrollan en la resolución de sucesiones numéricas, asimismo permite explorar entre las posibles estrategias para el reconocimiento del patrón de una sucesión, lo cual aporta en el reconocimiento de sus propiedades.

A través de la manipulación del applet, se espera que el profesor cuente con ejemplos de sucesiones de acuerdo a las propiedades que éste establezca, y que esto funja como herramienta apoyo para sus prácticas docentes en el salón de clases.

Propósito

El propósito del applet es que como profesor cuente con una herramienta que permita construir sucesiones numéricas a través de la descripción de sus propiedades, es decir, que se pueda indicar el primer término de una sucesión y el patrón que esta sigue para poder estudiar sus diferentes representaciones ya sea numérica, gráfica o algebraica.

Y que esto proporcione un apoyo para el estudio sucesiones, como reflexión sobre las propiedades que éstas poseen, permitiendo identificar entre los tipos de sucesión; así como la relación que existe entre cada una de las representaciones de una sucesión numérica.

Contenido

El applet cuenta con dos secciones, una para las sucesiones aritméticas y otro para las sucesiones geométricas, en donde se pueden observar algunas representaciones de la sucesión que se desea construir. A continuación, se describe cada una de estas secciones.

Sucesiones aritméticas

Para comenzar con la sección es necesario activar la casilla **Aritmética** que se ubica en la esquina superior derecha, lo cual permitirá activar las opciones para construir nuestra sucesión (Ilustración 1).

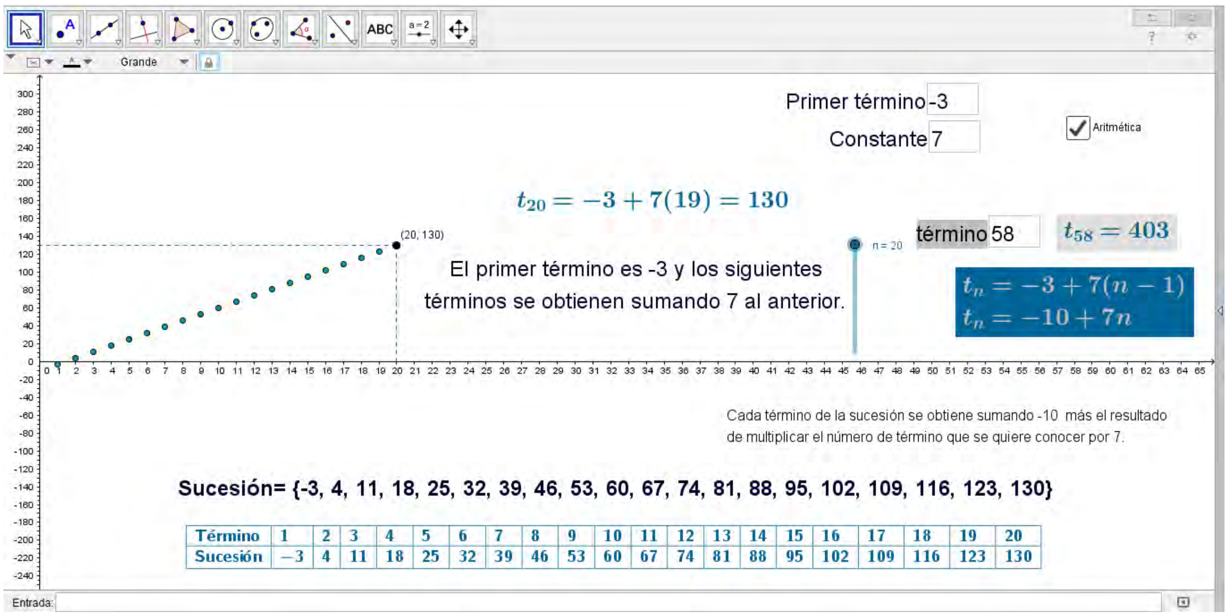


Ilustración 1. Sección de applet para construcción de sucesiones aritméticas

De acuerdo a la definición de sucesión o progresión aritmética que se establece en el módulo, se construye una sucesión numérica que cumpla con ciertas propiedades, por lo cual para esta sección es necesario introducir los valores que indican las siguientes propiedades:

- **Primer término**: primer término de la sucesión numérica.
- **Constante**: diferencia que existe entre cualesquiera dos términos consecutivos de la sucesión.

Recuerda que estos valores pueden ser cualquier número real.

Se cuenta con diferentes representaciones de la sucesión, para reflexionar sobre la relación que existe entre ellas, por una parte, se tiene la *representación gráfica* (Ilustración 2) en donde se puede identificar la relación que existe entre las coordenadas del punto y los valores del término de la sucesión y su valor numérico.

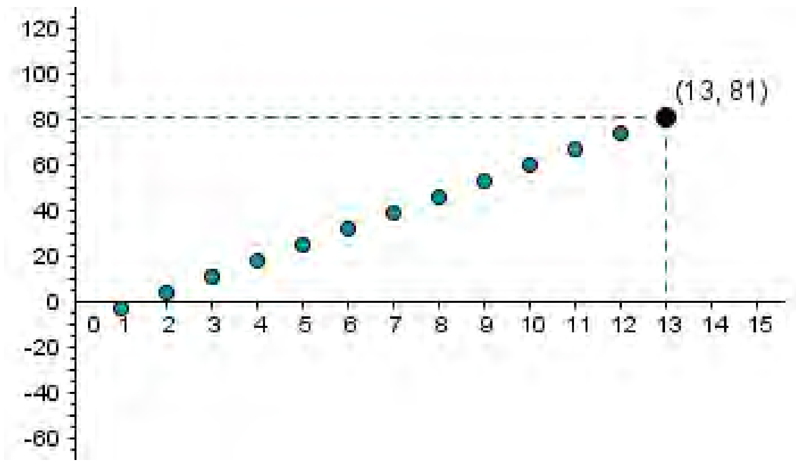


Ilustración 2.representación gráfica de una sucesión aritmética

A manera de ilustración se presentan los primeros 20 términos, a través de la manipulación deslizador n se puede observar como los puntos de la gráfica se van trazando, para identificar las coordenadas que corresponden a cada uno de estos primeros términos. Asimismo, se expresa cada uno de los términos de forma numérica y verbal, para identificar como es la construcción de dicha sucesión (Ilustración 3).

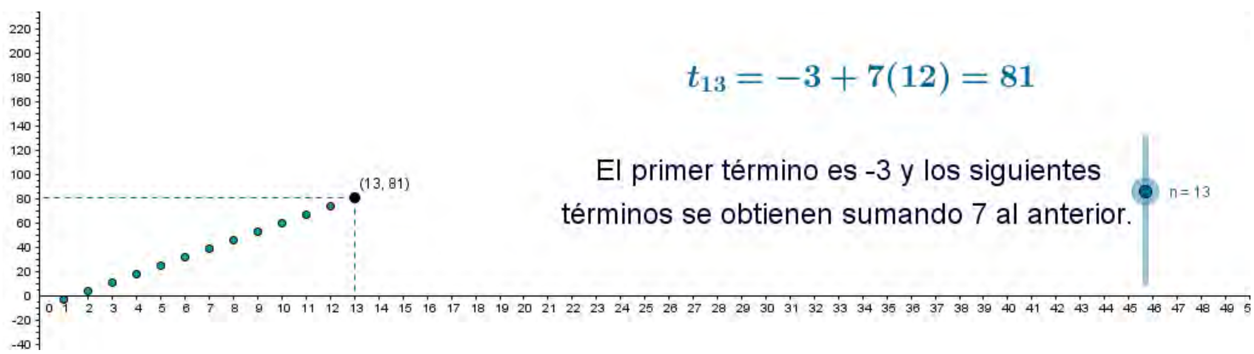


Ilustración 3. Representación numérica y verbal de una sucesión aritmética

Asimismo, conforme el valor del deslizador cambia, se pueden observar los primeros n elementos de la sucesión (Ilustración 4), junto a la tabla que representa los términos y elementos de dicha sucesión.

Sucesión= {-3, 4, 11, 18, 25, 32, 39, 46, 53, 60, 67, 74, 81}

Término	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Sucesión	-3	4	11	18	25	32	39	46	53	60	67	74	81	88	95	102	109	116	123	130

Ilustración 4. Representación tabular y elementos de la sucesión

En la ilustración 4 solamente se presentan los primeros 20 elementos de la sucesión; sin embargo, se tiene la opción de conocer cualquier término de la sucesión (Ilustración 5). Por lo cual se presentan dos expresiones algebraicas de acuerdo a las propiedades que se establecieron para nuestra sucesión, además de dar la oportunidad de introducir el valor del término que se quiere conocer.

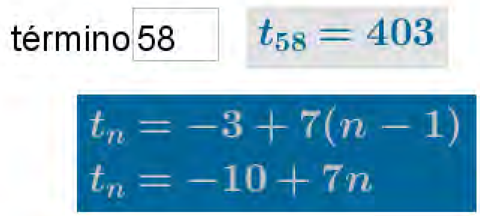


Ilustración 5. Expresión general de la sucesión

Sucesiones geométricas

Para comenzar con la sección es necesario activar la casilla **Geométrica** que se ubica en la esquina superior derecha, lo cual permitirá activar las opciones para construir nuestra sucesión (Ilustración 6).

