Universidad de Sonora

División de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemáticas

Secuencia didáctica para promover el aprendizaje del objeto matemático potencia con base en el Análisis Didáctico

Tesis que presenta

Jesús Manuel Duarte Sánchez

Para obtener el Grado de

Maestría en Ciencias

Con especialidad en Matemática Educativa

Director de Tesis:

Dr. José Luis Díaz Gómez

Hermosillo, Sonora, México   Noviembre del 2010

AGRADECIMIENTOS

A mi esposa, por acompañarme y apoyarme incondicionalmente en esta importante etapa de mi vida.

A mis hijos con inmenso cariño.

A mi madre con amor y respeto.

A mis hermanos, por su gran cariño y apoyo.

A mi director de tesis, Dr. José Luis Díaz Gómez, por sus consejos y valiosas aportaciones para el logro de este trabajo.

A la Dra. María Eugenia Andreu, M.C. Marisela Armenta, M.C. Manuel Urrea, y M.C. Ruperto Vargas, por sus importantes comentarios que permitieron mejorar este trabajo.

A todos mis profesores, porque con su apoyo y motivación hicieron de esta maestría un verdadero placer.

A mis compañeros, por compartir su amistad y experiencias.

A mi alma mater UNISON, a la cual le debo mi formación profesional, y en esta importante etapa, iluminar nuevamente mi vida.

Contenido

Índice de tablas

Índice de figuras

Introducción

Actualmente en la educación, se presentan una serie de fenómenos didácticos relacionados con los contenidos estudiados. En particular, en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se ha detectado el pobre significado que los estudiantes tienen de los objetos matemáticos que se estudian en los diferentes niveles del sistema educativo nacional, y en el seno de las diferentes comunidades de la educación matemática, se han realizado gran variedad de investigaciones que tratan de encontrar explicaciones a dichos fenómenos.

Personalmente, he identificado la problemática en torno al aprendizaje del objeto matemático potencia y desde mi punto de vista, creo que un factor que influye en dicha problemática es la enseñanza de este concepto como una herramienta facilitadora de operaciones bajo un acercamiento aritmético y algebraico.

En este trabajo, en particular estudiamos el concepto de potencia y su problemática. Para iniciar este estudio, revisamos algunas investigaciones en torno a los exponentes, cuyos resultados ponen de manifiesto algunas de las probables causas que pudieran contribuir a la presencia de esta problemática.

Martínez (2000) enumera varios fenómenos didácticos y destaca la falta de argumentos, entre estudiantes para justificar las potencias cero, uno, negativas y fraccionales. Por su parte, Ferrari (2001) considera como un obstáculo la enseñanza de estructuras multiplicativas para introducir la potencia. Mientras Dolores, Martínez, Farfán, Carrillo, y López (2007), detectaron que en el bachillerato, la potencia es estudiada como una multiplicación reiterada y su definición es introducida mediante ejercicios de transformación de expresiones algebraicas.

Curricularmente, el concepto potencia es parte del contenido matemático de estudio en secundaria y bachillerato. Por lo anterior, se analizaron la Reforma 2006 para Secundaria (RS) y la Reforma Integral en la Educación Media Superior 2008 (RIEMS) con el propósito de tener los referentes curriculares en ambos niveles. Ambas reformas tienen como aspecto central apoyar la práctica docente bajo un enfoque didáctico basado en el desarrollo de competencias.

Además, mediante el estudio de este objeto matemático (potencia), pretendemos contribuir al desarrollo del pensamiento matemático, promoviendo en los estudiantes habilidades de resolución de problemas, de representación y de razonamiento cuantitativo a través del dominio del contenido del Álgebra como aritmética generalizada.

Para coadyuvar a la problemática planteada y atendiendo las demandas curriculares y disciplinares, presentamos este trabajo de desarrollo docente que tiene como propósito el diseño de una secuencia didáctica para promover el aprendizaje del objeto matemático potencia con base en el análisis didáctico (Gómez, 2002).

El análisis didáctico, con el que respaldamos teóricamente la secuencia didáctica, es un procedimiento que permite organizar la enseñanza de las matemáticas e identificar las capacidades del profesor. Además, en el contexto concreto de la planificación de una hora de clase o del diseño de una secuencia didáctica, se puede organizar la enseñanza basándose en los cuatro análisis que lo sustentan: el análisis de contenido, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis de actuación.

En el análisis de contenido, organizamos e identificamos los múltiples significados del concepto potencia, analizando su estructura conceptual, las formas como se puede representar y la fenomenología. Por su parte, en el análisis cognitivo, describimos las hipótesis acerca de cómo los estudiantes pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática (potencia), cuando se enfrenten a las tareas que compondrán la secuencia didáctica. Lo anterior se hizo a partir de la información que obtuvimos en el análisis de contenido.

En el análisis de actuación, analizamos y seleccionamos las tareas que constituyeron la secuencia didáctica. El diseño, se materializó a través de ocho tareas que toman como punto de partida la resolución de problemas extramatemáticos y una tarea en contextos matemáticos para la institucionalización de la definición de potencia. Las primeras ocho tareas las contextualizamos en problemas relacionados con la fenomenología del objeto matemático potencia. Finalmente, para resolver las tareas, los estudiantes requieren utilizar diferentes representaciones de este objeto matemático.

Por último, en el análisis de actuación determinamos las capacidades, que los estudiantes pusieron en juego cuando trabajaron en una versión preliminar de las tareas que constituyen la secuencia didáctica. Además, hicimos una caracterización de las competencias matemáticas en el marco de la RIEMS a las que las capacidades anteriores contribuyeron, las trayectorias cognitivas que siguieron y los obstáculos, errores y dificultades que manifestaron.

Para concluir este trabajo, presentamos un análisis de las actuaciones de tuvieron cuatro estudiantes de un bachillerato tecnológico del subsistema CBTIS, con motivo de la puesta en escena de la secuencia didáctica. Esta, se realizó con los propósitos de: Observar si las seis primeras tareas, inducían a los estudiantes a la construcción de la noción de potencias de base natural, exponentes naturales y exponente cero. Y, que las siguientes dos tareas (fractales), contribuían a la noción de potencias de base racional positiva y exponentes naturales y cero.

Otros propósitos fueron, detectar si la redacción, el lenguaje utilizado en el enunciado del problema y las preguntas para las tareas eran claras y comprensibles para los estudiantes, Observar si las preguntas propuestas inducen a los estudiantes a la elaboración de tablas, diagramas o esquemas que coadyuven a la resolución del problema y finalmente, detectar cualquier tipo de error no detectado previamente, en la redacción del trabajo, planteamiento de las preguntas propuestas, e incluso ortografía de las mismas.

Capítulo 1

Ubicación de la problemática y justificación de la propuesta de desarrollo docente

En este capítulo, se presentan los resultados de algunas investigaciones y un cuestionario que se aplicó a profesores de matemáticas del bachillerato que ponen de manifiesto, algunas de las probables causas que pudieran contribuir a la problemática en torno al objeto matemático potencia. Incluimos también, un análisis de la Reforma en Secundaria 2006 y de la Reforma Integral en la Educación Media Superior 2008, con el propósito de tener los referentes curriculares en ambos niveles y finalmente consideramos el significado del Álgebra escolar y las habilidades que se requieren promover para coadyuvar al desarrollo del pensamiento algebraico.

1.1 Antecedentes en la investigación

Existen diferentes investigaciones en torno a la enseñanza y el aprendizaje de los exponentes (potencia) que ponen en evidencia la presencia de algunos errores y dificultades, que presentan los alumnos cuando se pone en juego el uso de esta herramienta (potencia). En este trabajo en concreto, revisamos las investigaciones realizadas por Martínez (2000), Ferrari (2001) y Dolores, Martínez, Farfán, Carrillo, y López (2007) y a continuación, ´presentamos un condensado de las mismas.

Martínez (2000), quien enumera varios fenómenos didácticos que fueron detectados en la investigación de Lezama (1999) con estudiantes de secundaria, bachillerato y nivel superior. Estos fenómenos se organizaron en la tabla 1.1 que presentamos a continuación

Fenómenos didácticos			
No.	Descripción	Ejemplos	Argumentos
1	Respuestas reiteradas de los estudiantes donde afirman que:	$2^0=0$	Por definición de potencia 2^0 es: "El 2 multiplicado cero veces" es decir, nada (cero).
		$2^0=2$	No hay nada como exponente.
		$2^{-3} = (-2)(-2)(-2)$	Multiplicación repetida.
		$2^{-3} = 0.002$	El signo menos indica que el punto se recorre a la izquierda tantas veces como indique el valor absoluto del exponente.
		$2^{-3} = (-8)$	$2^{3}=8$ y se le coloca el signo menos.
2	Falta de argumentos (leyes), distintos a la memoria, para establecer que:	$2^0=1$ $2^{-3}=\frac{1}{2^3}$ $2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$, etc.	No argumentos.
3	Respuestas repetidas por estudiantes de bachillerato:	$2^{\frac{-3}{2}}=2(\frac{-3}{2})=-3$	Es una multiplicación.
4	Si x no es entero, 2^x no es calculable.	$2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ $2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$, etc.	Es una notación.
5	Representación por medio del radical, pero ignoraban y no tomaban en cuenta la naturaleza de dicho número.	$\sqrt{2}=1.4$	No se interpreta como resultado de una "exponenciación" sino como una notación.
6	Algunos estudiantes de secundaria afirman	$2^1=2\times 2$ $2^1=2\times 1=2$	El dos se multiplica una vez.

Tabla 1.1: Fenómenos didácticos

Ferrari (2001), retoma de las investigaciones reportadas por Confrey (1996) y Lezama (1999) en torno a la comprensión de las exponentes, que la enseñanza de estructuras multiplicativas para introducir la potencia, se convierte en un obstáculo para la aprehensión de otros conceptos por parte de los alumnos. Por ejemplo, se introduce el concepto potencia, como una multiplicación repetida (mismos factores), es decir: $3\times3\times3\times3\times3$ = cinco veces el tres = 3^5.

Con esta definición de potencia, se pudiera presentar el obstáculo de que sólo tiene sentido cuando se trabaja con exponentes en el dominio de los números naturales mayores que 1. Por ejemplo, 3^5 se puede interpretar como multiplicar “cinco veces el tres”. Es decir, multiplicar la “base” (3) por sí misma tantas veces como lo indique el “exponente” (5). Pero, ¿qué interpretación tendrán los estudiantes para 2^1 o 2^0? ¿Cómo multiplicar una vez el dos o cero veces el dos? Inclusive, ¿Qué sentido darle al cálculo de 2^0 o de 2^1? ¿Qué significará $3^{\frac{1}{2}}$ o $3^{\sqrt{2}}$? ¿Cómo calcular “un medio veces el tres” o “raíz de dos veces el tres”? Un algoritmo que aplicaban con éxito, deja de funcionarles al extender el dominio de validez de los exponentes. Otro tanto sucede con los exponentes negativos, donde los estudiantes presentan respuestas como: $2^{-3} = (-2)(-2)(-2) = -8$ en este caso se percibe el uso de la definición de potencia sin dotarla de mayor sentido.

Dolores, Martínez, Farfán, Carrillo, y López (2007), encontraron que evolucionar de la aritmética al Álgebra, es un paso importante para el desarrollo del pensamiento algebraico escolar. Además, señalan que en el bachillerato, la noción de potencia es manejada en el contexto algebraico como una multiplicación reiterada. Es decir, $\left(\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n\,\text{veces}} = a^n \right)$ donde, esta definición se introduce mediante ejercicios en los que se realizan transformaciones de expresiones algebraicas, es decir tratamientos en la representación analítica.

Los resultados mostrados en estas investigaciones son situaciones que en mayor o menor medida también encontramos en estudiantes de bachillerato, cuando hemos tenido la oportunidad de impartir los cursos en las diferentes ramas de esta disciplina en este nivel. Por otra parte, consideramos que los errores que cometen los estudiantes cuando enfrentan escenarios que requieren de la aplicación del concepto potencia, por ejemplo en la manipulación de expresiones algebraicas, pudieran tener su origen en la forma en cómo estos contenidos fueron trabajados en cursos previos.

De acuerdo con las evidencias presentadas en estas investigaciones, es necesario señalar que los fenómenos mostrados se presentan con diferentes matices en los diferentes niveles escolares y proporciona evidencia convincente del pobre significado que tienen los estudiantes del concepto potencia.

1.2 Ubicación curricular

En este apartado, realizamos un análisis de la Reforma de Secundaria (2006) y la Reforma Integral de la Educación Media Superior (2008) con el propósito de tener los referentes curriculares acerca de la forma en que estos contenidos deben abordarse en estos niveles educativos.

1.2.1 Reforma 2006 para Secundaria (RS)

El aspecto central de la RS 2006, consiste en apoyar la práctica docente y hace referencia a cuatro competencias matemáticas así como también las implicaciones en los alumnos. Además, en esta reforma se plantea un reto importante en el estudio de las matemáticas, ya que por este medio, se busca que los niños y jóvenes desarrollen una forma de pensamiento que les permita expresar matemáticamente situaciones que se presentan en diversos entornos socioculturales, así como utilizar técnicas adecuadas para reconocer, plantear y resolver problemas; al mismo tiempo, se busca que asuman una actitud positiva hacia el estudio de esta disciplina y de colaboración y crítica, tanto en el ámbito social y cultural en que se desempeñen como en otros (SEP, 2006).

1.2.1.1Organización de los contenidos matemáticos

En el Plan de Estudios de la RES, los contenidos matemáticos se organizaron con base en tres ejes, los cuales presentamos a continuación en la tabla 1.2.

Ejes	Propósitos
1. Sentido numérico y pensamiento algebraico	Encontrar el sentido del lenguaje matemático y tender un puente entre la aritmética y el Álgebra. Profundizar en el estudio del Álgebra con los tres usos de literales, conceptualmente distintos: como número general, como incógnita y en relación funcional.
2. Forma, espacio y medida	Abordar los tres aspectos esenciales del estudio de la geometría y la medición, con lo cual se favorece el desarrollo de la competencia de argumentación.
3. Manejo de la información	Considerar que la información puede provenir de situaciones deterministas, definidas o aleatorias. En este sentido, se resuelven problemas que requieren el análisis, la organización, la representación y la interpretación de datos provenientes de diversas fuentes.

