Universidad de Sonora

División de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas

EL SABER DE MIS HIJOS
HARÁ MI GRANDEZA

SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES Y PERSONALES DE POLINOMIOS EN EL AMBIENTE MAPLE T.A.

Presenta
Maximino Dórame Velásquez

Para obtener el grado de
Maestría en Ciencias
con Especialidad en Matemática Educativa

Directora de Tesis:
M.C. Ana Guadalupe Del Castillo Bojórquez

Hermosillo, Sonora, México. Marzo de 2014.

Agradecimientos

A mi esposa e hijos.

A mi directora de tesis.

Índice

Introducción

El estudio de *polinomios* es básico para la formación de los estudiantes de ingeniería en la Universidad de Sonora. Resulta de gran utilidad que los futuros ingenieros obtengan dominio de las representaciones algebraica y gráfica de los polinomios, así como de la resolución de ecuaciones polinomiales. Ya que, durante su paso por la universidad utilizaran a estos objetos matemáticos como herramientas para resolver variadas situaciones problema, tanto intramatemática como extramatemática.

Dichos objetos matemáticos se estudian en los temas *ecuaciones de segundo y tercer grado, ypolinomios de grado n en una variable*, que forma parte de la asignatura Álgebra que se imparte a estudiantes de ingeniería durante el primer semestre.

El año 2004 la Universidad de Sonora llevó a cabo un cambio curricular en sus programas académicos, viéndose afectadas materias que el Departamento de Matemáticas ofrece a los programas de la División de Ingeniería, entre ellas Álgebra. Por lo que, el Departamento de Matemáticas implementó proyectos de seguimiento para la asignatura mencionada, uno de los proyectos tenía como objetivo diseñar e implementar tareas y exámenes a través del sistema en línea Maple T.A. (versión 4.0). Algunos profesores han venido implementando tareas y exámenes a través del sistema Maple T.A. para promover el trabajo extraclase y la retroalimentación inmediata del mismo.Estas tareas y exámenes en línea se han estado implementando durante siete años. Dado que los estudiantes registran en el sistema sólo las respuestas a las situaciones que se les presentan, se hace necesaria una investigación bien fundamentada que caracterice las prácticas y procesos llevados a cabo por los estudiantes en ese ambiente. Así, el presente trabajo tiene como objetivo caracterizar los significados institucionales y personales de polinomios. La investigación se lleva a cabo en cursos de Álgebra del primer semestre de ingeniería que utiliza sistemáticamente el software mencionado El proyecto de investigación se limita a los temas: *Ecuaciones de segundo y tercer grado,* y de *Polinomios,* y está basado teóricamente en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) (Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007).

En el Capítulo 1 se contextualiza la investigación haciendo mención de los sujetos de estudio y de su entorno, de la asignatura Álgebra en los programas académicos de ingeniería, del uso de las nuevas tecnologías con fines didácticos o de evaluación, así como describir las características y uso del software Maple T.A.

En el Capítulo 2 se presenta como se abordan (según unos textos) los polinomios y las ecuaciones polinomiales, en los niveles de estudio preuniversitarios. También, se presentan algunos de los usos que tienen estos objetos durante el estudio de los programas de ingeniería, se hace mención de algunos requisitos de un organismo evaluador externo (CACEI) que son de interés en esta investigación. Se da a conocer la problemática que se presenta en los programas de ingeniería al estudiar los temas *Ecuaciones de segundo y tercer grado,* y *Polinomios,* al utilizar el sistema Maple T.A. para la realización de tareas y exámenes. También, se presenta el resumen de trabajos previos de investigación relacionados con el presente trabajo. Y por último, se presentan las preguntas de investigación, el objetivo general y los objetivos específicos de este trabajo.

En el Capítulo 3 se describen los elementos del marco teórico (EOS) en el que se fundamenta teóricamente este trabajo y se plantea la metodología utilizada para cumplir los objetivos planteados en este trabajo de tesis.

En el Capítulo 4 se presentan los análisis y resultados, en éste se muestran los significados institucionales y personales de polinomios, el capítulo consta de cuatro subcapítulos, en el primero se describe el significado institucional de referencia, en el segundo se hace lo propio con el *significado institucional pretendido e implementado* cuando se utiliza el sistema Maple T.A. para la implementación de tareas, en el tercero se describe el *significado institucional evaluado* al utilizar el Maple T.A. en la aplicación del examen, y en el último se describen los significados personales de polinomios de seis estudiantes (casos) seleccionados de dos grupos que utilizaron el software para la realización de tareas y exámenes.

Por último, se presentan las conclusiones que se obtienen de los análisis realizados, presentando un contraste entre los significados institucionales y los significados personales.

Capítulo 1. Marco de referencia

1.1 La asignatura Álgebra en los programas de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora.

Los alumnos de los programas académicos de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora deben cursar la asignatura Álgebra en su primer semestre. Esta asignatura forma parte del Eje de Formación Básica de su plan de estudios, lo que muestra que se considera necesaria para acceder al estudio de su disciplina. Álgebra forma parte de un conjunto de materias que el Departamento de Matemáticas ofrece a todos los Programas Académicos de la División de Ingeniería. Antes del cambio curricular en la Universidad de Sonora, llevado a cabo el año 2004, los alumnos de las ingenierías cursaban las asignaturas Álgebra Superior y Álgebra Lineal.

En el nuevo plan de estudios aparece sólo la asignatura Álgebra que contiene temas de las materias desaparecidas. El programa de esta nueva asignatura resultó extenso, por lo tanto, difícil de cubrir en el tiempo señalado por la institución. Los temas de esta materia en su orden cronológico según el programa institucional son los siguientes: Números Complejos, Resolución algebraica de ecuaciones de segundo y tercer grado, Polinomios de grado *n* en una variable, Conceptos básicos del Álgebra Lineal, Sistemas de ecuaciones lineales, Matrices y operaciones, Transformaciones lineales, y por último el tema Valores y vectores propios.

Este cambio provocó un desconcierto entre los profesores que impartían dicha asignatura. Entre los cuestionamientos expresados por los profesores se pueden mencionar la extensión del programa, el orden cronológico de los temas, la selección de los temas, entre otros. Debido a esto,en el Departamento de Matemáticasse implementó el proyecto “Seguimiento de la Impartición de los Cursos de Álgebra bajo el Esquema del Nuevo Modelo Curricular de los Programas de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora”en los semestres 2005-2 y 2006-1, con el fin de prestar un servicio eficiente y de calidad, así como estar a tono con los cambios. En él participaron profesores que impartían la materia para analizar el nuevo programa y los materiales disponibles, así como para desarrollar nuevos materiales.

Se llevaron a cabo reuniones con jefes y/o coordinadores de los Programas Académicos de la División de Ingeniería, con el fin de conocer sus inquietudes y puntos de vista.

El Departamento de Ingeniería Industrial solicitó incorporar exámenes estandarizados en las materias que ofrece el Departamento de Matemáticas. Dicha solicitud se debió a su vez a una recomendación de CACEI (Consejo de Acreditación de la Enseñanza de la Ingeniería) al Departamento de Ingeniería Industrial, como uno de los puntos requeridos para lograr la acreditación. Coincidentemente el Departamento de Matemáticas adquirió el sistema en línea de evaluación y entrenamiento en matemáticas, Maple T.A. Este sistema es de gran utilidad para el diseño e implementación de tareas y exámenes, ya que es una herramienta potente para el diseño de reactivos que involucran cómputo numérico, simbólico y generación de gráficas.

Durante los semestres 2007-2, 2008-1 y 2008-2 se puso en marcha el proyecto "Diseño e Implementación de Exámenes Estandarizados en Línea en el Curso de Álgebra de los Programas de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora" en el que participaronbásicamente los mismos profesores del proyecto mencionado con anterioridad. Durante este proyecto se analizaron documentos que tratan de la evaluación educativa y del diseño de reactivos.En dicho proyecto se diseñaron tareas y exámenes estandarizados para el curso de Álgebra utilizando el software Maple T.A. para ser aplicados en línea, que apoyaran en la enseñanza, aprendizaje, autoevaluación y la evaluación. Se promueve el trabajo coordinado de los profesores de la materia y la homogenización de los cursos. Además, el Departamento de Matemáticas respondía a la petición de la División de Ingeniería sobre la implementación de exámenes departamentales, que a su vez era una recomendación de CACEI para acreditar los Programas Académicos de dicha División.

Durante este proyecto se impartieron los cursos:

- Introducción al Uso del Maple T.A.: Sistema en Línea de Evaluación y Entrenamiento en Matemáticas.
- Uso del Sistema Maple T. A. en los Cursos de Álgebra en Carreras de Ingeniería.

Estos tenían como objetivo capacitar a los profesores de Álgebra en el uso y operatividad del sistema Maple T.A. En los semestres 2009-1, 2009-2 se continuo con el proyecto "Tareas y exámenes en línea para el curso de Álgebra de los programas de la División de Ciencias

Exactas y Naturales y de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora" que tenía como fin crear reactivos tomando en cuenta la materia de Álgebra Superior de la División de Ciencias Exactas y Naturales, y continuar con la capacitación de profesores en el uso del software, hacer ajustes a unos reactivos y robustecer los bancos de reactivos del sistema. Actualmente los bancos de reactivos, tareas y exámenes en el sistema Maple T.A. para el curso de Álgebra han alcanzado cierta consolidación o madurez.

1.2 Uso de Tecnología en Matemáticas con fines Didácticos o de Evaluación.

El décimo *Problema mayor de la educación matemática*, ***¿cómo se pueden usar las calculadoras y las computadoras para despertar el entendimiento matemático?,*** enunciado por Hans Freudenthal (1981) en la conferencia dada en la sesión plenaria del ICME 4 (International CongressonMathematicalEducation) enBerkeley (USA) en el año de 1980, en la actualidad sigue siendo válido, ya que en los últimos años se ha venido incrementando el interés por el uso deestas tecnologías en las clases de matemáticas.

Así, el Consejo Estadounidense de Profesores de Matemáticas(NCTM), publicó estándares y principios para las matemáticas escolares en los que se incluye un principio sobre uso de tecnología (2003). En este principio se establece: ***La tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y mejora el proceso de aprendizaje de los estudiantes.***Algunos de los puntos que vale la pena resaltar en este documento son:

- Las tecnologías electrónicas, tales como calculadoras y computadores, son herramientas esenciales para enseñar, aprender y "hacer" matemáticas.
- Los estudiantes pueden aprender más matemáticas y en mayor profundidad con el uso apropiado de la tecnología.
- Permite a los estudiantes ejecutar procedimientos rutinarios en forma rápida y precisa, liberándoles tiempo para elaborar conceptos y modelos matemáticos.
- El aprendizaje de los estudiantes está apoyado por la retroalimentación que puede ser suministrada por la tecnología.

- El profesor debe tomar decisiones prudentes acerca de cuándo y cómo utilizar tecnología y debería asegurarse de que la tecnología está fomentando el pensamiento matemático de los estudiantes.
- La tecnología no remplaza al docente de matemáticas.La utilización adecuada de la tecnología en el aula de matemáticas depende del docente.

Existen relativamente pocos reportes sobre el uso de este tipo de tecnologías en la evaluación del aprendizaje de contenidos matemáticos. Uno de los reportes localizados presenta una síntesis descriptiva de lo desarrollado en un periodo de 10 años en materia de evaluación del aprendizaje por computadoraen la Universidad Autónoma de Baja California(Backhoff, Rosas, Ramírez, Larrazolo,Velasco, 2002). La UABC en dicho período desarrolló lo que nombraron Examen de Habilidades y Conocimientos Básicos (EXHCOBA), examen de opción múltiple, con fines de evaluación del aprendizaje escolar de los estudiantes que deseaban ingresar a la UABC. También, el sistema EXHCOBA se usa en el proceso de selección de los alumnos que desean ingresar a la Universidad de Sonora. Después, desarrollaron el Sistema de Exámenes Adaptativos (SEA) para administrar el Examen de Ubicación de Matemáticas (EXUMAT) a los estudiantes recién ingresados a la UABC.

Otrosreportes que constituyen un antecedente básico para este trabajo debido a que presentaninformación acerca de la elaboración de reactivos para tareas y exámenes en línea para el curso de Álgebra, utilizando el sistema Maple T.A., así como información del mismo Maple T.A.(Del Castillo, Flores, 2009, 2011, 2012)misma quese exponeen la siguiente sección. En ellos se encuentra información que se considera clave para el desarrollo de este trabajo. Todos estos reportes se generaron en el marco de un proyecto institucional cuyo objetivo es el diseño e implementación de exámenes estandarizados en línea para los cursos del eje básicos ofrecidos por el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, del cual se dará mayores detalles en la siguiente sección.

Debido a la gran importancia que representa el sistema (software) Maple T.A., de forma natural, nos vemos en la necesidad de comentar unos elementos que son de ayuda en el desarrollo de este trabajo.

1.3 Características y uso del software Maple T.A. en los cursos de Álgebra.

Maple T.A. es un sistema en línea para el diseño e implementación de exámenes y tareas. Es una herramienta potente para cómputo numérico, simbólico y generación de gráficas.
Entre las principales características del software se tienen las siguientes:

- Una opción muy importante que presenta el sistema Maple T.A. en el diseño y elaboración de reactivos es el uso de diferentes formatos para la elaboración de reactivos. Éstos pueden ser de opción múltiple con una o más respuestas correctas, completar enunciados, valorar un enunciado como falso o verdadero, de relacionar y también de respuestas abiertas, entre otros.
- Posibilidad de ofrecer ayudas y retroalimentación a los estudiantes para cada pregunta.
- Tipos diferentes de tareas: para practicar, estudiar en casa y para exámenes.
- Variables aleatorias, de manera que un tipo de reactivo se convierte en cientos de diferentes preguntas, dependiendo de las variables consideradas en su programación, pudiéndose generar ecuaciones, expresiones y gráficas distintas para cada pregunta.
- Varias herramientas de visualización de Maple, al incluir graficas en 2D y 3D en sus preguntas.
- Las respuestas a las preguntas se califican automáticamente por el sistema, incluyendo preguntas matemáticas de campo abierto,con excepción de las de texto.
- Las respuestas de los estudiantes ysus calificaciones son almacenadas automáticamente.
- Posibilidad de que los resultados y la retroalimentación estén disponibles inmediatamente a los estudiantes.
- Herramientas integradas que ofrecen análisis estadístico de los resultados, del punto de vista del estudiante, la tarea o la pregunta.

En relación con el uso de este sistema en el caso de interés para la realización de este trabajo de tesis, a continuación se describen unos elementos que se consideraron durante el proyecto *"Diseño e Implementación de Exámenes Estandarizados en Línea en el Curso de Álgebra de los Programas de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora",* que contemplaba entre sus objetivos específicos el diseño de bancos de reactivos con Maple T.A. para el curso de Álgebra.

Para la elaboración y clasificación de los reactivos se consideró la taxonomía SOLO (Structure of ObservedLearningOutcome); en la que se manejan cinco niveles, los cuales se determinan según el grado de complejidad de las respuestas que otorgan los estudiantes (Biggs, Collis, 1982). Los niveles son: Preestructural, Uniestructural, Multiestructural, Relacional y Abstracción Extendida. Se elaboraron reactivos cuya respuesta esperada corresponde a uno de los tres niveles:Uniestructural, Uniestructural oMultiestructural, de los cinco que considera tal taxonomía. La Figura 1.3.1 muestra los bancos con esta clasificación.

Figura 1.3.1Bancos de reactivos según la taxonomía SOLO.

A continuación se muestran ejemplos clasificados según la taxonomía SOLO.

Un ejemplo de reactivo clasificado como uni-estructural es:

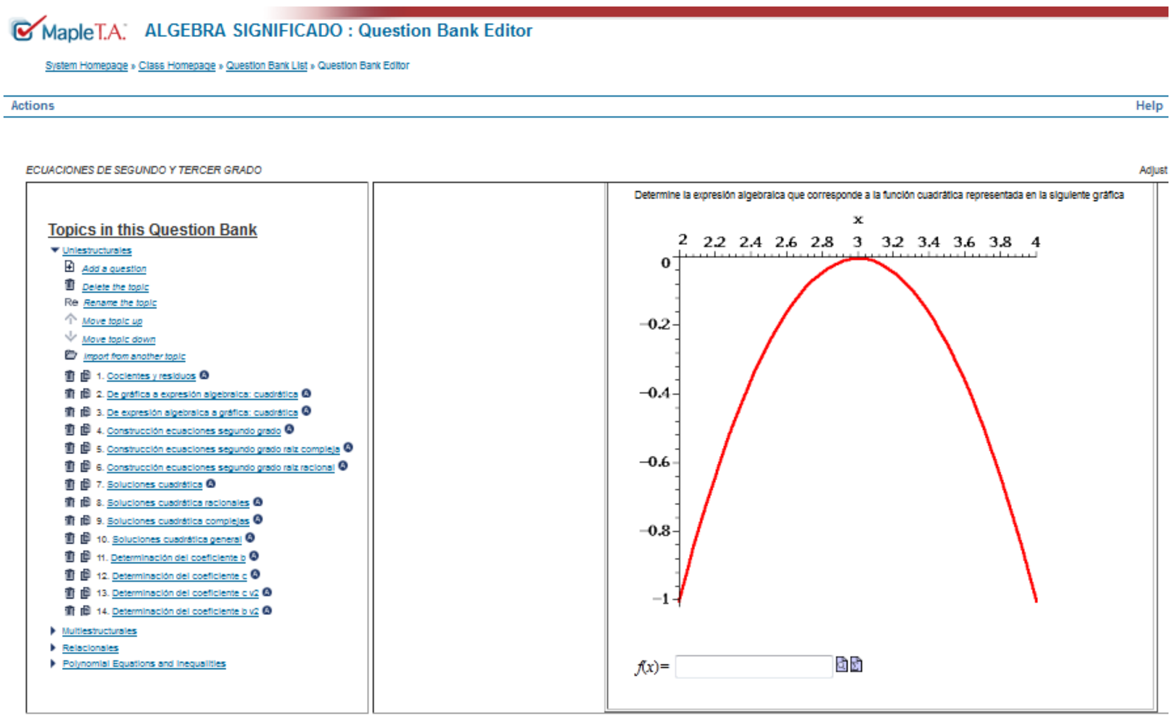


Figura 1.3.2 Reactivo de nivel uni-estructural.

En este reactivo, se pide determinar la expresión algebraica que corresponde a la función cuadrática que aparece en la gráfica.

Un reactivo clasificado como multi-estructural que aparece en el sistema es:

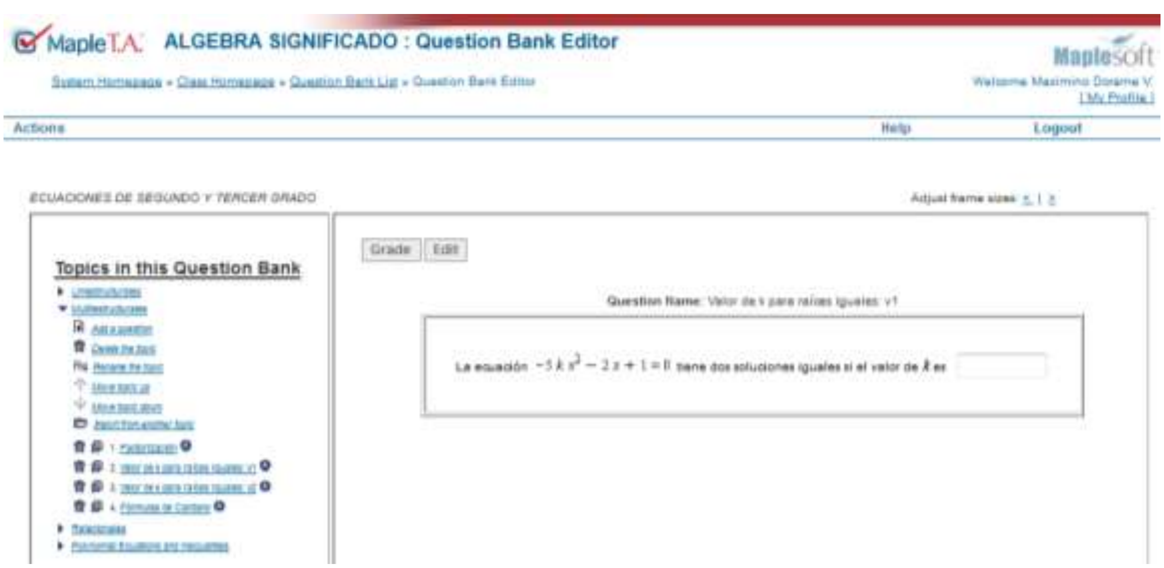


Figura 1.3.3 Reactivo de nivel multi-estructural.

En este reactivo se pide encontrar el valor de k para el cual la ecuación $-10kx^2 + 4x + 4 = 0$ tiene dos soluciones iguales.

Por último se muestra un reactivo de nivel relacional.

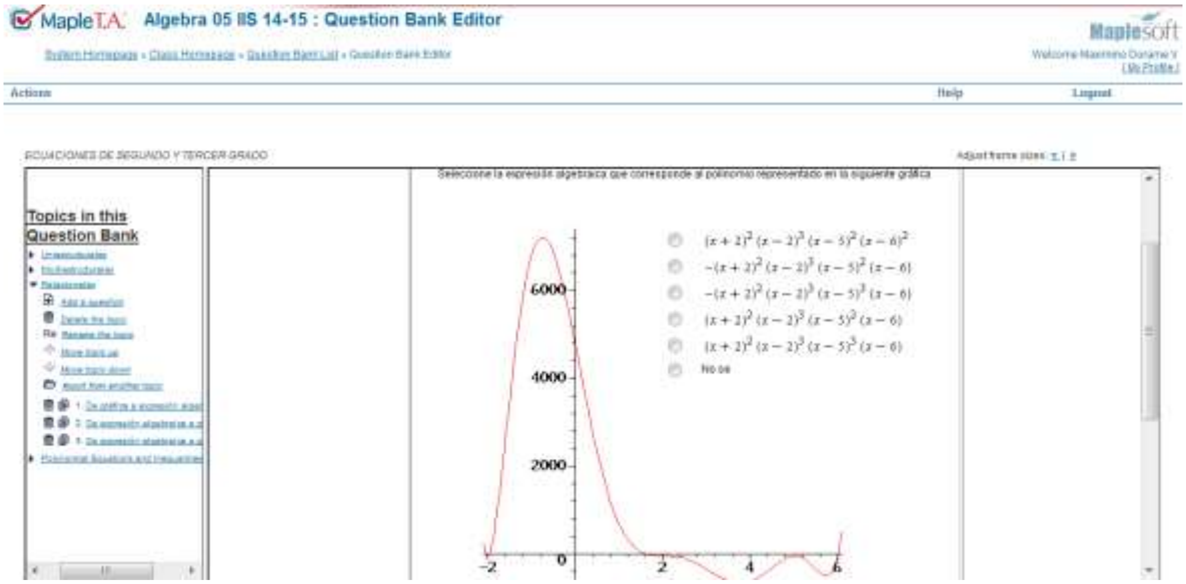


Figura 1.3.4 Reactivo clasificado en el nivel relacional.

En este reactivo, se solicita seleccionar la expresión algebraica que corresponde al polinomio representado en la gráfica dada.

También, los reactivos se agruparon en bancos según el tema. Como se muestra en la Figura 1.3.5.

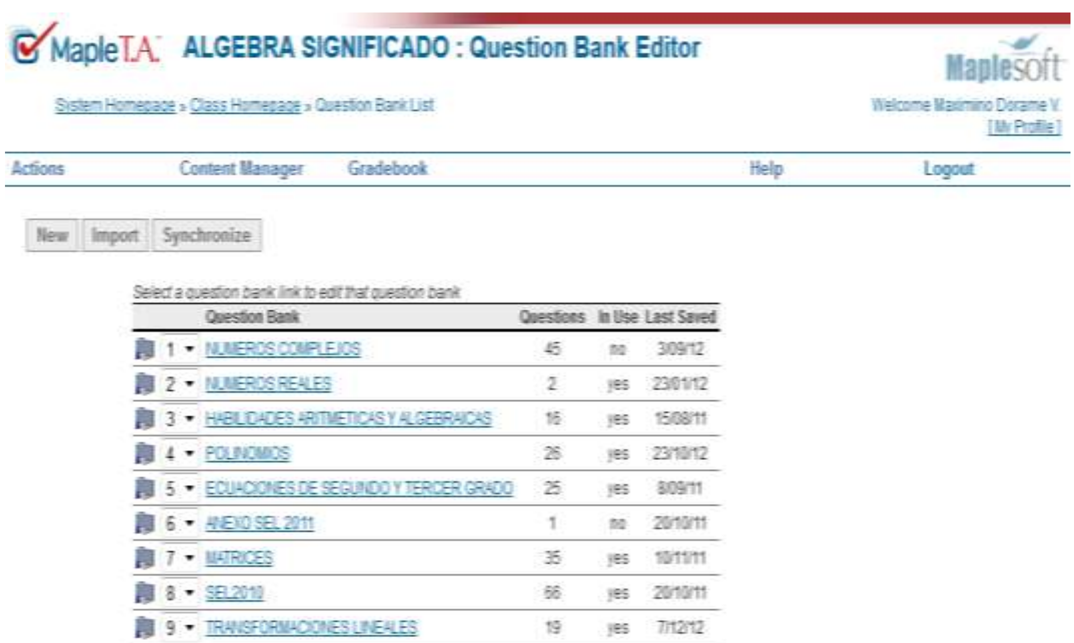


Figura 1.3.5 Bancos de reactivos en Maple T.A.

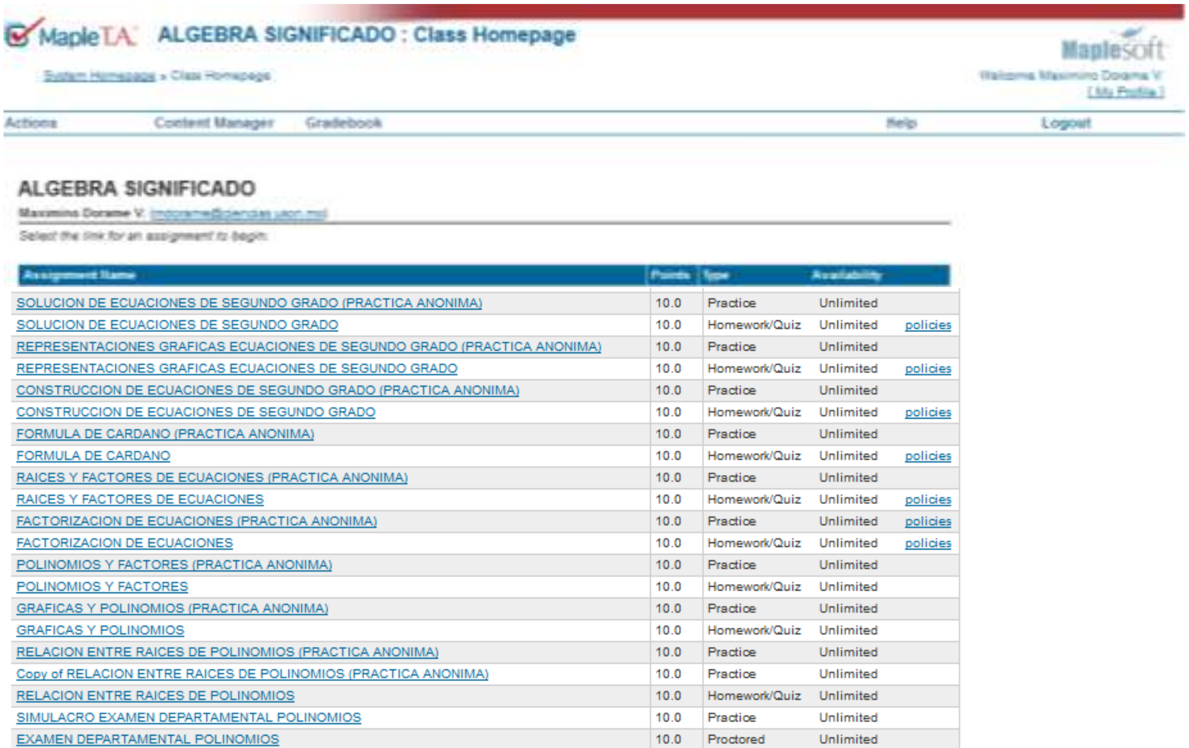
Como se puede observar, el sistema cuenta con ocho bancos de reactivos, cada uno contiene reactivos de un tema. Tema 1: Habilidades aritméticas y algebraicas; Tema 2: Números reales; Tema 3: Números complejos; Tema 4: Ecuaciones de segundo y tercer grado; Tema 5: Polinomios; Tema 6: SEL 2010; Tema 7: Matrices; y Tema 8: Anexo SEL 2010. También, se observa el número de reactivos en cada banco.

A partir de los bancos de reactivos se diseñaron diferentes tipos de tareas o exámenes. Los reactivos pueden ser seleccionados fija o aleatoriamente, de uno o varios grupos de ellos. Debido a la aleatoriedad, a partir de un mismo diseño de examen o tarea, es posible generar algunas versiones del mismo examen o tarea. Algunos tipos de tareas o exámenes que se pueden formar, son:

- Prácticas anónimas: tareas que el estudiante puede realizar sin límite de tiempo, el número de veces que desee. El sistema no guarda registro de lo realizado por el estudiante, aunque el sistema si evalúa la actividad.
- Tareas registradas: son tareas en las que, a diferencia de las prácticas anónimas, el sistema guarda registro tanto del trabajo como del puntaje obtenido por el estudiante.
- Exámenes supervisados: los estudiantes realizan este examen previa autorización del profesor.

Cabe mencionar que los alumnos pueden acceder desde cualquier computadora con internet a las prácticas anónimas y a las tareas registradas.

A continuación se muestran tareas y exámenes, concernientes a los temas de ecuaciones de segundo y tercer grado, y de polinomios, tal como lo ve un alumno al acceder al sistema.



ALGEBRA SIGNIFICADO : Class Homepage

ALGEBRA SIGNIFICADO

Assignment Name	Points	Type	Availability	
SOLUCION DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO (PRACTICA ANONIMA)	10.0	Practice	Unlimited	
SOLUCION DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO	10.0	Homework/Quiz	Unlimited	policies
REPRESENTACIONES GRAFICAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO (PRACTICA ANONIMA)	10.0	Practice	Unlimited	
REPRESENTACIONES GRAFICAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO	10.0	Homework/Quiz	Unlimited	policies
CONSTRUCCION DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO (PRACTICA ANONIMA)	10.0	Practice	Unlimited	
CONSTRUCCION DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO	10.0	Homework/Quiz	Unlimited	policies
FORMULA DE CARDANO (PRACTICA ANONIMA)	10.0	Practice	Unlimited	
FORMULA DE CARDANO	10.0	Homework/Quiz	Unlimited	policies
RAICES Y FACTORES DE ECUACIONES (PRACTICA ANONIMA)	10.0	Practice	Unlimited	
RAICES Y FACTORES DE ECUACIONES	10.0	Homework/Quiz	Unlimited	policies
FACTORIZACION DE ECUACIONES (PRACTICA ANONIMA)	10.0	Practice	Unlimited	policies
FACTORIZACION DE ECUACIONES	10.0	Homework/Quiz	Unlimited	policies
POLINOMIOS Y FACTORES (PRACTICA ANONIMA)	10.0	Practice	Unlimited	
POLINOMIOS Y FACTORES	10.0	Homework/Quiz	Unlimited	
GRAFICAS Y POLINOMIOS (PRACTICA ANONIMA)	10.0	Practice	Unlimited	
GRAFICAS Y POLINOMIOS	10.0	Homework/Quiz	Unlimited	
RELACION ENTRE RAICES DE POLINOMIOS (PRACTICA ANONIMA)	10.0	Practice	Unlimited	
Copy of RELACION ENTRE RAICES DE POLINOMIOS (PRACTICA ANONIMA)	10.0	Practice	Unlimited	
RELACION ENTRE RAICES DE POLINOMIOS	10.0	Homework/Quiz	Unlimited	
SIMULACRO EXAMEN DEPARTAMENTAL POLINOMIOS	10.0	Practice	Unlimited	
EXAMEN DEPARTAMENTAL POLINOMIOS	10.0	Proctored	Unlimited	

Figura 1.3.6 Prácticas anónimas, tareas registradas y exámenes supervisados.

Durante el tiempo que se ha utilizado el sistema Maple T.A., para apoyar el desarrollo de los cursos de Álgebra en la Universidad de Sonora, se han reportado ventajas y desventajas(Del Castillo, Flores, 2009). A continuación se enlistanalgunas de ellas:

Ventajas:

- Es un fuerte apoyo a la actividad extra clase, ya que brinda retroalimentación inmediata a la actividad realizada por el estudiante.
- Las prácticas anónimas les proporcionan la oportunidad de practicar varias veces, de identificar los errores y retroalimentarse, para después realizar las tareas que sí quedarán registradas en el sistema.
- Cada vez que un estudiante selecciona una tarea, se le presenta una versión distinta, los reactivos son seleccionados aleatoriamente de los bancos; a su vez, los reactivos incluyen parámetros que cambian cada vez que aparecen en una tarea, esto evita que los estudiantes copien las respuestas.
- Una ventaja para el profesor es que el sistema guarda el registro de la actividad de cada estudiante y proporciona información estadística importante individual y del grupo.

- Se promueve el trabajo coordinado entre los profesores de la materia y la homogenización de los cursos.

Desventajas:

- No existen suficientes laboratorios con computadoras, en la UNISON, para que los estudiantes practiquen.
- Algunos de los laboratorios no cuentan con suficientes computadoras.
- La renuencia de algunos alumnos al uso de esta tecnología.
- Para unos alumnos ha resultado un problema la sintaxis que se usa en preguntas abiertas.
- Problemas con el servidor.

Capítulo 2. Problemática, justificación y objetivos

2.1 Formación preuniversitaria de estudiantes de ingeniería.

El tema de ecuaciones cuadráticas en una variable no es una novedad para los alumnos que estudian la asignatura Álgebra, durante su primer semestre de ingeniería en la Universidad de Sonora, ya que desde la Educación Secundaria se abordan estos temas. Algunas de las situaciones que se observan en elbloque 2 de MATEMÁTICAS 3 de secundaría (Bravo, Marván, 2012), son textualmente:

De las siguientes ecuaciones, identifica las tres que no tienen solución (páginas 86,87).

a) $x + 2 = x + 7$ *b)* $\frac{x(4x)}{2} = 72$ *c)* $4x^2 = 72$

d) $x^2 = -16$ *e)* $(x-4)^2 = -36$

Cada una de las siguientes ecuaciones tiene dos soluciones. Encuéntralas.

a) $x^2 = 25$ *b)* $x^2 - 1 = 24$ *c)* $(x-1)^2 = 25$

d) $(x-2)(x-3) = 0$ *e)* $(x-2)(x+4) = 0$

Cuando para resolver una ecuación cuadrática ésta se escribe de modo que uno de los lados sea cero y el otro una multiplicación de varios factores de la forma (x-número), se dice que dicha ecuación se resuelve usando el teorema del factor. Resuelve de esta forma las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 - 10x + 24 = 3$ *b)* $x^2 + 2x = 15$ *c)* $x^2 - 11x = -28$

d) $x(x-6) = -8$ *e)* $2x^2 + 14x + 20 = 0$ *f)* $x^2 - 7x = 0$

En el BLOQUE 3(página 150) se observa lo siguiente:

Además de la factorización existen otros métodos para encontrar la o las soluciones, una de ellas consiste en utilizar las siguientes fórmulas:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} y x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Resolvamos, por ejemplo, la ecuación $x^2 + 2x - 3 = 0$, *¿cuáles son los valores correspondientes de a, b y c?*

$$a = 1, b = 2 \ y \ c = -3.$$

Sustituyan estos valores en las fórmulas y realicen los cálculos Recuerden la jerarquía de las operaciones.

$$x_1 = \frac{-(\ ) + \sqrt{(\ )^2 - 4(\ )(\ )}}{2(\ )} = \frac{- \ + \sqrt{\ -\ }}{} = \frac{+}{} = \frac{}{} =$$

y

$$x_2 = \frac{-(\ ) + \sqrt{(\ )^2 - 4(\ )(\ )}}{2(\ )} = \frac{- \ - \sqrt{\ -\ }}{} = \frac{- \ -}{} = \frac{}{} =$$

*¿Cuáles fueron sus resultados?*_____________

En el texto referido anteriormente se promueve la comprobación mediante la sustitución en la ecuación de los valores considerados solución. Se promueve resolver ecuaciones cuadráticas mediante factorización, también, usando la fórmula general, haciendo notar que la naturaleza de las soluciones depende del discriminante. Se relaciona a las soluciones de una ecuación cuadrática con la intersección de la parábola con el eje horizontal, se pide al alumno obtener las soluciones observando la gráfica y, por otro lado, obtener la intersección de la gráfica resolviendo la ecuación. Únicamente se resuelven ecuaciones que tienen soluciones racionales. Sin embargo, el hecho de que esto aparezca en el texto no garantiza su implementación efectiva en el aula.

El módulo de aprendizaje para la asignatura Matemáticas I (Valenzuela, 2010) del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora fue diseñado con el propósito de cumplir con los objetivos de la Reforma Integral de Educación Media Superior (RIEMS) vigente a nivel nacional desde el año 2009. Este nuevo modelo curricular está basado en el enfoque en competencias que considera que los conocimientos por sí mismos no son lo más importante, sino el uso que se hace de ellos en situaciones específicas de la vida personal, social y profesional.

En relación con el tema de ecuaciones cuadráticas en el texto se propone modelar y resolver situaciones-problema extra matemáticas mediante este tipo de ecuaciones. Éstas se resuelven mediante factorización y/o completando el trinomio cuadrado perfecto, antes de usar la fórmula general. Al Igual que en el texto de educación secundaria, se promueve el uso de representaciones gráficas, interpretando las soluciones de la ecuación con la intersección de una parábola con el eje de las abscisas (eje *x*). Las soluciones de la ecuación cuadrática se nombran como ceros o raíces, términos que son utilizados a nivel universitario.

Particularmente, en el último Bloque *Resuelve Ecuaciones Cuadráticas I*, aparecen los siguientes ejemplos resueltos.

Resolver la ecuación $2x^2 + 7x + 4 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(2)(4)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 32}}{4}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{17}}{4}$$

Las soluciones o raíces de la ecuación son

$x_1 = \frac{-7+\sqrt{17}}{4} ó x_2 = \frac{-7-\sqrt{17}}{4}$

Cabe hacer notar que presentan las soluciones exactas, es decir, no escriben una aproximación racional de la solución irracional.

Otro ejemplo es:

Resolver la ecuación $x^2 - 4x + 20 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(20)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{14 - 80}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-64}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 8i}{2} = 2 \pm 4i$$

Las soluciones de la ecuación son dos números complejos.

$$x_1 = 2 + 4i ó x_2 = 2 - 4i.$$

En este ejemplo se observa que las soluciones de la ecuación son complejas.

Al igual que en el caso de la educación secundaria, el hecho de que estos temas aparezcan en el texto no garantiza su implementación efectiva en el aula.

Aun cuando en los libros de texto de bachillerato se incluyen algunos ejemplos variados en el tema de ecuaciones cuadráticas, $ax^2 + bx + c = 0$, en la práctica un gran número de profesores y estudiantes manifiestan que al resolver estas ecuaciones, únicamente se consideran coeficientes a, b y c reales enteros, y rara vez soluciones irracionales o complejas no reales, esto puede provocar que los estudiantes crean que en todas las ecuaciones cuadráticas es así. Está fuera de su alcance el considerar: coeficientes reales fraccionarios, irracionales o más impensable aún coeficientes complejos; obtener soluciones irracionales o complejas, debido a que las técnicas aprendidas son “rígidas y estereotipadas, o bien ya están cristalizadas y entonces se utilizan como conocimientos que ya no admiten ningún tipo de cuestionamiento” (Fonseca, Bosch, Gascón, 2010).

Al finalizar la formación preuniversitaria, al igual que en otros países, es posible afirmar que, en relación con la resolución de ecuaciones cuadráticas, “la regla se aplica, en la mayor parte de los casos, de una manera completamente estereotipada, sin ninguna variación, sin permitir ningún tipo de desarrollo y, en definitiva, sin que se plantee ni sea necesario plantear ningún cuestionamiento tecnológico. El tipo de tareas que aparecen en los libros de texto es, en consonancia, muy cerrado y preparado para que no plantee ningún problema a la técnica” (Fonseca, Bosch, Gascón, 2010).

Asimismo, durante la enseñanza universitaria puede suponerse de forma equivocada que los contenidos matemáticos previamente estudiados en la enseñanza secundaria o en el bachillerato, han sido lo suficientemente bien enseñados y aprendidos, por lo tanto, no se considera necesario que se reconstruyan en la universidad.

2.2 Formación matemática de estudiantes de ingeniería en la Universidad de Sonora.

La División de Ingeniería de la Universidad de Sonora, considera que sus alumnos de nivel licenciatura deben tener una base matemática sólida, que les resulte una herramienta útil para resolver problemas durante su ejercicio profesional y sus estudios, tanto a nivel profesional como a nivel posgrado. Esta base matemática se concreta mediante las materias: Álgebra, Cálculo Diferencial e Integral I , Cálculo Diferencial e Integral II,Geometría Analítica, Cálculo Diferencial e Integral III, Probabilidad y Estadística, y Ecuaciones Diferenciales. Estas materias son impartidas por el Departamento de Matemáticas y forman parte del Eje Básico del Mapa Curricular de Ingeniería; además, los estudiantes de las ingenierías llevan otras asignaturas con un alto contenido matemático. Al abordar los contenidos de algunas de las materias antes mencionadas, los alumnos se ven en la necesidad de tratar con polinomios, funciones polinomiales o ecuaciones polinomiales. Durante el primer semestre los alumnos de todos los programas académicos de ingeniería deberán estudiar ecuaciones de segundo y de tercer grado en una variable y polinomios, en la asignatura Álgebra. Estos temas se abordan generalmente de forma intramatemática, es decir, los ejercicios o problemas que ahí se resuelven son intramatemáticos, lo que puede provocar cierto grado de desmotivación y, a su vez, aumentar el índice de reprobación y de deserción entre los estudiantes.

Un elemento importante de justificación para este trabajo es el uso y aplicaciones que tienen los polinomios en área de Ingeniería en la Universidad de Sonora.

2.2.1 Polinomios y ecuaciones polinomiales en áreas de ingeniería.

Las ecuaciones cuadráticas y los polinomios son muy útiles para los estudiantes de ingeniería, tanto en asignaturas que imparte el Departamento de Matemáticas (formación básica), como en asignaturas del Eje de Formación Profesional de los Programas Académicos de ingeniería. En cada uno de ellos, las soluciones de las ecuaciones o raíces de polinomios tienen un significado diferente y propio del contexto en el que se usa.

En la siguiente Tabla 2.1.1 mostramos unas asignaturas y temas en las que se tratan con polinomios.

Asignaturas en las que tratan con polinomios	**Temas que contienen polinomios**
Álgebra	Valores y vectores propios
Cálculo diferencial e integral I	Graficación y extremos relativos de funciones
Cálculo diferencial e integral II	Área de una región entre curvas
Ecuaciones diferenciales (ED)	ED lineales de orden superior, Transformada de Laplace
Física I	Movimiento en el plano: movimiento parabólico
Termodinámica (I)	Ecuaciones de Estado

Tabla 2.2.1 Polinomios en los programas de ingeniería

A continuación mostraremos unos ejemplos donde se muestra el uso y aplicación que tienen los polinomios en las asignaturas y temas de la tabla anterior.

Asignatura: Álgebra; Tema: Valores y vectores propios.

Ecuaciones Cuadráticas y Polinomios, son el segundo y tercer tema, respectivamente, de la asignatura Álgebra que estudian los alumnos durante su primer semestre de ingeniería en la Universidad de Sonora. Unas prácticas promovidas en estos temas son usadas en Valores y Vectores Propios que es el último tema de Álgebra. Como las que se muestran en el siguiente ejemplo del libro (Bernard Kolman, "Álgebra lineal", 2006), recomendado en la bibliografía del programa institucional de Álgebra, que textualmente se muestra.

Obtenga los valores propios de A, si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución: El polinomio característico de A es

$$P(\lambda) = det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 1 \\ -1 & \lambda - 0 & -1 \\ -4 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$$

Las posibles raíces enteras de $P(\lambda)$ *son* $\pm 1, \pm 2, \pm 3, y\ \pm 6$. *Al sustituir estos valores en* $P(\lambda)$, *tenemos que* $P(1) = 0$, *de modo que* $\lambda = 1$ *es una raíz de* $P(\lambda)$. *Por lo tanto,* $(\lambda - 1)$ *es un factor de* $P(\lambda)$. *Al dividir* $P(\lambda)$ *entre* $(\lambda - 1)$, *obtenemos*

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$$

Al factorizar tenemos

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

Entonces, los valores propios de A son

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3.$$

En este ejemplo se tratan algunos objetos matemáticos abordados en el tema de polinomios de la asignatura Álgebra, como lo son: raíces de polinomios, teorema para encontrar las raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros, teorema del residuo, teorema del factor.

Asignatura: Cálculo diferencial e integral I; Tema: Funciones polinomiales

En la actividad matemática del cálculo diferencial es imprescindible el estudio de funciones polinomiales, su graficación, y para ello el cálculo de sus ceros como una subtécnica. Un ejemplo que aparece en el texto (Larson, Hostetler, Edwards, "Cálculo diferencial", 2009, pag.32) es el siguiente.

Determinar si la función $f(x) = x^3 - x$ es par, impar o ninguna de ambas. Después, calcular los ceros de la función y bosquejar su gráfica.

Solución: la función es impar, ya que

$$f(-x) = (-x)^3 — x = -(x^3 - x) = -f(x).$$

Los ceros de f se calculan como sigue,

$$x^3 - x = 0$$

$$x(x^2 - 1) = x(x + 1)(x - 1) = 0$$

Por lo tanto, los ceros de f son $x = 0, 1, -1$. Y el bosquejo de su gráfica es,

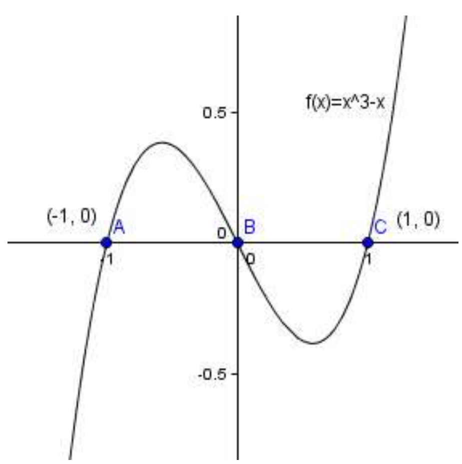


Figura 1.6.1 Gráfica de $f(x) = x^3 - x$.

En este ejercicio explícitamente se pide “obtener los ceros de la función” con el fin de encontrar las intersecciones entre la gráfica y el eje horizontal. En este caso los ceros sirven de apoyo para la graficación.

Asignatura: Cálculo deferencial e integral I; Tema: Extremos relativos en un intervalo.
Otro ejemplo que aparece en el mismo libro de cálculo diferencial, es:

Determinar los puntos críticos de $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ *en el intervalo* $[-1,\ 2]$.

Solución: se empieza derivando la función

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3$$

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$$

Para encontrar los puntos críticos de f se necesita encontrar los valores de x para los cuales $f'(x) = 0$ *y todos los valores de x para los cuales* $f'(x)$ *no existe*

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 0$$

$$12x^2(x-1) = 0$$

$$x = 0, 1.$$

En este ejemplo, se encuentran los ceros de la ecuación $f'(x) = 0$ que representan los puntos críticos de $f(x)$. Podemos observar que $x = 0$ es un cero de multiplicidad dos, pero esto no tiene significado para el problema de cálculo.

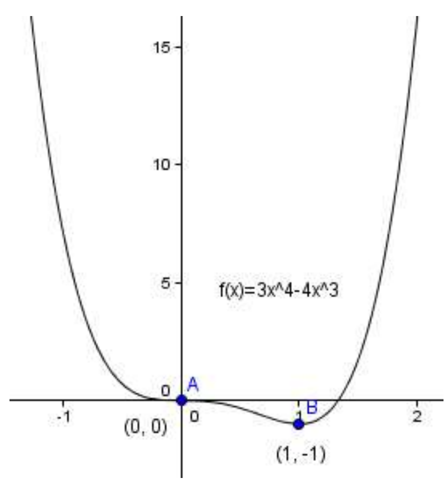


Figura 1.6.2 Puntos críticos de *f*(*x*)

Asignatura: Cálculo diferencial e integral II; Tema: Área entre curvas.

En el libro Larson, Hostetler, Edwards (2009), "Cálculo integral", pag.150, Mc Graw Hill, se calculan áreas entre curvas usando integrales, los límites de integración se obtienen resolviendo la ecuación que resulta al igualar las representaciones algebraicas de ambas funciones, de esta manera las coordenadas de *x* en cada punto de intersección entre ambas curvas. Es decir, la práctica algebraica, en este caso consiste en resolver una ecuación polinomial. El ejemplo es el siguiente.

> *Encontrar el área de la región comprendida entre las gráficas de* $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ *y* $g(x) = -x^2 + 2x$.
>
> *Solución: Empezar igualando* $f(x)$ *y* $g(x)$ *y resolviendo para x. Así se obtienen las coordenadas de x en cada punto de intersección de las dos gráficas.*
>
> $$3x^3 - x^2 - 10x = -x^2 + 2x$$
>
> $$3x^3 - 12x = 0$$
>
> $$3x(x-2)(x+2) = 0$$
>
> $$x = -2, 0, 2$$
>
> *Así, las dos gráficas se cortan cuando* $x = -2, 0$ *y* 2. *En la figura se observa que* $g(x) \leq f(x)$ *en el intervalo* $[-2, 0]$. *Sin embargo, las dos gráficas cambian en el origen, y* $f(x) \leq g(x)$ *en el intervalo* $[0, 2]$. *Así, se necesitan dos integrales, una para el intervalo* $[-2,0]$ *y otra para el intervalo* $[0, 2]$.

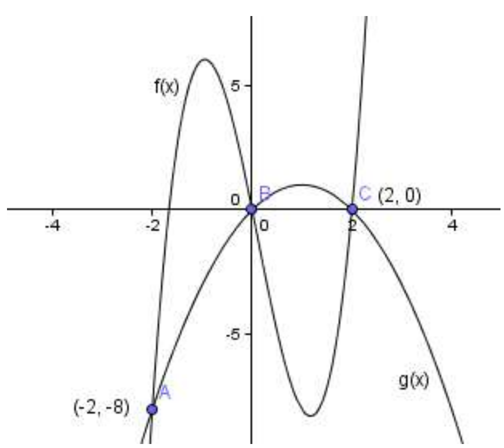


Figura 1.6.3 Áreas de regiones entre curvas.

$$A = \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]dx + \int_{0}^{2} [g(x) - f(x)]dx$$

$$A = \int_{-2}^{0} (3x^3 - 12x)dx + \int_{0}^{2} (-3x^3 + 12x)dx$$

$$A = \left[\frac{3x^4}{4} - 6x^2\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{-3x^4}{4} + 6x^2\right]_{0}^{2} = 24.$$

En este ejemplo, también se resuelve una ecuación polinomial, sólo que resolver dicha ecuación no es para encontrar las intersecciones de una curva con el eje horizontal, sino para encontrar las intersecciones entre dos curvas.

Asignatura: Ecuaciones diferenciales; Tema: Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes.

En el libro, Dennis G. Zill, (2009) "Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado" Pag. 136 CengageLearning, recomendado en el programa de la materia, aparece una aplicación de raíces de polinomio, que íntegramente dice:

> *Resuelva* $y''' + 3y'' - 4y = 0$.
>
> *Solución: La ecuación auxiliar es* $m^3 + 3m^2 - 4 = 0$, *debe ser evidente por inspección que una raíz es* $m_1 = 1$, *por tanto,* $m - 1$ *es un factor de* $m^3 + 3m^2 - 4$. *Dividiendo se encuentra que*
>
> $$m^3 + 3m^2 - 4 = (m - 1)(m^2 + 4m + 4) = (m - 1)(m + 2)^2,$$
>
> *Así las otras raíces son* $m_2 = m_3 = -2$. *Así, la solución general de la EDL es*
>
> $$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x}.$$

Aquí, la sub práctica (del tema de polinomios) consiste en encontrar las raíces de la ecuación polinomial (ecuación auxiliar) con el fin de determinar la solución de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes. También, se hace uso del teorema del factor.

Asignatura: Física 1; Tema: Movimiento parabólico.

La trayectoria de un proyectil (en el plano) cerca de la superficie terrestre se modela mediante una función (ecuación) cuadrática. El modelo original que da la posición del proyectil en un instante *t*, se presenta de forma vectorial y haciendo unas operaciones algebraicas el libro

Resnick, Halliday y Krane “Física volumen 1” (2011), presenta la ecuación de la trayectoria del proyectil.

$$y = (\tan \Phi_0)x - \frac{g}{2(v_0 \cos \Phi_0)^2} x^2 \qquad (4\text{-}13)$$

Que relaciona a la componente en x y a la componente en y del vector posición, puesto que v_0, Φ_0 y g son constantes, la ecuación presenta la forma

$$y = bx - cx^2$$

Es decir, la representación algebraica de una parábola. De ahí que la trayectoria de un proyectil sea parabólica como se aprecia en la figura. El alcance horizontal R del proyectil, se define como la distancia sobre la horizontal donde el proyectil retorna al nivel de donde fue lanzado. Podemos determinarlo haciendo $y = 0$ en la ecuación (4-13). Una solución es $x = 0$; la otra nos da el alcance

$$R = \frac{2v_0^2}{g} sin\, \Phi_0\, cos\, \Phi_0 = \frac{v_0^2}{g} sin\, 2\Phi_0$$

Se obtiene el alcance máximo cuando $\Phi_0 = 45$.

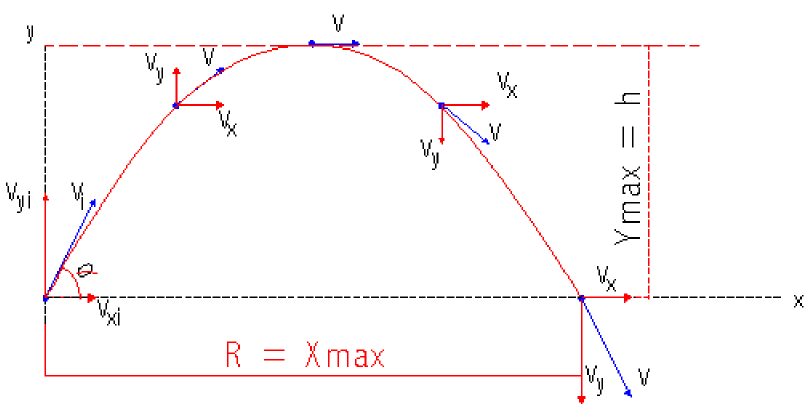


Figura 1.6.4 Trayectoria de un proyectil

En este caso las raíces proporcionan el alcance máximo del proyectil.

Asignatura: Termodinámica; Tema: Ecuaciones de estado

Los alumnos de los Programas Académicos de Ing. Química, Ingeniero Metalúrgico, Ing. en Materiales y de Ing. Industrial y de Sistemas, en la materia Termodinámica estudian la ecuación de van der Waals en el tema Ecuaciones de estado. En el libro Keith J. Laidler, John H. Meiser (2007) "Fisicoquímica" pág. 32-34, se encuentra textualmente, lo siguiente:

La ecuación de van der Waals

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

Donde a y b son las constantes de van der Waals. Se trata de constantes empíricas, es decir, sus valores se eligen para que concuerden mejor con los puntos observados experimentalmente y con los puntos calculados a partir de la ecuación de van der Waals.

Multiplicando la ecuación de van der Waals por V^2 *y expandiéndola como ecuación cúbica en V:*

$$PV^3 - (nbP + nRT)V^2 + n^2aV - n^3ab = 0$$

En términos matemáticos, la ecuación cúbica puede tener tres raíces reales, o una raíz real y dos complejas. La naturaleza de las tres raíces de esta ecuación depende del gas –a través de a y b, de la temperatura y la presión. A partir de la línea punteada en la inserción de la figura 1.15 se observa que hay tres raíces reales para la presión inferior a T_c *y sólo una por arriba de* T_c*. Las tres raíces reales dan a la curva un comportamiento oscilatorio; esta varía con respecto al hecho experimental normal de que la presión permanece constante a lo largo de una línea de enlace. Sin embargo, puede darse cierto significado físico a dos de las regiones en forma de S en la curva. Las regiones marcadas con A corresponden a casos en que la presión de vapor es más alta que la presión de licuefacción. Esto se conoce como sobresaturación y se logra en el laboratorio cuando el vapor está totalmente libre de polvo. La región marcada con B corresponde a tener el líquido a menos presión que la presión de vapor. En este caso, se forman espontáneamente burbujas de vapor para compensar la diferencia de presiones.*

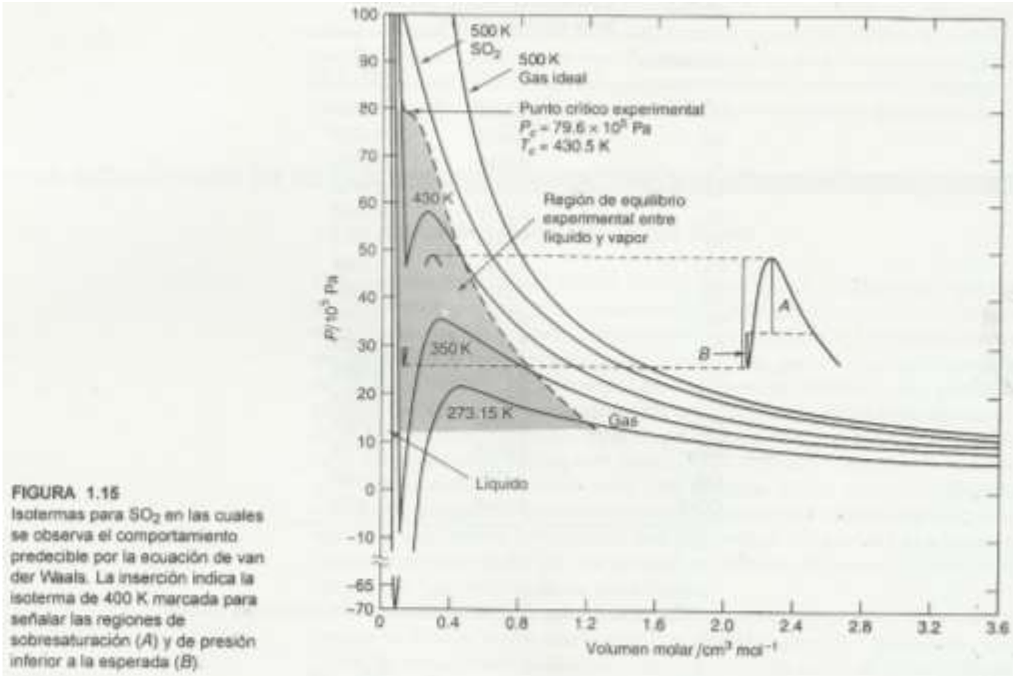


Figura 1.6.5 Isotermas para SO_2 dadas por la ecuación de van der Waals

En este caso, las raíces (*V*) de la ecuación cúbica en *V*, tiene un significado muy importante debido a que nos dicen la naturaleza de la sustancia.

Hasta aquí, para la justificación de este trabajo se ha referido a la formación preuniversitaria de los alumnos que estudian la asignatura Álgebra en la UNISON y, a la aplicación de ecuaciones cuadráticas y polinomios en otras asignaturas que los mismos alumnos cursan durante sus estudios universitarios. Otro elemento importante para la justificación es lo requerido por los organismos acreditadores de los Programas Académicos de ingeniería.

La acreditación evalúa y regula la educación superior, busca asegurar la calidad y la pertinencia de la oferta educativa, y puede ser de carácter nacional o internacional. Los Programas Académicos de ingeniería de la Universidad de Sonora buscan ser acreditados por CACEI, que es un consejo de acreditación nacional.

En el manualde CACEI (2013) el tema de Polinomios (en la asignatura Álgebra) está considerado dentro de los contenidos temáticos mínimos que deben de ser cubiertos por los Programas de Ingenierías que pretendan ser certificados por dicho Consejo. También dicho manual en el punto concerniente a Evaluación del Aprendizaje señala "*es necesario que se tengan establecidos exámenes departamentales, sobre todo en Ciencias Básicas y Matemáticas*" y provee evaluar la eficacia y eficiencia de la aplicación de dichos exámenes ya que pregunta "*si el Programa aplica exámenes departamentales ¿cómo los juzga en cuanto a su eficacia y en cuanto a su eficiencia?*" , también considera importante el uso de software como herramienta didáctica y de evaluación, ya que en el punto Herramienta de Cómputo se lee "*a lo largo de la carrera las asignaturas deberán considerar el empleo de la herramienta computacional (software), como una parte importante del proceso enseñanza aprendizaje*".

2.3 Planteamiento del problema y justificación.

Aunque actualmente el proyecto de elaboración de reactivos y uso del sistema Maple T.A. para el curso de Álgebra en la Universidad de Sonora ha alcanzado cierto nivel de maduración, es escasa la investigación sistematizada que se ha hecho en lo concerniente a los procesos cognitivos de los alumnos usuarios de Maple T.A. Únicamente se ha reportado investigación de este tipo en el tema de números complejos.

Consideramos pertinente analizar y describir la actividad matemática de los estudiantes de ingeniería, al estudiar polinomios mediante el sistema Maple T.A., ya que esto podría ser un elemento de utilidad para valorar la eficacia y eficiencia del uso de este sistema, considerándolo como una forma novedosa de llevar a cabo la evaluación.

Compartimos con Godino J. (2003), "La investigación didáctica debería centrar la atención de modo preferente en el estudio de las relaciones entre los significados institucionales de los objetos matemáticos y los significados personales construidos por los sujetos. Los procesos de enseñanza y aprendizaje tienen lugar en diversas instituciones en las cuales el conocimiento matemático adopta significados específicos que condicionan dichos procesos. Sin duda existen procesos mentales que condicionan el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, el centro de la investigación didáctica no debería ser sólo las mentes de los estudiantes, sino también los contextos culturales e institucionales en los que tiene lugar el aprendizaje."

Consideramos que existe la necesidad de investigar si el significado personal construido por los estudiantes se corresponde con el significado institucional pretendido, cuando el aprendizaje es mediado haciendo uso del sistema Maple T.A.

Una gran cantidad de alumnos de primer semestre de ingeniería de la Universidad de Sonora, presentan notables deficiencias en el aprendizaje de ecuaciones polinomiales. El tiempo establecido para cubrir este tema en los planes y programas de estudio es reducido. Por tal motivo algunos profesores están implementando tareas y exámenes a través del sistema Maple T.A. para promover el trabajo extraclase y la retroalimentación inmediata del mismo.Estas tareas y exámenes en línea se han estado implementando por varios años. Dado que los estudiantes registran en el sistema sólo las respuestas a las situaciones que se les presentan, se hace necesaria una investigación bien fundamentada que caracterice las prácticas y procesos llevados a cabo por los estudiantes en ese ambiente.

La investigación se lleva a cabo en un curso de Álgebra del primer semestre de ingeniería que utiliza sistemáticamente el software mencionado. Consideramos que, tanto la descripción, así como el contraste, entre los significados institucionales y personales de polinomios, y la determinación de conflictos semióticos, aportarán elementos para entender los procesos de enseñanza y aprendizaje asociados al usarse dicho sistema.

2.4 Investigaciones relacionadas

No se encontraron referencias sobre trabajos que tengan en común tanto el tema matemático (polinomios), como el marco teórico, propósitos y uso de tecnología (entre otros elementos), por lo tanto, se flexibilizaron los criterios.

En un trabajo anterior (Ibarra, Del Castillo, 2012), similar al propuesto, se reportaron avances de un proyecto de investigación en el que se analizan los significados generados por las prácticas promovidas en el sistema Maple T.A. Dicho trabajo está delimitado al tema de números complejos que es el primero de la asignatura Álgebra que se imparte a los estudiantes de ingeniería de la Universidad de Sonora, y está sustentado en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (Godino, 2003). En él se plantea un estudio descriptivo en el que, primeramente, se pretende caracterizar el significado institucional evaluado, mediante la determinación de los sistemas de prácticas que se promueven con el uso del sistema Maple T.A. Después, se presenta parte del significado personal declarado por un estudiante, mediante el análisis de sus prácticas registradas en el sistema de evaluación. Finalmente, se determina el significado personal logrado, es decir, se identifican las prácticas expresadas por el estudiante que resultan ser coincidentes con las pautas institucionalmente propuestas.

Concretamente, se presenta el análisis de uno de los reactivos de números complejos que aparece en el apartado Multiplicación de Números Complejos en el Maple T.A. En éste, se identifican los objetos matemáticos que constituyen el sistema de prácticas evaluado. Después, se analiza la respuesta dada por el estudiante (significado declarado) y contrastando con el significado institucional evaluado se obtiene el significado personal logrado, concluyendo que el significado logrado es parcialmente coincidente con el evaluado.

Una de las investigaciones específicas localizadas sobre la enseñanza de polinomios (Fonseca, Bosch y Gascón, 2010), se centra en la práctica matemática escolar en torno a la división sintética y la factorización de polinomios. En este trabajo se muestra una manera posible de ampliarla y completarla progresivamente tomando el trabajo de la técnica como esencial. Para ello se consideran algunos elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999) en la que se describe el saber matemático en términos de *organizaciones matemáticas institucionales* (OM), las cuales están constituidas por cuatro componentes principales: tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías.

Otros conceptos importantes en este trabajo son el de *discontinuidades matemáticas y didácticas* entre la Secundaria y la Universidad (en España) y la *incompletitud* de las organizaciones matemáticas locales.

Los autores consideran muy importante una de las dimensiones o momentos de la actividad matemática, el *Momento del Trabajo de la Técnica*, en cuanto a la construcción de una OM local relativamente completa. Su propósito es mostrar, usando una OM particular (la construida en torno a la división sintética para la factorización de polinomios), de qué manera se puede retomar un ingrediente técnico que los alumnos han aprendido a utilizar de manera muy rígida y limitada para, mediante un adecuado trabajo de la técnica, poder generar nuevas técnicas, nuevas justificaciones y explicaciones de éstas, así como nuevas cuestiones, de forma que la OM de partida, que inicialmente se presenta escolarmente como una OM puntual, rígida y aislada, se vaya ampliando y completando de manera progresiva. Los autores afirman que en la enseñanza universitaria se supone de forma equivocada que las organizaciones matemáticas que han sido previamente estudiadas en la Secundaria (en

España) se han hecho con un grado suficiente de completitud y por lo tanto no hay la necesidad de reconstruirlas efectivamente en la universidad. Generalmente cuando en un proceso de estudio se recupera una técnica aprendida, se suele recuperar una versión rígida y estereotipada de la técnica “antigua”.

Los autores postulan que este fenómeno se acentúa cuando la recuperación se hace en una institución diferente de la institución en la que el estudiante la utilizó por primera vez, como, por ejemplo, cuando en la universidad se recupera una técnica introducida en la Secundaria. Los investigadores sugieren que algunas de las discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad se deben no sólo al carácter puntual y a la rigidez de las organizaciones matemáticas estudiadas en la Secundaria, sino también debido a que en la Universidad no se retoman estas OM, ni se desarrollan de manera adecuada, ni las articulan entre sí ni las integran en otras OM más amplias y completas.

En un artículo publicado recientemente los autores (Drijvers, Godino, Font, Trouche, 2012) analizan un episodio de actividad matemática desde la perspectiva de dos enfoques teóricos distintos, el enfoque de la Teoría de Génesis Instrumental (TIG) y el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS). Más que comparar y contrastar éstos dos enfoques teóricos, los investigadores se propusieron entender mejor el ámbito de aplicación y la potencia de cada uno de estos marcos teóricos, así como para explorar sus posibles complementariedades. Es decir, es un estudio sobre la interconexión de los dos lentes teóricos, para lograrlo se utilizan elementos de la teoría de redes. Los autores están interesados en la articulación entre una teoría básicamente cognitiva con un interés específico en el uso de artefactos (TIG) y una teoría didáctica más general (EOS). El desafío de esta empresa fue investigar si el carácter más general del EOS sería aplicable a este caso concreto, y contribuiría al enfoque TIG.

Se analiza un episodio en el cual se registra la actividad de dos estudiantes holandesas preuniversitarias que utilizan algebra computacional para el aprendizaje del concepto de parámetro de un polinomio de segundo grado. Durante la secuencia de estudio las alumnas cuentan con una calculadora simbólica (TI-89). Los datos consisten en el trabajo de lápiz y papel de las estudiantes, grabaciones de vídeo de la pantalla de la calculadora de María, la grabación de audio de los diálogos entre los estudiantes, y las entrevistas con el observador.