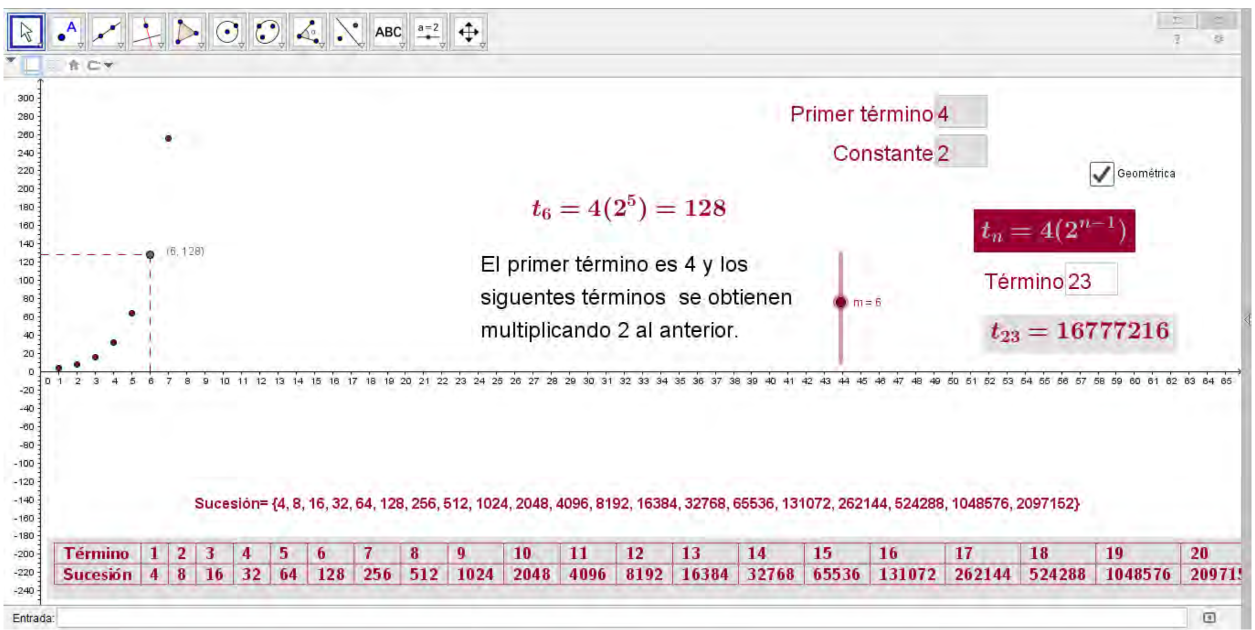


Ilustración 6 .Sección de applet para construcción de sucesiones geométricas

De acuerdo a la definición de sucesión o progresión geométrica que se establece en el módulo, se construye una sucesión numérica que cumpla con ciertas propiedades, por lo cual para esta sección es necesario introducir los valores que indican las siguientes propiedades:

- **Primer término**: primer término de la sucesión numérica.
- **Constante**: cociente entre cualesquiera dos términos consecutivos de la sucesión.

Nota: Recuerde que estos valores pueden ser cualquier número real.

Se cuenta con diferentes representaciones de la sucesión, para reflexionar sobre la relación que existe entre ellas, por una parte, se tiene la *representación gráfica* (Ilustración 7) en donde se puede identificar la relación que existe entre las coordenadas del punto y los valores del término de la sucesión y su valor numérico.

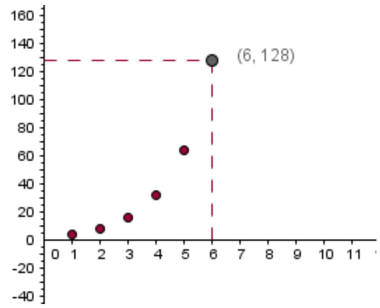


Ilustración 7. Representación gráfica de una sucesión geométrica

A manera de ilustración se presentan los primeros 10 términos, a través de la manipulación deslizador m se puede observar cómo los puntos de la gráfica se van ilustrando, para identificar las coordenadas que corresponden a cada uno de estos primeros términos. Asimismo, se expresa cada uno de los términos de forma numérica y verbal, para identificar como es la construcción de dicha sucesión (Ilustración 8).

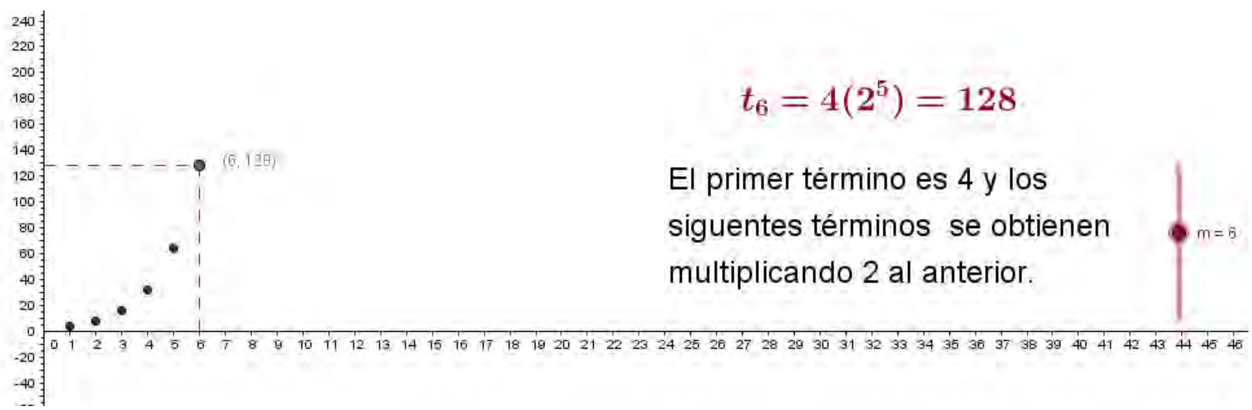


Ilustración 8. Representación numérica y verbal de una sucesión geométrica

También se pueden observar los primeros 20 elementos de la sucesión (Ilustración 9), junto a la tabla que representa los términos y elementos de dicha sucesión.

Sucesión= {4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, 65536, 131072, 262144, 524288, 1048576, 2097152}

Término	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Sucesión	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072	262144	524288	1048576	20971

Ilustración 9. Representación tabular y elementos de la sucesión

Como ilustración solamente se presentan los primeros elementos de la sucesión, sin embargo, se tiene la opción de conocer cualquier término de esta (Ilustración 10). Para ello se presentan su expresión algebraica de acuerdo a las propiedades que se establecieron, además de dar la oportunidad de introducir el valor del término que se quiere conocer.

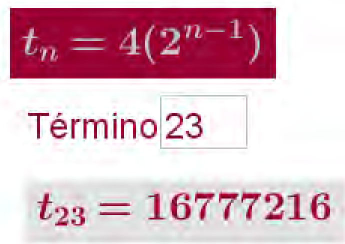


Ilustración 10. Expresión general de la sucesión

Actividades Complementarias

Posibles respuestas:

Se espera que los estudiantes puedan identificar el patrón que sigue la distancia que recorrerá el corredor semana a semana.

Semana	Distancia (km)
1	5
2	5.5
3	6
4	6.5
5	7

Entonces la sucesión que representa esta situación está dada por:

$$\mathbf{5, 5.5, 6, 6.5, 7, 7.5, \ldots}$$

Para identificar que para las semanas $\mathbf{4}$ y $\mathbf{12}$ debe recorrer $\mathbf{6.5\ km}$ y $\mathbf{11.5\ km}$, respectivamente.

Además de reconocer que para cada una de las semanas la distancia a recorrer estará dada por:

$$d = distancia$$
$$n = número\ de\ la\ semana$$
$$\boldsymbol{d = 5 + 0.5(n-1)}$$
$$\boldsymbol{= 4.5 + 0.5n}$$

Por lo tanto, en un año recorrerá $\mathbf{30.5\ km}$, entonces para recorrer $42\ \mathrm{km}$ necesita

Actividad 1. El corredor

Un corredor se prepara para un maratón en donde debe recorrer 42 km, y ha decidido prepararse con anticipación, para iniciar su entrenamiento puso como meta recorrer 5 km diarios, y aumentar 500 metros al inicio de cada semana.

Semana	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Distancia (km)	5				

¿Cuánto tendrá que recorrer en su cuarta semana? __________

¿Y en su semana número 15? __________

Si el maratón es dentro de un año, ¿Podrá recorrer 42 km en su entrenamiento? Explica tu respuesta.

____

____

____

____

¿Cuántas semanas debe entrenar el corredor si desea recorrer exactamente 42 km en su ultima semana?

____

____

____

Utiliza el applet **El corredor.ggb** para explorar el comportamiento del entrenamiento que debe seguir el corredor y comprobar si las opciones que proporcionaste son las adecuadas, operando el deslizador **Semana**.

Si el corredor quiere conocer la distancia que debe recorrer para cada una de las semanas, ¿cómo podría conocer esta distancia?

____

____

____

____

Activa la casilla **Exploración 1** y utiliza tu estrategia para indicar la distancia que debe recorrer el corredor para el número de semanas que se indica, y viceversa. Llena la siguiente tabla con los valores que ingresaste en el applet.

Semanas						
Recorrido						

Activa la casilla **Comprobación** para rectificar si tus respuestas son las adecuadas.

Posibles respuestas:

Se espera que los estudiantes reconozcan el comportamiento de la sucesión, y que puedan describir cómo será este comportamiento y que a través de este puedan definir la distancia que se debe recorrer para cualquier semana.

Errores y/o dificultades:

Por la forma que se presenta la actividad puede ocasionar que los estudiantes no puedan identificar que la situación modela una sucesión, ni las propiedades que permiten modelarla, por lo cual no se puede detectar una regularidad.