Tabla 1.2: Organización de los ejes y propósitos de los contenidos matemáticos

En esta organización por ejes, se privilegia la vinculación mediante los bloques temáticos y los aprendizajes esperados entre contenidos del mismo eje, entre ejes distintos o con los de otras asignaturas, evitando la fragmentación del conocimiento, de modo que cuenten con más elementos para abordar un problema, así como para favorecer las posibilidades de establecer conexiones o de ampliar los alcances de un mismo concepto, para lograr un mayor nivel de abstracción que les permitirá a los alumnos resolver situaciones problemáticas más complejas.

Los contenidos de cada grado están organizados en cinco bloques, en cada uno hay temas y subtemas de los tres ejes descritos. Esta organización tiene como propósito que los profesores y sus alumnos puedan establecer metas parciales a lo largo del año escolar y garantizar el estudio simultáneo de los tres ejes durante el curso.

Finalmente, la comprensión de los diversos conceptos matemáticos deberá sustentarse en actividades que pongan en juego la intuición, pero a la vez favorezcan el uso de herramientas matemáticas para ampliar, reformular o rechazar las ideas previas.

1.2.1.2 Enfoque didáctico

El enfoque didáctico que sustentan los programas para la educación secundaria pretende promover en los alumnos el interés, la reflexión, encontrar diferentes formas de resolver problemas y la argumentación de sus resultados al resolver las actividades propuestas por el profesor. El diseño de dichas actividades deberán fundamentarse en los avances logrados en el campo de la didáctica de las matemáticas que muestran el papel determinante que desempeñan la situación o las situaciones problemas que hacen pertinente el uso de las herramientas matemáticas que se pretende estudiar, así como los procesos que siguen los alumnos para construir nuevos conocimientos y superar las dificultades que surgen en el proceso de aprendizaje.

En el aspecto de la evaluación, se proponen los siguientes dos aspectos:

1. El primero se refiere a qué tanto saben hacer los alumnos y en qué medida aplican lo que saben, en estrecha relación con los contenidos matemáticos que se estudian en cada grado.
2. El segundo, se refiere al establecimiento del momento adecuado para evaluar los conocimientos y habilidades esperados, ya que estos forman parte de una secuencia que se desarrolla en varios bloques y a veces en varios grados.

El aspecto central de esta propuesta, consiste en apoyar la práctica docente y hace referencia a cuatro competencias matemáticas así como también las implicaciones en los alumnos. Esta organización, la presentamos a continuación en la tabla 1.3.

Competencias	Implicaciones en los alumnos
1. Planteamiento y resolución de problemas	Identificar, plantear y resolver diferentes tipos de problemas o situaciones.
2. Argumentación	Asumir la responsabilidad de buscar al menos una manera de resolver cada problema que se les plantea. Ver la necesidad de formular argumentos que les den sustento al procedimiento y/o solución encontrados, con base en las reglas del debate matemático.
3. Comunicación	Expresar y representar información matemática contenida en una situación o fenómeno, así como la de interpretarla.
4. Manejo de técnicas	Uso eficiente de procedimientos y formas de representación al efectuar cálculos, con el apoyo de tecnología o sin él para favorecer el desarrollo del sentido numérico y el pensamiento algebraico.

Tabla 1.3: Competencias e implicaciones en la educación secundaria

Para evaluar el logro de las competencias anteriores, pueden seguirse las siguientes tres líneas de progreso:

1) De resolver con ayuda a resolver de manera autónoma.
2) De los procedimientos informales a los procedimientos expertos.
3) De la justificación pragmática a la justificación axiomática.

1.2.1.3 Los exponentes en el currículo de secundaria

Los contenidos, conocimientos y habilidades fueron organizados en apartados que privilegian la construcción de significados y herramientas matemáticas por parte de los alumnos con base en la resolución de problemas. Por cada apartado, se incluyen orientaciones didácticas donde se fundamenta la necesidad de estudiar los aspectos planteados en conocimientos y habilidades. Dicha estructura la presentamos en la tabla 1.4

Primer Grado	**Bloque 4:** Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que los alumnos: Resuelvan problemas que impliquen el cálculo de la raíz cuadrada y potencias de números naturales y decimales.
Eje	**Sentido numérico y pensamiento algebraico**
Tema	**Significado y uso de las operaciones**
Subtema	**POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN**
Conocimientos y Habilidades 4.2. Resolver problemas que impliquen el cálculo de la raíz cuadrada y la potencia de exponente natural de números naturales y decimales.	**Orientaciones didácticas** Los alumnos deben comprender que la raíz cuadrada de un número que no es cuadrado perfecto constituye una aproximación. Se puede recurrir a contextos geométricos para discutir este hecho; por ejemplo, cabe preguntar cuál es la medida del lado de un cuadrado de 40 cm^2 de área. Algunos recursos de aproximación a la raíz cuadrada de números naturales y decimales mediante algoritmos son, por ejemplo, el uso de procedimientos recursivos y de ensayo y error. Es conveniente que los alumnos comparen las soluciones alcanzadas con los resultados que obtengan al emplear la calculadora. Se sugiere generalizar la idea de que la potenciación y la radicación son operaciones inversas, puesto que si un número se eleva a una potencia *n* y al resultado se le extrae la raíz *n* dicho número no se altera. Además de la realización directa de cálculos, se pueden proponer problemas como los siguientes: Comparen, sin realizar las operaciones correspondientes: 0.5^2 y 0.05^2; la raíz cuadrada de 0.09 y 0.0625 **Actividad complementaria:** "Raíz cuadrada y cúbica", en *Hoja electrónica de cálculo. emat*, México, sep, 2000, pp. 59-60.
Segundo Grado	Bloque 4: Como resultado del estudio de este bloque temático se espera que los alumnos: Resuelvan problemas que implican el uso de las leyes de los exponentes y de la notación científica.
Eje	**Sentido numérico y pensamiento algebraico**
Tema	**Significado y uso de las operaciones**
Subtema	**POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN**
Conocimientos y Habilidades 4.1. Elaborar, utilizar y justificar procedimientos para calcular productos y	**Orientaciones didácticas** La comprensión del significado de estas operaciones y la habilidad para realizar cálculos con ellas es importante por los vínculos que se pueden establecer con otros temas, como la multiplicación, el teorema de Pitágoras o las ecuaciones de segundo grado. Tanto para el estudio de potencias de una misma base, como para la potencia de una potencia, pueden plantearse cálculos con números

cocientes de potencias enteras positivas de la misma base y potencias de una potencia. Interpretar el significado de elevar un número natural a una potencia de exponente negativo. Utilizar la notación científica para realizar cálculos en los que intervienen cantidades muy grandes o muy pequeñas.	pequeños que los alumnos puedan resolver mentalmente y en los cuales puedan observar regularidades. Por ejemplo: $2^1 \times 2^5 = 2 \times 32 = 64 = 2^6$ $2^2 \times 2^3 = 4 \times 8 = 32 = 2^5$ $2^4 \times 2^5 = 16 \times 32 = 512 = 2^9$ De este modo se podría hacer la siguiente generalización: $2^m \times 2^n = 2^{m+n}$ para llegar a establecer que: $a^m \times a^n = a^{m+n}$ De manera similar se puede abordar el cociente de potencias de la misma base y llegar al exponente negativo. Una forma de hacerlo es la siguiente: Generalizar la regla para simplificar expresiones de la forma $\frac{a^m}{a^n}$, a partir de casos particulares : $\frac{4^5}{4^2}=\frac{4x4x4x4x4}{4x4}=4x4x4=4^{5-2}=4^3$ Luego, utilizar el significado de los exponentes para simplificar $\frac{7^3}{7^5}=\frac{7x7x7}{7x7x7x7x7}=\frac{1}{7^2}$ Finalmente, utilizar la regla anterior para simplificar $\frac{7^3}{7^5}$ $\frac{7^3}{7^5}=7^{3-5}=7^{-2}$ e interpretar el significado de elevar un número natural a una potencia de exponente negativo. En este caso $7^{-2}=\frac{1}{7^2}$ y, en general, $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ Con frecuencia, la cancelación de factores en expresiones fraccionarias da lugar a que los alumnos cometan errores como el siguiente: $\frac{2^3}{2^5}=\frac{2x2x2}{2x2x2x2x2}=\frac{0}{2x2x2}$ Probablemente este error tenga su origen en un uso indebido del lenguaje. Usar expresiones como “este factor se va con éste” puede inducir a que los alumnos piensen que todos los factores del numerador se anulan, por lo que queda 0. En cambio, generalmente no tienen dificultades cuando se utiliza otro procedimiento para simplificar la misma expresión. Por ejemplo: $\frac{2^3}{2^5}=\frac{2x2x2}{2x2x2x2x2}=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$ o bien $\frac{2^3}{2^5}=\frac{2^3}{2^5}=\frac{2^0}{2^2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$ Las razones por las que se cometen errores son complejas. Solamente la participación de los estudiantes en el análisis del error les permitirá comprender por qué no suceden las cosas como ellos piensan.

Tabla 1.4: Contextualización de las leyes de los exponentes

En conclusión, los exponentes en secundaria, son estudiados en primer y segundo grado. En primer grado, se propone la resolución de problemas en contextos matemáticos, para dar significado a los exponentes fraccionarios mediante el uso de la calculadora, a través de las cuales, se pretende contribuir al desarrollo del sentido numérico y pensamiento algebraico. En segundo año, se estudian los exponentes de manera similar al primer grado. Mientras que en el tercer año, los exponentes no se consideran como objeto de estudio, pero si se utilizan como herramienta para resolver situaciones en contextos matemáticos o extramatemáticos.

1.2.2 Reforma 2008 en la Educación Media Superior (RIEMS)

En el año 2008, se dio a conocer la RIEMS. Ésta, establece once Competencias Genéricas definidas dentro de un Marco Curricular Común (MCC) para los diferentes subsistemas de bachillerato, que junto con las competencias disciplinares, tienen como propósito, dar identidad a este segmento del sistema educativo nacional, del cual se desprende el Perfil del Egresado. En este perfil, se especifican los rasgos fundamentales que los estudiantes deben reunir al concluir el bachillerato (SEP, 2008).

1.2.2.1 Enfoque psicopedagógico de las competencias

La propuesta de trabajo de la RIEMS, es una metodología enfocada en el desarrollo de competencias, fundamentada en una visión constructivista que reconoce al aprendizaje como un proceso que se construye en forma individual, en donde los nuevos conocimientos toman sentido estructurándose con los previos y en su interacción social.

Para trabajar bajo este enfoque, los profesores, deberán replantear los procesos didácticos creando ambientes de aprendizaje y situaciones educativas apropiadas para dar significado a los contenidos estudiados y propiciar en los alumnos el desarrollo de las competencias requeridas para movilizar, de forma integral los recursos con los que cuentan como: conocimientos, creencias, habilidades en diversos campos, destrezas, actitudes y valores, etc., que son indispensables para realizar con éxito las actividades a las que se enfrentarán en los diferentes contextos. Por lo tanto, estaremos en vías de formar estudiantes autónomos, en el ámbito del aprendizaje y, en su actuación como individuo y social. Una ventaja de promover el desarrollo de competencias es que las que se van formando sirven de base para desarrollar otras de mayor complejidad.

1.2.2.2 Competencias genéricas

Las competencias genéricas, según el documento Creación de un Sistema Nacional de Bachillerato (SNB) en un marco de diversidad, son aquellas que todos los bachilleres deben estar en capacidad de desempeñar, las que les permitan comprender el mundo e influir en él, les capacitan para continuar aprendiendo de forma autónoma a lo largo de sus vidas, y para desarrollar relaciones armónicas con quienes les rodean y participar eficazmente en su vida social, profesional y política a lo largo de la vida. Además, éstas tienen las características de ser: Clave, transversales y transferibles.

COMPETENCIAS GENÉRICAS		
Categoría	**Competencia**	**Atributos**
SE AUTODETERMINA Y CUIDA DE SI	1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.	• Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades. • Identifica sus emociones, las maneja de manera constructiva y reconoce la necesidad de solicitar apoyo ante una situación que lo rebase. • Elige alternativas y cursos de acción con base en criterios sustentados y en el marco de un proyecto de vida. • Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones. • Asume las consecuencias de sus comportamientos y decisiones. • Administra los recursos disponibles teniendo en cuenta las restricciones para el logro de sus metas.
	2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.	• Valora el arte como manifestación de la belleza y expresión de ideas, sensaciones y emociones. • Experimenta el arte como un hecho histórico compartido que permite la comunicación entre individuos y culturas en el tiempo y el espacio, a la vez que desarrolla un sentido de identidad. • Participa en prácticas relacionadas con el arte.

	3. Elige y practica estilos de vida saludables.	• Reconoce la actividad física como un medio para su desarrollo físico, mental y social. • Toma decisiones a partir de la valoración de las consecuencias de distintos hábitos de consumo y conductas de riesgo. • Cultiva relaciones interpersonales que contribuyen a su desarrollo humano y el de quienes lo rodean.
SE EXPRESA Y SE COMUNICA	4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.	• Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. • Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue. • Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas. • Se comunica en una segunda lengua en situaciones cotidianas. • Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.
PIENSA CRÍTICA Y REFLEXIVAMENTE	5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	• Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo. • Ordena información de acuerdo a categorías, jerarquías y relaciones. • Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos. • Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez. • Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas. • Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.