A continuación se muestra la tarea a realizar por las alumnas.

One episode, two lenses

Task
On the right you see a sheaf of graphs of the family $y = x^2 + b \cdot x + 1$.
You encountered this family already in task 1 of section 3.
This time, we pay special attention to the vertices of the parabolas.

i. Mark all vertices of the parabolas in the figure and connect them. What kind of curve do you seem to get?
ii. Express the coordinates of the vertex of a 'family member' in b. Hint: the vertex lies at the middle of two zeros, if these exist.
iii. Find the equation of the curve through the vertices of the sheaf and draw some graphs for verification.

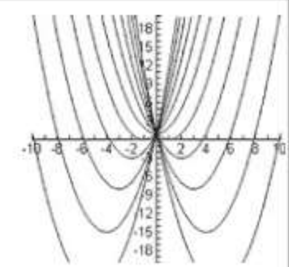


Fig. 2 Sheaf of graphs task

Por nuestra parte, lo que se pretende destacar de dicho trabajo es el uso del EOS para analizar un segmento de actividad matemática, en la que una alumna intenta resolver una tarea que involucra polinomios de segundo grado y para ello utiliza la calculadora simbólica TI-89. En esta investigación se destaca la forma en la que influye la sintaxis al usar tecnologías en la enseñanza de las matemáticas.

Sin dejar de mencionar que en el análisis mediante el enfoque TIG la sintaxis y el uso de comandos es muy importante. En este caso particular el uso del comando "solve" para resolver una ecuación y el de sustitución mediante el comando de la barra vertical "|". Estos comandos se consideran como componentes de artefacto calculadora.

El análisis con la perspectiva del EOS se centra en describir la trayectoria cognitiva de María como parte de una trayectoria didáctica. Esta trayectoria cognitiva se ve influenciada por la interacción con el profesor y su alumna de pares, Ada, así como por el uso de la calculadora. El análisis incluye la identificación de las prácticas utilizadas por María, estas son comparadas con las previstas por la institución y la configuración cognoscitiva de los objetos primarios, y sus correspondientes procesos que María pone en juego, y se comparan con los objetos y los procesos que son necesarios para resolver la tarea. Las dificultades que María muestra en el proceso de aprendizaje pueden explicarse en términos de la complejidad de las configuraciones de los objetos primarios requeridos para resolver la tarea y mediante la red de funciones semióticas.

En este análisis, la calculadora simbólica se considera como un objeto que interviene en la práctica matemática, en conjunción con otros objetos. El dominio de los comandos de resolución de ecuaciones, gráficos, entre otros utilizados, pone en juego configuraciones de objetos primarios y procesos específicos; para lograr este dominio se requiere de instrucciones específicas.

Los autores llevan a cabo un detallado análisis de las prácticas, los objetos primarios y procesos a las primeras dos unidades de análisis, en las unidades restantes el análisis es con menos detalle. Nosotros, sólo mencionaremos parte del análisis de las primeras dos unidades (sub-tareas).

En cuanto a las prácticas expresadas para la resolución de la primera sub-tarea (punto i), se menciona que con algunas dificultades María llega a producir la representación gráfica de la familia de los funciones $y_1(x) = x^2 + bx + 1$con la calculadora TI-89, para b que va de -5 a 5 con paso 1. Y que puede representar la gráfica de una familia de funciones paramétricas, y para ello debe conocer: la escritura de expresiones algebraicas respetando las reglas de sintaxis TI-89, asignar valores a los parámetros, ajustar la visualización de la ventana de zoom e interpretar la representación gráfica como la solución de la tarea requerida.

Y en cuanto a los objetos primarios solo se mencionan tres de ellos aquí en este trabajo. Primero, los elementos lingüísticos, debido a que los investigadores consideran muy importante la sintaxis de la calculadora TI-89 para producir las gráficas de la familia de funciones $y_1(x) = x^2 + bx + 1$. También, el procedimiento, ya que se describen las acciones que la alumna debe llevar a cabo para realizar la tarea mediante el uso de la calculadora. Como argumentos, la calculadora muestra una representación gráfica que se considera la solución de la tarea. Los autores lo llaman un argumento de autoridad, en referencia a la calculadora.

Para dar respuesta al punto ii, la sintaxis también es considerada parte de los elementos lingüísticos y básica en le resolución de la sub-tarea. La estudiante realiza tres intentos fallidos para resolver la ecuación $x^2 + bx + 1 = 0$, debe capturar solve ($x^2 + bx + 1 = 0$, x), pero en su lugar captura tres expresiones erróneas: solve ($x^2 + bx + 1$, x); solve ($x^2 + bx + 1, x$ |), y solve ($x^2 + bx + 1$, b). En los tres casos, lo capturado no tiene "=0", la segunda y la tercera expresión revelan la confusión sobre la incógnita, y si es o no necesario asignar un valor a *x*. También, en esta sub-tarea el procedimiento incluye el uso correcto de comandos y de la sintaxis de la calculadora para resolver la ecuación.

Los investigadores consideran que los fenómenos didácticos en esta configuración son ricos y que la representación gráfica de funciones con la calculadora que requiere la asignación de valores particulares del parámetro, todavía es un obstáculo para la manipulación del parámetro. La complejidad de la tarea conduce a una intervención un tanto forzada por parte del profesor para introducir las reglas para el uso de elementos genéricos, suponiendo un patrón normativo claro de interacción.

Comprender el uso de parámetros requiere la activación de una red de funciones semióticas que permite ver lo particular en lo general y viceversa.

2.5 Preguntas de investigación y objetivos.

Preguntas de Investigación

Una vez planteada la problemáticade interés se hace necesario formular una serie de preguntas que ayuden a estudiarla a mayor profundidad. En este caso se han identificado las siguientes:

1. ¿Cuáles son las prácticasque según la institución deberán construir y desarrollar los estudiantes de ingenieríade la Universidad de Sonora, en lo concerniente al tema de polinomios?
2. ¿Cuáles son las prácticasque se pretende promovera través de las tareassobre polinomios mediante el uso del software Maple T.A.?
3. ¿Qué prácticas se pretende evaluar a través del sistema Maple T.A.?
4. ¿Qué prácticas de los estudiantes se detectan mediante la evaluación sobre el tema de polinomios en el ambiente Maple T.A.?¿Cuáles son los errores y dificultades que se pueden identificar?

De las interrogantes planteadas se desprenden los siguientes objetivos:

OBJETIVO GENERAL

Caracterizar los significados sistémicos sobre el tema de polinomios en los cursos de Álgebra de los programas de ingeniería de la Universidad de Sonora, en el ambiente Maple T.A.

Objetivos Específicos

1. *Determinar los elementos básicos del significado institucional de referencia de polinomios en el curso de Álgebra para estudiantes de ingeniería en la Universidad de Sonora.*
2. *Determinar los elementos básicos del significado institucional pretendido de polinomiosal utilizar el sistema Maple T.A. para la implementación de tareas.*
3. *Determinar las prácticas matemáticas, los objetos matemáticos primarios y las funciones semióticas, útiles en la resolución de los reactivos que fueron seleccionados para estructurar el examen de polinomios en el sistema Maple T.A.*
4. *Determinar las prácticas matemáticas de los alumnos de ingeniería al estudiar polinomios en el ambiente de Maple T.A.*
5. *Identificar los objetos matemáticos primarios intervinientes y emergentes en los exámenes sobre polinomios en el ambiente de Maple T.A.*
6. *Identificar, describir y explicar conflictos semióticos detectados en las respuestas de los estudiantes al examen aplicado en línea con Maple T.A.*

Capítulo 3Elementos teóricos y metodológicos

Para la realización de este trabajo nos basaremos en el modelo teórico Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS) propuesto por Godino y sus colaboradores (Godino, Batanero y Font, 2009). Consideramos que este marco teórico es útil para realizar los objetivos que nos hemos propuesto, caracterizar los significados personales de los alumnos de Álgebra al estudiar polinomios. Este enfoque teórico proporciona una perspectiva pragmática-antropológica sobre el conocimiento matemático. Es decir, este enfoque, contrario a la posición absolutista o platónica, considera que los objetos matemáticos son fruto de la construcción humana, cambian a lo largo del tiempo y pueden ser dotados de significados diversos por personas e instituciones diferentes (Godino, 2003).

La metodología se desprende del mismo marco teórico y nos ayuda a cumplir con los objetivos planteados en esta investigación, determinar o caracterizar los significados institucionales y personales de polinomios.

3.1 Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática.

3.1.1 Sistemas de prácticas y objetos matemáticos

Se toma como noción primitiva la de *situación-problema* para definir a continuación los conceptos teóricos básicos que se usan en este trabajo: práctica, objeto (institucional y personal) y significado (personal e institucional), (Godino, Batanero,1994).

Para Godino (2003) una *situación-problema* es cualquier tipo de circunstancia que precisa y pone en juego actividades de matematización. Como ejemplos de actividades de matematización el autor resalta:

- Construir o buscar posibles soluciones que no son accesibles inmediatamente;
- Inventar una simbolización adecuada para presentar las situaciones y soluciones encontradas y para comunicar dichas soluciones a otras personas;
- Producir nuevas expresiones y enunciados significativos mediante manipulaciones simbólicas;
- Justificar (validar o argumentar) las soluciones propuestas;
- Generalizar las soluciones a otros contextos, situaciones-problemas y procedimientos.

La noción de práctica (descrita a continuación) permite sintetizar las características de la actividad de matematización. Se define *prácticamatemática* como:

> *Toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas.*

En el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular en un problema concreto dado, interesan los tipos de prácticas, que el EOS llama *prácticas prototípicas* y las define como:

> *Los invariantes operatorios puestos de manifiesto por las personas en su actuación ante situaciones problemáticas.*

Se dice que una *práctica* es *significativa*, para una persona, si la conducen a la resolución del problema. Más precisamente:

> *Se dice que una práctica personal es significativa (o que tiene sentido) si, para la persona, esta práctica desempeña una función para la consecución del objetivo en los procesos de resolución de un problema, o bien para comunicar a otro la solución, validar la resolución o generalizarla a otros contextos y problemas.*

Las situaciones problemáticas y sus soluciones son soluciones socialmente compartidas, esto es, están vinculadas a instituciones. Se propone la siguiente definición:

> *Una institución* I *está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales compartidas, las cuales están, asimismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen.*

La instituciónde interés para este trabajo está formada por profesores y estudiantes de los cursos de Álgebra de los programas de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora, ya que es ahí donde se llevan a cabo las prácticas que analizamos.

En el seno de cada institución se realizan prácticas diferentes, que son apropiadas para el fin de lograr la solución del correspondiente campo de problemas y que pueden variar de una institución a otra. Para comprender la naturaleza de la actividad matemática y de los objetos que de ella emergen interesa considerar el conjunto de tales prácticas, que se definen como:

> *Un sistema de prácticas institucionales es el conjunto de prácticas significativas compartidas en el seno de una institución* I *para resolver un campo de problemas.*

Su carácter social indica que son observables. Unos tipos de tales prácticas sociales son: descripciones de problemas o situaciones, representaciones simbólicas, definiciones de objetos, enunciados de proposiciones y procedimientos que son invariantes característicos del campo de problemas, argumentaciones, entre otras.

En el enfoque onto-semiótico se toma como base el supuesto de que el objeto matemático emerge del sistema de prácticas significativas, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos; y que este proceso es progresivo a lo largo del tiempo, hasta que en determinado momento el objeto matemático es reconocido por la institución, pero incluso después de esta etapa sufre transformaciones progresivas según se va ampliando el campo de problemas asociado.

En el caso de las matemáticas, unas prácticas particulares que determinan los objetos matemáticos son las definiciones de los mismos o el enunciado de sus propiedades (teoremas o proposiciones). Pero, como las prácticas (también las definiciones, proposiciones y teoremas) son relativas a las instituciones, es decir, pueden variar de una a otra. La siguiente definición sustenta lo citado anteriormente.

> *Un objeto institucional es un emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas. Los elementos de este sistema son los indicadores empíricos del objeto institucional.*

Los objetos institucionales son los constituyentes del conocimiento objetivo.

Al igual que en la emergencia de los objetos institucionales, en el EOS se considera que, este proceso de construcción de los objetos en la ciencia tiene su paralelismo en el aprendizaje del sujeto. El aprendizaje es progresivo a lo largo de la vida del sujeto, como consecuencia de la experiencia y enseñanza recibida.

Lo que hace necesario proponer, en el plano personal, la introducción de las definiciones de *sistema de prácticas personales* y de *objeto personal.*

> *Un sistema de prácticas personales asociadas a un campo de problemas está constituido por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas.*

Y como consecuencia:

> *Un objeto personal es un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas.*

Estos objetos son los constituyentes de conocimiento subjetivo.

En este marco teórico se considera que para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos (Godino, Batanero y Font, 2006). Si se considera, por ejemplo, los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación problema vemos el uso de *lenguajes,* verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de un serie de *conceptos, proposiciones y procedimientos* que intervienen en la elaboración de *argumentos* para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y tanto ella como acción compuesta, son satisfactorias. En consecuencia, cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática activa un conglomerado formado por *situaciones-problema, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos,* articulado en la siguiente Figura 3.1.1.

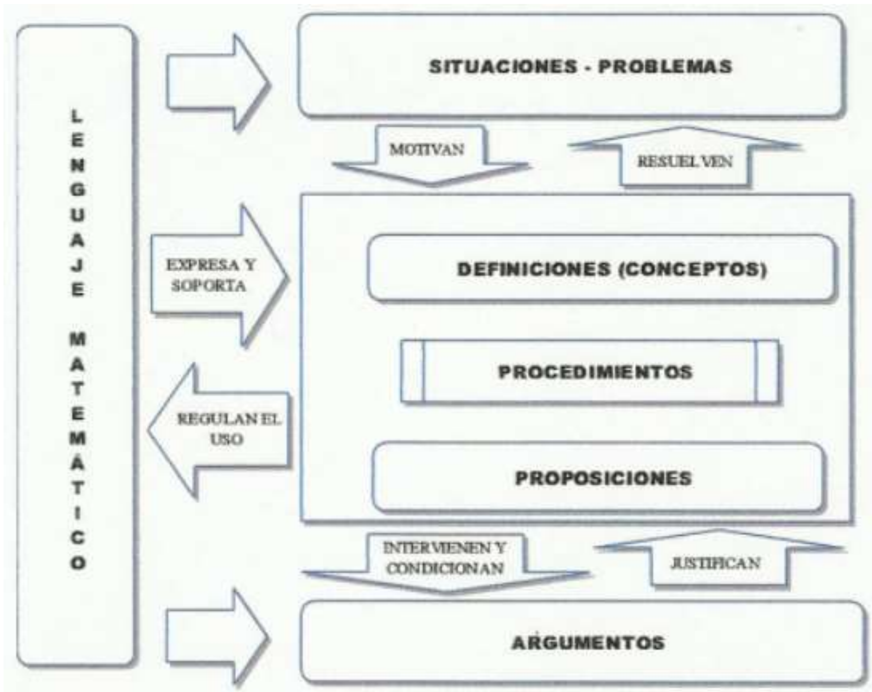


Figura 3.1.1 Configuración de objetos primarios

Se proponen los siguientes tipos de objetos matemáticos primarios:

- *Elementos lingüísticos* (términos, expresiones, notaciones, gráficos,…) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual,…)
- *Situaciones-problema* (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios,…)
- *Conceptos-definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función,…)
- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos,…)
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo,…)
- *Argumentos* (enunciados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otros tipo,…).

Las situaciones – problemas son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí.

Una configuración epistémica es una situación problema que, junto a los lenguajes, los conceptos, las proposiciones y procedimientos y los argumentos—llamados objetos primarios en el EOS—, pueden estar a cargo del profesor, de los estudiantes o distribuirse entre ambos. Será global si se refiere a la unidad didáctica completa, parcial si alude a una parte de aquélla y puntual si es un aspecto muy concreto.

La tipología antes descrita es de gran interés en este trabajo de investigación, ya que, permiten analizar las prácticas desarrolladas por los estudiantes.

3.1.2 Significados institucionales y personales

En el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) puestas de manifiesto por las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas. Es decir, lo que interesa es "el sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal), o compartidas en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de situaciones-problemas". Con esta formulación del significado el EOS asume los presupuestos de la epistemología pragmatista (Godino y Batanero, 2004). Lo que conduce a las siguientes definiciones:

> *El significado institucional de un objeto es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge un objeto en un momento de dado.*

Uno de los objetivos particulares de este trabajo es el de determinar el significado institucional de objetos matemáticos presentes en los temas Ecuaciones de segundo y tercer grado y Polinomios, en la asignatura Álgebra que se imparte en la Universidad de Sonora. Esto se logra mediante el análisis del programa de estudio de la asignatura Álgebra, de libros de texto de álgebra y de los reactivos contenidos en el Maple T.A.

En correspondencia con la noción de significado de un objeto institucional se introduce la noción de significado de un objeto personal.

> *El significado personal de un objeto es el sistema de prácticas personales de una persona para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto en un momento dado.*

La relatividad socio-epistémica y cognitiva de los significados, entendidos como sistemas de prácticas, y su utilización en el análisis didáctico lleva a introducir la siguiente tipología básica de significados (Godino y Batanero, 2004). En relación con los significados institucionales se propone la siguiente:

- *Referencial*: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido.
- *Pretendido:* sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
- *Implementado:* en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
- *Evaluado:* el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.

Respecto de los significados personales se propone la siguiente tipología:

- *Global:* corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático.
- *Declarado:* da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
- *Logrado:* corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida.

La tipología de significados institucionales y personales se resume en la figura siguiente.

Figura 3.2.1 Tipos de significados institucionales y personales

En la parte central de la Figura 3.2.1 se indican las relaciones dialécticas entre enseñanza y aprendizaje, que supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales e institucionales. Así, la enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados (Godino, Batanero y Font, 2009).

3.1.3 Funciones semióticas y conflictos semióticos

Generalmente, en el trabajo matemático usamos unos objetos en representación de otros, existiendo una correspondencia, con frecuencia implícita, entre el objeto representante y el representado.

Tanto los conceptos como las situaciones-problemas vienen expresados por el lenguaje, mediante el que se describen las propiedades que los caracterizan. Palabras, símbolos, gráficos, e incluso objetos físicos, desempeñan frecuentemente el papel de "sistemas de representación", esto es, remplazan otra cosa o uno de sus aspectos.

Godino (2003) concibe, de forma metafórica, a la noción de función semiótica, como "una correspondencia entre conjuntos", poniendo en juego tres componentes:

- un plano de expresión (objeto inicial, considerado frecuentemente como el signo);
- un plano de contenido (objeto final, considerado como el significado del signo, esto es, lo representado, lo que se quiere decir, a lo que se refiere un interlocutor);
- un criterio o regla de correspondencia, esto es, un código interpretativo que regula la correlación entre los planos de expresión y contenido, estableciendo el aspecto o carácter del contenido referido por la expresión.

Con frecuencia las funciones semióticas vienen dadas por uno de sus tres componentes, quedando los otros dos implícitamente establecidos. Hablar de significado supone que hay, además, una expresión y un código interpretativo. El signo, por tanto, no supone mera correspondencia entre expresión y contenido; de un algo que está en lugar de otro algo, sino que alguien debe hacer una posible interpretación.

La noción de función semiótica nos permite proponer una interpretación del conocimiento y la comprensión de un objeto O por parte de un sujeto X (persona o institución) en términos de las funciones semióticas que X puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que interviene el objeto O. Puesto que cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante, constituye, para nosotros un conocimiento y hablar de conocimiento equivaldrá a hablar de significado, esto es, de función semiótica (Godino, 2003).

En el EOS se considera que un *conflicto semiótico* es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones).

Si la disparidad se produce entre significados institucionales se dice que los conflictos semióticos son de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se da entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto se designan como conflictos semióticos de tipo cognitivo.

Es decir, las interpretaciones de expresiones matemáticas hechas por los estudiantes que no concuerdan con las pretendidas por el profesor o el investigador son un *conflicto semiótico*(Godino, Batanero y Font, 2007).

3.1.4 Análisis ontológico-semiótico

Mediante la noción de función semiótica y la tipología de objetos descritos en este marco teórico los autores desarrollan una técnica analítica que nos permite determinar o caracterizar significados que se ponen en juego en la actividad matemática y los procesos de enseñanza y aprendizaje. Es decir, consiste en realizar un análisis sistemático de los objetos y funciones semióticas que se ponen en juego en un segmento de actividad matemática.

El análisis se aplica a un texto que registra la actividad matemática desarrollada por los sujetos participantes (en nuestro caso el texto es lo registrado en el Maple T.A. y/o en las hojas de respuestas de cada estudiante). En el EOS se le llama *análisis ontológico-semiótico* (o simplemente, *análisis semiótico*) de un texto matemático a su descomposición en unidades, la identificación de las entidades puestas en juego y las funciones semióticas que se establecen entre los mismos por parte de los distintos sujetos.

El análisis se basa en descomponer el texto en unidades, llamadas semióticas. El criterio, dado por los autores del EOS, para definir las unidades de análisis es un cambio de problema a estudiar dentro del campo de problemas considerado, o bien, se pasa del enunciado del problema al desarrollo de una acción, el empleo de una notación, al uso o identificación de una propiedad, o a la descripción, sistematización y validación de las soluciones. Es decir, se tiene en cuenta para delimitar las unidades de análisis los momentos en los cuales se ponen en juego alguno de los seis tipos de elementos introducidos en este modelo teórico o también entidades mixtas derivadas. En principio cada unidad se puede descomponer en tantas subunidades como términos y expresiones matemáticas contenga, o también varias unidades se pueden agrupar y constituir unidades semióticas más extensas.

Para detectar los conflictos semióticos se lleva a cabo un análisis semiótico de las respuestas de los estudiantes, centrando la atención en las funciones semióticas que realizan entre los diversos elementos de significado como parte de las prácticas matemáticas que efectúan para resolver la situación problema.

3.2 Metodología de investigación

Con el propósito de cumplir con los objetivos planteados en esta investigación, determinar los significados institucionales y personales de polinomios en donde se lleva a cabo el estudio, se implementa una técnica analítica que nos permite determinar o caracterizar dichos significados. Ésta consiste en realizar un análisis sistemático de los objetos matemáticos y funciones semióticas que se ponen en juego en un segmento de actividad matemática.Dicho análisis es llamado *análisis ontológico-semiótico* y se realiza siguiendo las siguientes fases o etapas.

Etapa 1.- Describir el significado institucional de referencia. Se determinanlos sistemas de prácticas asociados el campo de problemas de los cuales emergen los polinomios, así como otros objetos matemáticos relacionados.Las fuentes para determinar este significado son: el programa oficial de la asignatura y textos referidos por profesores que imparten la materia. El criterio para definir las unidades de análisis es considerar cada punto del contenido temático del programa como una unidad elemental. Así, se considera necesario llevar a cabo las siguientes acciones:

- Analizar la parte del programa oficial de la asignatura Álgebra que trata los temas referentes a polinomios, así como, la bibliografía recomendada,
- Analizar otros textos no incluidos en el programa pero que son utilizados por profesores que imparten regularmente la materia.

Etapa 2.- Describir el significado institucional pretendido al utilizar el software Maple T.A. Se determinan los objetos matemáticos y los sistemas de prácticas que se promueven utilizando el sistema Maple T.A. Las fuentes para determinar este significado son las tareas diseñadas en el sistema, cada una de las cuales se consideran una unidad de análisis para llevar a cabo el análisis semiótico.

Una vez que las tareas del sistema son realizadas por los estudiantes en el aula o fuera de ella, formarán parte del significado institucional implementado.

Etapa 3.- Describir el significado institucional evaluado al utilizar el sistema Maple T.A. Se determinan los objetos matemáticos y los sistemas de prácticas que emergen del campo de problemas que se consideró en el instrumento de evaluación en línea con Maple T.A. Cada reactivo que fue seleccionado para estructurar el examen se considera una unidad de análisis para determinar este significado.

Etapa 4.- Describir los significados personales declarado y logrado, así como conflictos semióticos. Se determinan los objetos matemáticos y los sistemas de prácticas que son manifestados en laactividad matemática delos estudiantes de dos grupos distintos de Álgebra al llevar a cabo el examen estandarizado en línea con Maple T.A.

Se realizó un estudio de casos documentando el trabajo de tres alumnos representativos de cada grupo, haciendo una selección estratificada en relación con su desempeño. Las fuentes para la determinación de este significado son las respuestas de los estudiantes registradas en el sistema y las hojas de trabajo correspondientes, mismas que fueron solicitadas para efectos de la realización de este trabajo de investigación. En este caso las unidades de análisis son las respuestas de los estudiantes a cada reactivo del examen. Así, se llevaron a cabo las siguientes acciones específicas:

- Identificar los objetos y las prácticas de los estudiantes mediante el análisis de las respuestas registradas en el sistema Maple T.A.
- Analizar y describir los objetos y las prácticas manifestadas en las hojas de trabajo correspondientes entregadas por cada estudiante, con el fin de complementar el análisis de lo registrado en el Maple T.A.
- Determinar las funciones semióticas realizadas por los estudiantes para resolver las situaciones problema.
- Se discrimina del significado personal declarado aquellas prácticas expresadas por los estudiantes que resulten ser coincidentes con las prácticas institucionales evaluadas.
- Determinar conflictos semióticos en las respuestas registradas en el sistema y en la actividad de las hojas de trabajo.

En las secciones posteriores, se presentan los análisis y resultados, siguiendo el orden de las etapas de la metodología de investigación planteada.

Capítulo 4 Análisis y resultados

4.1 Significado institucional de referencia.

La primera fase de este trabajo de investigación consiste en describir el *significado institucional de referencia* de polinomios en la asignatura Álgebra.Las fuentes para determinar dicho significadoen la institución donde se lleva a cabo el estudio es, en primer plano, el Programa Oficial de la asignatura Álgebra, y algunos textos usados por docentes que imparten la asignatura. En estos se determinan los objetos matemáticos asociados al tema y los sistemas de prácticas de los cuales emergen, desde el punto de vista institucional.

El significado institucional de referencia es muy importante, ya que éste sirve de base para establecer el *significado institucional pretendido* y, a su vez, éste último para guiar el *significadoinstitucionalimplementado* y determinar el *significado institucionalevaluado.*

En primer término se presenta una descripción de algunos elementos del programa oficial de la asignatura Álgebra: Contenido temático, Objetivo General, Objetivos Específicos, los Objetivos Temáticos y las Habilidades Específicas que los estudiantes debieran desarrollar, así como la bibliografía recomendada.

El Objetivo General declarado en el Programa Oficial es:

> *Analizar los conceptos básicos de la teoría de ecuaciones y del álgebra lineal y su aplicación en los diversos problemas de las ciencias y técnicas relacionadas con la ingeniería*.

Y los Objetivos Específicos:

- *Establecer el número y la naturaleza de las raíces de una ecuación de grado n en una incógnita, en un ambiente algebraico y gráfico.*
- *Familiarizarse con los conceptos básicos del álgebra lineal y utilizarlos para explicar el funcionamiento de sus métodos y algoritmos.*
- *Resolver problemas de la ciencia y la ingeniería cuyos modelos son extraídos de la teoría de ecuaciones y del álgebra lineal.*

La Tabla 5.1.1 muestra el extracto del programa de la asignatura Álgebra que será objeto de análisis, con los temas (contenido temático) concernientes a Ecuaciones de Segundo y Tercer Grado, así como Polinomios. Se señalan además las unidades elementales U_1, U_2, ⋯, U_7, que se determinaron para llevar a cabo el análisis.

UNI-DAD	CONTENIDO	OBJETIVOS TEMÁTICOS	HABILIDADES ESPECIFICAS
U_1	2. Resolución algebraica de ecuaciones de segundo y tercer grado.	Mostrar las limitaciones de los métodos algebraicos cuando se resuelven ecuaciones de grado mayor que dos.	Calcular las raíces reales y complejas de ecuaciones de grado dos y tres.
U_2	3. Polinomios de grado *n* en una variable a) Raíces reales. b) Raíces complejas. c) Derivada de un polinomio y multiplicidad de raíces. d) Construcción de un polinomio de grado *n* a partir de sus raíces.	Entender las definiciones básicas relacionadas con polinomios de grado *n*.	Aplicar las definiciones básicas relacionadas con polinomios de grado *n* a problemas relacionados con raíces de polinomios.
U_3	4. Representación gráfica de un polinomio y sus raíces reales. a) Raíces simples b) Raíces múltiple	Articular la representación gráfica y algebraica de un polinomio, enfatizando la noción de raíz.	Graficar polinomios como funciones reales de variable real y estimar gráficamente cada una de sus raíces reales.
U_4	5. Representación gráfica de las raíces complejas de un polinomio.	Establecer la relación existente entre el número total de raíces de un polinomio y su grado	Graficar con software todas las raíces de un polinomio.
U_5	6. Teorema Fundamental del álgebra.	Formular el Teorema Fundamental del Álgebra, para polinomios con coeficientes complejos.	Sintetizar los resultados obtenidos anteriormente sobre la relación entre el número total de raíces de un polinomio y su grado.
U_6	7. Regla de Descartes para la separación de raíces.	Deducir la manera como se relacionan las variaciones de signo de los coeficientes de un polinomio con el número de raíces reales.	Estimar el número total de raíces positivas y negativas de un polinomio a partir de sus variaciones de signo.
U_7	8. Método de bisección para aproximar raíces.	Conocer y aplicar un método sencillo para aproximar las raíces reales de un polinomio.	Aproximar las raíces reales de un polinomio

Tabla 5.1.1Extracto del Programa de la Asignatura Álgebra

Los textos juegan un papel muy importante para la formación del significado institucional de referencia. Según Ortiz (1999) un libro de texto se considera como un segundo nivel de transposición didáctica, después del primer nivel que los constituyen los currículos y los programas oficiales. Al analizar el conjunto de textos referidos para el estudio de polinomios, éstos arrojan una visión muy aproximada de lo que se estudia en la institución de interés.

Para llevar a cabo la caracterización del significado institucional de referencia, primero, se determina una muestra de textos que son usados por profesores que imparten la materia de Álgebra, después se seleccionan los capítulos que contienen los temas de ecuaciones cuadráticas, cúbicas y de polinomios.

La Tabla 5.1.2 muestra los textos utilizados en el análisis.

Título	Autores	Editorial	Edición
Polinomios y raíces: una presentación gráfica	Soto M., J.L.	Depto. de Matemáticas UNISON	2003
Álgebra	Louis Leithold	Oxford	1995
Álgebra	Paul K. Rees, Fred W. Sparks, Charles Sparks R.	McGraw- Hill	2007
Álgebra Elemental	G. Fuller	CECSA	2004
Álgebra Universitaria	Earl W. Swokowski	CECSA	1982
Álgebra y Trigonometría Con Geometría Analítica	No	CENGAGE Learning	2011
Álgebra	J. E. Kaufmann K.L. Schwiitters	CENGAGE Learning	2010
MatemáticasUniversitarias Introductorias	Demana, Waits, Foley, Kennedy	Pearson	2009
Curso de Álgebra superior	A. G. Kurosch	LIMUSA	1987
Teoría de Ecuaciones	J.V. Uspensky	LIMUSA	1987

Tabla 5.1.2 Textos fuentes del Significado de Referencia.

El análisis semiótico permitirá identificar el sistema de entidades que se ponen en juego en el estudio de polinomios y se basará en la descomposición del texto en las unidades mencionadas. El criterio para definir las unidades de análisis es considerar cada punto del contenido temático del programa como una unidad elemental.

El *Significado Institucional de Referencia* en esta investigación comprende al sistema de prácticas y configuraciones de objetos que se promueven para el tema de polinomios (objeto matemático), en el programa oficial y en los textos referidos en la tabla 5.1.2.

A continuación se muestran los sistemas de prácticas y configuraciones de objetos para cada una de las unidades de análisis.

Unidad de análisis U_1: Resolución algebraica de ecuaciones de segundo y tercer grado.

Lenguaje:

Términos y expresiones:
Ecuaciones, incógnita, ecuaciones de segundo grado, ecuaciones de tercer grado, resolución algebraica de ecuaciones, calcular raíces, raíces reales, raíces complejas, métodos algebraicos, ecuación cuadrática, ecuación cúbica, completando el cuadrado, fórmula general, discriminante, parábola, puntos de intersección, fórmulas de Cardano.

Algebraico:

$ax^2 + bx + c = 0$,$(x - x_1)(x - x_2) = 0$,$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, x^3 + px + q = 0, x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\Delta}} - \frac{a}{3}$,

Donde,

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3, p = \frac{3b - a^2}{3}, q = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27}. x = u + v,$$

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}, \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Gráfico:

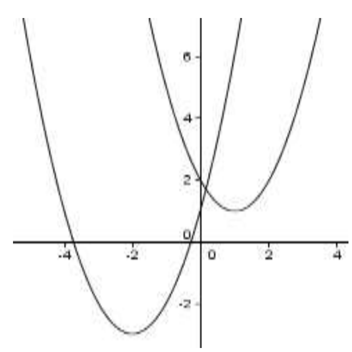


Figura 5.1.1 Representación gráfica de cuadráticas
Raíces real o compleja.

Tabular:

x	$P(x) = x^2$	$P(x) = 2x^2$	$P(x) = (x - 3)^2$

-1	1	2	16
0	0	0	9
1	1	2	4
2	4	8	1
3	9	18	0
4	16	32	1
5	25	50	4
6	36	72	9

Tabla 5.1.3 Representación tabular de funciones cuadráticas.

Situaciones problema:

Resolver algebraicamente ecuaciones de segundo grado con una incógnita,

Resolver algebraicamente ecuaciones de tercer grado con una incógnita,

Encontrar la intersección de una parábola (con eje vertical) con el eje x.

Resolver problemas extra matemáticos usando ecuaciones cuadráticas.

Definiciones y conceptos:

Solución algebraica de ecuaciones, ecuaciones de segundo grado, ecuaciones de tercer grado, funciones cuadráticas y cúbicas, raíces, raíces reales, raíces complejas.

Procedimientos:

Factorización de expresiones algebraicas de segundo y tercer grado, despejar la incógnita en una ecuación dada, completar el trinomio cuadrado perfecto para resolver ecuaciones de segundo grado, uso de la fórmula general para ecuaciones cuadráticas y uso de las fórmulas de Cardano para resolver ecuaciones de tercer grado.

Proposiciones:

Si r y s son números reales, entonces $rs = 0$ si y sólo si $r = 0$ ó $s = 0$.

Una ecuación cuadrática puede resolverse mediante la fórmula general.

Una ecuación cúbica puede resolverse mediante las fórmulas de Cardano.

Argumentos:

Probar que la fórmula general proporciona la solución de cualquier ecuación cuadrática.

Probar que las fórmulas de Cardano proporcionan las raíces de las ecuaciones cúbicas.

Justificar que un número es raíz de una ecuación cuadrática o cúbica.

En esta unidad de análisis, como en la mayoría de ellas, se presenta un alto porcentaje de su contenido mediante un lenguaje algebraico. En buena medida está presente el lenguaje verbal para expresar los términos y expresiones, los conceptos y definiciones, los procedimientos, proposiciones y los argumentos. Tanto el lenguaje gráfico como el tabular se utilizan muy poco. Las situaciones problema básicamente consisten en resolver algebraicamente ecuaciones de segundo y tercer grado, y los contextos extra-matemáticos son escasos; los procedimientos utilizados para lograrlo son la factorización, el despeje de la incógnita, completar el cuadrado, el uso de la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado y las fórmulas de Cardano para resolver ecuaciones de tercer grado. Los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí. Las fórmulas de Cardano se utilizan para mostrarlas limitaciones de los métodos algebraicos cuando se resuelven ecuaciones de grado mayor que dos.

Unidad de análisis U_2: Polinomios de grado n en una variable.

Lenguaje:

Términos y expresiones: Polinomio de grado *n*, función polinomial, variable, raíces de polinomios, raíces reales, raíces racionales, raíces complejas, cero de un polinomio. Derivada de un polinomio, multiplicidad de raíces, construcción de un polinomio de grado *n* a partir de sus raíces. División de polinomios, división sintética, residuo, factor, cociente, factorización, números complejos conjugados.

Algebraico:

Representación algebraica de polinomios de grado *n*,

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, n \geq 1, a_n \neq 0.$$

O en la forma

$$p(x) = a_n (x-r)^k \, q(x),$$

Donde *r* es una raíz de multiplicidad k del polinomio $p(x)$ y $q(x)$ es un factor de $p(x)$.

$p(x) = (x-r)Q(x) + R.$

$p(x) = (x-r)Q(x).$

$p(x) = a_n(x-r_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n), \quad a_n \neq 0.$

La derivada de $p(x)$ está dada por

$$p'(x) = n\, a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1.$$

$$z = a + bi, \qquad \bar{z} = a - bi.$$

Gráfico:

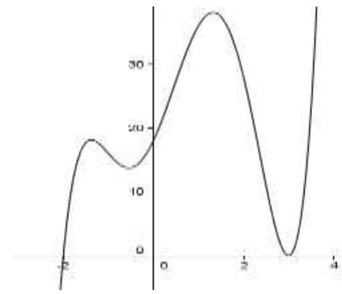


Figura 5.1.2 Representación gráfica de polinomios.Raíz real o compleja.

Situaciones problema:

Obtención de raíces reales y/o complejas no reales de un polinomio de grado n.

Construir un polinomio de grado n a partir de sus raíces.

Determinar la multiplicidad de una raíz x_0 de un polinomio de grado n.

Factorización de polinomios.

Relacionar las raíces de un polinomio con sus coeficientes.

Definiciones y conceptos:

Variable, polinomio de grado n en una variable, función polinomial, grado de un polinomio, raíces reales, raíces complejas, raíces complejas conjugadas, derivada de un polinomio, multiplicidad de una raíz.

Procedimientos:

Evaluación de polinomios.Calcular la derivada de un polinomio de grado n.

Dividir un polinomio de grado n entre un binomio de la forma $x - x_0$ o un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$.

División sintética.Producto de polinomios de grado uno y dos. Desarrollo de potencias de polinomios de grado uno.

Factorización de polinomios.Uso de las Fórmulas de Vieta.

Proposiciones:

Si z_0 es una raíz compleja de un polinomio $p(x)$ con coeficientes reales, entonces su conjugado $\bar{z}_0$ también es raíz de $p(x)$.

Si x_0 es una raíz de multiplicidad $k > 1$ de un polinomio $p(x)$ entonces x_0 es una raíz de multiplicidad $k - 1$ de la derivada de $p(x)$.

Si x_0 es una raíz de multiplicidad k de un polinomio $p(x)$ entonces $(x - x_0)^k$ es factor de $p(x)$, pero $(x - x_0)^{k+1}$ no lo es.

Teorema del residuo: Si $p(x)$ es un polinomio y r es un número, entonces $p(x)$ dividido entre $x - r$, produce un residuo $p(r)$.

Teorema del factor: Si $p(x)$ es un polinomio y r es un número, entonces $p(x)$ tiene a $x - r$como factor si y sólo si $P(r) = 0$.

Si $p(x)$ es un polinomio con coeficientes complejos que está definido por

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, n \geq 1, a_n \neq 0.$$

Entonces

$$p(x) = a_n (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$$

Donde cada r_i $(i = 1,2, \cdots, n)$ es una raíz compleja de $p(x)$.

Teorema de raíces racionales: Suponer que

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Donde $a_0, a_1, \cdots, a_n$ son enteros. Si $\frac{p}{q}$, en términos mínimos, es un número racional y un cero de p, entonces q es un factor entero de a_0 y q es un factor entero de a_n.

Fórmulas de Vieta: Sea $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ un polinomio de grado n cuyo coeficiente principal es igual a 1, y sean $r_1, r_2, \cdots, r_n$ sus raíces. Entonces los coeficientes del polinomio pueden expresarse en términos de sus raíces mediante:

$a_1 = -(r_1 + r_2 + \cdots + r_n)$,

$a_2 = (r_1 r_2 + r_1 r_3 + \cdots + r_1 r_n) + (r_2 r_3 + \cdots + r_2 r_n) + \cdots + r_{n-1} r_n$,

$a_3 = -(r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \cdots + r_{n-2} r_{n-1} r_n)$,

$a_{n-1} = (-1)^{n-1} (r_1 r_2 \cdots r_{n-1} + r_1 r_2 \cdots r_{n-2} r_n + \cdots + r_2 r_3 \cdots r_n)$,

$a_n = (-1)^n (r_1 r_2 \cdots r_n)$.

Argumentos:

Justificación de las proposiciones enunciadas anteriormente.

En esta unidad semiótica el lenguaje verbal expresa términos directamente relacionados con el objeto matemático *polinomio*, como lo son: raíces, ceros, división, factor, cociente, entre otros. El lenguaje algebraico está presente en las restantes entidades. Los procedimientos conducen a resolver las situaciones problema que consisten, básicamente, en obtener las raíces de polinomios y sus multiplicidades, factorización de polinomios, y realizar la operación inversa que consiste en construir un polinomio conociendo sus raíces. Los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan las definiciones entre sí.

Unidad de análisis U_3: Representación gráfica de un polinomio y sus raíces reales.

Lenguaje:

Términos y expresiones: Representación gráfica de un polinomio, raíces simples, raíces múltiples, representación algebraica de un polinomio, funciones reales de variable real, articulación de la representación gráfica y algebraica de un polinomio, estimación gráfica de raíces.

Algebraico: $p(x) = (x - x_0)^{k_1}(x - x_1)^{k_2} \cdots (x - x_s)^{k_r}$, donde $x_0, x_1, \cdots x_s$ son las raíces de $p(x)$ y $k_1, k_2, \cdots, k_r \in N$.

Gráfico:

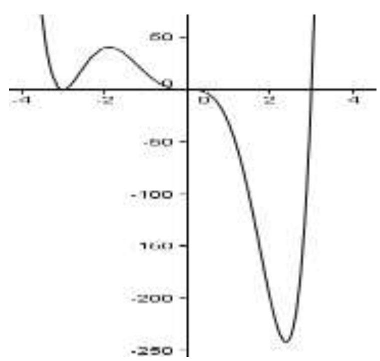


Figura 5.1.3 Representación gráfica de polinomios.
Raíces simples, raíces múltiples.

Situaciones problema:

Graficar polinomios como funciones reales de variable real.

Estimar gráficamente cada una de las raíces reales de un polinomio.

Articular la representación gráfica y algebraica de un polinomio.

Determinar el grado de un polinomio a partir de su forma algebraica factorizada.

Determinar el grado de un polinomio a partir de sus raíces.

Definiciones y conceptos:

Raíces simples, raíces múltiples, funciones reales de variable real.

Procedimientos:

Graficar polinomios como funciones reales de variable real. Obtención de raíces de funciones polinomiales.

Estimar gráficamente cada una de las raíces reales de un polinomio.

Articular la representación gráfica y algebraica de un polinomio.

Proposiciones:

Si x_0 es una raíz real del polinomio representado por $p(x)$ entonces, el punto $(x_0, 0)$ es la intersección de la gráfica de $p(x)$ con el eje de las abscisas.

Si x_0 es una raíz de multiplicidad $k > 1$ de un polinomio $p(x)$ entonces $(x - x_0)^k$ es factor de $p(x)$, pero $(x - x_0)^{k+1}$ no lo es.

Si $p(x)$ tiene un factor$(x - c)^k$ donde c es real y *k*es un entero positivo. Entonces

Si *k* es impar, la gráfica cruza al eje de las abscisas en$x = c$.

Si *k* es par, la gráfica toca el eje de las abscisas en $x = c$ pero no lo cruza.

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 n \geq 1$, la representación algebraica de un polinomio de grado n, entonces:

Si *n* es par y $a_n > 0$, el recorrido es el intervalo $[m, \infty)$donde *m* es el valor mínimo de $p(x)$.

Si *n* es par y $a_n < 0$, el recorrido es el intervalo $(-\infty, M]$, donde M es el valor máximo de $p(x)$.

Si *n* es impar, el recorrido es el conjunto de los números reales $(-\infty, \infty)$. En este caso no existe un valor máximo o mínimo.

Argumentos:

Justificación de la validez de la proposición anteriormente enunciada.

Está presente el lenguaje gráfico y el algebraico, ya que, la situación consiste básicamente en articular la representación algebraica y gráfica de un polinomio, tomando como base para ello las raíces del polinomio, ya sea algebraica o gráficamente. Las proposiciones validan las acciones encaminadas a articular la representación gráfica y algebraica de un polinomio. Y los argumentos justifican a estas acciones y proposiciones, que relacionan los conceptos entre sí.

Unidad de análisis U_4: Representación gráfica de las raíces complejas de un polinomio.

Lenguaje:

Términos y expresiones: Representación gráfica, raíces complejas, polinomio, número total de raíces, grado de un polinomio.

Algebraico:

$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, z = x + iy, \ \ \bar{z} = x - iy.$

$p(x+iy) = a_n(x+iy)^n + a_{n-1}(x+iy)^{n-1} + \cdots + a_1(x+iy) + a_0.$

$p(z) = u(x,y) + i\, v(x,y),$

$u(x,y) = 0 \text{y} v(x,y) = 0.$

Donde $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son polinomios en las indeterminadas *x* y *y*.

Gráfico:

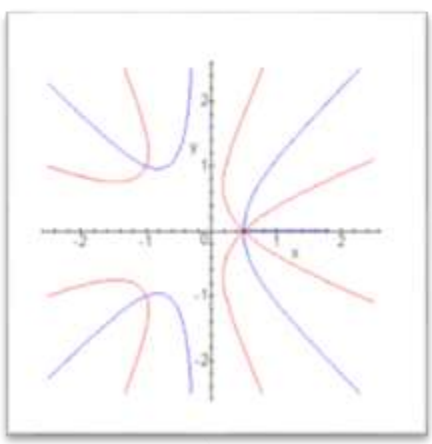


Figura 5.1.4 Representación gráfica de las raíces complejas o no complejas de un polinomio.

Situaciones problema:

Representar graficamente las raíces complejas de un polinomio.

Establecer la relación existente entre el número total de raíces de un polinomio y su grado.

Definiciones y conceptos:

Raíces complejas de un polinomio, números complejos conjugados, grado de un polinomio.

Procedimientos:

Evaluación de un polinomio en un número complejo genérico, separación de la parte real y parte imaginaria de polinomio evaluado.

Graficar con software, en el plano complejo, todas las raíces de un polinomio.

Proposiciones:

Todo polinomio de grado *n* tiene exactamente *n* raíces.

Si p(x) es un polinomio con coeficientes complejos que está definido por

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $n \geq 1$, entonces

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n) a_n \neq 0$$

donde cada r_i $(i = 1,2, \cdots, n)$ es un cero complejo de $p(x)$.

Argumentos:

Justificar la validez de la proposición inmediata anterior.

De las fuentes consultadas las únicas que hacen referencia a esta unidad de análisis son el programa oficial de la materia y el texto "*Polinomios y raíces: una presentación gráfica*" (Soto J. L, 2003). La situación consiste en representar gráficamente las raíces complejas de un polinomio y para ello se propone usar un software. Para dar solución a esta situación, primero se lleva a cabo un procedimiento algebraico, que consiste básicamente en suponer que las raíces del polinomio $p(z)$ son de la forma $z = x + iy$, para después evaluar $p(z) = p(x + iy)$, desarrollando esta última expresión y agrupando términos se puede obtener la expresión $p(z) = p(x + iy) = u(x, y) + i\, v(x, y)$, donde $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son funciones en las indeterminadas x y y. Las raíces del polinomio $p(z)$ se obtienen para los (x, y) que satisfacen $u(x, y) = 0$ y $v(x, y) = 0$. El procedimiento continúa al representar gráficamente las expresiones $u(x, y) = 0$ y $v(x, y) = 0$ en el plano complejo. Los puntos (x, y) que satisfacen simultáneamente ambas ecuaciones, aparecerán como intersección de estas curvas, obteniendo de esta forma las raíces del polinomio.

Unidad de análisis U_5: Teorema Fundamental del álgebra.

Lenguaje:

Términos y expresiones: Teorema fundamental del álgebra, polinomios, coeficientes complejos, raíces complejas, número total de raíces, grado de un polinomio.

Algebraico:

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

$$p(x) = a_n(x - r_1)\, q(x) a_n \neq 0$$

$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n) a_n \neq 0.$

Situaciones problema:

Enunciar la relación existente entre el número de raíces de un polinomio y su grado, la cual se determinó en la unidad U_4.

Definiciones y conceptos:

Polinomios con coeficientes complejos, grado de un polinomio, raíces complejas.

Procedimientos:

Analizar y expresar verbalmente la relaciónexistente entre el número de raíces de un polinomio y su grado, la cual se determinó en la unidad U_4.

Proposiciones:

Todo polinomio de grado *n* tiene exactamente *n* raíces.

Teorema fundamental del álgebra: Si un polinomio $p(x)$ tiene grado positivo y coeficientes complejos, entonces $p(x)$ tiene al menos unaraíz compleja.

Argumentos:

Justificar la validez del Teorema fundamental del álgebrarelacionándolos con casos particulares.

En esta unidad de análisis los objetos matemáticos primarios: proposición y argumentos, juegan un rol importante. Debido a que, la situación consiste en enunciar y justificar el

Teorema fundamental del álgebra. Está presente el lenguaje verbal y el algebraico, para enunciar los conceptos, los teoremas y sus argumentos. En las fuentes citadas se encuentra que el Teorema fundamental del álgebra se enuncia de dos formas diferentes, como se muestra en la descripción del objeto matemático en esta unidad de análisis.

Unidad de análisis U_6: Regla de Descartes para la separación de raíces.

Lenguaje:

Términos y expresiones: Regla de Descartes, separación de raíces. Variaciones de signo, coeficientes de un polinomio, número de raíces reales. Número total de raíces, número de raíces positivas y negativas.

Algebraico:

$p(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x + 1;$

$$+, -, -, +$$

Gráfico:

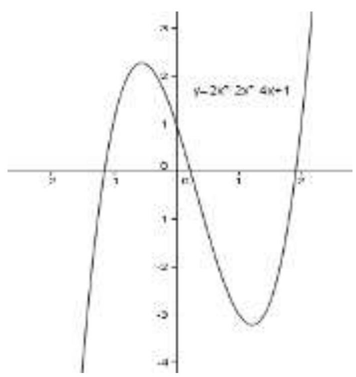


Figura 5.1.5 Raíces positivas o negativas de polinomios.

Situaciones problema:

Determinar el número de cambios de signo en un polinomio.

Determinar la relación existente entre $p(x)$ y $p(-x)$.

Explorar las posibles distribuciones del número total de raíces positivas, negativas y complejas no reales de un polinomio a partir de sus variaciones de signo.

Definiciones y conceptos:

Variaciones de signo de los coeficientes de un polinomio, raíces positivas, raíces negativas y raíces complejas no reales.

Procedimientos: (acciones)

Dado un polinomio $p(x)$ determinar $p(-x)$.

Comparación del signo de dos coeficientes contiguos en un polinomio ordenado de acuerdo a las potencias de la variable.

Contar los cambios de signo entre coeficientes contiguos.

Proposiciones:

Regla de Descartes para la separación de raíces de un polinomio.

Argumentos:

Justificar la validez de la regla de Descartes para la separación de raíces de un polinomio.

La situación que aquí se presenta tiene el fin de discriminar la naturaleza de las raíces de un polinomio. El uso del teorema de Descartes, también llamado regla de los signos de Descartes, es el objeto matemático clave para cumplir con tal fin. Dicho teorema relaciona el concepto de cambios de signo de un polinomio y al procedimiento que conlleva a discriminar la naturaleza de las raíces.

Unidad de análisis U_7: Método de bisección para aproximar raíces.

Lenguaje:

Términos y expresiones: Polinomio, método de bisección, aproximar raíces irracionales.

Algebraico: $a_n \leq p_n \leq b_n$

$$p_n = \frac{a_n + b_n}{2} a_{n+1} = \begin{cases} a_n & si\ f(a_n) \cdot f(p_n) < 0 \\ p_n & si\ f(a_n) \cdot f(p_n) > 0 \end{cases}, b_{n+1}$$
$$= \begin{cases} b_n & si\ f(b_n) \cdot f(p_n) < 0 \\ p_n & si\ f(b_n) \cdot f(p_n) > 0 \end{cases}$$

Donde los valores iniciales vienen dados por:

$$a_0 := a, \quad b_0 \coloneqq b.$$

Gráfico:

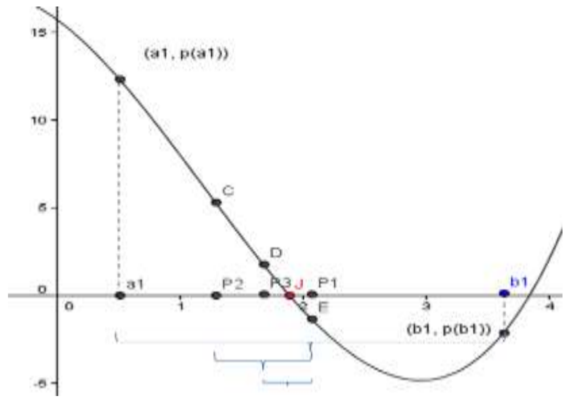


Figura 5.1.6 Método de bisección.

Situaciones problema:

Aproximar las raíces irracionalesde multiplicidad impar de un polinomio mediante el uso del método de bisección.

Definiciones y conceptos:

Raíz irracional de un polinomio.

Procedimientos:

Evaluación de polinomios, método de bisección.

Proposiciones:

Si $p(x)$ denota un polinomio con coeficientes reales y si a y b son números reales tales que $p(a)$ y $p(b)$ son de signos opuestos, entonces el polinomio $p(x)$ tiene al menos una raíz real entre a y b. (Caso particular de teorema del valor intermedio).

Argumentos:

Justificar la validez del método de bisección para estimar raíces reales de polinomios.

El procedimiento, aquí llamado método de bisección, está relacionado directamente con la proposición que lo justifica, y ambos relacionan los conceptos: raíces irracionales, aproximación de raíces, polinomios, entre otros. El lenguaje que se presenta es el verbal, algebraico, gráfico y el numérico tabular como un objeto emergente para esta práctica.

Resumen de los elementos básicos del Significado Institucional de Referencia.

A continuación se presenta un resumen delos elementos básicos del significado institucional de referenciaasociados al tema de polinomios.

<table>
<tr><td colspan="2">Situaciones-problema:
– Resolver algebraicamente ecuaciones de segundo y tercer grado.
– Representar gráficamente polinomios de grado n.
– Factorizar polinomios de grado n.
– Obtener las raíces reales y/o complejas de un polinomio de grado n.
– Construir un polinomio de grado n a partir de sus raíces.
– Articular la representación gráfica y algebraica de un polinomio.
– Determinar el grado de un polinomio.
– Determinar las raíces racionales de un polinomio.
– Representar gráficamente las raíces complejas de un polinomio.
– Explorar las posibles distribuciones del número total de raíces positivas, negativas y complejas no reales de un polinomio a partir de sus variaciones de signo.
– Aproximar las raíces irracionales de un polinomio.</td></tr>
<tr><td>Lenguaje:
– Natural
– Algebraico
– Gráfico
– Tabular (en mucha menor medida).</td><td>Definiciones y conceptos:
Ecuación, ecuación cuadrática, fórmula general, ecuación cúbica, Fórmulas de Cardano, solución de una ecuación, raíces de ecuaciones, raíces reales, raíces complejas, polinomio de grado n, grado de un polinomio, ceros de polinomios, Fórmulas de Vieta, factorización de polinomios, división de polinomios, división sintética, cociente, residuo, factores lineales, factores cuadráticos, gráfica de un polinomio, derivada de un polinomio, multiplicidad de raíces, variaciones de signo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Procedimientos:
Utilizar la fórmula general; utilizar las fórmulas de Cardano; dividir polinomios; multiplicar polinomios; evaluar polinomios; división sintética; construir un polinomio de grado n a partir de sus raíces; graficar polinomios como funciones reales de variable real; articular las expresiones algebraica y gráfica de un polinomio;Usar la relación existente entre $p(x)$, $p(-x)$ y $-p(x)$; contar los cambios de signo entre coeficientes contiguos; utilizar el método de bisección.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Proposiciones:
– Si r y s son números reales, entonces $rs = 0$ sí y sólo si $r = 0$ ó $s = 0$.
– La fórmula general conduce a la solución de una ecuación cuadrática.
– Las Fórmulas de Cardano conducen a la solución de una ecuación cúbica.
– Si z_0 es una raíz compleja de un polinomio $p(x)$ con coeficientes reales, entonces su conjugado $\bar{z}_0$ también es raíz de $p(x)$.
– Si x_0 es una raíz de multiplicidad $k > 1$ de un polinomio $p(x)$ entonces x_0 es una raíz de multiplicidad $\mathrm{k} - 1$ de la derivada de $p(x)$.
– Si x_0 es una raíz de multiplicidad $k > 1$ de un polinomio $p(x)$entonces $(x - x_0)^k$ es factor de $p(x)$, pero $(x - x_0)^{k+1}$ no lo es.
– Teorema del factor.
– Teorema del residuo.
– Si p(x) es un polinomio con coeficientes complejos que está definido por
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, n \geq 1, a_n \neq 0.$$
Entonces, $p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$
Donde cada r_i $(i = 1,2,\cdots,n)$ es una raíz compleja de $p(x)$.
– Teorema de raíces racionales.
– Si x_0 es una raíz real del polinomio representado por $p(x)$ entonces, el punto $(x_0, 0)$ es la intersección de la gráfica de $p(x)$ con el eje de las abscisas.
– Si $p(x)$ tiene un factor $(x - c)^k$ donde c es real y k es un entero positivo. Entonces
1) Si k es impar, la gráfica cruza al eje de las abscisas en x=c.
2) Si k es par, la gráfica toca el eje de las abscisas en x=c pero no lo cruza.</td></tr>
</table>

- Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, n \geq 1$, la representación algebraica de un polinomio de grado *n*, entonces:
  3) Si *n* es par y $a_n > 0$, el recorrido es el intervalo $[m, \infty)$ donde *m* es el valor mínimo de $p(x)$.
  4) Si *n* es par y $a_n < 0$, el recorrido es el intervalo $(-\infty, M]$, donde *M* es el valor máximo de $p(x)$.
  5) Si *n* es impar, el recorrido es el conjunto de los números reales $(-\infty, \infty)$. En este caso no existe un valor máximo o mínimo.
- Teorema fundamental del álgebra: Si un polinomio $p(x)$ tiene grado positivo y coeficientes complejos, entonces $p(x)$ tiene al menos un cero complejo.
- Todo polinomio de grado *n* tiene exactamente *n* raíces complejas.
- Regla de Descartes para la separación de raíces de un polinomio.
- Fórmulas de Vieta.
- Si $p(x)$ denota un polinomio con coeficientes reales y si a y b son números reales tales que $p(a)$ y $p(b)$ son de signos opuestos, entonces el polinomio $p(x)$ tiene al menos una raíz real entre a y b.

Argumentos:

- Justificación de la validez de las proposiciones antes enunciadas.

Tabla 5.1.4 Elementos básicos del significado del tema Polinomios de la asignatura Álgebra.

Generalmente, la actividad matemática en los textos analizados parte de conceptos o definiciones, seguido en ocasiones de procedimientos o de proposiciones, que se utilizan (aplican) para resolver las situaciones que se plantean posteriormente. Las prácticas identificadas como *procedimientos* son las que más se promueven, por lo que se puede afirmar que el *significado institucional de referencia* de polinomios tiene una fuerte carga de práctica procedimental. De igual manera, la situación propuesta en el programa oficial de la asignatura, que consiste en articular la representación algebraica y gráfica de polinomios, es una práctica poco presente en los textos.

4.2 Significado institucional pretendido.

El significado institucional pretendido en esta investigación comprende al sistema de prácticas y configuraciones de objetos que se planifican para polinomios, durante el desarrollo del curso de la asignatura Álgebra, usando al sistema en línea Maple T.A. En el caso que nos ocupa, se pretende que los estudiantes realicen todas las tareas sobre polinomios que aparecen en el sistema Maple T.A., por lo cual se ha considerado pertinente determinar los objetos matemáticos y los sistemas de prácticas que se promueven utilizando dicho sistema.

El significado institucional pretendido se determina mediante el análisis del contenido de losbancos de reactivos del sistema Maple T.A., correspondientes a ECUACIONES DE SEGUNDO Y TERCER GRADO y a POLINOMIOS, que han sido incluidos en tareas o actividades en línea. Una vez que estas tareas se han realizado por los estudiantes, éstas pasan a ser una fuente para la determinación del significado institucional implementado. El sistema cuenta con nueve tareas, cada una con un número variado de reactivos. Los bancos de reactivos del Maple T.A. se muestran en la Figura 5.2.1.

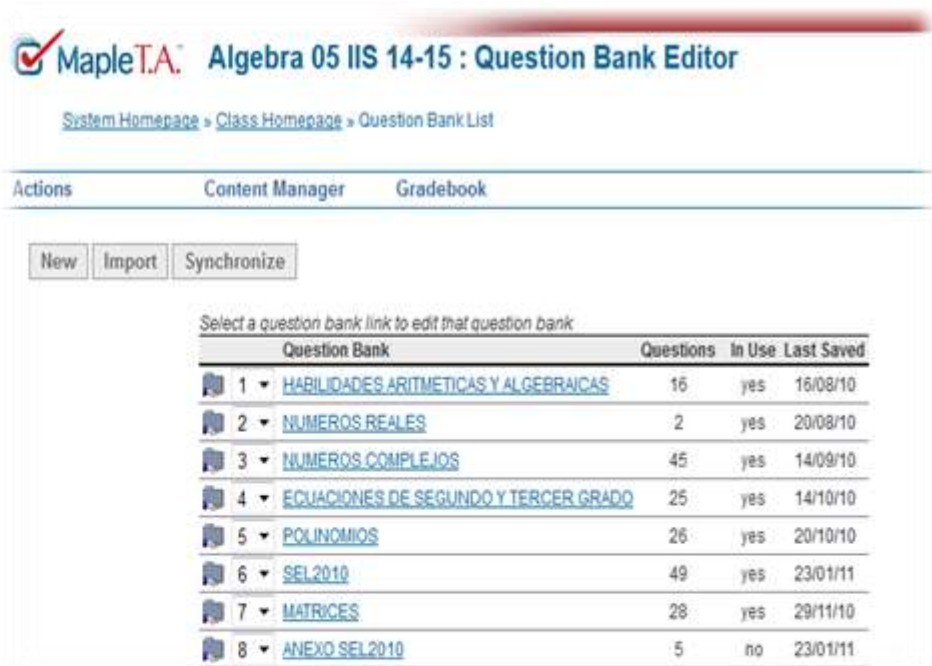


Figura 5.2.1 Bancos de reactivos en el Maple T.A.

A partir de los bancos de reactivos, se diseñaron diferentes tipos de tareas: *prácticas anónimas* (Practice), *tareas registradas* (Homework/Quiz) y *exámenes departamentales supervisados* (Proctored), las cuales se definieron en la sección 1.3. Durante la implementación de estas tareas se recomienda al estudiante realizar en primertérmino las *prácticas anónimas,* ya que éstas las puede realizar el número de veces que desee, recibiendo retroalimentación inmediata y sin dejar registro de las puntuaciones obtenidas. Una vez que el estudiante ha llevado a cabo con éxito las *prácticas anónimas* puede iniciar con las *tareas registradas*, cada una de las cuales podrá realizar hasta tres veces. Los reactivos que forman las tareas llamadas *prácticas anónimas* son del mismo tipo que los reactivos que forman las *tareas registradas.*

En la Figura 5.2.2 se muestran dichas tareas para los temas que nos ocupan, ECUACIONES DE SEGUNDO y TERCER GRADO, y POLINOMIOS.

SOLUCION DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO (PRACTICA ANONIMA)	10.0	Practice	Unlimited	
SOLUCION DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO	10.0	Homework/Quiz	Unlimited	policies
REPRESENTACIONES GRAFICAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO (PRACTICA ANONIMA)	10.0	Practice	Unlimited	
REPRESENTACIONES GRAFICAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO	10.0	Homework/Quiz	Unlimited	policies
CONSTRUCCION DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO (PRACTICA ANONIMA)	10.0	Practice	Unlimited	
CONSTRUCCION DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO	10.0	Homework/Quiz	Unlimited	policies
FORMULA DE CARDANO (PRACTICA ANONIMA)	10.0	Practice	Unlimited	
FORMULA DE CARDANO	10.0	Homework/Quiz	Unlimited	policies
RAICES Y FACTORES DE ECUACIONES (PRACTICA ANONIMA)	10.0	Practice	Unlimited	
RAICES Y FACTORES DE ECUACIONES	10.0	Homework/Quiz	Unlimited	policies
FACTORIZACION DE ECUACIONES (PRACTICA ANONIMA)	10.0	Practice	Unlimited	policies
FACTORIZACION DE ECUACIONES	10.0	Homework/Quiz	Unlimited	policies
POLINOMIOS Y FACTORES (PRACTICA ANONIMA)	10.0	Practice	Unlimited	
POLINOMIOS Y FACTORES	10.0	Homework/Quiz	Unlimited	
GRAFICAS Y POLINOMIOS (PRACTICA ANONIMA)	10.0	Practice	Unlimited	
GRAFICAS Y POLINOMIOS	10.0	Homework/Quiz	Unlimited	
RELACION ENTRE RAICES DE POLINOMIOS (PRACTICA ANONIMA)	10.0	Practice	Unlimited	
Copy of RELACION ENTRE RAICES DE POLINOMIOS (PRACTICA ANONIMA)	10.0	Practice	Unlimited	
RELACION ENTRE RAICES DE POLINOMIOS	10.0	Homework/Quiz	Unlimited	
SIMULACRO EXAMEN DEPARTAMENTAL POLINOMIOS	10.0	Practice	Unlimited	
EXAMEN DEPARTAMENTAL POLINOMIOS	10.0	Proctored	Unlimited	

Figura 5.2.2 Tareas de ecuaciones y polinomios.

Los tipos de reactivos que forman las tareas, según la forma en la que se debe dar la respuesta, pueden ser de opción múltiple con una o más respuestas correctas, completar enunciados, valorar un enunciado como falso o verdadero, de relacionar, respuestas abiertas, entre otros. A continuación se muestran ejemplos de reactivos con diferentes tipos de respuestas.

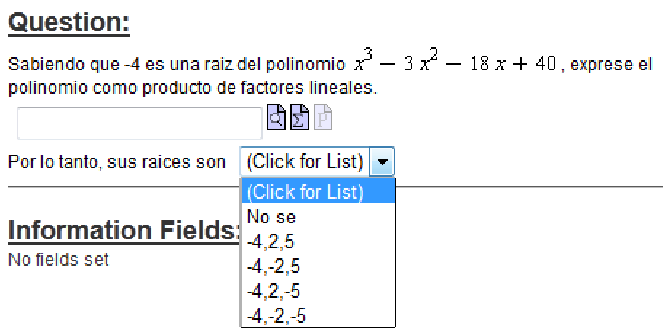


Figura 5.2.3 Reactivo con respuesta directa y de opción múltiple

Un elemento importante en el *significado institucional pretendido*,que eventualmente pasará a formar partedel *implementado*, es la sintaxis que se debe utilizar en el sistema para dar respuesta al reactivo, principalmente cuando se trata de respuestas abiertas. En el reactivo que se muestra en la Figura 5.2.3 el estudiante debe dar dos respuestas, la primera es abierta, mientras que en la segunda debe seleccionar una de las cinco opciones dadas. El problema de sintaxis puede presentarse en la respuesta abierta, ya que, el estudiante debe escribir un producto de factores lineales.

En el reactivo que se muestra en la Figura 5.2.4 el estudiante debe saber hacer división sintética en Maple T.A. llenando los espacios en blanco con los coeficientes del polinomio y del divisor, para después, realizar la división sintética. También debe identificar los coeficientes del polinomio cociente y el residuo. En la segunda parte debe escribir respuestas abiertas semejantes a las que se presentan en el reactivo de la Figura 5.2.3.

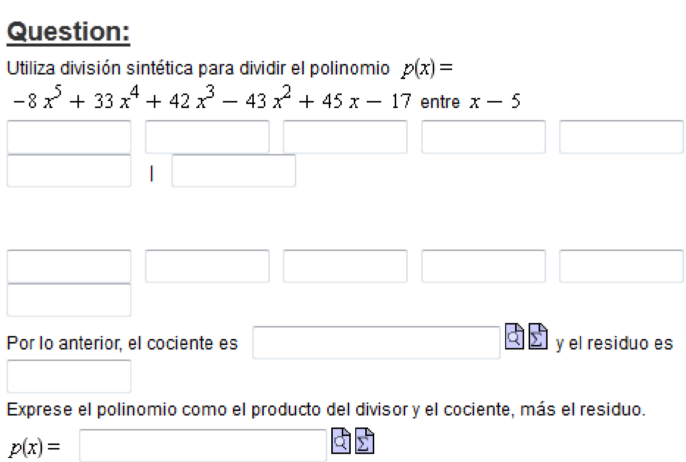


Figura 5.2.4 Reactivo con respuestas de rellenar espacios y respuestas abiertas

Otro caso es el que se muestra en la Figura 5.2.5.