Conocimiento matemático

Reconocer la relación que existe entre dos conjuntos de números para identificar la sucesión numérica que la situación representa, así como las propiedades de esta.
Identificar el patrón de la sucesión, para encontrar cualquier término de ésta a través de su representación gráfica y numérica.

Propósito

A través de una situación problema se promueve que los estudiantes reflexionen respecto a una estrategia que permita reconocer cuál es la mejor opción de entrenamiento que un corredor puede seleccionar. En donde los estudiantes puedan reflexionar e identificar la sucesión que representa las distancias que el corredor recorre semana a semana, y pueda argumentar el tiempo que éste necesita para cumplir con su meta de $42\ \mathrm{km}$.
Así como construir diferentes sucesiones, variando la distancia que se aumenta cada semana o la distancia de inicio, para seleccionar la mejor propuesta de entrenamiento.

Competencias disciplinares a promover

Construye e interpreta modelos matemáticos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.

- Identifica y representa la sucesión que modela el entrenamiento semana a semana, diferenciando variables y constantes.
- Analiza criticamente los factores que influyen en el patrón que sigue la construcción del entrenamiento semanal.

Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.

- Analiza las diferentes alternativas de solución, apoyandose en la definición de sucesión y las propiedades que esto representa.
- Modela la información de la alternativa elegida para posteriormente resolverla.

Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

- Selecciona entre las diferentes representaciones de una sucesión al proponer explicaciones de los resultados obtenidos.
- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones linguisticas, matematicas o gráficas.

Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estumar su comportamiento.

- Analiza ideas y conceptos mediante representaciones linguiticas, matematicas o gráficas.
- Extrae la información que involucra variables independietnes y dependientes, constryuye su modelo matemático, gráfica y predice su comportamiento.

Posibles respuestas:
Se espera que los estudiantes puedan observar que los puntos que se están graficando corresponde a los términos de la sucesión y las coordenadas están establecidas por el número de semana y la distancia que debe recorrer en esa semana.
De acuerdo a la estrategia que utilizaron en la primera parte de la actividad, se espera que está pueda ser adaptada para otros casos en donde el entrenamiento permita al corredor realizar el maratón, por lo cual se espera que realicen cambios en la distancia que debe recorrer al iniciar el entrenamiento o la distancia que debe aumentar semana a semana.

Actividad 1. El corredor

¿Qué estrategia seguiste para que los puntos correspondieran con el entrenamiento del corredor?

____
____
____

Se ha decidido realizar un cambio en el entrenamiento del corredor para ver algunas opciones que permitan que el corredor pueda realizar el maratón dentro de un año, ¿con qué opciones cuenta el corredor?

____
____
____

Ingresa los valores **Inicio** y **Aumento** para hacer los cambios necesarios en el entrenamiento del corredor, de acuerdo a las opciones que propusiste.

Si el corredor ha decidido que en su última semana de entrenamiento quiere recorrer una distancia de 50 km para asegurar que puede terminar el maratón, describe el entrenamiento que puede seguir el corredor para que pueda llevar a cabo el maratón dentro de un año.

Propuesta:____
____
____
____
____

Como reflexión final se espera que los estudiantes puedan proponer una estrategia de entrenamiento, que dependa del recorrido inicial o la distancia que se aumenta semana a semana.

Se espera que puedan construir nuevas sucesiones como:

- $\mathbf{5, 6, 7, 8, 9, 10}, \ldots$ en donde inicia con 5 km y se aumenta 1 km cada semana
- $\mathbf{16.5, 17, 17.5, 18, 18.5, 19}, \ldots$ en donde inicia con 16.5 km y se aumenta 500 m cada semana
- $\mathbf{1, 2, 3, 4, 5, 6}, \ldots$ en donde inicia con 1 km y se aumenta 1 km cada semana

Errores y/o dificultades:
Una de las representaciones que provoca una mayor dificultad en los estudiantes es la representación gráfica, por lo que puede existir una confusión para identificar los puntos que representan los términos de la sucesión.

Actividades complementarias

Orientación didáctica

- Permita que los estudiantes reflexionen sobre la sucesión que se presenta para que puedan identificar el patrón que esta sigue.
- Promueva que los estudiantes reflexiones sobre un entrenamiento que ellos pueden llevar a cabo, para que puedan definir como variar los componentes de los cuales depende el entrenamiento.
- Cuestione sobre la representación gráfica de la sucesión, respecto a los puntos que se están graficando ¿qué representan estos puntos? ¿cómo podemos definir dichos puntos? para conocer la interpretación que se está dando de la gráfica.
- Organice un momento de discusión, en donde los estudiantes puedan mostrar sus propuestas de entrenamiento para mostrar las diferentes opciones con las que cuentan, haciendo énfasis en que no existe una única solución.
- En la actividad no se hace explicito la representación algebraica, crea una reflexión sobre los argumentos que presentan para describir el comportamiento del recorrido que debe realizar el corredor semana a semana y como esta distancia va aumentando, y sugiere que construyan una expresión que permita conocer la distancia a recorrer para cualquier semana.

Puede encontrar la actividad **El corredor** en la sección de hojas de trabajo, en la página **70**.

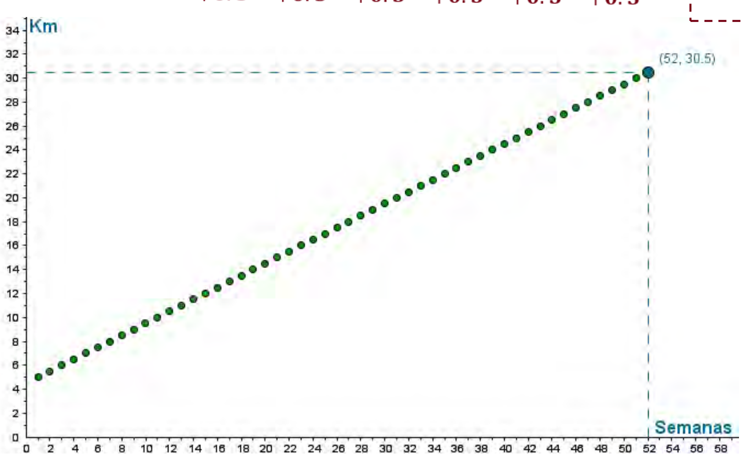
Representaciones de la sucesión

$$5 \quad 5.5 \quad 6 \quad 6.5 \quad 7 \quad 7.5 \quad 8 \quad 8.5$$

$$+0.5 \quad +0.5 \quad +0.5 \quad +0.5 \quad +0.5 \quad +0.5 \quad +0.5 \quad +0.5$$

Sucesión numérica:

$$5, 5.5, 6, 6.5, 7, 7.5, 8 \ldots, 5 + 0.5(n-1)$$



$$d_1 = 5$$

$$d_2 = d_1 + 0.5 = 5 + 0.5 = 5.5$$

$$d_3 = d_2 + 0.5 = 5.5 + 0.5 = 6$$

$$d_4 = d_3 + 0.5 = 6 + 0.5 = 6.5$$

$$\vdots$$

$$d_n = 5 + 0.5(n-1)$$

$$d_n = 5 + 0.5n - 0.5 = 4.5 + 0.5n$$

Para conocer la distancia a recorrer en una semana dada, se le suma a la distancia de inicio el aumento semanal tantas veces como el número de semanas menos uno.

Nota: Las representaciones están centradas en los datos principales de la actividad, sin embargo, pueden adaptarse para las nuevas propuestas.

Propuesta de Applet

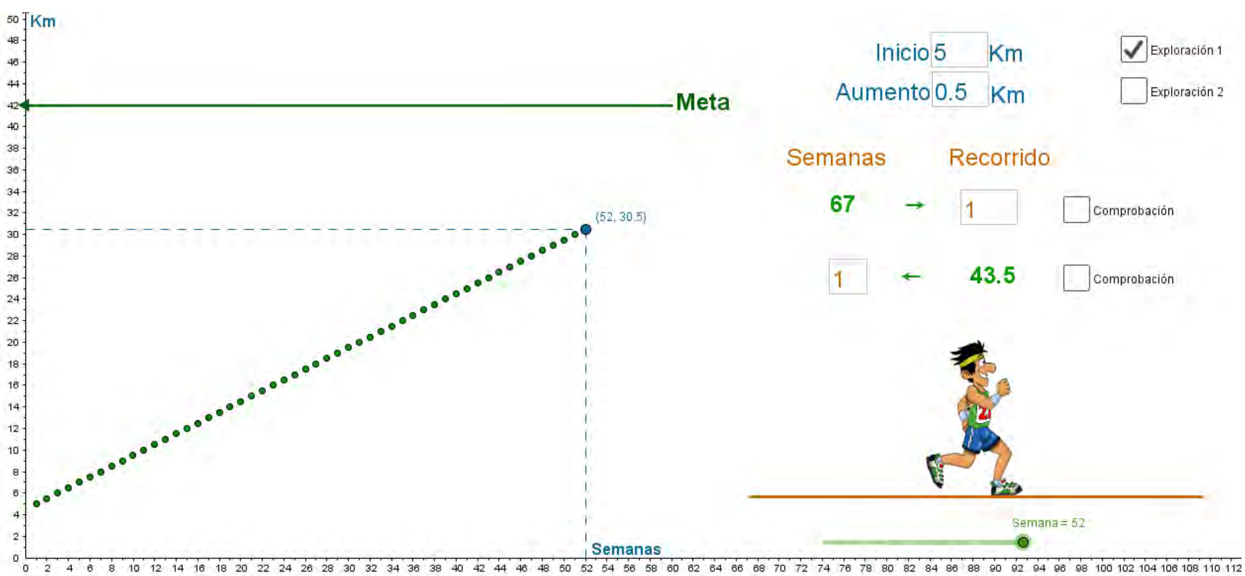
Actividad 1. El corredor

El presente applet centra su atención en la relación que existe entre la sucesión que se forma con la distancia que se recorre semana a semana y su representación gráfica. A través de la manipulación del deslizador **semanas** se construyen los puntos correspondientes a las semanas previas, así como la tabulación de algunos valores cercanos.