	6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.	• Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad. • Evalúa argumentos y opiniones e identifica prejuicios y falacias. • Reconoce los propios prejuicios, modifica sus puntos de vista al conocer nuevas evidencias, e integra nuevos conocimientos y perspectivas al acervo con el que cuenta. • Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.
APRENDE DE FORMA AUTONOMA	7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.	• Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento. • Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos. • Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.
TRABAJA EN FORMA COLABORATIVA	8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	• Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos. • Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva. • Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

PARTICIPA CON RESPONSABILIDAD EN LA SOCIEDAD	9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.	• Privilegia el diálogo como mecanismo para la solución de conflictos. • Toma decisiones a fin de contribuir a la equidad, bienestar y desarrollo democrático de la sociedad. • Conoce sus derechos y obligaciones como mexicano y miembro de distintas comunidades e instituciones, y reconoce el valor de la participación como herramienta para ejercerlos. • Contribuye a alcanzar un equilibrio entre el interés y bienestar individual y el interés general de la sociedad. • Actúa de manera propositiva frente a fenómenos de la sociedad y se mantiene informado. • Advierte que los fenómenos que se desarrollan en los ámbitos local, nacional e internacional ocurren dentro de un contexto global interdependiente.
	10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.	• Reconoce que la diversidad tiene lugar en un espacio democrático de igualdad de dignidad y derechos de todas las personas, y rechaza toda forma de discriminación. • Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio. • Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.
	11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.	• Asume una actitud que favorece la solución de problemas ambientales en los ámbitos local, nacional e internacional. • Reconoce y comprende las implicaciones biológicas, económicas, políticas y sociales del daño ambiental en un contexto global interdependiente. • Contribuye al alcance de un equilibrio entre los intereses de corto y largo plazo con relación al ambiente.

Tabla 1.5: Competencias genéricas del SNB que integran el MCC

1.2.2.3 Competencias disciplinares básicas

Las competencias disciplinares básicas, expresan conocimientos, habilidades y actitudes que se consideran los mínimos necesarios de cada campo disciplinar, que todos los estudiantes deben adquirir, independientemente del programa académico que cursen y la trayectoria académica o laboral que elijan al terminar sus estudios de bachillerato para que se desarrollen de manera eficaz en diferentes contextos y situaciones a lo largo de la vida.

Estas competencias, están organizadas en cuatro campos disciplinares amplios:

a) Matemáticas (matemáticas);
b) Ciencias experimentales (Física, química, biología y ecología);
c) Ciencias sociales (CTS, economía y administración);
d) Comunicación (Lectura y expresión oral y escrita, literatura, lengua extranjera e informática).

Algunas de estas competencias, son relevantes en más de uno de los campos disciplinares. Esta condición, les permite a los alumnos articular los contenidos que se estudian en la escuela en los diferentes campos disciplinares y dotar de sentido y significado la educación que están recibiendo. Además, trabajar estas articulaciones favorece el desarrollo del pensamiento complejo mediante el abordaje de objetos y problemas de interés.

En la tabla 1.6, presentamos las ocho competencias disciplinares en matemáticas con las cuales se pretende formar a los estudiantes en la capacidad de interpretar matemáticamente el entorno que los rodea.

COMPETENCIAS DISCIPLINARES BÁSICAS
CAMPO DISCIPLINAR MATEMÁTICAS
1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.
3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea.
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Tabla 1.6: Competencias disciplinares del campo Matemáticas

Finalmente, consideramos que las reformas en la Secundaria 2006 y la reforma en la educación media superior 2008, llegan en un momento crucial en la historia de México, donde la población estudiantil en estos niveles se encuentra en su máximo histórico.

Además, Consideramos que las propósitos de estas reformas, de formar jóvenes que sean capaces de articular conocimientos, habilidades, actitudes y valores, es decir que desarrollen competencias, a través de las diferentes asignaturas que cursarán a largo de estos dos niveles educativos, permitirá que los egresados logren desplegar su potencial, tanto para su desempeño personal y social, así como también enfrentar con éxito el siguiente nivel educativo.

1.3 Álgebra escolar y pensamiento algebraico

Dado que el concepto potencia, está ubicado en la asignatura Álgebra, consideramos pertinente intentar definir esta última. Sin embargo, no podemos hacerlo fácilmente pero, un acercamiento sería considerarla como un diamante, cuyas caras la conforman cada una de las concepciones que se tienen del Álgebra (Álgebra como aritmética generalizada, como lenguaje y el Álgebra como una herramienta para las funciones y modelos matemáticos).

Por otro lado, el Álgebra que se estudia en la escuela pudiéramos caracterizarla, por la forma en que los contenidos algebraicos puede abordarse desde varias perspectivas, entre las que destacan las siguientes: las reglas para transformar y resolver ecuaciones; la solución de problemas específicos o clases de problemas; la generalización de las leyes de los números; los conceptos de variable y función y también como el estudio de las estructuras algebraicas. (Bednardz, Kieran, & Lee, 1996)

Además, en la comunidad internacional, la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra han sido objeto de una gran cantidad de investigaciones, y se han propuesto diferentes acercamientos que pretenden hacer que este aprendizaje sea significativo. Y, para lograrlo, es necesario desarrollar el pensamiento algebraico en los estudiantes.

El pensamiento algebraico según Kriegler, son habilidades de la mente que se desarrollan cuando los estudiantes dominan las ideas fundamentales del Álgebra que representan el dominio de su contenido. Su organización, se compone de dos vertientes que se consideran imprescindibles para que los estudiantes desarrollen una nueva forma de pensamiento que les ayude a enfrentar con éxito los retos educativos, personales y sociales que se les presenten a lo largo de su vida. (Kriegler, 2007)

En la primera vertiente, se incluye el desarrollo de herramientas del pensamiento matemático en las que se incluyen habilidades: de resolución de problemas, de representación y las habilidades de razonamiento cuantitativo. En la segunda, se engloban las ideas fundamentales algebraicas que representan el dominio de contenido en el que se desarrollan las herramientas del pensamiento matemático, entre las que destacan: el Álgebra como aritmética generalizada, el Álgebra como lenguaje y el Álgebra como una herramienta para las funciones y modelos matemáticos.

Capítulo 2

Aspectos metodológicos y objetivos del trabajo de desarrollo docente

En este capítulo, hacemos una descripción de las diferentes fases a través de las cuales transitamos para realizar el diseño de la secuencia didáctica. Las fases son: Revisión bibliográfica, diseño de la secuencia didáctica, análisis de la secuencia didáctica, la puesta en escena de la secuencia didáctica y finalmente incluimos los propósitos de este trabajo de desarrollo docente.

2.1 Aspectos metodológicos

Fase I: Revisión bibliográfica

En esta fase, se revisaron los antecedentes en torno a la problemática en la enseñanza y el aprendizaje del concepto potencia. Además, se analizaron las reformas vigentes en secundaria y bachillerato, por la presencia de este objeto matemático en ambos niveles educativos, con el propósito de tener los referentes curriculares. Por último, analizamos investigaciones relacionadas con las teorías generadas en el seno de la Matemática Educativa, cuyos objetivos fueron: consultar investigaciones alrededor de la problemática del álgebra y seleccionar los elementos teóricos que nos permitieran llevar a cabo y fundamentar el diseño de la secuencia didáctica.

Fase 2: Diseño de la secuencia didáctica

En esta etapa, se realizó el análisis del contenido matemático, el análisis cognitivo y se identificó la fenomenología para enmarcar las tareas que componen la secuencia didáctica. Además, se diseñaron ocho tareas que toman como punto de partida la resolución de problemas relacionados con los fenómenos a través de los cuales pretendemos darle sentido y significado al concepto potencia y tres tareas en contextos matemáticos para la institucionalización del conocimiento puesto en juego. Finalmente, se diseño un instrumento de diagnóstico o cuestionario con el propósito de identificar el estado cognitivo de los estudiantes en torno al concepto potencia.

Fase 3: Análisis de la secuencia didáctica

En esta fase, se analizó la secuencia didáctica, con el propósito de identificar las capacidades que los estudiantes pueden poner en juego cuando trabajen las tareas, las competencias matemáticas a las que dichas capacidades pueden contribuir, establecer las posibles trayectorias de aprendizaje que los estudiantes pueden recorrer y con la información obtenida, evaluar la pertinencia de la secuencia didáctica. Finalmente, se determinaron la gestión de la clase y la estrategia didáctica.

Fase 3: Puesta en escena de la secuencia didáctica

En esta fase, se puso en escena la secuencia didáctica con cuatro estudiantes, de un grupo de primer semestre de un bachillerato tecnológico del subsistema CBTIS. Los propósitos del pilotaje fueron: detectar si la redacción, el lenguaje utilizado en el enunciado del problema y las preguntas planteadas para las tareas eran claras y comprensibles para los estudiantes, observar si los problemas de las tareas propuestas inducen a los estudiantes a la elaboración de tablas, diagramas o esquemas que coadyuven a la resolución del problema, detectar si los estudiantes comprenden las tareas y las preguntas y finalmente, detectar cualquier tipo de error no detectado previamente, en la redacción del trabajo, planteamiento de las preguntas propuestas, e incluso ortografía de las mismas.

2.2 Propósitos del trabajo de desarrollo docente

Este trabajo de desarrollo docente tiene como propósito general el diseño de una secuencia didáctica para promover el aprendizaje del objeto matemático potencia con base en el Análisis Didáctico. (Gómez, 2002)

Objetivos específicos

1. Realizar una secuenciación de diferentes tipos de tareas que se complementen entre sí, pero que impliquen trayectorias de aprendizaje distintas; considerando los obstáculos, errores y dificultades analizados en reportes de investigación.
2. Construir el significado del objeto matemático potencia visto como una herramienta para la resolución de problemas, mediante la utilización de contextos apropiados.

3. Promover capacidades que contribuyan al desarrollo de competencias disciplinares en matemáticas en el marco de la Reforma Integral de la Educación Media Superior 2008.
4. Coadyuvar al desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes.

Capítulo 3

Elementos teóricos

En este capítulo, se describen los elementos del análisis didáctico (Gómez, 2002), el cual seguimos como metodología para el diseño de la secuencia didáctica. Los elementos que utilizamos son: planificación de clase, currículo y significado y el análisis didáctico. En este último, consideramos los cuatro análisis que lo sustentan: el análisis de contenido, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis de actuación.

3.1. Planificación de clase, currículo y significado

Para que los profesores de matemáticas podamos realizar nuestro trabajo diario sistemática y reflexivamente, basándonos en un conocimiento profesional, necesitamos conocer y utilizar principios, procedimientos, herramientas y técnicas que fundamentados en la didáctica de la matemática, nos permitan diseñar, evaluar y comparar las tareas y actividades de enseñanza y aprendizaje que pueden conformar la planificación de una hora de clase o una secuencia didáctica.

El análisis didáctico es una conceptualización del nivel local de la planificación de un tema matemático específico. En este nivel, el profesor debe considerar la complejidad del contenido matemático y contemplar tanto los diferentes significados de las matemáticas como la diversidad en su enseñanza. De hecho, la negociación y construcción de estos múltiples significados por parte de los alumnos, debe ser uno de los propósitos centrales de la interacción en el aula cuando el profesor propone las actividades didácticas. Por lo tanto, la calidad de su aprendizaje dependerá de la forma en que los estudiantes puedan utilizar y expresar los conceptos, a la capacidad para hacer conexiones entre diversas estructuras y utilizar diferentes procedimientos, a la gran variedad de problemas que puedan interpretar, abordar y resolver para un determinado objeto matemático(Gómez, 2002).

En el análisis didáctico, los sentidos en los que se usa un concepto matemático implican, los modos en los que se establecen relaciones con otros términos conceptuales matemáticos —*estructura matemática de la que el concepto forma parte y la estructura matemática que éste* *configura*—, las diferentes formas en las que el término conceptual y estas relaciones con otros conceptos se pueden representar –*sistemas de representación*— y los contextos, situaciones o problemas que sustentan o dan sentido al concepto –*fenomenología*—.

En esta propuesta, el significado de un concepto matemático se organiza con base en tres dimensiones denominadas: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología (Ver Figura 3.1).

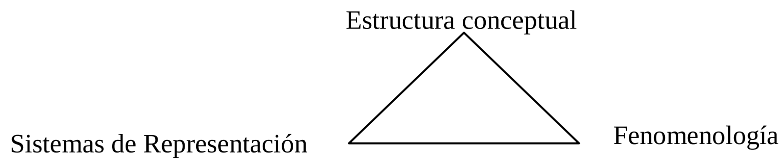


Figura 3.1: Las tres dimensiones del significado de un concepto en la matemática escolar.

Estas tres dimensiones del significado de un concepto en la matemática escolar ponen de manifiesto parte de la problemática en la planificación de clase y organizan los múltiples significados de un concepto en las matemáticas escolares.

3.2 El Análisis Didáctico

Es un procedimiento que permite organizar la enseñanza de las matemáticas y la identificación de las capacidades del profesor. En el contexto concreto de la planificación de una hora de clase o del diseño de una secuencia didáctica, el profesor puede organizar la enseñanza basándose en cuatro análisis que sustentan el Análisis didáctico (Gómez, 2002).

3.2.1 Análisis de contenido

En este análisis, el profesor identifica y organiza los múltiples significados de un concepto, tomando como referencia las tres dimensiones de un concepto en la matemática escolar y para lograrlo, el profesor debe ser capaz de:

a) Recabar la información necesaria que le permita identificar los significados del concepto;
b) Organizar esta información de tal forma que sea útil para la planificación;
c) seleccionar, a partir de esta información, aquellos significados que él considera relevantes para la instrucción, al tener en cuenta las condiciones de los contextos sociales, educativos e institucionales; y

d) Seleccionar los significados relevantes para la instrucción al tener en cuenta las condiciones del contexto del aula (que surgen de la información que se obtiene del análisis cognitivo).

3.2.2 Análisis cognitivo

Para realizar el segundo análisis, el profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los estudiantes pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje y a partir de la información que surge del análisis de contenido, el profesor debe ser capaz de establecer:

a) Las competencias que se quieren desarrollar,
b) Los focos de interés que se han de tratar,
c) Las capacidades que los estudiantes tienen antes de la instrucción,
d) Las capacidades que se espera que los estudiantes desarrollen con motivo de la instrucción (que contribuyen a las competencias previamente identificadas y que delimitan los significados a tratar),
e) Las tareas que conforman la instrucción (cuyo establecimiento involucra las capacidades que se enumeran en el análisis de instrucción),
f) Las dificultades que los estudiantes pueden encontrar al abordar esas tareas, y
g) Las hipótesis sobre las trayectorias por las que se puede desarrollar el aprendizaje.

3.2.3 Análisis de instrucción

En este análisis, el profesor diseña, analiza y selecciona las tareas que constituirán la secuencia didáctica objeto de la instrucción y para hacerlo, el profesor ha de ser capaz de analizar una tarea con el propósito de:

a) Identificar las capacidades que se pueden poner en juego cuando los estudiantes la aborden,
b) Identificar las competencias a las que esas capacidades, con la tarea en cuestión, pueden contribuir,

c) Establecer los posibles caminos de aprendizaje que los estudiantes pueden recorrer cuando aborden la tarea, y
d) Evaluar la pertinencia de la tarea a partir de esta información.