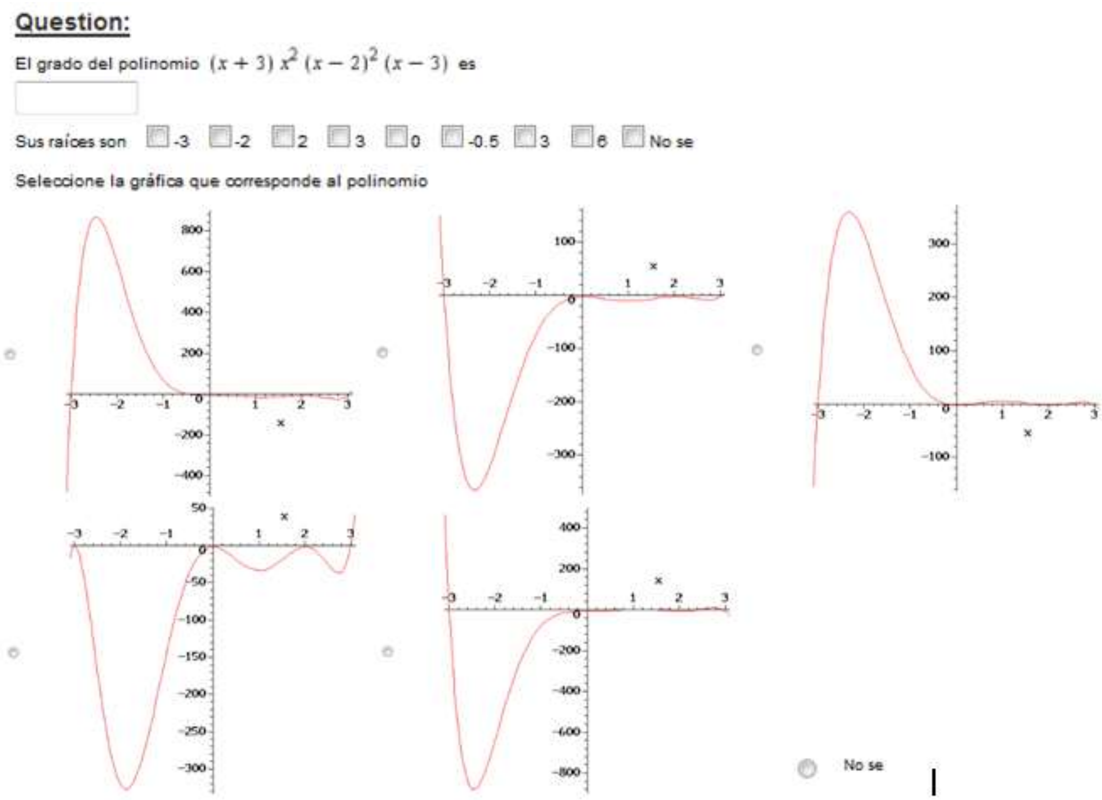


Figura 5.2.5 Reactivo con tres tipos de respuesta

En el reactivo de la Figura 5.2.5 el estudiante debe responder una pregunta abierta, debe seleccionarlas raíces del polinomio dado en forma algebraica entre los valores dados, y seleccionar la representación gráfica del polinomio entre las seis opciones dadas.

Para describir el significado institucional de referencia en el capítulo anterior, el criterio para determinar las unidades de análisis fue tomar cada punto (tema) del programa oficial de la asignatura Álgebra como una unidad de análisis. En este caso para determinar el *significado institucional pretendido* el criterio para determinar las unidades de análisis es tomar cada tarea del Maple T.A. como una unidad de análisis, como se muestra en la Tabla 5.2.1.

Cada una de las tareas del Maple T.A. está formada por reactivos con un campo de problemas relacionado con una temática particular.

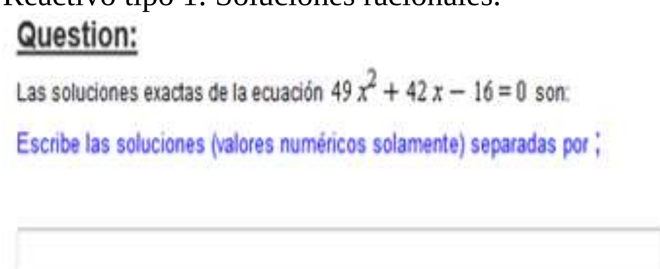
Unidad de análisis Tarea en Maple T. A.
U_1: Solución de ecuaciones de segundo grado
U_2: Representación gráfica de ecuaciones de segundo grado.
U_3: Fórmula de Cardano.
U_4: Construcción de ecuaciones de segundo grado.
U_5: Factorización de ecuaciones.
U_6: Raíces y factores de ecuaciones.
U_7: Polinomios y factores.
U_8: Gráficas y polinomios.
U_9: Relaciones entre raíces de polinomios.

Tabla 5.2.1. Unidades de análisis para determinar el Significado Institucional Pretendido.

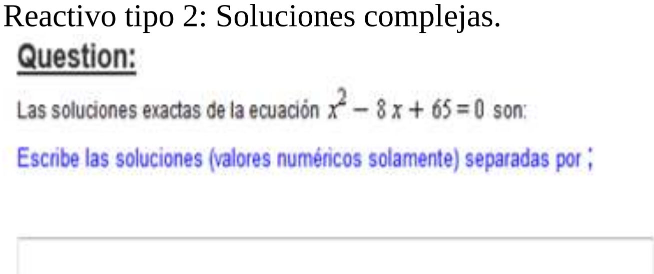
A continuación se muestra el análisis de cada una de las unidades semióticas (tareas). Cabe recordar que cada tarea está formada por cierto número de reactivos,los cuales se identifican mediante el nombre que se le asignó en el sistema y con un número.

Unidad U_1: Solución de ecuaciones de segundo grado.

Reactivo tipo 1: Soluciones racionales.



Reactivo tipo 2: Soluciones complejas.



Reactivo tipo 3: Soluciones cuadrática general.

Question:

Las soluciones exactas de la ecuación $-4\,x^2 - 6\,x + 1 = 0$ son:

Escribe las soluciones (valores numéricos solamente) separadas por ;

Situaciones problema:

Encontrar la solución de una ecuación cuadrática, $ax^2 + bx + c = 0$. En esta unidad semiótica, *U1*,los reactivos están diseñados con $a, b\ y\ c \in Z, a \neq 0$ y están clasificados en tres tipos, Reactivo tipo 1: las ecuaciones cuadráticas tienen soluciones racionales; Reactivo tipo 2: las ecuaciones cuadráticas tienen soluciones no reales o; Reactivo tipo 3: las ecuaciones tienen soluciones arbitrarias, generalmente incluyen radicales.

Lenguaje:

Términos y expresiones:

Solución de una ecuación, soluciones exactas, ecuación.

Algebraico:

$ax^2 + bx + c = 0, x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $a(x - r_1)(x - r_2) = 0$.

Sintaxis del sistema:

Uso de separadores, paréntesis y del símbolo * para ciertos productos, sqrt(*a*) para la raíz cuadrada de un número *a*.

Conceptos- definición:

Ecuación,solución de una ecuación, ecuación de segundo grado, factorización.

Procedimientos:

Factorización, despejar la incógnita, completar el cuadrado y uso de la fórmula general para ecuaciones cuadráticas.

Proposiciones:

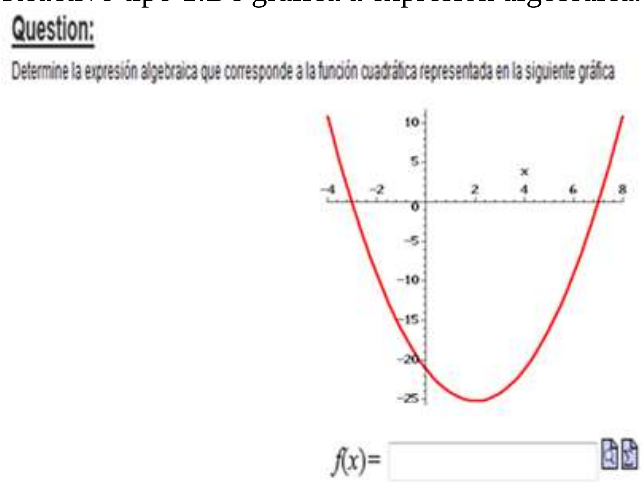
Si r y s son números reales, entonces $rs = 0$si y sólo si $r = 0$ ó $s = 0$.

La fórmula general conduce a la solución de una ecuación de segundo grado.

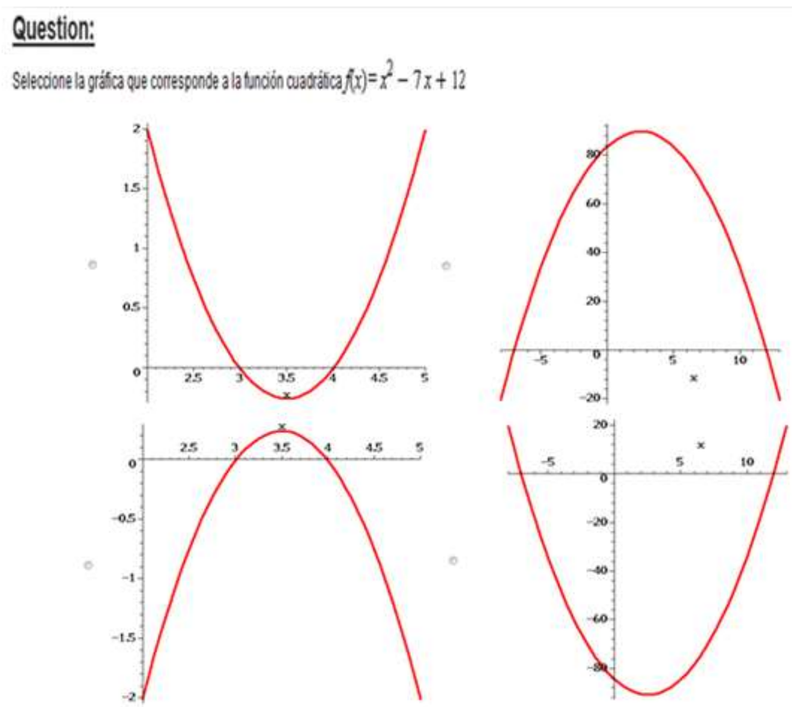
En esta unidad de análisis, *U₁*, la situación problema básicamente consiste en resolver ecuaciones cuadráticas. La situación se presenta mediante un lenguaje verbal y algebraico. Están presentes los conceptos: ecuación de segundo grado, solución de una ecuación. En esta unidad emergen objetos matemáticos como los procedimientos: factorización, el uso de la fórmula general, completar el cuadrado y despejar la incógnita, que conllevan a la solución de la situación problema; también emergen las proposiciones que avalan los procedimientos mencionados y la sintaxis propia del sistema al tratarse de preguntas abiertas que involucran números irracionales y complejos no reales que deben introducirse de manera exacta.

Unidad U_2: Representaciones gráficas de ecuaciones de segundo grado.

Reactivo tipo 1:De gráfica a expresión algebraica.



Reactivo tipo 2: De expresión algebraica a gráfica.



Situaciones problema:

Determinar la expresión algebraica que corresponde a la función cuadrática representada gráficamente. La expresión algebraica de la función cuadrática del reactivo tipo 1es de la forma $f(x) = (-1)^n(x-a)(x-b)$, con $n = 1, 2$ y, a y b números enteros.

Seleccionar la gráfica que corresponde a la función cuadrática dada en forma algebraica. La expresión algebraica dada en el reactivo tipo 2 es de la forma $f(x) = (-1)^n(x-a)(x-b)$, con $n = 1, 2$ y, a y b números enteros. Las cuatro opciones para elegir la respuesta correcta presentan las gráficas que corresponden a: $f(x), -f(x), (-1)^n\big(x-(a+b)\big)\big(x-(ab)\big)$, y a $-(-1)^n\big(x-(a+b)\big)\big(x-(ab)\big)$.

Lenguaje:

Términos y expresiones:

Expresión algebraica, función cuadrática, gráfica, intersección entre una parábola y los ejes coordenados.

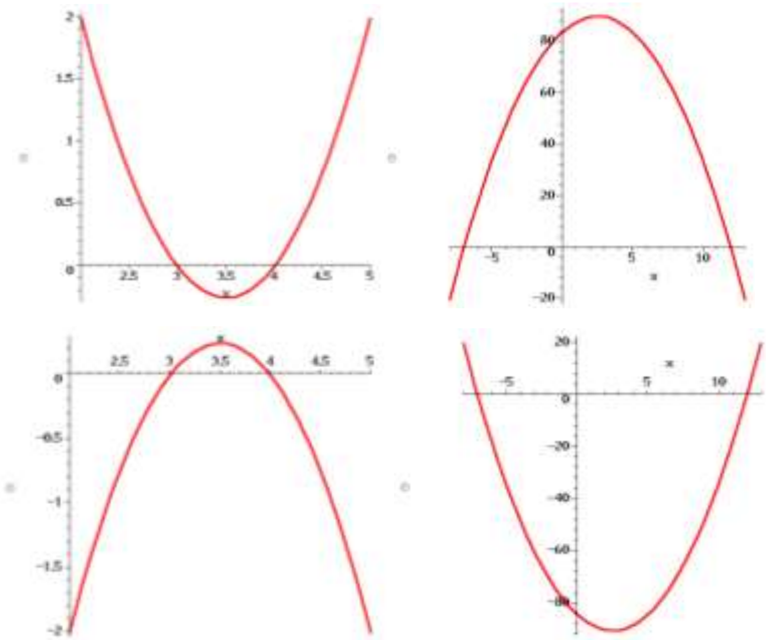
Algebraico:

$$f(x) = x^2 - 7x + 12.$$

Sintaxis de sistema:

Uso del símbolo ^ para indicar potencias.

Gráfico:



Conceptos-definición:

Función cuadrática, gráfica de una función, ceros de una función, solución de una ecuación cuadrática.

Procedimientos:

Articular elementosde la representación gráfica y algebraica de un polinomio de segundo grado.

Identificar las raíces reales y su multiplicidad en la gráfica.

Identificar la concavidad de la gráfica.

Sustituir las raíces r_1 y r_2 en la función $f(x) = (x - r_1)(x - r_2)$ o en $f(x) = -(x - r_1)(x - r_2)$ según la concavidad de la gráfica.

Realizar el producto de binomios y sumar términos semejantes.

Calcular las raíces de la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$.

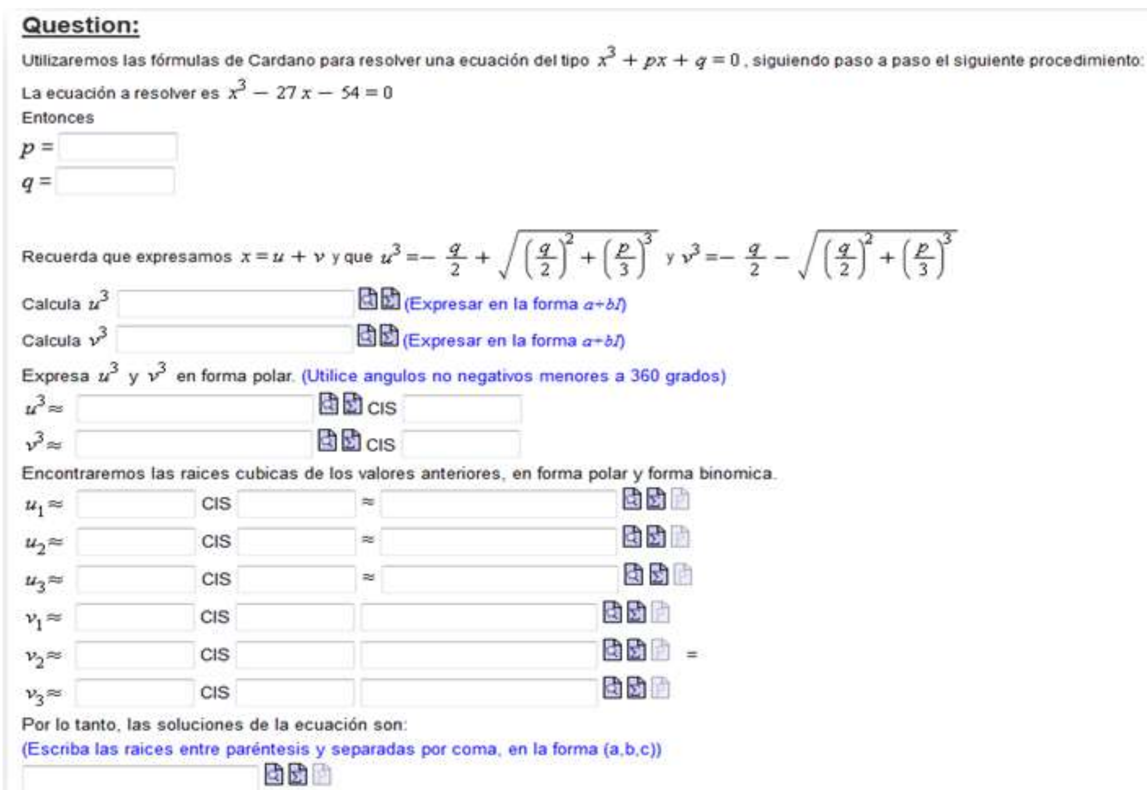
Identificar la intersección de la(s) parábola(s) con el eje de las y.

Proposición:

La gráfica de una función cuadrática en una variable es una parábola con eje vertical. Toda función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se puede escribir en la forma $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$, donde r_1 y r_2 son las raíces de la función cuadrática.

Las situaciones que se presentan en esta unidad de análisis consisten en determinar la representación algebraica de una función cuadrática representada gráficamente y, seleccionar la representación gráfica que corresponde a una función cuadrática representada algebraicamente. El lenguaje verbal y algebraico hacen ostensibles los conceptos: función cuadrática, gráfica, ecuación cuadrática, solución de una ecuación cuadrática, cero de una función cuadrática. El lenguaje algebraico y el gráfico se utilizan para representar las funciones y ecuaciones cuadráticas. Los objetos emergentes son los procedimientos y las proposiciones necesarias para resolver la situación problema,así como la sintaxis propia del sistema en los campos de respuestas.

Unidad U$_3$: Fórmulas de Cardano.


Question:

Utilizaremos las fórmulas de Cardano para resolver una ecuación del tipo $x^3 + px + q = 0$, siguiendo paso a paso el siguiente procedimiento:

La ecuación a resolver es $x^3 - 27x - 54 = 0$

Entonces

$p =$

$q =$

Recuerda que expresamos $x = u + v$ y que $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ y $v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$

Calcula u^3 (Expresar en la forma $a+bI$)

Calcula v^3 (Expresar en la forma $a+bI$)

Expresa u^3 y v^3 en forma polar. (Utilice angulos no negativos menores a 360 grados)

$u^3 \approx$ CIS

$v^3 \approx$ CIS

Encontraremos las raices cubicas de los valores anteriores, en forma polar y forma binomica.

$u_1 \approx$ CIS $\approx$

$u_2 \approx$ CIS $\approx$

$u_3 \approx$ CIS $\approx$

$v_1 \approx$ CIS

$v_2 \approx$ CIS =

$v_3 \approx$ CIS

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación son:

(Escriba las raices entre paréntesis y separadas por coma, en la forma (a,b,c))

Situación problema:

Resolver una ecuación cubica del tipo $x^3 + px + q = 0$ utilizando las fórmulas de Cardano, siguiendo paso a paso el procedimiento propuesto. El reactivo está diseñado para que la ecuación de la forma $x^3 + px + q = 0$ se obtenga al realizar los productos y simplificar en el lado izquierdo de una ecuación de la forma $(x - a)(x - b)\big(x - (-(a + b)\big) = 0$ con a y b números enteros entre -7 y 7.

Lenguaje:

Términos y expresiones:

Fórmulas de Cardano, forma polar, raíces cúbicas, forma binómica, ángulos no negativos, ángulos menores a 360 grados, soluciones de la ecuación, raíces.

Algebraico:

$x^3 + px + q = 0,\ x^3 - 27x + 54 = 0,\ x = u + v.$

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\ ,\quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$u^3 \approx [\quad]\, CIS\, [\quad],\qquad v^3 \approx [\quad]\, CIS\, [\quad].$

$u_1 \approx [\quad]\, CIS\, [\quad] \approx [\quad].$

$v_1 \approx [\quad]\, CIS\, [\quad] \approx [\quad].\quad a + bI, (a, b, c).$

Sintaxis del sistema:

El uso del literal *I*para escribir la unidad imaginaría en un número complejo no real de la forma $a + bI$.Uso desqrt(*a)* para la raíz cuadrada de un número a, de paréntesis y separadores para escribir la lista de soluciones de la ecuación.

Conceptos-definición:

Fórmulas de Cardano, ecuación, solución de una ecuación, raíces de una ecuación, raíces cúbicas de un número complejo, forma polar de un número complejo, forma binómica de un número complejo.

Procedimientos:

Uso de las fórmulas de Cardano para resolver ecuaciones cúbicas.

Identificar los coeficientes en la ecuación cúbica.

Determinar el módulo y el argumento de un número complejo escrito en forma cartesiana, y expresarlo en forma polar.

Determinar las raíces cúbicas de números complejos.

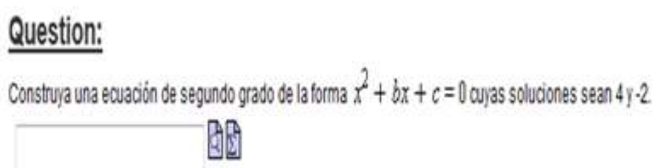
Proposiciones:

Las fórmulas de Cardano conducen a la solución de una ecuación cúbica.

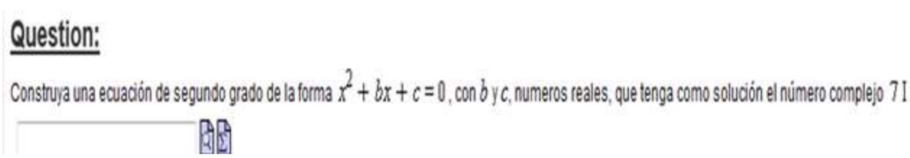
En esta unidad de análisis la situación problema, presentada mayormente en lenguaje algebraico, consiste en resolver una ecuación cúbica de la forma $x^3 + px + q = 0$, cuyas soluciones son números enteros. El uso de las Fórmulas de Cardano (procedimiento) se guía paso a paso hasta obtener las soluciones de la ecuación. Un objeto emergente es la sintaxis propia del sistema en los campos de respuestas.

Unidad U_4: Construcción de ecuaciones de segundo grado.

Reactivo tipo 1: General.



Reactivo tipo 2: Raíz compleja.



Reactivo tipo 3: Raíz racional.

Reactivo tipo 4: Determinación de b.

Question:

Si las soluciones de $x^2 + bx + c = 0$ son $\frac{5}{6}$ y $-\frac{2}{7}$, determina el valor de b.

Reactivo tipo 5: Determinación de c.

Question:

Si las soluciones de $x^2 + bx + c = 0$ son $\frac{1}{9}$ y 1, determina el valor de c.

Reactivo tipo 6: Determinación de c.

Question:

Si las soluciones de $60x^2 + bx + c = 0$ son $-\frac{7}{6}$ y $-\frac{1}{10}$, determina el valor de c.

Reactivo tipo 7: Determinación de b.

Question:

Si las soluciones de $14x^2 + bx + c = 0$ son $\frac{3}{2}$ y $\frac{2}{7}$, determina el valor de b.

Reactivo tipo 8: Valor de k para raíces iguales.

Question:

La ecuación $9\,k\,x^2 + 10\,x + 25 = 0$ tiene dos soluciones iguales si el valor de k es

Situaciones problema:

Construir una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx + c = 0$ cuyas soluciones sean números enteros. Las soluciones que presenta el reactivo (tipo 1) son números enteros entre -10 y 10.

Construir una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx + c = 0$, con coeficientes reales dada una solución compleja de la forma $d + eI$, con d y e números enteros entre -10 y 10.

Construir una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, lo más simple posible, con a, b y c, números enteros, $a > 0$ y que tenga como soluciones $-\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{10}$. Las soluciones son de la forma $\frac{e}{f}$, con e y f números enteros entre -10 y 10, y $f \neq 0, 1, -1$.

Si las soluciones de $x^2 + bx + c = 0$ son $\frac{5}{6}$ y $-\frac{2}{7}$, determinar el valor de b. En el reactivo tipo 4 las soluciones son de la forma $\frac{e}{f}$, con e y f números enteros entre -10 y 10, y $f \neq 0, 1, -1$.

Determinar el valor de c en la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ si sus soluciones son $\frac{1}{9}$ y 1.

Si las soluciones de $60x^2 + bx + c = 0$ son $-\frac{7}{6}$ y $-\frac{1}{10}$, determinar el valor de c. En el reactivo tipo 5 las soluciones son de la forma $\frac{e}{f}$, con e y f números enteros entre -10 y 10, y $f \neq 0, 1, -1$.

Determinar el valor de b en la ecuación $14x^2 + bx + c = 0$ si sus soluciones son $\frac{3}{2}$ y $\frac{2}{7}$. Las soluciones en los reactivos tipo 6 y 7 son de la forma $\frac{e}{f}$ y $\frac{g}{h}$, donde e, f, g y h son números enteros entre -10 y 10, y $f\ y\ h \neq 0, 1, -1$. Y la ecuación que se presenta es de la forma $(fh)x^2 + bx + c = 0$.

Determinar el valor de k si la ecuación $9kx^2 + 10x + 25 = 0$ tiene dos soluciones iguales.La ecuación en el reactivo tipo 7 es de la forma $akx^2 + bx + (\frac{b^2}{4}) = 0$, con $a \neq 0$ número entero entre -10 y 10, y b número entero par entre -10 y 10.

Lenguaje:

Términos y expresiones:

Ecuación de segundo grado, soluciones de una ecuación, número real, número complejo, número entero.

Algebraico:

$x^2 + bx + c = 0$, $ax^2 + bx + c = 0, a > 0$,

$$60x^2 + bx + c = 0, 14x^2 + bx + c = 0.$$

Sintaxis del sistema:

Uso del símbolo ^ para denotar potencias,para registrar las ecuaciones de segundo grado.

Numérico:

$4, -2, a + bI, -\frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{5}{6}, -\frac{2}{7}, -\frac{1}{10}.$

Conceptos- definición:

Ecuación de segundo grado, expresión de segundo grado, solución de una ecuación, número real, número complejo,conjugado de un número complejo.

Procedimientos:

Sustituir las solucionesdadas,r_1 y r_2, en una expresión de la forma $(x - r_1)(x - r_2) = 0$,realizar el producto de binomios y sumar términos semejantes.

Multiplicar la ecuación por el número entero adecuado para eliminar los denominadores que tenga la ecuación.

Proposiciones:

Si z_0 es una raíz compleja de un polinomio $p(x)$ con coeficientes reales, entonces su conjugado $\bar{z}_0$ también es raíz de $p(x)$.

Toda ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ se puede escribir en la forma $a(x - r_1)(x - r_2) = 0$, donde r_1 y r_2 son soluciones de la ecuación cuadrática.

Fórmulas de Vieta para expresiones de segundo grado.

La situación problema consiste básicamente en construir ecuaciones cuadráticas a partir de sus raíces. Como una necesidad para dar solución a la situación emergen procedimientos junto con las proposiciones que los sustentan, por ejemplo: escribir una expresión factorizada, relacionar las raíces y los coeficientes del polinomio, identificar la relación entre raíces no reales, sustentadas en las proposiciones enunciadas anteriormente. El lenguaje utilizado en esta unidad de análisis para hacer ostensible los objetos matemáticos presentes o emergentes es, el verbal, algebraico, numérico y la sintaxis propia del sistema.

Unidad U_5: Factorización de ecuaciones.

Reactivo tipo 1: Raíz real polinomio de grado 3.

Question:

Determina la raíz real del polinomio $x^3 + a\,x^2 + b\,x + 10$, donde a y b son números enteros, dado que $1 + I$ es una raíz compleja del polinomio.

Reactivo tipo 2: Factores Lineales Grado 3.

Question:

Sabiendo que -5 es una raiz del polinomio $x^3 - 4\,x^2 - 27\,x + 90$, exprese el polinomio como producto de factores lineales.

Por lo tanto, sus raices son (Click for List)

(Click for List)
-5,3,-6
No se
-5,3,6
-5,-3,-6
-5,-3,6

Information Fields:

No fields set

Reactivo tipo 3: Raíces complejas grado 3

Question:

Sabiendo que $-4 - 5\,I$ es una raíz del polinomio $-x^3 - 13\,x^2 - 81\,x - 205$, encuentre las otras raíces.
(escribalas separadas por comas, primero las raíces complejas y despues las raíces reales)

Reactivo tipo 4: Factorización-cuadrática.

Question:

La factorización de $x^2 + 25$ es:

- $(x + 5)^2$
- $(x + 5)\,(x - 5)$
- $(x + 5\,I)\,(x - 5\,I)$
- $(x + 5\,I)^2$
- No se

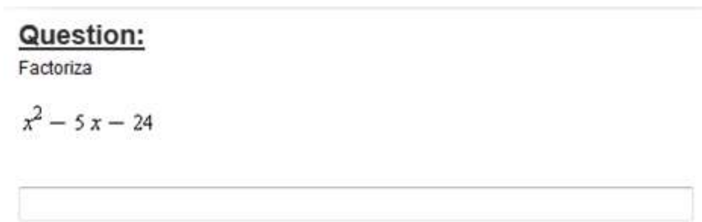
La factorización de $x^2 - 10\,x + 25$ es:

- $(x + 5\,I)^2$
- $(x + 5\,I)\,(x - 5\,I)$
- $(x + 5)^2$
- $(x + 5)\,(x - 5)$
- $(x - 5)^2$
- No se

y la factorización de $x^2 - 10\,x + 26$ es

- $(x - 5 - I)\,(x + 5 + I)$
- $(x + 5 - I)\,(x + 5 + I)$
- $(x - 5 - I)\,(x - 5 + I)$
- $(x + 5 - I)\,(x - 5 + I)$
- No se

Reactivo tipo 5: Factorización 2do grado.



Situaciones problema:

En el reactivo tipo 1, dada una raíz no real en forma cartesiana, solicita determinar la raíz real de un polinomio de tercer grado de la forma $x^3 + bx^2 + cx + d$, con b, c y d números enteros y d es dado.

En el reactivo tipo 2 dada una raíz real de un polinomio cúbico de la forma $(-1)^n x^3 + bx^2 + cx + d$, con b, c, d números enteros dados y $n = 1, 2$, se pide expresar el polinomio como producto de factores lineales y seleccionar de las opciones dadas las raíces del polinomio.

En el reactivo tipo 3 dada una raíz compleja no real de un polinomio de tercer grado, se solicita encontrar las otras raíces. El polinomio que se presenta es de la forma $(-1)^n x^3 + bx^2 + cx + d$, con b, c, d números enteros dados y $n = 1, 2$.

En el reactivo tipo 4 se solicita factorizar, primero: una suma de cuadrados de la forma $x^2 + a^2$, con $a \in Z^+$ y ofrece las siguientes opciones como respuestas $(x + a)^2, (x + a)(x - a), (x + aI)(x - aI), (x + aI)^2$ o, no se. Segundo: un trinomio cuadrado perfecto $x^2 + 2ax + a^2$ y ofrece las siguientes opciones como posibles respuestas $(x + aI)^2, (x + aI)(x - aI), (x + a)^2, (x + a)(x - a), (x - a)^2$ o, no se. Tercero: Un trinomio de la forma $x^2 + 2ax + (a^2 + 1)$ y ofrece las siguientes opciones como posibles respuestas $(x - a - I)(x + a + I), (x + a - I)(x + a + I), (x - a - I)(x - a + I), (x + a - I)(x - a + I)$ o, no se.

El reactivo tipo 5 consiste en factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$.

Lenguaje:

Términos y expresiones:

Raíz real, polinomio, números enteros, raíz compleja, producto de factores lineales, factorización.

Algebraico:

$x^3 + bx^2 + cx + 10$, $-x^3 + 3x^2 + 25x - 75$, $-x^3 - 13x^2 - 81x - 205$,$x^2 + 25$, $(x+5)^2$, $(x+5)(x-5)$, $(x+5I)(x-5I)$, $(x+5I)^2$, $x^2 - 10x + 25$, $(x-5)^2$, $x^2 - 10x + 26$, $(x-5-I)(x+5+I)$, $(x+5-I)(x+5+I)$, $(x-5-I)(x-5+I)$, $(x+5-I)(x-5+I)$, $x^2 - 5x - 24$.

Sintaxis del sistema:

Uso de separadores, paréntesis y del literal I para denotar la unidad imaginaría al escribir un número complejo no real en forma cartesiana.

Numérico:

$1 + I$, -5, $-4 - 5I$.

Conceptos- definición:

Raíz real, polinomio, números enteros, raíz compleja, factores lineales, suma de cuadrados, trinomio cuadrado perfecto, factorización de expresiones cuadráticas.

Procedimientos:

Factorizar polinomios.
Determinar el conjugado de un número complejo.
Usar las fórmulas de Vieta considerando el término independiente.
División de polinomios.
Factorizar una suma de cuadrados.
Factorizar trinomios cuadrados perfectos.
Uso de la fórmula general para ecuaciones cuadráticas.

Proposiciones:

Si z_0 es una raíz compleja de un polinomio $p(x)$ con coeficientes reales, entonces su conjugado $\bar{z}_0$ también es raíz de $p(x)$.
Fórmulas de Vieta.
Si $p(x)$ es un polinomio con coeficientes complejos que está definido por

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, n \geq 1, a_n \neq 0.$$

Entonces

$$p(x) = a_n (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$$

Donde cada r_i $(i = 1,2,\cdots,n)$ es una raíz compleja de $p(x)$.

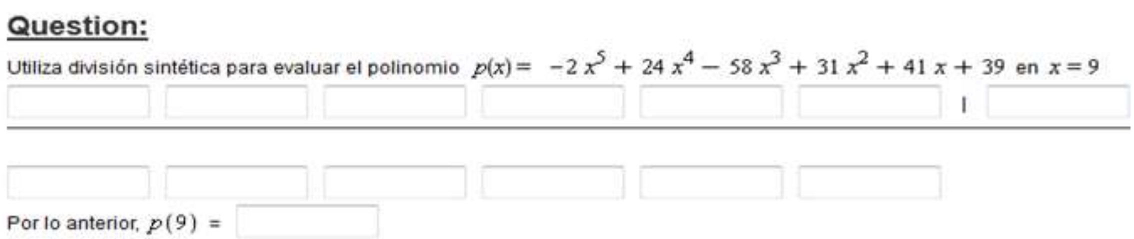
Teorema del factor.

La fórmula general conduce a la solución de una ecuación cuadrática.

En esta unidad de análisis las situaciones problemas consisten en encontrar raíces de ecuaciones y en factorizar ecuaciones. Para dar solución a las situaciones se hace uso de procedimientos y proposiciones emergentes, como lo son: división de polinomios, la fórmula general para ecuaciones cuadráticas, la proposición referente a raíces complejas conjugadas de polinomios con coeficientesreales, del teorema del factor, las fórmulas de Vieta. El lenguaje que hace ostensible a las entidades involucradas es el verbal, algebraico, numérico y como un elemento emergente, la sintaxis propia del sistema para registrar las respuestas abiertas.

Unidad U_6: Raíces y factores de ecuaciones.

Reactivo tipo 1: Evaluación por división sintética.

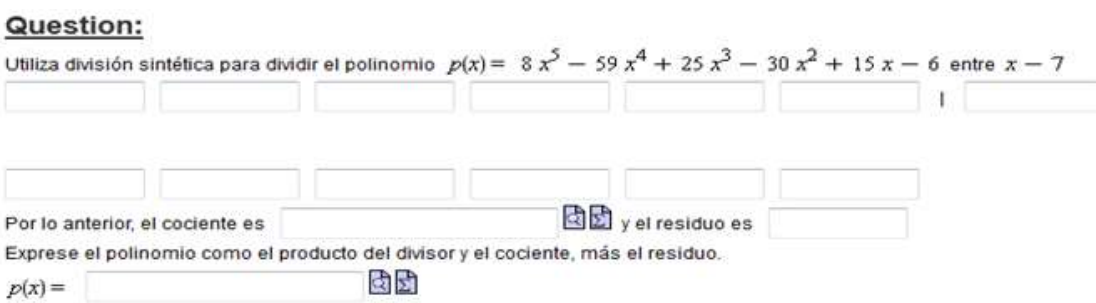


Question:

Utiliza división sintética para evaluar el polinomio $p(x) = -2x^5 + 24x^4 - 58x^3 + 31x^2 + 41x + 39$ en $x = 9$

Por lo anterior, $p(9)$ =

Reactivo tipo 2: División sintética.



Question:

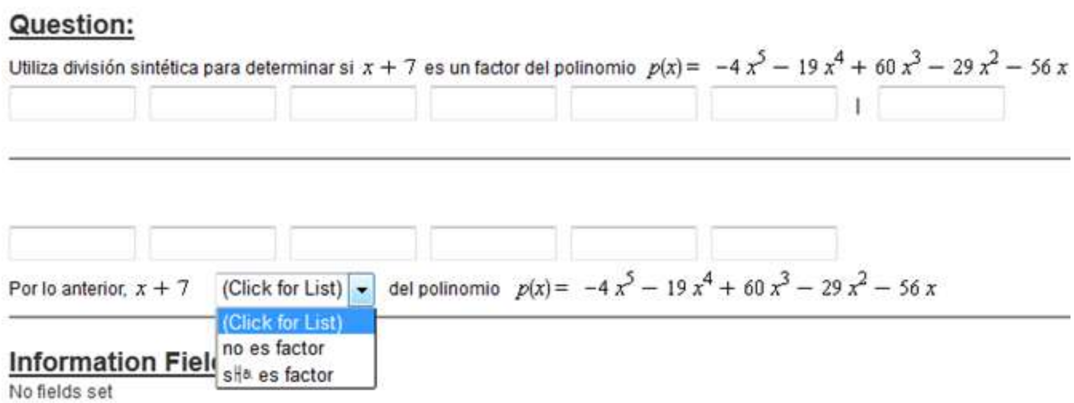
Utiliza división sintética para dividir el polinomio $p(x) = 8x^5 - 59x^4 + 25x^3 - 30x^2 + 15x - 6$ entre $x - 7$

Por lo anterior, el cociente es y el residuo es

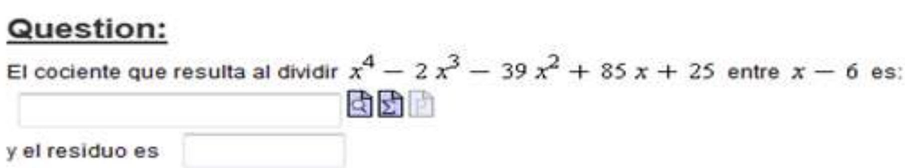
Exprese el polinomio como el producto del divisor y el cociente, más el residuo.

$p(x) =$

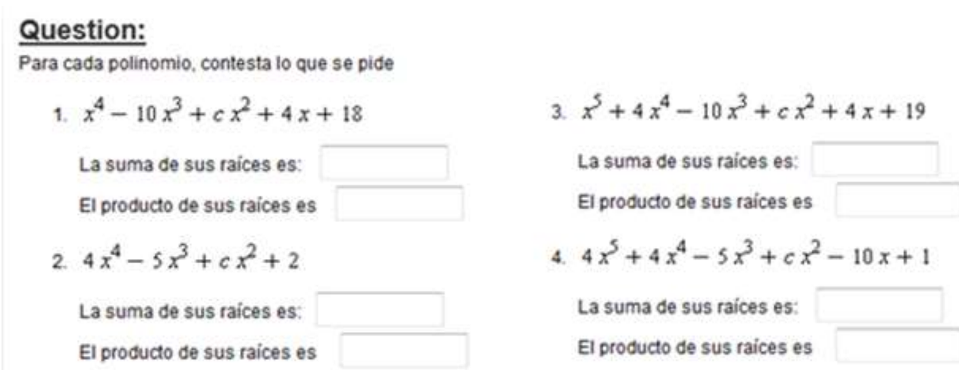
Reactivo tipo 3: División sintética y factores.



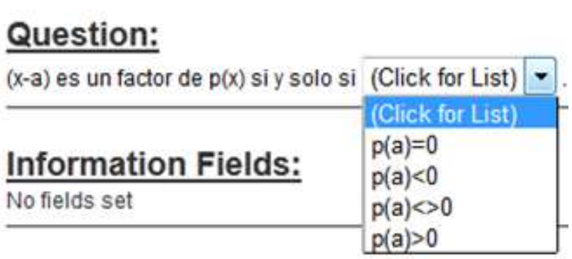
Reactivo tipo 4: Cocientes y residuos.



Reactivo tipo 5: Coeficientes y raíces.



Reactivo tipo 6: Teorema del factor:



Situaciones problema:

Utilizar división sintética para evaluar un polinomio. El polinomio en el reactivo tipo 1 es de quinto grado con coeficientes enteros.

Utilizar división sintética para dividir polinomios, obtener el cociente y el residuo. Ilustrar el algoritmo de la división. El polinomio en el reactivo tipo 2 es de quinto grado con coeficientes enteros y el binomio es de la forma $x - r$ donde *r* es un número entero.

Utilizar división sintética para determinar si un binomio de la forma $x - r$, donde r es un número entero, es factor de un polinomio de quinto grado.

Obtener el cociente y el residuo que resulta al dividir un polinomio de cuarto grado, con coeficiente enteros, entre un binomio de la forma $x - r$.

Determinar la suma y el producto de las raíces de polinomios de grado cuatro o cinco. En el reactivo tipo 5 se pide determinar la suma y el producto de las raíces de un polinomio, de cuarto grado (grado par) o de quinto (grado impar). También, se consideran casos de polinomios mónicos y de no mónicos.

Completar el enunciado del teorema de factor y la raíz.

Lenguaje:

Términos y expresiones:

División sintética, evaluar el polinomio, dividir, polinomio, cociente, residuo, producto, divisor, factor de polinomio, suma, raíces.

Algebraico:

$p(x) = -2x^5 + 24x^4 - 58x^3 - 31x^2 + 41x + 9$, $x = 9$, $p(9)$.

$p(x) = 8x^5 - 59x^4 + 25x^3 - 30x^2 + 15x - 6$, $x - 7$, $p(x)$.

$x + 7$, $p(x) = -4x^5 - 19x^4 + 60x^3 - 29x^2 - 56x$.

$x^4 - 2x^3 - 39x^2 + 85x + 25$, $x - 6$.

$x^4 - 10x^3 + cx^2 + 4x + 18$, $x^5 + 4x^4 - 10x^3 + cx^2 + 4x + 19$.

$(x - a)$, $p(a) = 0$, $p(a) < 0$, $p(a) <> 0$, $p(a) > 0$.

Sintaxis del sistema:

Esquema de división sintética en dos filas y uso del símbolo ^ para denotar potencias.

Utiliza división sintética para determinar si $x + 7$ es un factor del polinomio $p(x) = -4x^5 - 19x^4 + 60x^3 - 29x^2 - 56x$

Conceptos-definición:

División sintética, evaluación de un polinomio, división de polinomios, polinomio, cociente de un polinomio, residuo de un polinomio, divisor de un polinomio, factor de polinomio, raíces de polinomios.

Procedimientos:

Usar división sintética, evaluación de polinomios, división de polinomios, aplicación de las fórmulas de Vieta, factorizar expresiones polinomiales, seleccionar la expresión que completa el enunciado de un teorema.

Proposiciones:

La regla de Ruffini provee una forma para evaluar polinomios. Teorema del factor y de la raíz. Teorema del residuo. Fórmulas de Vieta.Teorema de la raíz y el factor. Teorema del algoritmo de la división.

En esta unidad semiótica se propone utilizar el esquema de división sintética (procedimiento) para resolver las situaciones: evaluar polinomios en un número entero, dividir polinomios, determinar si un binomio es factor de un polinomio, obtener el cociente y el residuo. En otra situación particular se pide determinar la suma y el producto de las raíces de polinomios. Se hace uso de las proposiciones: teorema del algoritmo de la división de polinomios, teorema del residuo, teorema del factor, fórmulas de Vieta y la que sustenta la regla de Ruffini. El lenguaje utilizado es el verbal, algebraico, numérico, y el esquema de división sintética representado en dos filas.

Unidad U_7: Polinomios y factores.

Reactivo tipo 1: Variaciones de signo.

Question:

Considera el polinomio $x^4 + b\,x^3 + 6\,x^2 - x + 7$

Determina el número de variaciones de signo del polinomio, considerando que b es un número positivo.

Determina el número de variaciones de signo del polinomio, considerando que b es un número negativo.

Reactivo tipo 2: Factores lineales grado 7.

Question:

Escriba el polinomio $(x-4)\left(x^2 - 10\,x + 24\right)\left(x^2 - 2\,x - 24\right)(x+6)^2$ como producto de factores lineales

Reactivo tipo 3: Raíces múltiples.

Question:

Verifica que -2 es una raíz del polinomio $x^4 + 4\,x^3 - 12\,x^2 - 64\,x - 64$.

-2 es una raíz de multiplicidad

Encuentra las otras raíces y escríbelas ordenadas de menor a mayor, separadas por comas

Expresa el polinomio como producto de factores lineales.

Reactivo tipo 4: Raíz real de polinomio de grado 5.

Question:

Determina la raíz real del polinomio $x^5 + a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x + 128$, donde a, b, c y d son números enteros, dado que $-2 - 2\,I$ es una raíz compleja de multiplicidad 2.

Reactivo tipo 5: Factores y raíces.

Question:

Determina si el polinomio $4\,x^4 - 23\,x^3 + 31\,x^2 - 9\,x - 22$ tiene como factor a $x - 4$.

(Click for List)

Una manera de saberlo, sin tener que efectuar la división, es verificar si es raíz del polinomio.

Situaciones problema:

Determinar el número de variaciones de signo de un polinomio de cuarto grado.

Expresar un polinomio como producto de factores lineales dado que está parcialmente factorizado, incluyendo factores cuadráticos.

Verificar quer_1 $(r_1 = -2, -1, 1, 2, 3)$es raíz de un polinomio $p(x)$con coeficientes enteros dado en forma desarrollada y, determinar la multiplicidad de r_1(puede ser de 2, 3 o 4).(El grado de $p(x)$ puede ser 4, 5 o 6). Encontrar las otras raíces de $p(x)$ distintas de la raízr_1y expresar el polinomio como producto de factores lineales.

Determinar la raíz real de un polinomio de quinto grado de la forma $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, donde *a*, *b*, *c* y *d* son números enteros y *e* es un número entero conocido, dado que se conoce una raíz compleja en forma cartesiana de multiplicidad dos.

Determinar si un polinomio $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, con coeficientes enteros, tiene como factor a un binomio de la forma $x - r$ y, relacionar con el teorema de residuo.

Lenguaje:

Términos y expresiones:

Polinomio, variaciones de signo, número positivo, número negativo, producto de factores lineales, raíz del polinomio, multiplicidad de una raíz, raíz real, número entero, raíz compleja, división sintética.

Algebraico:

$x^4 + bx^3 + 6x^2 - x + 7, (x-4)(x^2 - 10x + 24)(x^2 - 2x - 24)(x+6)^2,$

$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - 192, 4x^4 - 23x^3 + 31x^2 - 9x - 22,\ x - 4.$

Sintaxis del sistema:

Uso de separadores, paréntesis y dela literal I para denotar la unidad imaginaría.

Numérico:

$-2,\ 2 - 2I.$

Conceptos-definición:

Polinomio, variaciones de signo de un polinomio, factores lineales, factores cuadráticos, raíz de polinomio, multiplicidad de una raíz, raíz real, raíz compleja, división de polinomios.

Procedimientos:

Comparar el signo de coeficientes consecutivos en un polinomio ordenado por potencias de la indeterminada.

Factorización de expresiones cuadráticas.

División sintética.

Evaluación de polinomios mediante sustitución.

Derivación de un polinomio.

Determinar el conjugado de números complejos no reales.Utilizar las fórmulas de Vieta. Usar la fórmula general para ecuaciones de segundo grado.

Proposiciones:

Si z_0 es una raíz compleja de un polinomio $p(x)$ con coeficientes reales, entonces su conjugado $\bar{z}_0$ también es raíz de $p(x)$.

Si x_0 es una raíz de multiplicidad $k > 1$ de un polinomio $p(x)$ entonces x_0 es una raíz de multiplicidad $k - 1$ de la derivada de $p(x)$.

Si x_0 es una raíz de multiplicidad $k > 1$ de un polinomio $p(x)$ entonces $(x - x_0)^k$ es factor de $p(x)$, pero $(x - x_0)^{k+1}$ no lo es.

La fórmula general para ecuaciones cuadráticas ayuda a obtener las raíces de un polinomio cuadrático.

Fórmulas de Vieta.

Teorema del residuo.Teorema del factor y la raíz.

Si $p(x)$ es un polinomio con coeficientes complejos que está definido por

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, n \geq 1, a_n \neq 0.$$

Entonces

$$p(x) = a_n (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$$

Donde cada r_i $(i = 1,2, \cdots, n)$ es una raíz compleja de $p(x)$.

Las situaciones que se presentan principalmente consisten en determinar la multiplicidad de una raíz, determinar raíces y factorizar polinomios. Los procedimientos necesarios son:uso de la fórmula general para ecuaciones de segundo grado, factorización de expresiones cuadráticas, la división (sintética), cálculo de la derivada de polinomios, la factorización de polinomios de grado *n*, evaluación de un polinomio en un número realmediante sustitución. Las proposiciones enunciadas justifican los procedimientos. Otra situación que se presenta de manera aislada consiste en determinar el número de variaciones de signo de un polinomio, en este caso la definición de variaciones de signo es fundamental para resolver la situación ya que de ella emerge el procedimiento o acción.

El lenguaje que hace ostensible a las entidades involucradas es el verbal, algebraico y el numérico. Emerge la sintaxis propia del sistema necesaria para registrar las respuestas abiertas.

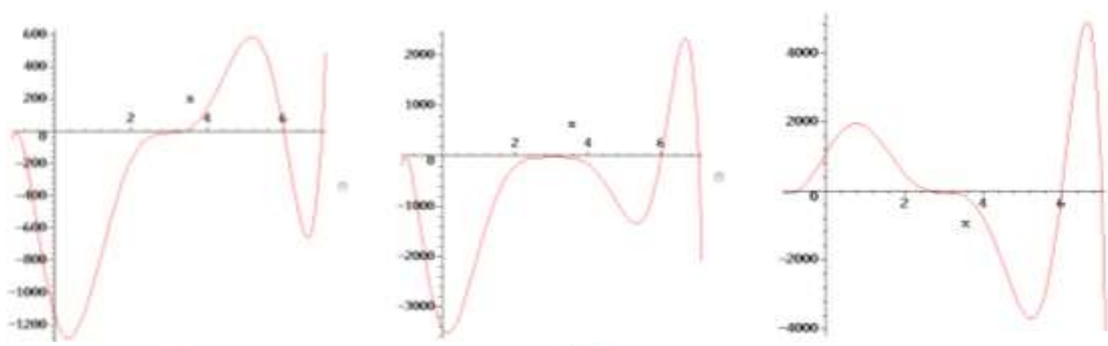
Unidad U_8: Gráficas y polinomios.

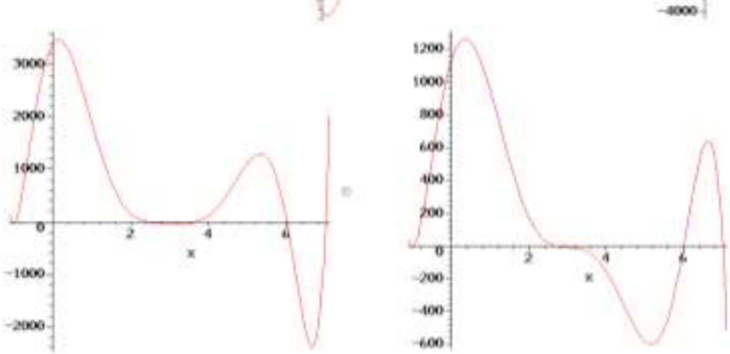
Reactivo tipo 1: De representación algebraica a gráfica: más de dos raíces.

Question:

El grado del polinomio $-(x+1)^2\,(x-3)^3\,(x-6)\,(x-7)$ es

Seleccione la gráfica que corresponde al polinomio





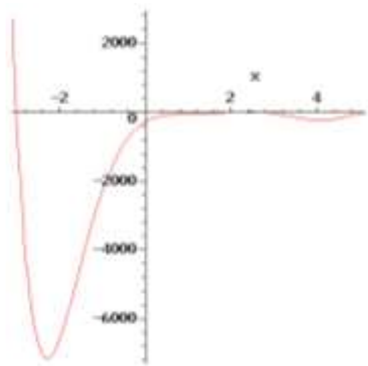
No se

Sus raíces son ☐ 1 ☐ -7 ☐ -3 ☐ -6 ☐ 7 ☐ 3 ☐ -1 ☐ 6 ☐ No se

Reactivo tipo 2: De gráfica a expresión algebraica: grado mayor a 2.

Question:

Seleccione la expresión algebraica que corresponde al polinomio representado en la siguiente gráfica

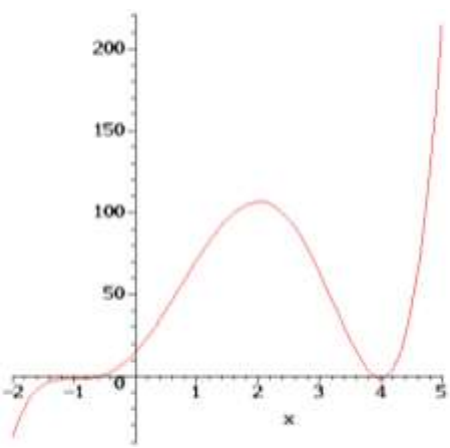


- ○ $-(x+3)(x-1)^3(x-3)(x-5)^2$
- ○ $(x+3)(x-1)^3(x-3)^2(x-5)^2$
- ○ $(x+3)(x-1)^3(x-3)(x-5)^2$
- ○ $-(x+3)(x-1)^3(x-3)^2(x-5)^2$
- ○ $-(x+3)(x-1)^3(x-3)(x-5)^3$
- ○ No se

Reactivo tipo 3: Gráfica a expresión algebraica: dos raíces repetidas.

Question:

Seleccione la expresión algebraica que corresponde al polinomio representado en la siguiente gráfica



- ○ $-(x+1)^3(x-4)^2$
- ○ $(x+1)^4(x-4)^2$
- ○ $(x+1)^3(x-4)$
- ○ $-(x+1)^4(x-4)^2$
- ○ $(x+1)^3(x-4)^2$
- ○ No se

El grado del polinomio es ______

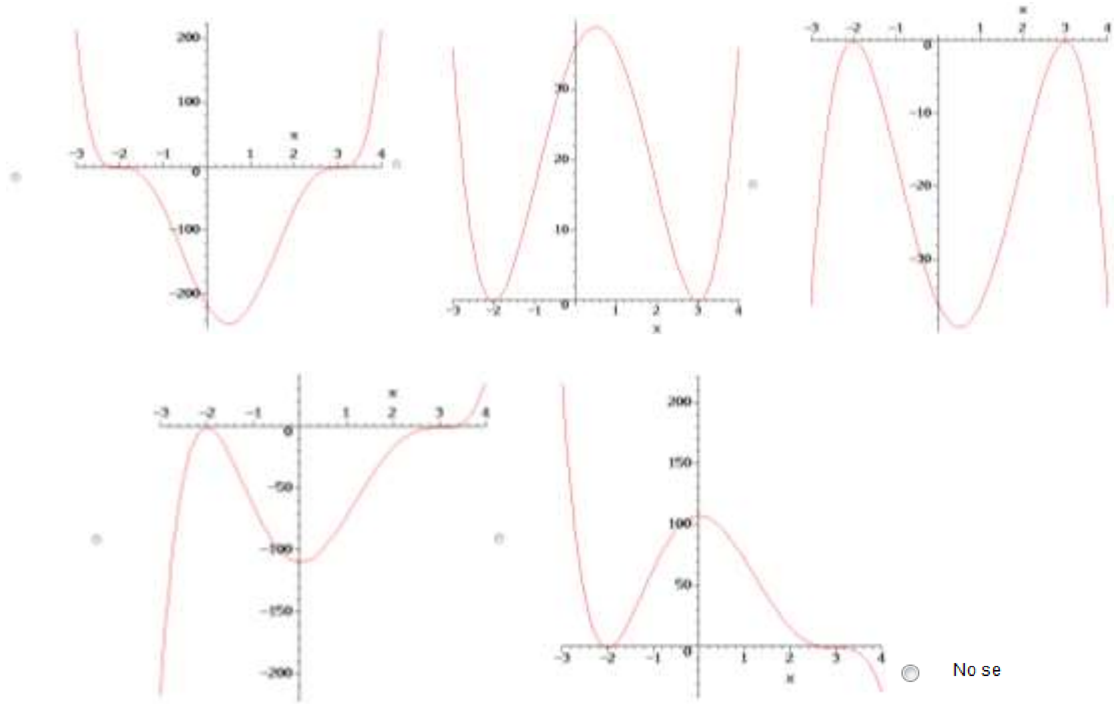
Reactivo tipo 4: Expresión algebraica a gráfica: dos raíces repetidas.

Question:

El grado del polinomio $(x+2)^2(x-3)^3$ es

______

Seleccione la gráfica que corresponde al polinomio



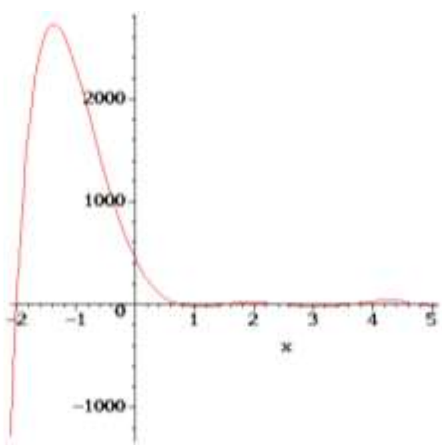
No se

Sus raíces son ☐ -3 ☐ -2 ☐ 2 ☐ 3 ☐ No se

Reactivo tipo 5: Gráfica a expresión algebraica: más de dos raíces repetidas.

Question:

Seleccione la expresión algebraica que corresponde al polinomio representado en la siguiente gráfica



- $(x+2)\ (x-1)^2\ (x-3)^3\ (x-5)^2$
- $(x+2)\ (x-1)^2\ (x-3)^2\ (x-5)^3$
- $(x+2)\ (x-1)^2\ (x-3)^2\ (x-5)^2$
- $-(x+2)\ (x-1)^2\ (x-3)^2\ (x-5)^2$
- $-(x+2)\ (x-1)^2\ (x-3)^3\ (x-5)^2$
- No se

Situaciones problema:

Determinar el grado de un polinomio expresado como producto de factores lineales. El polinomio del reactivo tipo 1 está diseñado de tal forma que el grado del polinomio esté entre 5 y 10. Tiene cuatro factores lineales: el primero y segundo de grado 2 o 3, el tercero y el cuarto de grado 1 o 2.

Seleccionar la gráfica que corresponde a un polinomio expresado como producto de factores lineales. Las opciones de los reactivos tipo 1 o 4 están diseñados de tal forma quelos polinomios tienen las mismas raíces con distintas multiplicidades.

Determinar y seleccionar las raíces de un polinomio expresado como producto de factores lineales.

Seleccionar la expresión algebraica que corresponde al polinomio representado gráficamente. Este polinomio está diseñado de tal forma que tiene 4 raíces reales diferentes, con multiplicidad de 1 a 3. Las opciones algebraicas están diseñadas de tal forma que tienen las mismas raíces pero con multiplicidades diferentes.

Lenguaje:

Términos y expresiones:

Polinomio, grado del polinomio, gráfica, raíces, expresión algebraica.

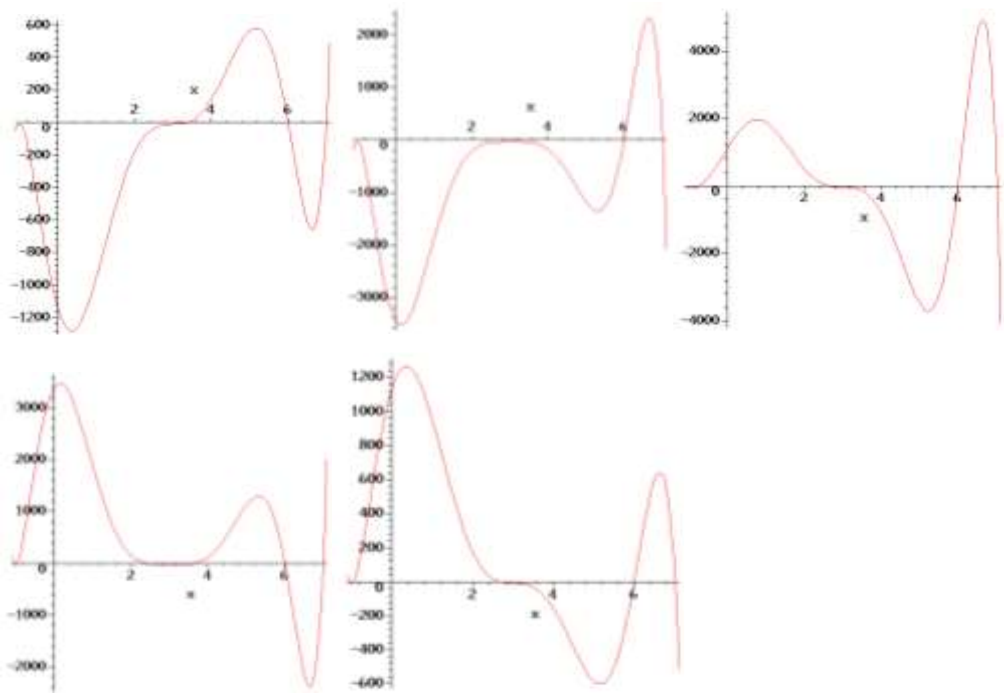
Algebraico:

$-(x+1)^2(x-3)^3(x-6)(x-7)$,

$-(x+3)(x-1)^3(x-3)(x-5)^2$, $(x+2)^2(x-3)^3$.

$-(x+3)\,(x-1)^3\,(x-3)\,(x-5)^2$	$-(x+1)^3\,(x-4)^2$	$(x+2)\,(x-1)^2\,(x-3)^3\,(x-5)^2$
$(x+3)\,(x-1)^3\,(x-3)^2\,(x-5)^2$	$(x+1)^4\,(x-4)^2$	$(x+2)\,(x-1)^2\,(x-3)^2\,(x-5)^3$
$(x+3)\,(x-1)^3\,(x-3)\,(x-5)^2$	$(x+1)^3\,(x-4)$	$(x+2)\,(x-1)^2\,(x-3)^2\,(x-5)^2$
$-(x+3)\,(x-1)^3\,(x-3)^2\,(x-5)^2$	$-(x+1)^4\,(x-4)^2$	$-(x+2)\,(x-1)^2\,(x-3)^2\,(x-5)^2$
$-(x+3)\,(x-1)^3\,(x-3)\,(x-5)^3$	$(x+1)^3\,(x-4)^2$	$-(x+2)\,(x-1)^2\,(x-3)^3\,(x-5)^2$

Gráfico:



Numérico e iconográfico:

☐ -3 ☐ -2 ☐ 2 ☐ 3

Conceptos-definición:

Polinomio, grado de un polinomio, gráfica de un polinomio, raíces de un polinomio, multiplicidad de una raíz.

Procedimiento:

Igualar a cero cada uno de los factores del polinomio y resolver la ecuación correspondiente.

Identificar en la expresión algebraica la multiplicidad de cada una de las raíces del polinomio.

Sumar los exponentes de los factores en el polinomio.

Identificar en la gráfica las raíces del polinomio y sus correspondientes multiplicidades.

Sumar las multiplicidades de las raíces.

Identificar el trazo final de la gráfica y asociarlo con la paridad del grado del polinomio representado.

Proposiciones:

Si x_0 es una raíz real del polinomio representado por $p(x)$ entonces, el punto $(x_0, 0)$ es la intersección de la gráfica de $p(x)$ con el eje horizontal (eje *x*).

Suponer que $p(x)$ tiene un factor $(x-c)^k$y que $(x-c)^{k+1}$ no es factor, donde c es real y *k*es un entero positivo. Entonces, para valores de *x*cercanos a c.

Si *k* es impar, la gráfica cruza al eje *x*.

Si *k* es par, la gráfica toca el eje *x* pero no lo cruza.

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, n \geq 1,$ la representación algebraica de un polinomio de grado n, entonces:

Si *n* es par y $a_n > 0$, el recorrido es el intervalo $[m, \infty)$ donde m es el valor mínimo de $p(x)$.

Si n es par y $a_n < 0$, el recorrido es el intervalo $(-\infty, M]$, donde M es el valor máximo de $p(x)$.

Si *n* es impar, el recorrido es el conjunto de los números reales $(-\infty, \infty)$. En este caso no existe un valor máximo o mínimo.

Si $p(x)$ es un polinomio con coeficientes complejos que está definido por

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, n \geq 1, a_n \neq 0.$$

Entonces

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$$

Donde cada r_i $(i = 1,2, \cdots, n)$ es una raíz compleja de $p(x)$.

Son tres las situaciones que aquí se presentan: determinar el grado de un polinomio, determinar las raíces de un polinomio y,asociar la representación gráfica y algebraica de un polinomio. Para ello se hace uso de los procedimientos y proposiciones enunciadas. El lenguaje utilizado es el verbal, numérico, algebraico y el gráfico.

Unidad U$_9$: Relación entre raíces de polinomios.

Reactivo tipo 1: Raíces racionales.

Question:

Analiza el siguiente polinomio $p(x) = 9x^5 - 6x^4 + bx^3 - 6x^2 - 6x - 8$, donde b es un número entero, y escribe una lista de todas sus posibles raíces racionales positivas.

Escribe la lista de posibles raices racionales, separadas por coma, y entre llaves {a,b,c,...}

Reactivo tipo 2: Relación raíces $p(x)$, $p(-x)$ y $-p(x)$.

Question:

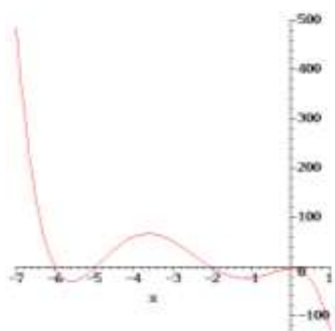
Si las raíces de $p(x)$ son {-1, 6, 8, 10}, entonces las raíces de $-p(x)$ son , y las raíces de $p(-x)$ son

Escriba las raíces entre llaves y separadas por coma {a,b,c,..}

Reactivo tipo 3: Gráficas de $p(x)$, $p(-x)$ y $-p(x)$.

Question:

Si la gráfica de $p(x)$ es

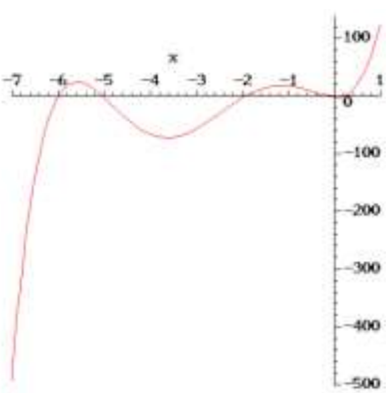


asocie las gráficas correspondientes a

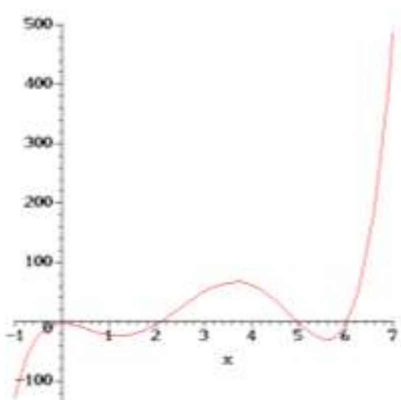
-- -p(x) -- p(-x)

--
1
2

1



2



Situación problema:

Escribir una lista de todas las posibles raíces racionales positivas de un polinomio dado en forma desarrollada.