Exploración 1: Establecer los valores correspondientes al número de semanas o la distancia recorrida establecida.

Exploración 2: Definir el número de semana para el cual se quiere conocer la distancia a recorrer.

Comprobación: Se puede observar el punto $(\boldsymbol{semana}, \boldsymbol{distancia})$ el cual se tornará de azul si este pertence a la sucesión de lo contrario el punto será de color rojo. Se cuenta con la comprobación para los dos sentidos, es decir, cuando se ingresa el valor para la distancia recorrida dado el número de semanas, y viceversa.



Propósito

Visualizar gráficamente como varía la distancia que debe recorrer el corredor semana a semana y que esto permita reflexionar sobre la sucesión que representa esta situación, para identificar como es el comportamiento de dicha sucesión y sus propiedades. Establecer una estrategia que permita conocer cuál es la distancia que se recorre en cualquier semana y viceversa, además de reflexionar sobre las propuestas que se plantean para un mejor entrenamiento.

Conocimientos matemáticos

Reconocer la relación que existe entre dos conjuntos de números para identificar la sucesión numérica que la situación representa, estableciendo sus propiedades. Asimismo, identificar la relación que existe entre las coordenadas de un punto y su ubicación en el plano, así como reflexionar e identificar el patrón de la sucesión, para encontrar cualquier término de esta.

Competencias a promover

Construye e interpreta modelos matemáticos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.

- Identifica las propiedades de la gráfica que representa la sucesión del entrenamiento semana a sema, diferenciando variables y constantes.
- Analiza criticamente los factores que influyen en el patrón que sigue la construcción del entrenamiento.
- Manipula el applet para obtener información sobre los términos de la sucesión.

Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.

- Analiza las diferentes alternativas de solución, apoyandose en las herramientas que el applet le proporciona.
- Modela la información respecto a la construcción de los puntos de la gráfica para posteriormente resolverla.
- Resuelve el problema, utilizando el algoritmo adecuado para el modelo.

Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estumar su comportamiento.

- Analiza ideas y conceptos mediante representaciones linguiticas, matematicas o gráficas.
- Extrae la información que involucra variables independietnes y dependientes, constryuye su modelo matemático, gráfica y predice su comportamiento.

Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con simbolos matemáticos y cientificos.

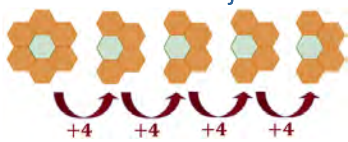
- Conoce los elementos de la gráfica y su relación con los términos de la sucesión que modela el entrenamiento.
- Identifica analiticamente los componentes de información de la gráfica para definir una propuesta de entrenamiento.

Orientación didáctica

- Como apoyo a la construcción de una propuesta permite a los estudiantes que manipulen el applet **El corredor.ggb** para que puedan reflexionar sobre la mejor estrategia de entrenamiento.
- Promueva que los estudiantes puedan utilizar la herramienta de **comprobación** para reflexionar sobre las propiedades de la sucesión que modela el entrenamiento semana a semana, y corroborar si las estrategias que se siguen son las adecuadas o es necesario realizar algún cambio.
- Promueva que al realizar variaciones en el número de semanas indiquen los valores que se proponen en la parte derecha del applet y que lleven a cabo su comprobación, para que puedan comprobar si los valores que proponen son los adecuados.

Posibles respuestas:

Se espera que los estudiantes seleccionen una estrategia que permita conocer el número de baldosas necesarias para colocar un cierto número de jardineras.



Y que identifiquen el patrón de la sucesión, para que puedan definir el número de baldosas:

1 jardineras→ 6 baldosas
2 jardineras→ 10 baldosas
3 jardineras→ 14 baldosas
4 jardineras→ 18 baldosas
5 jardineras→ 22 baldosas
⋮
11 jardineras→ 44 baldosas

se promueve que construyan una tabla en donde identifiquen algunos valores, para que comprueben si los valores que ha identificado son acertados.

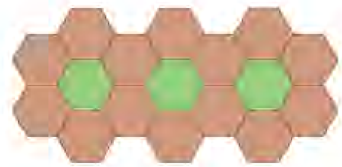
También se espera que puedan identificar el patrón de la sucesión:

$$a_n = a_{n-1} + 4$$

$$a_n = 6 + 4(n-1) = 4n + 2$$

Actividad 2. Las jardineras

El Ayuntamiento quiere instalar jardineras y rodearlas con baldosas hexagonales, como se muestra a continuación:



¿cuántas baldosas necesitará para una calle en la que se dispondrán 5 jardineras? __________

¿Y para una calle que dispondrá de 11 jardineras? __________

Si un trabajador quiere diseñar una tabulación para conocer la cantidad de baldosas necesarias para cualquier cantidad de jardineras que le soliciten, como podría diseñar esta tabla.

Si se solicita instalar jardineras para un boulevard en donde es necesario colocar 100 jardineras, de acuerdo a la tabulación anterior ¿cuántas baldosas son necesarias para construir estas jardineras? __________

Utiliza el applet **Las jardineras.ggb** para explorar la construcción de las jardineras, ¿cómo podría conocer el número de baldosas necesarias para cualquier cantidad de jardineras que sea necesario instalar?

Activa la casilla **Exploración 1** y utiliza tu estrategia para indicar el número de baldosas o el número de jardineras adecuadas para los valores que se presentan en el Applet, ¿fue necesario hacer algún cambio a tu estrategia? Explica tu respuesta.

Posibles respuestas:

A través de la manipulación del applet se promueve que los estudiantes argumenten respecto al patrón que identificaron y como este permite conocer el número de baldosas necesaria para la construcción de cierto número de jardineras. Además, de establecer la estrategia que proporcione las herramientas para fundamentar las respuestas y argumentos que se proporcionan.

Errores y/o dificultades:

Por la forma que se presenta la actividad puede ocasionar que los estudiantes no puedan identificar que la situación modela una sucesión, ni las propiedades que permiten modelarla, por lo cual no se puede detectar una regularidad.

Conocimiento matemático

Identificar la sucesión numérica que modela la construcción de jardineras, haciendo referencia a la definición de sucesión, además de identificar las regularidades que permitan definir el patrón de la sucesión y establecer su expresión algebraica.

Propósito

La primera sección de la actividad se espera que los estudiantes identifiquen la sucesión que modela la construcción de jardineras, así como su patrón, para definir el número de baldosas necesarias para construirlas. Con la finalidad de aportar en el diseño de una estrategia de administración de la compra y almacenaje de baldosas para una construcción, en donde puedan utilizar los conocimientos matemáticos que han desarrollado a través de las actividades anteriores.

Competencias disciplinares a promover

Construye e interpreta modelos matemáticos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.

- Identifica y representa la sucesión que modela la construcción de jardinerar, haciendo uso de baldosas hexagonales, diferenciando variables y constantes.
- Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, para identificar el patrón de la sucesión e identifica su expresión algebraica.
- Analiza criticamente los factores que influyen en el patrón que sigue la construcción de las jardineras.

Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.

- Analiza las diferentes alternativas de solución, apoyandose en la definición de sucesión y las propiedades que esto representa.
- Modela la información de la alternativa elegida para posteriormente resolverla.

Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

- Selecciona entre las diferentes representaciones de una sucesión al proponer explicaciones de los resultados obtenidos.
- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones linguisticas, matematicas o gráficas.

Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estumar su comportamiento.

- Analiza ideas y conceptos mediante representaciones linguiticas, matematicas o gráficas.
- Extrae la información que involucra variables independietnes y dependientes, constryuye su modelo matemático, gráfica y predice su comportamiento.

Posibles respuestas:

Se realiza un cambio en la situación para identificar si los estudiantes se han identificado las propiedades de la sucesión.

Se espera que los estudiantes puedan identificar el número de baldosas necesarios para una construcción, y que esto proporcione información respecto a la falta de baldosas. Es decir, que en el almacén se cuenta con el siguiente material:

11 cajas→ 143 baldosas

Y para construir 43 jardineras son necesarias 174 baldosas, por lo que hacen falta 31 baldosas.

Actividad 2. Las jardineras

Después de varias semanas de trabajo el encargado de administrar el material lleva un conteo del número de baldosas que resta en el almacén y se ha percatado que únicamente quedan 11 cajas de baldosas, cada una con 13 baldosas, y aún hace falta instalar 43 jardineras ¿cuántas jardineras se pueden construir con lo que se tiene en el almacén?

____

¿Es necesario comprar más material? Explica tu respuesta.

____
____
____
____

Activa la casilla **Exploración 2** para comprobar tu respuesta.

Si el encargado del almacén quiere llevar un control de la cantidad de baldosas necesarias para los siguientes proyectos de tal forma que pueda conocer el número de jardineras que puede construir, indica los valores que este debe ingresar en su reporte semanal.

Activa la casilla **Exploración 3** y llena la siguiente tabla.