3.2.4 Análisis de actuación

En este análisis, el profesor determina las capacidades que los estudiantes han desarrollado y las dificultades manifestadas hasta ese momento y debe ser capaz de:

a) Comparar las previsiones que se hicieron en la planificación con lo que sucedió cuando esa planificación fue piloteada.
b) Establecer los logros y deficiencias de la planificación; en la puesta en escena de la secuencia didáctica.
c) Caracterizar el aprendizaje de los estudiantes con motivo de su actuación, durante la puesta en escena de la secuencia didáctica.
d) Producir información relevante para una nueva planificación.

El análisis didáctico es un procedimiento cíclico que incluye los cuatro análisis anteriores, además, atiende a los condicionantes del contexto e identifica las actividades que idealmente un profesor debería realizar para organizar la enseñanza de un contenido matemático concreto.
La descripción de un ciclo del análisis didáctico sigue la secuencia propuesta en la figura 3.2.

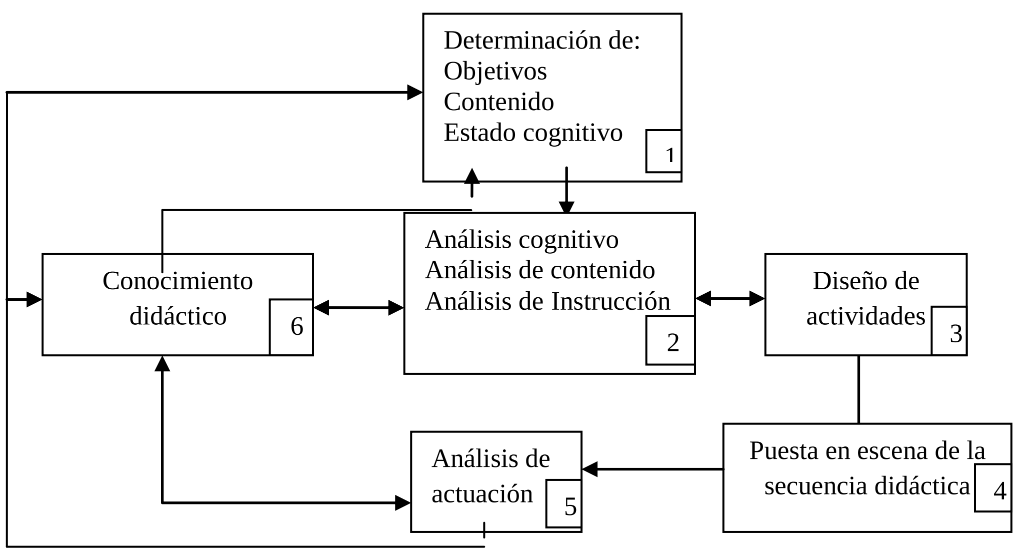


Figura 3.2: Diseño de tareas, análisis didáctico y conocimiento didáctico

El ciclo del análisis didáctico se inicia con la determinación del contenido a tratar y de los objetivos de aprendizaje que se pretenden lograr, a partir de los conocimientos previos que el profesor considera tienen los estudiantes —*estado cognitivo*— con los resultados del análisis de actuación del ciclo anterior (cuadro 1). La información que surge del análisis de contenido alimenta el análisis cognitivo, al identificar y organizar los múltiples significados del concepto objeto de la instrucción. A su vez, la realización del análisis cognitivo puede dar lugar a la revisión del análisis de contenido.

Para la realización del análisis de instrucción, deberán tomarse en cuenta los resultados de los análisis de contenido y cognitivo, pero también, puede generar la necesidad de corregir las versiones previas de estos análisis (cuadro 2).

En el análisis cognitivo, el profesor selecciona unos significados de referencia y, con base en estos significados y en los objetivos de aprendizaje:

a) Identifica las capacidades que pretende desarrollar en los estudiantes.
b) Formula conjeturas sobre los posibles caminos por los que se puede desarrollar su aprendizaje cuando ellos aborden las tareas que conforman la instrucción.
c) Utiliza esta información para diseñar, evaluar y seleccionar las tareas.

La selección de tareas que compondrán la secuencia didáctica, debe ser coherente con los resultados de los tres análisis y la evaluación de esas tareas, tomando como referencia los análisis puede llevar al profesor a realizar un nuevo ciclo de análisis, antes de seleccionar definitivamente las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje (relación entre cuadros 2 y 3).

El profesor pone en escena la secuencia didáctica (cuadro 4) y, al hacerlo, analiza las actuaciones de los estudiantes, para obtener información que sirve como punto de inicio de un nuevo ciclo (cuadro 5). El conocimiento didáctico (cuadro 6) es el conocimiento que el profesor pone en juego durante este proceso.

Cada uno de los análisis propuestos, se articula alrededor de unas nociones (Los organizadores del currículo). Por ejemplo, el análisis de contenido incluye las nociones de estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología. Estas nociones, corresponden a las tres dimensiones del significado de un concepto en el contexto de las matemáticas escolares. Por su parte, para cada noción, adoptamos un significado teórico, un significado técnico y un significado práctico.

Para la noción de estructura conceptual, diremos que todo concepto matemático se relaciona con al menos dos estructuras matemáticas: la estructura matemática que el concepto configura, en la cual se incluyen, los elementos que le dan significado. Y, las estructuras matemáticas de las que el concepto forma parte (Gómez, 2002).

En el caso de los sistemas de representación seleccionaremos, como significado teórico, algunos elementos de la teoría sobre los registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento (Duval, 1993). Declaramos que en este trabajo, solamente utilizaremos las diferentes representaciones de un objeto matemático para fines de comunicación por parte de los estudiantes en la matemática escolar. Las representaciones que trabajaremos serán, enunciados en la lengua natural, representaciones numéricas, representaciones analíticas, diagramas, tablas y figuras. Además, diremos en el sentido de Duval (1993) que un tratamiento es una transformación que se efectúa en el interior de una misma representación. Y por su parte, una conversión es una transformación que hace pasar de una representación a otra diferente.

El significado técnico del concepto, abarca los usos que idealmente el profesor hace de ella cuando analiza un concepto matemático. Mientras que el significado práctico, considera las técnicas, razonamientos y procedimientos, que el profesor desarrolla y pone en juego, cuando utiliza la información que surge del análisis del concepto para efectos de diseñar, implementar y evaluar una unidad didáctica (por ejemplo, las técnicas para utilizar la información que surge del análisis de contenido a efectos de identificar las capacidades y errores de los estudiantes).

Para la tercera dimensión, los fenómenos se presentan mediante un contexto o situación con la cual el concepto toma sentido (fenomenología), o también mediante un problema que se aborda y da sentido al concepto (Gómez, 2002).

Capítulo 4

Diseño de la secuencia didáctica

En este capítulo, presentamos como se incorporaron los elementos teóricos del análisis didáctico referido en el capítulo tres, para el diseño de la secuencia didáctica. Los elementos que utilizamos son: el análisis de contenido y el análisis cognitivo. En el primer análisis, se determinó el contenido matemático (estructura matemática) a tratar, las diferentes representaciones del concepto y se identificaron algunos fenómenos en los cuales el objeto matemático potencia, es parte de la estructura matemática que los modela. En el segundo análisis (cognitivo), se identificaron las capacidades previas de los estudiantes, las capacidades que se espera tengan después de la instrucción, las competencias matemáticas a las que las capacidades mencionadas pueden contribuir, los obstáculos, errores o dificultades que pueden presentar, las trayectorias por donde se puede dar el aprendizaje y por último se diseñaron ocho tareas agrupadas en tres bloques que constituyen la secuencia didáctica preliminar.

4.1 Análisis Didáctico

> *"En el contexto concreto de la planificación de una hora de clase o del diseño de una secuencia didáctica, el profesor puede organizar la enseñanza basándose en cuatro análisis que sustentan el Análisis didáctico." (Gómez, 2002)*

1. El análisis de contenido
2. El análisis cognitivo
3. El análisis de instrucción
4. El análisis de actuación

El análisis didáctico es un procedimiento cíclico que incluye los cuatro análisis anteriores, además, atiende a los condicionantes del contexto e identifica las actividades que idealmente un profesor debería realizar, para organizar la enseñanza de un contenido matemático concreto. En este capítulo, solo realizaremos los dos primeros análisis.

4.1.1 Análisis de contenido

El ciclo del análisis didáctico inicia con la determinación de los objetivos curriculares que se pretenden lograr cuando los alumnos se enfrenten al contenido matemático de estudio. En particular, en este trabajo, centraremos nuestra propuesta en el objeto matemático potencia y tomaremos como referencia los objetivos y el contenido matemático propuestos en el programa de matemáticas de la Dirección General de Educación Tecnológica Industrial (DGETI), dependiente de la Subsecretaría de Educación Media Superior –*SEMS*—. (SEMS, 2009)

4.1.1.1 Determinación de Objetivos

En este apartado y considerando que el estudio de la potencia se ubica en el primer semestre del bachillerato tecnológico dentro del campo disciplinar matemáticas como parte de la asignatura Álgebra, tomaremos como punto de partida, el propósito general del programa de matemáticas, los propósitos formativos por competencias y los propósitos por asignatura (Álgebra) que presenta la Reforma Curricular del Bachillerato Tecnológico (RCBT) 2009 vigente a la fecha, planteamiento específico en el marco de la RIEMS.

a) Propósito general del programa de Matemáticas

El estudiante, a partir de la apropiación de los contenidos fundamentales de las Matemáticas, desarrollará habilidades de pensamiento, comunicación, descubrimiento y transferencia (hacia otros contextos y hacia la misma Matemática) que le permitan resolver problemas y ser partícipe del desarrollo sustentable de su entorno.

b) Propósitos formativos por competencias

Las intenciones educativas de la Matemática se hacen explicitas a través de las competencias disciplinares básicas que los estudiantes irán desarrollando al participar en la construcción de sus saberes. La propuesta metodológica para tal fin la diseña el docente mediante estrategias centradas en el aprendizaje.

c) Propósitos por asignatura (Álgebra)

Desarrollar la capacidad del razonamiento matemático haciendo uso del lenguaje algebraico, a partir de la resolución de problemas de la vida cotidiana, dentro y fuera del contexto matemático, representados en modelos donde se aplican conocimientos y conceptos algebraicos, en un clima de colaboración y respeto.

Para contribuir al logro de los propósitos anteriores, diseñaremos actividades encaminadas a integrar ciertos conocimientos, habilidades, actitudes y valores que a su vez contribuirán al desarrollo de algunas competencias disciplinares en matemáticas y genéricas, que la RIEMS 2008 demanda en los estudiantes de bachillerato.

4.1.1.2 Contenido matemático

El objeto matemático potencia, es parte del contenido de la asignatura Álgebra que se estudia en el primer semestre del bachillerato tecnológico del subsistema CBTIS. Este objeto matemático, se incluye en la primera unidad *—lenguaje algebraico—* bajo el nombre de las leyes de los exponentes y radicación en el libro de texto recomendado por la DGETI para el estudio del Álgebra (Acosta, 2006). El objetivo general en esta unidad, es que los estudiantes aprendan a utilizar el lenguaje algebraico para plantear ecuaciones que les ayuden a resolver diferentes tipos de problemas. Este objetivo, se pretende lograr aplicando ciertas leyes de la aritmética para la resolución de los mismos. Y, extender su dominio de validez al Álgebra *–Álgebra como aritmética generalizada—*. Además, a través del estudio de esta unidad, se intenta que los alumnos puedan resolver problemas de diversos tipos; incorporen una forma de razonamiento abstracto *–el cual es la diferencia entre la aritmética y el Álgebra—*; no tomen decisiones a la ligera y les ayude a resolver problemas en otras materias.

a) Estructura conceptual del programa de matemáticas (DGETI)

El mapa de contenidos conceptuales presenta en un primer nivel el nombre de la asignatura (álgebra, geometría, trigonometría, etc.); en un segundo nivel, aparecen los conceptos fundamentales, por ejemplo en Álgebra: “Lenguaje algebraico” y “Ecuaciones”. En un tercer nivel aparecen los contenidos subsidiarios (expresión algebraica, operaciones fundamentales, ecuaciones lineales y ecuaciones cuadráticas). Por último viene en el cuarto nivel aparecen los conceptos, leyes, teoremas, algoritmos, relaciones, que dan significado a los conceptos que los anteceden.

Cabe aclarar, que la secuenciación presentada puede ser modificada por el profesor, de acuerdo con las actividades que proponga para abordar los conceptos fundamentales y subsidiarios de las diferentes ramas.

En la figura 4.1 presentamos el mapa general de contenidos conceptuales para la asignatura Álgebra. Los rectángulos sombreados del mapa, son para ilustrar la estructuración del tema donde propondremos nuestra secuencia didáctica.