Dadas las raíces de un polinomio $p(x)$, determinar las raíces de $-p(x)$ y $p(-x)$.

Dada la gráfica de $p(x)$, asociar las gráficas dadas que corresponden a $-p(x)$ o a $p(-x)$.

Lenguaje:

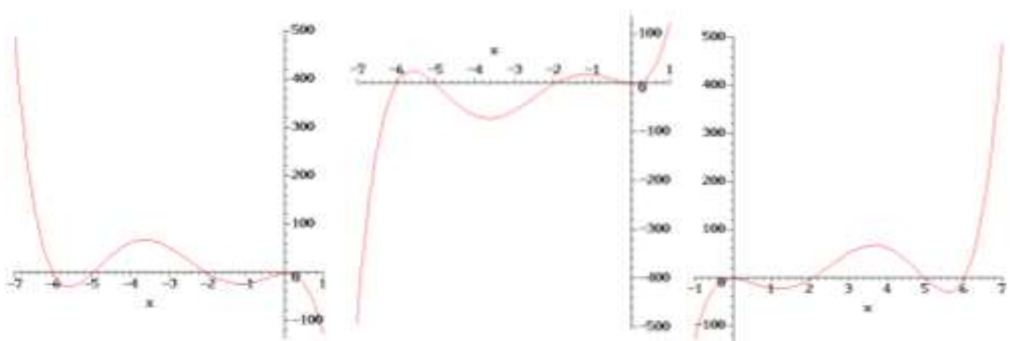
*Términos y expresiones:*Posibles raíces racionales, raíces de un polinomio, gráfica de $p(x)$.

Algebraico:$p(x), -p(x), p(-x)$.

Sintaxis del sistema:

Uso de separadores yllaves.

Gráfico:



Conceptos-definición.

Gráfica, raíces racionales, raíz de un polinomio y reflexiones con respecto a los ejes coordenados.

Procedimiento:

Enlistar todos los factores enteros positivos del término principal y del término independiente del polinomio dado en forma desarrollada y tomar todas las combinaciones posibles considerando como denominadores y numeradores, respectivamente.

Uso de la reflexión de $p(x)$ con respecto a los ejes coordenados para determinar las raíces de $-p(x)$ y de $p(-x)$.

Identificar las raíces reales y sus multiplicidades en la gráfica del polinomio.

Identificar la función que sea la reflexión de $p(x)$ con respecto al eje de las "x" y, asociarla a $-p(x)$.

Identificar la función que sea la reflexiónde $p(x)$ con respecto al eje de las "y" y, asociarla a $p(-x)$.

Proposiciones:

Teorema de las raíces racionales de un polinomio de coeficientes enteros.

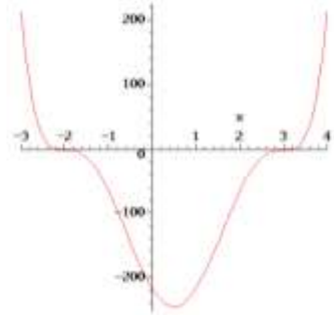
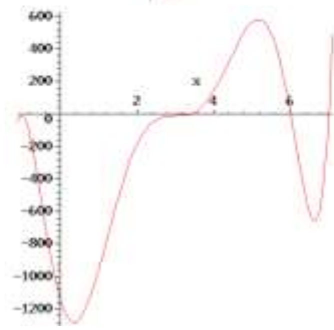
Si r es una raíz real de $p(x)$, entonces r también es raíz de $-p(x)$. Si r es raíz real de $p(x)$, entonces $-r$ es raíz de $p(-x)$.

La situación problema del reactivo tipo 1 consiste en determinar todas las posibles raíces racionales de un polinomio dado en forma desarrollada, para ello se pretende utilizar el teorema de las raíces racionales de los polinomios con coeficientes enteros. Lasotras dos situación consisten en relacionar las raíces de $p(x)$, $p(-x)$ y $-p(x)$, tanto en la representación algebraica, así como en la gráfica. Está presente el concepto de raíz de polinomio en las representaciones gráfica y algebraica, yemerge el concepto de reflexión con respecto a los ejes coordenados.Las proposiciones que sustenta los procedimientosson los que enuncian las relaciones entre las raíces de $p(x)$, $p(-x)$ y $-p(x)$. Los objetos matemáticos se hacen ostensibles mediante el uso del lenguaje verbal, algebraico, gráfico, numérico y como emergente la sintaxis propia del sistema.

Resumen de los elementos básicos del Significado Institucional Pretendido.

A continuación se presenta un resumen del análisis realizado presentando la configuración epistémica identificada, correspondiente al *Significado Institucional Pretendido.*

Situaciones-problema: Encontrar la solución de una ecuación cuadrática, $ax^2 + bx + c = 0$. Determinar la expresión algebraica que corresponde a la función cuadrática representada gráficamente. Seleccionar la gráfica que corresponde a la función cuadrática dada en forma algebraica. Resolver una ecuación cubica del tipo $x^3 + px + q = 0$ utilizando las fórmulas de Cardano, siguiendo paso a paso el procedimiento propuesto. Construir una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ cuyas soluciones sean: números enteros, números racionales o números no reales conjugados. Determinar la raíz real de un polinomio de tercer grado de la forma $x^3 + bx^2 + cx + d$, con b, c y d números enteros, con b y c desconocidos, dado que se conoce d y una raíz no real en forma cartesiana. Dada una raíz real de un polinomio cúbico de la forma $(-1)^n x^3 + bx^2 + cx + d$, con b, c, d números enteros y $n = 1, 2$, expresar el polinomio como producto de factores lineales y seleccionar de las opciones dadas las raíces del polinomio. Dada una raíz no real de un polinomio cúbico de la forma $(-1)^n x^3 + bx^2 + cx + d$, con b, c, d números enteros y $n = 1, 2$, encontrar las otras raíces. Identificar la factorización de una suma de cuadrados y de un trinomio cuadrado perfecto. Identificar la factorización de un trinomio que puede expresarse como un trinomio cuadrado perfecto más uno. Utilizar división sintética para evaluar un polinomio. Utilizar división sintética para dividir polinomios, expresar el polinomio como el producto del divisor y el cociente, más el residuo. Utilizar división sintética para determinar si un binomio de la forma $x - r$ es factor de un polinomio dado. Dado un polinomio de cuarto o quinto grado, con el coeficiente del término cuadrático igual a c, determinar la suma y el producto de sus raíces. Determinar el número de variaciones de signo de un polinomio de cuarto grado. Escribir un polinomio como producto de factores lineales dada una factorización que contiene factores cuadráticos. Determinar la multiplicidad de una raíz de un polinomio dado. Factorizar, en factores lineales, un polinomio dado. Determinar el grado de un polinomio expresado como producto de factores lineales. Seleccionar la gráfica que corresponde a un polinomio expresado como producto de factores lineales. Determinar las raíces de un polinomio expresado como producto de factores lineales. Seleccionar la expresión algebraica que corresponde al polinomio representado gráficamente. Dado un polinomio en forma desarrollada determinar todas las posibles raíces racionales. Dadas las raíces de $p(x)$ determinar las de $p(-x)$ y $-p(x)$. Dada la gráfica de $p(x)$, asociar las gráficas dadas que corresponden a $-p(x)$ o a $p(-x)$.
Lenguaje

Términos y expresiones:	*Algebraico:*	*Gráfico:*
Soluciones exactas, ecuación, expresión algebraica, función cuadrática, gráfica. Fórmulas de Cardano, forma polar, raíces cubicas, forma binómica, ángulos no negativos menores a 360 grados, soluciones de la ecuación, raíces. Ecuación de segundo grado, números reales, números complejos, números enteros, determinar el valor de *b*. Raíz real, polinomio, raíz compleja, factor, factores lineales. División sintética, evaluar el polinomio, dividir, cociente, residuo, producto, divisor, factor de polinomio, suma. Variaciones de signo, número positivo, número negativo, producto de factores lineales, raíz del polinomio, multiplicidad de una raíz, raíz real, número entero, división. Posibles raíces racionales. Grado del polinomio, gráfica, expresión algebraica, gráfica de $f(x)$.	$ax^2+bx+c=0$, $x^2+bx+c=0$, $x^3+px+q=0$, $x=u+v$. $u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$ $u^3 \approx [\ \ ]\,CIS\,[\ \ ]$ $v^3 \approx [\ \ ]\,CIS\,[\ \ ]$ $u_1 \approx [\ \ ]\,CIS\,[\ \ ]$ $v_1 \approx [\ \ ]\,CIS\,[\ \ ]a+bI,(a,b,c)$. $-x^3+3x^2+25x-75$, $(x-5-I)(x+5+I)$, $(x+2)^2(x-3)^3$, $f(x), -f(x), f(-x)$. *Numérico:* $4, -2, 7I, -\frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \ 1+I$, *Sintaxis propia del sistema*	 

Conceptos- definición:
Ecuación, soluciones de una ecuación, ecuación cuadrática. Función cuadrática, gráfica.
Fórmulas de Cardano, resolver una ecuación, raíces de una ecuación, raíces cúbicas de un número complejo, forma polar de un número complejo, forma binómica de un número complejo.
Ecuación de segundo grado, número real, número complejo. Polinomio, grado de un polinomio, raíz de polinomio, raíz compleja, multiplicidad de una raíz, factores lineales, factorización.
División sintética, evaluar el polinomio, división de polinomios, cociente, residuo, producto, divisor, factor de polinomio. Variaciones de signo de un polinomio.

Procedimientos:
Factorizar polinomios, despejar la incógnita, completar el cuadrado.
Uso de la fórmula general para ecuaciones cuadráticas.
Articular la representación gráfica y algebraica de un polinomio de segundo grado.
Identificar las raíces reales y su multiplicidad en la gráfica.
Identificar la concavidad de la gráfica.
Sustituir las raíces r_1 y r_2 en la función $f(x)=(x-r_1)(x-r_2)$ o en $f(x)=-(x-r_1)(x-r_2)$ según la concavidad de la gráfica.
Realizar el producto y sumar términos semejantes en el lado izquierdo de la igualdad.
Calcular las raíces de la ecuación: $ax^2+bx+c=0$.
Identificar la intersección de una parábola con el eje de las *y*.
Uso de las fórmulas de Cardano para resolver ecuaciones cúbicas.
Construir una ecuación de segundo grado a partir de sus soluciones.
Multiplicar la ecuación por el número adecuado para eliminar los denominadores que tenga la ecuación.
Conociendo una raíz compleja de un polinomio de tercer grado con coeficientes reales, determinar la otra raíz compleja.
Conociendo dos raíces complejas de un polinomio de tercer grado con coeficientes reales, determinar la raíz real.
Conociendo una raíz real de un polinomio de tercer grado con coeficientes reales, determinar sus otras dos raíces y expresar el polinomio como un producto de factores lineales.
Factorizar una suma de cuadrados y factorizar trinomios cuadrados perfectos.
Usar división sintética, evaluar polinomios, dividir polinomios.
Aplicar las Fórmulas de Vieta, usar el teorema del factor.
Contar el número de variaciones de signo que tienen los coeficientes de un polinomio.
Determinar las raíces de los polinomios cuadráticos y escribirlos como productos de factores lineales.

Escribir un polinomio como producto de factores lineales. Usar la división para verificar si un número entero es una raíz de un polinomio. Usar la división para determinar la multiplicidad de una raíz de un polinomio. Usar la derivada de un polinomio para determinar la multiplicidad de una raíz de un polinomio. Una vez determinada la multiplicidad de la raíz dada, encontrar las otras raíces del polinomio y escribir el polinomio como un producto de factores lineales. Conociendo una raíz compleja de multiplicidad 2 y aplicando el teorema referente a las raíces complejas conjugadas de un polinomio con coeficientes reales, determinar la raíz real de un polinomio de quinto grado de la forma $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, donde *a, b, c* y *d* son números enteros y *e* es un número entero conocido. Usar la división sintética para determinar si un polinomio de la forma $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ tiene como factor a $x - r$. Evaluar el polinomio en *r* para determinar si *r* es una raíz del polinomio. Sumar los exponentes de los factores en el polinomio. Identificar las raíces reales y sus multiplicidades en la gráfica del polinomio. Igualar a cero cada uno de los factores del polinomio y resolver la ecuación correspondiente. Identificar las raíces reales y sus multiplicidades en la gráfica del polinomio. Identificar la función que sea la reflexión a $p(x)$ con respecto al eje de las "x" y, asociarla a $-p(x)$. Identificar la función que sea la reflexión a $p(x)$ con respecto al eje de las "y" y, asociarla a $p(-x)$.
Proposiciones: Si *r* y *s* son números reales, entonces $rs = 0$ si y sólo si $r = 0$ ó $s = 0$. La fórmula general conduce a la solución de una ecuación cuadrática. La gráfica de una función cuadrática en una variable es una parábola. Toda función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se puede escribir en la forma $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$, donde r_1 y r_2 son las raíces de la función cuádratica. Las fórmulas de Cardano conducen a la solución de una ecuación cúbica. Si z_0 es una raíz compleja de un polinomio $p(x)$ con coeficientes reales, entonces su conjugado $\bar{z}_0$ también es raíz de $p(x)$. Si $p(x)$ es un polinomio con coeficientes complejos que está definido por $$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0, n \geq 1, a_n \neq 0.$$ Entonces $$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$$ Donde cada r_i $(i = 1,2, \cdots, n)$ es una raíz compleja de $p(x)$.Teorema del factor. Teorema del residuo. Fórmulas de Vieta.La regla de Ruffini provee una forma para evaluar polinomios. Si x_0 es una raíz de multiplicidad $k > 1$ de un polinomio $p(x)$ entonces x_0 es una raíz de multiplicidad $k - 1$ de la derivada de $p(x)$. Si x_0 es una raíz real del polinomio representado por $p(x)$ entonces, el punto $(x_0, 0)$ es la intersección de la gráfica de $p(x)$ con el eje horizontal (eje *x*). Suponer que $p(x)$ tiene un factor $(x - c)^k$ donde c es real y *k* es un entero positivo. Entonces, para valores de *x* cercanos a *c*. Si *k* es impar, la gráfica cruza al eje *x*. Si *k* es par, la gráfica toca el eje *x* pero no lo cruza. Sea $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, n \geq 1,$ la representación algebraica de un polinomio de grado *n*, entonces: 1) Si *n* es par y $a_n > 0$, el recorrido es el intervalo $[m, \infty)$ donde *m* es el valor mínimo de $p(x)$. 2) Si *n* es par y $a_n < 0$, el recorrido es el intervalo $(-\infty, M]$, donde *M* es el valor máximo de $p(x)$. 3) Si *n* es impar, el recorrido es el conjunto de los números reales $(-\infty, \infty)$. En este caso no existe un valor máximo o mínimo. Teorema de las raíces racionales de polinomios con coeficientes enteros. Teorema que relaciona las raíces de $p(x), -p(x)$ y $p(-x)$.

En el significado institucional pretendido están presentes la mayoría de las prácticas identificadas en el significado institucional de referencia. Una de las situaciones que se promueve en forma significativa a través de la realización de tareas en Maple T.A. es la asociación entre la representación algebraica y la gráfica de polinomios y sus raíces, donde la representación algebraica está dada en términos de factores lineales y sus raíces son números enteros.

Debido a dificultades en la automatización de reactivos en el sistema, no están presentes las situaciones que consisten en: aproximar raíces irracionales de polinomios (mediante el uso del método de bisección) y explorar las posibles distribuciones del número total de raíces positivas, negativas y complejas no reales de un polinomio a partir de sus variaciones de signo (mediante el uso de la regla de los signos de Descartes). Por el mismo motivo, la práctica de la argumentación no se promueve de forma explícita.

El lenguaje utilizado es el verbal, algebraico, gráfico, iconográfico (esquema de la división sintética) y la sintaxis propia del sistema.

4.3 Significado institucional evaluado

Desde el punto de vista del marco teórico del EOS, un instrumento de evaluación tiene como finalidad proporcionar información sobre los *significados personales* de un grupo de estudiantes sobre un objeto o un grupo de objetos matemáticos dados y la investigación encaminada a la construcción de estos instrumentos o el análisis de las respuestas a los mismos entraría en el campo de la *semiometría* (Godino, 1999; 2002). La semiometría contempla lo que se puede describir como *estática de significados sistémicos*, esto es, la caracterización de la trama de las funciones semióticas (o al menos una muestra representativa de tal trama) en las cuales un objeto se pone en juego en un contexto y circunstancias fijadas.

Aunque el objeto de estudio de la evaluación es el significado personal, este proceso no puede dejar de lado la faceta institucional de los objetos matemáticos, que sirve de pauta de comparación con los significados personales evaluados. Por otro lado, ni el significado global de un objeto de enseñanza ni siquiera los significados pretendidos o implementados en una enseñanza sobre dicho objeto pueden ser abarcados en un solo instrumento de evaluación. A continuación describiremos brevemente el proceso seguido en la construcción, en el sistema Maple T.A., de un examen dirigido a evaluar la comprensión del tema de polinomios para estudiantes de ingeniería de la Universidad de Sonora.

Para describir el *significado institucional pretendido* se analizaron las tareas correspondientes a ECUACIONES Y POLINOMIOS que se encuentran en el sistema Maple T.A. Para determinar el *significado evaluado* se analizan los reactivos que fueron seleccionados para estructurar el examen sobre el tema de polinomios en el sistema de evaluación Maple T.A.

Los bancos de reactivos en el Maple T.A. de la asignatura Álgebra, primero, se agrupan por temas (Figura 1.3.5). También, los bancos de reactivos están estructurados por Tópicos de reactivos llamados *Uniestructurales*, *Multiestructurales* o *Relacionales* según la taxonomía SOLO(Biggs, Collis, 1982), como se muestra en la Figura 5.3.1. Para este trabajo no se considerara esta clasificación como elemento de análisis, debido a que se está utilizando un marco teórico distinto.

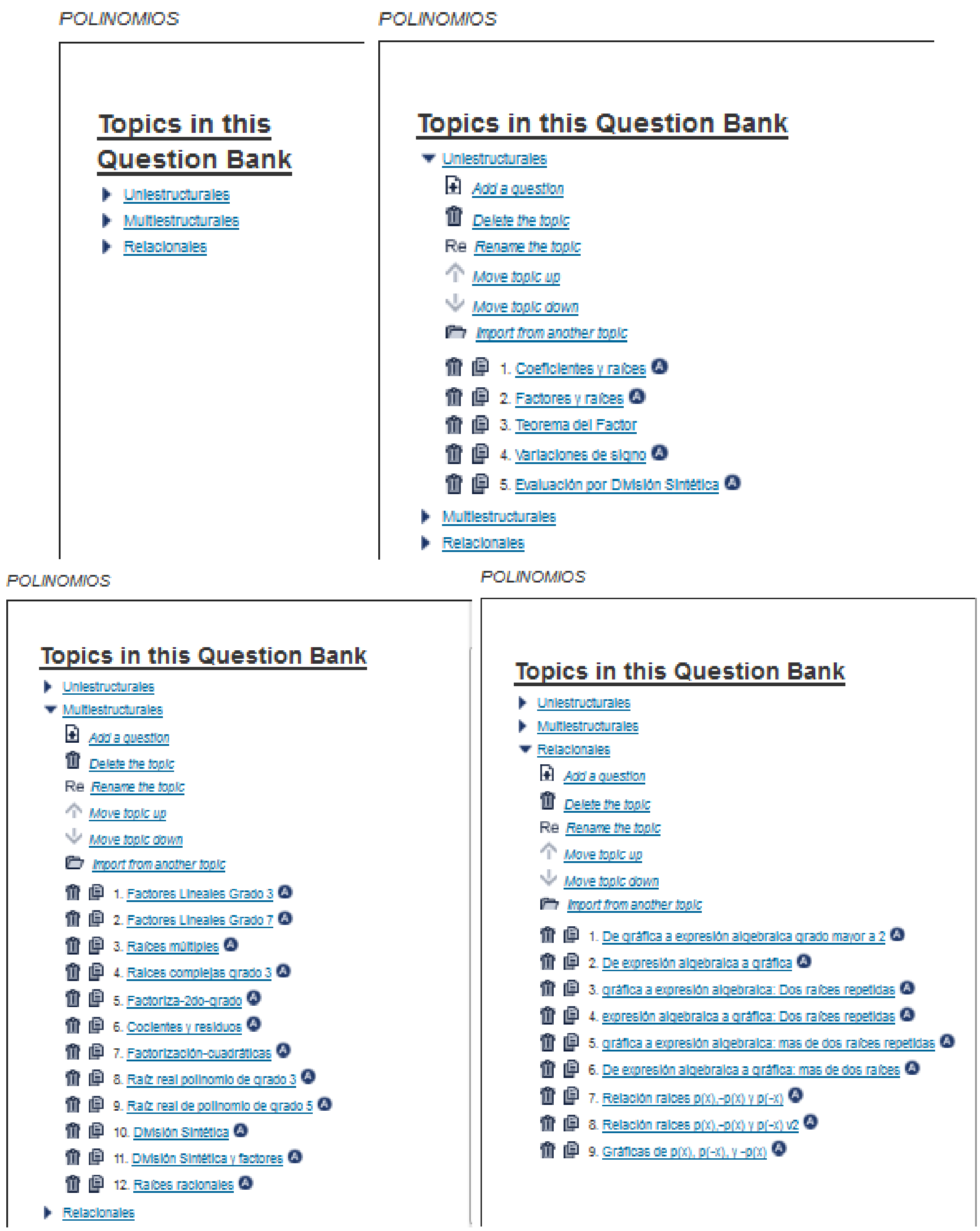


Figura 5.3.1 Banco de reactivos clasificados según la taxonomía SOLO

Los reactivos que formarán el examen del tema POLINOMIOS se toman de siete Grupos que a su vez se formaron de los bancos de reactivos. Los tipos de reactivos que forman los Grupos se muestran en la Figura 5.3.2.

EXAMEN DEPARTAMENTAL POLINOMIOS			
Assignment Type:	Proctored test, requires proctor sign-in	Send email to:	No mailing set
Pass/Fail:	The pass level is 6 out of 10.0	Time permitted:	No time limit
Display:	Show 1 question per page	Versioning:	Rearrange the order of the questions each time a fresh assignment is set.
Start:	No start time specified	End:	No ending time specified

Questions:

Question Group 1:
- Factores Lineales Grado 3
- Factores Lineales Grado 7
- Raíces múltiples
- Raíces complejas grado 3
- Factoriza-2do-grado
- División Sintética
- División Sintética y factores
- Raíces racionales

Question Group 2:
- Coeficientes y raíces
- Factores y raíces
- Teorema del Factor
- Variaciones de signo
- Evaluación por División Sintética

Question Group 3:
- De gráfica a expresión algebraica grado mayor a 2
- De expresión algebraica a gráfica
- gráfica a expresión algebraica: Dos raíces repetidas
- expresión algebraica a gráfica: Dos raíces repetidas
- gráfica a expresión algebraica: mas de dos raíces repetidas
- De expresión algebraica a gráfica: mas de dos raíces

Question Group 4:
- Relación raíces p(x),-p(x) y p(-x)
- Relación raíces p(x),-p(x) y p(-x) v2
- Gráficas de p(x), p(-x), y -p(x)

Question Group 5:
- Cocientes y residuos
- De gráfica a expresión algebraica: cuadrática
- De expresión algebraica a gráfica: cuadrática
- Construcción ecuaciones segundo grado
- Construcción ecuaciones segundo grado raíz compleja
- Construcción ecuaciones segundo grado raíz racional
- Soluciones cuadrática
- Soluciones cuadrática racionales
- Soluciones cuadrática complejas
- Soluciones cuadrática general

Question 6: Factorización

Question Group 7:
- De gráfica a expresión algebraica
- De expresión algebraica a gráfica

Figura 5.3.2 Grupos de reactivos para formar el Examen de Polinomios

Los exámenes que se analizan en esta investigación se diseñaron tomando al azar dos reactivos del Grupo 1, dos reactivos del Grupo 2, uno del Grupo 3, uno del Grupo 4, dos del Grupo 5, uno del Grupo 6 y uno del Grupo 7, para formar un examen de diez reactivos (ver Figura 5.3.3). De esta manera se pueden formar $C_2^8 C_2^5 C_1^6 C_1^3 C_2^{10} C_1^1 C_1^2 = 28 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 = 10,080$ tipos diferentes de exámenes, y dado que los reactivos que forman estos tipos de exámenesson dinámicos, aumenta considerablemente el número de exámenes posibles distintos.

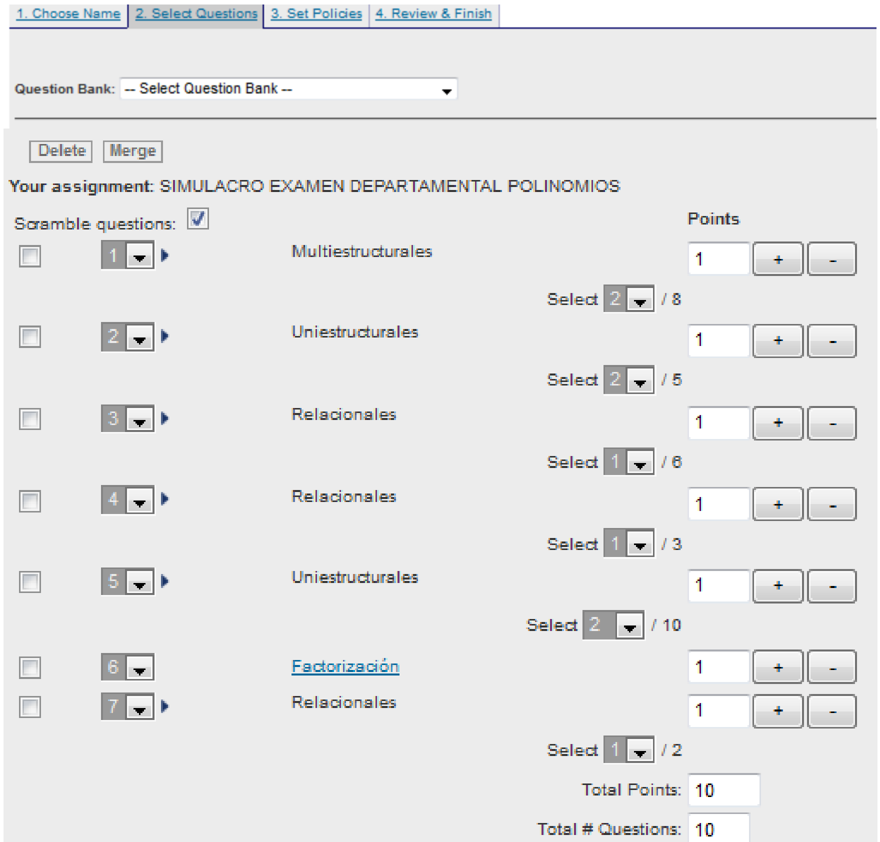


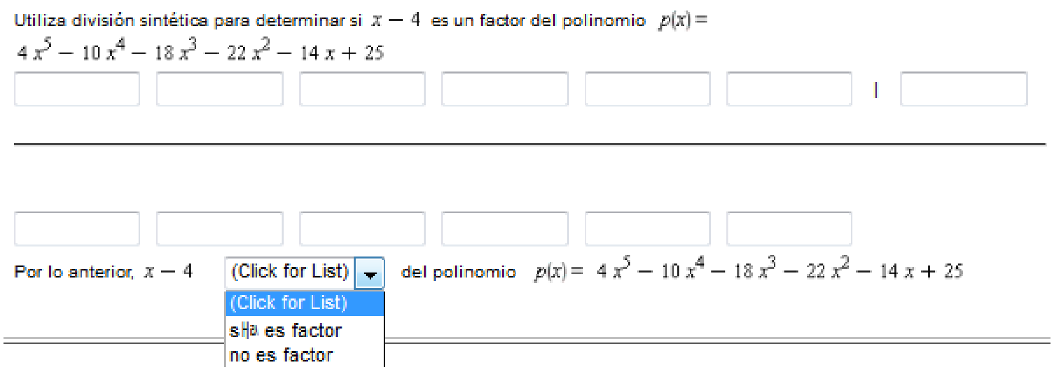
Figura 5.3.3 Formación de un examen

En la Figura 5.3.3 se observa que todo examen contiene el reactivo de Factorización del Grupo 6. También, observando las Figuras 5.3.2 y 5.3.3 todo examen contará con un reactivo en el cual se solicita relacionar la representación gráfica con la representación algebraica de un polinomio, esto muestra el interés de la institución de que los estudiantes dominen más de una representación de los polinomios.

En el ANEXO 1 se muestra como ejemplo un examen de polinomios generado en el sistema de evaluación en línea Maple T.A. Al final de cada reactivo del examen se declara el grupo al que pertenece y el nombre que caracteriza al tipo de reactivo.

Para determinar el significado institucional evaluado se realizó un análisis semiótico de los reactivos que forman los exámenes de los seis casos (estudiantes)analizados para determinar el significado personal. En dicho análisis se determinan las prácticas matemáticas, los elementos básicos del significado y funciones semióticas que relacionan a estos últimos. A continuación se muestra el análisis realizado a los reactivos.

Unidad de análisis U₁: Reactivo 1



Situaciones y prácticas matemáticas

Situación:

- Utilizar división sintética con el fin de determinar si el binomio de la forma $x - r$ es factor de un polinomio de quinto grado.

Prácticas institucionales:

- Realizar la división sintética utilizando el esquema dado en el sistema.
- Después de realizar la división sintética es necesario identificar el residuo.
- Concluir si el binomio de la forma $x - r$ si es factor del polinomio en cuestión.

Objetos matemáticos institucionales

- La situación problema consiste en utilizar división sintética para determinar si $x - 4$ es factor de un polinomio de quinto grado.
- El lenguaje utilizado es verbal, algebraico, numérico y el esquema para la división sintética.
- Los conceptos presentes son: factor y polinomio, el concepto que emerge es el de residuo.
- Procedimiento: utilizar el esquema de la división sintética e identificar el último número con el residuo.
- Proposición: teorema del factor y la raíz, teorema del residuo.

Funciones semióticas institucionales (FS)

Algunas de las funciones semióticas (FS) útiles para resolver la situación en esta unidad de análisis son:

- FS1: Relacionar el polinomio $4x^5 - 10x^4 - 18x^3 - 22x^2 - 14x + 25$ con la lista de números $4, -10, -18, -22, -14, 25$ considerando el procedimiento de la división sintética.

$4x^5 - 10x^4 - 18x^3 - 22x^2 - 14x + 25$ → $4, -10, -18, -22, -14, 25$

- FS2: Relacionar al binomio $x - 4$ el número 4 escrito al final de la primer fila, en elesquema de la división sintética.

$x - 4$ → $\underline{4}\ \underline{-10}\ \underline{-18}\ \underline{-22}\ \underline{-14}\ \underline{25} \mid \underline{4}$

- FS3: Relacionar con el esquema anterior el procedimiento aritmético asociado a la división sintética.

$\underline{4}\ \underline{-10}\ \underline{-18}\ \underline{-22}\ \underline{-14}\ \underline{25} \mid \underline{4}$ → $\underline{4}\ \underline{-10}\ \underline{-18}\ \underline{-22}\ \underline{-14}\ \underline{25} \mid \underline{4}$ / $\underline{4\ 6}\ \ \underline{6}\ \underline{2}\ \ \underline{-61}$

- FS3: Relacionar el número que aparece al final del procedimiento aritmético asociado a la división sintética con el residuo.

$\underline{4}\ \underline{-10}\ \underline{-18}\ \underline{-22}\ \underline{-14}\ \underline{25} \mid \underline{4}$ / $\underline{4}\ \underline{6}\ \underline{6}\ \ \underline{2}\ \ \underline{-61}$ → Residuo = 1

- FS4: Relacionar el valor del residuo igual a cero con una división exacta.
- FS5: Relacionar la división exacta con el divisor como factor del polinomio.
- FS6: Relacionar el valor del residuo distinto a cero con una división no exacta.
- FS7: Relacionar la división no exacta con el divisor como no factor del polinomio.

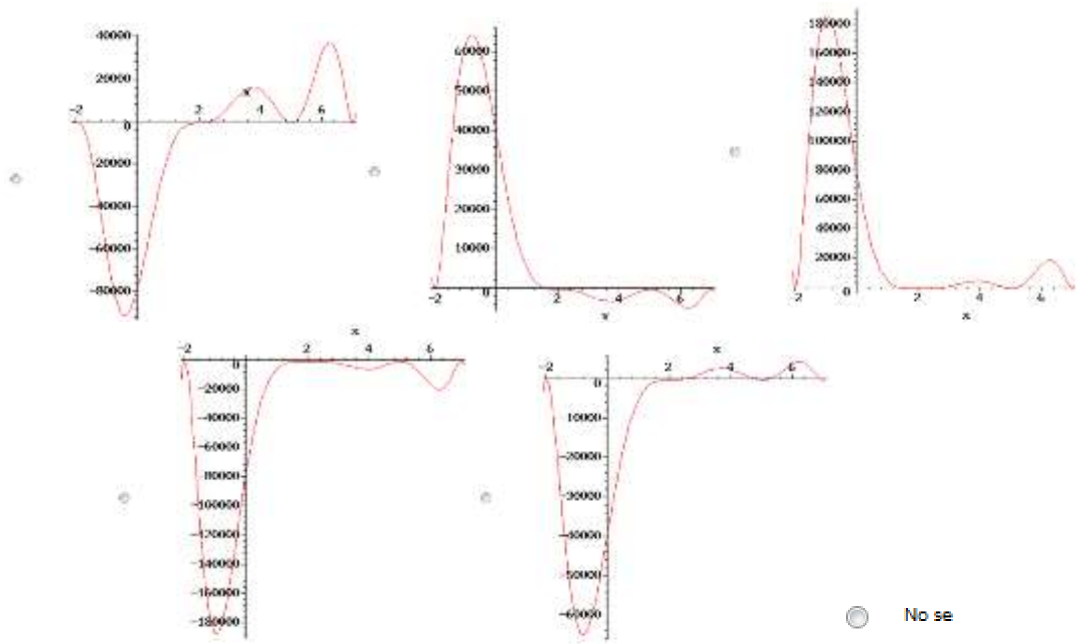
Unidad de análisis U₂: Reactivo 2.

El grado del polinomio $(x+2)^2(x-2)^3(x-5)^2(x-7)^2$ es

Sus raíces son ☐ 7 ☐ 5 ☐ -0.5 ☐ -5 ☐ -2 ☐ 2 ☐ -7 ☐ -1 ☐ No se

Partial Grading Explained

Seleccione la gráfica que corresponde al polinomio



Situaciones y prácticas matemáticas

Situaciones:

- Determinar el grado de un polinomio dado como producto de factores lineales.
- Obtener las raíces de un polinomio expresado como producto de factores lineales.
- Dadas cinco gráficas, seleccionar la que corresponde al polinomio proporcionado algebraicamente.

Prácticas institucionales:

- Sumar los exponentes de los factores lineales.
- Igualar a cero cada uno de los factores lineales y resolver la ecuación correspondiente.
- Asociar las raíces del polinomio y sus multiplicidades en forma algebraica y gráfica.
- Considerar el signo del coeficiente del término de mayor grado y la paridad del grado del polinomio, para determinar la forma de la gráfica.

Objetos matemáticos institucionales

- Situación Problema: determinar el grado y las raíces de un polinomio dado como producto de factores lineales, y dadas cinco gráficas, seleccionar la que corresponde al polinomio proporcionado algebraicamente.
- El lenguaje presente es verbal, algebraico, gráfico y numérico.
- Conceptos: polinomio, grado y raíces de polinomios, y gráfica.

- El procedimiento para determinar el grado del polinomio consiste en sumar los exponentes de los factores lineales del polinomio, para determinar las raíces se iguala a cero cada uno de los factores lineales y se resuelven las ecuaciones resultantes. Para seleccionar la gráfica que corresponde al polinomio dado en forma algebraica es necesario asociar las raíces del polinomio y sus multiplicidades en forma algebraica y gráfica, y considerar el signo del coeficiente del término de mayor grado y la paridad del grado del polinomio, para determinar la forma de la gráfica.
- Proposiciones: Teorema fundamental del álgebra, teorema referente a las raíces y sus multiplicidades y trazo final de la gráfica de un polinomio de grado *n*.

  Si x_0 es una raíz real del polinomio representado por $p(x)$ entonces, el punto $(x_0, 0)$ es la intersección de la gráfica de $p(x)$ con el eje horizontal (eje *x*).

  Suponer que $p(x)$ tiene un factor $(x-c)^k$y que $(x-c)^{k+1}$ no es factor, donde *c* es real y *k*es un entero positivo. Entonces, para valores de *x*cercanos a *c*.

  Si *k* es impar, la gráfica cruza al eje *x*.

  Si *k* es par, la gráfica toca el eje *x* pero no lo cruza.

  Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, n \geq 1,$ la representación algebraica de un polinomio de grado n, entonces:

  Si *n* es par y $a_n > 0$, el recorrido es el intervalo $[m, \infty)$ donde m es el valor mínimo de $p(x)$.

  Si *n* es par y $a_n < 0$, el recorrido es el intervalo $(-\infty, M]$, donde M es el valor máximo de $p(x)$.

  Si *n* es impar, el recorrido es el conjunto de los números reales $(-\infty, \infty)$. En este caso no existe un valor máximo o mínimo.

Funciones semióticas institucionales

FS1: Asociar al grado del polinomio $(x+2)^2(x-2)^3(x-5)^2(x-7)^2$el exponente del término de mayor grado.

FS2: Asociar al exponente del término de mayor grado de $(x+2)^2(x-2)^3(x-5)^2(x-7)^2$ la suma de los exponentes de los factores lineales.

$$\boxed{(x+2)^2(x-2)^3(x-5)^2(x-7)^2} \Rightarrow \boxed{2+3+2+2=9}$$

FS3: Relacionar $(x+2)^2(x-2)^3(x-5)^2(x-7)^2$ con los números $-2, 2, 5, 7$, mediante la definición de raíz de polinomio.

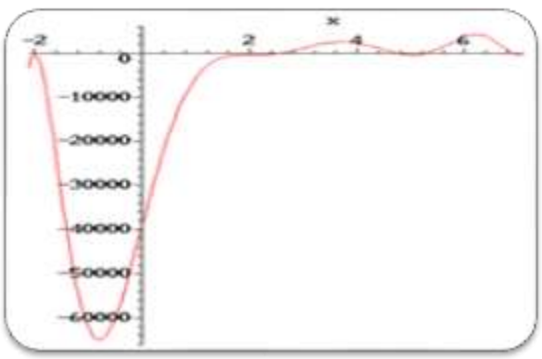
$(x+2)^2(x-2)^3(x-5)^2(x-7)^2$ → raíces del polinomio $-2,\ 2,\ 5,\ 7$

FS3: Relacionar a los exponentes de los factores lineales de la expresión polinomial la multiplicidad de la raíz correspondiente.

$(x+2)^2(x-2)^3(x-5)^2(x-7)^2$ →

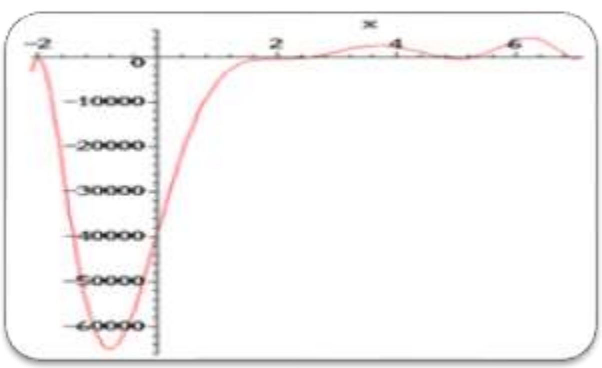
-2 *raíz de multiplicidad* 2
2 *de multiplicidad* 3
5 *de multiplicidad* 2
7 *de multiplicidad* 2

FS4: Relacionar a las intersecciones de la gráfica con el eje de las *x* las raíces del polinomio.



→ raíces del polinomio $-2,\ 2,\ 5,\ 7$

FS5: Relacionar la forma de las intersecciones con su multiplicidad.

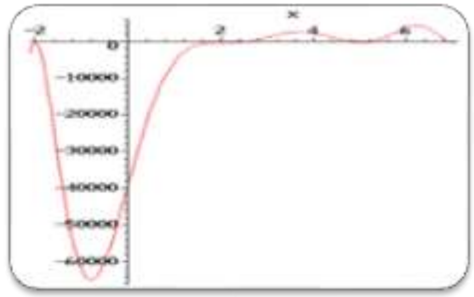


→

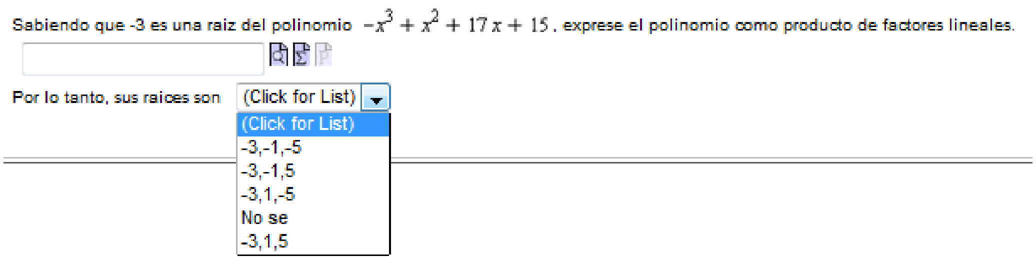
-2 de multiplicidad 2
2 de multiplicidad 3
5 de multiplicidad 2
7 de multiplicidad 2

FS6: Relacionar $(x+2)^2(x-2)^3(x-5)^2(x-7)^2$ con la gráfica.

$$(x+2)^2(x-2)^3(x-5)^2(x-7)^2$$



Unidad de análisis U_3: Reactivo 3.



Situaciones y prácticas matemáticas

Situaciones:

- Dada una raíz real de un polinomio de tercer grado expresarlo como un producto de factores lineales.
- Se piden las raíces del polinomio en cuestión.

Prácticas matemáticas:

- Dividir el polinomio de tercer grado entre $x + 3$.
- Determinar las raíces del polinomio cociente.
- Escribir el polinomio cociente como producto de factores lineales.
- Expresar el polinomio en cuestión como producto de factores lineales.

Objetos matemáticos institucionales:

- Situación problema: dada una raíz real de un polinomio de tercer grado expresar el polinomio como un producto de factores lineales y determinar las raíces del polinomio en cuestión.
- Lenguaje: verbal, algebraico y numérico.
- Conceptos: polinomio, raíz de polinomio, factores lineales.

- Procedimiento: dividir el polinomio entre $x - r$, obtener las raíces del polinomio cociente, escribir el polinomio cociente como producto de factores lineales,escribir el polinomio de tercer grado como producto de factores lineales.
- Proposiciones: la fórmula general conduce a la resolución de una ecuación cuadrática, todo polinomio puede escribirse como producto de factores lineales, teorema del factor.

Funciones semióticas institucionales:

FS1: Asociar a la raíz -3 el factor $(x+3)$.

FS2: Asociar al factor $(x+3)$ una división de polinomios.

FS3: Expresar el polinomio $-x^3 + x^2 + 17x + 15$ en la forma $(x+3)(-x^2+4x+5)$.

$$-x^3 + x^2 + 17x + 15 \quad \Rightarrow \quad (x+3)(-x^2+4x+5)$$

FS4: Relacionar $(x+3)(-x^2+4x+5)$ a$-(x+3)(x-5)(x+1)$.

$$(x+3)(-x^2+4x+5) \quad \Rightarrow \quad -(x+3)(x-5)(x+1)$$

FS5: Relacionar $(x+3)(-x^2+4x+5)$ a$(x+3)(-x+5)(x+1)$.

$$(x+3)(-x^2+4x+5) \quad \Rightarrow \quad (x+3)(-x+5)(x+1)$$

FS6: Relacionar $-(x+3)(x-5)(x+1)$a sus raíces $-3, 5, -1$.

$$-(x+3)(x-5)(x+1) \quad \Rightarrow \quad -3, \quad 5, -1$$

Unidad de análisis U₄: Reactivo 4.

Question:

Las soluciones exactas de la ecuación $7x^2 + x - 5 = 0$ son:

Escribe las soluciones (valores numéricos solamente) separadas por ;

Situaciones y Prácticas matemáticas

Situación institucional:

- Determinar las soluciones de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Prácticas matemáticas institucionales:

- Uso de la fórmula general.
- Completar el trinomio cuadrado perfecto.
- Escribir las soluciones en el sistema respetando la sintaxis.

Objetos matemáticos institucionales:

- La situación problema consiste en determinar las soluciones de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.
- El lenguaje utilizado es verbal, algebraico, numérico y sintaxis del sistema.
- Conceptos: ecuación y solución de ecuación.
- Procedimientos: uso de la fórmula cuadrática, completar el trinomio cuadrado perfecto y despejar.
- Proposiciones: la fórmula general conduce a la resolución de una ecuación cuadrática

Funciones semióticas institucionales

FS1: Relacionar a la ecuación cuadrática la fórmula general.

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

FS2: Relacionar a la fórmula general las soluciones de una ecuación cuadrática.

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\textit{Soluciones de la ecuación cuadrática}}$$

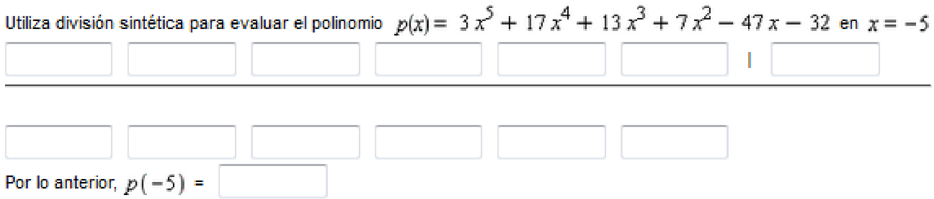
FS3: Relacionar a la ecuación cuadrática el procedimiento de completar el trinomio cuadrado perfecto.

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{c}{2a}\right)^2 - \left(\frac{c}{2a}\right)^2 = 0}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{c}{2a}\right)^2 - \left(\frac{c}{2a}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x + \left(\frac{c}{2a}\right))^2 = \left(\frac{c}{2a}\right)^2$$

$$(x + \left(\frac{c}{2a}\right))^2 = \left(\frac{c}{2a}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Unidad de análisis U_5: Reactivo 5.


Utiliza división sintética para evaluar el polinomio $p(x) = 3x^5 + 17x^4 + 13x^3 + 7x^2 - 47x - 32$ en $x = -5$

Por lo anterior, $p(-5) =$

Situaciones y prácticas matemáticas

Situaciones:

- Utilizar división sintética para evaluar un polinomio de quinto grado en un número entero.

Prácticas matemáticas institucionales:

- Utilizar división sintética con el fin de dividir un polinomio de quinto grado entre un binomio de la forma $x - r$.
- Identificar el valor solicitado $p(r)$ y registrarlo en el sistema.

Objetos matemáticos institucionales:

- La situación problema consiste en utilizar división sintética para evaluar un polinomio de quinto grado en un número entero r.
- El lenguaje utilizado es verbal, algebraico y el esquema para la división sintética.
- Conceptos: Polinomio, división sintética, evaluar el polinomio y residuo.
- División sintética es el procedimiento propuesto.
- Proposiciones: la regla de Ruffini provee una forma para evaluar polinomios y el teorema del residuo.

Funciones semióticas institucionales

FS1: Relacionar al polinomio $p(x) = 3x^5 + 17x^4 + 13x^3 + 7x^2 - 47x - 32$ con la lista de números $3, 17, 13,\ 7, -47, -32$, considerando el procedimiento de la división sintética

$$3x^5 + 17x^4 + 13x^3 + 7x^2 - 47x - 32 \quad \Rightarrow \quad 3\ \ 17\ \ 13\ \ 7\ \ -47\ \ -32$$

FS2: Escribir el número -5 al final de la primera fila en el esquema de división sintética.

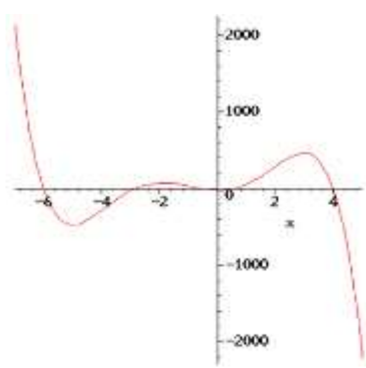
$$-5 \quad \Rightarrow \quad \underline{3}\ \ \underline{17}\ \ \underline{137-47}\ \ \underline{-32}|\ \ \underline{-5}$$

FS3: Asociar a el último número calculado en la división sintética el valor $p(-5)$.

$$\begin{array}{l} \underline{3}\ \ \underline{17}\ \ \underline{13\ \ 7-47}\ \ \underline{-32}|\ \ \underline{-5} \\ \quad \underline{3\ \ 2\ \ 3}\ \ \underline{-8}\ \ \underline{-7}\ \ \underline{\ \ 3\ \ } \end{array} \quad \Rightarrow \quad p(-5) = 3$$

Unidad de análisis U_6: Reactivo 6.

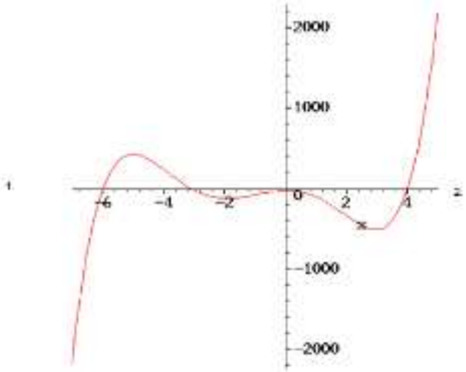
Si la gráfica de $p(x)$ es

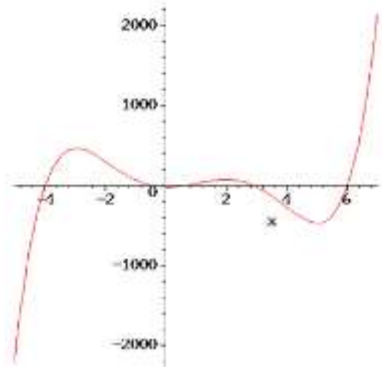


asocie las gráficas correspondientes a

— -p(x) — p(-x)

—
1
2





Situaciones y prácticas matemáticas

Situación institucional:

- Dada la gráfica de un polinomio $p(x)$, asociar la gráficas dadas que correspondan a $-p(x)$y a $p(-x)$.

Prácticas matemáticas institucionales:

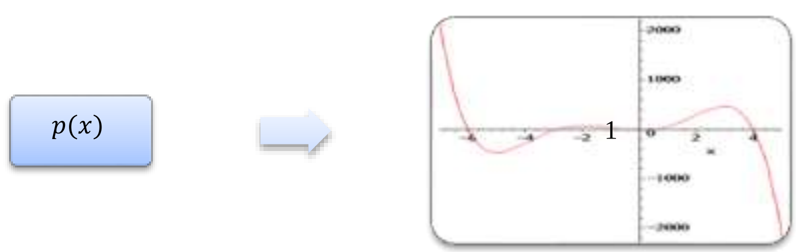
- Analizar las reflexiones de la gráfica con respecto a los ejes coordenados.

Objetos matemáticos institucionales

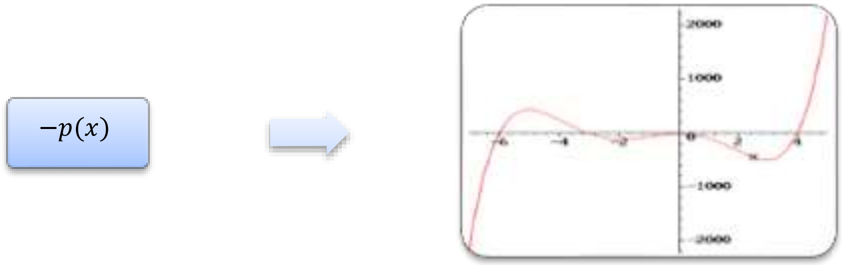
- Situación problema: dada la gráfica de un polinomio $p(x)$, asociar las gráfica (dadas) con $-p(x)$ o$p(-x)$ según corresponda.
- Lenguaje: verbal, algebraico y gráfico.
- Conceptos:de gráfica, polinomio,raíz de polinomio y reflexiones con respecto a un eje.
- El procedimiento para resolver la situación se basa en la reflexión de la gráfica de $p(x)$ con los ejes coordenados.

Funciones semióticas institucionales

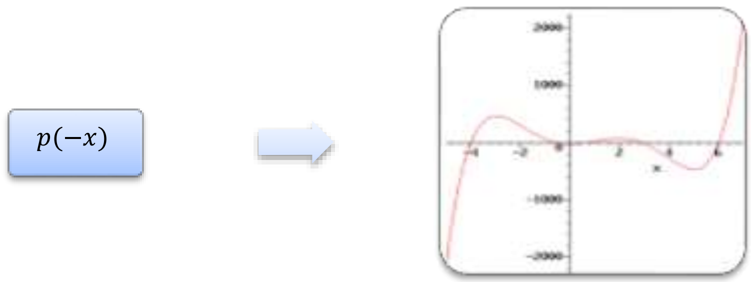
FS1: Asociar $p(x)$ a su gráfica.



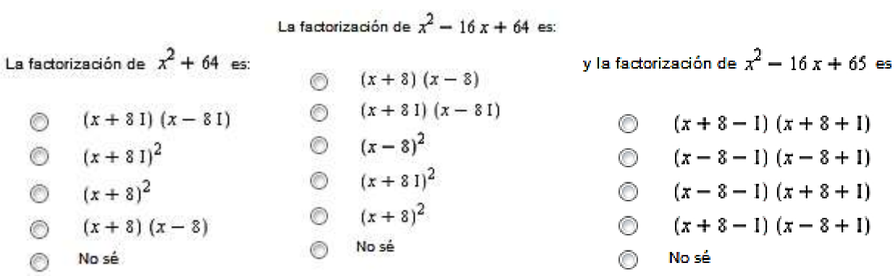
FS2: Asociar $-p(x)$ con la reflexión de la gráfica de$p(x)$ con respecto al eje x.



FS3: Asociar a $p(-x)$ la reflexión de la gráfica de $p(x)$ conrespecto al eje y.



Unidad de análisis U₇: Reactivo 7.



La factorización de $x^2 + 64$ es:

- $(x+8\,I)\,(x-8\,I)$
- $(x+8\,I)^2$
- $(x+8)^2$
- $(x+8)\,(x-8)$
- No sé

La factorización de $x^2 - 16\,x + 64$ es:

- $(x+8)\,(x-8)$
- $(x+8\,I)\,(x-8\,I)$
- $(x-8)^2$
- $(x+8\,I)^2$
- $(x+8)^2$
- No sé

y la factorización de $x^2 - 16\,x + 65$ es

- $(x+8-I)\,(x+8+I)$
- $(x-8-I)\,(x-8+I)$
- $(x-8-I)\,(x+8+I)$
- $(x+8-I)\,(x-8+I)$
- No sé

Situaciones y prácticas matemáticas

Situaciones institucionales:

- Seleccionar la factorización que corresponde a una expresión cuadrática de la forma $x^2 + a^2$, las opciones dadas son de la forma:
  - $(x + aI)(x - aI)$
  - $(x + aI)^2$
  - $(x + a)^2$
  - $(x + a)(x - a)$
  - No sé.
- Seleccionar la factorización que corresponde a una expresión cuadrática de la forma $x^2 - 2ax + a^2$, las opciones dadas son de la forma:
  - $(x + a)(x - a)$

- $(x + aI)(x - aI)$
- $(x - a)^2$
- $(x + aI)^2$
- $(x + a)^2$
- No sé.

- Seleccionar la factorización que corresponde a una expresión cuadrática de la forma $x^2 - 2ax + a^2 + 1$, las opciones dadas son de la forma:
  - $(x + a - I)(x + a + I)$
  - $(x - a - I)(x - a + I)$
  - $(x - a - I)(x + a + I)$
  - $(x + a - I)(x - a + I)$
  - No sé.

Prácticas matemáticas institucionales:

- Analizar los coeficientes de la expresión cuadrática a factorizar.
- Realizar los productos que se ofrecen como opciones de factorización en cada uno de los casos con el fin de encontrar la factorización correcta.

Objetos matemáticos institucionales:

- La situación problema consiste en seleccionar la factorización correcta de tres expresiones cuadráticas: una suma de cuadrados, un trinomio cuadrado perfecto y una expresión que resulta de sumar uno al trinomio cuadrado perfecto anterior.
- El lenguaje: verbal y algebraico.
- Concepto: expresiones cuadráticas, factorización.
- Procedimiento: Análisis de los coeficientes de una expresión cuadrática y/o desarrollo de producto de factores lineales.

Funciones semióticas institucionales:

FS1: Relacionar $x^2 + 64$ a$(x + 8I)(x - 8I)$.

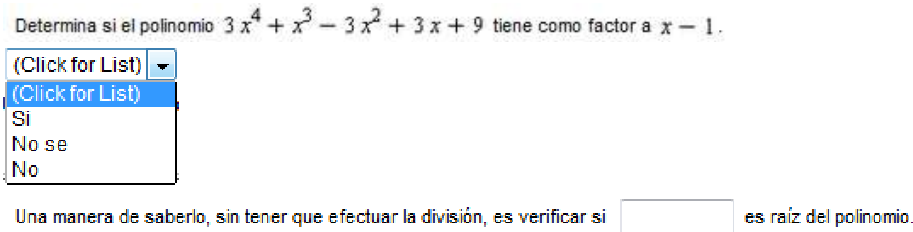
$$\boxed{x^2 + 64} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(x + 8I)(x - 8I)}$$

FS2: Relacionar $x^2 - 16x + 64$ a$(x - 8)(x - 8)$.

$$\boxed{x^2 - 16x + 64} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(x - 8)(x - 8)}$$

FS3: Relacionar $x^2 - 16x + 65$ *a* $(x - 8 - I)(x - 8 + I)$.

Unidad de análisis U_8: Reactivo 8.


Determina si el polinomio $3x^4 + x^3 - 3x^2 + 3x + 9$ tiene como factor a $x - 1$.

(Click for List)
(Click for List)
Si
No se
No

Una manera de saberlo, sin tener que efectuar la división, es verificar si ____ es raíz del polinomio.

Situaciones y prácticas matemáticas

Situaciones institucionales:

- Se promueven dos formas distintas para determinar si un polinomio de quinto grado tiene como factor a un binomio de la forma $x - r$:
  - una de las maneras es dividir el polinomio entre $x - r$,
  - y la otra es verificar que r es raíz del polinomio dado.

Prácticas matemáticas institucionales:

- Dividir el polinomio dado entre un binomio de la forma $x - r$.
- Evaluar un polinomio en un número.

Objetos matemáticos institucionales:

- Situación problema: determinar si un polinomio dado de quinto grado tiene como factor a un binomio de la forma $x - r$, y plantea que otra manera de saberlo sin tener que efectuar la división, es verificar que r es raíz del polinomio.
- El lenguaje utilizado es el verbal y el algebraico.
- Conceptos: polinomio, raíz de polinomio y factor.
- Uno de los procedimientos que se menciona para resolver la situación es la división entre polinomios y el otro consiste en evaluar un polinomio en el número r.
- Las proposiciones que resultan útiles para avalar el procedimiento son el teorema de la raíz y el factor.

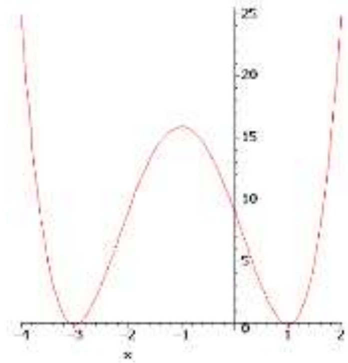
Funciones semióticas institucionales:

FS1: Asociar “r es raíz del polinomio” a “$x - r$ es factor del polinomio”.

FS2: Asociar “r no es raíz del polinomio” a “$x - r$ no es factor del polinomio”.

Unidad de análisis U_9: Reactivo 9.

Seleccione la expresión algebraica que corresponde al polinomio representado en la siguiente gráfica



- $(x+3)^2(x-1)^2$
- $(x+3)^2(x-1)$
- $-(x+3)^2(x-1)^2$
- $(x+3)^3(x-1)^2$
- $-(x+3)^3(x-1)^2$
- No se

El grado del polinomio es

Situaciones y prácticas matemáticas

Situaciones:

- Seleccionar la expresión algebraica que corresponde al polinomio representado gráficamente.
- Determinar el grado del polinomio en cuestión.

Prácticas matemáticas institucionales:

- Determinación de raíces y sus multiplicidades de un polinomio dado algebraicamente.
- Determinación de raíces y sus multiplicidades de un polinomio representado gráficamente.
- Articulación entre la forma gráfica y algebraica de un polinomio.

Objetos matemáticos institucionales

- Situaciones problemas: seleccionar de entre cinco expresiones algebraicas la que corresponde al polinomio representado gráficamente y determinar el grado del polinomio en cuestión.
- Lenguaje: verbal, algebraico y el gráfico.
- Conceptos: polinomio, gráfica y grado de un polinomio, y emergen los conceptos de raíz y raíces múltiples.
- Procedimiento: Articulación entre la expresión gráfica de un polinomio y su representación algebraica y, suma de las multiplicidades de las raíces del polinomio dado algebraicamente.

- Proposiciones: Si x_0 es una raíz real del polinomio representado por $p(x)$ entonces, el punto $(x_0, 0)$ es la intersección de la gráfica de $p(x)$ con el eje horizontal (eje x). Suponer que $p(x)$ tiene un factor $(x-c)^k$ y que $(x-c)^{k+1}$ no es factor, donde c es real y k es un entero positivo. Entonces, para valores de x cercanos a c.

  Si k es impar, la gráfica cruza al eje x.

  Si k es par, la gráfica toca el eje x pero no lo cruza.

  Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, n \geq 1$, la representación algebraica de un polinomio de grado n, entonces:

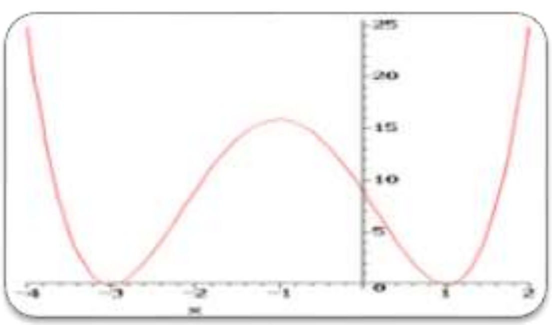
  Si n es par y $a_n > 0$, el recorrido es el intervalo $[m, \infty)$ donde m es el valor mínimo de $p(x)$.

  Si n es par y $a_n < 0$, el recorrido es el intervalo $(-\infty, M]$, donde M es el valor máximo de $p(x)$.

  Si n es impar, el recorrido es el conjunto de los números reales $(-\infty, \infty)$. En este caso no existe un valor máximo o mínimo.

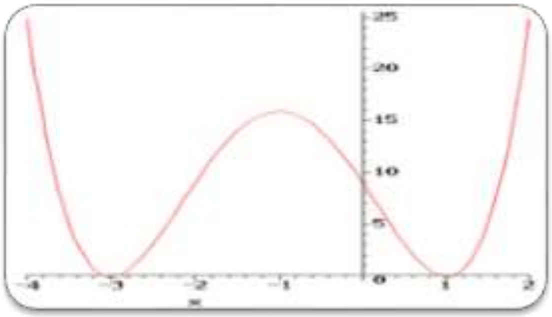
Funciones semióticas institucionales

FS1: Asociar a las intersecciones que se dan entre la gráfica y el eje x, las raíces del polinomio.



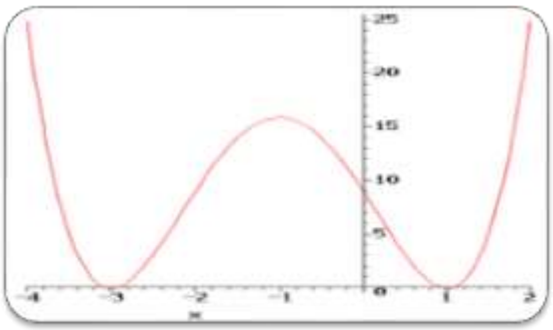
raíces del polinomio $-3, 1$

FS2: Asociar a la forma de las intersecciones entre la gráfica y el eje x, la multiplicidad de las raíces.



−3 raíz de multiplicidad 2
1 raíz de multiplicidad 2

FS3: Asociar al polinomio representado por la gráfica el grado que le corresponde.



Grado 4

FS4: Asociar a la expresión $(x+3)^2(x-1)^2$ sus raíces -3 y 1.

$(x+3)^2(x-1)^2$

raíces del polinomio -3 y 1

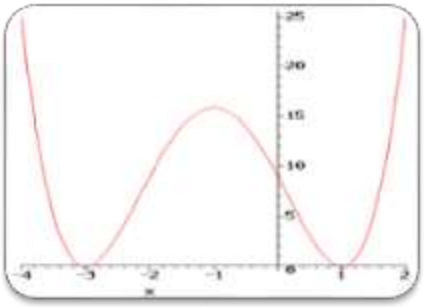
FS5: Relacionar a los exponentes en la expresión algebraica $(x+3)^2(x-1)^2$ la multiplicidad de sus raíces.

$(x+3)^2(x-1)^2$

-3 raíz de multiplicidad 2
1 raíz de multilicidad 2

FS6: Asociar a el grado del polinomio representado por $(x+3)^2(x-1)^2$ la suma de sus exponentes (Asociar el grado del polinomio representado por $(x+3)^2(x-1)^2$ con la suma de las multiplicidades de sus raíces).

FS7: Asociar a la gráfica dada la expresión $(x+3)^2(x-1)^2$.



$(x+3)^2(x-1)^2$

Unidad de análisis U₁₀: Reactivo 10.

El cociente que resulta al dividir $-5x^3 - 31x^2 + 28x$ entre $x+7$ es:

y el residuo es

Situaciones y prácticas matemáticas

Situaciones:

- Obtener el cociente y el residuo que resulta al dividir un polinomio de tercer grado entre uno de la forma $x - r$, donde r es un número entero.

Prácticas institucionales:

- División de polinomios.
- Determinación del cociente y residuo, al realizar división de polinomios.

Objetos matemáticos institucionales:

- Situación problema: Determinar el cociente y el residuo, al realizar división de polinomios.
- Lenguaje: Verbal, algebraico, numérico y sintaxis del sistema.
- Conceptos: Polinomio, división de polinomios, cociente y residuo de división de polinomios.
- Procedimientos: División de polinomios.
- Proposición: Teorema del algoritmo de la división de polinomios.

Funciones semióticas institucionales:

- FS1: Asociar al procedimiento de la división entre polinomios a el cociente correspondiente.
- FS2: Asociar al procedimiento de la división entre polinomios a el residuo correspondiente.

Unidad de análisis U_{11}: Reactivo 11.

Considera el polinomio $x^4 + b\,x^3 + 4\,x^2 + 2\,x - 8$

Determina el número de variaciones de signo del polinomio, considerando que b es un número positivo.

Determina el número de variaciones de signo del polinomio, considerando que b es un número negativo.

Situaciones y prácticas matemáticas

Situación:

- Determinar el número de variaciones de signo de un polinomio.

Práctica matemática institucional:

- Comparar el signo de coeficientes consecutivos en un polinomio ordenado por potencias de la indeterminada.

Objetos matemáticos institucionales:

- Situación problema: Determinar el número de variaciones de signo de un polinomio.
- Lenguaje: Verbal, algebraico y numérico.
- Conceptos: Polinomio y variaciones de signo de un polinomio.
- Procedimiento: Comparar el signo de coeficientes consecutivos en un polinomio ordenado por potencias de la indeterminada.

Funciones semióticas institucionales:

FS1: Asociar al polinomio $x^4 + bx^3 + 4x^2 + 2x - 8$ donde $b > 0$ la sucesión de signos $(+\ +\ +\ +\ -)$.

FS2: Asociar a la sucesión de signos $(+\ +\ +\ +\ -)$ el númerode veces que se registra cambio entre signos consecutivos.

FS3: Asociar al polinomio $x^4 + bx^3 + 4x^2 + 2x - 8$ donde $b < 0$ la sucesión de signos $(+\ -\ +\ +\ -)$.

FS2: Asociar a la sucesión de signos $(+\ -\ +\ +\ -)$ el númerode veces que se registra cambio entre signos consecutivos.

Unidad de análisis U_{12}: Reactivo 12.

Sabiendo que $-4 - I$ es una raíz del polinomio $-x^3 - 13x^2 - 57x - 85$, encuentre las otras raíces.
(escribalas separadas por comas, primero las raíces complejas y despues las raíces reales)

Situaciones y prácticas matemáticas institucionales

Situación institucional:

- Sabiendo que $-4 - I$ es una raíz del polinomio $-x^3 - 13x^2 - 57x - 85$, encontrar las otras raíces.