Semana	Baldosas en el almacén	Jardineras	Baldosas por comprar	Baldosas que sobran
1				
2				
3				
4				

El encargado de almacén quiere encontrar la forma de conocer el número de cajas que debe utilizar para cualquier número de jardineras a instalar, ¿cómo puede definir este número?

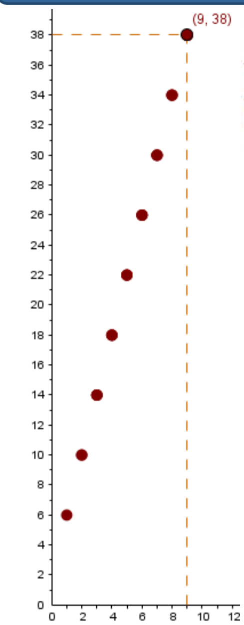
____
____
____
____

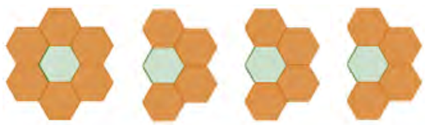
Orientación didáctica

- Permite que los estudiantes organicen sus propias estrategias, cuestionando respecto a la forma de llevar a cabo la construcción de las jardineras.
- Solicita que resuelvan que presenten argumentos respecto a las propiedades y características que identifican los estudiantes, además de establecer la valides de sus propios argumentos.

Puede encontrar la actividad **Las jardineras** en la sección de hojas de trabajo, en la página **72**.

Representaciones de la sucesión





$$a_1 = 6$$
$$a_2 = a_1 + 4 = 10$$
$$a_3 = a_2 + 4 = 14$$
$$a_4 = a_3 + 4 = 18$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} + 4$$
$$a_n = 6 + 4(n-1) = 4n + 2$$

Sucesión numérica:

$6, 10, 14, 18, 22, 26, \dots, 6 + 4(n-1)$

Para conocer el número de baldosas necesaria para construir un número determinado de macetas, se multiplica el número de macetas por cuatro y se suma dos.

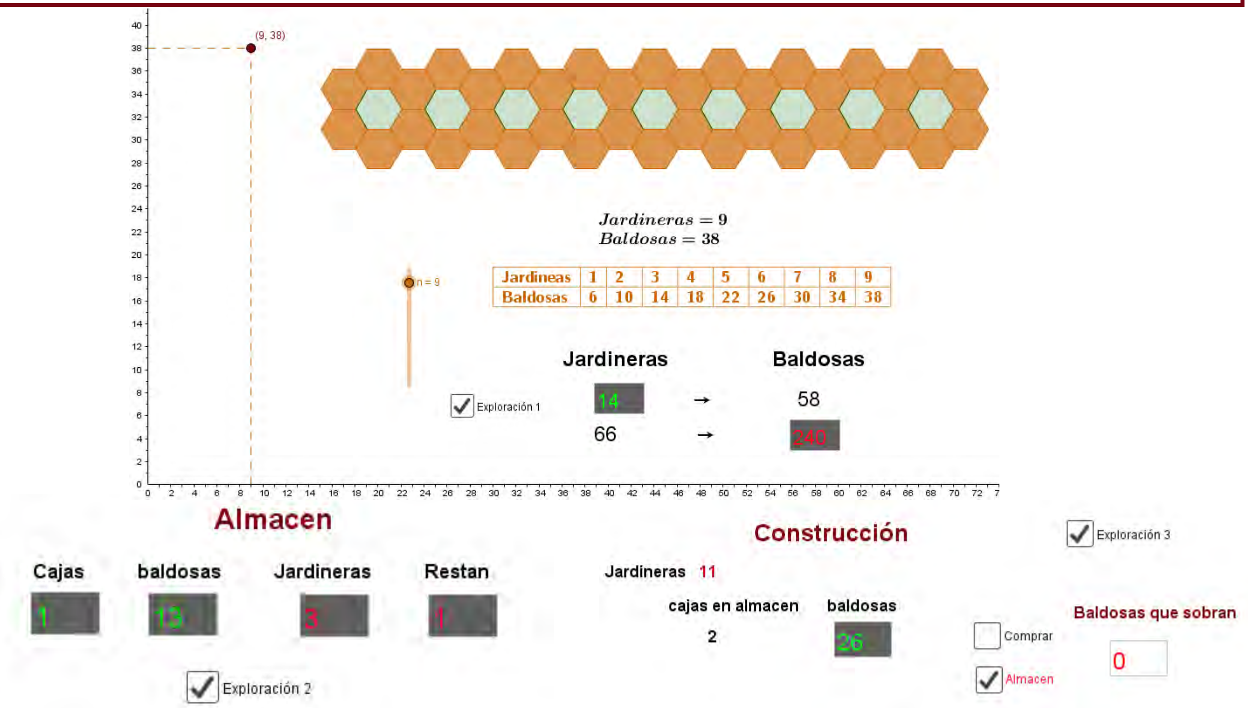
Actividad 2. Las Jardineras

El presente applet aporta en la visualización e identificación de las regularidades de una construcción de jardineras, en donde se puede observar hasta 10 jardineras, ya sea a través de dibujos y su representación gráfica.

Exploración 1: se define el valor para el número de baldosas y es necesario ingresar el valor para el número de jardineras que se pueden construir, y viceversa.

Exploración 2: identificar los valores adecuados para el número de cajas, baldosas y jardineras que se pueden construir, como apoyo a la validación de respuestas.

Exploración 3: Identificar si el número de baldosas con las que se cuentan son suficientes para construir las jardineras solicitadas.



Propósito

Visualizar gráficamente como varía la distancia que debe recorrer el corredor semana a semana y que esto permita reflexionar sobre la sucesión que representa esta situación, para identificar como es el comportamiento de dicha sucesión y sus propiedades. Establecer una estrategia que permita conocer cuál es la distancia que se recorre en cualquier semana y viceversa, además de reflexionar sobre las propuestas que se plantean para un mejor entrenamiento.

Conocimientos matemáticos

Reconocer la relación que existe entre dos conjuntos de números para identificar la sucesión numérica que la situación representa, estableciendo sus propiedades. Asimismo, identificar la relación que existe entre las coordenadas de un punto y su ubicación en el plano, así como reflexionar e identificar el patrón de la sucesión, para encontrar cualquier término de ésta.

Competencias a promover

Construye e interpreta modelos matemáticos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.

- Identifica las propiedades de la gráfica que representa la sucesión del entrenamiento semana a sema, diferenciando variables y constantes.
- Analiza criticamente los factores que influyen en el patrón que sigue la construcción del entrenamiento.
- Manipula el applet para obtener información sobre los términos de la sucesión.

Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.

- Analiza las diferentes alternativas de solución, apoyandose en las herramientas que el applet le proporciona.
- Modela la información respecto a la construcción de los puntos de la gráfica para posteriormente resolverla.
- Resuelve el problema, utilizando el algoritmo adecuado para el modelo.

Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estumar su comportamiento.

- Analiza ideas y conceptos mediante representaciones linguiticas, matematicas o gráficas.
- Extrae la información que involucra variables independietnes y dependientes, constryuye su modelo matemático, gráfica y predice su comportamiento.

Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con simbolos matemáticos y cientificos.

- Conoce los elementos de la gráfica y su relación con los términos de la sucesión que modela el entrenamiento.
- Identifica analiticamente los componentes de información de la gráfica para definir una propuesta de entrenamiento.

Orientación didáctica

- Promueve que los estudiantes utilicen el applet como una herramienta para seleccionar sus estrategias en la resolución de las actividades, además de permitir que a través de la manipulación de éste puedan comprobar si dichas estrategias son las adecuadas.
- Expresa la importancia de reconocer la expresión que modela el número de baldosas necesarias para la construcción de masetas, la cual pueden comprobar en la resolución de las situaciones que se presentan en la Exploración 2 y Exploración 3, en donde deben indicar dichos valores y validar sus respuestas respecto al color que adquieren los valores que ingresan.
- Presenta diferentes propuestas para la colocación de las masetas, como reflexión para la selección de estrategias que utilizan en la identificación de un patrón y la relación con la construcción de una expresión algebraica.

Posibles respuestas:

A través de la manipulación de las fichas de tetris en el applet, se espera que los estudiantes puedan reflexionar sobre la relación que existe entre el número de fichas que se utilizan para construir una figura y la cantidad de cuadros que esto representa, para llenar la tabla de la siguiente forma:

Número de fichas	Número de cuadros
1	4
2	8
3	12
4	16
5	20

Y que esto permita reflexionar sobre la sucesión que se forma:

$\boldsymbol{Sucesión}: 4, 8, 12, 16, 20, \ldots$

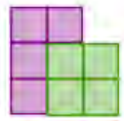
Lo que permita identificar el número de cuadros necesarios para cualquier figura que se construya,

$7\ fichas \rightarrow 28\ cuadros$
$10\ fichas \rightarrow 40\ cuadros$

Actividad 3. El juego del Tetris

Utiliza el applet **El juego del Tetris.ggb** para construir figuras usando las diferentes fichas del juego y llena la siguiente tabla.

Ejemplo:



Número de fichas: 2
Número de cuadros: 8

Número de fichas	1	2	3	4	5
Número de cuadros		8			

Si construimos una figura con 7 fichas, ¿Cuál será el número de cuadros que utilizaremos?

____

¿Y para una figura con 10 fichas? ____________________________

Comprueba tus respuestas activando la casilla **Exploración 1**.

Un jugador necesita conocer cuál es la mínima cantidad de fichas necesarias para construir figuras que le permitan avanzar en el juego, el cual tiene como objetivo colocar la mayor cantidad de fichas sin que el área de construcción se llene, si al llenar una fila puedes eliminarla. Por lo cual el jugador ha decidido investigar cómo avanzar en el juego, utilizando el applet y llenando la siguiente tabla.