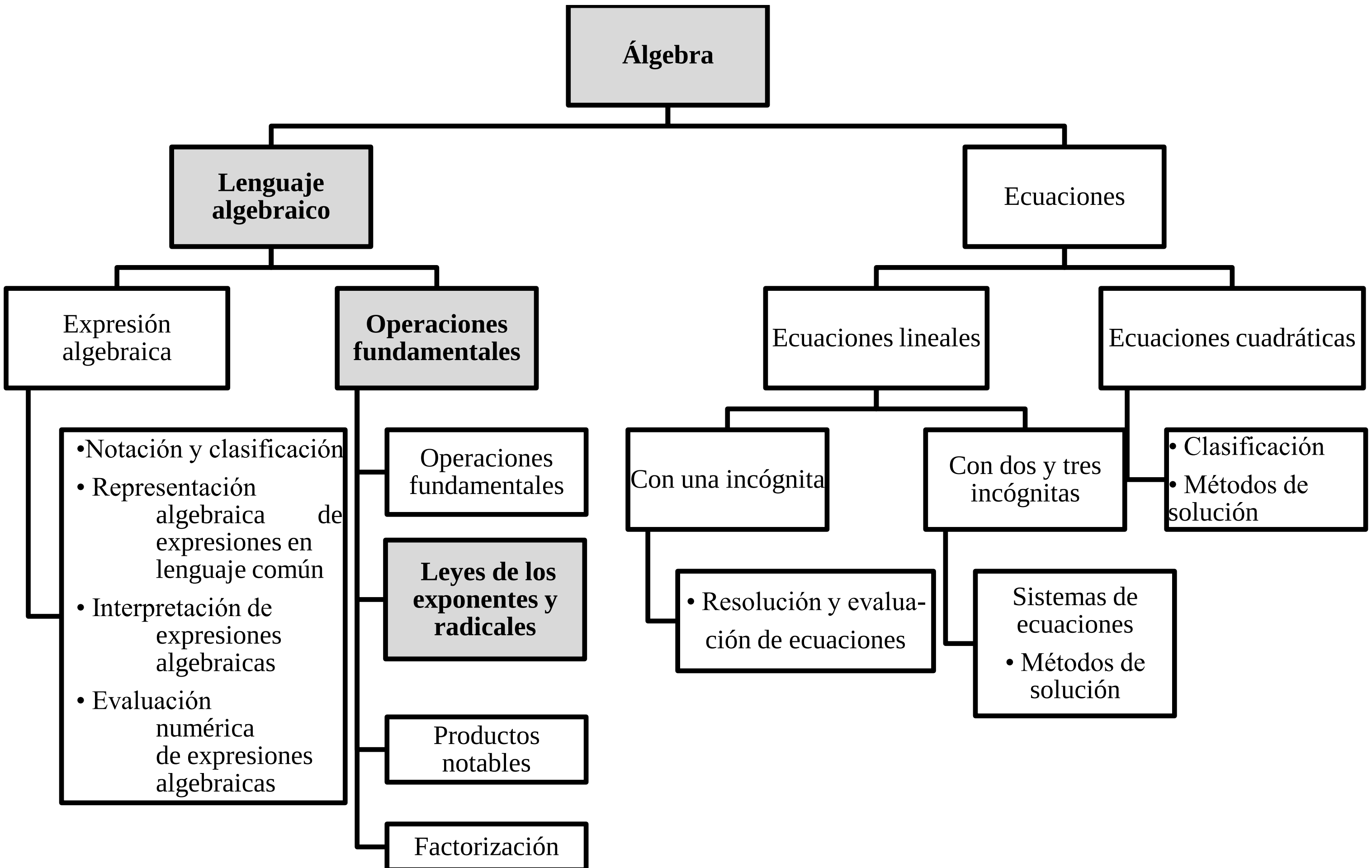


Figura 4.1: Mapa conceptual general de la asignatura Álgebra.

4.1.1.3 Sentido y significado del concepto potencia

> *"Los sentidos en los que se usa un término conceptual matemático implican, los modos en los que se establecen relaciones con otros términos conceptuales matemáticos, las diferentes formas en las que el término conceptual y estas relaciones se pueden representar y los fenómenos que sustentan al concepto".* (Gómez, 2002)

En esta propuesta, abordaremos sistemáticamente el significado de la potencia atendiendo a tres dimensiones denominadas estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología.

1. Estructura conceptual

En la Figura 4.2, presentamos un mapa conceptual en el que se identifican y relacionan las principales categorías mediante las cuales podemos organizar los múltiples significados del concepto potencia. En ella se aprecia la identificación de cuatro sistemas de representación y de su fenomenología. Es posible desarrollar detalladamente cada una de sus representaciones, estableciendo sus elementos (conceptos) y las relaciones entre ellos (procedimientos).

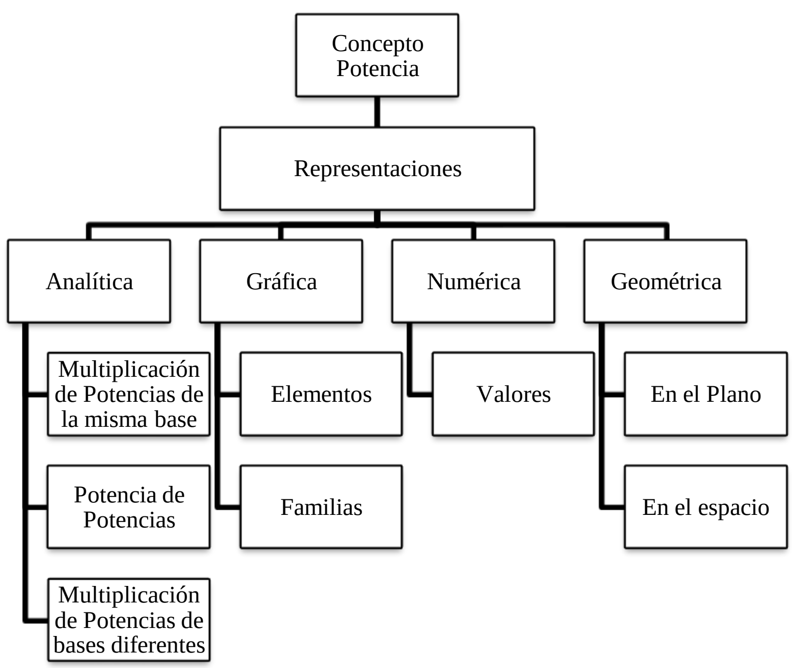


Figura 4.2: Mapa conceptual general del objeto matemático potencia

Consideramos importante aclarar que en el mapa conceptual anterior, marcamos como representaciones gráficas aquellas que podemos representar en relación funcional. Mientras que la representación geométrica la utilizamos para representar las figuras geométricas.

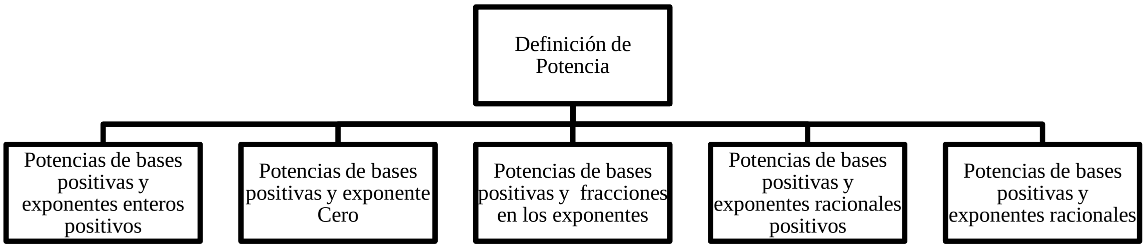
1.1 Estructuras matemáticas involucradas.

Todo concepto matemático se relaciona con al menos dos estructuras matemáticas:

a) la estructura matemática que el concepto matemático configura, en la cual se incluyen, los elementos que le dan significado. En particular, al objeto matemático potencia le dan significado las relaciones entre coeficiente, base y exponente así como también sus leyes o propiedades.

Con el propósito de mostrar las relaciones anteriores, en la figuras 4.3 y 4.4, presentamos dos propuestas para la enseñanza y el aprendizaje del objeto matemático potencia en el bachillerato. En la primera, se retoma el planteamiento dado por Wu (2005) y en la segunda el libro de texto recomendado por el subsistema DGETI (Acosta, 2006).

I. La estructura que desde el punto de vista de la disciplina –*matemáticas*— se debe seguir cuando se estudia este concepto (Wu, 2005).

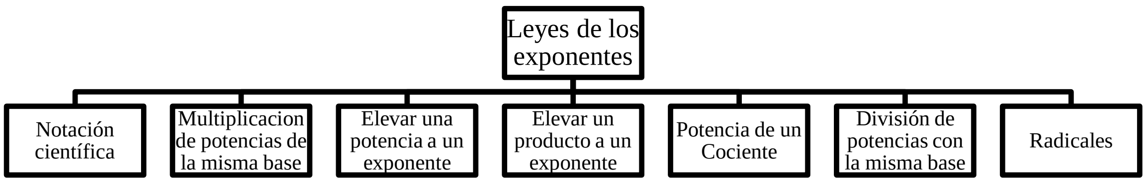


$\alpha^n = \alpha\alpha\ldots\alpha \qquad (n \quad veces)$				
$\alpha^m\alpha^n = \alpha^{m+n}$ $(\alpha^m)^n = \alpha^{mn}$ $(\alpha\beta)^m = \alpha^m\beta^m$	$\alpha^0 = 1$	$\alpha^{\frac{m}{n}} = (\alpha^{\frac{1}{n}})^m$	$\alpha^{-A} = \frac{1}{\alpha^A}$	$\alpha^r\alpha^s = \alpha^{r+s}$ $(\alpha^r)^s = \alpha^{rs}$ $(\alpha\beta)^r = \alpha^r\beta^r$

Figura 4.3: Estructura conceptual introducción al Álgebra escolar

En este planteamiento, se parte de la definición de potencias con base positiva y exponentes naturales. Ante esta definición, se llevan a cabo una serie de tratamientos para dar significado a las leyes de los exponentes que presentamos en la primera columna de la figura anterior. Después, se pretende dar significado al exponente cero a través de tratamientos en representaciones analíticas aplicando las leyes de los exponentes (naturales). Para el exponente fraccional se sigue la estructura mostrada anteriormente y solamente se trabajan los exponentes racionales positivos. Una vez que se trabaja con los exponentes racionales positivos, se hace la generalización a exponentes racionales negativos con tratamientos en la representación analítica. Finalmente se hace la generalización de las leyes de los exponentes de bases positivas y exponentes naturales a bases positivas y cualquier exponente racional (Fig. 4.3, columna 5).

II. La estructura propuesta en el libro de texto recomendado por el subsistema DGETI para la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra. (Acosta, 2006).



$a^n = \underbrace{a \times a \times a \cdots \times a}_{n\ veces} = \underbrace{aaa \cdots a}_{n\ veces}$						
$mx10^a$	$m^a m^b = m^{a+b}$	$(m^a)^b = m^{ab}$	$(mn)^b = m^b n^b$	$\left(\frac{m}{n}\right)^a = \frac{m^a}{n^a}$	$\frac{m^a}{m^b} = m^{a-b}$	$\sqrt[n]{a}$

Figura 4.4: Estructura conceptual libro de texto

Este planteamiento, toma como punto de partida la definición de potencia y luego se aborda brevemente la notación científica con tres ejemplos en contextos extramatemáticos. Después, de igual manera se abordan las leyes restantes con ejemplos en la representación analítica seguidos de una serie de tratamientos en dicha representación. Luego, se ejemplifica en representaciones numéricas en la misma dirección. Incluimos la radicación como parte de esta estructura ya que es una potenciación. Aclaramos que en este libro de texto, no se considera a los radicales como potencias.

De las estructuras presentadas en los planteamientos anteriores, podemos identificar los elementos que interactúan o se relacionan para dar forma y significado al objeto matemático potencia. Es decir, son los elementos que permiten ver los diferentes componentes del objeto y es a través de ellos, que podemos identificar los diferentes casos particulares que se pueden presentar. Por otra parte sus características es posible identificarlas o expresarlas mediante las leyes o propiedades correspondientes.

b) Las estructuras matemáticas de las que el concepto forma parte. Por ejemplo, el objeto matemático potencia configura una estructura matemática en la que se establecen relaciones estructurales con otros conceptos (ver figura 4.5) como: función exponencial, ecuaciones polinomiales, sumas geométricas, series geométricas, etc.

Función exponencial	Ecuaciones polinomiales	Sumas geométricas	Series geométricas
$f(x)=a^x$	$y=a_0$ $y=a_0+a_1x$ $y=a_0+a_1x+a_2x^2$ $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$	$\sum_{k=0}^{n} a^k = a^0+a^1+a^2+\ldots+a^n$	$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = a^0+a^1+a^2+\ldots+a^n$
Figura 4.5 Estructuras matemáticas			

Con las anteriores representaciones *–lenguaje natural y representaciones analíticas*— de las estructuras matemáticas, pretendemos mostrar la complejidad del objeto matemático potencia, ya que los alumnos deberán interpretar el significado del exponente en cada una de ellas. Por ejemplo, para la función exponencial, los estudiantes deberán relacionar la forma en que cambia la variable dependiente *f(x)*, cuando se varía el valor de la variable independiente *x*.

En las ecuaciones polinomiales, los estudiantes requerirán interpretar el teorema fundamental del Álgebra para encontrar las raíces del polinomio. Mientras que en las sumas geométricas necesitarán sumar cada uno de los términos elevados al exponente indicado para llegar a la resolución del problema. Y finalmente, para las series geométricas, requerirán de calcular la serie en el límite cuando el valor de *n* tiende a infinito.

2. Sistemas de representación

La exploración de los significados de un concepto, requiere de los sistemas de representación, ya que a través de ellos es posible identificar las formas como el concepto se presenta. (Duval, 1993)

Al tener en cuenta los sistemas de representación, se pueden destacar varias relaciones (ver Figura 4.6):

a) La relación entre dos representaciones que designan el mismo objeto o concepto, dentro de un mismo sistema de representación (tratamientos). Por ejemplo; como resultado de multiplicar dos potencias con la misma base).
b) La relación entre dos representaciones que designan el mismo objeto o concepto, pertenecientes a sistemas de representación diferentes (conversión). Por ejemplo, la

relación entre los parámetros de una representación analítica y los elementos de una tabla de valores.

c) La relación entre dos representaciones que designan dos objetos o conceptos diferentes dentro de un mismo sistema de representación.