Prácticas matemáticas institucionales:

- Uso del teorema referente a raíces complejas conjugadas de un polinomio con coeficientes reales. Sabiendo que $-4 - I$ es una raíz del polinomio dado, también lo es su conjugado $-4 + I$.
- Uso de las fórmulas de Vieta.
- Desarrollo de producto de factores lineales de la forma $\big(x - (-4 - I)\big)\big(x - (-4 + I)\big)$.
- División del polinomio $-x^3 - 13x^2 - 57x - 85$ entre el polinomio obtenido al desarrollar $\big(x - (-4 - I)\big)\big(x - (-4 + I)\big)$.
- Igualar a cero el polinomio cociente de la división anterior, y resolver la ecuación resultante.
- Registrar las raíces en el sistema.

Objetos matemáticos institucionales:

- Situación problema: Dada una raíz no real de un polinomio de tercer grado, encontrar las otras.
- Lenguaje: Verbal, numérico, algebraico y sintaxis del sistema.
- Conceptos: Polinomio, raíz de polinomio, número complejo y conjugado de un número complejo.
- Procedimiento: Producto de factores lineales, división de polinomio y resolución de ecuación lineal. Uso de las fórmulas de Vieta.
- Proposiciones: Si z_0 es una raíz compleja de un polinomio$p(x)$ con coeficientes reales, entonces su conjugado $\bar{z}_0$ también es raíz de $p(x)$. Teorema fundamental del álgebra. Fórmulas de Vieta.

Funciones semióticas institucionales:

FS1: Relacionar la raíz no real $-4 - I$ del polinomio al número complejo $-4 + I$, mediante el uso del teorema referente a las raíces no reales conjugadas de un polinomio con coeficientes reales.

FS2: Asociar a el término independiente del polinomio al producto de sus raíces, considerando el signo correspondiente.

FS3: Asociar a las raíces $-4 - I$ y $-4 + I$ la ecuación $\big(x - (-4 - I)\big)\big(x - (-4 + I)\big) = 0$.

FS4: Asociar a el cociente de la división del polinomio dado y el polinomio que resulta al desarrollar la expresión $\big(x - (-4 - I)\big)\big(x - (-4 + I)\big)$, la raíz real del polinomio de tercer grado.

Unidad de análisis U13: Reactivo 13.

Si las raíces de $p(x)$ son {-7, 0, 8, 10}, entonces las raíces de $p(-x)$ son ______ y las raíces de $-p(x)$ son ______ ,

Escriba las raíces entre llaves y separadas por coma {a,b,c,..}

Situaciones y prácticas matemáticas

Situación:

- Dadas las raíces reales de $p(x)$, determinar las raíces reales de $-p(x)$ y de $p(-x)$.

Prácticas matemáticas institucionales:

- Analizar las reflexiones de la gráfica con respecto a los ejes coordenados.

Objetos matemáticos institucionales:

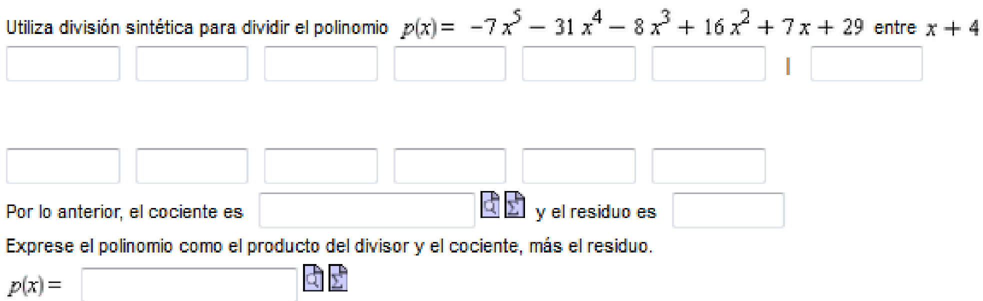
- Situación problema: Dadas las cuatro raíces reales de $p(x)$, determinar las raíces de $-p(x)$ y de $p(-x)$.
- Lenguaje: Verbal, algebraico y numérico.
- Conceptos: Raíces y reflexión.
- Procedimiento:El procedimiento para resolver la situación se basa en la reflexión de lagráfica de $p(x)$ con respecto a los ejes coordenados.
- Proposiciones: Si r es una raíz de $p(x)$, entonces r también es raíz de $-p(x)$. Si r es raíz de $p(x)$, entonces $-r$ es raíz de $p(-x)$.

Funciones semióticas institucionales:

FS1: Relacionar a las raíces reales de $p(x)$ las raíces reales de $-p(x)$.

FS2: Relacionar a las raíces reales de $p(x)$ las raíces reales de $p(-x)$.

Unidad de análisis U_{14}: Reactivo 14.


Utiliza división sintética para dividir el polinomio $p(x) = -7x^5 - 31x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 7x + 29$ entre $x + 4$

Por lo anterior, el cociente es y el residuo es

Exprese el polinomio como el producto del divisor y el cociente, más el residuo.

$p(x) =$

Situaciones y prácticas matemáticas

Situaciones:

- Utilizar división sintética para dividir un polinomio de quinto grado entre otro de la forma $x - r$, donde r es un entero, y determinar el cociente y el residuo.
- Expresar el polinomio dado como el producto del divisor y el cociente, más el residuo.

Prácticas matemáticas institucionales:

- Se promueve la división sintética para dividir un polinomio de quinto grado entre un binomio de la forma $x - r$.
- Identificar el residuo y el cociente, en la división realizada en el punto anterior.
- Expresar el polinomio dado como el producto del divisor y el cociente, más el residuo.
- Registrar en el sistema las respuestas, respetando la sintaxis del sistema.

Objetos matemáticos institucionales:

- Situaciones problema: Utilizar división sintética para dividir un polinomio de quinto grado entre otro de la forma $x - r$, donde r es un entero, y determinar el cociente y el residuo. Expresar el polinomio dado como el producto del divisor y el cociente, más el residuo.
- Lenguaje: Verbal, algebraico, numérico e iconográfico (esquema de división sintética).
- Conceptos: polinomio, división de polinomios, cociente, residuo y divisor.
- Procedimiento: División sintética.
- Proposiciones: Algoritmo de la división para polinomios.

Funciones semióticas institucionales:

FS1: Asociar al polinomio $-7x^5-31x^4-8x^3+16x^2+7x+29$ la lista de números $-7,-31,-8,\ 16,\ 7,\ 29$ considerando el procedimiento de la división sintética.

FS2: Relacionar al binomio $x+4$a el número -4 escrito al final de la primera fila, en elesquema de la división sintética.

$x+4$ → $\underline{-7}\ \underline{-31}\ \underline{-8}\ \underline{16}\ \underline{7}\ \ \underline{29}\ |\ \underline{-4}$

FS3: Relacionara el esquema anterior el procedimiento aritmético asociado a la división sintética.

$\underline{-7}\ \underline{-31}\ \underline{-8}\ \underline{16}\ \underline{7}\ \ 29\ |\ \underline{-4}$ → $\underline{-7}\ \underline{-31}\ \underline{-8}\ \underline{16}\ \underline{7}\ \ \underline{29}\ |\ \underline{-4}$
$\underline{-7-3}\ \underline{4\ 0}\ \ \underline{71}$

FS4: Relacionar al número que aparece al final del procedimiento aritmético asociado a la división sintética a el residuo.

$\underline{-7}\ \underline{-31}\ \underline{-8}\ \underline{16}\ \underline{7}\ \ \underline{29}\ |\ \underline{-4}$
$\underline{-7-3\ 4}\ \ \underline{0}\ \ \underline{71}$ → Residuo = 1

FS5: Relacionar los primeros cinco números que aparecen en la segunda fila del procedimiento aritmético asociado a la división sintética a el cociente.

$\underline{-7}\ \underline{-31}\ \underline{-8}\ \underline{16}\ \underline{7}\ \ \underline{29}\ |\ \underline{-4}$
$\underline{-7-3\ 4}\ \ \underline{0}\ \ \underline{71}$ → $-7x^4-3x^3+4x^2+0x+7$

FS6: Asociar al polinomio $-7x^5-31x^4-8x^3+16x^2+7x+29$ ala expresión $(x+4)(-7x^4-3x^3+4x^2+\ 7)+1$. Es decir, asociar al polinomio la expresión (divisor)(cociente) + (residuo).

Unidad de análisis U

Construya una ecuación de segundo grado de la forma $x^2+bx+c=0$, con b y c, numeros reales, que tenga como solución el número complejo $4+\mathrm{I}$.

Situaciones y prácticas matemáticas institucionales

Situación:

- Construir una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx + c = 0$, con b y c, números reales, un número que tenga como solución no real dado.

Prácticas matemáticas institucionales:

- Hacer uso del teorema concerniente a las soluciones complejas conjugadas de una ecuación cuadrática con coeficientes reales.
- Usar la proposición: toda ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ se puede escribir en la forma $a(x - r_1)(x - r_2) = 0$ donde r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación cuádratica.
- Desarrollo de producto de factores lineales.

Objetos matemáticos institucionales:

- Situación: Construir una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx + c = 0$, con b y c, números reales, que tenga como solución un número no real dado.
- Lenguaje: Verbal, algebraico, numérico y sintaxis del sistema.
- Conceptos: Ecuación de segundo grado, solución de ecuación y número complejo.
- Procedimiento: Sustituir la solucióncompleja no real dada, r_1, y su conjugada r_2, en una expresión de la forma $(x - r_1)(x - r_2) = 0$, realizar el producto de binomios y sumar términos semejantes.Multiplicar la ecuación por el número entero adecuado para eliminar los denominadores que tenga la ecuación.
- Proposición: Toda ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ se puede escribir en la forma $a(x - r_1)(x - r_2) = 0$ donde r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación cuádratica.

Funciones semióticas institucionales:

FS1: Asociar a un número complejo dado con su conjugado. Usando el teorema concerniente a las soluciones complejas conjugadas de una ecuación cuadrática con coeficientes reales.

$$\boxed{A + BI} \longrightarrow \boxed{A - BI}$$

FS2: Relacionar números complejos conjugados a una ecuación de segundo grado, escrita como un producto de factores lineales.

$A - BI, \quad A + BI \;\Rightarrow\; \big(x - (A - BI)\big)\big(x - (A + BI)\big) = 0$

FS3: Asociar una ecuación de segundo grado escrita como un producto de factores lineales a una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx + c = 0$.

$\big(x - (A - BI)\big)\big(x - (A + BI)\big) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + bx + c = 0$

Unidad de análisis U_{16}: Reactivo 16.

Para cada polinomio, contesta lo que se pide

1. $x^4 + 6x^3 + cx^2 - x - 2$

   La suma de sus raíces es:

   El producto de sus raíces es

2. $5x^4 + 10x^3 + cx^2 + 12x + 4$

   La suma de sus raíces es:

   El producto de sus raíces es

3. $x^5 + 5x^4 + 6x^3 + cx^2 - x - 1$

   La suma de sus raíces es:

   El producto de sus raíces es

4. $5x^5 - x^4 + 10x^3 + cx^2 + 6x + 3$

   La suma de sus raíces es:

   El producto de sus raíces es

Situaciones y prácticas matemáticas

Situación:

- Determinar la suma y el producto de las raíces de cada uno de los polinomios dados.

Prácticas matemáticas:

- Usar de las fórmulas de Vieta para determinar la suma y el producto de las raíces de polinomios.

Objetos matemáticos:

- Situación: Determinar la suma y el producto de las raíces de cada uno de los polinomios dados.
- Lenguaje: Verbal, algebraico y numérico.
- Conceptos: Polinomio y raíz de polinomio.

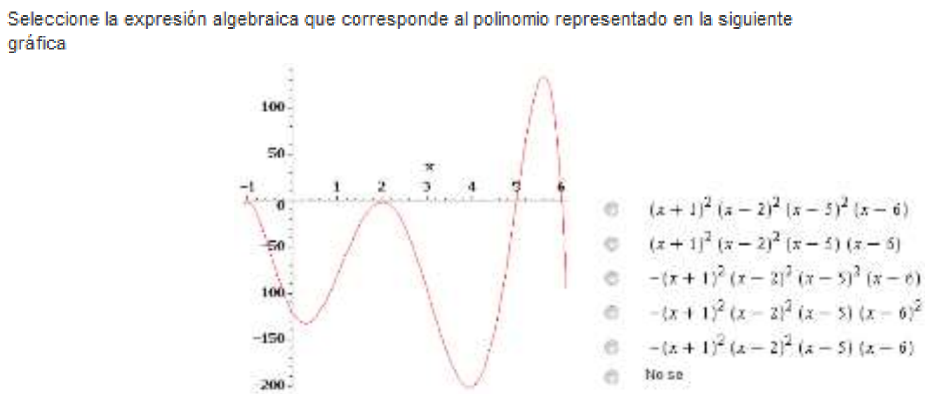
- Procedimiento: Aplicación de las fórmulas de Vieta.
- Proposiciones: Fórmulas de Vieta.

Funciones semióticas:

FS1: Asociar a el término independiente y el coeficiente del término principal de un polinomio a el producto de sus raíces.

FS2: Asociar a el coeficiente del término de grado $n-1$ y el coeficiente del término principalde un polinomio de grado *n*a la suma de sus raíces.

Unidad de análisis U $_{17}$***: Reactivo 17.***



Situaciones y prácticas matemáticas

Situación:

- Seleccionar la expresión algebraica del polinomio representado gráficamente.

Prácticas matemáticas:

- Determinación de las raíces y sus correspondientes multiplicidades del polinomio dado gráficamente.
- Determinación de las raíces y sus correspondientes multiplicidades del polinomio dado algebraicamente.
- Articulación entre elementos de la expresión gráfica y la algebraica de un polinomio.

Objetos matemáticos:

- Situación: Seleccionar la expresión algebraica del polinomio representado gráficamente
- Lenguaje: Verbal, algebraico y gráfico.
- Conceptos: Polinomio, raíz de polinomio y gráfica de polinomio.

- Procedimiento: Articulación entre elementos de la expresión gráfica y la algebraica de un polinomio.
- Proposiciones: Si x_0 es una raíz real del polinomio representado por $p(x)$ entonces, el punto $(x_0, 0)$ es la intersección de la gráfica de $p(x)$ con el eje horizontal (eje *x*).

  Suponer que $p(x)$ tiene un factor $(x - c)^k$y que $(x - c)^{k+1}$ no es factor, donde *c* es real y *k*es un entero positivo. Entonces, para valores de *x*cercanos a *c*.

  Si *k* es impar, la gráfica cruza al eje *x*.

  Si *k* es par, la gráfica toca el eje *x* pero no lo cruza.

  Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, n \geq 1,$ la representación algebraica de un polinomio de grado n, entonces:

  Si n es par y $a_n > 0$, el recorrido es el intervalo $[m, \infty)$ donde m es el valor mínimo de $p(x)$.

  Si *n* es par y $a_n < 0$, el recorrido es el intervalo $(-\infty, M]$, donde M es el valor máximo de $p(x)$.

  Si *n* es impar, el recorrido es el conjunto de los números reales $(-\infty, \infty)$. En este caso no existe un valor máximo o mínimo.

Funciones semióticas:

FS1: Asociar las intersecciones de la gráfica y el eje *x* a las raíces del polinomio dado gráficamente.

FS2: Asociar la forma de la intersección de la gráfica y el eje *x*a la multiplicidad de la raíz que ésta representa.

FS3: Asociar a el trazo final de la gráfica a el grado par o impar del polinomio y el signo de su coeficiente principal.

FS4: Asociar a cada uno de los factores lineales del polinomio representado de forma algebraica a una raíz.

FS5: Asociar al exponente de cada uno de los factores lineales a la multiplicidad de la raíz correspondiente.

FS6: Asociar la gráfica a una de las representaciones algebraicas del polinomio.

Unidad de análisis U_{18}: Reactivo 18.

Analiza el siguiente polinomio

$p(x) = 5x^5 - 10x^4 + bx^3 - x^2 - 7x + 7$

, donde b es un número entero, y escribe una lista de todas sus posibles raíces racionales positivas.

Escribe la lista de posibles raices racionales, separadas por coma, y entre llaves {a,b,c,...}

Situaciones y prácticas matemáticas

Situación:

- Escribir la lista de todas las posibles raíces racionales de un polinomio dado en forma desarrollada.

Prácticas matemáticas:

- Determinar y enlistar todos los divisores enteros positivos del término independiente del polinomio con coeficientes enteros.
- Determinar y enlistar todos los divisores enteros positivos del coeficiente de término principal.
- Determinar y enlistar las posibles raíces racionales positivas.

Objetos matemáticos:

- Situación: Determinar la lista de todas las posibles raíces racionales de un polinomio dado algebraicamente.
- Lenguaje: Verbal, algebraico y sintaxis del sistema.
- Conceptos: Polinomio y raíces racionales de polinomio.
- Procedimiento: Enlistar todos los factores enteros positivos del término principal y del término independiente del polinomio dado en forma desarrollada y tomar todas las combinaciones posibles considerando como denominadores y numeradores, respectivamente.
- Proposiciones: Teorema de las raíces racionales de un polinomio de coeficientes enteros.

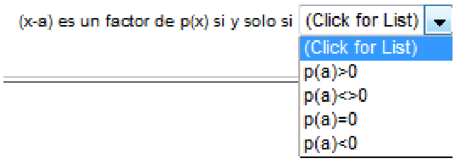
Funciones semióticas:

FS1: Asociar el término independiente del polinomio a sus divisores enteros.

FS2: Asociar el coeficiente del término principal a sus divisores enteros.

FS3: Asociar el cociente entre los divisores del término independiente y los divisores del coeficiente principal a las raíces racionales del polinomio.

Unidad de análisis U_{19}: Reactivo 19.



Situaciones y prácticas matemáticas

Situación:

- Completar el enunciado del teorema del factor.

Práctica matemática:

Completar el enunciado del teorema del factor.

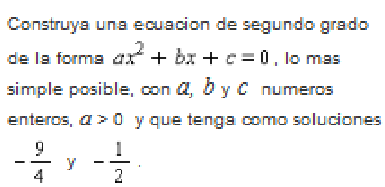
Objetos matemáticos:

- Situación: Completar el enunciado del teorema del factor.
- Lenguaje: Verbal y algebraico.
- Conceptos: Factor de polinomio.
- Procedimiento: Seleccionar la expresión algebraica que complete el enunciado del teorema del factor.
- Proposición: Teorema del factor.

Funciones semióticas:

FS1: Asociar el hecho que $(x - a)$ es factor de $p(x)$a la expresión $p(a) = 0$.

Unidad de análisis U_{20}: Reactivo 20.


Construya una ecuacion de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, lo mas simple posible, con a, b y c numeros enteros, $a > 0$ y que tenga como soluciones $-\frac{9}{4}$ y $-\frac{1}{2}$.

Situaciones y prácticas matemáticas

Situación:

- Construir una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, en su forma más simple, que tenga dos soluciones dadas en forma de cocientes.

Prácticas matemáticas:

- Sustituir las soluciones dadas r_1 y r_2 en la ecuación $(x - r_1)(x - r_2) = 0$.

- Desarrollar el producto de factores lineales del lado izquierdo de la ecuación del punto inmediato anterior y multiplicar la ecuación por un número entero que elimine las fracciones.

Objetos matemáticos:

- Situación: Construir una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, en su forma más simple, que tenga dos soluciones dadas en forma de cocientes.
- Lenguaje: Verbal, algebraico, numérico y sintaxis del sistema.
- Conceptos: Ecuación de segundo grado y solución de ecuación.
- Procedimiento: Sustituir las soluciones dadas, r_1 y r_2, en una expresión de la forma $(x - r_1)(x - r_2) = 0$, realizar el producto de binomios y sumar términos semejantes.Multiplicar la ecuación por el número entero adecuado para eliminar los denominadores que tenga la ecuación.
- Proposiciones: Si $r_1\ y\ r_2$ son soluciones de una ecuación de segundo grado, ésta se puede escribir como $(x - r_1)(x - r_2) = 0$.

Funciones semióticas:

FS1: Asociar las soluciones dadas r_1 y r_2a la ecuación $(x - r_1)(x - r_2\ ) = 0$.

FS2: Asocia la expresión $(x - r_1)(x - r_2\ )$a una de la forma $ax^2 + bx + c$.

FS3: Asocia a $ax^2 + bx + c$ la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

RESUMEN DEL SIGNIFICADO INSTITUCIONAL EVALUADO

Situaciones problema:

- Determinación de las raíces y el grado de un polinomio expresado como producto de factores lineales.
- Articulación entre la representación gráfica y algebraica de polinomios de grado *n* con dos o más raíces repetidas.
- Solución de ecuaciones de segundo grado.
- Construcción de ecuaciones de segundo grado a partir de una de sus soluciones no reales, o de sus soluciones racionales.
- Utilización de división sintética para: determinar el cociente y el residuo que se obtiene como resultado de dividir un polinomio entre un binomio, determinar si un binomio de la forma $x - a$ es factor de un polinomio, evaluar polinomios en un

número real, determinar si un número real es raíz de un polinomio y determinar la multiplicidad de una raíz de un polinomio.

- Factorización de expresiones polinomiales.
- Dada la gráfica de $p(x)$, seleccionar las correspondientes a $p(-x)$ y $-p(x)$.
- Dadas las raíces de $p(x)$, determinar las raíces de $p(-x)$ y $-p(x)$.
- Determinar las posibles raíces racionales positivas de polinomios no mónicos.
- Dado un polinomio en forma desarrollada, determinar la suma y el producto de sus raíces.
- Determinar el número de variaciones de signo de un polinomio.

Lenguaje:

- Verbal, algebraico, gráfico, numérico y sintaxis propia del sistema.

Conceptos:

Polinomio, grado de un polinomio, raíz de polinomio, multiplicidad de raíz de polinomio, gráfica de polinomio, división de polinomios, factor de polinomio, factores lineales, factorización de polinomios, ecuación de segundo y tercer grado, solución de una ecuación, variaciones de signo de un polinomio.

Procedimientos:

Determinación del grado y las raíces de polinomios, factorización de polinomios, articulación entre la representación gráfica y algebraica de polinomios, división de polinomios, división sintética, evaluación de polinomios en números reales, producto de factores polinomiales, construcción de ecuaciones de segundo grado a partir de una solución o sus soluciones. Uso de los teoremas: del factor, del residuo, de la raíz y el factor, de las raíces racionales. Y uso de las Fórmulas de Vieta.

Propiedades o Proposiciones:

Fórmulas de Cardano, Fórmulas de Vieta, la fórmula general conduce a la resolución de una ecuación cuadrática; Si r y s son números reales, entonces $\mathrm{rs} = 0$ si y sólo si $\mathrm{r} = 0$ ó $\mathrm{s} = 0$. Teorema de raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros, teorema de la raíz y el factor, teorema del factor, teorema del residuo. Si r es una raíz real de $\mathrm{p(x)}$, entonces r también es raíz de $-\mathrm{p(x)}$. Si r es raíz real de $\mathrm{p(x)}$, entonces $-$r es raíz de $\mathrm{p(-x)}$. Si $\mathrm{z_0}$ es una raíz compleja de un polinomio $\mathrm{p(x)}$ con coeficientes reales, entonces su conjugado también es raíz de $\mathrm{p(x)}$.

Si r es una raíz real de p(x), entonces r también es raíz de $-$p(x). Si r es raíz real de p(x), entonces $-$r es raíz de p($-$x).

La regla de Ruffini provee una forma para evaluar polinomios.

PRINCIPALES FUNCIONES SEMIÓTICAS

- Relacionar la ecuación cuadrática a la fórmula general.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Relacionar la fórmula general a las soluciones de una ecuación cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \rightarrow \quad \textit{Soluciones de la ecuación cuadrática}$$

- Asociar la suma de los exponentes de los factores lineales de un polinomio a el grado del polinomio.

$$(x+2)^2(x-2)^3(x-5)^2(x-7)^2 \quad \rightarrow \quad 2+3+2+2=9$$

- Asociar a un polinomio expresado como producto de factores lineales a sus raíces.

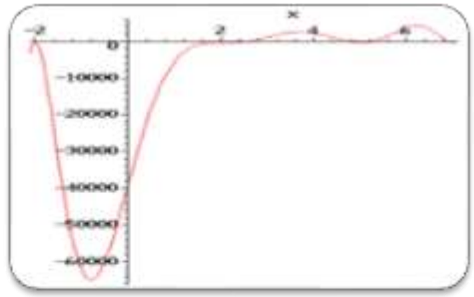
$$(x+2)^2(x-2)^3(x-5)^2(x-7)^2 \quad \rightarrow \quad \text{raíces del polinomio } -2,\ 2,\ 5,\ 7$$

- Asociar el exponente de un factor lineal de un polinomio a la multiplicidad de la raíz correspondiente.

$$(x+2)^2(x-2)^3(x-5)^2(x-7)^2 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} -2 \textit{ raíz de multiplicidad } 2 \\ 2 \textit{ de multiplicidad } 3 \\ 5 \textit{ de multiplicidad } 2 \\ 7 \textit{ de multiplicidad } 2 \end{array}$$

- Asociar la expresión algebraica de un polinomiao a su representación gráfica.

$(x+2)^2(x-2)^3(x-5)^2(x-7)^2$



- Asociar las intersecciones de la gráfica y el eje x a las raíces del polinomio dado gráficamente.
- Asociar la forma de la intersección de la gráfica y el eje xa la multiplicidad de la raíz que ésta representa.
- Asociar la forma de la gráfica a el grado par o impar del polinomio.
- Asociar a la regla de Ruffini la evaluación de polinomios.
- Asociar el último valor del esquema de división sintética al residuo obtenido al realizar la división.

$\underline{-7}\ \underline{-31}\ \underline{-8}\ \underline{16}\ \underline{7}\ \ \underline{29} \mid \underline{-4}$

$\underline{-7 -3\ 4}\ \ \underline{0}\ \ \underline{7 1}$

Residuo = 1

- Relacionar los primeros cinco números que aparecen en la segunda fila del procedimiento aritmético asociado a la división sintética a el cociente.

$\underline{-7}\ \underline{-31}\ \underline{-8}\ \underline{16}\ \underline{7}\ \ \underline{29} \mid \underline{-4}$

$\underline{-7 -3\ 4}\ \ \underline{0}\ \ \underline{7 1}$

$-7x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 0x + 7$

Los sistemas de prácticas vinculados a los reactivos que forman los exámenes forman parte del significado institucional pretendido con el sistema Maple T.A., debido a que los reactivos que forman el examen también fueron incluidos previamente en las tareas. La situación problema que no fue seleccionada para que formara parte del examen es la que consiste en utilizar las Fórmulas de Cardano para resolver ecuaciones de tercer grado, por la limitación de tiempo en la implementación del examen o porque para algunos profesores no forma parte del significado institucional pretendido o implementado. Sin embargo, esta situación puede ser incluida en el significado institucional evaluado mediante Maple T.A. a través de la realización de la tarea correspondiente.

4.4 Significados personales e identificación de conflictos semióticos.

En los subcapítulos anteriores se describieron los significados institucionales de polinomios, como parte de los objetivos planteados en este trabajo.

En este apartado se describe el *significado personal* de estudiantes de ingeniería de primer ingreso de la Universidad de Sonora sobre polinomios, que utilizaron el sistema Maple T.A. Como ya se declaró en la metodología de investigación, para describir el significado personal declarado, se determinan los objetos matemáticos y los sistemas de prácticas que se muestran en el trabajo realizado y reportado por estudiantes de dos grupos distintos de Álgebra. En primera instancia se analizan las respuestas registradas en el sistema, de los reactivos que forman el examen de los alumnos involucrados en la investigación, con el fin de caracterizar los objetos y las prácticas que ahí se manifiestan. También, se analizan y describen los objetos y las prácticas manifestadas en las hojas de trabajo entregadas por cada estudiante, con el fin de complementar el análisis de lo registrado en el Maple T.A.

Para llevar a cabo el análisis semiótico y determinar el significado personal logrado se toma el examen de cada estudiante, tomando cada reactivo como una unidad de análisis.

Los datos de los grupos que se consideraron en esta investigación se muestran en la siguiente tabla.

Periodo Escolar	Grupo	Horario	Programa Académico	Número de Alumnos
Agosto – Diciembre 2012	37	17:00 – 18:00	Tronco Común de Ingeniería	39
Agosto –Diciembre 2012	31	8:00 – 9:00	Ing. Química	37

El Grupo 37 tomó los cursos en el turno vespertino y pertenece al Programa de Tronco Común de Ingeniería que, es un programa hecho para inscribir de manera provisional a los aspirantes que no fueron seleccionados en el procedimiento de ingreso normal. Los alumnos inscritos en esta modalidad cursan un primer semestre especial con las materias del área. Para ser aceptados como alumnos definitivos en la carrera de su interés, debe cursar y aprobar todas las materias del primer semestre, o tener un promedio mayor o igual a 70 en el semestre. En caso de no resultar seleccionado para continuar el segundo semestre como alumno definitivo, se cancela su inscripción.

El Grupo 31 llevó sus clases en el turno matutino y está formado por alumnos que fueron aceptados de forma definitiva en la carrera de su interés.

Con el fin de seleccionar tres alumnos representativos de cada uno de los Grupos de Álgebra que participan en el estudio, se hace una selección estratificada en términos de su desempeño en el examen de *polinomios* aplicado con el software Maple T.A. Se seleccionó un alumno con una puntuación "alta", uno con una puntuación "media" y otro con puntuación "baja". El criterio para seleccionar el estudiante, de cada uno de los estratos, consiste en considerar los registros más amplios en las hojas de trabajo.

Cabe señalar que las diferencias en las características de los grupos se ve reflejada en los registros del sistema Maple T.A., dado que muy pocos estudiantes del grupo 37 realizaron las prácticas registradas en el sistema, y en cambio los estudiantes del grupo 31 realizaron todas las tareas(Anexo 2). En este sentido, el significado institucional pretendido y evaluado con el uso del Maple T.A., en el caso del grupo 37, no necesariamente se corresponde con el significado implementado con dicho sistema. También, se observa que el promedio del examen de polinomios para el grupo 37 es de 43.6, mientras que para el grupo 31 de 94.4.

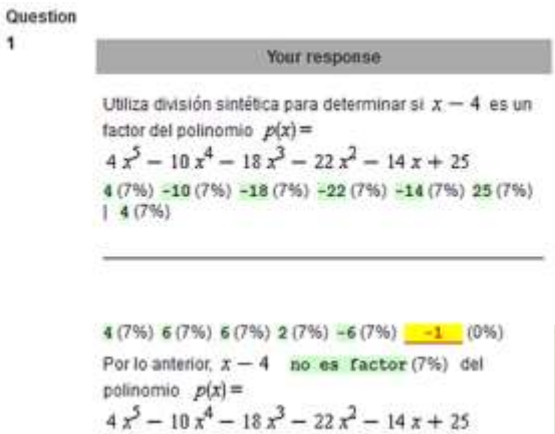
El examen consta de 10 reactivos y es distinto para cada estudiante.

Las unidades de análisis constan de dos partes:Las respuestas del estudiante registradas por el sistema, a esto se le llama "*Your response*", y de la imagen de la hoja de trabajo que muestra la actividad realizada por el estudiante para dar solución a la situación problema planteada.

El primer análisis que se muestra es sobre el trabajo de un alumno que llamaremos Estudiante Uno. Éste fue clasificado como de puntuación "baja".

4.4.1 Grupo 37:Caso 1, Estudiante de Rendimiento Bajo.

Unidad de análisis U_1: Reactivo 1.

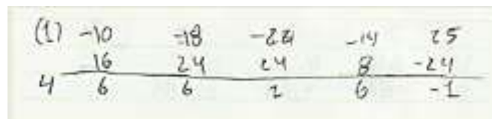


Question
1

Your response

Utiliza división sintética para determinar si $x - 4$ es un factor del polinomio $p(x) =$
$4x^5 - 10x^4 - 18x^3 - 22x^2 - 14x + 25$
4 (7%) -10 (7%) -18 (7%) -22 (7%) -14 (7%) 25 (7%)
| 4 (7%)

4 (7%) 6 (7%) 6 (7%) 2 (7%) -6 (7%) -1 (0%)
Por lo anterior, $x - 4$ no es factor (7%) del polinomio $p(x) =$
$4x^5 - 10x^4 - 18x^3 - 22x^2 - 14x + 25$



Prácticas matemáticas:

- Realiza la división sintética tanto en el sistema como en la hoja de trabajo, en el Maple T.A. debe hacerla en dos filas y en la hoja la realiza en tres.
- En la hoja de trabajo, se detectan errores de suma, en la penúltima columna del esquema de división sintética realiza la operación$-14 + 8 = 6$ y en la última $25 - 24 = -1$.
- En el sistema, se detectael error $25 - 24 = -1$ pero no el $-14 + 8 = 6$, lo que puede indicar que el estudiante no sólo transcribió sus respuestas de la hoja al sistema.
- Concluye que $x - 4$ no es factor del polinomio $p(x) = 4x^5 - 10x^4 - 18x^3 - 22x^2 - 14x + 25$.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje que utiliza es verbal, numérico eiconográfico (esquema de la división sintética, tanto en el sistema como en la hoja de trabajo).
- Conceptos: polinomio, división sintética, factor de un polinomio y residuo.
- Procedimiento: División sintética, identifica y analiza el residuo obtenido.

Funciones semióticas del estudiante (FSE)

FSE1: El alumno relaciona el polinomio $p(x) = 4x^5 - 10x^4 - 18x^3 - 22x^2 - 14x + 25$ con la lista de números $4, -10, -18, -22, -14, 25$. En el procedimiento de división sintética.

FSE2: El estudiante relaciona el binomio $x - 4$ con el número 4 escrito al final de la primera fila en el esquema de la división sintética.

FSE3: Relaciona con el esquema anterior el procedimiento aritmético asociado a la división sintética.

FSE4: Relaciona el valor del residuo distinto a cero con una división no exacta.

FSE5: Asocia la división no exacta con el hecho de que el divisor no es factor del polinomio.

Significado Personal Logrado:

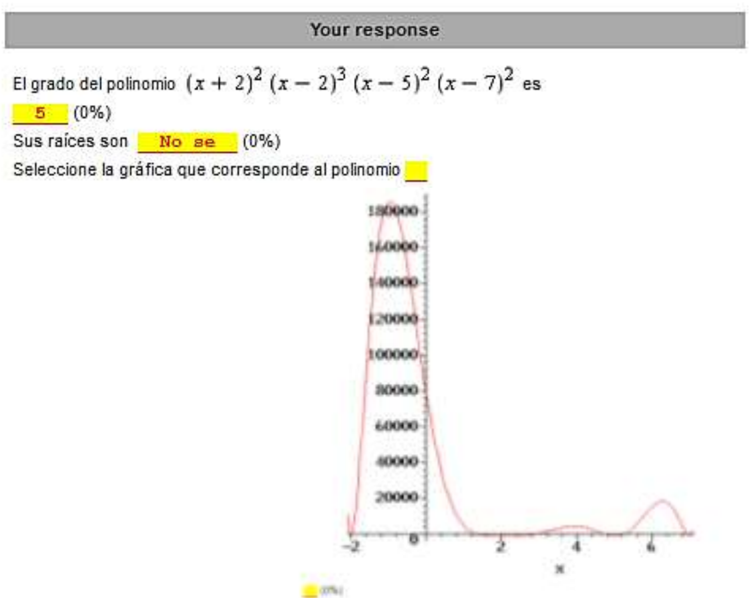
El estudiante usa adecuadamente el esquema y el procedimiento de división sintética; también, concluye acorde a la pauta institucional que la expresión lineal no es factor del polinomio. Puede considerarse que el significado personal logrado se corresponde con el significado institucional evaluado, excepto por errores aritméticos en el procedimiento de división sintética, aunque éstos no modificaron la decisión final.

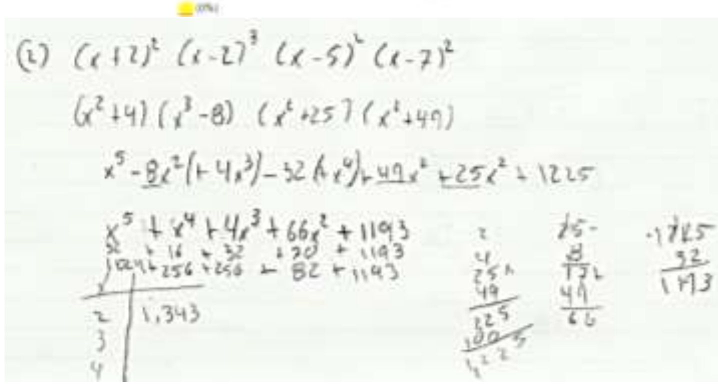
Conflictos semióticos:

Confunde la asignación del signo a una suma de números enteros con signos opuestos.

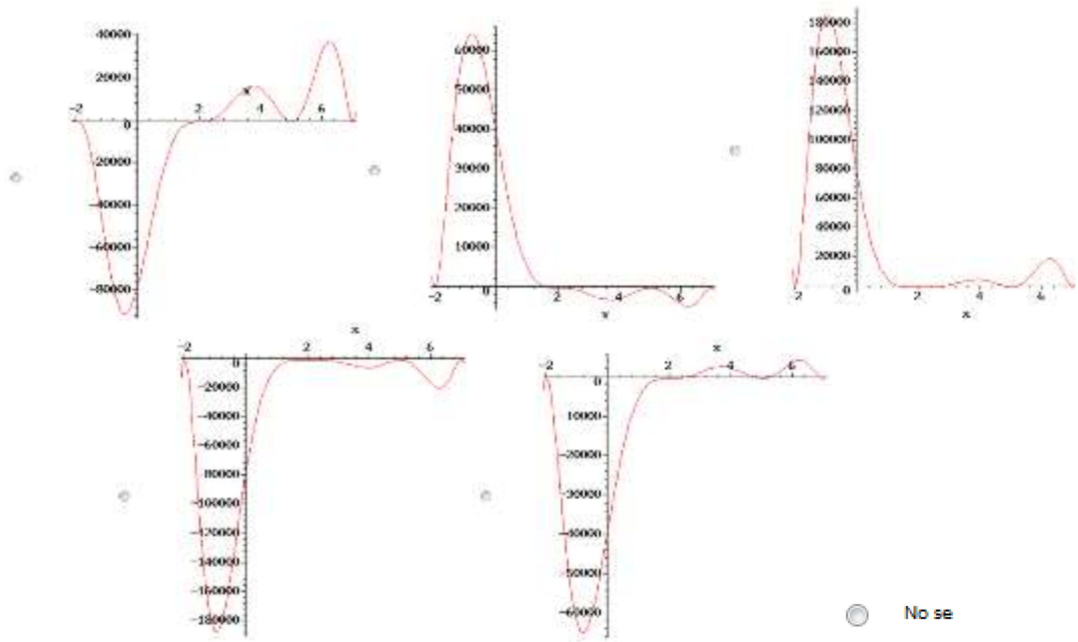
Unidad de análisis U_2: Reactivo 2.

2





Las opciones que el sistema ofrece son las gráficas:



Prácticas matemáticas:

- Consideró que para determinar el grado del polinomio $(x+2)^2(x-2)^3(x-5)^2(x-7)^2$ es necesario desarrollarlo hasta la forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Para lograrlo desarrolla los binomios de la siguiente manera $(x+2)^2 = x^2+4, (x-2)^3 = x^3-8, (x-5)^2 = x^2+25$ y $(x-7)^2 = x^2+49$. Después, realiza los productos $(x^2+4)(x^3-8)(x^2+25)(x^2+49)$ y suma términos semejantes, obteniendo el polinomio $x^5+x^4+4x^3+66x^2+1193$, como se aprecia en la hoja de trabajo, por lo cual concluye que el grado del polinomio en cuestión es 5.
- Desarrolla erróneamente las potencias de binomios de la siguiente manera: $(x+a)^n = x^n + a^n$.
- Evalúa el polinomio (por él encontrado) $x^5+x^4+4x^3+66x^2+1193$ para $x = 2, 3$ y trata de tabularlo.
- Selecciona la gráfica que corresponde a un polinomio de grado par y el polinomio dado en forma algebraica es de grado impar.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Verbal, algebraico, numérico y tabular.

- Conceptos: Polinomio, grado y raíz de un polinomio.
- Procedimientos: Operaciones con polinomios.

Funciones semióticas:

FSE1: Realiza la siguiente asociación:

$$(x+a)^n \Rightarrow x^n + a^n$$

FSE2: Asocia el producto con la siguiente expresión, desarrollando el producto.

$$(x^2+4)(x^3-8)(x^2+25)(x^2+49) \Rightarrow x^5 - 8x^2(+4x^3) - 32(+x^4) + 49x^2 + 25x^2 + 1225$$

FSE3: Asocia las siguientes expresiones, a través de la suma.

$$x^5 - 8x^2(+4x^3) - 32(+x^4) + 49x^2 + 25x^2 + 1225 \Rightarrow x^5 + x^4 + 4x^3 + 66x^2 + 1193$$

FSE4: Asocia a la expresión $(x+2)^2(x-2)^3(x-5)^2(x-7)^2$ el grado 5, que no le corresponde.

FSE5: Asocia a $(x+2)^2(x-2)^3(x-5)^2(x-7)^2$ una gráfica que no le corresponde.

Significado Personal Logrado:

El alumno conoce que el grado del polinomio es la mayor potencia de *x*, e intenta desarrollar la expresión polinomial dada en forma factorizada.

Conflictos semióticos:

Se detecta en el alumno un vacío de significaciónal solicitársele las raíces del polinomio, debido a que selecciona “no se” entre las opciones propuestas.

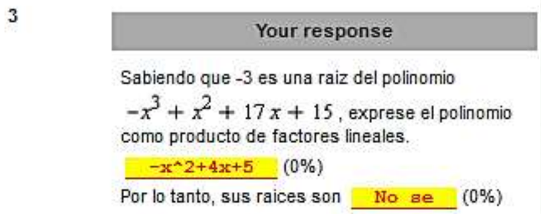
El estudiante no reconoce las relaciones existentes entre la expresión algebraica del polinomio y su representación gráfica.

Confunde el procedimiento para desarrollar un binomio elevado a una potencia entera positiva.

Confunde el procedimiento para desarrollar un producto de cuatro binomios.

No relaciona la suma de los exponentes de los factores lineales con el grado del polinomio.

Unidad de análisis U_3: Reactivo 3.

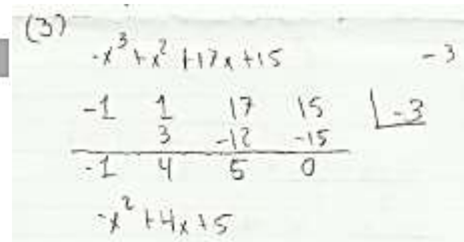

3

Your response

Sabiendo que -3 es una raiz del polinomio $-x^3+x^2+17x+15$, exprese el polinomio como producto de factores lineales.

-x^2+4x+5 (0%)

Por lo tanto, sus raices son No se (0%)



Prácticas matemáticas:

- Realiza correctamente división sintética para dividir el polinomio $-x^3+x^2+17x+15$ entre $x+3$, obteniendo como residuo 0 y como cociente el polinomio $-x^2+4x+5$.
- Cuando se le pide que exprese el polinomio como producto de factores lineales él escribe $-x^2+4x+5$.
- Contesta no se cuándo se le solicita que escriba las raíces del polinomio en cuestión.

Objetos matemáticos:

- El lenguaje que él utiliza es el verbal, el algebraico e iconográfico (esquema de la división sintética).
- Concepto: polinomio, división de polinomios, expresión cuadrática y cociente.
- Procedimiento: división sintética.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia el hecho de que -3 es una raíz del polinomio con una división sintética entre el polinomio y $x+3$.

FSE2: Asocia la expresión "producto de factores lineales" con unaexpresión cuadrática.

Significado Personal Logrado:

El alumno asocia la situación planteada con una división sintética la cual realiza de acuerdo a la pauta institucional.

Conflictos semioticos:

Confunde la expresión "producto de factores lineales" con unaexpresión cuadrática, manifestando con ello falta de comprensión del algoritmo de la división de polinomio.

El alumno no asocia un procedimiento para obtener las raíces del polinomio: se detecta un vacío de significación.

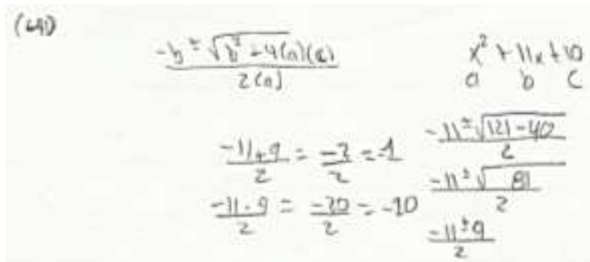
Unidad de análisis U₄: Reactivo 4.

4

Las soluciones de la ecuación $x^2 + 11\,x + 10 = 0$ son:

Escribe las soluciones (valores numéricos solamente) separadas por ;

Your Answer: "-1;-10"



Prácticas matemáticas:

- Uso de la fórmula general para resolver la ecuación cuadrática.
- Registra entre comillas las soluciones encontradas y el sistema no las reconoce debido a un error de sintaxis. Este reactivo debió revisarse posteriormente por el profesor.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Algebraico y el numérico.
- Conceptos: Ecuación cuadrática y solución de ecuación.
- Procedimiento: Utiliza la fórmula general.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia la ecuación cuadrática $x^2 + 11x + 10$ con la fórmula general.

FSE2: Relaciona la fórmula general con las soluciones de la ecuación $x^2 + 11x + 10$.

Significado Personal Logrado:

Utilizala formula general para determinar las soluciones de una ecuación cuadrática.

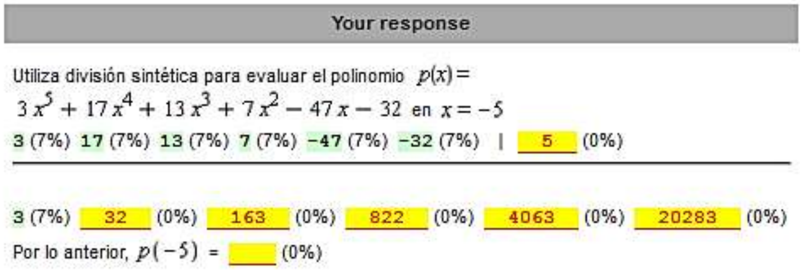
Conflictos semióticos:

El estudiante únicamente falla en la sintaxis, ya que registra las soluciones entre comillas ("-1; -10") en el sistema.

No relaciona un procedimiento alternativo, como la factorización, para la obtención de las soluciones, que en este caso hubiese sido más conveniente.

Unidad de análisis U₅: Reactivo 5.

5



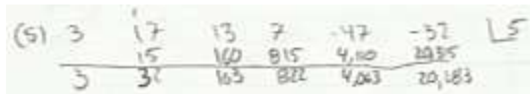
Your response

Utiliza división sintética para evaluar el polinomio $p(x) =$
$3x^5 + 17x^4 + 13x^3 + 7x^2 - 47x - 32$ en $x = -5$

3 (7%) 17 (7%) 13 (7%) 7 (7%) -47 (7%) -32 (7%) | 5 (0%)

3 (7%) 32 (0%) 163 (0%) 822 (0%) 4063 (0%) 20283 (0%)

Por lo anterior, $p(-5)$ = (0%)



Prácticas matemáticas:

- Ejecuta el algoritmo de división sintética en el sistema y en la hoja de trabajo.
- Escribe 5 al final de la primera fila, en lugar de -5, para obtener el valor solicitado $p(-5)$.
- No responde (deja en blanco) a la cuestión $p(-5)$.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: iconográfico(esquema de la división sintética, tanto en el Maple T.A. como en la hoja de trabajo).
- Conceptos: Polinomio, división de polinomios.
- Procedimiento: División sintética.

Funciones semióticas:

FSE1: Relaciona correctamente el polinomio $p(x) = 3x^5 + 17x^4 + 13x^3 + 7x^2 - 47x - 32$ con la lista de números $3\ \ 17\ \ 13\ \ 7\ \ -47\ \ -32$,en el procedimiento de división sintética.

FSE2: Relaciona $x = -5$ con el número 5(que corresponde al divisor $x - 5$) en el procedimiento de división sintética.

Significado Personal Logrado:

El estudiante realiza el algoritmo de división sintética.

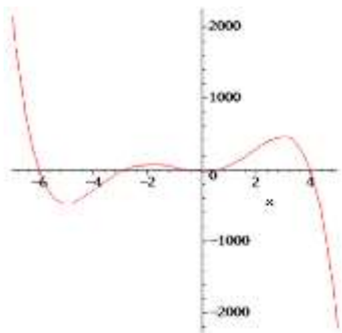
Conflictos semióticos:

El alumno confunde el divisor apropiado en la operación necesaria para dar respuesta a la situación planteada: El alumno falla cuando escribe 5 en vez de -5 al final de la primera fila en el esquema de la división sintética.

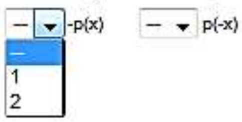
El alumno no asocia el residuo de la división ni el símbolo $p(-5)$ con la evaluación del polinomio solicitada: se detecta un vacío de significación.

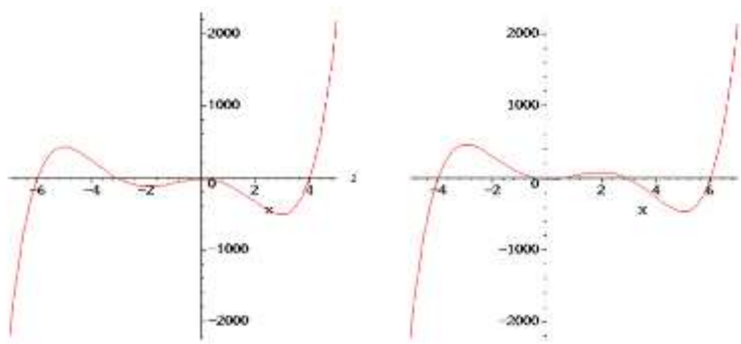
Unidad de análisis U_6: Reactivo 6.

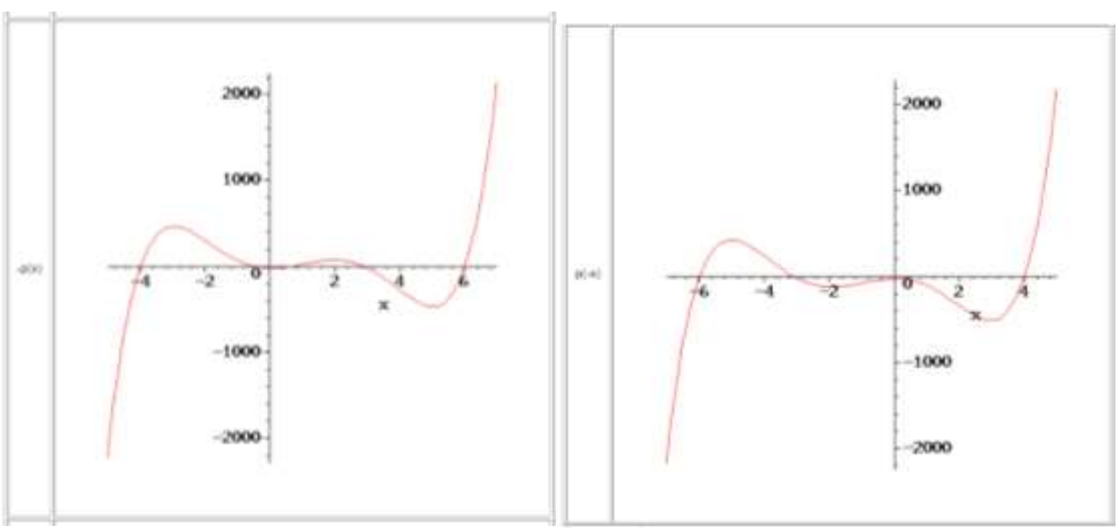
Si la gráfica de $p(x)$ es



asocie las gráficas correspondientes a







Prácticas matemáticas:

- Asocia erróneamente, la gráfica que corresponde a $-p(x)$ con la gráfica de $p(-x)$.

- Asocia erróneamente, la gráfica que corresponde a $p(-x)$ con la gráfica de $-p(x)$.

Objetos matemáticos:

El único registro que se tiene del estudiante es la elección de las gráficas en el sistema y da la impresión que ésta es al azar.

Funciones semióticas:

FSE1: El estudiante asocia $-p(x)$con la gráfica de$p(-x)$.

FSE2: Él asocia $p(-x)$con la gráfica de$-p(x)$.

Significado Personal Logrado:

No se identifica algún elemento del significado personal declarado que sea acorde con el significado institucional.

Conflictos semióticos:

El estudiante no reconoce las relaciones existentes entre las gráficas de $p(x)$, $-p(x)$ y $p(-x)$.

Unidad de análisis U_7: Reactivo 7.

7

Your response

La factorización de $x^2 + 64$ es:

$(x+8)^2$ (0%)

Comment:

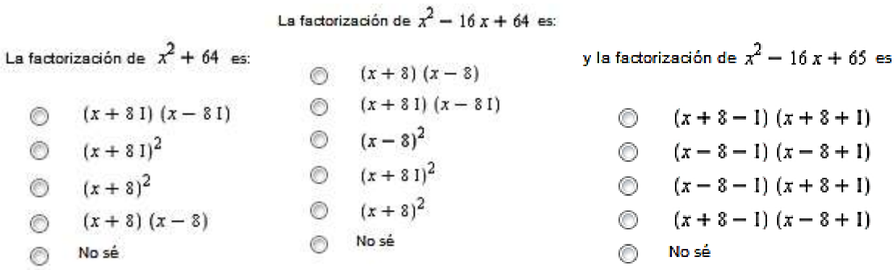
La factorización de $x^2 - 16x + 64$ es:

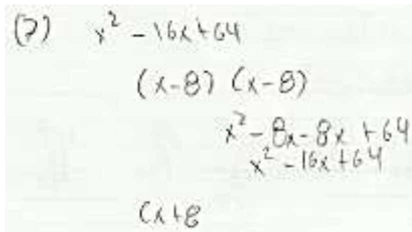
$(x-8)^2$ (33%)

Comment:

y la factorización de $x^2 - 16x + 65$ es

No sé (0%)





Prácticas matemáticas:

- El alumno selecciona la factorizacióndel trinomio cuadrado perfecto $x^2 - 16x + 64$ como $(x - 8)(x - 8)$, y verifica que dicha factorización es la correcta al multiplicar los factores lineales.
- Selecciona $(x + 8)^2$ como la factorización de $x^2 + 64$.
- Selecciona $(x - 8)^2$ como la factorización de $x^2 - 16x + 64$.
- Para la factorización de $x^2 - 16x + 65$ selecciona la opción no sé.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje:verbal y algebraico.
- Conceptos: Factorización, binomios lineales, expresiones cuadráticas.
- Procedimiento: Desarrollo de producto de factores lineales.

Funciones semióticas:

FSE1: El estudiante relaciona $x^2 + 64$ con $(x + 8)^2$.

FSE2: Relaciona $x^2 - 16x + 64$ con la expresión $(x - 8)(x - 8)$.

Significado Personal Logrado:

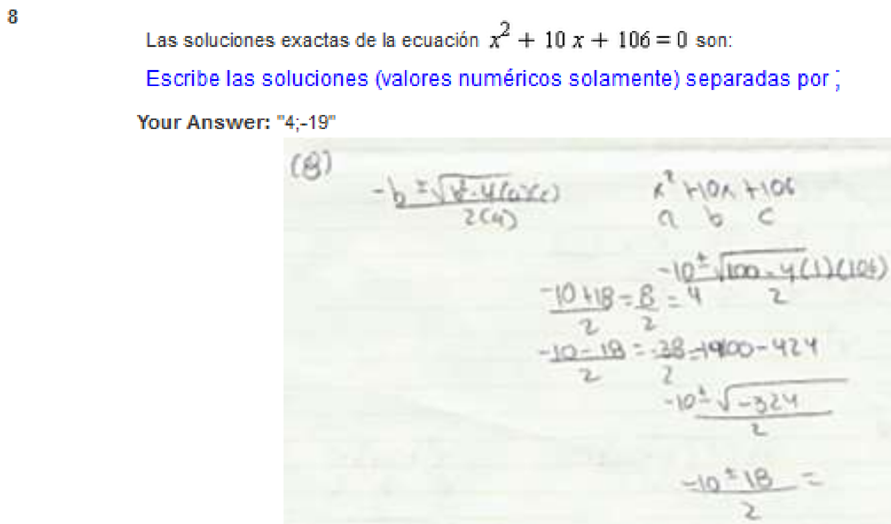
Selecciona la factorización de un trinomio cuadrado perfecto y desarrolla el producto de los factores a manera de comprobación.

Conflictos semióticos:

El alumno asocia la expresión no sé a la factorización de un trinomio cuadrado: se detecta un vacío de significación.

Asocia la factorización de una suma de cuadrados de la forma $x^2 + a^2$ con $(x + a)^2$.

Unidad de análisis U₈: Reactivo 8.



Prácticas matemáticas:

- Utiliza la fórmula general para resolver la ecuación $x^2 + 10x + 106 = 0$.
- Calcula la raíz cuadrada de un número negativo como si fuera uno positivo.
- Escribe en el sistema las soluciones entre comillas.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: algebraico y numérico.
- Conceptos: ecuación cuadrática y soluciones de una ecuación cuadrática.
- Procedimiento: uso de la fórmula general para resolver la ecuación cuadrática.

Funciones semióticas:

FSE: Asocia las soluciones de una ecuación cuadrática con la fórmula general.

FSE2: Asocia los coeficientes de la ecuación con las literales *a, b* y *c.*

Significado Personal Logrado:

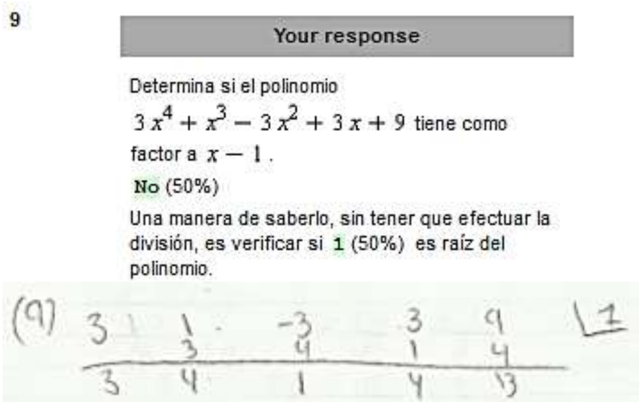
Asocia la fórmula general con la resolución de ecuaciones cuadráticas, selecciona y sustituye acertadamente los valores de los coeficientes *a, b* y *c.*

Conflictos semióticos:

El estudiante relaciona la raíz cuadrada de un número negativo con la raíz cuadrada del valor absoluto de ese número, en el uso de la fórmula general.

Las soluciones dadas por el estudiante no corresponden a la ecuación planteada y no las verifica.

Unidad de análisis U₉: Reactivo 9.


9

Your response

Determina si el polinomio $3x^4 + x^3 - 3x^2 + 3x + 9$ tiene como factor a $x - 1$.

No (50%)

Una manera de saberlo, sin tener que efectuar la división, es verificar si 1 (50%) es raíz del polinomio.

Prácticas matemáticas:

- Usa división sintética para determinar si el polinomio $3x^4 + x^3 - 3x^2 + 3x + 9$ tiene como factor a $x - 1$.
- En el sistema contesta que $x - 1$ no es factor del polinomio en cuestión.
- Relaciona la raíz 1 con el factor $x - 1$.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Verbal, numérico e iconográfico (esquema de la división sintética).
- Conceptos: Polinomio, factor de polinomio y raíz de polinomio.
- Procedimiento:División sintética.
- Proposición: Teorema de la raíz y del factor.

Funciones semióticas:

FSE1: Él asocia una división no exacta con el hecho de que $x - r$no es factor del polinomio dado.

FSE2: Asocia "r es raíz del polinomio" con "$x - r$ es factor del polinomio".

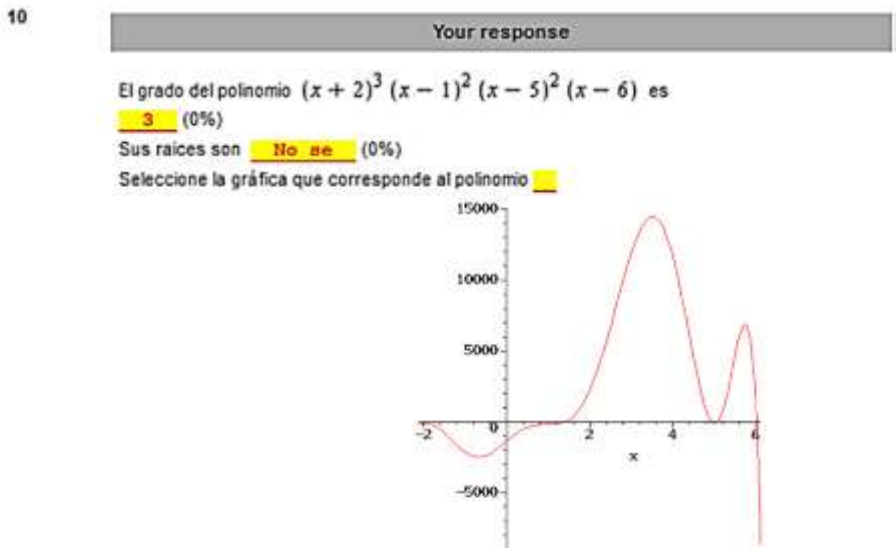
Significado Personal Logrado:

Utiliza el algoritmo de división sintética para determinar si un binomio de la forma $x - r$ es factor del polinomio dado, relacionando el procedimiento con la evaluación del polinomio en *r*.

Conflictos semióticos:

No identificados.

Unidad de análisis U_{10}: Reactivo 10.



Prácticas matemáticas:

No se tiene registro de la actividad del estudiante en la hoja de trabajo.

- Responde que el grado del polinomio $(x+2)^3(x-1)^2(x-5)^2(x-6)$ es 3. No hay registro sobre la forma de obtener esta respuesta.
- Contesta no sécuándo se le solicitan las raíces del polinomio.

Funciones semióticas:

FSE4: Asocia a la expresión $(x+2)^3(x-1)^2(x-5)^2(x-6)$ el grado 3.

FSE5: Asocia $(x+2)^3(x-1)^2(x-5)^2(x-6)$ con una gráfica.

Significado Personal Logrado:

No se identifica algún elemento del significado personal declarado que sea acorde con el significado institucional.

Conflictos semióticos:

El alumno no identifica las raíces del polinomio dado: se detecta un vacío de significación.

No logra llevar a cabo un procedimiento adecuado para determinar el grado del polinomio.

El estudiante no reconoce las relaciones existentes entre la expresión algebraica del polinomio y su representación gráfica.

RESUMEN DEL SIGNIFICADO PERSONAL

El alumno realiza el algoritmo de división sintética, en el sistema en dos filas y en la hoja de trabajo en tres, lo utiliza para determinar si un binomio de la forma $x - a$ es factor de un polinomio, y no sabe cómo usar dicho algoritmo para evaluar un polinomio en un número real,debido a que desconoce cuál debe ser el divisor. No fue capaz de determinar el grado y las raíces de un polinomio dado como producto de factores lineales, ni de asociar la representación algebraica y gráfica de dicho polinomio. Tampoco fue capaz de determinar las raíces de un polinomio de grado mayor que dos dado en forma desarrollada, ni de expresarlo como producto de factores lineales. Utiliza con éxito la fórmula general para determinar las soluciones reales de una ecuación de segundo grado, pero falla cuando las soluciones son no reales. También, muestra deficiencias en la factorización de expresiones algebraicas de segundo grado.

Desconoce las relaciones existentes entre las gráficas de $p(x)$, $-p(x)$ y $p(-x)$.

Considerando lo anterior se puede resumir que el significado personal logrado es muy limitado.

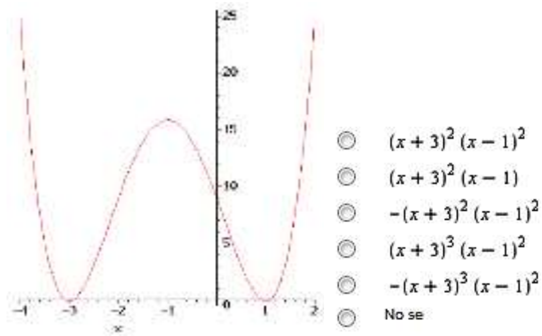
4.4.2 Grupo 37:Caso 2, Estudiante de Rendimiento Medio.

Unidad de análisis U_1: Reactivo 1.

1

Your response

Seleccione la expresión algebraica que corresponde al polinomio representado en la siguiente gráfica



$(x+3)^2\ (x-1)^2$ (50%)

El grado del polinomio es 4 (50%)

Prácticas matemáticas:

No se tiene registro de la actividad del estudiante en la hoja de trabajo, para esta unidad de análisis.

- Articulación entre elementos de la expresión gráfica y algebraica de un polinomio.
- Determinacióndel grado del polinomio dado.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Algebraico, gráfico y numérico.
- Conceptos: Polinomio, grado y raíces de polinomios.
- Procedimiento: No hay registro.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia al grado del polinomio el número 4.

FSE3: Asocia la gráfica dada con la expresión $(x+3)^2(x-1)^2$.

Significado Personal Logrado:

Selecciona la expresión algebraica que corresponde con la gráfica dada.

Determina el grado de un polinomio dadasu gráfica y suexpresión algebraica factorizada.

Conflictos semióticos:

No identificado.

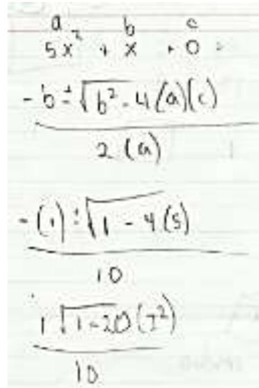
Unidad de análisis U_2: Reactivo 2.

2

Las soluciones exactas de la ecuación $5\,x^2 + x = 0$ son:

Escribe las soluciones (valores numéricos solamente) separadas por ;

Your Answer: 1/5,2/5



Prácticas matemáticas:

- Usa la fórmula general para intentar resolver la ecuación cuadrática $5x^2 + x = 0$.
- Registra en el sistema los números determinados.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Algebraico y numérico.
- Conceptos: Ecuación cuadrática y soluciones de ecuación cuadrática.
- Procedimiento: Utiliza la fórmula general para buscar las soluciones de la ecuación $5x^2 + x = 0$, ésta la reescribe en la forma $5x^2 + x + 0 = 0$ y, realiza las asociaciones $a = 5, b = 1\ y\ c = 0$. Al sustituir en la fórmula general los valores anteriores, omite $c = 0$, por lo tanto obtiene erróneamente $\frac{-(1)\pm\sqrt{1-4(5)}}{10}$, y al darse cuenta que $1 - 4(5) < 0$, escribe $\frac{1\ \sqrt{1-20}(I^2)}{10}$. Después, sin registrar más actividad en la hoja de trabajo escribe en el sistema los números $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}$.

Funciones semióticas:

FSE1: El estudiante asocia la ecuación $5x^2 + x = 0$ con $5x^2 + x + 0 = 0$.

FSE2: Asocia la ecuación $5x^2 + x + 0 = 0$ con la fórmula general $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

FSE4: Asocia la fórmula general $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ con la expresión $\frac{-(1)\pm\sqrt{1-4(5)}}{10}$.

FSE5: Asocia $\frac{-(1)\pm\sqrt{1-4(5)}}{10}$ con $\frac{1\sqrt{1-4(5)}\ (I^2)}{10}$.

FSE6: Por último asocia $\frac{1\sqrt{1-4(5)}\ (I^2)}{10}$ con los números $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}$.

Significado Personal Logrado:

Utiliza la fórmula general para intentar resolver la ecuación de segundo grado.

Realiza correctamente las siguientes asociaciones: $a = 5, b = 1$ y $c = 0$.

Conflictos semióticos:

El estudiante asocia a la expresión $4ac$incluida en la fórmula general una sustitución incompleta.

El estudiante asocia de manera inadecuada el símbolo(I^2)con la raíz cuadrada de un número negativo.

No relaciona un procedimiento alternativo, como la factorización, para la obtención de las soluciones, que en este caso hubiese sido más conveniente.

Las soluciones dadas por el estudiante no corresponden a la ecuación planteada y no las verifica.

Unidad de análisis U_3: Reactivo 3.