Número de filas	Número de fichas	Número de cuadros
1		
2		
3		
4		
5		

Si el jugador quiere establecer un record de 10 líneas, ¿Cuál es el mínimo número de fichas que necesita utilizar? Explica tu respuesta

____
____
____

¿Existe una relación entre la cantidad de cuadros y el número de fichas que utilizó? Explica tu respuesta

____
____
____

Se espera que los estudiantes puedan observar que para formar una línea son necesarios 10 cuadros, y que a través de esto puedan reflexionar sobre el número de fichas que necesitas para construir cierta cantidad de filas.

Número de filas	Número de fichas	Número de cuadros
1	3	12
2	5	20
3	8	32
4	10	40
5	13	52

Y a través del análisis de estos casos puedan definir que para un récord de 10 líneas son necesario 100 cuadros, los cuales se pueden obtener con un mínimo de 25 fichas.

Conocimiento matemático

Reconocer la relación que existe entre dos conjuntos de números para identificar la sucesión de números que modela una situación, así como sus propiedades, haciendo uso de las definiciones de múltiplo, divisor o factor.
Reflexionar e identificar el patrón de la sucesión, para encontrar cualquier término de esta, además, de proporcionar una expresión algebraica que la represente.

Propósito

A través de una situación problema se promueve que los estudiantes reflexiones respecto a la relación que existe entre la cantidad de fichas que se utilizan para construir una figura y el número de cuadros que esto representa, y que puedan observar cómo una sucesión aritmética permite establecer dicha relación.
Proporcionar una regla que permita reconocer la cantidad de cuadros que se utilizan para cualquier cantidad de fichas que se utilicen en el juego y como esto aporta en una partida más efectiva.

Competencias disciplinares a promover

Construye e interpreta modelos matemáticos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.

- Identifica y representa la sucesión que modela la construcción de figuras con fichas de tetris.
- Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva para observar como construir lineas en el área de construcción, para establecer una regla que permita avanzar en el juego.
- Analiza criticamente los factores que influyen en el patrón que sigue la construcción de lineas, de acuerdo al número de fichas mínimas necesarias.

Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.

- Analiza las diferentes alternativas de solución, apoyandose en la definición de sucesión y las propiedades que esto representa.
- Modela la información de la alternativa elegida para posteriormente resolverla.

Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

- Selecciona entre las diferentes representaciones de una sucesión al proponer explicaciones de los resultados obtenidos.
- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones linguisticas, matematicas o gráficas.

Posibles respuestas:

Que los estudiantes puedan observar que:

$$38\ fichas \rightarrow 152\ cuadros$$

y con esas fichas se pueden construir 15 líneas como máximo.

A través de esto puedan establecer que para cada línea son necesario 10 cuadros; dado un número de líneas, se debe encontrar un múltiplo de cuatro igual o mayor al número de cuadros necesarios, el cual corresponde al número de fichas necesarias.

Actividad 3. El juego del Tetris

Si cuenta con un record de 38 fichas ¿cuál es el máximo de líneas que pudo construir?

____

Si el jugador desea construir una regla que le permita conocer los cuadros que utilizará para cualquier cantidad de fichas ¿cómo podría definirla? Explica tu respuesta.

____

____

____

Activa la casilla **Exploración 2** y comprueba que la regla que propusiste es la correcta, comprobando que esta se cumple para algunos casos.

Número de fichas	15		26	27	
Número de cuadros		84			132

El jugador ha decidido establecer una regla que permita establecer un nuevo record cada vez que juega, si conoce el número de cuadros necesarios para cubrir un área ¿cómo definiría está regla?

____

____

____

Se promueve que los estudiantes reflexionen sobre opciones en donde deben colocar una mayor cantidad de fichas para poder avanzar en el juego y que puedan reconocer que por cada ficha ocupan 4 cuadros, para identificar que para un récord de 25 fichas es necesario utilizar 100 cuadros y que esto permite eliminar algunas filas

Número de fichas	15	21	26	27	3
Número de cuadros	**60**	84	**104**	**108**	132

Competencias disciplinares a promover

Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estumar su comportamiento.

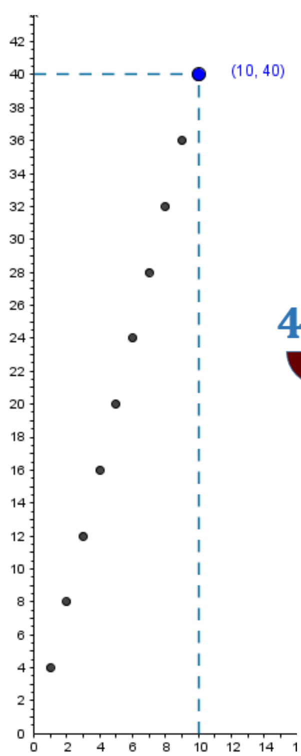
- Analiza ideas y conceptos mediante representaciones linguiticas, matematicas o gráficas.
- Extrae la información que involucra variables independietnes y dependientes, constryuye su modelo matemático, gráfica y predice su comportamiento.

Orientaciones didácticas

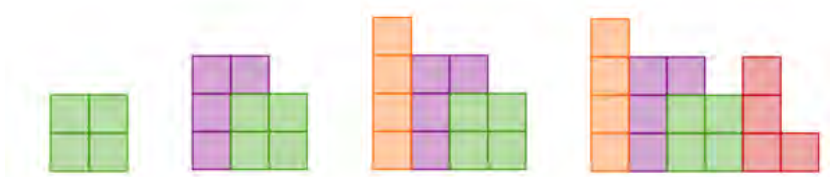
- Promueve que los estudiantes utilicen sus propios conocimientos matemáticos y que formulen conjeturas sobre la estrategia que siguen para lograr un buen juego, fomentando la argumentación y justificación de las acciones que desarrollan en la implementación de las actividades.
- Implemente la actividad como un juego, en donde ellos puedan simular que utilizan las fichas de tetris para construir una estrategia que les permita avanzar en el juego, y que puedan justificar su estrategia con el uso de sucesiones numéricas.

Puede encontrar la actividad **El juego del Tetris** en la sección de hojas de trabajo, en la página **74**.

Representaciones de la sucesión



4



4 8 12 16 20 24

+4 +4 +4 +4 +4 +4

$$a_1 = 4$$
$$a_2 = 4 + 4 = 8$$
$$a_3 = 8 + 4 = 12$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} + 4 = 4n$$

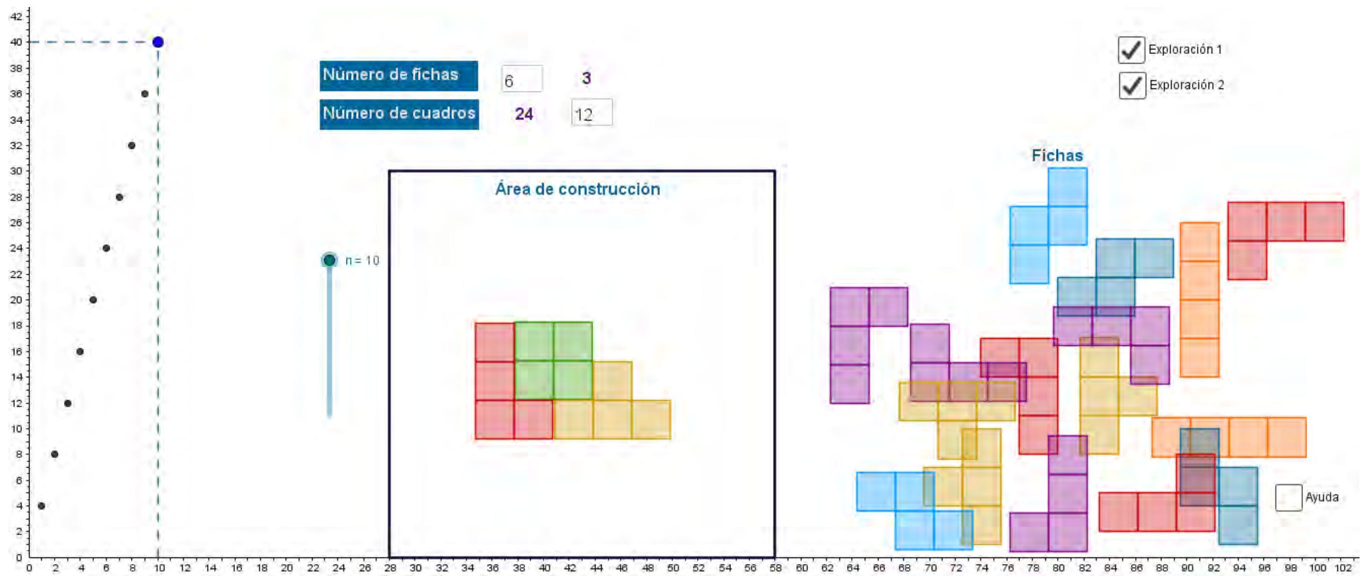
Para conocer el número de cuadros que ocupa una figura, es necesario multiplicar el número de fichas por 4.

Actividad 3. El juego del tetris

El presente applet cuenta con diferentes secciones para trabajar con las fichas que conforman el juego tetris, en donde los estudiantes pueden manipular las fichas y colocarlas en el área de construcción para realizar diferentes figuras.

Exploración 1: Se puede observar la función que existe entre el número de fichas y el número de cuadros que se utilizan, a través de su representación en el plano.