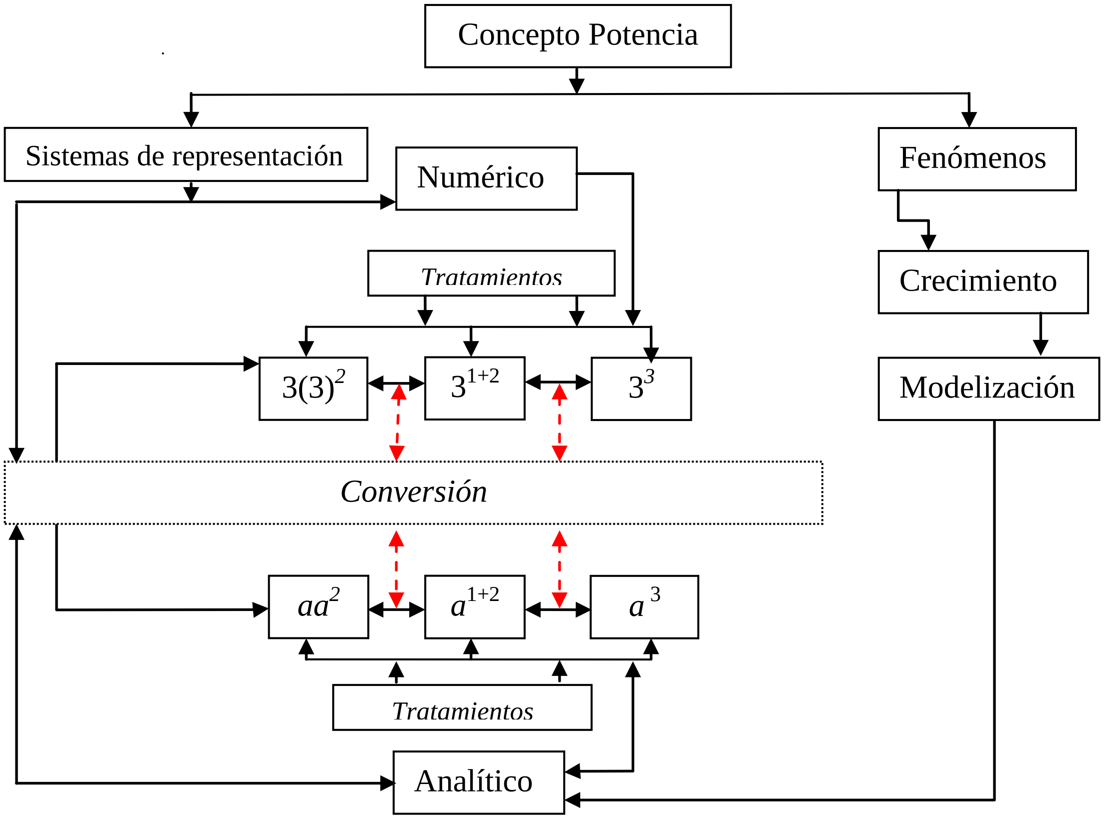


Figura 4.6: Conexiones entre elementos de un mapa conceptual parcial

Por consiguiente, cuando exploramos los significados de un concepto en las matemáticas escolares, debemos tener en cuenta tres tipos de elementos y dos grupos de relaciones entre esos elementos.

I. Los objetos, como casos particulares de un concepto y que conforman la extensión del concepto.
II. Los conceptos, como predicados que son saturados por los objetos y que conforman estructuras matemáticas.
III. Las estructuras matemáticas, que están conformadas por conceptos.

Por otro lado, las relaciones descritas en los puntos II y III se pueden agrupar en dos categorías denominadas como relaciones verticales y relaciones horizontales.

Las relaciones verticales se refieren a las relaciones entre los tres tipos de elementos: Objeto ↔ Concepto ↔ Estructura matemática.

Mientras que las relaciones horizontales, se refieren a las relaciones entre los signos en sus diferentes sistemas de representación (relaciones entre representaciones)

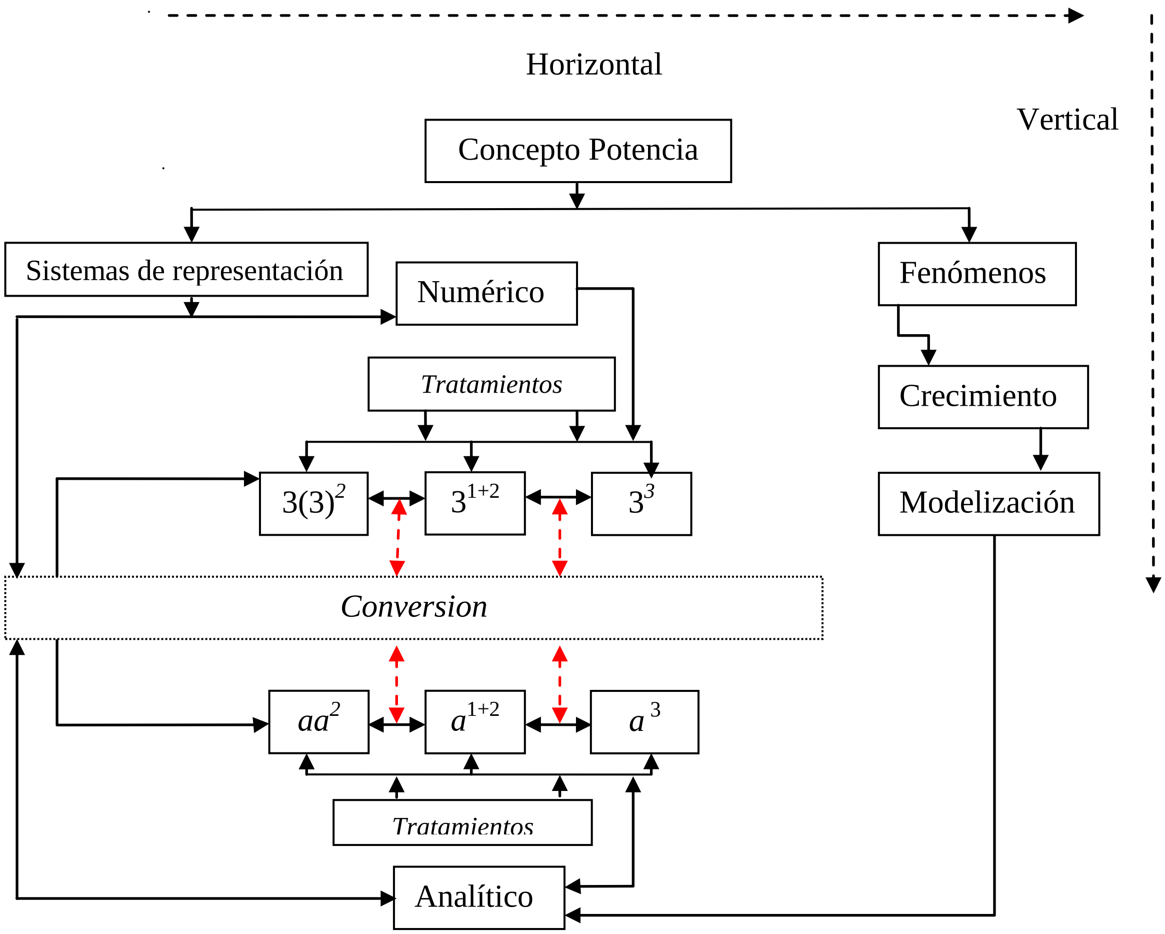


Figura 4.7: Conexiones y procedimientos

Abordar los significados de un concepto desde la perspectiva de su estructura conceptual y sus representaciones, implica identificar y organizar los elementos (objetos, conceptos y estructuras matemáticas) y las relaciones (horizontales y verticales) correspondientes a ese concepto.

3. Fenomenología

La fenomenología, es la tercera de las dimensiones para organizar los significados de un concepto en las matemáticas escolares. En esta dimensión, los fenómenos se presentan mediante un contexto o situación con la cual el concepto toma sentido, o a través de un problema que se aborda y le da sentido.

El objeto matemático potencia, incluye varios modelos de fenómenos naturales, sociales y matemáticos que permiten describir situaciones y plantear interrogantes, que pueden dar lugar a problemas, cuya solución se efectúa mediante un modelo. Por ejemplo, predecir y describir la forma en que aumenta un cultivo de bacterias en la segunda fase de crecimiento *($M_t = Mo.e^{rt}$)*, datación de la antigüedad de fósiles *($M = Mo.\ 0.886^t$);* cálculo de tasas bancarias de interés $V_f=P_v(1+i)^n$, determinar la concentración de soluciones $pH = \log\left(\frac{1}{H^+}\right)$, calcular la intensidad sonora, $\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{1}{10^{-12}}\right)$ etc.

En general, el proceso de identificar modelos de estas situaciones utiliza sólo algunos de los elementos y propiedades de la estructura matemática que conocemos como potencia.

A continuación, citamos una serie de fenómenos que presentan un crecimiento exponencial:

1. El número de células de un feto mientras se desarrolla en el útero materno.
2. En una economía sin trastornos, los precios crecen exponencialmente, donde la tasa coincide con el índice de inflación.
3. El número de contraseñas posibles con *n* dígitos crece exponencialmente con *n*.
4. El número de operaciones o cálculos necesarios para resolver un problema NP-completo crece exponencialmente con el tamaño de la entrada, representable o codificable mediante un número entero.
5. El número de bacterias que se reproducen por fisión binaria.
6. El número de individuos en poblaciones de ecosistemas cuando carecen de depredador.

En otras palabras, la identificación y caracterización de un modelo de una situación implica la puesta en juego de una subestructura de la estructura matemática en cuestión. Por otro lado, los ejemplos presentados muestran que una misma subestructura se puede relacionar con diversos fenómenos. Por ejemplo, la subestructura que permite describir la división de un segmento en la construcción de fractales, es un modelo de todos aquellos los fenómenos que se refieren a la división de segmentos o figuras.

La descripción de los fenómenos la podemos hacer en los tres niveles siguientes:

1. Identificar un fenómeno específico: la construcción del conjunto de Cantor, cuyo modelo es $\boldsymbol{l}_{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{l}_0 \cdot \left(\frac{1}{3^{\boldsymbol{n}}}\right)$

2. Agrupar fenómenos específicos en un cierto tipo de fenómeno: los fenómenos de división potencial, con modelo $\boldsymbol{l}_{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{l}_0 \cdot \left(\frac{1}{\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}}\right)$

3. Agrupar tipos de fenómenos en categorías: los fenómenos que involucran la división de segmentos, figuras, etc. como la construcción de la curva de koch, el triangulo de Sierpinski, con un modelo como $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \cdot \left(\frac{1}{\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}}\right)$.

Podemos, por lo tanto, establecer una relación entre subestructuras y fenómenos en la que a cada fenómeno le asignamos la subestructura que le sirve de modelo.

4.1.2 Análisis Cognitivo

"En el análisis cognitivo, el profesor debe describir las hipótesis acerca de cómo los estudiantes pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas de las actividades de enseñanza y aprendizaje". (Gómez, 2002)

Según Gómez, Lupiáñez, (2007), la descripción del progreso de los estudiantes debe fundamentarse en la identificación, descripción y relación de los siguientes cinco elementos:

a) Las capacidades que los estudiantes tienen antes de la instrucción.
b) Las capacidades que se espera que los estudiantes desarrollen con la instrucción.
c) Las hipótesis sobre los caminos por los que se puede desarrollar el aprendizaje.
d) Las dificultades que los estudiantes pueden encontrar al abordar las tareas.
e) Las tareas que conforman la instrucción.

En el contexto de las matemáticas escolares, la noción de capacidad se refiere al desempeño de un estudiante con respecto a cierto tipo de tarea (por ejemplo, problemas para realizar tratamientos a una representación analítica del objeto matemático potencia —*la multiplicación de potencias de la misma base* aa^2— en otra —*la forma abreviada de una potencia* a^3).

En este sentido, afirmaremos que un estudiante ha desarrollado una cierta capacidad cuando puede resolver tareas que la requieren. Por lo tanto las capacidades, son específicas a un tema concreto, pueden incluir o involucrar otras capacidades y están vinculadas a tipos de tareas. Por ejemplo, diremos que un estudiante ha desarrollado la capacidad de manejo del significado de los elementos de las representaciones analíticas en la multiplicación de potencias, cuando haya evidencia de que éste puede resolver tareas que implican ese aspecto.

Los primeros dos puntos del procedimiento propuesto requieren que el profesor organice información sobre lo que los estudiantes son capaces de hacer antes de la instrucción y lo que se espera que ellos sean capaces de hacer después de la instrucción.

4.1.2.1 Las capacidades que los estudiantes tienen antes de la instrucción

Para determinar las capacidades previas de los estudiantes, diseñaremos un instrumento de diagnostico (cuestionario). En éste, incluiremos once reactivos que curricularmente los estudiantes han trabajado en torno al objeto matemático potencia (Información obtenida del análisis de la reforma en secundaria 2006.Capítulo 1, apartado 1.2.1.3).

CENTRO DE BACHILLERATO TECNOLÓGICO
Industrial y de Servicios
CUESTIONARIO

MATERIA: Álgebra	SEMESTRE: I
NIVEL: Medio superior	GRUPO_______________
PROFESOR: Jesús Manuel Duarte S.	FECHA: _______________

ALUMNO:____

El objetivo de este cuestionario es saber más sobre tus conocimientos relacionados con este curso. Tus respuestas ME AYUDARÁN a preparar algunas de las siguientes clases, por tal motivo te invito a explicar con el mayor detalle posible tus respuestas y justificaciones al resolver el siguiente cuestionario.

INDICACIONES

Lee con atención cada uno de los reactivos del siguiente cuestionario y escribe las respuestas con pluma. Si consideras que tus respuestas tienen que ver con el desarrollo de un proceso es de suma importancia que lo anexes.

1. ¿Qué significado tiene para ti 2^n?

2. ¿Es posible encontrar un valor de *n* para el cual la expresión no se pueda calcular? ¿Por qué?

3. ¿Qué significado tiene para ti $\left(\frac{3}{8}\right)^n$?

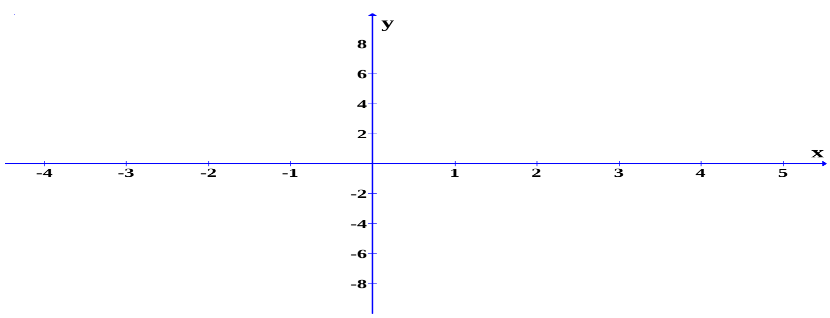
4. ¿Es posible encontrar un valor de *n* para el cual la expresión no se pueda calcular? ¿Por qué?