3

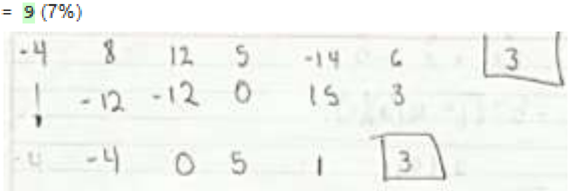
Your response

Utiliza división sintética para evaluar el polinomio $p(x) = -4\,x^5 + 8\,x^4 + 12\,x^3 + 5\,x^2 - 14\,x + 6$ en $x = 3$

-4 (7%) 8 (7%) 12 (7%) 5 (7%) -14 (7%) 6 (7%)
| 3 (7%)

-4 (7%) -4 (7%) 0 (7%) 5 (7%) 1 (7%) 3 (0%)

Por lo anterior, $p(3)$ = 9 (7%)



Prácticas matemáticas:

- Evalúa correctamente el polinomio en $x = 3$.
- El estudiante usa el esquema de división sintética, tanto en el sistema como en la hoja de trabajo. En ambas partes, comete un error el realizar la suma en la última columna obteniendo $6 + 3 = 3$. No obstante, contesta a la situación, $p(3) = 9$.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Numérico eiconográfico(esquema de división sintética, tanto en el Maple T.A. como en la hoja de trabajo).
- Conceptos: Polinomio y evaluación de polinomios.

➢ Procedimiento: Usa correctamente el esquema de división sintética, tanto en el sistema como en la hoja de trabajo. En ambas partes, comete un error el realizar la suma en la última columna obteniendo $6+3=3$. No obstante, contesta acertadamente la cuestión, $p(3)=9$. No hay registro de cómo obtiene este valor, pero no utiliza el teorema del residuo.

Funciones semióticas:

FSE1: Relaciona el polinomio $p(x)=-4x^5+8x^4+12x^3+5x^2-14x+6$ con la lista de números $-4, 8, 12, 5, -14, 6$,en el procedimiento de división sintética.

FSE2: Asocia $x=3$ con el númeroque se registra al final de la primera fila en el esquema de la división sintética.

FSE3: Asocia $x=3$ con la división del polinomio entre $x-3$.

FSE4: Relaciona con el esquema de la división sintética su procedimiento aritmético asociado.

Significado Personal Logrado:

Conoce el algoritmo de la división sintética. Comprende la notación $p(3)$ y determina su valor.

Conflictos semióticos:

Errores aritméticos en el desarrollo de la división sintética. El estudiante no utilizó el teorema del residuo en la evaluación del polinomio solicitada.

Unidad de análisis U_4: Reactivo 4.

4

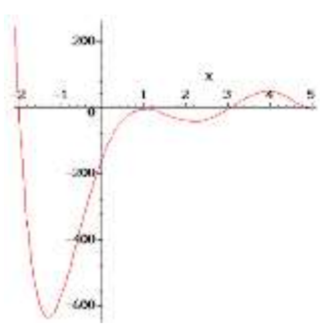
Your response

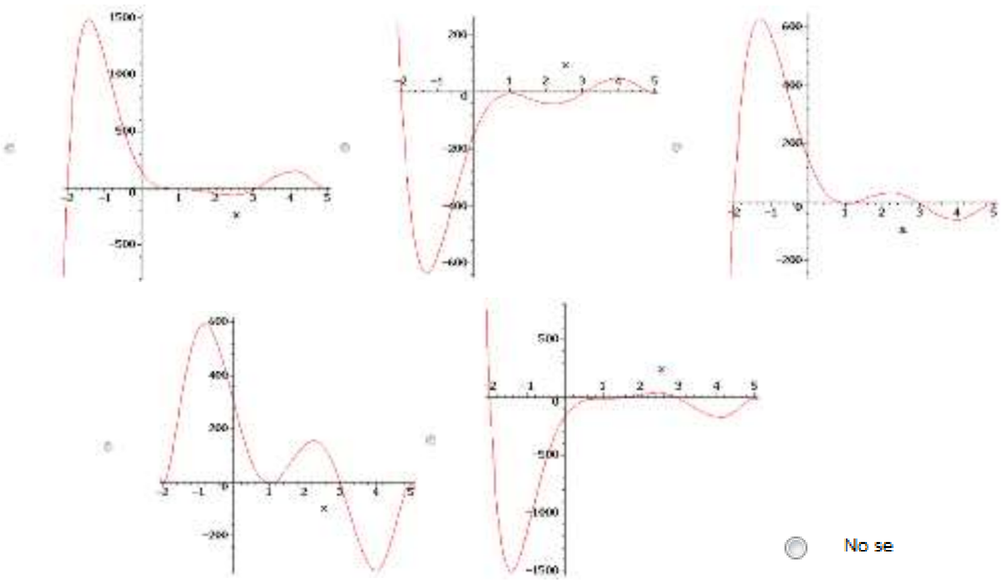
El grado del polinomio $-(x+2)(x-1)^2(x-3)(x-5)^2$ es

6 (33%)

Sus raices son 1 , 3 , -2 , 5 (33%)

Seleccione la gráfica que corresponde al polinomio





Prácticas matemáticas:

- El alumno no presenta actividad en la hoja de trabajo. Contesta las situaciones, que consisten en determinar el grado y las raíces del polinomio $-(x+2)(x-1)^2(x-3)(x-5)^2$.
- Falla al seleccionar la gráfica que corresponde al polinomio dado en forma algebraica.

Objetos matemáticos:

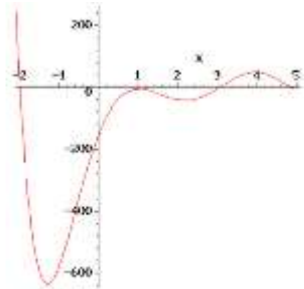
- Lenguaje: Numérico, algebraico y gráfico.
- Conceptos: Gráfica de polinomios, grado y raíces de polinomio, multiplicidad de raíces.
- No registra actividad del procedimiento para dar solución a la situación problema.

Funcionessemióticas:

FSE1: Asocia al polinomio $-(x+2)(x-1)^2(x-3)(x-5)^2$ el número 6.

FSE2: Asocia las raíces del polinomio $-(x+2)(x-1)^2(x-3)(x-5)^2$ con los números $-2, 1, 3, 5$.

FSE3: Asocia el polinomio representado por $-(x+2)(x-1)^2(x-3)(x-5)^2$ con la siguiente gráfica



Significado Personal Logrado:

Determina el grado y raíces de un polinomio dado como producto de factores lineales e interpreta las raíces y sus multiplicidades en forma gráfica y algebraica.

Conflicto semiótico:

El estudiante no reconoce una de las relaciones existentes entre la expresión algebraica del polinomio y su representación gráfica. Es decir, no discrimina el signo del coeficiente del término de mayor grado del polinomio.

Unidad de análisis U_5: Reactivo 5.

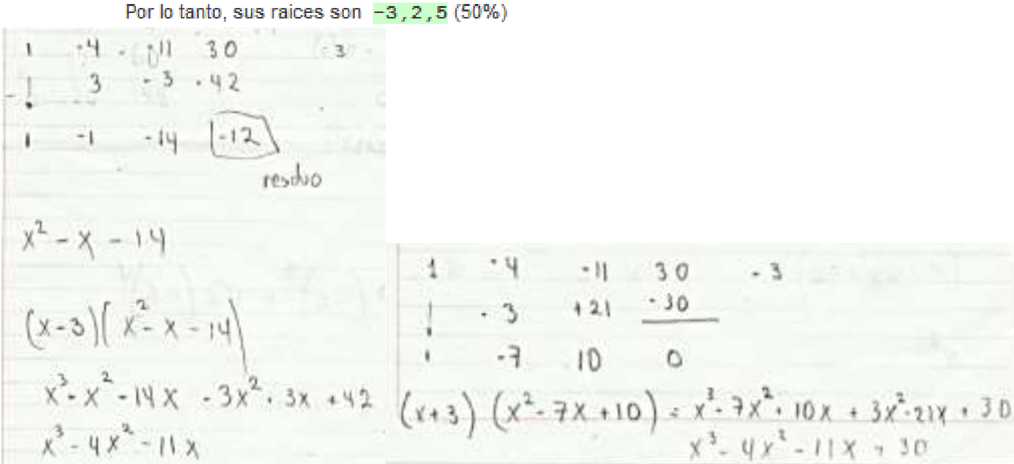
5

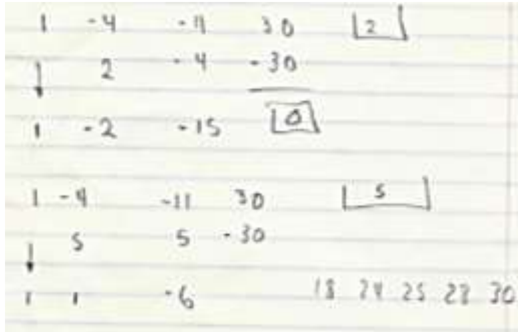
Your response

Sabiendo que -3 es una raiz del polinomio $x^3 - 4x^2 - 11x + 30$, exprese el polinomio como producto de factores lineales.

(x+3)(x^2-7*x+10) (50%)

Por lo tanto, sus raices son -3,2,5 (50%)





Prácticas matemáticas:

- Sabiendo que -3 es una raíz del polinomio utiliza el esquema de división sintética, escribiendo los coeficientes necesarios para dividir el polinomio $\mathrm{x}^3 - 4\mathrm{x}^2 - 11\mathrm{x} + 30$ entre $(x-3)$. Una vez realizada la división hace notar, en el esquema, el número -12 encerrándolo en un rectángulo, $\boxed{-12}$, y escribe *residuo* a un lado de éste. Después, escribe el cociente $x^2 - x - 14$ que obtiene al realizar la división y realiza el producto $(x-3)(x^2 - x - 14)$ obteniendo $x^3 - x^2 - 14x - 3x^2 + 3x + 42$, al reducir términos semejantes se da cuenta que este polinomio es distinto al polinomio considerado originalmente. El estudiante abandona este procedimiento.
- Posteriormente, utiliza nuevamente el esquema de la división sintética escribiendo los coeficiente necesarios para dividir $x^3 - 4x^2 - 11x + 30$ entre $(x+3)$, en la última fila del esquema obtiene los números $1, -7, 10, 0$. Después, realiza el producto $(x+3)(x^2 - 7x + 10)$ y simplifica, obteniendo como resultado el polinomiodado.
- Utiliza división sintética para dividir $x^3 - 4x^2 - 11x + 30$ entre $(x-2)$ y, hace notar que obtiene residuo cero al registrar $\boxed{0}$ al final del esquema.
- Usando división sintética como en los casos anteriores concluye que también 5 es raíz del polinomio.
- Como respuesta a la situación: exprese el polinomio como producto de factores lineales, el estudianteregistra $(x+3)(x^2 - 7x + 10)$ en el sistema.
- En el sistema selecciona la tercia de números $-3, 2, 5$ como las raíces del polinomio.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Verbal, algebraico, numérico, iconográfico (esquema de división sintética) y sintaxis propia del software.
- Conceptos: Polinomio, producto de polinomios, raíz de polinomio, residuo, factor lineal de un polinomio.
- Procedimientos: Operaciones con polinomios, división sintética, factorización de polinomios.
- Proposiciones: Teorema del residuo, teorema de la raíz y el factor.
- Argumentos: Justifica la validez de la factorización desarrollando el producto.

Funciones semióticas:

FSE1: Relaciona el último número que calcula en el esquema de la división sintética con el residuo de la división de un polinomio entre un binomio de la forma $(x-r)$.

FSE2: Asocia los tres primeros números $1,-1,-14$, de la última fila del esquema referido en FSE1 con el polinomio cocientex^2-x-14.

FSE3: Relaciona el divisor que debe utilizar en la división para verificar que un número es raíz de un polinomio con uno de los factores del polinomio.

FSE4: Asocia la expresión factorizada$(x+3)(x^2-7x+10)$ con $x^3-4x^2-11x+30$.

FSE4: Relaciona el hecho de que un binomio de la forma $(x-r)$ sea factor de un polinomio dado con el hecho de que r es raíz del polinomio.

FSE5: Asocia el hecho de obtener residuo cero al dividir el polinomio entre $(x-r)$ con el hecho de que *r* es raíz del polinomio.

Significado Personal Logrado:

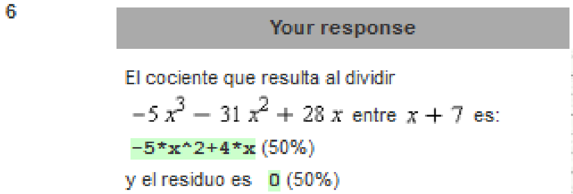
Emplea adecuadamente el esquema de la división sintética para factorizar y determinar que un número es raíz de un polinomio.

Conflicto semiótico:

El estudiante inicialmente confunde el divisor que debe utilizar en la división para verificar que un número es raíz de un polinomio.

El estudiante no discrimina entre factor linealy factor en general.Cabe mencionar que el sistema califica su respuesta como correcta a pesar de que no está expresada como producto de factores lineales. Es decir, el software no proporciona retroalimentación adecuada para resolver el conflicto, por lo que puede considerarse como un conflicto reforzado por el sistema.

__Unidad de análisis U_6: Reactivo 6.__


6

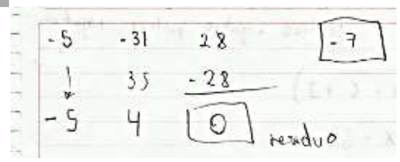
Your response

El cociente que resulta al dividir

$-5\,x^3 - 31\,x^2 + 28\,x$ entre $x + 7$ es:

-5*x^2+4*x (50%)

y el residuo es 0 (50%)



Prácticas matemáticas:

- Utiliza división sintética para dividir un polinomio.
- Identifica y registra el cociente y el residuo.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Verbal, algebraico, numérico, esquema en tres filas de la división sintética y sintaxis propia del sistema.
- Conceptos: Polinomio, división de polinomios, divisor, cociente y residuo.
- Procedimiento: División sintética.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia al polinomio $-5x^3 - 31x^2 + 28x$ con la lista de números: $-5, -31, 28$, considerando el esquema de división sintética.

FSE2: Relaciona laexpresión $x + 7$con el número -7 que debe registrarse al final de la primera fila en el esquema de división sintética.

FSE3: Asocia los dos primeros números, $-5, 4$, que aparecen en la última fila del esquema de división sintética con el polinomio cociente $-5x^2 + 4x$.

FSE4: Asocia el último número, 0, del esquemade división sintética con el residuo.

Significado Personal Logrado:

Realiza división sintética para la división de polinomios e identifica el polinomio cociente y el residuo.

Registra adecuadamente en el sistema el cociente y el residuo.

Conflictos semióticos:

Registra de forma incompleta los coeficientes del polinomio dado, en el esquema de división sintética, ignorando el valor cero del término independiente. El conflicto no se resuelve y no es fácilmente identificable por el hecho de que en, este caso, el residuo es cero.

Unidad de análisis U$_7$: Reactivo 7.

7

Your response

Considera el polinomio

$x^4 + b\,x^3 + 4\,x^2 + 2\,x - 8$

Determina el número de variaciones de signo del polinomio, considerando que b es un número positivo.

1 (50%)

Determina el número de variaciones de signo del polinomio, considerando que b es un número negativo.

3 (50%)

Prácticas matemáticas:

- Determina y compara los signos de dos coeficientes sucesivos de un polinomio y el número de variaciones de dichos signos.
- Le asocia signo a un número representado genéricamente mediante un parámetro.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Numérico y algebraico.
- Conceptos: Polinomio, coeficiente, variaciones de sino y número de variaciones de signo.
- Procedimiento: Determina y compara los signos de dos coeficientes sucesivos de un polinomio y, determina el número de variaciones de dichos signos.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia al polinomio $x^4 + bx^3 + 4x^2 + 2x - 8$ donde $b > 0$ el número 1, usando la definición de variación de signo.

FSE2: Asocia al polinomio $x^4 + bx^3 + 4x^2 + 2x - 8$ donde $b < 0$ el número 3, usando la definición de variación de signo.

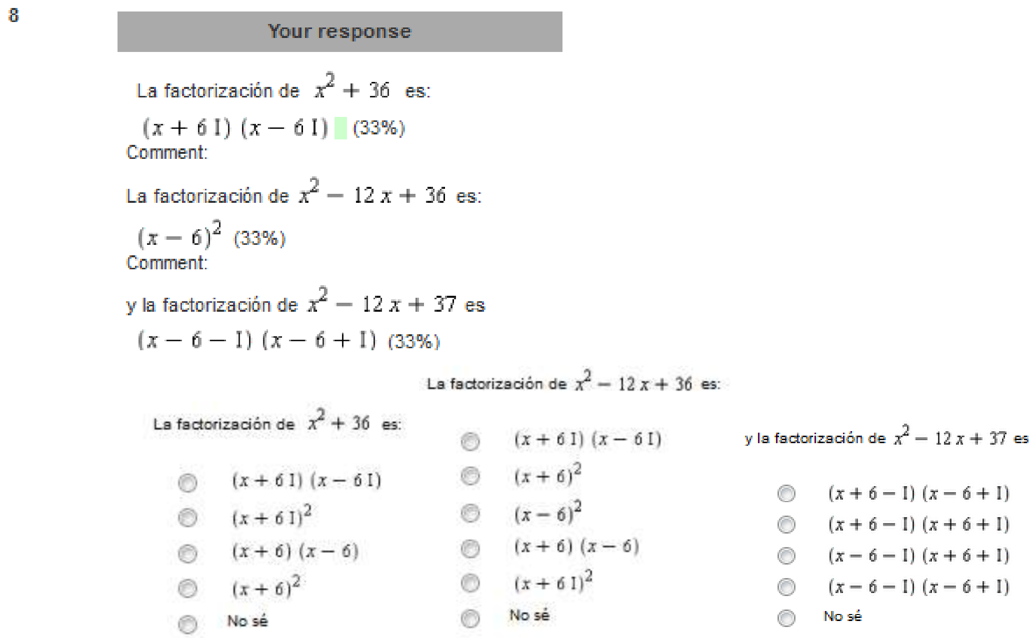
Significado Personal Logrado:

Identifica el número de variaciones de signo de un polinomio, cuando uno de los coeficientes está dado en forma paramétrica, considerando como casos posibles valores para éste.

Conflictos semióticos:

No identificado.

Unidad de análisis U$_8$: Reactivo 8.


8

Your response

La factorización de $x^2 + 36$ es:

$(x + 6\,I)\,(x - 6\,I)$ (33%)

Comment:

La factorización de $x^2 - 12\,x + 36$ es:

$(x - 6)^2$ (33%)

Comment:

y la factorización de $x^2 - 12\,x + 37$ es

$(x - 6 - I)\,(x - 6 + I)$ (33%)

La factorización de $x^2 + 36$ es:

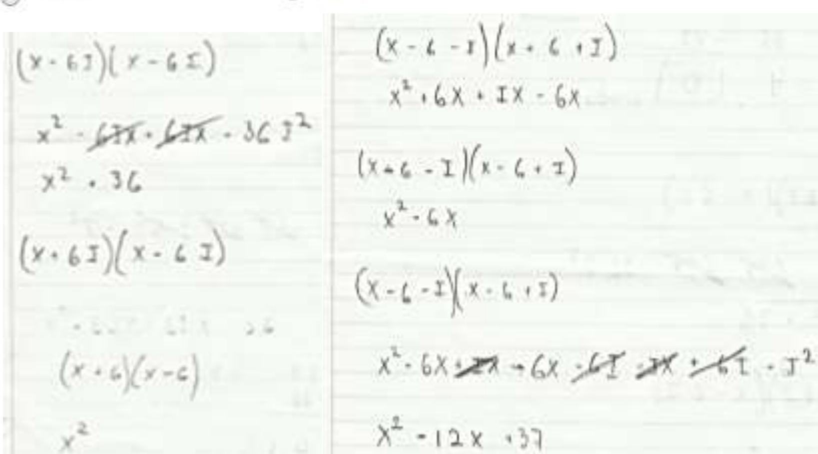
- $(x + 6\,I)\,(x - 6\,I)$
- $(x + 6\,I)^2$
- $(x + 6)\,(x - 6)$
- $(x + 6)^2$
- No sé

La factorización de $x^2 - 12\,x + 36$ es:

- $(x + 6\,I)\,(x - 6\,I)$
- $(x + 6)^2$
- $(x - 6)^2$
- $(x + 6)\,(x - 6)$
- $(x + 6\,I)^2$
- No sé

y la factorización de $x^2 - 12\,x + 37$ es

- $(x + 6 - I)\,(x - 6 + I)$
- $(x + 6 - I)\,(x + 6 + I)$
- $(x - 6 - I)\,(x + 6 + I)$
- $(x - 6 - I)\,(x - 6 + I)$
- No sé



Prácticas matemáticas:

- Para seleccionar la factorización que corresponde a $x^2 + 36$ comienza realizando el producto que ofrece el sistema como primera opción, $(x + 6I)(x - 6I)$, obteniendo $x^2 + 36$. Por lo tanto, selecciona en el software este producto como la factorización de $x^2 + 36$.
- Para seleccionar la factorización que corresponde al trinomio cuadrado perfecto $x^2 - 12x + 36$, continúa la estrategia de realizar el producto de cada factorización dada. Selecciona la primera opción $(x + 6I)(x - 6I)$ y antes de realizar el producto abandona esta opción al percatarse que es la respuesta del caso anterior. Después

escribe $(x-6)(x+6)$, comienza el producto y también abandona esta opción. Termina seleccionando en el sistema la opción $(x-6)^2$.

- Para seleccionar la factorización de $x^2-12x+37$, primero ensaya con $(x-6-I)(x+6+I)$ y comienza a desarrollar el producto y abandona. Después hace lo propio con la factorización $(x+6-I)(x-6+I)$. Por último selecciona $(x-6-I)(x-6+I)$ al desarrollar obtiene $x^2-6x+Ix-6x-6I-Ix+6I-I^2$, y al simplificar escribe $x^2-12x+37$. Es importante hacer notar que en este desarrollo omite escribir el término que corresponde a $(-6)(-6)$, no obstante escribe y selecciona como respuesta la factorización $(x-6-I)(x-6+I)$.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Algebraico.
- Conceptos: Factorización y expresión cuadrática.
- Procedimiento: Producto de factores lineales y simplificación de expresiones polinomiales cuadráticas.
- Argumentos: Comprobación de la factorización a través de la multiplicación de los factores lineales.

Funciones semióticas:

FSE1: Relacionael producto $(x+6I)(x-6I)$ con la expresión $x^2-6Ix+6Ix-36I^2$.

FSE2: Asocia el símbolo$-I^2$ con el número 1.

FSE4: Asocia el producto de factores lineales$(x+6I)(x-6I)$con la suma de cuadrados x^2+36.

FSE5: Relaciona un trinomio cuadrado, $x^2-12x+36$, con un binomio al cuadrado $(x-6)^2$.

FSE6: Relaciona $x^2-12x+37$ con $(x-6-I)(x-6+I)$.

Significado Personal Logrado:

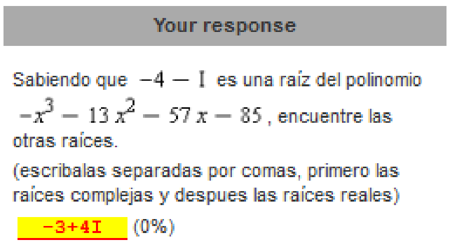
Identifica la factorización de una expresión cuadráticamediante el desarrollode los productospropuestos.

Conflictos semióticos:

El procedimiento llevado a cabo no es el institucionalmente esperado.

Unidad de análisis U_9: Reactivo 9.

9

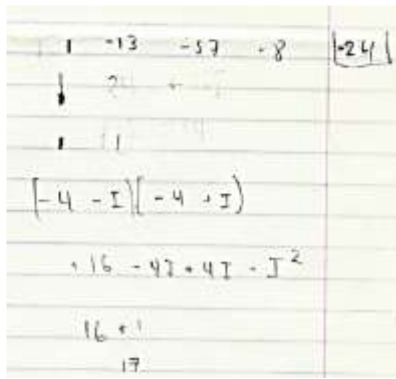


Your response

Sabiendo que $-4 - I$ es una raíz del polinomio $-x^3 - 13\,x^2 - 57\,x - 85$, encuentre las otras raíces.

(escribalas separadas por comas, primero las raíces complejas y despues las raíces reales)

-3+4I (0%)



Prácticas matemáticas:

- El estudiante intenta (finta) realizar división sintética, escribe -24 al final de la primera fila y abandona el intento. No se tienen elementos que ayuden a explicar porque escoge y escribe -24 al final de la primera fila.
- Realiza el producto entre la raíz no real dada y su conjugado $(-4 - I)(-4 + I)$, obteniendo como resultado 17.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Algebraico, numérico, sintaxis del sistema y esquema de división sintética.
- Conceptos: Polinomio, raíz de polinomio, raíz real, raíz compleja y conjugado de un número complejo.
- Procedimiento: Multiplicación de números complejos conjugados.
- Proposiciones: Si z_0 es una raíz compleja de un polinomio $p(x)$ con coeficientes reales, entonces su conjugado $\bar{z}_0$ también es raíz de $p(x)$.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia el polinomio $-x^3 - 13x^2 - 57x - 85$ con la lista de números $1, -13, -57, -8$.

FSE2: Asocia el número $-4 - I$ con el número $-4 + I$.

FSE3: Asocia los números complejos conjugados con su producto.

Significado Personal Logrado:

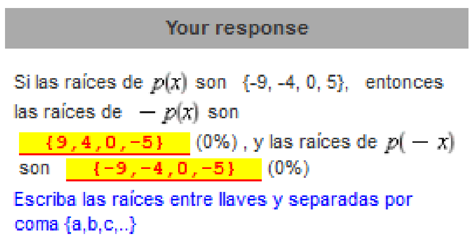
Asocia una raíz no real de un polinomio con coeficientes reales con su conjugado, y su producto con un número real.

Conflicto semiótico:

Aun cuando el estudiante obtiene el conjugado de la raíz dada no la registra como raíz en el sistema, escribiendo otro número cuyo origen se desconoce.

Unidad de análisis U_{10}: Reactivo 10.

10



Prácticas matemáticas:

El estudiante no reporta actividad en la hoja de trabajo para este reactivo.

- Relaciona las raíces de $p(x)$, $-p(x)$ y$p(-x)$ mediante posibles cambios de signo.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Numérico y sintaxis del sistema.
- Conceptos: Raíces de $p(x)$.
- Procedimiento: Considera posibles cambios de signo en las raíces.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia a $-p(x)$ la raíces de $p(-x)$.

FSE2: Asocia a $p(-x)$las raíces de $p(x)$.

Significado Personal Logrado:

Relaciona las raíces de $p(x)$, $-p(x)$ y$p(-x)$ mediante posibles cambios de signo.

Conflictos semióticos:

Asocia a $-p(x)$ la raíces de $p(-x)$.

Asocia a $p(-x)$las raíces de $p(x)$.

RESUMEN DEL SIGNIFICADO PERSONAL

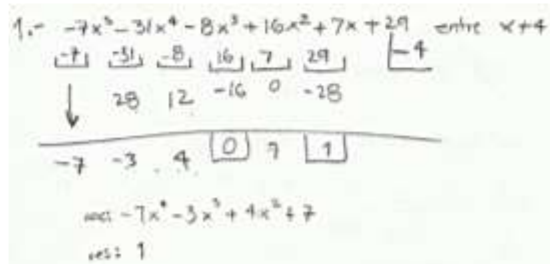
El estudiante es capaz de determinar el grado, las raíces y sus multiplicidades de un polinomio expresado como producto de factores lineales. Asimismo, puede llevar a cabo las mismas tareas en un polinomio representado gráficamente cuando las raíces son enteras y las multiplicidades son uno, dos o tres. Sin embargo, muestra deficiencias para relacionar ambas formas de representación. Cuando un polinomio de grado mayor que dos, se expresa en forma desarrollada, el estudiante usa el esquema de la división sintética tanto para evaluar el polinomio como para representarlo en forma factorizada y determinar sus raíces. Cuando el polinomio es de segundo grado, el estudiante presenta dificultades en el uso de la fórmula general y en la factorización.

En el análisis de las raíces de un polinomio, no utiliza la relación existente entre estas y el término independiente del polinomio. Desconoce las relaciones entre las raíces de los polinomios $-p(x), p(-x)$y $p(x)$.

Determina correctamente el número de variaciones de signo de los polinomios dados.

4.4.3 Grupo 37:Caso 3, Estudiante de Rendimiento Alto.

Unidad de análisis U_1: Reactivo 1.


1.- $-7x^5-31x^4-8x^3+16x^2+7x+29$ entre $x+4$

-7 -31 -8 16 7 29 | -4

28 12 -16 0 -28

-7 -3 4 $\boxed{0}$ 7 $\boxed{1}$

coc: $-7x^4-3x^3+4x^2+7$

res: 1

Question 1

Your response

Utiliza división sintética para dividir el polinomio

$p(x) =$

$-7x^5 - 31x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 7x + 29$ entre

$x + 4$

-7 (6%) -31 (6%) -8 (6%) 16 (6%) 7 (6%) 29 (6%)
| -4 (6%)

-7 (6%) -3 (6%) 4 (6%) 0 (6%) 7 (6%) 1 (6%)

Por lo anterior, el cociente es -7x^4-3x^3+4x^2+7 (6%) y el residuo es 1 (6%)

Exprese el polinomio como el producto del divisor y el cociente, más el residuo.

$p(x) =$ 1 (0%)

Prácticas matemáticas:

- Usa el esquema de división sintética,en dos filas en el sistema yen tres en la hoja de trabajo, para dividir el polinomio $-7x^5 - 31x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 7x + 29$ entre x + 4.
- Identifica el cociente y el residuo en ambos esquemas de división.
- Registra apropiadamente en el sistema el cociente y el residuo.
- Confunde la última situación.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Verbal, algebraico, numérico, iconográfico (esquema de división sintética) y sintaxis del sistema.
- Conceptos: Polinomio, división de polinomios, cociente, residuo y divisor.
- Procedimiento: División sintética.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia al polinomio $-7x^5 - 31x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 7x + 29$con la lista de números $-7, -31, -8,\ 16,\ 7,\ 29$ considerando el procedimiento de la división sintética.

FSE2: Relaciona el binomio x + 4 con el número -4 escrito al final de la primera fila, en elesquema de la división sintética.

$x + 4$ $\Rightarrow$ $\underline{-7}\ \underline{-31}\ \underline{-8}\ \underline{16}\ \underline{7}\ \ \underline{29}\ |\ \underline{-4}$

FSE3: Relacionar con el esquema anterior el procedimiento aritmético asociado a la división sintética (en el sistema lo realiza en dos filas y en la hoja de trabajo en dos filas).

$\underline{-7}\ \underline{-31}\ \underline{-8}\ \underline{16}\ \underline{7}\ \ \underline{29}\ |\ \underline{-4}$ $\Rightarrow$ $\underline{-7}\ \underline{-31}\ \underline{-8}\ \underline{16}\ \underline{7}\ \ \underline{29}\ |\ \underline{-4}$
$\underline{-7 -3\ 4\ 0}\ \ \underline{71}$

FSE4: Asocia el número que aparece al final del procedimiento aritmético asociado a la división sintética con el residuo.

$\underline{-7}\ \underline{-31}\ \underline{-8}\ \underline{16}\ \underline{7}\ \ \underline{29}\ |\ \underline{-4}$
$\underline{-7 -3\ 4}\ \ \underline{0}\ \ \underline{71}$ $\Rightarrow$ Residuo = 1

FSE5: Relaciona los primeros cinco números que aparecen en la segunda fila del procedimiento aritmético asociado a la división sintética con el cociente.

$\underline{-7}\ \underline{-31}\ \underline{-8}\ \underline{16}\ \underline{7}\ \ \underline{29}\ |\ \underline{-4}$
$\underline{-7 -3\ 4}\ \ \underline{0}\ \ \underline{71}$ $\Rightarrow$ $-7x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 0x + 7$

FSE6: Confunde el teorema del algoritmo de la división con el teorema del residuo.

Significado Personal Logrado:

Realiza división sintética para la división de polinomios e identifica el polinomio cociente y el residuo.

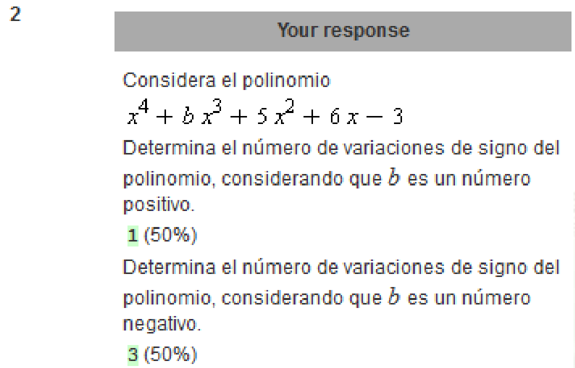
Registra adecuadamente en el sistema el cociente y el residuo.

Conflicto semiótico:

El alumno confunde el teorema del algoritmo de la división con el teorema del residuo.

El estudiante no distingue entre $p(x)$ y el polinomio evaluado en a, $p(a)$.

Unidad de análisis U*₂*: Reactivo 2.



2

Your response

Considera el polinomio

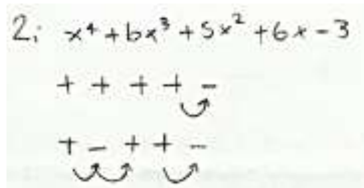
$x^4 + b\,x^3 + 5\,x^2 + 6\,x - 3$

Determina el número de variaciones de signo del polinomio, considerando que b es un número positivo.

1 (50%)

Determina el número de variaciones de signo del polinomio, considerando que b es un número negativo.

3 (50%)



Prácticas matemáticas:

- Determina y compara los signos de dos coeficientes sucesivos de un polinomio y el número de variaciones de dichos signos.
- Le asocia signo a un número representado genéricamente mediante un parámetro.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Algebraico, numérico e icónico.
- Conceptos: Polinomio, coeficientes, variaciones de signo y número de variaciones de signo.
- Procedimiento: Determina y compara los signos de dos coeficientes sucesivos de un polinomio y, determina el número de variaciones de dichos signos.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia al polinomio $x^4 + bx^3 + 5x^2 + 6x - 3$, donde $b > 0$, con la sucesión de signos $+, +, +, +, -$.

FSE2: Asocia a la sucesión de signos $+, +, +, +, -$ el número 1.

FSE3: Asocia al polinomio $x^4 + bx^3 + 5x^2 + 6x - 3$, donde $b < 0$, con la sucesión de signos $+, -, +, +, -$.

FSE4: Asocia a la sucesión de signos $+, -, +, +, -$ el número 3.

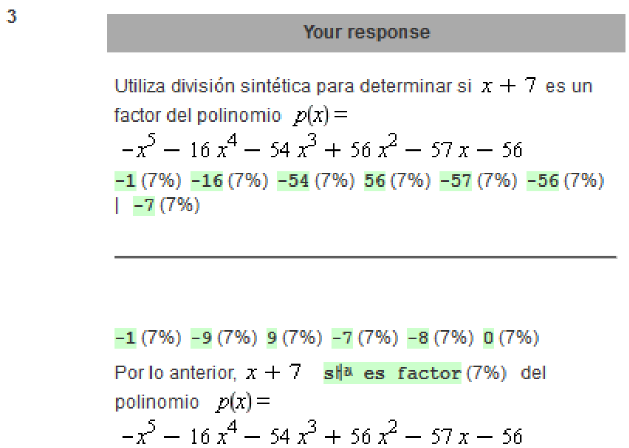
Significado Personal Logrado:

Identifica el número de variaciones de signo de un polinomio, cuando uno de los coeficientes está dado en forma paramétrica, considerando como casos posibles valores para éste.

Conflictos semióticos:

No identificado.

Unidad de análisis U_3: Reactivo 3.


3

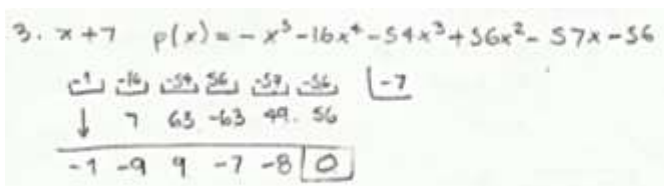
Your response

Utiliza división sintética para determinar si $x + 7$ es un factor del polinomio $p(x) =$
$-x^5 - 16x^4 - 54x^3 + 56x^2 - 57x - 56$

-1 (7%) -16 (7%) -54 (7%) 56 (7%) -57 (7%) -56 (7%)
| -7 (7%)

-1 (7%) -9 (7%) 9 (7%) -7 (7%) -8 (7%) 0 (7%)

Por lo anterior, $x + 7$ sí es factor (7%) del polinomio $p(x) =$
$-x^5 - 16x^4 - 54x^3 + 56x^2 - 57x - 56$



Prácticas matemáticas:

- Realiza la división sintética tanto en el sistema como en la hoja de trabajo, en el Maple T.A. debe hacerla en dos filas y en la hoja la realiza en tres.
- En la hoja de trabajo hace notar que el último valor calculado en el procedimiento de división es cero.
- Concluye que $x + 7$es factor del polinomio $p(x) = -x^5 - 16x^4 - 54x^3 + 56x^2 - 57x - 56$.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Algebraico, numérico e iconográfico (esquema de división sintética).
- Conceptos: polinomio, división sintética, factor de un polinomio y residuo.
- Procedimiento: División sintética, identifica y analiza el residuo obtenido.
- Proposiciones: Teorema del factor y teorema del residuo.

Funciones semióticas:

FSE1: El alumno relaciona el polinomio $\mathrm{p(x)} = -x^5 - 16x^4 - 54x^3 + 56x^2 - 57x - 56$ con la lista de números $-1, -16, -54, 56, -57, -56$, en el procedimiento de división sintética.

FSE2: El estudiante relaciona el binomio $x + 7$ con el número -7 escrito al final de la primera fila en el esquema de la división sintética.

$x + 7$ → $\underline{-1}\ \underline{-16}\ \underline{-54}\ \underline{56}\ \underline{-57}\ \ \underline{-56}\ |\ \underline{-7}$

FSE3: Relaciona con el esquema anterior el procedimiento aritmético asociado a la división sintética.

$\underline{-1}\ \underline{-16}\ \underline{-54}\ \underline{56}\ \underline{-57}\ \ \underline{-56}\ |\ -7$ → $\underline{-1}\ \underline{-16}\ \underline{-54}\ \underline{56}\ \underline{-57}\ \ \underline{-56}\ |\ \underline{-7}$
$\underline{-1}\ \underline{-9\ 9}\ \ \underline{-7}\ \ \underline{-80}$

FSE4: Relaciona el número que aparece al final del procedimiento aritmético asociado a la división sintética con el residuo.

$\underline{-1}\ \underline{-16}\ \underline{-54}\ \underline{56}\ \underline{-57}\ \ \underline{-56}\ |\ \underline{-7}$
$\underline{-1}\ \underline{-9\ 9}\ \ \underline{-7}\ \ \underline{-80}$ → Residuo = 0

FSE5: Asocia el valor del residuo igual a cero con una división exacta.

FSE6: Relaciona la división exacta con el hecho de que $x + 7$ es factor del polinomio.

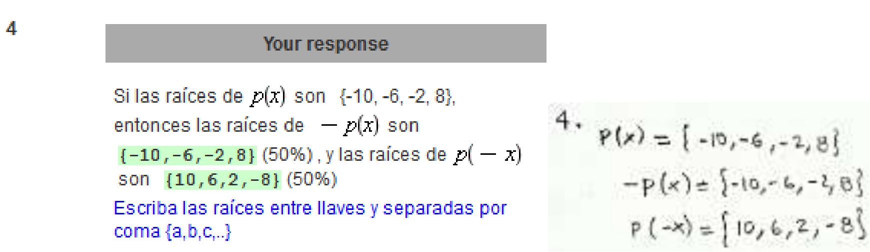
Significado Personal Logrado:

El estudiante usa adecuadamente el esquema y el procedimiento de división sintética; también, concluye acorde a la pauta institucional que la expresión lineal no es factor del polinomio. Puede considerarse que el significado personal logrado se corresponde con el significado institucional evaluado.

Conflictos semióticos:

No identificado.

Unidad de análisis U$_4$: Reactivo 4.


4

Your response

Si las raíces de $p(x)$ son {-10, -6, -2, 8}, entonces las raíces de $-p(x)$ son {-10,-6,-2,8} (50%), y las raíces de $p(-x)$ son {10,6,2,-8} (50%)

Escriba las raíces entre llaves y separadas por coma {a,b,c,..}

4. $p(x) = \{-10,-6,-2,8\}$
$-p(x) = \{-10,-6,-2,8\}$
$p(-x) = \{10,6,2,-8\}$

Prácticas matemáticas:

- El alumno realiza las siguientes declaraciones en la hoja de trabajo:
    - Declara que $p(x)$ es igual al conjunto o lista de números $\{-10, -6, -2, 8\}$.
    - Declara que $-p(x)$ es igual al conjunto o lista de números $\{-10, -6, -2, 8\}$.
    - Declara que $p(-x)$ es igual al conjunto o lista de números $\{10, 6, 2, -8\}$.
- Analiza las reflexiones de la gráfica con respecto a los ejes coordenados.
- El estudiante registra en el sistema las raíces de $-p(x)$ como $\{-10, -6, -2, 8\}$.
- Registra las raíces de $p(-x)$ como $\{10, 6, 2, -8\}$.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Numérico, algebraico y sintaxis del sistema.
- Concepto: Raíz.
- Procedimiento: Analiza las reflexiones de la gráfica con respecto a los ejes coordenados. Es decir, para determinar las raíces reales de $-p(x)$ toma las raíces de $p(x)$ y, cambia el signo de las raíces de $p(x)$para determinar las de $p(-x)$.
- Proposiciones: Las raíces de $-p(x)$ son las misma de $p(x)$. Si r es raíz de $p(x)$ entonces, $-r$ es raíz de $-p(x)$.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia a $-p(x)$ las mismas raíces de $p(x)$.

FSE2: Asocia a $p(-x)$ las raíces de $p(x)$ con signo contrario.

Significado Personal Logrado:

Analizar las reflexiones de la gráfica con respecto a los ejes coordenados.

Conoce y utiliza las relaciones entre las raíces de $p(x)$, $-p(x)$ y $p(-x)$.

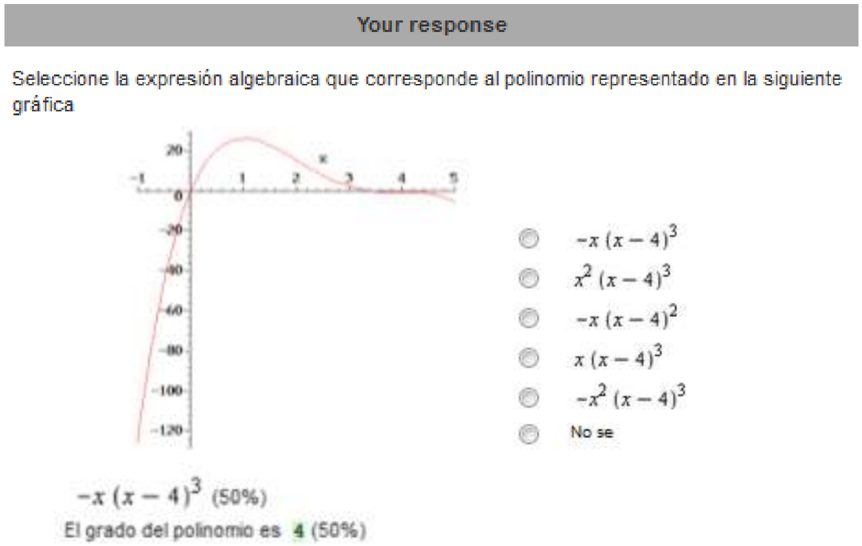
Registra adecuadamente en el sistema las raíces de $-p(x)$ y $p(-x)$.

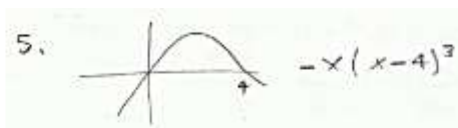
Conflictos semióticos:

El estudiante confunde el uso del signo "=". Lo utiliza para asociar dos objetos pasando por alto su significado institucional de igualdad.

Unidad de análisis U_5: Reactivo 5.

5





Prácticas matemáticas:

- Determina que el signo del coeficiente del término de mayor grado en la expresión algebraica es negativo, debido a que la expresión gráfica es cóncava hacia abajo.
- Articula elementos de la expresión gráfica y algebraica de un polinomio.
- Selecciona $-x(x-4)^3$ como la expresión algebraica correspondiente a la gráfica.
- Determina correctamente el grado del polinomio dado.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Algebraico,numérico y gráfico.
- Conceptos: Polinomio, raíces de polinomios y multiplicidad de raíces.
- Procedimiento: Articulación entre elementos de la expresión gráfica y algebraica de un polinomio.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia las intersecciones entre la gráfica y el eje *X* con las raíces del polinomio.

FSE2:Asocia la forma de la intersección entre la gráfica y el eje *X* con la multiplicidad de la raíz correspondiente.

FSE3: Asocia el factor x de la expresión algebraica con la raíz 0 del polinomio.

FSE4: Asocia el factor $(x-4)^3$ con la raíz 4 del polinomio.

FSE5: Asocia los exponentes de los factores lineales con la multiplicidad de la raíz correspondiente.

FSE6: Asocia la concavidad de la gráfica con el signo menos, $-$, al principio de la expresión algebraica

FSE7: Relaciona la gráfica dada con la expresión algebraica $-x(x-4)^3$.

FSE8: Relaciona la suma de los exponentes de la expresión algebraica o la suma de las multiplicidades de las raíces del polinomio con su grado.

Significado Personal Logrado:

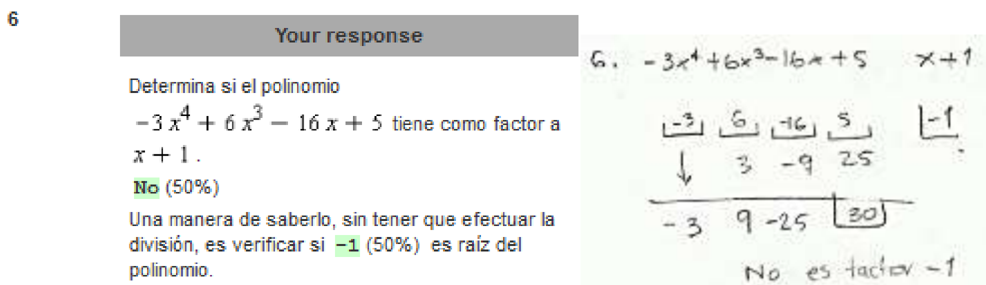
Selecciona la expresión algebraica factorizada en términos lineales que corresponde con la gráfica dada.

Determina el grado de un polinomio dada su gráfica y su expresión algebraica factorizada.

Conflictos semióticos:

No identificado.

Unidad de análisis U_6: Reactivo 6.



Prácticas matemáticas:

- Realiza el algoritmo de división sintética para dividir el polinomio $-3x^4+6x^3-16x+5$ entre $x+1$, en el esquema de la división omite el lugar (espacio) correspondiente al coeficiente del término cuadrático.
- Hace notar que el residuo es distinto de cero y concluye que $x+1$ no es factor del polinomio.
- Relaciona la raíz 1 con el factor $x-1$.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Verbal, algebraico, numérico e iconográfico (esquema de división sintética).
- Conceptos: Polinomio, raíz de polinomio y factor de polinomio.
- Procedimiento: División sintética, identifica y analiza el residuo obtenido.
- Proposición: Teorema del factor y de la raíz.

Funciones semióticas:

FSE1: El alumno relaciona el polinomio $\mathrm{p(x)} = -3x^4 + 6x^3 - 16x + 5$ con la lista de números $-3,\ 6, -16,\ 5$, en el procedimiento de división sintética.

FSE2: El estudiante relaciona el binomio $x + 1$ con el número -1 escrito al final de la primera fila en el esquema de la división sintética.

$x + 7$ $\Rightarrow$ $\underline{-3}\ \underline{6}\ \underline{-16}\ \ \underline{5} \mid \underline{-1}$

FSE3: Relaciona con el esquema anterior el procedimiento aritmético asociado a la división sintética.

$\underline{-3}\ \underline{6}\ \underline{-16}\ \ \underline{5} \mid -1$ $\Rightarrow$ $\begin{array}{l} \underline{-3}\ \underline{6}\ \underline{-16}\ \ \ \underline{5} \mid \underline{-1} \\ \qquad \underline{-3\ 9}\ \ \underline{-25}\ \underline{\boxed{30}} \end{array}$

FSE4: Relaciona el número que aparece al final del procedimiento aritmético asociado a la división sintética con el residuo.

$\begin{array}{l} \underline{-3}\ \underline{6}\ \underline{-16}\ \ \ \underline{5} \mid \underline{-1} \\ \qquad \underline{-3\ 9}\ \ \underline{-25}\ \underline{\boxed{30}} \end{array}$ $\Rightarrow$ Residuo = 30

FSE5: Asocia el valor del residuo distinto a cero con una división no exacta.

FSE6: Relaciona la división no exacta con el hecho de que $x + 1$ no es factor del polinomio.

FSE7: Asocia el hecho de que -1 no es raíz del polinomio con el hecho de que $x + 1$ no es factor del polinomio.

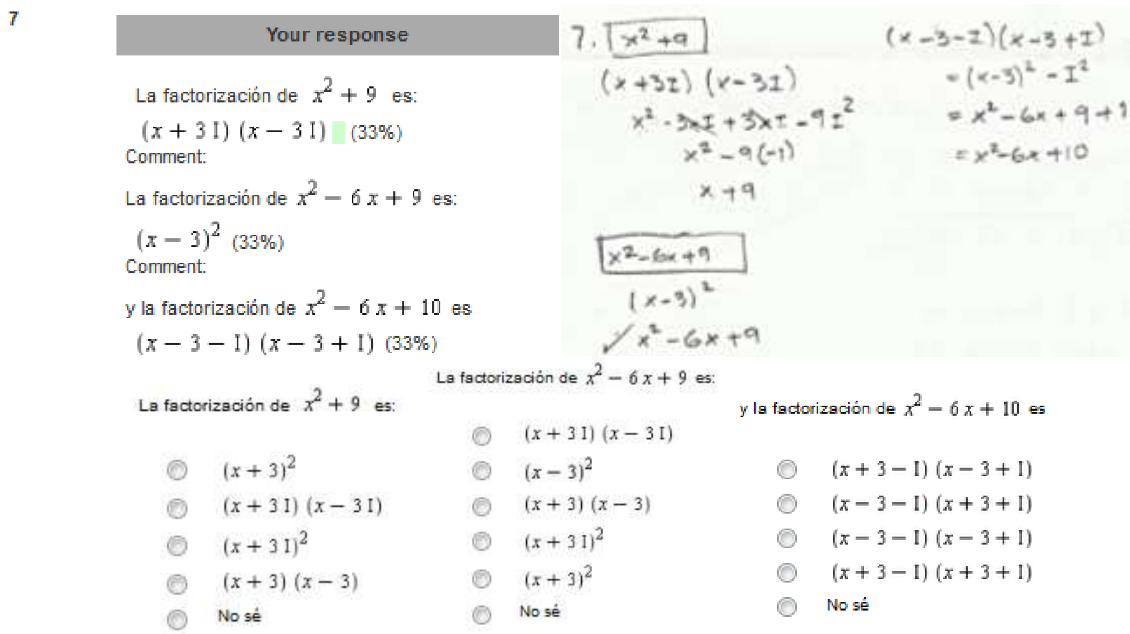
Significado Personal Logrado:

Utiliza el algoritmo de división sintética para determinar si un binomio de la forma $x - r$ es factor del polinomio dado, relacionando el procedimiento con la evaluación del polinomio en r.

Conflictos semióticos:

Registra de forma incompleta los coeficientes del polinomio dado, en el esquema de división sintética, ignorando el valor cero que corresponde al coeficiente del término cuadrático. Sin embargo este error no tiene consecuencias al momento de decidir si el binomio es o no factor del polinomio, debido a que también en este caso resulta un residuo distinto de cero.

Unidad de análisis U_7: Reactivo 7.



Prácticas matemáticas:

- El estudiante selecciona como factorización de $x^2 + 9$ la expresión $(x + 3I)(x - 3I)$, desarrolla el producto y simplifica, a manera de comprobación. Hace notar que $I^2 = -1$.
- Selecciona como factorización del trinomio cuadrado $x^2 - 6x + 9$ la expresión $(x - 3)^2$, lo desarrolla y obtiene el trinomio dado.
- Para el trinomio $x^2 - 6x + 10$ selecciona como factorización a $(x - 3 - I)(x - 3 + I)$. Dicha factorización la considera como un producto de conjugados y la reescribe como una diferencia de cuadrados, de la siguiente manera:

$$(x - 3 - I)(x - 3 + I) = (x - 3)^2 - I^2$$

Desarrolla el binomio del lado izquierdo, toma en cuenta que $I^2 = -1$ y obtiene:

$$(x - 3)^2 - I^2 = x^2 - 6x + 9 + 1 = x^2 - 6x + 10.$$

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Algebraico.
- Conceptos: Factorización y expresiones cuadráticas.
- Procedimiento: Desarrolla un producto de factores lineales, un binomio al cuadrado y un producto de binomios conjugados.
- Argumentos: Prueba mediante el desarrollo de los productos que las factorizaciones son las correctas.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia a I^2 el número -1.

FSE1: Relacionax^2+9con la factorización $(x+3I)(x-3I)$.

FSE2: Asocia a x^2-6x+9 la factorización $(x-3)^2$.

FSE3: Asocia a $(x-3-I)(x-3+I)$ la diferencia de cuadrados $(x-3)^2-I^2$, hace la consideración que el producto es una diferencia de cuadrados.

FSE4: Asocia la diferencia de cuadrados $(x-3)^2-I^2$ con la suma de un trinomio cuadrado perfecto más 1, $x^2-6x+9+1$.

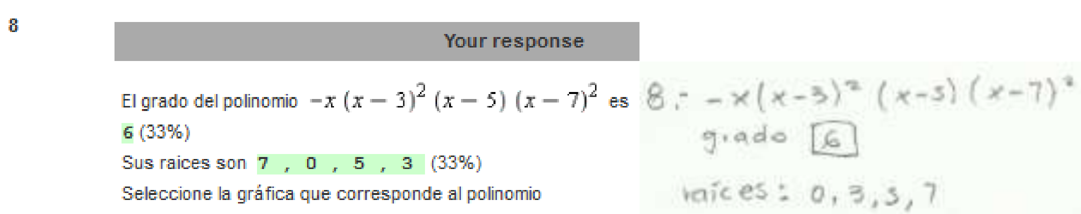
Significado Personal Logrado:

Identifica la factorización de una expresión cuadráticay desarrolla las expresionesfactorizadas a manera de comprobación

Conflictos semióticos:

No identificado.

Unidad de análisis U$_8$: Reactivo 8.


8

Your response

El grado del polinomio $-x\,(x-3)^2\,(x-5)\,(x-7)^2$ es 6 (33%)

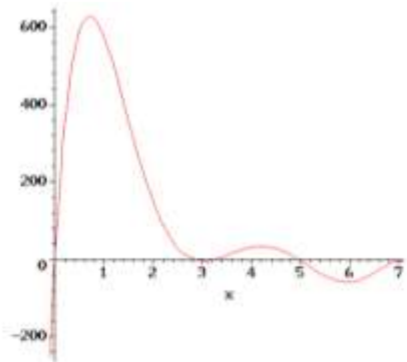
Sus raices son 7 , 0 , 5 , 3 (33%)

Seleccione la gráfica que corresponde al polinomio

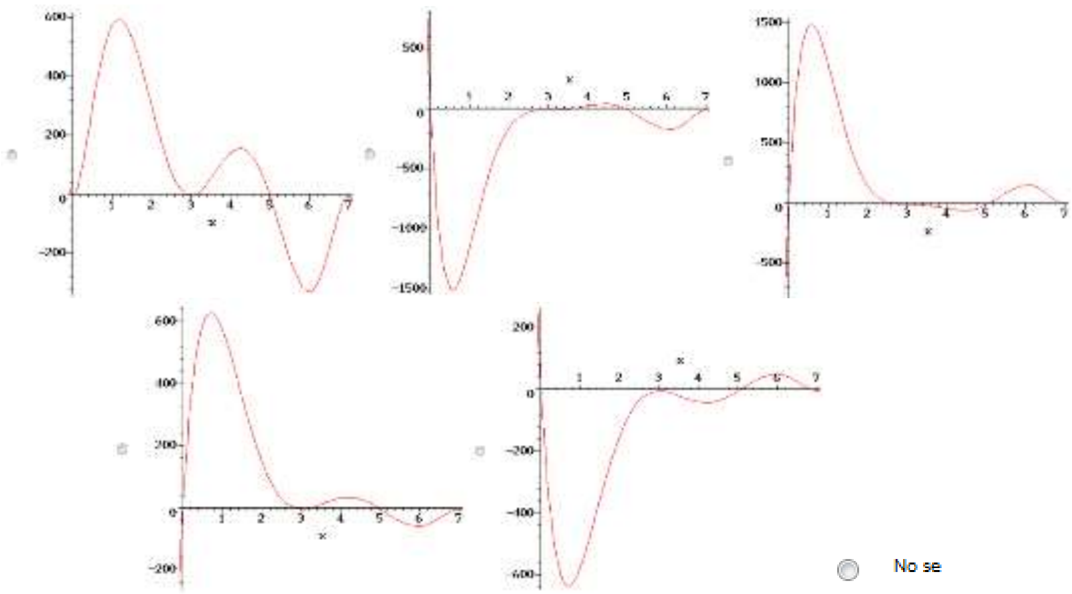
8 : $-x(x-3)^2\,(x-5)\,(x-7)^2$

grado $\boxed{6}$

raices : 0, 3, 5, 7



Las opciones son las gráficas:



Prácticas matemáticas:

- Suma los exponentes de los factores lineales para obtener el grado del polinomio.
- Obtiene la raíces del polinomio $-x(x-3)^2(x-5)(x-7)^2$.
- Articula elementos de la expresión algebraica del polinomio con la expresión gráfica correspondiente.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Verbal, algebraico y numérico.
- Conceptos: Polinomio, grado de polinomio y raíces de polinomio.
- Procedimientos: Suma de los exponentes de los factores lineales de la expresión polinomial, articulación entre la expresión algebraica y gráfica de un polinomio, resolución de ecuaciones lineales.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia la suma de los exponentes de los factores lineales de la expresión algebraica con el grado del polinomio.

FSE2: Asocia el grado par del polinomio y el signo menos al principio de la expresión algebraica con una gráfica de concavidad hacia abajo.

FSE3: Asocia el factor x de la expresión algebraica con el número 0. Usando la definición de raíz de polinomio.

FSE4: Asocia el factor $(x-3)^2$ de la expresión algebraica con el número 3. Usando la definición de raíz de polinomio.

FSE5: Asocia el factor $(x-5)$ con el número 5. A través de la definición de raíz de polinomio.

FSE6: Asocia el factor $(x-7)^2$ con el número 7. Usando la definición de raíz de polinomio.

FSE7: Asocia el exponente de un factor lineal de la expresión algebraica con la multiplicidad de la raíz correspondiente.

FSE8: Asocia las intersecciones entre la gráfica y el eje x, con las raíces del polinomio.

FSE9: Asocia la forma de la gráfica "cerca" de una intersección con la multiplicidad de la raíz correspondiente.

FSE10: Asocia la expresión polinomial $-x(x-3)^2(x-5)(x-7)^2$ con la gráfica elegida por él.

Significado Personal Logrado:

Determina el grado de polinomio un polinomio dado en forma factorizada en términos lineales.

Determina las raíces de un polinomio dado en forma factorizada en términos lineales.

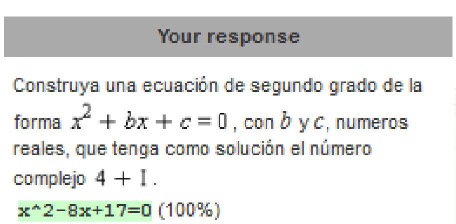
Articula elementos de la expresión gráfica y algebraica de un polinomio.

Conflictos semióticos:

No identificado.

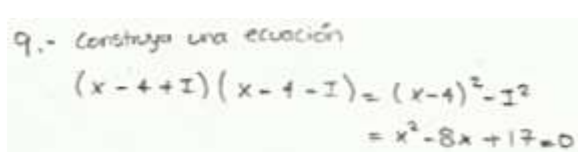
Unidad de análisis U_9: Reactivo 9.

9


Your response

Construya una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx + c = 0$, con b y c, numeros reales, que tenga como solución el número complejo $4 + I$.

x^2-8x+17=0 (100%)



Prácticas matemáticas:

- Dada la solución $4 + I$, el estudiante determina la segunda solución $4 - I$ de la ecuación de segundo grado.
- El estudiante sustituye las soluciones en la ecuación escrita como producto de factores lineales igualado a cero. Es decir, en la forma $(x - 4 + I)(x - 4 - I) = 0$.
- Reescribe el producto $(x - 4 + I)(x - 4 - I)$ como una diferencia de cuadrados, $(x - 4)^2 - I^2$ desarrolla estaexpresión y por último lo iguala cero, obteniendo así la ecuación solicitada.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Verbal y algebraico.
- Conceptos: Ecuación de segundo grado, solución de ecuación, número complejo y conjugado de un número complejo.
- Procedimiento: Sustituir la solución compleja no real dada, $4 + I$, y su conjugada $4 - I$, en una expresión de la forma$(x - 4 + I)(x - 4 - I)$ =0, el lado izquierdo de la ecuación lo expresa como una diferencia de cuadrados $(x - 4)^2 - I^2 = 0$, y ésta a su vez, la escribe como $x^2 - 8x + 17 = 0$.
- Proposiciones: Teorema de las soluciones complejas conjugadas de una ecuación cuadrática con coeficientes reales. Teorema del factor y de la raíz.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia número complejo no real con su conjugado.

FSE2: Asocia los números $4 + I$ y $4 - I$ con la ecuación $(x - 4 + I)(x - 4 - I) = 0$.

FSE3: Asocia la ecuación $(x - 4 + I)(x - 4 - I) = 0$ con $(x - 4)^2 - I^2 = 0$. Mediante arreglos algebraicos.

FSE4: Por último, asocia $(x - 4)^2 - I^2 = 0$ con la ecuación $x^2 - 8x + 17 = 0$.

Significado Personal Logrado:

Utiliza el teorema de las soluciones complejas conjugadas de una ecuación de segundo grado con coeficientes reales. Es decir, dada una solución de una ecuación cuadrática de la forma $a + bI$ determina que $a - bI$ también es solución.

Utiliza el teorema del teorema factor y de la raíz.

Dada una solución no real, el estudiante construye una ecuación de segundo grado con coeficientes reales.

Conflictos semióticos:

No identificado.

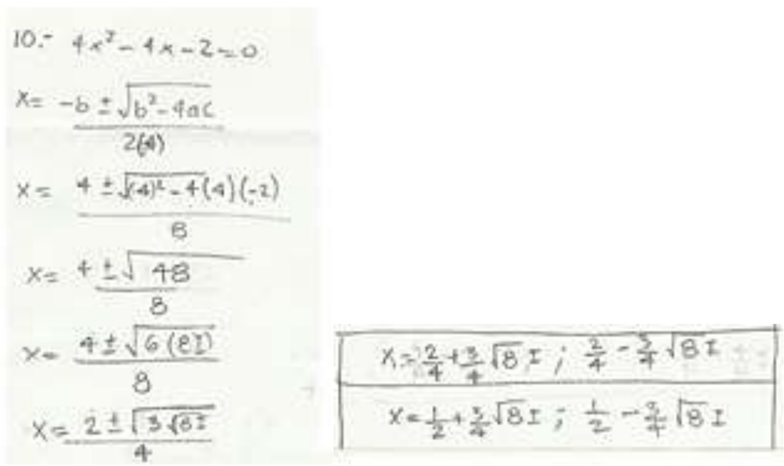
Unidad de análisis U_{10}: Reactivo 10.

10

Las soluciones exactas de la ecuación $4x^2 - 4x - 2 = 0$ son:

Escribe las soluciones (valores numéricos solamente) separadas por ;

Your Answer: 1/2+3/4sqrt(8)I;1/2-3/4sqrt(8)I



Prácticas matemáticas:

- Utiliza la fórmula general para intentar resolver la ecuación cuadrática.
- El discriminante resulta 48 y lo reescribe como $48 = 6(8I)$, obteniendo así lo siguiente

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{6(8I)}}{8}$$

Simplifica dividiendo entre 2 el numerador y el denominador, sólo que la simplificación en el numerador la lleva a cabo dentro del radical (divide 6 entre 2). También, al parecer intenta aplicar la propiedad $\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B}$, obteniendo

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{3\sqrt{8}\,I}}{4}$$

De esta última igualdad obtiene

$$x = \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{8}\,I;\ \frac{2}{4} - \frac{3}{4}\sqrt{8}\,I$$

Por alguna razón quita el radical a 3, un radical a 8 y también a *I*.

Por último, simplifica la fracción $\frac{2}{4}$ obteniendo

$$x = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{8}\,I;\ \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\sqrt{8}\,I.$$

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Algebraico y numérico.
- Conceptos: Ecuación algebraica y solución de ecuación algebraica.
- Procedimiento: Mediante el uso de la fórmula general intentaresolver una ecuación cuadrática.
- Proposición: La fórmula general conduce a la solución de una ecuación cuadrática.

Funciones semiótica:

FSE1: Relaciona la ecuación $4x^2 - 4x - 2 = 0$ con la fórmula general.

$$\boxed{4x^2 - 4x - 2 = 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

FSE2: Asocia las letras $\{a, b, c\}$ con los coeficientes de la ecuación $\{4, -4, -2\}$.

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(4)(-2)}}{8}}$$

FSE3: Asocia al número 48 el número expresado como el producto $6(8I)$.

FSE4: Con el fin de simplificar, según él, divide entre 2 el numerador y el denominador y, lleva a cabo la siguiente asociación:

$$\boxed{x = \frac{4 \pm \sqrt{6(8I)}}{8}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{2 \pm \sqrt{3\sqrt{8}\,I}}{4}}$$

FSE5: Para obtener las dos soluciones realiza la siguiente asociación:

$$\boxed{x = \frac{2 \pm \sqrt{3\sqrt{8}\,I}}{4}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{8}\,I;\ \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{8}\,I}$$

Significado Personal Logrado:

Usa la fórmula general para ecuaciones cuadráticas, selecciona y sustituye acertadamente los valores de los coeficientes a, b y c.

Conflictos semióticos:

Para simplificar el radical el estudiante evoca una factorización del número que no resulta adecuada.

El estudiante asocia la raíz de un número positivo con la unidad imaginaría.

Para dividir un radical entre un número lo hace ignorando el radical sin tomar en consideración la transformación que debería tener el divisor para operar dentro del radical.

Al tratar de expresar un radical como producto de radicales no está consciente sobre lo que se incluye en el primer radical.

Elimina el radical del primer término aun cuando éste no tiene raíz exacta.

RESUMEN DEL SIGNIFICADO PERSONAL

El estudiante muestra el dominio sobre el tema de polinomio y sus raíces a través de los tipos de prácticas matemáticas: *lenguaje, definiciones, procedimientos, proposiciones* y de *argumentaciones.* Utiliza el *lenguaje* verbal, gráfico y algebraico, para expresar polinomios, así como conceptos, procedimientos y las proposiciones útiles para dar solución a las situaciones problema, es capaz de identificar las raíces y el grado de polinomios en las representaciones gráfica y algebraica en forma factorizada, también es capaz de articular las representaciones gráfica y algebraica factorizada de polinomios. El tipo de prácticamás utilizada por el estudiante es la *procedimental*, unos de los procedimientos son: división sintética, desarrollo de productos de factores lineales, uso de la fórmula general para ecuaciones de segundo grado y el de factorización. Es capaz de determinar si un binomio $x - a$ es factor de un polinomio $p(x)$, para ello utiliza el procedimiento de división sintética y el teorema del factor. Las proposiciones juegan un papel muy importante ya que sustentan los procedimientos utilizados por el estudiante para resolver las *situaciones problemas* planteadas en el examen. Unas proposiciones utilizadas por el estudiante son: la fórmula general conduce a la solución de una ecuación cuadrática, teorema de las soluciones complejas conjugadas de una ecuación con coeficientes reales, teorema del factor y de la raíz, las raíces de $-p(x)$ son las misma de $p(x)$ y si r es raíz de $p(x)$ entonces, $-r$ es raíz de $-p(x)$.

Utiliza el teorema del factor y de la raíz, el teorema concerniente a las raíces complejas conjugadas y el procedimiento de desarrollo de productos lineales para construir una ecuación de segundo grado, dada una de sus soluciones complejas.

El estudiante utiliza la práctica de *argumentación* con el fin de justificar la selección de las factorizaciones de expresiones algebraicas de segundo grado y lo realiza mediante el desarrollo de los productos de los factores de dichas factorizaciones.