Exploración 2: Se puede ingresar el número de fichas del cual quieres conocer el número de cuadros o viceversa.



Propósito

Reflexionar sobre el número de fichas y el número de cuadros necesarios para construir una figura, además de visualizar las diferentes representaciones de la situación que se plantea en la actividad, lo cual permita identificar los elementos que se mantienen fijos y aquellos que varían de un término a otro. Se espera que a través de la manipulación del applet se pueda reconocer el patrón que sigue la sucesión.

Conocimientos matemáticos

Reconocer la relación que existe entre dos conjuntos de números para identificar la sucesión numérica que la situación representa, estableciendo sus propiedades. Asimismo, identificar la relación que existe entre las coordenadas de un punto y su ubicación en el plano, así como reflexionar e identificar el patrón de la sucesión, para encontrar cualquier término de ésta.

Competencias disciplinares a promover

Construye e interpreta modelos matemáticos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.

- Identifica las propiedades de la gráfica que representa la sucesión del entrenamiento semana a sema, diferenciando variables y constantes.
- Analiza criticamente los factores que influyen en el patrón que sigue la construcción del entrenamiento.
- Manipula el applet para obtener información sobre los términos de la sucesión.

Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.

- Analiza las diferentes alternativas de solución, apoyandose en las herramientas que el applet le proporciona.
- Modela la información respecto a la construcción de los puntos de la gráfica para posteriormente resolverla.
- Resuelve el problema, utilizando el algoritmo adecuado para el modelo.

Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estumar su comportamiento.

- Analiza ideas y conceptos mediante representaciones linguiticas, matematicas o gráficas.
- Extrae la información que involucra variables independietnes y dependientes, constryuye su modelo matemático, gráfica y predice su comportamiento.

Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con simbolos matemáticos y cientificos.

- Conoce los elementos de la gráfica y su relación con los términos de la sucesión que modela el entrenamiento.

Identifica analiticamente los componentes de información de la gráfica para definir una propuesta de entrenamiento.

Orientación didáctica

- Proporcionar una opción de juego, en donde los estudiantes puedan diseñar estrategias para ir aumentando un puntaje, permite que incorporen sus habilidades para enfrentarse ante la resolución de una situación, incorporando conocimientos que le permitan reconocer que las sucesiones de números se encuentran dentro del uso de applets.
- Permite que los estudiantes comiencen la actividad como un juego, en donde se observe las diferentes formas en las que pueden formar figuras y que a través de observar este comportamiento puedan argumentar las estrategias que seguirían para ir avanzando en el juego.
- Promueve que los estudiantes puedan reconocer, con la manipulación del applet y la resolución de la actividad, si las estrategias que siguen son adecuadas para lograr superar un récord.

Posibles respuestas:
Que los estudiantes puedan observar que la construcción de los números cuadrados representa la sucesión numérica:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$$

y que cada término se puede obtener con el número de puntos contenidos en la base de cada figura.

Expresión algebraica:

$$C_n = n^2$$

Posibles respuestas:
Que los estudiantes puedan observar que la construcción de los términos que representan la sucesión numérica:

$$2, 6, 12, 20, 30, 42, \ldots$$

y que cada término se puede obtener con el número de puntos contenidos en la base y los puntos contenidos en la altura de cada figura.

Expresión algebraica:

$$O_n = n(n+1)$$

Y que esto permita reconocer que podemos expresar los términos de esta sucesión estableciendo una relación con los números cuadrados:

$$O_n = n^2 + n$$

Actividad 4. Números figurales

Utiliza el applet **Números figurales.ggb** y activa la casilla Exploración 1, observa la sucesión de números cuadrados y llena la siguiente tabla.

Término	C_1	C_2	C_3	C_4	C_{10}	C_{25}	C_{51}
Número de puntos							

¿Qué características tiene cada uno de estos términos?

____

____

¿Cómo podríamos obtener el término C_n?

____

____

Expresión algebraica:

Utiliza la casilla comprobación para revisar si tus respuestas son correctas.

Activa la casilla Exploración 2, observa está nueva sucesión y llena la siguiente tabla.

Término	O_1	O_2	O_3	O_4	O_{10}	O_{25}	O_{51}
Número de puntos							

¿Qué características tiene cada uno de estos términos?

____

____

¿Cómo podríamos obtener el término O_n?

____

____

Expresión algebraica:

¿Qué relación existe entre los términos C_n y O_n?

____

____

Utiliza la casilla comprobación para revisar si tus respuestas son correctas.

Activa la casilla Exploración 3, observa está nueva sucesión y llena la siguiente tabla.

Término	T_1	T_2	T_3	T_4	T_{10}	T_{25}	T_{51}
Número de puntos							

Errores y/o dificultades:
Puede resultar difícil determinar la expresión de la sucesión, por esta razón es importante destacar la importancia del comportamiento de estos y hacer énfasis en la estructura y la cantidad de puntos necesarios para la construcción de cada término.

Conocimiento matemático

Reconocer la relación que existe entre dos conjuntos de números para identificar la sucesión de números en la construcción de figuras, así como sus propiedades, haciendo uso de puntos que cumplen con una estructura.
Incorporar el estudio de números figurales para reconocer la importancia de la selección de una expresión algebraica adecuada, a través de la reflexión de diferentes sucesiones que promuevan la construcción de una expresión de una serie numérica, particularmente la suma de los primeros n números naturales.

Propósito

Presentar sucesiones figurales que permitan desarrollar la expresión algebraica de los números triangulares como un primer acercamiento al estudio de series numéricas, a partir de la comparación de dos sucesiones figurales, promoviendo la reflexión del comportamiento del patrón que sigue una sucesión y la expresión algebraica para la definición de sus términos.

Competencias disciplinares a promover

Construye e interpreta modelos matemáticos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.

- Identifica y representa la sucesión que modela la construcción de figuras con una estructura especial para la colocación de puntos.
- Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva para observar como se realizan las construcciones de números figurales para definir cualquier término de la sucesión figural.
- Analiza criticamente los factores que influyen en el patrón que sigue la construcción de fíguras con puntos, de acuerdo al número de puntos necesarios.

Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.

- Analiza las diferentes alternativas de solución, apoyandose en la definición de sucesión y las propiedades que esto representa.
- Modela la información de la alternativa elegida para posteriormente resolverla.

Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

- Selecciona entre las diferentes representaciones de una sucesión al proponer explicaciones de los resultados obtenidos.
- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones linguisticas, matematicas o gráficas.

Posibles respuestas:

Que los estudiantes puedan observar que la construcción de los términos que representan la sucesión numérica:

$$\mathbf{1, 3, 6, 10, 15, 21, 28} \ \ldots$$

y que cada término se puede obtener sumando al término anterior, el número del término que se quiere conocer.

Y que esta sucesión está relacionada con la sucesión:

$$\boldsymbol{O_n = n(n+1)}$$

Donde cada término $\boldsymbol{T_n}$ es la mitad del término $\boldsymbol{O_n}$. Es decir, que podemos obtener los términos de la sucesión de números triangulares como:

$$\boldsymbol{T_n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Actividad 4. Números figurales

¿Qué características tiene cada uno de estos términos?

____

____

¿Qué relación existe entre los términos O_n y T_n?

____

____

¿Cómo podríamos definir el término T_n en función de O_n?

____

____

Expresión algebraica para T_n :

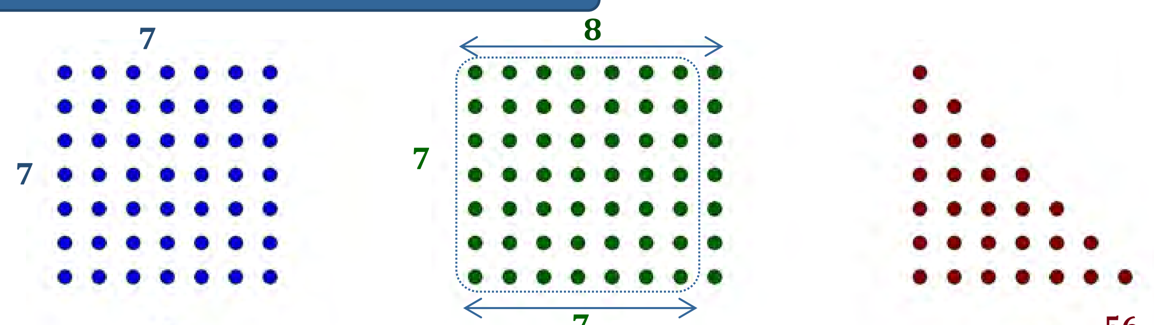
Actividades complementarias

Sugerencias didácticas

- Promueve que los estudiantes establezcan sus propias conjeturas respecto a lo que observan en cada una de las sucesiones y la relación que identifican entre cada una de ellas. Además de motivar en la construcción de una expresión adecuada para la modelación de cada una de las sucesiones que se presenta.
- Expresa la importancia de la estructura de cada uno de las sucesiones y como estas permiten reconocer el patrón de cada una de las sucesiones de números figurales, lo cual permitirá enfocar la atención en la relación que existe entre los términos de estas sucesiones. Además de proporcionar una opción para la identificación de un patrón y la construcción de las expresiones algebraicas.
- Reflexiona con los estudiantes sobre los conceptos de **sucesión** y **serie**, destacando aquellos aspectos semejantes como que ambos cumplen con un patrón que permite reconocer cualquier término de la sucesión o serie, sin embargo, la serie está constituida por la suma de los términos de una sucesión.
- Establece como reflexión final que la expresión final corresponde a la serie que corresponde a la suma de los primeros n naturales. También se puede investigar sobre la serie que modelan los números cuadrados, que corresponde a la suma de los primeros n números impares.