5. ¿Qué significado tiene para ti $(2)^{-n}$?

6. ¿Es posible encontrar un valor de *n* para el cual la expresión no se pueda calcular? ¿Por qué?

7. Calcula la expresión 2^n para n = 1, 2, 5, 13, 0, -1, -2, -5 y -13

8. Identifica los siguientes puntos en el plano cartesiano. A:(1, 2^1), B:(2, 2^2), C:(3, 2^3), D:(0, 2^0), E:(-1, 2^{-1}), F:(-2, 2^{-2}) y G:(-3, 2^{-3})



9. ¿Conoces algún fenómeno o situación que requiera de la expresión 2^n? Si tu respuesta es afirmativa ¿podrías dar un ejemplo?

10. ¿Alguna vez has realizado operaciones algebraicas o de otro tipo con la expresión 2^n u otra semejante? Si tu respuesta es afirmativa ¿podrías dar un ejemplo?

11. La población de un país aumenta en promedio de 10 personas por mil anual Si actualmente tiene 30 millones de habitantes, ¿Cuántos habitantes tendrá dentro de 30 años?

Gracias por su valiosa participación

4.1.2.2 Las capacidades que se espera que los estudiantes desarrollen con motivo de la instrucción

Lupiáñez, Rico, Gómez y Marín (2005) citado en Gómez, Lupiáñez (2007), han desarrollado un procedimiento para organizar esta información, basado en la noción de competencia. Esta noción permite establecer un vínculo entre la planificación a nivel local y el diseño curricular global.

En este trabajo, para la organización de la información acerca de las capacidades de los estudiantes antes y después de la instrucción, seleccionaremos las ocho competencias disciplinares en matemáticas propuestas en la RIEMS. (SEP, 2008)

1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.
3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea.
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Este procedimiento permite establecer la forma en la que ciertas capacidades contribuyen al logro de las ocho competencias (ver tabla 4.1, capitulo 4, pág. 49) y se lleva a cabo organizando las capacidades en las filas de una tabla e identificando a qué competencias contribuyen en las columnas. Por lo tanto, podemos organizar la información sobre el desarrollo matemático de los estudiantes con respecto a un tema específico (objeto matemático potencia) antes y después de la instrucción.

Para concretar las capacidades que deseamos que los estudiantes desarrollen y las dificultades que pueden tener al abordar las tareas y poder establecer los caminos por los que se puede desarrollar el aprendizaje, debemos identificar, organizar y seleccionar los significados relevantes del concepto potencia del análisis de contenido hecho anteriormente.

Para ilustrar el procedimiento, vamos a suponer que el profesor decide trabajar con la multiplicación de potencias de la misma base, la cual por su experiencia o por información que surge del análisis de contenido, es importante dentro del objeto matemático potencia. Por lo tanto, trataremos de desarrollar las capacidades necesarias para que los estudiantes puedan resolver problemas que involucren el significado de los elementos de las representaciones numéricas de la potencia. Además, consideramos que la mayoría de los alumnos son capaces de resolver algunas tareas relacionadas con el reconocimiento y la caracterización de este objeto matemático. Es decir, pueden identificar los diferentes elementos de las representaciones numéricas y analíticas, evaluar una potencia, producir representaciones numéricas y analíticas de potencias de grados uno, dos y tres, dar ejemplos de potencias con diferentes bases y exponentes, entre otras cosas. Sin embargo, la experiencia del profesor en cursos anteriores y revisiones bibliográficas le ha mostrado que los estudiantes tienen dificultades para establecer la relación entre las diferentes representaciones numéricas y la representación analítica. Por ejemplo, ser capaz de reconocer y de utilizar hechos como que la base a y los exponentes m y n en la expresión $a^{(m+n)}$ identifican la multiplicación de potencias de base a y que sus exponentes –m y n— se suman. (Figura 4.8). En otras palabras, el interés del profesor debe centrarse en lograr que los alumnos sean capaces de resolver problemas que involucran el significado numérico y analítico de la base y el exponente.

Multiplicación de Potencias			Potencias
(2)*(2)(2)	$2^1\,2^2$	$2^{(1+2)}$	2^3
(3)*(3)(3)	$3^1\,3^2$	$3^{(1+2)}$	3^3
(7)*(7)(7)	$7^1\,7^2$	$7^{(1+2)}$	7^3
$\underbrace{11*11\cdots*11}_{m\text{ veces}}*\underbrace{11*11\cdots*11}_{n\text{ veces}}$	$11^m\,11^n$	$11^{(m+n)}$	11^l $\quad l=m+n$
$(a)*(a)(a)$ $\underbrace{a*a\cdots*a}_{m\text{ veces}}*\underbrace{a*a\cdots*a}_{n\text{ veces}}$	a^1a^2 a^ma^n	$a^{(1+2)}$ $a^{(m+n)}$	a^3 a^l

Figura 4.8: Relación entre elementos numéricos y analíticos

El problema del profesor consiste en encontrar formas de contribuir a que los alumnos puedan superar estas dificultades. La potencia es una estructura matemática compleja (ver figura 4.2, pág. 34) y este tema es tan sólo un aspecto de ésa complejidad. Aunque el problema es cognitivo (el desarrollo de unas ciertas capacidades y la superación de algunas dificultades), comprender y abordar ese problema cognitivo requiere que se conozca con suficiente detalle la complejidad y multiplicidad de los significados del concepto potencia. Dicho problema cognitivo tendrá significado, desde la perspectiva del diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje, cuando se haya producido una descripción suficientemente detallada del concepto al que hace referencia.

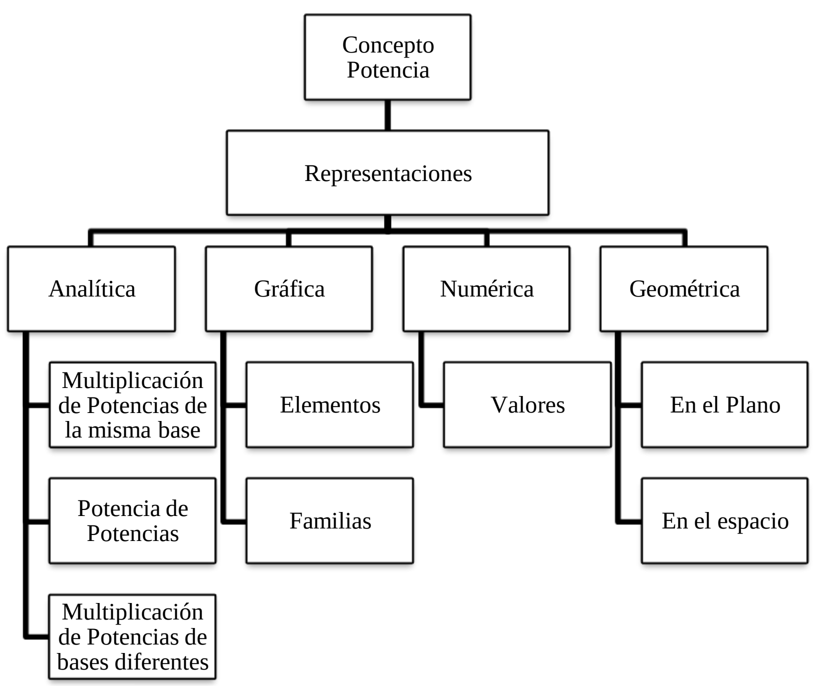


Figura 4.2: Mapa conceptual general del objeto matemático potencia

En la figura 4.3, se aprecian algunas de estas relaciones. Se observan algunos de los procedimientos para transformar una representación numérica en otra y algunas de las posibles relaciones entre fenómenos y subestructuras de la potencia que les pueden servir de modelo. Y también se observa una primera aproximación a la relación entre el sistema de representación numérico y analítico (que se llama, en la Figura 4.6, conversión entre representaciones). Esta relación se establece entre elementos de las diferentes representaciones numéricas (los parámetros) y elementos de la representación gráfica (coeficiente, base y exponente). Aunque no se representa en la figura, hay una gran variedad de conexiones (relaciones) entre estos elementos. Por lo tanto, desde el punto de vista del análisis de contenido, estos ejemplos dan muestra de la complejidad del problema en cuestión.

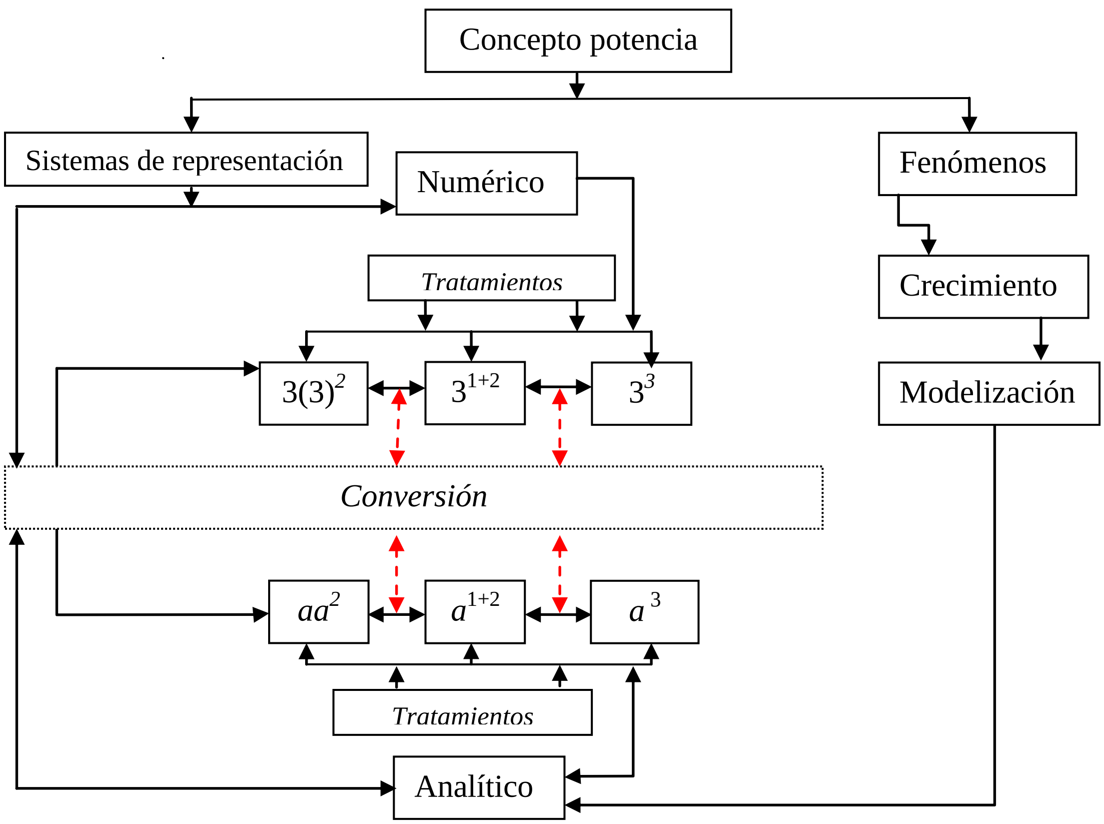


Figura 4.6: Conexiones entre elementos de un mapa conceptual parcial

Siguiendo el procedimiento propuesto por Lupiáñez y colaboradores (2005), citado en Gómez, Lupiáñez (2007), en la tabla 4.1 identificamos algunas de las capacidades que están implicadas en este problema y marcamos marcado aquellas competencias a las que éstas contribuyen.

Enumeramos las capacidades en las filas de la tabla y las organizamos en seis grupos. Las columnas corresponden a las ocho competencias mencionadas anteriormente y que se encuentran al pie de la tabla.

Capacidades que pretendemos promover en los estudiantes y competencias disciplinares en matemáticas bajo el marco de la Reforma Integral en la educación Media superior 2008 a las que dichas capacidades contribuyen									
Capacidades a promover		Competencias							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Construye y establece distintas representaciones de la potencia.									
C1	Identifica las principales variables (base y el exponente) de una situación problema, construye tablas y organiza la información.		x			x			
C2	Elabora diagramas que describen la situación problema con sus principales variables.		x			x			
C3	Establece las relaciones que mejor se ajustan al comportamiento de las variables registrado en las tablas y diagramas.		x			x			
Expresa y organiza sus ideas mediante tablas.									
C4	Decodifica e interpreta la información organizada en tablas.		x						x
C5	Registra sus ideas en tablas.		x				x		
C6	Comunica sus ideas por medio de tablas.		x		x		x		
Expresa y organiza sus ideas mediante diagramas.									
C7	Decodifica e interpreta los diagramas.		x						x
C8	Registra sus ideas en diagramas.		x						
C9	Comunica sus ideas con diagramas.		x		x				
Modela e interpreta fenómenos naturales, sociales y matemáticos usando y creando diferentes representaciones.									
C10	Interpreta fenómenos naturales, sociales y matemáticos usando y creando diferentes representaciones.	x							
C11	Aplica modelos para interpretar fenómenos diversos.	x						x	
C12	Genera y aplica modelos matemáticos en diferentes contextos.	x						x	
Justifica la solución de los problemas mediante diferentes representaciones.									
C13	Por medio del lenguaje natural			x					
C14	Matemáticamente por medio del lenguaje numérico			x			x		
Competencias disciplinares matemáticas									

1.	Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
2.	Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.
3.	Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4.	Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.
5.	Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
6.	Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea.
7.	Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
8.	Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Tabla 4.1: Tabla de capacidades y competencias

4.1.2.3 Las hipótesis sobre los caminos por los que se puede desarrollar el aprendizaje

Abordar el problema propuesto, implica recorrer el camino que lleve a los estudiantes de una situación en la cual han desarrollado unas capacidades básicas con respecto al concepto potencia, a otra situación en la que los estudiantes sean capaces de resolver problemas que involucran el significado de los exponentes de las formas analíticas de la potencia. El profesor puede describir estas dos "situaciones" con la ayuda del procedimiento propuesto por Lupiáñez y colaboradores (2005), Citado en Gómez, Lupiáñez (2007). Sin embargo, la información organizada en el análisis de contenido muestra que no hay un único camino por el que el aprendizaje se puede desarrollar si se quiere transformar la situación inicial en la situación final. Para pasar de una situación a la otra, es necesario que los estudiantes desarrollen o ya hayan desarrollado una serie de capacidades intermedias. Para este propósito puede haber diferentes caminos que involucran diferentes capacidades y diferentes tareas pueden poner en juego diferentes capacidades de los estudiantes (ver la Figura 4.8).