Utiliza incorrectamente la fórmula general al tratar de resolver una ecuación de segundo grado que tiene soluciones irracionales. Comete errores en el uso del lenguaje algebraico al relacionar mediante el símbolo "=" dos objetos distintos. Otro de los errores consiste en omitir registrar el 0 correspondiente al término cuadrático en el esquema de la división sintética, cuando el polinomio de cuarto grado no cuenta con término cuadrático. Cabe aclarar que los últimos dos errores se presentan en la hoja de respuestas y no influyen en la respuesta registrada en el sistema.

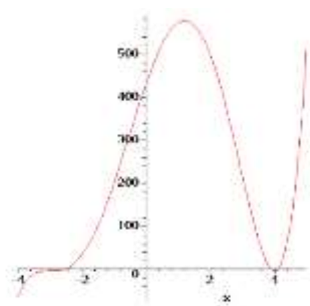
4.4.4 Grupo 31: Caso 1, Estudiante de Rendimiento Bajo.

Unidad de análisis U_1: Reactivo 1.

1

Your response

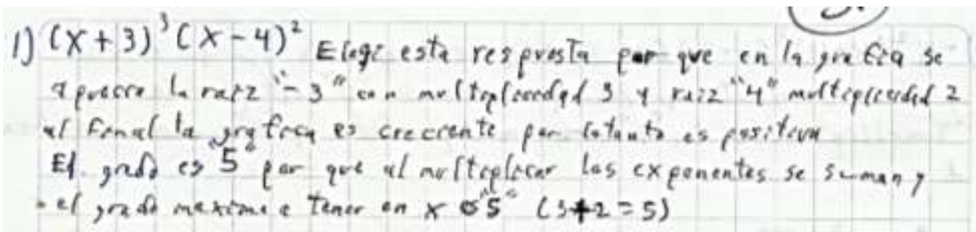
Seleccione la expresión algebraica que corresponde al polinomio representado en la siguiente gráfica



- $(x+3)^4(x-4)^2$
- $-(x+3)^4(x-4)^2$
- $-(x+3)^3(x-4)^2$
- $(x+3)^3(x-4)^2$
- $(x+3)^3(x-4)$
- No se

$(x+3)^3(x-4)^2$ (50%)

El grado del polinomio es 5 (50%)



1) $(x+3)^3(x-4)^2$ Elegí esta respuesta por que en la gráfica se aparece la raíz "-3" con multiplicidad 3 y raíz "4" multiplicidad 2 al final la gráfica es creciente por lo tanto es positiva
El grado es 5 por que al multiplicar los exponentes se suman y el grado máximo a tener en x es 5 $(3+2=5)$

Prácticas matemáticas:

- Determina las raíces del polinomio representado gráficamente y sus correspondientes multiplicidades.
- Analiza la forma de la gráfica para seleccionar una de dos expresiones de signo contrario.
- Selecciona correctamente la expresión algebraica que corresponde al polinomio representado por la gráfica dada y justifica dicha selección.
- Determina correctamente el grado del polinomio y lo justifica.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Verbal, algebraico y numérico.
- Conceptos: Polinomio, grado de polinomio, raíz de polinomio, multiplicidad de raíz de polinomio y gráfica creciente.
- Procedimiento: Articulaciónentre elementos de la expresión gráfica y la algebraica de un polinomio dado como producto de factores lineales.
- Proposiciones: Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, n \geq 1,$ la representación algebraica de un polinomio de grado *n*, entonces:

  Si *n* es par y $a_n > 0$, el recorrido es el intervalo $[m, \infty)$ donde *m* es el valor mínimo de $p(x)$.

  Si *n* es par y $a_n < 0$, el recorrido es el intervalo $(-\infty, M]$, donde *M* es el valor máximo de $p(x)$.

  Si *n* es impar, el recorrido es el conjunto de los números reales $(-\infty, \infty)$. En este caso no existe un valor máximo o mínimo.

  Si $p(x)$ tiene un factor $(x-c)^k$ donde *c* es real y *k* es un entero positivo. Entonces

  Si *k* es impar, la gráfica cruza al eje de las abscisas en *x*=*c*.

  Si *k* es par, la gráfica toca el eje de las abscisas en *x*=*c* pero no lo cruza.

- Argumentación: Argumenta la elección de la representación algebraica y el grado del polinomio.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia las intersecciones de la gráfica con el eje x con el concepto de raíz de polinomio.

FSE2: Asocia la forma de la intersección de la gráfica con el eje x con el concepto de multiplicidad de raíz de polinomio.

FSE3: Asocia la elección de una de dos expresiones algebraicas de signo contrario con el trazo final de la gráfica dada.

FSE4: Asocia la suma de los exponentes de los factores lineales de la expresión algebraica con el grado del polinomio.

Significado Personal Logrado

Determina las raíces y sus correspondientes multiplicidades del polinomio dado gráficamente. Articula elementos de las expresiones gráfica y algebraica de un polinomio, y determina el grado de dicho polinomio considerando su expresión algebraica.

Conflicto semiótico:

Se presenta un conflicto semiótico cuando el estudiante, en su discurso, califica una gráfica como "positiva", sin aclarar qué objeto debe recibir este calificativo.

Unidad de análisis U_2: Reactivo 2.

2

Your response

Determina si el polinomio

$3x^4 - 6x^3 - 17x^2 + 16x + 13$ tiene como factor a $x - 3$.

No (50%)

Una manera de saberlo, sin tener que efectuar la división, es verificar si 3 (50%) es raíz del polinomio.

2) $3x^4 - 6x^3 - 17x^2 + 16x + 13$ tiene como factor $x - 3$

$3(3)^4 - 6(3)^3 - 17(3)^2 + 16(3) + 13 = -11 \neq 0$ $(x-3)$ no es factor

una manera de comprobarlo es sustituyendo x | $x-3=0$ | $x=3$

Prácticas matemáticas:

- Evalúa la expresión polinomial en 3 por sustitución directa, obteniendo un valor distinto de cero y concluye que $(x-3)$ no es factor del polinomio.
- Afirma que una manera de "comprobar" que $(x-3)$ es factor es sustituyendo $x=3$ en el polinomio.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Verbal, algebraico y numérico.
- Conceptos: Polinomio, raíz de polinomio y factor de polinomio. Evaluación de un polinomio.
- Procedimiento: Evaluación del polinomio por sustitución directa.
- Proposición: Teorema de la raíz y del factor.

Funciones semióticas:

FSE1: Relaciona el hecho de que 3 es raíz del polinomio con el hecho de evaluar el polinomio en 3.

FSE2: Asocia el procedimiento de evaluación del polinomio en 3 con una forma de verificar que $(x-3)$ es factor del polinomio dado.

FSE3: Asocia el hecho de que el valor $3(3)^4-6(3)^3-17(3)^2+16(3)+13=-11$ es distinto de cero con el hecho de que $(x-3)$ no es factor del polinomio dado.

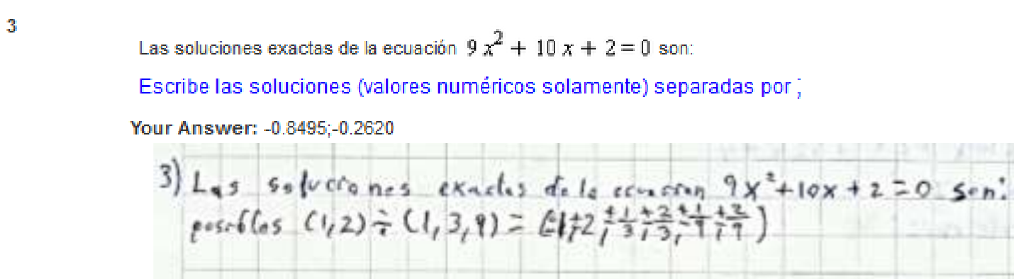
Significado Personal Logrado

Evalúa el polinomio en $x=3$, hace notar que $p(3)$ es distinto de cero y usando el teorema del factor y de la raíz concluye que $x-3$ no es factor de polinomio dado.

Conflictos semióticos:

No identificado.

Unidad de análisis U_3: Reactivo 3.


3

Las soluciones exactas de la ecuación $9x^2+10x+2=0$ son:

Escribe las soluciones (valores numéricos solamente) separadas por ;

Your Answer: -0.8495;-0.2620

3) Las soluciones exactas de la ecuación $9x^2+10x+2=0$ son:
posibles $(1,2)\div(1,3,9)=(\pm1,\pm2,\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3},\pm\frac{1}{9},\pm\frac{2}{9})$

Prácticas matemáticas:

- Registra en el sistema aproximaciones de las soluciones exactas.
- Enlista las factores enteros de los números a y c de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.
- Enlista en la hoja de trabajo todas las posibles soluciones racionales de la ecuación.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Verbal, algebraico, numérico y sintaxis del sistema.
- Conceptos: Ecuación y solución de ecuación.
- Procedimiento: No reporta el procedimiento para obtener las aproximaciones de las soluciones que registra en el sistema. Enlista todos los factores enteros positivos del término principal y del término independiente delaexpresión cuadrática dada y toma todas las combinaciones posibles considerando como denominadores y numeradores, respectivamente. Incluye los negativos en la lista.
- Proposición: Teorema de las raíces racionales de polinomios con coeficientes enteros.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia las soluciones exactas de una ecuación cuadrática con la lista de posibles soluciones (racionales).

FSE2: Asocia las soluciones de una ecuación cuadrática con soluciones aproximadas.

Significado Personal Logrado

Los elementos del significado declarados por el estudiante no son útiles para la resolución de la situación.

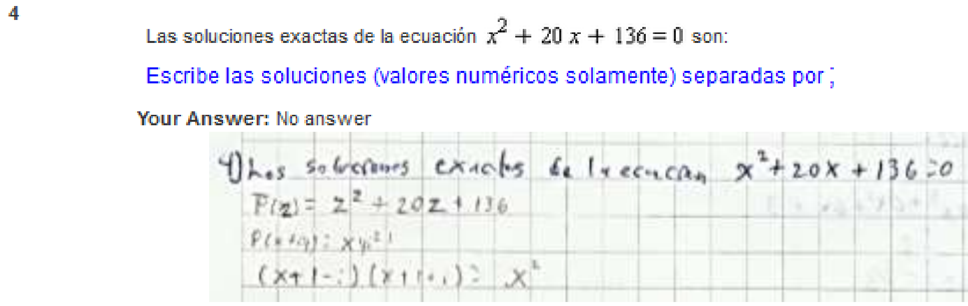
Conflictos semióticos:

Usa incorrectamente los paréntesis, ( ), ya que los utiliza para describir una lista o conjunto de números, en lugar de usar para ello las llaves $\{\ \}$. Por lo tanto, el uso de los signos " $\div$ " y " $=$ ", en este caso pierde sentido. Sin embargo, esta notación sí tiene sentido en el contexto de manejo de listas.

Confunde el concepto "solución exacta de una ecuación", debido a que lo asocia con soluciones aproximadas de la ecuación.

Confunde el concepto "solución exacta de una ecuación", ya que lo asocia con una lista de posibles soluciones racionales de la ecuación.

Unidad de análisis U₄: Reactivo 4.


4

Las soluciones exactas de la ecuación $x^2 + 20\,x + 136 = 0$ son:

Escribe las soluciones (valores numéricos solamente) separadas por ;

Your Answer: No answer

4) Los soluciones exactas de la ecuación $x^2+20x+136=0$

$P(z) = z^2 + 20z + 136$

$P(x+iy)$:

Prácticas matemáticas:

- Escribe una función polinomial con variable compleja.
- Intenta evaluar una función polinomial en el complejo $x + iy$.
- Intenta desarrollar un producto de factores lineales.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Verbal y algebraico.
- Conceptos: Ecuación y solución exacta de una ecuación.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia una ecuación cuadrática con una función cuadrática en variable compleja.

FSE2: Asocia $p(z)$ con $p(x + iy)$, mediante la regla de evaluación de una función.

Significado Personal Logrado:

Los elementos del significado declarados por el estudiante no son útiles para la resolución de la situación.

Conflictos semióticos:

El estudiante confunde el hecho de que las soluciones son no reales con el hecho de expresar la expresión de segundo grado como una función de variable compleja.

Unidad de análisis U₅: Reactivo 5.

5

Your response

Si las raíces de $p(x)$ son {-2, 0, 3, 6},
entonces las raíces de $p(-x)$ son
{-6,-3,0,2} (50%) y las raíces de $-p(x)$
son {-2,0,3,6} (50%) ,

5) Si las raíces de $p(x)$ son $\{-2, 0, 3, 6\}$

• $p(-x) = \{-6, -3, 0, 2\}$ porque son las mismas raíces pero signo contrario la gráfica se invierte el lugar de los positivos y negativos

• $-p(x) = \{-2, 0, 3, 6\}$ son las mismas raíces, la gráfica se invierte de arriba a abajo pero pasa por las mismas raíces

Prácticas matemáticas:

- Relaciona las raíces de $p(x)$, $-p(x)$ y$p(-x)$ mediante posibles cambios de signo.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Verbal, numérico, algebraico y sintaxis del sistema.
- Conceptos: Raíz y gráfica de polinomio.
- Procedimiento: Invierte el signo de las raíces de $p(x)$ para obtener las $p(-x)$ y escribe las raíces de $p(x)$ como las de $-p(x)$.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia a $p(-x)$ las raíces de $p(x)$ con signo cambiado.

FSE2: Asocia a $-p(x)$ las raíces de $p(x)$.

Significado Personal Logrado:

Conoce las relaciones existentes entre las raíces de $p(x)$, $-p(x)$ y $p(-x)$, y utiliza estas relaciones y las raíces de $p(x)$ para determinar las raíces de $p(-x)$ y $-p(x)$.

Conflictos semióticos:

El estudiante confunde el uso del signo " $=$ ". Lo utiliza para asociar dos objetos pasando por alto su significado institucional de igualdad.

Unidad de análisis U_6: Reactivo 6.

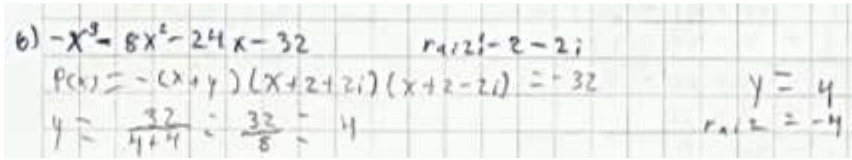
6

Your response

Sabiendo que $-2-2\,I$ es una raíz del polinomio $-x^3 - 8\,x^2 - 24\,x - 32$, encuentre las otras raíces.

(escribalas separadas por comas, primero las raíces complejas y despues las raíces reales)

(-2+2I,-4) (100%)



Prácticas matemáticas:

- Obtiene la otra raíz compleja no real mediante el uso del teorema de raíces complejas conjugadas, y la raíz real mediante las fórmulas de Vieta.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Verbal, numérico, algebraico y sintaxis del sistema.
- Conceptos: Polinomio, raíz de polinomio, complejos conjugados.
- Procedimiento: Determina la otra raíz compleja conjugada de la dada, multiplica las raíces complejas conjugadas y usa las fórmulas de Vieta para determinar la raíz real.
- Proposición: Teorema referente a las raíces complejas conjugadas de un polinomio con coeficientes reales. Teorema que enuncia las fórmulas de Vieta. Teorema fundamental del álgebra.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia la raíz compleja dada con su conjugado. Considerando el teorema referente a las raíces complejas conjugadas de un polinomio con coeficientes reales.

FSE2: Asocia los coeficientes del polinomio con su raíz real. Mediante las fórmulas de Vieta.

Significado Personal Logrado:

Usa el teorema de las raíces complejas conjugadas para determinar la otra raíz no real de un polinomio de tercer grado, y utiliza estas raíces complejas conjugadas y las Fórmulas de Vieta para determinar la raíz real.

Conflictos semióticos:

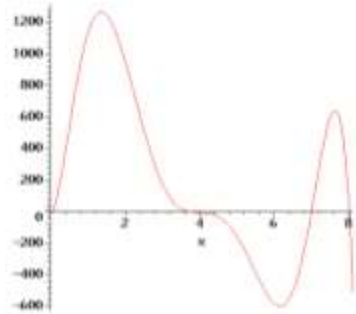
Confunde lo establecido por el teorema de las fórmulas de Vieta, ya que el estudiante afirma que, el polinomio escrito como producto de factores lineales es igual a su propio término independiente, y lo que establece dichas fórmulas es: el producto entre las raíces de un polinomio y $(-1)^n$, es igual al término independiente del polinomio.

Unidad de análisis U_7: Reactivo 7.

7

Your response

Seleccione la expresión algebraica que corresponde al polinomio representado en la siguiente gráfica



- $x^2\,(x-4)^3\,(x-7)\,(x-8)$
- $-x^2\,(x-4)^3\,(x-7)\,(x-8)$
- $-x^2\,(x-4)^3\,(x-7)\,(x-8)^2$
- $x^2\,(x-4)^3\,(x-7)^2\,(x-8)$
- $-x^2\,(x-4)^3\,(x-7)^2\,(x-8)$
- No se

$-x^2\,(x-4)^3\,(x-7)\,(x-8)$ (100%)

7) $-x^2(x-4)^3(x-7)(x-8)$ Elegí esa respuesta por que es una gráfica decreciente, que pasa por las raíces "0" multiplicidad 2, "4" multiplicidad 3, "7" ~~otra~~ multiplicidad 1 y "8" También multiplicidad 1

Prácticas matemáticas:

- Determina las raíces del polinomio representado gráficamente y sus correspondientes multiplicidades.
- Analiza la forma de la gráfica para escoger una de dos expresiones de signo contrario.
- Selecciona correctamente la expresión algebraica que corresponde al polinomio representado por la gráfica dada y justifica dicha selección.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Verbal, algebraico y numérico.
- Conceptos: Polinomio, raíz de polinomio, multiplicidad de raíz de polinomio y gráfica decreciente.
- Procedimiento: Articulación entre la forma gráfica y algebraica del polinomio.
- Argumentación: Argumenta la elección de la representación algebraica.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia las intersecciones de la gráfica con el eje x con el concepto de raíz de polinomio.

FSE2: Asocia la forma de la intersección de la gráfica con el eje x con el concepto de multiplicidad de raíz de polinomio.

FSE3: Asocia la elección de una de dos expresiones algebraicas de signo contrario con el trazo final de la gráfica dada.

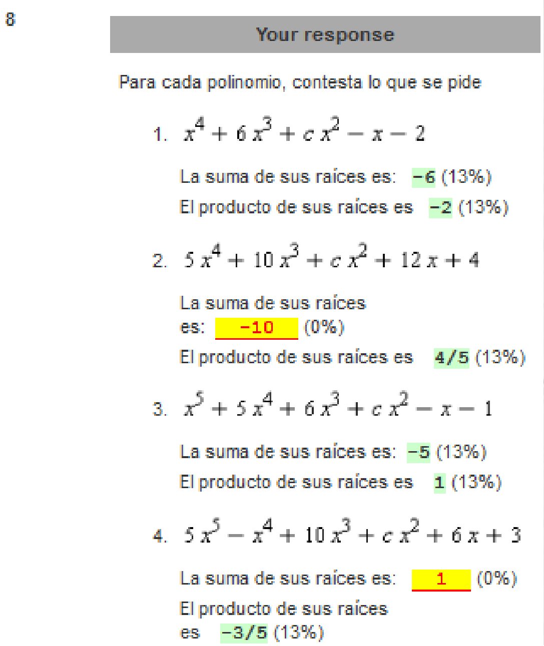
Significado Personal Logrado:

Reconoce la gráfica como decreciente, identifica sus raíces y multiplicidades, y esto lo utiliza para seleccionar la representación algebraica del polinomio, la representación algebraica del polinomio está dada como producto de factores lineales.

Conflicto semiótico:

No identificado.

Unidad de análisis U_8: Reactivo 8.



8

Your response

Para cada polinomio, contesta lo que se pide

1. $x^4 + 6x^3 + cx^2 - x - 2$

La suma de sus raíces es: −6 (13%)
El producto de sus raíces es −2 (13%)

2. $5x^4 + 10x^3 + cx^2 + 12x + 4$

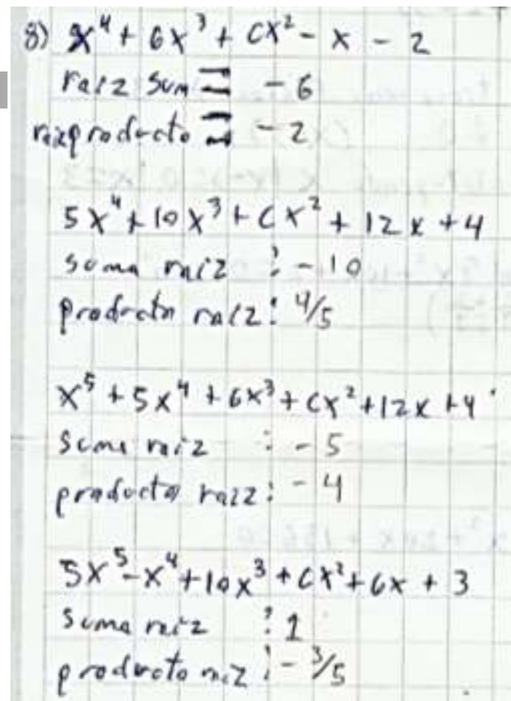
La suma de sus raíces es: −10 (0%)
El producto de sus raíces es 4/5 (13%)

3. $x^5 + 5x^4 + 6x^3 + cx^2 - x - 1$

La suma de sus raíces es: −5 (13%)
El producto de sus raíces es 1 (13%)

4. $5x^5 - x^4 + 10x^3 + cx^2 + 6x + 3$

La suma de sus raíces es: 1 (0%)
El producto de sus raíces es −3/5 (13%)



Prácticas matemáticas:

- Determina correctamente la suma y el producto de las raíces de los polinomios mónicos.
- Determina incorrectamente la suma de las raíces de los polinomios no mónicos.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Verbal, algebraico y numérico.
- Conceptos: Polinomio y raíz de polinomio.
- Procedimiento: Relaciona las raíces y los coeficientes de un polinomio mediante las fórmulas de Vieta.

- Proposición: Teorema referente a las fórmulas de Vieta.

Función semiótica:

FSE1: Asocia el término independiente y el coeficiente principal de un polinomio con el producto de sus raíces.

FSE2: Asocia el coeficiente del término de grado $n-1$ de un polinomio de grado n con la suma de sus raíces.

FSE1: Asocia los coeficientes de un polinomio con sus raíces, mediante las fórmulas de Vieta.

Significado Personal Logrado:

Usa las Fórmulas de Vieta para determinar la suma y el producto de las raíces de polinomios mónicos, tanto de grado par e impar, y es capaz de determinar el producto de las raíces de polinomios no mónicos.

Conflictos semióticos:

Confunde las fórmulas de Vieta al determinar la suma de las raíces de un polinomio no mónico.

Unidad de análisis U_9: Reactivo 9.

9

Your response

Verifica que 1 es una raíz del polinomio

$x^6 - 3x^5 - 18x^4 + 82x^3 - 123x^2 + 81x - 20$

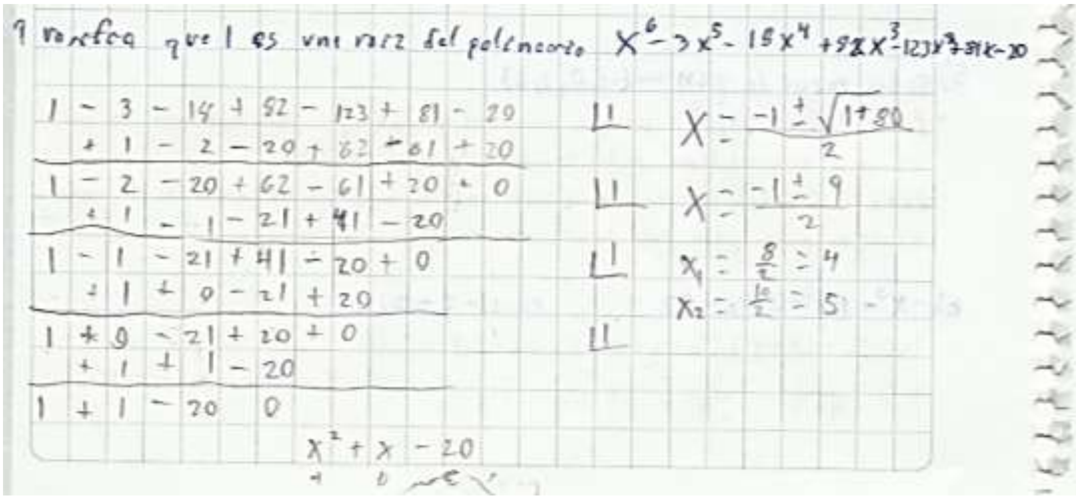
.

1 es una raíz de multiplicidad 4 (33%)

Encuentra las otras raíces y escribelas ordenadas de menor a mayor, separadas por comas (4,5) (0%)

Expresa el polinomio como producto de factores lineales.

(x-1)^4(x-4)(x-5) (0%)



Prácticas matemáticas

- ➢ Realiza división sintética reiteradamente con el fin de determinar la multiplicidad de la raíz dada.
- ➢ Usa la fórmula general para ecuaciones de segundo grado.

Objetos matemáticos:

- ➢ Lenguaje: Verbal, algebraico, numérico, iconográfico (esquema de división sintética) y sintaxis del sistema.
- ➢ Conceptos: Polinomio, raíz de polinomio, multiplicidad de una raíz y producto de factores lineales.
- ➢ Procedimiento: División sintética y uso de la fórmula general.
- ➢ Proposiciones: La fórmula general conduce a la solución de una ecuación cuadrática. Teorema del factor. Si x_0 es una raíz de multiplicidad $k > 1$ de un polinomio $p(x)$ entonces $(x - x_0)^k$ es factor de $p(x)$, pero $(x - x_0)^{k+1}$ no lo es.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia el hecho de verificar que un número *r* dado es raíz de un polinomio con la realización de una división sintética.

FSE2: Asocia a *r* con el número que se registra al final de la primera fila en el esquema de división sintética.

FSE3: Asocia el hecho de que el último número calculado en el procedimiento de división sintética es cero con el hecho de que *r* es raíz del polinomio.

FSE4: Asocia el número de veces que reiteradamente resulta división exacta entre el polinomio dado y el binomio $x - r$, entre el cociente obtenido anteriormente y $x - r$, y así sucesivamente, con la multiplicidad de la raíz r.

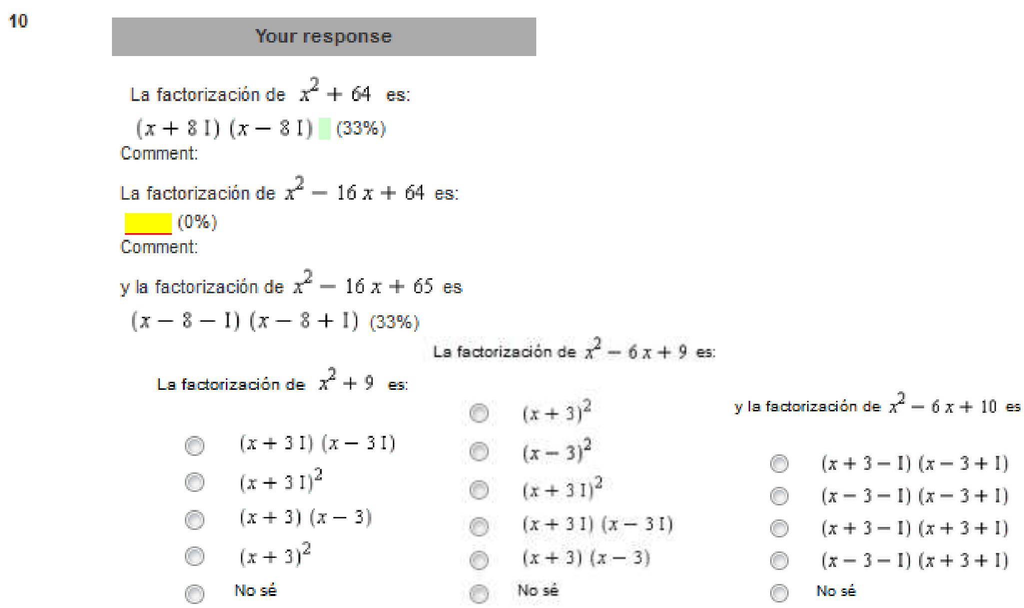
Significado Personal Logrado:

Tiene éxito al determinar la multiplicidad de una raíz real de un polinomio de sexto grado dado de manera desarrollada, esto lo logra mediante el uso reiterado del algoritmo de la división sintética, y al utilizar la fórmula general para obtener las otras dos raíces lo logra parcialmente ya que obtiene una de ellas. Por lo tanto, falla al escribir el polinomio como producto de factores lineales.

Conflictos semióticos:

A la suma de dos números negativos le asigna signo positivo.

Unidad de análisis U_{10}: Reactivo 10.



10

Your response

La factorización de $x^2 + 64$ es:

$(x + 8\,I)\,(x - 8\,I)$ (33%)

Comment:

La factorización de $x^2 - 16\,x + 64$ es:

(0%)

Comment:

y la factorización de $x^2 - 16\,x + 65$ es

$(x - 8 - I)\,(x - 8 + I)$ (33%)

La factorización de $x^2 + 9$ es:

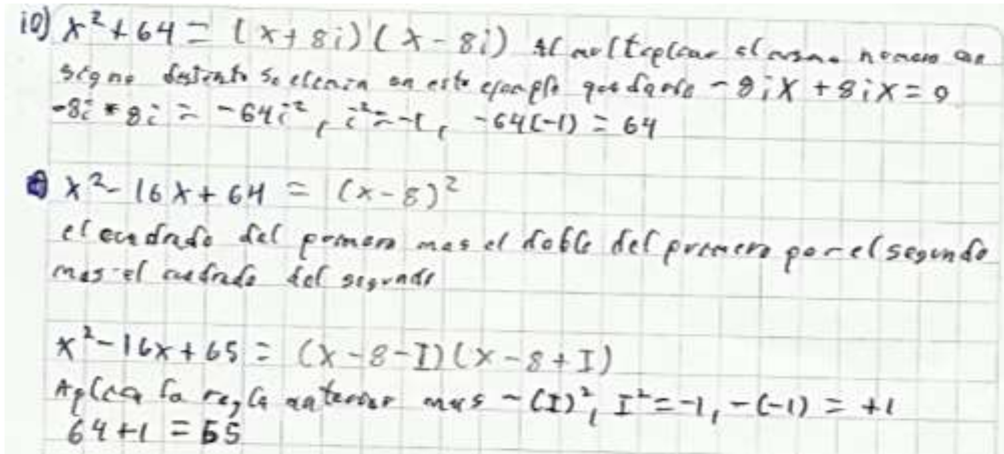
- $(x + 3\,I)\,(x - 3\,I)$
- $(x + 3\,I)^2$
- $(x + 3)\,(x - 3)$
- $(x + 3)^2$
- No sé

La factorización de $x^2 - 6\,x + 9$ es:

- $(x + 3)^2$
- $(x - 3)^2$
- $(x + 3\,I)^2$
- $(x + 3\,I)\,(x - 3\,I)$
- $(x + 3)\,(x - 3)$
- No sé

y la factorización de $x^2 - 6\,x + 10$ es

- $(x + 3 - I)\,(x - 3 + I)$
- $(x - 3 - I)\,(x - 3 + I)$
- $(x + 3 - I)\,(x + 3 + I)$
- $(x - 3 - I)\,(x + 3 + I)$
- No sé



10) $x^2+64 = (x+8i)(x-8i)$ Al multiplicar el mismo numero con signo distinto se elimina en este ejemplo quedaría $-8iX+8iX=0$
$-8i * 8i = -64i^2$, $i^2=-1$, $-64(-1)=64$

$x^2-16x+64 = (x-8)^2$
el cuadrado del primero mas el doble del primero por el segundo mas el cuadrado del segundo

$x^2-16x+65 = (x-8-I)(x-8+I)$
Aplica la regla anterior mas $-(I)^2$, $I^2=-1$, $-(-1)=+1$
$64+1=65$

Prácticas matemáticas

- Justifica la factorización seleccionadaen cada uno de los casos, desarrollando la factorización hasta obtener la expresión cuadrática dada.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Verbal, algebraico y numérico.
- Conceptos: Factorización.
- Procedimiento: Producto de factores lineales y desarrollo de binomios cuadrados.
- Argumentos: Justifica la selección desarrollando la factorización seleccionada.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia a i^2 el número -1.

FSE2: Asocia a una suma de cuadrados de la forma x^2+a^2 con un producto de binomios conjugados de la forma $(x+aI)(x-aI)$.

FSE3: Asocia un trinomio de la forma $x^2+2ax+a^2$ con un binomio al cuadrado de la forma $(x+a)^2$.

FSE4: Asocia al último trinomio dado con una expresión de la forma $x^2+2ax+a^2+1$.

Significado Personal Logrado:

Selecciona la factorización de una suma de cuadrados y justifica dicha selección, selecciona la factorización de un polinomio que puede expresarse como la suma de un trinomio cuadrado perfecto, más uno y, justifica dicha elección. En la hoja de trabajo selecciona la factorización de un trinomio cuadrado perfecto y la justifica describiendo la regla para desarrollar un binomio al cuadrado, aunque olvida registrarla en el sistema.

Conflictos semióticos:

No identificado.

RESUMEN DEL SIGNIFICADO PERSONAL

El estudiante es capaz de determinar las raíces y sus correspondientes multiplicidades de polinomios representados de forma gráfica o algebraica, así como articular dichas representaciones. Factoriza expresiones polinomiales cuadráticas, y de mayor grado dada una de sus raíces. Aunque, no tiene éxito cuando se le solicita directamente encontrar las raíces exactas de una ecuación de segundo grado. Conoce las relaciones entre las raíces de $p(x)$, $-p(x)$ y $p(-x)$ y las utiliza para determinar las raíces de $-p(x)$ y $p(-x)$, dadas las de $p(x)$. También, conoce y usa las relaciones entre las raíces y los coeficientes de un polinomio dadas por las Fórmulas de Vieta, con la excepción de las establecidas entre los coeficientes y la suma de las raíces de polinomios no mónicos.

Se identifican algunas inconsistencias entre los significados declarados del estudiante, debido a que, determina con éxito las raíces de un polinomio de segundo grado con el fin de determinar las raíces de un polinomio de grado mayor a dos, pero cuando se le presenta la tarea que consiste únicamente en resolver ecuaciones de segundo grado no lo logra.

4.4.5 Grupo 31: Caso 2, Estudiante de Rendimiento Medio.

Unidad de análisis U_1: Reactivo 1.

1

Your response

Utiliza división sintética para evaluar el polinomio
$p(x) =$
$2x^5 + 21x^4 + 34x^3 - 46x^2 + 15x - 1$ en
$x = -8$

2 (7%) 21 (7%) 34 (7%) -46 (7%) 15 (7%) -1 (7%)
| -8 (7%)

2 (7%) 5 (7%) -6 (7%) 2 (7%) -1 (7%) 7 (7%)

Por lo anterior, $p(-8)$ = 7 (7%)

Evalua el polinomio $p(x) = 2x^5 + 21x^4 + 34x^3 - 46x^2 + 15x - 1$ en $x = -8$

2 21 34 -46 15 1 | -8

2 5 -6 2 -1 7

Práctica matemática

- Realiza correctamente división sintética para evaluar un polinomio en un número entero dado.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Verbal, algebraico e iconográfico (diagrama de división sintética).
- Conceptos: Polinomio y división sintética.
- Procedimiento: Realiza división sintética para evaluar un polinomio en un número entero dado.
- Proposición: La regla de Ruffini provee una forma para evaluar polinomios.

Funciones semióticas:

FSE1: Relaciona correctamente el polinomio $p(x) = 2x^5 + 21x^4 + 34x^3 - 46x^2 + 15x - 1$ con la lista de números $2, 21, 34, -46, 15, 1$,al utilizar el procedimiento de división sintética.

FSE2: Escribe el número -8 al final de la primera fila en el esquema de la división sintética.

FSE3: Relaciona con el esquema de la división sintética su procedimiento aritmético asociado.

FSE4: Asocia el número que aparece al final del procedimiento aritmético asociado a la división sintética con el valor solicitado $p(-8)$.

Significado Personal Logrado:

Utiliza adecuadamente la división sintética y el teorema del residuo para evaluar un polinomio.

Conflictos semióticos:

No identificado.

Unidad de análisis U_2: Reactivo 2.

2

Your response

Utiliza división sintética para dividir el polinomio

$p(x) = -3x^5 + 5x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 3x - 3$

entre $x + 1$

-3 (6%) 5 (6%) 7 (6%) 2 (6%) -3 (6%) -3 (6%)

| -1 (6%)

-3 (6%) 8 (6%) -1 (6%) 3 (6%) -6 (6%) 3 (6%)

Por lo anterior, el cociente es -3^4+8x^3-x^2+3x-6 (0%) y el residuo es 3 (6%)

Exprese el polinomio como el producto del divisor y el cociente, más el residuo.

$p(x) =$ (-3^4+8x^3-x^2+3x-6) (x+1)+3 (0%)

Divide el polinomio $p(x) = -3x^5 + 5x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 3x - 3$ entre $x+1$

-3 5 7 2 -3 -3 | -1

-3 8 -1 3 -6 3

Prácticas matemáticas:

- Realiza correctamente división sintética para dividir un polinomio de quinto grado entre un binomio de la forma $x - r$.
- Registra el cociente en el sistema y omite escribir la "x" del término principal.
- Identifica el residuo en el esquema de división sintética y lo registra en el sistema.
- Registra en el sistema el polinomio dado como el producto del divisor y el cociente, más el residuo. Comete la omisión ya mencionada al escribir el cociente.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Verbal, algebraico, numérico, iconográfico y sintaxis del sistema.
- Conceptos: Polinomio, cociente de polinomios y residuo de división de polinomios.
- Procedimiento: División sintética.

Funciones semióticas:

FSE1: Relaciona correctamente el polinomio $p(x) = -3x^5 + 5x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 3x - 3$ con la lista de números $-3, 4, 7, 2, -3, -3$,al utilizar el procedimiento de división sintética.

FSE2: Escribe el número -1 al final de la primera fila en el esquema de la división sintética.

FSE3: Relaciona con el esquema de la división sintética su procedimiento aritmético asociado.

FSE4: Asocia el número que aparece al final del procedimiento aritmético asociado a la división sintética con el residuo.

FSE5: Asocia con los primeros cinco números de la última fila del esquema de división sintética con el cociente.

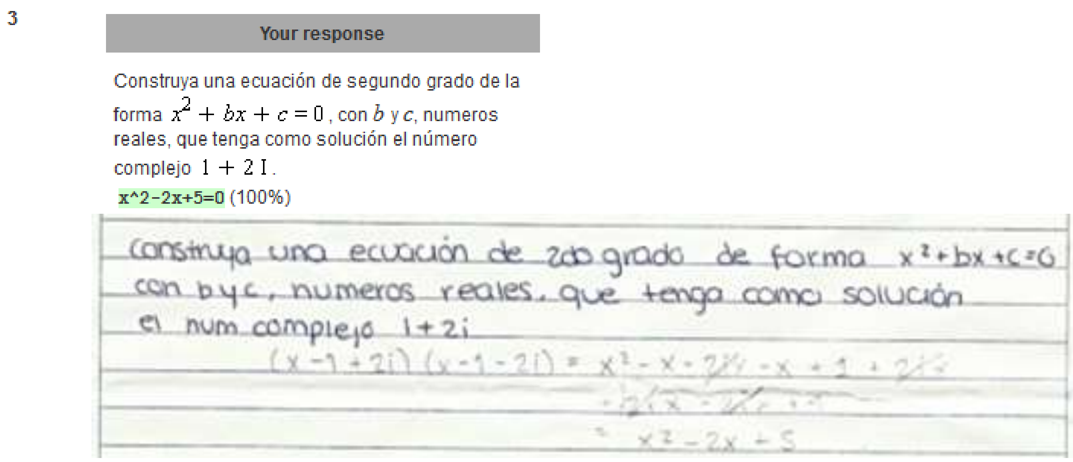
Significado Personal Logrado:

Realiza adecuadamente el algoritmo de división sintética para dividir en polinomio entre un binomio de la forma $x - r$, identifica el residuo y los coeficientes correspondientes al polinomio cociente, y registra el residuo en el sistema.

Conflictos semióticos:

El estudiante omite escribir la "x" al registrar el cociente en el sistema.

Unidad de análisis U₃: Reactivo 3.



Prácticas matemáticas:

- ➢ Determina la segunda solución compleja no real de la ecuación cuadrática.
- ➢ Escribe la expresión cuadrática del lado izquierdo de la ecuación como producto de factores lineales de la forma $(x - r)(x - \bar{r})$, donde $\bar{r}$ es el complejo conjugado de la solución r.
- ➢ Desarrolla el producto anterior, simplifica y registra la ecuación en el sistema.

Objetos matemáticos:

- ➢ Lenguaje: Verbal, algebraico y sintaxis del software.
- ➢ Conceptos: Ecuación de segundo grado, solución de una ecuación de segundo grado, número complejo y complejo conjugado.
- ➢ Procedimiento: Desarrollo y simplificación de producto de factores lineales.

- Proposiciones: Teorema referente a las soluciones complejas conjugadas de una ecuación polinomial con coeficientes reales. Si r y $\bar{r}$ son soluciones de una ecuación de segundo orden, entonces dicha ecuación puede expresarse como $(x-r)(x-\bar{r})=0$.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia la solución compleja dada con su conjugado.

FSE2: Asocia la ecuación $x^2+bx+c=0$ con una ecuación de la forma $(x-r)(x-\bar{r})=0$, donde r y $\bar{r}$ son soluciones de la ecuación.

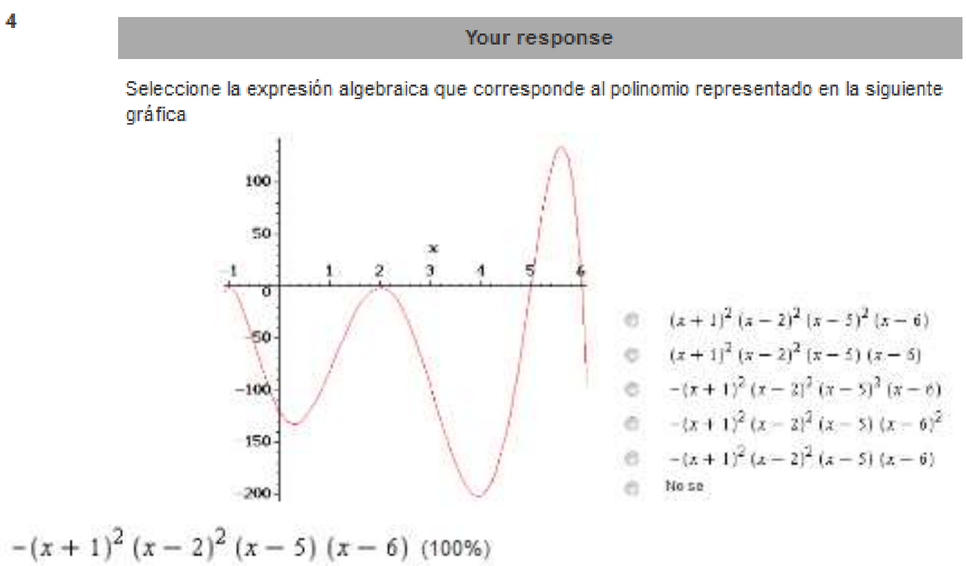
Significado Personal Logrado:

Partiendo de una solución compleja construye una ecuación de segundo grado con coeficientes reales, para ello hace uso del teorema de las raíces complejas conjugadas y del teorema del factor y la raíz.

Conflictos semióticos:

No identificado.

Unidad de análisis U_4: Reactivo 4.



Práctica matemática:

- Selecciona correctamente la expresión algebraica que corresponde al polinomio dado gráficamente.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Algebraico y gráfico.
- Conceptos: Polinomio, raíz de polinomio y multiplicidad de una raíz de polinomio.
- Procedimiento: Articulación entre la expresión gráfica y algebraica de un polinomio.

Función semiótica:

FSE1: Asocia el polinomio representado mediante la gráfica dada con la expresión $-(x+1)^2(x-2)^2(x-5)(x-6)$.

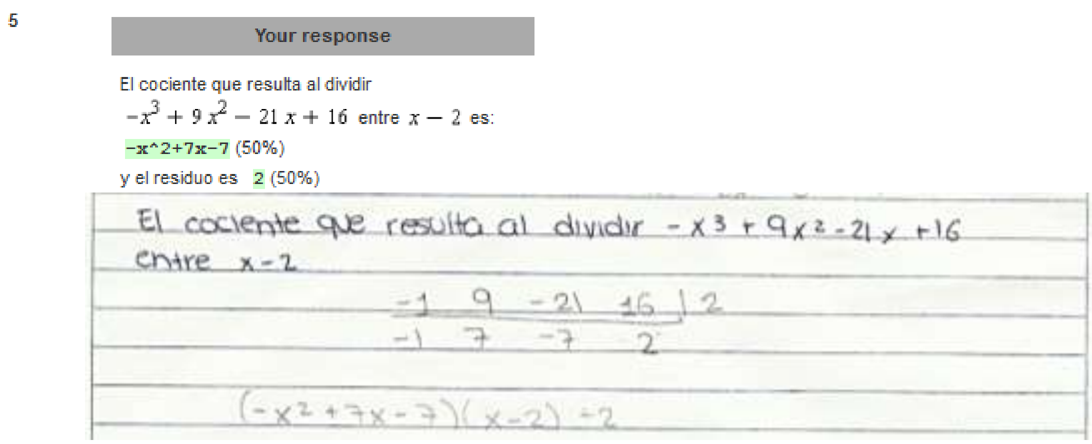
Significado Personal Logrado:

Relaciona la expresión gráfica de un polinomio con su correspondiente representación algebraica expresada como producto de factores lineales.

Conflictos semióticos:

No identificado.

Unidad de análisis U_5: Reactivo 5.



Prácticas matemáticas:

- Realiza división sintética.
- Identifica correctamente el residuo y el cociente en el esquema de división sintética.
- Registra correctamente el cociente y el residuo en el sistema.
- Escribe la expresión polinomial como el producto entre el divisor y el cociente, más el residuo.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: verbal, algebraico, numérico y sintaxis propia del software.
- Conceptos: Polinomio, división de polinomios, cociente de polinomios y residuo.

- ➢ Procedimiento: División sintética.

Funciones semióticas:

FSE1: Relaciona correctamente el polinomio $-x^3 + 9x^2 - 21x + 16$ con la lista de números $-1, 9, -21,\ 16$,al utilizar el procedimiento de división sintética.

FSE2: Escribe el número 2 al final de la primera fila en el esquema de la división sintética.

FSE3: Relaciona con el esquema de la división sintética su procedimiento aritmético asociado.

FSE4: Asocia el número que aparece al final del procedimiento aritmético asociado a la división sintética con el residuo.

FSE5: Asocia los primeros tres números de la última fila del esquema de división sintética con los coeficientes del cociente.

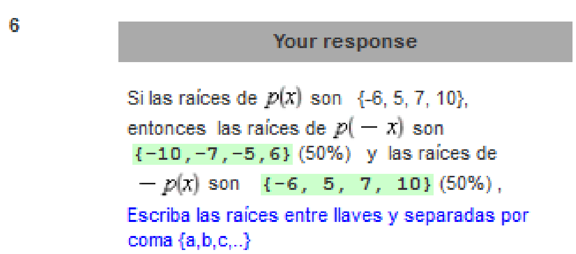
Significado Personal Logrado:

Determina el cociente y el residuo usando división sintética para dividir un polinomio entre un binomio de la forma $x - r$. Registra acertadamente el cociente y el residuo en el sistema, además en la hoja de trabajo expresa el polinomio como el producto entre el cociente y el divisor, más el residuo.

Conflictos semióticos:

No identificado.

Unidad de análisis U$_6$: Reactivo 6.



Práctica matemática:

- ➢ Relaciona las raíces de $p(x),\ -p(x)$ y$p(-x)$ mediante posibles cambios de signo.

Objetos matemáticos:

- ➢ Lenguaje: Algebraico, numérico y sintaxis del sistema.
- ➢ Conceptos: Polinomios y raíces de polinomios.

➢ Procedimiento: Invierte el signo de las raíces de $p(x)$.

➢ Proposiciones: Las raíces de $p(x)$ son las misma de $-p(x)$. Si r es raíz de $p(x)$ entonces, $-r$ es raíz de $-p(x)$.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia a $p(-x)$ las raíces de $p(x)$ con signo cambiado.

FSE2: Asocia a $-p(x)$ las raíces de $p(x)$.

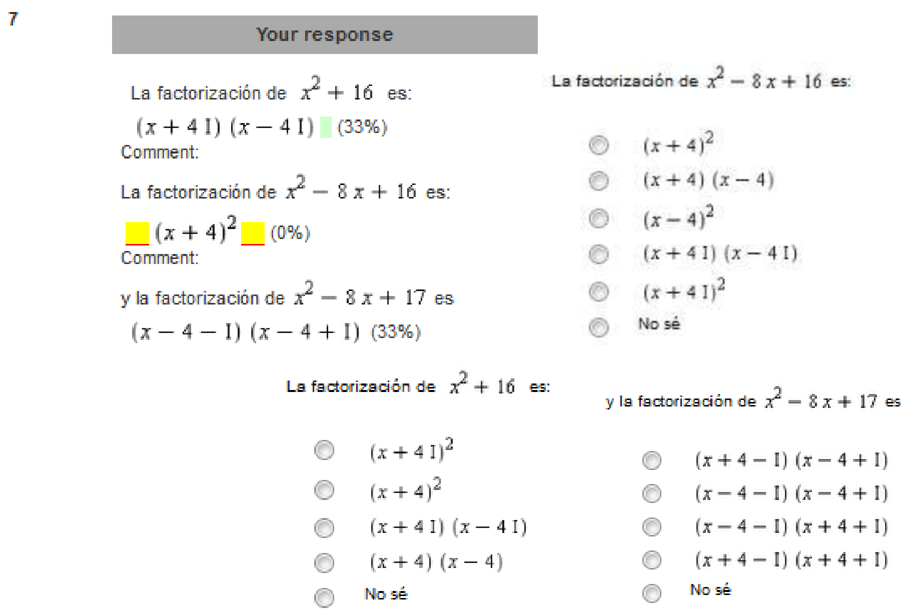
Significado Personal Logrado:

Conoce las relaciones existentes entre las raíces de $p(x)$, $-p(x)$ y $p(-x)$, y utiliza estas relaciones y las raíces de $p(x)$ para determinar las de $p(-x)$ y $-p(x)$.

Conflictos semióticos:

No identificado.

Unidad de análisis U$_7$: Reactivo 7.



Prácticas matemáticas:

➢ Selecciona correctamente la factorización de una suma de cuadrados.

➢ Selecciona incorrectamente la factorización de un trinomio cuadrado perfecto.

➢ Selecciona correctamente la factorización de un trinomio que resulta al sumar un trinomio cuadrado perfecto, más la unidad.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Algebraico.
- Conceptos: Factorización de expresiones cuadráticas.
- Procedimiento: No hay registro.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia una suma de cuadrados de la forma $x^2 + a^2$ con el producto de factores lineales $(x + aI)(x - aI)$.

FSE2: Asocia un trinomio cuadrado perfecto de la forma $x^2 - 2ax + a^2$ con el binomio al cuadrado $(x + a)^2$.

FSE3: Asocia un trinomio que es el resultado de la suma entre un trinomio cuadrado perfecto y la unidad, con el producto $(x - a - I)(x - a + I)$.

Significado Personal Logrado:

Selecciona la factorización de una suma de cuadrados y de un trinomio cuadrado que puede expresarse como un suma de un trinomio cuadrado perfecto, más uno.

Conflictos semióticos:

El estudiante confunde el signo que precede a la *a* en el binomio al cuadrado, $(x - a)^2$, que es la factorización de un trinomio cuadrado perfecto $x^2 - 2ax + a^2$.

Unidad de análisis U₈: Reactivo 8.

8

Your response

Analiza el siguiente polinomio
$p(x) = 5x^5 - 10x^4 + bx^3 - x^2 - 7x + 7$
, donde b es un número entero, y escribe una lista de todas sus posibles raíces racionales positivas.

Escribe la lista de posibles raices racionales, separadas por coma, y entre llaves {a,b,c,...}

{-1,1,7,-7,1/5,-1/5,7/5,-7/5} (0%)

Escribe una lista de todas las posibles raices del polinomio
P(x) = $5x^5 - 10x^4 + bx^3 - x^2 - 7x + 7$ donde b es un num
entero
Div 7 = {±1, ±7} Posibles raices {1, -1, 7, -7,
Div 5 = {±1, ±5} $\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{7}{5}, -\frac{7}{5}$}

Prácticas matemáticas:

- Escribe todos los divisores enteros del término independiente de un polinomio.

- Escribe todos los divisores enteros del término principal de un polinomio de quinto grado.
- Escribe todos los cocientes que resultan de dividir cada uno de los divisores del término independiente entre cada uno de los divisores de término principal.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Verbal, numérico y sintaxis del sistema.
- Conceptos: polinomio y raíz racional de un polinomio.
- Procedimiento: Enlista todos los factores enteros positivos del término principal y del término independiente delaexpresión cuadrática dada y toma todas las combinaciones posibles considerando los factores como denominadores y numeradores, respectivamente. Incluye los negativos en la lista.
- Proposición: Teorema referente a las raíces racionales de un polinomio con coeficientes enteros.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia al término independiente de un polinomio con coeficientes enteros, con sus divisores enteros.

FSE2: Asocia al término principal de un polinomio con coeficientes enteros, con sus divisores enteros.

FSE3: Asocia los divisores enteros del término independiente con los divisores enteros del término principal. Los asocia a través de la división.

Significado Personal Logrado:

El estudiante utiliza el teorema de las raíces racionales de polinomios con coeficientes enteros, para enlistar las posibles raíces racionales del polinomio dado. Aunque, en el sistema se le solicita únicamente las posibles raíces racionales positivas, él también incluye las negativas.

Conflictos semióticos:

Confunde la tarea solicitada.

Unidad de análisis U_9: Reactivo 9.

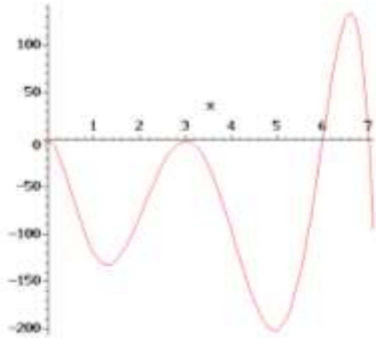
Correct response

El grado del polinomio $-x^2\,(x-3)^2\,(x-6)\,(x-7)$ es

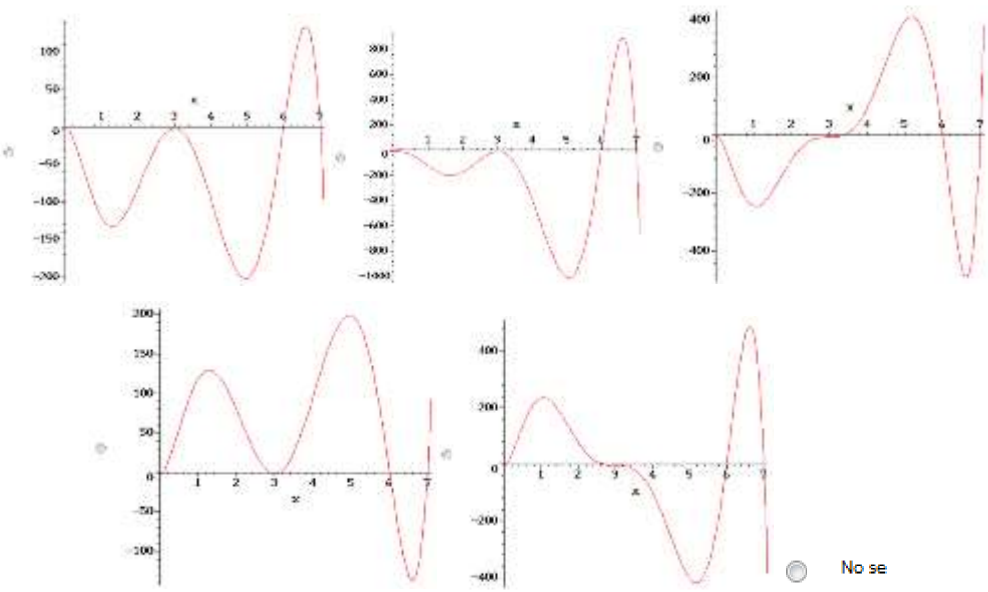
6

Sus raices son 0 , 6 , 3 , 7

Seleccione la gráfica que corresponde al polinomio



Las opciones son:



Prácticas matemáticas:

- Determina correctamente el grado del polinomio dado como producto de factores lineales con potencias.
- Determina las raíces del polinomio dado como producto de factores lineales con potencias.
- Articula correctamente el polinomio expresado algebraicamente con su correspondiente expresión gráfica.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Numérico y gráfico.
- Conceptos: Polinomio, grado, raíces y gráfica de un polinomio.

- Procedimiento: No declara el procedimiento. Articula elementos de la expresión algebraica y la gráfica de un polinomio, suma de los exponentes de los factores lineales del polinomio y cálculo de raíces de un polinomio.

Funciones semióticas:

FSE1: El estudiante asocia al polinomio se grado correspondiente.

FSE2: Asocia al polinomio con sus raíces.

FSE3: Asocia a la expresión algebraica del polinomio con su representación gráfica.

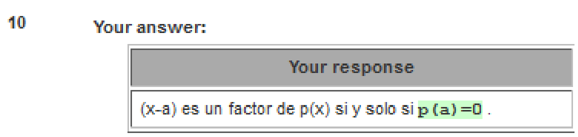
Significado Personal Logrado:

Obtiene el grado y las raíces de un polinomio dado como producto de factores lineales, y selecciona la gráfica que corresponde a dicho polinomio.

Conflictos semióticos:

No identificado.

Unidad de análisis U_{10}: Reactivo 10.


10 Your answer:

Your response
(x-a) es un factor de p(x) si y solo si p(a)=0 .

Práctica matemática:

- Completa el enunciado del teorema de factor.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Verbal y algebraico.
- Conceptos: Factor de un polinomio.
- Proposición: Teorema del factor.

Función semiótica:

FSE1: Asocia la igualdad $p(a) = 0$ con la frase $(x - a)$ es un factor de $p(x)$ si y solo sí.

Significado Personal Logrado:

Selecciona la expresión que completa el enunciado del teorema del factor.

Conflictos semióticos:

No identificado.

RESUMEN DEL SIGNIFICADO PERSONAL

El estudiante es capaz de determinar el grado y las raíces de un polinomio expresado como producto de factores lineales. Asimismo, puede articular la representación gráfica y algebraica de dicho polinomio. Cuando un polinomio de grado mayor que dos se expresa en forma desarrollada, el estudiante usa el algoritmo de división sintética para determinar el residuo, para evaluar el polinomio, para determinar el cociente, para representarlo en forma factorizada, así como para determinar sus raíces. El alumno conoce y utiliza las relaciones entre las raíces de $p(x), -p(x)$ y $p(-x)$, ya que, dadas las raíces de $p(x)$ obtiene las de $-p(x)$ y $p(-x)$; también,es capaz de enlistar las posibles raíces racionales de polinomios con coeficientes enteros.

A partir de una solución compleja construye una ecuación de segundo grado con coeficientes reales utilizando laraíz compleja conjugada y las relacionesentre raíces y factores. Sin embargo, falla en la identificación de la factorización de un trinomio cuadrado perfecto.

4.4.6 Grupo 31: Caso 3, Estudiante de Rendimiento Alto.

Unidad de análisis U_1: Reactivo 1.

1

Your response

Para cada polinomio, contesta lo que se pide

1. $x^4 - 6x^3 + cx^2 + 10x + 19$

   La suma de sus raíces es: 6 (13%)
   El producto de sus raíces es 19 (13%)

2. $3x^4 - 10x^3 + cx^2 + 14x - 18$

   La suma de sus raíces es: 10/3 (13%)
   El producto de sus raíces es 6 (0%)

3. $x^5 + 3x^4 - 6x^3 + cx^2 + 10x + 20$

   La suma de sus raíces es: -3 (13%)
   El producto de sus raíces es -20 (13%)

4. $3x^5 + 10x^4 - 10x^3 + cx^2 - 6x - 19$

   La suma de sus raíces es: -10/3 (13%)
   El producto de sus raíces es -19/3 (0%)

① suma el que sigue del mayor grado con signo contrario.

1- $x^4 - 6x^3 + cx^2 + 10x + 19$ suma: 6
producto: 19

2- $3x^4 - 10x^3 + cx^2 + 14x - 18$ suma: 10/3
producto: 6

3- $x^5 + 3x^4 - 6x^3 + cx^2 + 10x + 20$ suma: -3
producto: -20

4 $3x^5 + 10x^4 - 10x^3 + cx^2 - 6x - 19$ suma: -10/3
producto: -19/3

producto término independiente que depende de si es par o impar.

Prácticas matemáticas:

- Describe el procedimiento para determinar la suma de las raíces de un polinomio.
- Declara como determinar el producto de las raíces de un polinomio.
- Determina correctamente la suma de las raíces de polinomios de grado par e impar.
- Determina correctamente el producto de las raíces de polinomios mónicos.
- Determina incorrectamente el producto de las raíces de polinomios no mónicos.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Verbal, algebraico y numérico.
- Conceptos: Polinomio, raíz de polinomio y grado de un polinomio.

- Procedimiento: La suma de las raíces es igual al coeficiente del término con potencia $n-1$, con signo contrario. El producto de las raíces es igual al término independiente que depende de si el grado del polinomio es par o impar.
- Proposición: Fórmulas de Vieta.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia el término independiente y el coeficiente principal de un polinomio con el producto de sus raíces.

FSE2: Asocia el coeficiente del término de grado $n-1$ de un polinomio de grado n con la suma de sus raíces.

FSE1: Asocia los coeficientes de un polinomio con sus raíces, mediante las Fórmulas de Vieta.

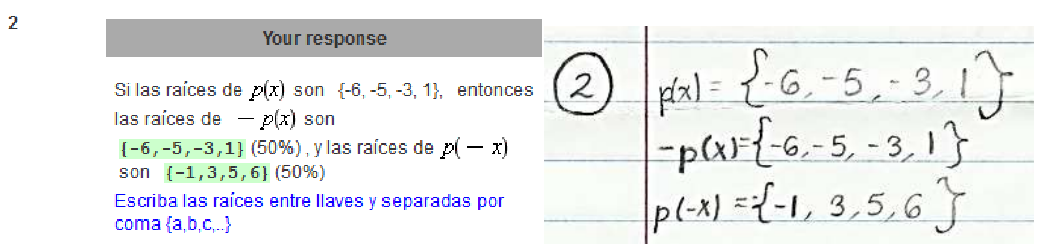
Significado Personal logrado:

Usa las Fórmulas de Vieta para determinar la suma y el producto de las raíces de polinomios mónicos, tanto de grado par e impar, y es capaz de determinar la suma de las raíces de polinomios no mónicos.

Conflictos semióticos:

No es consistente en el uso de las Fórmulas de Vieta al determinar el producto de las raíces de un polinomio no mónico.

Unidad de análisis U_2: Reactivo 2.



Prácticas matemáticas:

- Dadas las raíces de $p(x)$, el estudiante determina y registra correctamente las raíces de $-p(x)$ y $p(-x)$.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Algebraico y numérico.
- Conceptos: Raíz de polinomio y simetría.

- Procedimiento: Invierte el signo de las raíces de $p(x)$.
- Proposiciones: Las raíces de $p(x)$ son las misma de $-p(x)$. Si r es raíz de $p(x)$ entonces, $-r$ es raíz de $-p(x)$.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia a $p(-x)$ las raíces de $p(x)$ con signo cambiado.

FSE2: Asocia a $-p(x)$ las raíces de $p(x)$.

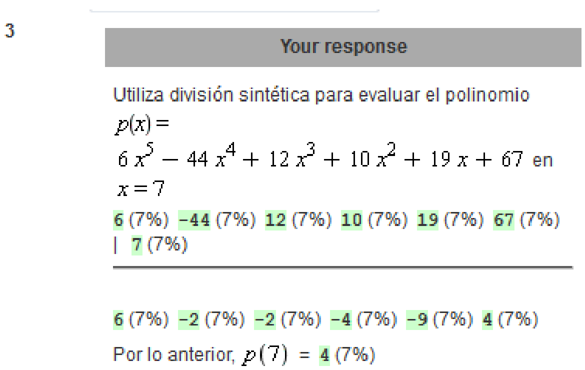
Significado Personal Logrado:

Conoce las relaciones existentes entre las raíces de $p(x)$, $-p(x)$ y $p(-x)$, y utiliza estas relaciones y las raíces de $p(x)$ para determinar las de $p(-x)$ y $-p(x)$.

Conflictos semióticos:

El estudiante confunde el uso del signo " $=$ ". Lo utiliza para asociar dos objetos de naturaleza distinta pasando por alto el significado institucional del signo de igualdad.

Unidad de análisis U_3: Reactivo 3.


3

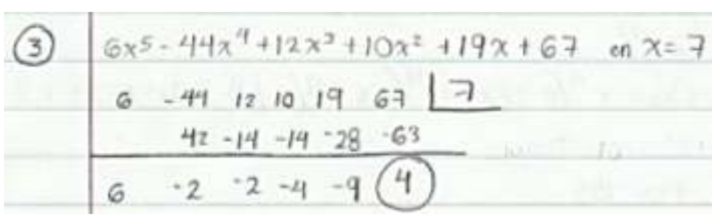
Your response

Utiliza división sintética para evaluar el polinomio $p(x) =$ $6x^5 - 44x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 19x + 67$ en $x = 7$

6 (7%) -44 (7%) 12 (7%) 10 (7%) 19 (7%) 67 (7%) | 7 (7%)

6 (7%) -2 (7%) -2 (7%) -4 (7%) -9 (7%) 4 (7%)

Por lo anterior, $p(7)$ = 4 (7%)



Prácticas matemáticas:

- Realiza división sintética, tanto en el esquema del sistema como en la hoja de trabajo.
- Evalúa correctamente el polinomio en $x = 7$.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Numérico e iconográfico (esquema de división sintética, tanto en el Maple T.A. como en la hoja de trabajo).
- Conceptos: Polinomio y evaluar un polinomio.
- Procedimiento: División sintética, tanto en el sistema como en la hoja de trabajo.
- Proposición: La regla de Ruffini provee una forma para evaluar polinomios.

Funciones semióticas:

FSE1: Relaciona correctamente el polinomio $p(x) = 6x^5 - 44x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 19x + 67$ con la lista de números $6, -44, 12, 10, 19, 67$,al utilizar el procedimiento de división sintética.

FSE2: Escribe el número 7 al final de la primera fila en el esquema de la división sintética.

FSE3: Relaciona con el esquema de la división sintética su procedimiento aritmético asociado.

FSE4: Asocia el número que aparece al final del procedimiento aritmético asociado a la división sintética con el valor solicitado $p(7)$.

Significado Personal Logrado:

El estudiante utiliza adecuadamente la división sintética y el teorema del residuo en la tarea de evaluar un polinomio.

Conflictos semióticos:

No identificado.

Unidad de análisis U₄: Reactivo 4.