Puede encontrar la actividad **Números figurales** en la sección de hojas de trabajo, en la página **78**.

Representaciones de las sucesiones



$C_7 = 49$ $\quad$ $O_7 = 49 + 7 = 56$ $\quad$ $T_7 = \frac{56}{2} = 28$

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots, n^2$$

$$4\times 5 \qquad 4^2 + 4$$

$$2, 6, 12, 20, 30, \dots, n^2 + n$$

$$\frac{4\times 5}{2} \qquad \frac{4^2 + 4}{2}$$

$$1, 3, 6, 10, 15, \dots, \frac{n^2 + n}{2}$$

Cada término se obtiene multiplicando el número del término por si mismo.

Cada término se obtiene multiplicando el número del término por el número del término más uno.

Cada término se obtiene multiplicando el número del término por el número del término más uno, y el resultado se divide entre dos.

Hojas de trabajo

Actividad 1. El corredor

Un corredor se prepara para un maratón en donde debe recorrer 42 km, y ha decidido prepararse con anticipación, para iniciar su entrenamiento puso como meta recorrer 5 km diarios, y aumentar 500 metros al inicio de cada semana.

Semana	1	2	3	4	5
Distancia (km)	5				

¿Cuánto tendrá que recorrer en su cuarta semana? __________

¿Y en su semana número 15? __________

Si el maratón es dentro de un año, ¿Podrá recorrer 42 km en su entrenamiento? Explica tu respuesta.

____

____

____

____

____

¿Cuántas semanas debe entrenar el corredor si desea recorrer exactamente 42 km en su última semana?

____

____

____

____

____

Utiliza el applet **El corredor.ggb** para explorar el comportamiento del entrenamiento que debe seguir el corredor y comprobar si las opciones que proporcionaste son las adecuadas, operando el deslizador **Semana**.

Si el corredor quiere conocer la distancia que debe recorrer para cada una de las semanas, ¿cómo podría conocer esta distancia?

____

____

____

____

Activa la casilla **Exploración 1** y utiliza tu estrategia para indicar la distancia que debe recorrer el corredor para el número de semanas que se indica, y viceversa. Llena la siguiente tabla con los valores que ingresaste en el applet.

Semanas						
Recorrido						

Actividad 1. El corredor

Activa la casilla **Comprobación** para rectificar si tus respuestas son las adecuadas.
¿Qué estrategia seguiste para que los puntos correspondieran con el entrenamiento del corredor?

____
____
____
____

Se ha decidido realizar un cambio en el entrenamiento del corredor para ver algunas opciones que permitan que el corredor pueda realizar el maratón dentro de un año, ¿con qué opciones cuenta el corredor?

____
____
____
____

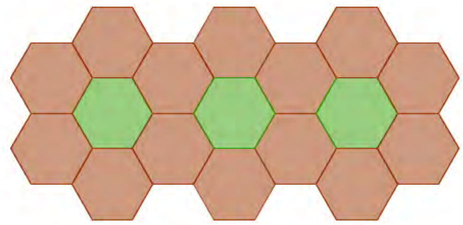
Ingresa los valores **Inicio** y **Aumento** para hacer los cambios necesarios en el entrenamiento del corredor, de acuerdo a las opciones que propusiste.

Si el corredor ha decidido que en su última semana de entrenamiento quiere recorrer una distancia de 50 km para asegurar que puede terminar el maratón, describe el entrenamiento que puede seguir el corredor para que pueda llevar a cabo el maratón dentro de un año.

Propuesta:____
____
____
____
____
____

Actividad 2. Las jardineras

El Ayuntamiento quiere instalar jardineras y rodearlas con baldosas hexagonales, como se muestra a continuación:



¿cuántas baldosas necesitará para una calle en la que se dispondrán 5 jardineras? ____________

¿Y para una calle que dispondrá de 11 jardineras? ____________

Si un trabajador quiere diseñar una tabulación para conocer la cantidad de baldosas necesarias para cualquier cantidad de jardineras que le soliciten, como podría diseñar esta tabla.

Si se solicita instalar jardineras para un boulevard en donde es necesario colocar 100 jardineras, de acuerdo a la tabulación anterior ¿cuántas baldosas son necesarias para construir estas jardineras? ___________________

Utiliza el applet **Las jardineras.ggb** para explorar la construcción de las jardineras, ¿cómo podría conocer el número de baldosas necesarias para cualquier cantidad de jardineras que sea necesario instalar?

____
____
____
____

Activa la casilla **Exploración 1** y utiliza tu estrategia para indicar el número de baldosas o el número de jardineras adecuadas para los valores que se presentan en el Applet, ¿fue necesario hacer algún cambio a tu estrategia? Explica tu respuesta.

____
____
____
____

Actividad 2. Las jardineras

Después de varias semanas de trabajo el encargado de administrar el material lleva un conteo del número de baldosas que resta en el almacén y se ha percatado que únicamente quedan 11 cajas de baldosas, cada una con 13 baldosas, y aún hace falta instalar 43 jardineras ¿cuántas jardineras se pueden construir con lo que se tiene en el almacén?

____

¿Es necesario comprar más material? Explica tu respuesta.

____
____
____
____

Activa la casilla **Exploración 2** para comprobar tu respuesta.

Si el encargado del almacén quiere llevar un control de la cantidad de baldosas necesarias para los siguientes proyectos de tal forma que pueda conocer el número de jardineras que puede construir, indica los valores que este debe ingresar en su reporte semanal.

Activa la casilla **Exploración 3** y llena la siguiente tabla.

Semana	Baldosas en el almacén	Jardineras	Baldosas por comprar	Baldosas que sobran
1				
2				
3				
4				

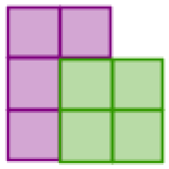
El encargado de almacén quiere encontrar la forma de conocer el número de cajas que debe utilizar para cualquier número de jardineras a instalar, ¿cómo puede definir este número?

____
____
____
____

Actividad 3. El juego del Tetris

Utiliza el applet **El juego del Tetris.ggb** para construir figuras usando las diferentes fichas del juego y llena la siguiente tabla.

Ejemplo:



Número de fichas: **2**
Número de cuadros: **8**

Número de fichas	1	2	3	4	5
Número de cuadros		8			

Si construimos una figura con 7 fichas, ¿Cuál será el número de cuadros que utilizaremos?

____

¿Y para una figura con 10 fichas? ____

Comprueba tus respuestas activando la casilla **Exploración 1**.

Un jugador necesita conocer cuál es la mínima cantidad de fichas necesarias para construir figuras que le permitan avanzar en el juego, el cual tiene como objetivo colocar la mayor cantidad de fichas sin que el área de construcción se llene, si al llenar una fila puedes eliminarla. Por lo cual el jugador ha decidido investigar cómo avanzar en el juego, utilizando el applet y llenando la siguiente tabla.

Número de filas	Número de fichas	Número de cuadros
1		
2		
3		
4		
5		

Si el jugador quiere establecer un récord de 10 líneas, ¿Cuál es el mínimo número de fichas que necesita utilizar? Explica tu respuesta

____

____

____

¿Existe una relación entre la cantidad de cuadros y el número de fichas que utilizó? Explica tu respuesta

____

____

____

Actividad 3. El juego del Tetris

Si cuenta con un récord de 38 fichas ¿cuál es el máximo de líneas que pudo construir?

____

Si el jugador desea construir una regla que le permita conocer los cuadros que utilizará para cualquier cantidad de fichas ¿cómo podría definirla? Explica tu respuesta.

____

____

____

Activa la casilla **Exploración 2** y comprueba que la regla que propusiste es la correcta, comprobando que esta se cumple para algunos casos.

Número de fichas	15		26	27	
Número de cuadros		**84**			**132**

El jugador ha decidido establecer una regla que permita establecer un nuevo récord cada vez que juega, si conoce el número de cuadros necesarios para cubrir un área ¿cómo definiría está regla?

____

____

____

Actividad 4. Números figurales

Utiliza el applet **Números figurales.ggb** y activa la casilla Exploración 1, observa la sucesión de números cuadrados y llena la siguiente tabla.

Término	C_1	C_2	C_3	C_4	C_{10}	C_{25}	C_{51}
Número de puntos							

¿Qué características tiene cada uno de estos términos?

____

____

¿Cómo podríamos obtener el término C_n?

____

____

Expresión algebraica:

Utiliza la casilla comprobación para revisar si tus respuestas son correctas.

Activa la casilla Exploración 2, observa está nueva sucesión y llena la siguiente tabla.

Término	O_1	O_2	O_3	O_4	O_{10}	O_{25}	O_{51}
Número de puntos							

¿Qué características tiene cada uno de estos términos?

____

____

¿Cómo podríamos obtener el término O_n?

____

____

Expresión algebraica:

¿Qué relación existe entre los términos C_n y O_n?

____

____

Utiliza la casilla comprobación para revisar si tus respuestas son correctas.

Activa la casilla Exploración 3, observa está nueva sucesión y llena la siguiente tabla.

Término	T_1	T_2	T_3	T_4	T_{10}	T_{25}	T_{51}
Número de puntos							

Actividad 4. Números figurales

¿Qué características tiene cada uno de estos términos?

____

____

¿Qué relación existe entre los términos O_n y T_n?

____

____

¿Cómo podríamos definir el término T_n en función de O_n?

____

____

Expresión algebraica para T_n :