4

Your response

La factorización de $x^2 + 81$ es:

$(x + 9\,\mathrm{I})\,(x - 9\,\mathrm{I})$ (33%)

Comment:

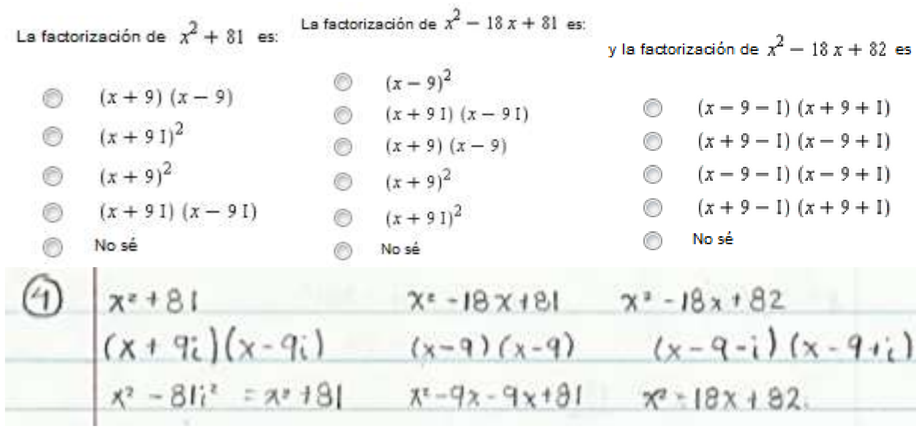
La factorización de $x^2 - 18\,x + 81$ es:

$(x - 9)^2$ (33%)

Comment:

y la factorización de $x^2 - 18\,x + 82$ es

$(x - 9 - \mathrm{I})\,(x - 9 + \mathrm{I})$ (33%)



Prácticas matemáticas:

- Selecciona correctamente la factorización de una suma de cuadrados y lo comprueba desarrollando el producto a manera de comprobación.
- Selecciona incorrectamente la factorización de un trinomio cuadrado perfecto y lo comprueba desarrollando el producto a manera de comprobación.
- Selecciona correctamente la factorización de un trinomio que resulta al sumar un trinomio cuadrado perfecto, más la unidad y lo comprueba desarrollando el producto a manera de comprobación.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Algebraico.
- Conceptos: Factorización de expresiones cuadráticas.
- Procedimiento: Desarrollo de productos lineales.
- Argumentación: Para comprobar que la factorización escogida en cada uno de los casos es la correcta, desarrolla los productos de las factorizaciones seleccionadas.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia una suma de cuadrados de la forma $x^2 + a^2$ con el producto de factores lineales $(x + aI)(x - aI)$.

FSE2: Asocia un trinomio cuadrado perfecto de la forma $x^2 - 2ax + a^2$ con el binomio al cuadrado $(x + a)^2$.

FSE3: Asocia un trinomio que es el resultado de la suma entre un trinomio cuadrado perfecto y la unidad, con el producto $(x - a - I)(x - a + I)$.

Significado Personal Logrado:

Selecciona acertadamente la expresión que es factorización de cada una de las tres expresiones cuadráticas dadas, y realiza los productos a manera de comprobación.

Conflictos semióticos:

No identificado.

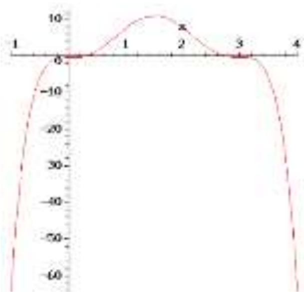
Unidad de análisis U_5: Reactivo 5.

5

Your response

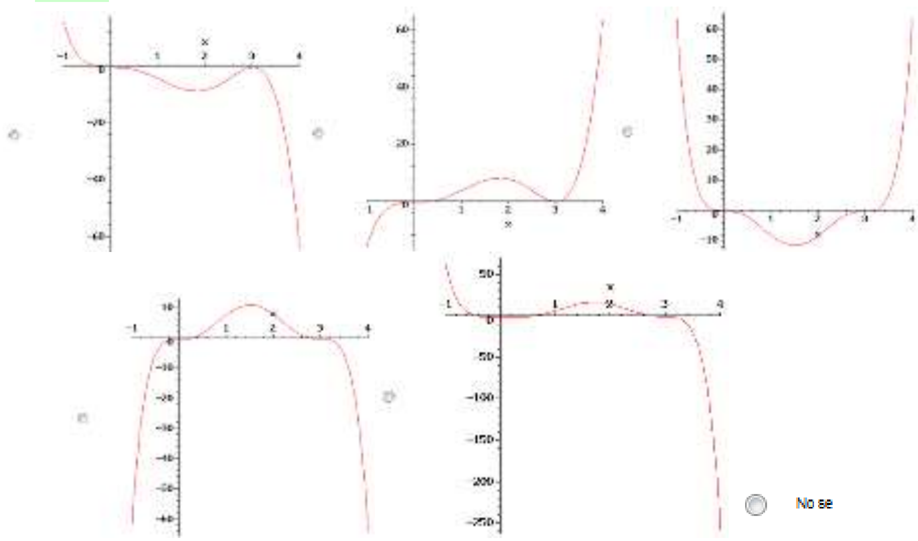
El grado del polinomio $-x^3\,(x-3)^3$ es
6 (33%)

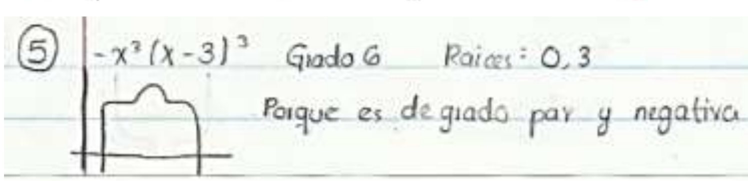
Seleccione la gráfica que corresponde al polinomio



(33%)

Sus raíces son 0 , 3 (33%)





Prácticas matemáticas:

- Determina correctamente el grado del polinomio $-x^3(x-3)^3$.
- Selecciona correctamente la gráfica que corresponde al polinomio $-x^3(x-3)^3$ y justifica dicha elección.
- Determina correctamente las raíces del polinomio en cuestión.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Verbal, algebraico, numérico y gráfico.
- Conceptos: Polinomio, grado y raíz de polinomio, gráfica de polinomio.
- Procedimiento: Determinación del grado y raíces del polinomio, articualción entre la representación algebraica y gráfica de un polinomio.
- Argumentación: El alumno justifica la elección de la gráfica, "porque es de grado par y negativa" declara.

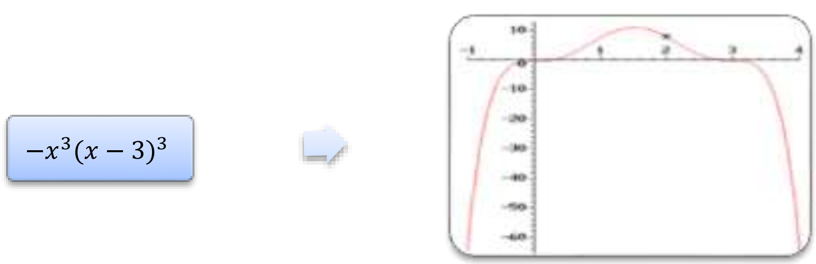
Funciones semióticas:

FSE1: Asocia a la expresión polinomial $-x^3(x-3)^3$ su grado correspondiente 6.

FSE2: Asocia al polinomio $-x^3(x-3)^3$ sus raíces 0 y 3.

FSE3: Asocia el hecho de que el polinomio $-x^3(x-3)^3$ es de grado par y tiene signo negativo al principio con la forma de la gráfica.

FSE4: Asocia el polinomio $-x^3(x-3)^3$ con la gráfica seleccionada.



Significado Personal Logrado:

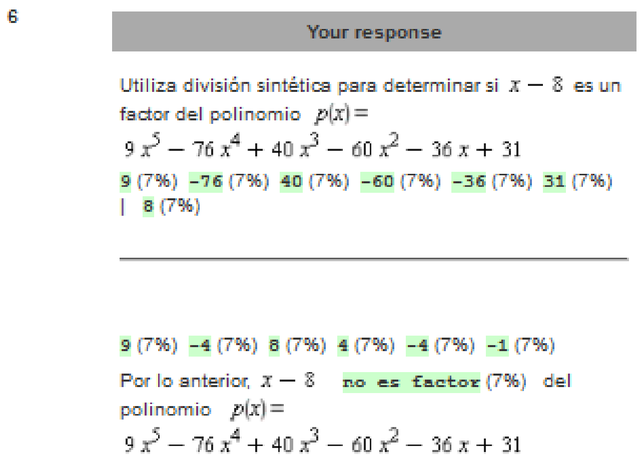
Determina el grado y las raíces de un polinomio dado como producto de factores lineales elevados cada uno a una potencia entera positiva, y selecciona la expresión gráfica que corresponde a dicha expresión algebraica, argumentando dicha selección.

Conflico semiótico:

El estudiante confunde el hecho que la expresión polinomial tenga signo menos al principio con, el hecho de que la expresión sea negativa, es decir, $-x^3(x-3)^3 < 0$.

El estudiante confunde el uso del signo " $=$ ". Lo utiliza para asociar dos objetos pasando por alto su significado institucional de igualdad, específicamente iguala la palabra "raíces" a los números 0 y 1.

Unidad de análisis U₆: Reactivo 6.



6

Your response

Utiliza división sintética para determinar si $x-8$ es un factor del polinomio $p(x) =$

$9x^5 - 76x^4 + 40x^3 - 60x^2 - 36x + 31$

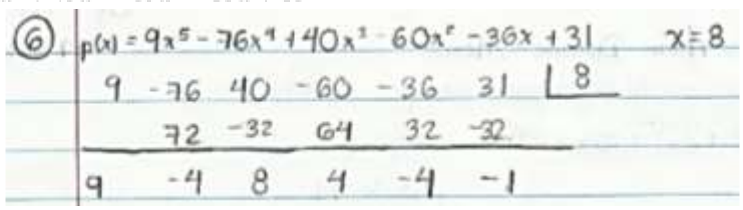
9 (7%) -76 (7%) 40 (7%) -60 (7%) -36 (7%) 31 (7%)

| 8 (7%)

9 (7%) -4 (7%) 8 (7%) 4 (7%) -4 (7%) -1 (7%)

Por lo anterior, $x-8$ no es factor (7%) del polinomio $p(x) =$

$9x^5 - 76x^4 + 40x^3 - 60x^2 - 36x + 31$



Prácticas matematicas:

- Realiza la división sintética tanto en el sistema como en la hoja de trabajo, en el Maple T.A. debe hacerla en dos filas y en la hoja la realiza en tres.
- Concluye que $x-8$es factor del polinomio $p(x) = 9x^5 - 76x^4 + 40x^3 - 60x^2 - 36x + 31$.

Objetos matemáticos personales:

- Lenguaje: Algebraico, numérico e iconográfico (esquema de división sintética).
- Conceptos: Polinomio y factor de polinomio.
- Procedimiento: División sintética.
- Proposiciones: Teorema del factor.

Funciones semióticas personales:

FSE1: El alumno relaciona el polinomio $p(x) = 9x^5 - 76x^4 + 40x^3 - 60x^2 - 36x + 31$ con la lista de números $9, -76, 40, -60, -36, 31$, al utilizar el procedimiento de división sintética.

FSE2: El estudiante relaciona el binomio $x - 8$ con el número 8 escrito al final de la primera fila en el esquema de la división sintética.

$x - 8$

$\underline{9} \ \underline{-76} \ \underline{40} \ \underline{-60} \ \underline{-36} \ \underline{31} \mid \underline{8}$

FSE3: Relaciona con el esquema anterior el procedimiento aritmético asociado a la división sintética.

$\underline{9} \ \underline{-76} \ \underline{40} \ \underline{-60} \ \underline{-36} \ \underline{31} \mid \underline{8}$

$\underline{9} \ \underline{-76} \ \underline{40} \ \underline{-60} \ \underline{-36} \ \underline{31} \mid \underline{8}$
$\underline{9} \ \underline{-4} \ \underline{8} \quad \underline{4} \quad \underline{-41}$

FSE4: Relaciona el número que aparece al final del procedimiento aritmético asociado a la división sintética con el residuo.

$\underline{9} \ \underline{-76} \ \underline{40} \ \underline{-60} \ \underline{-36} \ \underline{31} \mid \underline{8}$
$\underline{9} \ \underline{-4} \ \underline{8} \quad \underline{4} \quad \underline{-41}$

Residuo = 1

FSE5: Asocia el valor del residuo igual distinto a cero con una división no exacta.

FSE6: Relaciona la división no exacta con el hecho de que $x - 8$ no es factor del polinomio.

Significado Personal Logrado:

El estudiante utiliza adecuadamente la división sintética y el teorema del factor en la tarea de verificar que un binomio de la forma $x - a$ es factor de un polinomio.

Conflictos semióticos:

No identificado.

Unidad de análisis U_7: Reactivo 7.

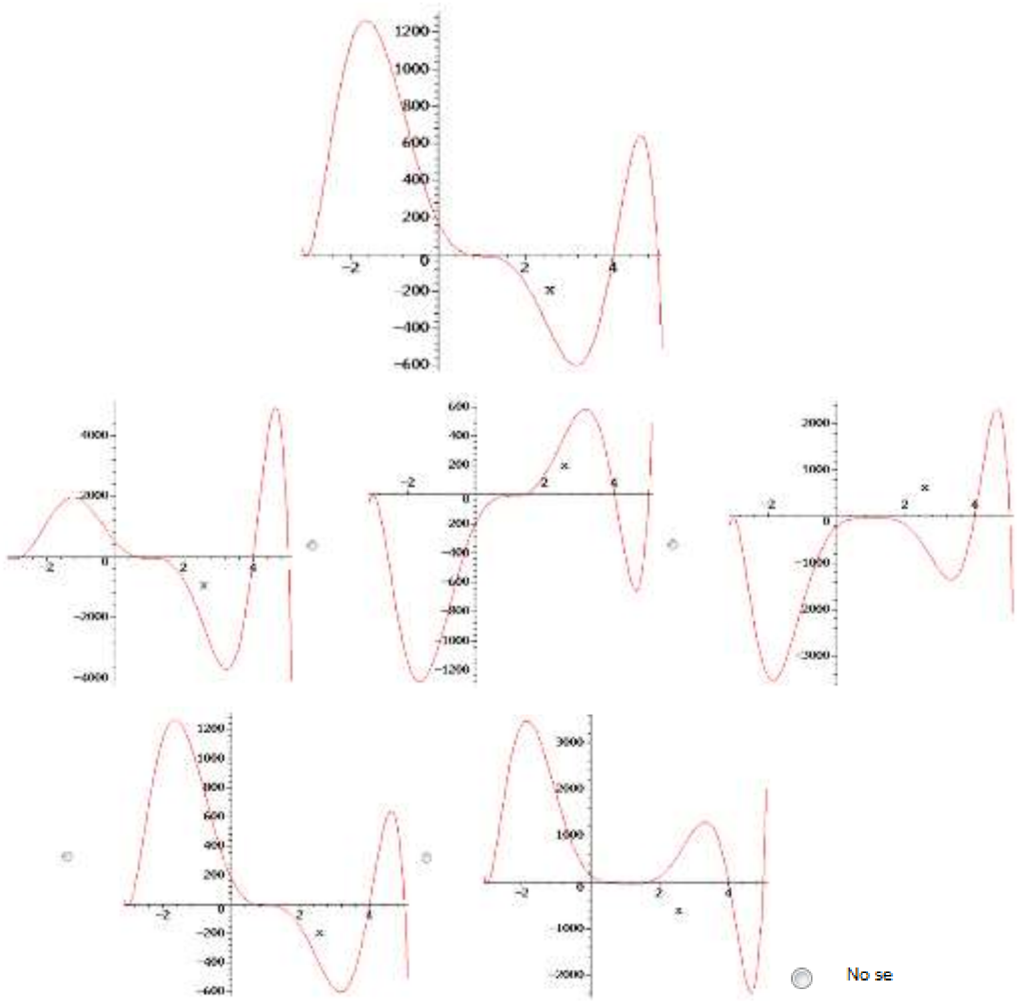
7

Your response

El grado del polinomio $-(x+3)^2\,(x-1)^3\,(x-4)\,(x-5)$ es
7 (33%)

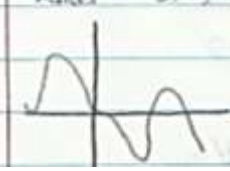
Sus raices son -3 , 4 , 1 , 5 (33%)

Seleccione la gráfica que corresponde al polinomio



(7) $-(x+3)^2\,(x-1)^3\,(x-4)\,(x-5)$ Grado 7

Raíces: -3, 1, 4, 5



Porque es grado impar y el primero es parábola positiva y el último línea negativa.

Prácticas matemáticas:

- Determina correctamente el grado del polinomio dado como producto de factores lineales con potencias.

- Determina las raíces del polinomio dado como producto de factores lineales con potencias.
- Articula correctamente el polinomio expresado algebraicamente con su correspondiente expresión gráfica.
- Argumenta la selección de la gráfica en sus propias palabras.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Numérico y gráfico.
- Conceptos: Polinomio, grado, raíces y gráfica de un polinomio.
- Procedimiento: Articulación entre la expresión algebraica y la gráfica de un polinomio, suma de los exponentes de los factores lineales del polinomio y cálculo de raíces de un polinomio.

Funciones semióticas:

FSE1: El estudiante asocia al polinomio su grado correspondiente.

FSE2: Asocia al polinomio con sus raíces.

FSE3: Asocia la forma de la gráfica con un polinomio de grado impar.

FSE4: Asocia a la expresión algebraica del polinomio con su representación gráfica.

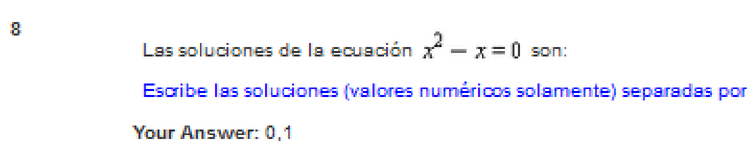
Significado Personal Logrado:

Determina el grado y las raíces de un polinomio dado como producto de factores lineales elevados cada uno a una potencia entera positiva, y selecciona la expresión gráfica que corresponde a dicha expresión algebraica, argumentando dicha selección.

Conflictos semióticos:

El estudiante confunde el uso del signo " = ". Lo utiliza para asociar dos objetos pasando por alto su significado institucional de igualdad, específicamente iguala la palabra “raíces” a los números $-3, 1, 4, 5$.

Unidad de análisis U_8: Reactivo 8.

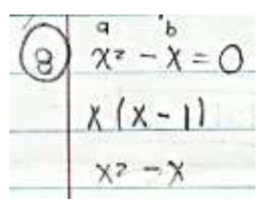


8

Las soluciones de la ecuación $x^2 - x = 0$ son:

Escribe las soluciones (valores numéricos solamente) separadas por ;

Your Answer: 0,1



Prácticas matemáticas:

- Resuelve la ecuación cuadrática mediante factorización.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Algebraico y numérico.
- Conceptos: Ecuación y solución de ecuación.
- Procedimiento: factorización y solución de ecuaciones lineales.
- Proposición: Si r y s son números reales, entonces $rs = 0$si y sólo si $r = 0$ ó $s = 0$.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia a la expresión $x^2 - x$ la expresión $x(x-1)$. Por medio de factorización.

FSE2: Asocia a $x(x-1)$ los números 0 y 1. Que son los ceros de la expresión.

FSE3: Asocia a la ecuación $x^2 - x = 0$ sus soluciones 0 y 1.

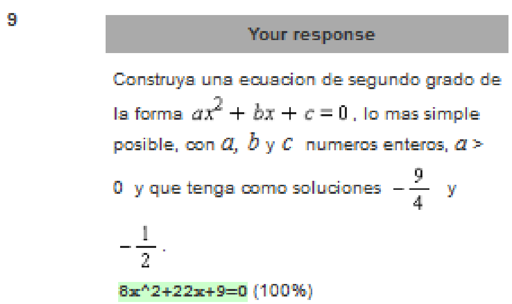
Significado Personal Logrado:

Determina las soluciones de una ecuación de segundo grado sin el término independiente mediante factorización.

Conflictos semióticos:

No identificado.

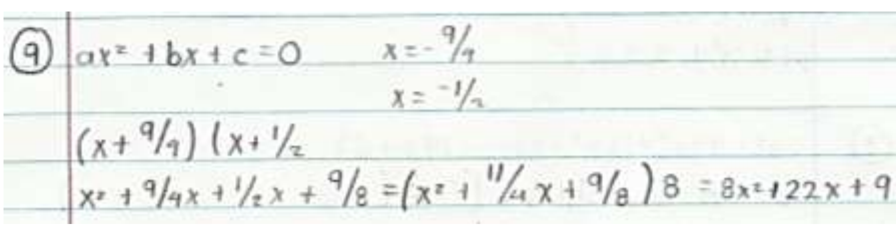
Unidad de análisis U9: Reactivo 9.


9

Your response

Construya una ecuacion de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, lo mas simple posible, con a, b y c numeros enteros, $a >$ 0 y que tenga como soluciones $-\frac{9}{4}$ y $-\frac{1}{2}$.

8x^2+22x+9=0 (100%)



Prácticas matemáticas:

- Sustituye las soluciones dadas $r_1 = -\frac{9}{4}$ y $r_2 = -\frac{1}{2}$ en la expresión $(x - r_1)(x - r_2)$.

- Desarrolla el producto $(x - r_1)(x - r_2)$ y simplifica multiplicando la expresión por un número entero que elimine las fracciones.
- Registra en el sistema la ecuación correcta.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Algebraico.
- Conceptos: Ecuación de segundo grado y solución de ecuación de segundo grado.
- Procedimiento: Sustitución de las soluciones en la expresión de segundo grado escrita en forma de productos lineales, desarrolla dichos productos, simplifica, iguala a cero la expresión encontrada y registra la ecuación en el Maple T.A.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia las soluciones dadas con la expresión $(x - r_1)(x - r_2)$.

FSE2: Asocia la expresión $(x - r_1)(x - r_2)$ con una de la forma $ax^2 + bx + c$.

FSE3: Asocia a $ax^2 + bx + c$ con la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

Significado Personal Logrado:

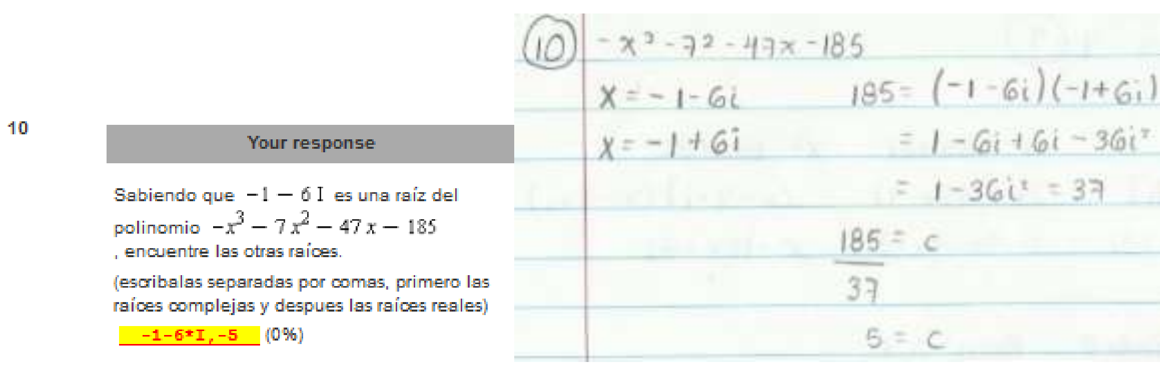
El estudiante es capaz de construir una ecuación de segundo grado con coeficientes enteros, a partir de sus soluciones dadas como cocientes primos.

Conflictos semióticos:

Usa el signo " $=$ " para relacionar dos expresiones algebraicas distintas.

Denota dos objetos distintos con el mismo símbolo, específicamente denota con *x* a los dos números $-\frac{9}{4}$ y $-\frac{1}{2}$.

Unidad de análisis U_{10}: Reactivo 10.



Prácticas matemáticas:

- Dada una raíz no real de un polinomio de tercer grado, el estudiante considera que su conjugado también es raíz.

- Conociendo las raíces complejas conjugadas del polinomio de tercer grado y usando las Fórmulas de Vieta, el estudiante determina la raíz real de dicho polinomio.

Objetos matemáticos:

- Lenguaje: Algebraico y numérico.
- Conceptos: Polinomio, raíz de polinomio y raíces complejas conjugadas.
- Procedimiento: Determinación de la raíz conjugada y uso de las Fórmulas de Vieta.
- Proposición: Si z_0 es una raíz compleja de un polinomio$p(x)$ con coeficientes reales, entonces su conjugado $\bar{z}_0$ también es raíz de $p(x)$. Fórmulas de Vieta.

Funciones semióticas:

FSE1: Asocia a un número complejo con su conjugado, mediante el uso del teorema referente a las raíces complejas conjugadas de un polinomio con coeficientes complejos.

FSE2: Asocia a las raíces complejas conjugadas de un polinomio de tercer grado con su término independiente y su término principal, a través de las fórmulas de Vieta.

FSE3: Asocia el producto de las raíces complejas con el término independiente del polinomio dado.

FSE4: Asocia el producto de las raíces complejas y el término independiente del polinomio dado con la tercer raíz de dicho polinomio.

Significado Personal logrado:

A partir de una raíz compleja y mediante el uso del teorema de raíces complejas conjugadas de un polinomio con coeficientes reales, obtiene la otra raíz compleja del polinomio de tercer grado, y usando estás raíces y las Fórmulas de Vieta determina la raíz real. Registra en el sistema la raíz real y la raíz no real dada, en lugar de registrar la que el encontró.

Conflictos semióticos:

Usa el signo “ $=$ ” para relacionar dos números no iguales.

Denota dos objetos (números complejos conjugados) distintos con el mismo símbolo.

RESUMEN DEL SIGNIFICADO PERSONAL

El estudiante muestra dominio del concepto raíz de polinomio así como de procedimientos y proposiciones útiles para determinar las raíces, tanto en la representación gráfica, así como en la representación algebraica, cuando el polinomio está expresado como producto de factores lineales. Es capaz de determinar la raíz real y la no real de un polinomio de tercer grado con coeficientes enteros, dada una de sus raíces no reales. También, es capaz de determinar las raíces de $-p(x)$ y $p(-x)$, dadas las de $p(x)$. Utiliza las Fórmulas de Vieta para determinar el producto y la suma de las raíces de un polinomio mónico, a partir de sus coeficientes, paro falla al determinar el producto de las raíces de polinomios no mónicos. Muestra dominio en la factorización de expresiones de segundo grado, ya que utiliza la factorización para resolver una ecuación de segundo grado eidentifica la factorización de expresiones algebraicas de segundo grado, apoyándoseen el desarrollo de los productos correspondientes.Utiliza el procedimiento de división sintética para determinar si un binomio de la forma $x - a$ es factor de un polinomio dado en forma desarrollada, dicho procedimiento lo realiza en dos filas en el esquema mostrado en el sistema y en tres en la hoja de trabajo. Además de resolver ecuaciones de segundo grado, también es capaz de construir ecuaciones de segundo grado a partir de sus soluciones. Articula la representación gráfica y la representación algebraica de un polinomio, cuando ésta última está expresada como producto de factores lineales, y argumenta la articulación, además que determina el grado de dicho polinomio.

Capítulo VII. Conclusiones

A continuación, se presentan conclusiones desprendidas de cada uno de los análisis realizados, en relación con las preguntas y los objetivos planteados.

Con respecto a la **primera pregunta de investigación**, la cual se relaciona con el primer objetivo específico declarado, y tiene que ver con la determinación del significado institucional de referencia de polinomios en el curso de Álgebra para estudiantes de ingeniería en la Universidad de Sonora, se desprenden las siguientes afirmaciones.

Del análisis realizado al extracto del programa oficial y a los textos referidos en la sección en la primera sección del Capítulo 5 (Tabla 5.1.2), se observa que están presentes todos los tipos de elementos básicos del significado.

Las principales *situaciones problema* consisten en: resolver cierto tipo de ecuaciones polinomiales, determinación o aproximación de raíces de polinomios de grado *n* en una variable, factorización de polinomios, construcción de polinomios o de ecuaciones polinomiales a partir de sus raíces, evaluación de polinomios, graficación de polinomios en una variable, articulación entre la representación algebraica y gráfica de polinomios, y en menor medida la resolución de situaciones extra matemáticas.

El cuanto al *lenguaje* están presentes el verbal, algebraico, gráfico, numérico y en menor medida el tabular.

Se cuenta con una buena gama de *conceptos-definiciones* presentes o emergentes al resolver las situaciones. Los principales son: polinomio, grado de polinomio, raíz de polinomio, multiplicidad de una raíz de polinomio, gráfica de polinomio, división de polinomios, división sintética, residuo.

Están presentes *procedimientos* útiles para resolver las situaciones problema, alguno de ellos son: uso de la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, factorización, completar el trinomio cuadrado perfecto, despeje de incógnita, uso de las Fórmulas de Cardano, operaciones entre polinomios, división sintética, construcción de ecuaciones polinomiales y de polinomios a partir de sus raíces, uso de las fórmulas de Vieta y, aplicación del método de bisección para aproximar raíces irracionales de polinomios. Las prácticas identificadas como *procedimientos* son las que más se promueven, por lo que se puede afirmar que el *significado institucional de referencia* de polinomios tiene una fuerte carga de práctica procedimental.

Las *proposiciones (propiedades)* presentes son las que justifican los procedimientos utilizados para dar solución a las situaciones, algunos de los procedimientos se desprenden (o están implícitos) directamente de proposiciones. Por ejemplo, las proposiciones que enuncian la fórmula general para ecuaciones de segundo grado, las fórmulas de Cardano, y las fórmulas de Vieta. Unas proposiciones básicas son: teorema del algoritmo de la división de polinomios, el teorema de la raíz y el factor, teorema de residuo, teorema de las raíces racionales de polinomios con coeficientes enteros, teorema de las raíces complejas conjugadas de polinomios con coeficientes reales y por supuesto el teorema fundamental del álgebra.

La *argumentación* es una práctica que está presente, en ocasiones se utilizan para argumentar resultados particulares de situaciones y en otras para argumentar formalmente procedimientos o proposiciones.

Como producto del análisis realizado al Programa Oficial de Álgebra y a los textos, se hacen las afirmaciones siguientes.

En el Programa Oficial de Álgebra se observa una inconsistencia ya que el objetivo general textualmente dice: *Analizar los conceptos básicos de la teoría de ecuaciones y del álgebra lineal y su aplicación en los diversos problemas de las ciencias y técnicas relacionadas con la ingeniería*. Y uno de sus objetivos específicos dice: *Resolver problemas de la ciencia y la ingeniería cuyos modelos son extraídos de la teoría de ecuaciones y del álgebra lineal*. Pero en el contenido temático del programa, en lo concerniente a los temas de nuestro interés (*ecuaciones de segundo y tercer grado y polinomios de grado n),* no se promueve la resolución de problemas de ingeniería o de situaciones extramátematicas. También en la mayoría de los textos analizados no se promueven las situaciones extramatemáticas.

Después de analizar el programa oficial de la materia y los textos, se observa que la actividad matemática parte de conceptos o definiciones, seguido en ocasiones de procedimientos o de proposiciones, que se utilizan (aplican) para resolver las situaciones que se plantean posteriormente.

En el programa oficial no se promueve de manera explícita la práctica de argumentación y no en todos los textos se presentan las demostraciones (argumentaciones) formales a los teoremas planteados.

Otra de las prácticas que no se promueve de forma explícita en el programa es el algoritmo de división sintética, aunque en los textos y en la práctica docente sí se realiza.

En el programa oficial se presenta explícitamente la situación que consiste en articular la representación algebraica y gráfica de polinomios, pero en los textos ésta es una práctica poco presente.

Todos los textos analizados presentan alguna de las versiones del teorema fundamental del álgebra. En cambio el concepto de derivada está presente en el programa oficial de la asignatura y sólo en uno de los textos analizados.

Cabe mencionar que en el programa oficial de Álgebra también se promueve un método numérico (bisección) para aproximar raíces reales (irracionales).

Tomando en cuenta los Objetivos Temáticos y las Habilidades Especificas del extracto analizado del programa, se puede afirmar que éste tiene una fuerte carga hacia las prácticas conceptual y procedimental, lo mismo se puede afirmar con respecto a los textos analizados.

Con respecto a la **segunda pregunta de investigación**, la cual se relaciona con el segundo objetivo específico declarado, y tiene que ver con la determinación del significado institucional pretendido de polinomios mediante el uso del sistema Maple T.A. para la implementación de tareas, se pueden hacer las siguientes afirmaciones.

La mayoría de las prácticas que forman el significado institucional de referencia están presentes en el significado institucional pretendido. Las situaciones extramátematicas tampoco forman parte del significado institucional pretendido.

Una de las situaciones que se promueve en forma significativa a través de la realización de tareas en Maple T.A. es la asociación entre la representación algebraica y la gráfica de polinomios y sus raíces. Debido a que se presenta en varios reactivos, en unos, la situación consiste en dada la representación algebraica de un polinomio se solicita seleccionar la gráfica que corresponde al polinomio dado y, otras situaciones consisten en seleccionar la representación algebraica que corresponde a una gráfica dada. Cabe mencionar que, la representación algebraica de dichos polinomios está dada en términos de factores lineales y sus raíces son números enteros.

Debido a dificultades en la automatización de reactivos en el sistema, no están presentes las situaciones que consisten en: aproximar raíces irracionales de polinomios (mediante el uso del método de bisección) y explorar las posibles distribuciones del número total de raíces positivas, negativas y complejas no reales de un polinomio a partir de sus variaciones de signo (mediante el uso de la regla de los signos de Descartes). Cabe mencionar que a raíz de la realización de este trabajo de investigación, en la versión 9.5 del Maple T.A. ya se han incluido estas situaciones, entre otras.

En cuanto a elementos lingüísticos, están presentes el verbal, algebraico, gráfico, sintaxis propia del sistema e iconográfico (esquema de la división sintética); algunos reactivos presentan el esquema de la división sintética, éste está dado en dos filas, mientras que en los textos analizados se presenta en tres filas.

La práctica de argumentación no se promueve de forma explícita, también debido a dificultades en la automatización de reactivos en el sistema.

Con respecto a la **tercera pregunta de investigación**, la cual se relaciona con el tercer objetivo específico, y tiene que ver con la determinación del significado institucional evaluado de polinomios, cuando el examen se aplica mediante el uso del software mencionado, se afirma lo siguiente:

Aunque el significado institucional evaluado no se reduce a los sistemas de prácticas asociados a un examen, en este trabajo se llevó a cabo un análisis de los reactivos que conformaron los exámenes en los seis casos (estudiantes) seleccionados. Los sistemas de prácticas vinculados a los reactivos que forman los exámenes forman parte del significado institucional pretendido con Maple T.A., debido a que los reactivos que forman el examen también fueron incluidos previamente en las tareas. La situación problema que no fue seleccionada para que formara parte del examen es la que consiste en utilizar las Fórmulas de Cardano para resolver ecuaciones de tercer grado, por la limitación de tiempo en la implementación del examen o porque para algunos profesores no forma parte del significado institucional pretendido o implementado. Sin embargo, esta situación puede ser incluida en el significado institucional evaluado mediante Maple T.A. a través de la realización de la tarea correspondiente.

Una de las prácticas que está presente en los exámenes de los seis casos analizados, es la situación que consiste en articular la representación gráfica y algebraica de un polinomio.

Una práctica reiterada es la resolución de ecuaciones de segundo grado. También, en algunos casos se solicita usar el esquema propuesto para la división sintética para resolver diferentes situaciones problema. La factorización de expresiones polinomiales está presente en los exámenes, en ocasiones esta práctica es el fin en sí misma, en otras, es una herramienta útil para resolver alguna otra situación. Otra de las prácticas presentes en casi todos los exámenes es el domino y uso de las relaciones que se dan entre los coeficientes y las raíces de un polinomio. Así como, la relaciones que existen entre las raíces y, también entre las gráficas de $p(x)$, $-p(x)$ y $p(-x)$.

En el análisis realizado para determinar el significado institucional evaluado también se determinaron funciones semióticas útiles para resolver las situaciones que se presentan en cada reactivo que fue seleccionado para estructurar el examen. Unas funciones semióticas representativas están determinadas por la asociación de los objetos que a continuación se enlistan:

- Resolver una ecuación de segundo grado con la fórmula general para resolver dichas ecuaciones.
- Una ecuación de segundo grado con una parábola.
- Un polinomio dado en forma desarrollada con su factorización en términos lineales.
- Las raíces de $p(x)$ con las raíces de $-p(x)$.
- Las raíces de $p(x)$ con las raíces de $p(-x)$.
- La gráfica de $p(x)$ con la gráfica de $-p(x)$.
- La gráfica de $p(x)$ con la gráfica de $p(-x)$.
- La representación algebraica factorizada en términos lineales de un polinomio con su representación gráfica.
- La representación gráfica de un polinomio con su representación algebraica factorizada en términos lineales.
- Una raíz no real de un polinomio con coeficientes reales con su conjugado.
- El grado de un polinomio con el número de sus raíces.

- Determinar la multiplicidad de una raíz de un polinomio con el algoritmo de división sintética.
- La evaluación de un polinomio en un número real con el algoritmo (esquema) de división sintética.
- Determinar el cociente que resulta al dividir un polinomio de grado *n* entre un binomio de la forma $x - a$, con el algoritmo (esquema) de división sintética.
- Determinar el residuo que resulta al dividir un polinomio de grado *n* entre un binomio de la forma $x - a$, con el algoritmo (esquema) de división sintética.
- Determinar si un binomio de la forma $x - a$ es factor de un polinomio de grado *n*, con el algoritmo (esquema) de división sintética.
- La suma de los coeficientes de un polinomio con sus raíces. Mediante las fórmulas de Vieta.
- El producto de los coeficientes de un polinomio con sus raíces. Mediante las fórmulas de Vieta.

La **cuarta pregunta de investigación** se relaciona con los objetivos específicos 4, 5 y 6, y tiene que ver con la determinación de los significados personales de polinomios detectados en las respuestas de los estudiantes al examen aplicado en línea mediante el sistema Maple T.A., tanto en el sistema como en las hojas de trabajo. Con respecto a éstos se desprenden las siguientes afirmaciones.

Una de las prácticas utilizadas con mayor frecuencia es el uso de la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado. Los estudiantes en ocasiones realizan esta práctica con el único fin de resolver ecuaciones de segundo grado, en otras ocasiones, para coadyuvar en la resolución de situaciones como: determinación de raíces de un polinomio dado en forma desarrollada o la factorización de polinomios.

Otra de las prácticas más usadas es el algoritmo de división sintética, en ocasiones los estudiantes la utilizan porque así lo solicita el reactivo, en otras por decisión propia. Cabe señalar que aunque en el sistema Maple T.A. el algoritmo de división sintética se presenta en dos filas, la mayoría de los estudiantes lo llevan a cabo en tres filas en las hojas de trabajo. Los estudiantes utilizan generalmente de manera efectiva el algoritmo de división sintética para: evaluar un polinomio en un número real a, determinar si un binomio de la forma $x - a$

es factor de un polinomio $p(x)$, determinar si un número real a es raíz de un polinomio $p(x)$ y determinar la multiplicidad de una raíz real.

La articulación entre la representación gráfica y algebraica de un polinomio es otra de las prácticas utilizadas por los estudiantes, debido a que todos los exámenes cuentan con al menos un reactivo en el que se solicita dicha articulación. Los estudiantes la mayoría de las veces identifican: las raíces de los polinomios y sus multiplicidades, así como el grado del polinomio dado como producto de factores lineales, en ambas representaciones.

La factorización de expresiones cuadráticas es una práctica que se presenta en todos los casos. La situación problema en uno de los reactivos del examen, consiste en seleccionar la factorización de tres expresiones cuadráticas (para cada expresión cuadrática se dan opciones como posibles factorizaciones), una de ellas es una suma de cuadrados de la forma $x^2 + a^2$; otra es un trinomio cuadrado perfecto, $x^2 + 2ax + a^2$; la tercera expresión es de la forma, $x^2 + 2ax + a^2 + 1$. La mayoría de los estudiantes selecciona la factorización para cada expresión, desarrollando los productos que se dan como opciones y seleccionando la que resulte igual a la expresión cuadrática dada. Otros estudiantes relacionan la factorización de las tres expresiones. Es decir, conocen la factorización de la suma de cuadrados y del trinomio cuadrado perfecto y, la otra expresión la conciben como una suma de cuadrados de la forma $x^2 + 2ax + a^2 + 1 = (x + a)^2 + 1$.

Otra de las prácticas recurrentes en los casos es relacionar las raíces de $p(x)$ con las raíces de $-p(x)$ y $p(-x)$, la mayoría de las veces la realizan de acuerdo a la pauta institucional.

Los estudiantes utilizan muy poco la práctica de la factorización con el propósito de resolver ecuaciones de segundo grado, y prácticamente no utilizan la práctica de completar el cuadrado con el mismo fin.

La práctica de las proposiciones es utilizada en los seis casos, aunque casi nunca los estudiantes mencionan o enuncian la proposición utilizada.

La práctica de argumentación es poco utilizada por los estudiantes, debido a que no se le solicita dicha práctica en el examen en línea, aunque los estudiantes en ocasiones la utilizan en las hojas de trabajo para justificar sus respuestas.

En cuanto a los objetos matemáticos primarios más utilizados por los estudiantes se pueden enlistar los siguientes:

Lenguaje: verbal, algebraico, gráfico, numérico, iconográfico (esquema de división sintética) y la sintaxis propia del software Maple T.A.

Definiciones-conceptos: la mayoría de los estudiantes muestran dominio en los conceptos básicos como: polinomio, raíz de polinomio, grado de polinomio y multiplicidad de una raíz de polinomio.

Procedimientos: operaciones entre polinomios, uso de la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, algoritmo de división sintética, factorización de expresiones polinomiales, determinación de raíces de polinomios.

Proposiciones: la fórmula general conduce a las soluciones de una ecuación de segundo grado, teorema de las raíces complejas conjugadas, Fórmulas de Vieta, teorema del algoritmo de la división, teorema del factor, teorema del residuo, teorema fundamental del álgebra y teoremas útiles para la graficación de polinomios y la articulación entre la representación algebraica y gráfica de un polinomio.

Argumentación: los estudiantes utilizan este elemento básico del significado para justificar algún procedimiento o resultado (respuesta) particular. Es el objeto menos usado.

Con respecto a los errores semióticos cometidos por los estudiantes, se afirma que la mayoría de ellos se detectan en la actividad matemática reportada en las hojas de trabajo que cada uno de ellos entregó. Algunos de esos errores no se detectan en las respuestas dadas en el sistema. Uno de esos errores es cuando se utiliza el signo igual "=" para relacionar dos objetos de naturaleza distinta, por ejemplo asocia a las notaciones funcionales $p(-x)$ o $-p(x)$ a un conjuntos de números reales que el estudiante considera raíces del polinomio. Específicamente, los estudiantes cometen el error de escribir $p(-x) = \{-6, -3,0,2\}$.

Otro de los conflictos se presenta al momento de que los estudiantes registran las respuestas en el sistema Maple T.A., debido a que no utilizan adecuadamente la sintaxis propia del sistema.

Los estudiantes también presentan el conflicto semiótico de asociar a la expresión "producto de factores lineales" diversos objetos. Por ejemplo, en estudiante asocia una expresión algebraica cuadrática que corresponde al cociente de una división, como se ve en la Figura 6.2.

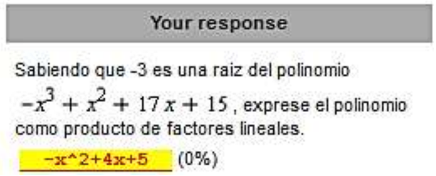


Figura 6.2 Conflicto semiótico.

Otro ejemplo se muestra en la Figura 6.3. El estudiante le asocia el producto de un factor lineal y un cuadrático. Lo que cabe resaltar es que el sistema califica como correcta la respuesta del estudiante. Este conflicto pudo haber sido reforzado al momento de que el estudiante realizó las tareas, debido a que el sistema no le ofreció una retroalimentación adecuada al marcarlo como correcto.

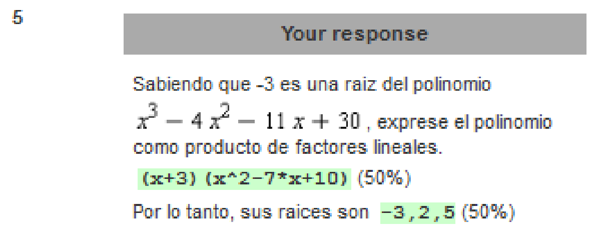
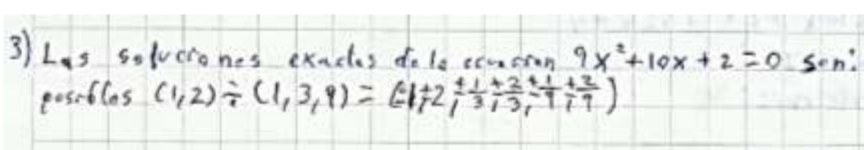


Figura 6.3 Conflicto semiótico reforzado.

Este mismo reactivo también formó parte del examen del Caso 1 del Grupo 37 y el estudiante respondió únicamente con un término cuadrático, en esta ocasión el sistema marcó la respuesta como incorrecta.

Otro conflicto que se presenta es relacionar a una situación problema un procedimiento útil para resolver una situación distinta a la planteada. Un ejemplo es cuando a un estudiante se le piden que determine las soluciones exactas de una ecuación de segundo grado y su respuesta es una lista de las posibles soluciones racionales, como se muestra en la siguiente figura.



El hecho de que en el sistema se presentara el esquema de división sintética en dos filas no fue motivo de conflictos, aunque la mayoría de los estudiantes la realizaban en tres filas en las hojas de trabajo. Los conflictos que se presentaron al realizar el algoritmo de división sintética son ajenos al uso del software Maple T.A., estos conflictos tienen que ver con la confusión del estudiante al momento de elegir el divisor apropiado para dar solución a la situación que se le presenta. Es decir, confunde el número que debe registrar al final de la primera fila del esquema de división sintética, según la situación que se le plantee.

Por último, otro conflicto semiótico identificado es el vacío de significación, que consiste en asociar nada a una expresión dada, lo cual se ve reflejado en las respuestas en blanco o cuando los estudiantes seleccionan la opción “no sé”.

Consideramos que mediante la implementación de tareas y exámenes a través del sistema Maple T.A. se ha dado respuesta a la solicitud del Departamento de ingeniería industrial, en cuanto al uso de nuevas tecnologías y de la aplicación de exámenes estandarizados. También, ha sido de gran apoyo para los estudiantes ya que generalmente reciben retroalimentación al momento de realizar las tareas. Aunque consideramos que sería de mayor estímulo para los estudiantes el que los reactivos incluyeran situaciones extramátematicas propias de su área.

Consideramos que de haber conocido el significado institucional implementado (global), no sólo el implementado mediante las tareas en el sistema, hubiera sido de gran ayuda para dar respuesta a algunas incógnitas sobre la construcción de algunas prácticas de los estudiantes al responder o tratar de responder el examen implementado mediante el sistema Maple T.A.

Una de las posibles líneas de investigación es el análisis del programa oficial de la asignatura Álgebra, con el fin de investigar la pertinencia de su estado actual o en su caso proponer cambios al mismo. Así como analizar las prácticas que se promueven a través de las tareas del sistema Maple T.A., tomando en cuenta esta nueva referencia.

Otra línea de trabajo es la elaboración e implementación de nuevas tareas (reactivos) a través del Maple T.A. en los temas de ecuaciones de segundo y tercer grado y polinomios, que contengan situaciones extramátematicas, indistintamente se realice o no, cambio del programa oficial de Álgebra.

Este trabajo de investigación ha contribuido a que se rediseñen unos reactivos en el sistema Maple T.A. y que se incluyan otros.

Referencias

Bernard Kolman (2006). Álgebra Lineal. México: Pearson Educación de México.

Biggs,J.B.; Collis, K.F. (1982); Evaluating the quality of learning. The SOLO taxonomy(Structure of the Observed Learning Outcome). New York: Academic Press.

Bravo, C., Marván, L. (2012). Matemáticas 3. Puebla, Puebla: Castillo.

CACEI (2013) Manual versión 2013. Recuperado enoctubre de 2013 dehttp://cacei.org.mx/convocatoria-cacei/index.php/acreditacion/articulos.

Chevallard, Y. (1999), "L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique", *RecherchesenDidactiquedesMathématiques*, vol. 19, núm. 2, pp. 221-266.

Chevallard Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l´activité mathématique. Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l´Informatique de Grenoble. LSD2-IMAG, Université Joseph- Fourier, Grenoble.

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 12 n.1 pp 73-112.

Chevallard, Y., M. Bosch y J. Gascón (1997), *Estudiarmatemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, Barcelona, ice/Horsori.

Del Castillo, A. G., Flores, B. E. (2012). Evaluación y Autoevaluación en Línea con Maple T.A.: Un Estudio con Números Complejos. En Ulloa, R. (Ed.), *Colección Uso de Tecnología en Educación Matemática. Investigaciones y Propuestas 2012* (pp. 170-183). México: AMIUTEM, A.C.

Del Castillo, A.G., Flores, B. (2006).Seguimiento de la Impartición de los Cursos de Álgebra bajo el Esquema del Nuevo Modelo Curricular de los Programas de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora. Hermosillo, Sonora, México: División de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Sonora.

Del Castillo, A.G., Flores, B. (2008). Diseño e Implementación de Exámenes Estandarizados en Línea en el Curso de Álgebra de los Programas de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora. Hermosillo, Sonora, México: División de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Sonora.

Del Castillo, A.G., Flores, B. (2009). Resultados de la implementación de tareas y exámenes en línea para los cursos de Álgebra, utilizando el software Maple T.A. En García Mireles, Ibarra, S. E. (Eds) *Memorias de la XIX Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas*. *Mosaicos Matemáticos No. 32* (pp.97-103). Hermosillo, Sonora, México: Universidad de Sonora.

Flores, B., Del Castillo, A.G. (2011). Online Assessment with Maple T.A.: Sharing an Experience in Algebra. En *2010 ICTCM* (pp. 115-123). USA: Addison Wesley, Prentice Hall, Pearson Education Inc.

Demana, F., Waits, B., Foley, G. Kennedy,D., & Blitzer, R. (2009). *Matemáticas Universitarias Introductorias*. México: Pearson.

Dórame, M., Del Castillo, A.G. Ibarra, S. (En prensa). Significados Personales sobre Polinomios en Maple T.A. En la publicación digital SNTCEAM 2012 "Dr. Eugenio Filloy Yagüe" AMIUTEM, A.C.

Drijvers, P., Godino, J.D., Font, D., Trouche, L. (2012). One episode, two lenses. A reflective analysis of student learning with computer algebra from instrumental and onto-semiotic perspectives.Educational Studies in Mathematics. http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10649-012-9416-8.

Eduardo Backhoff Escudero, Martín Rosas Morales, José Luis Ramírez Cuevas, Norma LarrazoloReyna y Virginia Velasco Ariza (2002). Evaluación del aprendizaje por computadora: una década de innovación educativa en la UABC. Tercer Congreso Nacional y Segundo Internacional: Retos y Expectativas de la Universidad. Ixtapa de la Sal, Estado de México, noviembre de 2002. Recuperado en noviembre de 2013 de: http://www.exhcoba.mx/pdf/2002_Evaluacion_de_una_decada_de_aprendizaje_por_computadora.pdf.

Flores, B. (2009) .Tareas y exámenes en línea para el curso de Álgebra de los programas de la División de Ciencias Exactas y Naturales y de la División de Ingeniería de la Universidad de Sonora. Hermosillo, Sonora, México: División de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Sonora.

Flores, B., Del Castillo, A.G. (2011). Online Assessment with Maple T.A.: Sharing an Experience in Algebra. En *2010 ICTCM* (pp. 115-123). USA: Addison Wesley, Prentice Hall, Pearson Education Inc.

Fonseca, Cecilio; Bosch, Marianna; Gascón, Josep (2010). El momento del trabajo de la técnica en la completación de Organizaciones Matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios. Educación Matemática, vol. 22, No.2, pp. 14. Distrito Federal, México. Santillana.

Freudenthal, Hans (1981). Major problemsof mathematics education.Educational Studies in Mathematics.http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF00305618.

Fuller, G. (2004). *Álgebra Elemental* (Vigésima sexta reimpresión). México: CECSA.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición einstrucción matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.Disponible en Internet: URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_tfs.htm.

Godino J., Batanero C., Font V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y lainstrucción matemática. Versión ampliada y revisada el 8/Marzo/2009 del artículo, Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007).

Godino, J. D. (2002). Un Enfoque Ontológico y Semiótico de la Cognición Matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22 (2-3), 237-284.

Godino, J., Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 14, No. 3. pp. 325-355.

Ibarra, S., Del Castillo, A. (2012). Significados Personales Logrados y Evaluados de Estudiantes de Álgebra en el Ambiente Maple T.A. En Ulloa, R. (Ed.), *Colección Uso de Tecnología en Educación Matemática. Investigaciones y Propuestas 2012* (pp. 161-169). México: AMIUTEM, A.C.

Kaufmann, J. E. &Schwitters, K. L. (2010). *Álgebra* (octava edición). México: CENGAGE Learning.

Kurosch, A. G. (1994). Curso de Álgebra Superior (quinta reimpresión). México:Limusa.

Laidler, Keith J., Meiser John H. (2007). Fisicoquímica. México: Grupo Editorial Patria.

Larson, Hostetler, Edwards (2009).Cálculo diferencial. México: McGraw Hill.

Larson, Hostetler, Edwards (2009).Cálculo integral. México: McGraw Hill.

Leithold, L. (1992).Álgebra. México: OXFORD.

MapleSoft (2013) Maple T.A. (Software) Disponible en:http://www.maplesoft.com/products/mapleta/

Matemáticas I (2011). Sonora, México: Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora.

NCTM. (2003). Principles for School Mathematics, The Technology Principle. Recuperado el 20 de octubre, 2013 de http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=26809.

Ortiz, J. J. (1999). Significados de los conceptos probabilísticos elementales en los textos de Bachillerato. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Rees, P. K., Sparks, F. W., Rees, C. S., (1991), Álgebra (décima edición). México: McGraw-Hill.

Resnick, Halliday y Krane (2011). Física volumen 1(cuarta edición). México: CECSA.

Soto, M. J. L. (2003). *Polinomios y raíces: una representación gráfica*. Departamento de Matemáticas. Universidad de Sonora.

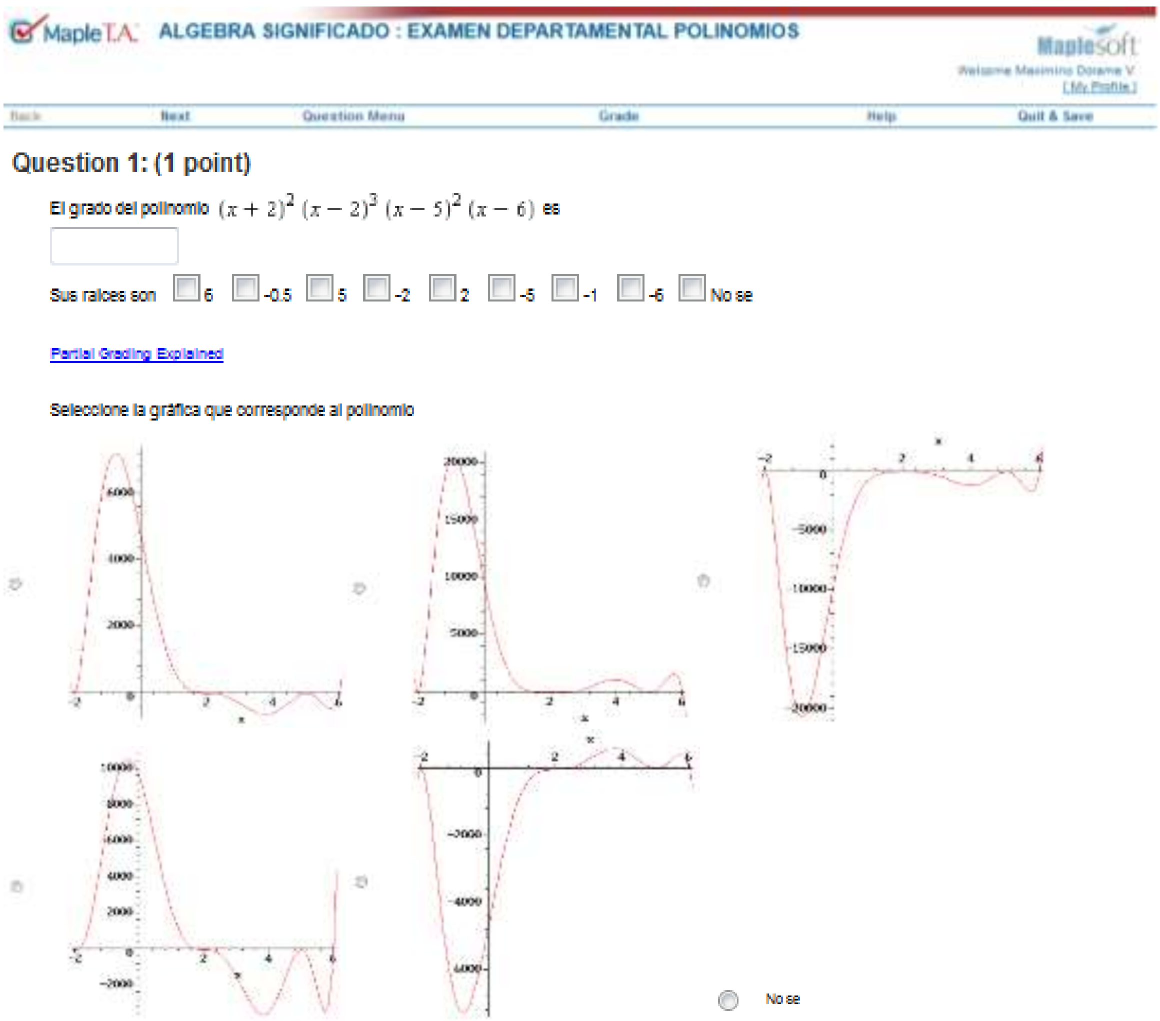
Swokowski, E. W., Cole, J. A. (2011), Álgebra y Trigonometría con geometría analítica (13a edición). México: CENGAGE Learning.

Uspensky, J.V. (1987), Teoría de Ecuaciones (primera edición). México: Limusa.

Valenzuela, A.L. (2010), Matemáticas I: Módulo de aprendizaje (segunda edición). México: Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora.

Anexos

ANEXO 1 Muestra de un examen en el sistema Maple T.A.


Maple T.A. ALGEBRA SIGNIFICADO : EXAMEN DEPARTAMENTAL POLINOMIOS

Maplesoft

Back | Next | Question Menu | Grade | Help | Quit & Save

Question 1: (1 point)

El grado del polinomio $(x+2)^2(x-2)^3(x-5)^2(x-6)$ es

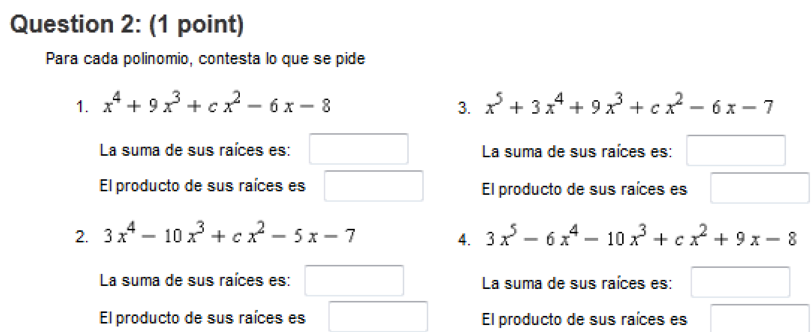
Sus raíces son ☐ 6 ☐ -0.5 ☐ 5 ☐ -2 ☐ 2 ☐ -5 ☐ -1 ☐ -6 ☐ No se

Partial Grading Explained

Seleccione la gráfica que corresponde al polinomio

○ No se

Grupo 7: De expresión algebraica a gráfica.


Question 2: (1 point)

Para cada polinomio, contesta lo que se pide

1. $x^4+9x^3+cx^2-6x-8$

La suma de sus raíces es:

El producto de sus raíces es

2. $3x^4-10x^3+cx^2-5x-7$

La suma de sus raíces es:

El producto de sus raíces es

3. $x^5+3x^4+9x^3+cx^2-6x-7$

La suma de sus raíces es:

El producto de sus raíces es

4. $3x^5-6x^4-10x^3+cx^2+9x-8$

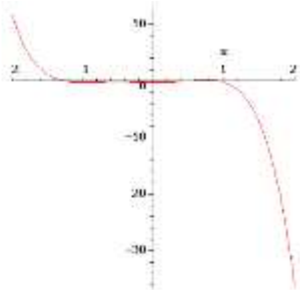
La suma de sus raíces es:

El producto de sus raíces es

Grupo 2: Coeficientes y raíces.

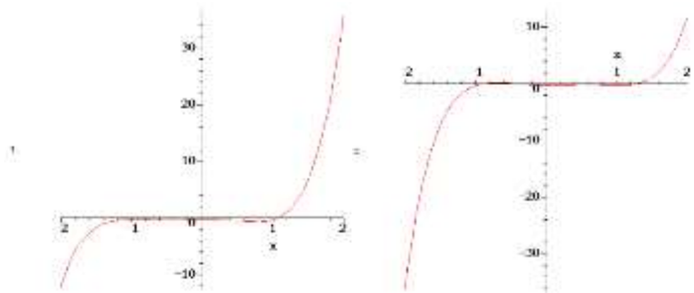
Question 3: (1 point)

Si la gráfica de $p(x)$ es



asocie las gráficas correspondientes a

-- -p(x) -- p(-x)



Grupo 4: Gráficas de $p(x), -p(x)$ y $p(-x)$.

Question 4: (1 point)

(x-a) es un factor de p(x) si y solo si (Click for List) .

(Click for List)
p(a)=0
p(a)<>0
p(a)<0
p(a)>0

Grupo 2: Teorema del factor.

Question 5: (1 point)

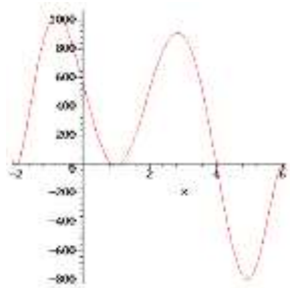
El cociente que resulta al dividir $4x^3 + 13x^2 - 7x + 30$ entre $x + 4$ es:

y el residuo es

Grupo 5: Cocientes y residuos.

Question 6: (1 point)

Seleccione la expresión algebraica que corresponde al polinomio representado en la siguiente gráfica



- ( ) $(x+2)^2\,(x-1)^2\,(x-4)\,(x-6)^2$
- ( ) $-(x+2)^2\,(x-1)^2\,(x-4)^2\,(x-6)^2$
- ( ) $(x+2)^2\,(x-1)^2\,(x-4)^2\,(x-6)^2$
- ( ) $-(x+2)^2\,(x-1)^2\,(x-4)\,(x-6)^3$
- ( ) $-(x+2)^2\,(x-1)^2\,(x-4)\,(x-6)^2$
- ( ) No se

Grupo 3: Gráfica a expresión algebraica: más de dos raíces repetidas.

Question 7: (1 point)

Verifica que -2 es una raíz del polinomio $x^6+7x^5-14x^4-232x^3-736x^2-976x-480$.

-2 es una raíz de multiplicidad

Encuentra las otras raíces y escribelas ordenadas de menor a mayor, separadas por comas

Expresa el polinomio como producto de factores lineales.

Grupo 1: Raíces múltiples.

Question 8: (1 point)

La factorización de x^2+64 es:

- ( ) $(x+8)^2$
- ( ) $(x+8\,I)\,(x-8\,I)$
- ( ) $(x+8\,I)^2$
- ( ) $(x+8)\,(x-8)$
- ( ) No sé

La factorización de $x^2-16x+64$ es:

- ( ) $(x-8)^2$
- ( ) $(x+8)^2$
- ( ) $(x+8\,I)\,(x-8\,I)$
- ( ) $(x+8)\,(x-8)$
- ( ) $(x+8\,I)^2$
- ( ) No sé

y la factorización de $x^2-16x+65$ es

- ( ) $(x-8-I)\,(x+8+I)$
- ( ) $(x+8-I)\,(x+8+I)$
- ( ) $(x-8-I)\,(x-8+I)$
- ( ) $(x+8-I)\,(x-8+I)$
- ( ) No sé

Grupo 6: Factorización.

Question 9: (1 point)

Las soluciones exactas de la ecuación $10x^2-4x-10=0$ son:

Escribe las soluciones (valores numéricos solamente) separadas por ;

Grupo 5: Solución cuadrática general.

Question 10: (1 point)

Factoriza

$x^2-18x+80$

Grupo 1: Factoriza-2do-grado.

ANEXO 2Calificaciones de las tareas registradas en el sistema Maple T.A.

Grupo 33 de Ingeniería Química,horario de clase: 8-9 horas, 37 registrados

SOLUCION...	REPRESEN...	CONSTRUC...	FORMULA...	RAICES Y...	FACTORIZ...	POLINOMI...	GRAFICAS...	RELACION...	EXAMEN D...	
Grade	Grade	Grade	Grade	Grade	Grade	Grade	Grade	Grade	Grade	Total
7.4	8.5	6.7	5.9	8.5	8	7.5	8.1	8.6	9.4	
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	100
8	10	10	9.26	10	10	10	10	10	9.67	96.93
10	10	9	10	10	10	10	7.5	10	10	96.5
10	8	5	10	6.44	6	8.67	9	8	9.3	80.4
10	10	9	10	10	10	10	9.17	10	10	98.17
8	10	10	10	9.81	10	10	10	10	10	97.81
10	10	10	10	9.88	10	10	10	10	10	99.88
10	8	7	10	8.19	9.5	9	7.5	9	7.88	86.06
8	8	6	4.44	10	10	10	8.67	8.5	10	83.61
10	10	9	9.63	9.31	9	10	10	10	9.5	96.44
8	8	10	10	9.75	10	10	10	10	10	95.75
10	10	10	8.52	10	10	8	10	10	7.5	94.02
8	10	7	10	8.95	8.67	10	9	10	10	91.61
10	10	8	9.9	8.75	9.17	8.33	9.25	10	10	93.4
10	10	8	10	9.3	9	9	10	10	8.67	93.97
8	10	10	10	9.75	8	10	10	9	9.8	94.55
10	10	10	9.26	10	10	9.67	10	10	10	98.93
10	10	10	10	9.93	10	10	9.67	10	9.25	98.85
8	10	0	0.37	9	6.5	9.33	8.58	0	7.88	59.66
6	6	2	4.44	8.12	9.5	6.17	8.25	10	7.37	67.86
10	10	8	10	9.88	9	9	10	10	10	95.88
10	8	9	9.26	9.5	9.5	8.33	9	10	6.75	89.34
10	10	10	10	9.88	10	10	9.92	10	10	99.79
9	10	10	10	9.88	10	10	9.5	10	9.5	97.88
6	8	10	0.74	10	10	9.5	9.67	10	9.52	83.42
10	10	8	10	8.5	9	10	10	10	10	95.5
10	10	6.5	10	9.5	9.5	8.67	9.5	10	10	93.67
10	10	10	10	9.88	10	10	10	10	10	99.88
10	10	10	10	9.69	10	10	9	10	10	98.69
8	10	5	10	10	9	9.33	9.92	9.5	10	90.75
8	10	10	10	9.75	10	10	10	10	10	97.75
8	10	10	9.8	10	10	10	8.67	10	10	96.47
10	10	10	10	9.69	9.67	10	10	10	10	99.35
10	10	10	10	9.88	10	9.5	10	10	10	99.38
10	10	10	10	10	10	10	9.67	10	10	99.67
10	10	10	10	9.88	9	10	10	10	9	97.88
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	100
8	10	2	7.04	9.68	10	10	9	10	7.83	83.54

Grupo 37 de área de Tronco Común de Ingeniería, horario de clase: 17 - 18 horas.

FORMULA DI	SOLUCION DI	CONSTRUCCI	REPRESENTA	RAICES Y FA	POLINOMIOS	FACTORIZA	GRAFICAS Y	RELACION EN	EXAMEN
	8	1	8	7.88	7.33	6.5	6	0	2.77
	4	8	6	9.88	7.33	7.5	7.67	9	7
	4	3	10	5.93		0	4.67	5	4.77
							0		1.83
	10	6	10	8.94	5.83	8	10	6	8
	6	1	8	8	6.5	7	7.17		6.6
	10	3	10	8.15	2.5	3.83			7.33
	6	0	8	6.65	2	6	7.67	4	2.77
	10	10	10	9.64	10	10	8.33	9	8.94
	4		10						5.24
	6		8						5
	8	0	4	7.67	2	8	9.33	0	6
	2			9.05					2.14
	10	9	10	7.8		0			3.83
	2	4	8	7.23	6.5	4.5	9.17		3.6
	8	6	6	8.25	9	8	10	10	7.25
	6		10	0					5
	10	4		0	0	0	9	9	4.48
	0								
									1.45
	6	0	8						2.46
	0	3	6	2.75					1.64
	10		10						1.17
	8	8	10	8.86	8.67	9.5	9	8	8.33
	10	0	6	6.88		0			4.9
	2	0	8						1
									1
	8	3	8	8.25					4.74
	10	3	4	7.86	9.33	3.67			2.5
	6	7	10	7.93	8.33	7	8.17	2.5	7.5
	0	8	6	0	0	10	0	0	3.5
	6	9	8	7.5		9	9.58	5	6.1
	0	0	8						3.5
	10	3	8	0.44					5.81
	6	1		3.38					1.67
	2		8	7.88					2.76