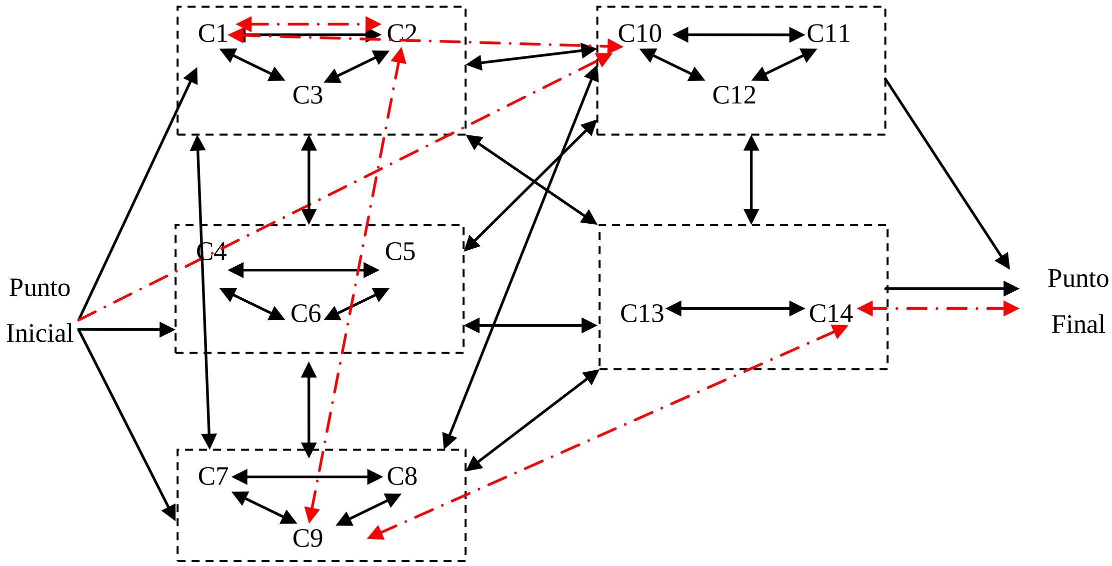


Figura 4.9: Trayectorias cognitivas o posibles caminos de aprendizaje

En la Figura 4.9: Hemos identificado algunas capacidades (Ci) y algunos caminos y hemos diferenciado algunos vínculos con una línea continua para indicar una selección de caminos. Por ejemplo, una tarea puede requerir la interpretación de un fenómeno social (C10) y, en consecuencia, necesita Identificar las principales variables involucradas en una situación problema (C1), y con éstas, elaborar diagramas o tablas que describan la situación (C2), comunicar sus ideas con diagramas (C9) y Justificar la solución de los problemas matemáticamente mediante el lenguaje numérico (C14).

En este sentido, el profesor debe decidir qué capacidades pueden llegar a ponerse en juego con motivo de la tarea que proponga. El análisis de los posibles caminos puede inducirlo a cambiar la tarea, dependiendo de su percepción de cuáles son las capacidades relevantes en ese momento. Por ejemplo, puede decidir diseñar una tarea que ponga en juego ciertas capacidades porque ellas contribuyen a unas competencias que se consideran importantes dentro del diseño curricular global ya que contribuyen a competencias que se consideran relevantes en el contexto en cuestión.

4.1.2.4 Las dificultades que los estudiantes pueden encontrar al abordar las tareas

Otro criterio que el profesor debe considerar para identificar los posibles caminos de aprendizaje y seleccionar las tareas, es su conocimiento sobre los errores, dificultades y obstáculos que los estudiantes cometen en el tema de interés, ya que todas las teorías sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas coinciden en identificar los errores de los alumnos en el proceso de aprendizaje, determinar sus causas y organizar la enseñanza con base en esa información. Por lo anterior, los profesores deberán ser sensibles a las ideas previas de los alumnos y utilizar las técnicas del conflicto cognitivo para lograr progreso en el aprendizaje. En particular para este trabajo consideraremos los Obstáculos, errores y dificultades en torno al concepto potencia.

Consideramos importante declarar lo que en este trabajo consideramos como error, dificultad y obstáculo lo planteado por D. Gódino (2004). Donde explicita que un error es cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar. El término dificultad lo utilizan para indicar el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. Por lo tanto, si el porcentaje de respuestas incorrectas (índice de dificultad) es elevado se dice que la dificultad es alta, mientras que si dicho porcentaje es bajo, la dificultad es baja. Además, dicho autor considera un obstáculo cuando el error no se produce por falta de conocimiento, sino porque el alumno usa un conocimiento que es válido en algunas circunstancias, pero falla en otras en las cuales se aplica indebidamente.

A continuación, en la tabla 4.2, presentaremos una caracterización sobre los obstáculos, errores y dificultades que cometen los estudiantes, cuando trabajan con la manipulación de expresiones algebraicas, que requieren de la aplicación de las leyes de los exponentes que sustentan al concepto potencia desde dos vertientes. En la primera, que consta de las tres primeras secciones de la tabla, incluiremos un condensado de los resultados detectados en investigaciones en torno a los exponentes.

Mientras que en la segunda vertiente, incluiremos los resultados –*distintos a los presentados en las tres secciones anteriores*—de un cuestionario que se aplicó a profesores de secundaria, preparatoria y nivel superior con diferentes años de experiencia en estos contenidos (cuarta sección).

Cabe aclarar que en la investigación realizada por Martínez (2000), que hace alusión a fenómenos didácticos nosotros los interpretamos como obstáculos, errores y dificultades debido a la naturaleza de los mismos.

	Investigaciones	Obstáculos, errores y dificultades	
1	Martínez (2000)	$2^0=0$	Por definición de potencia 2^0 es: El 2 multiplicado cero veces es cero.
		$2^0=2$	No hay nada como exponente.
		$2^1=2\times 2$ $2^1=2\times 1=2$	El dos se multiplica una vez
		$2^{-3}=(-2)(-2)(-2)$	Multiplicación Repetida
		$2^{-3}=-8$	$2^{-3}=8$ y se le coloca el signo menos.
		$2^{-3}=.002$	El signo menos indica que el punto se recorre a la izquierda tantas veces como indique el valor absoluto del exponente.
		$2^{\frac{-3}{2}}=2(\frac{-3}{2})=-3$	Es una multiplicación.
		$2^0=1$	Falta de leyes para argumentar Solo utilizan la memoria
		$2^1=2$	
		$2^{-3}=\frac{1}{2^3}$	
		$2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$,	No se interpreta como resultado de una exponenciación sino como una notación.
		$2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$	
		$\sqrt{2}=1.4$	
2	Ferrari (2001)	El uso de estructuras multiplicativas para introducir la potencia.	
		$2^0=0$ y $2^0=2$	
		$2^1=(2)(1)$ y $2^1=(2)(2)$	

		Significado de $3^{\frac{1}{2}}$	
		Significado de $3^{\sqrt{2}}$	
		$2^{-3}=(-2)(-2)(-2)=-8$	
3	Dolores, Martínez, Farfán, Carrillo, y López (2007)	Introducción de la definición de potencia como multiplicación reiterada $\left(\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n \text{ veces}} = a^n\right)$	
4	Cuestionario	$2^3 2^2 = 4^6$	Se interpreta como multiplicación en ambos niveles.
		$\left(2^5\right)^3 = 2^8$	Aplicación equivocada de la ley de multiplicación de potencias.
		$\frac{2^4}{2^8} = 2^4$	Sin argumentos

Tabla 4.2: Obstáculos, errores y dificultades

4.1.2.5 Las tareas que conforman la instrucción

Hasta ahora hemos sugerido procedimientos para identificar y organizar las capacidades de los estudiantes antes y después de la instrucción y para tener en cuenta las dificultades de los estudiantes en la descripción de los posibles caminos a lo largo de los cuales se puede desarrollar el aprendizaje. Pero, esta reflexión no ha incluido la selección de las tareas. Los caminos que recorran los estudiantes, dependerá de las tareas que se les proponga. La descripción de las capacidades y de los posibles caminos de aprendizaje le permiten al futuro profesor producir conjeturas sobre esos caminos y, al hacerlo, revisar las tareas que puede proponer en su diseño.

En la Figura 4.10 describimos el procedimiento que un profesor puede realizar para seleccionar las tareas que formarán parte de su propuesta de planificación.

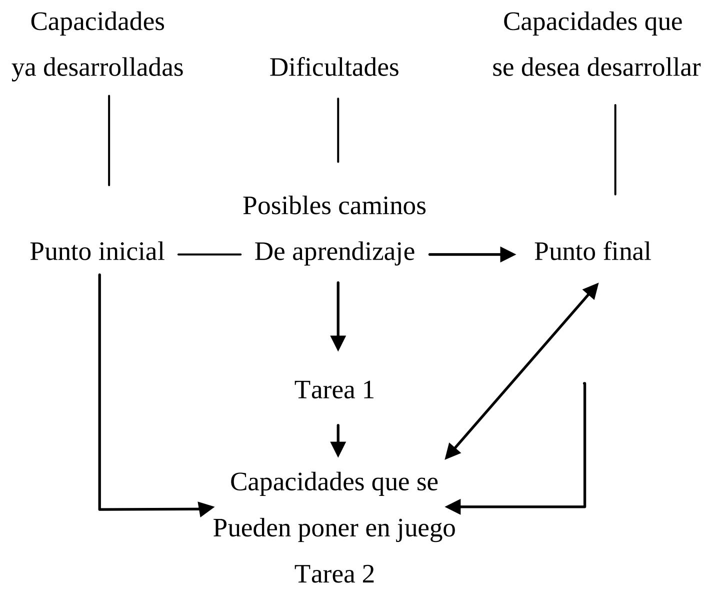


Figura 4.10: Ciclo de planificación local

La caracterización de las capacidades antes y después de la instrucción y de los posibles caminos de aprendizaje, da elementos al profesor sobre las capacidades que sería deseable los estudiantes pusieran en juego al realizar las tareas. Con esta información, puede diseñar y seleccionar una primera versión de esas tareas (Tareas 1 en la figura 4.10). Una vez que tiene identificadas unas tareas, él debe verificar cuáles son las capacidades que ellas requieren y aquellas que los estudiantes pueden poner en juego al abordarlas. Esta revisión le dará luces para revisar su propuesta de tareas y podrá producir una nueva versión de ellas (Tareas 2 en la Figura 4.10).

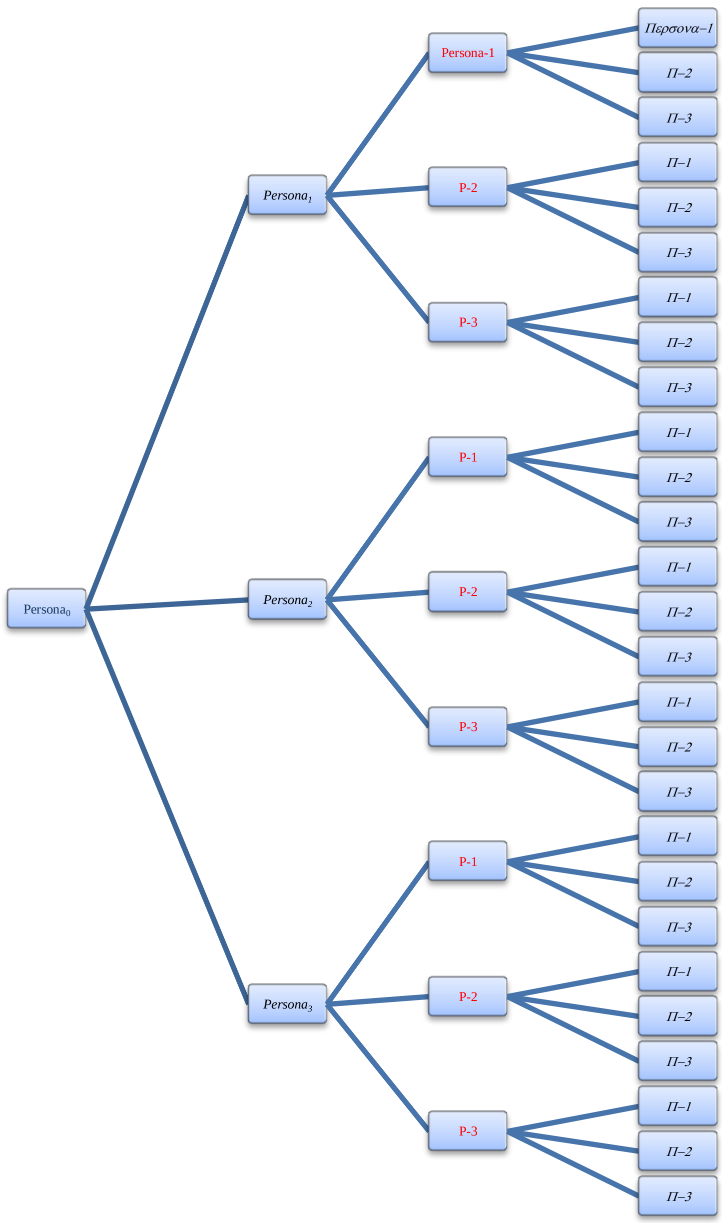
BLOQUE I: Tipos de tareas I: problemas de crecimiento exponencial

El propósito de este bloque de tareas es que los estudiantes conjeturen sobre el papel de la multiplicación repetida en la resolución de problemas y desarrollen comprensiones acerca de la situación problemática involucrada (crecimiento exponencial). En concreto, este bloque de tareas el estudiante requiere aplicar la multiplicación de potencias con base entera positiva (*a*) y exponentes naturales (*n*) y exponente cero $\underbrace{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \cdots \boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{n}\ \ \boldsymbol{veces}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}$

Tarea 1: El secreto

Problema1. Una persona se entera de un secreto que una familia guarda celosamente en un documento a las 10 de la mañana (10:00 AM), y transcurridos 10 minutos (10:10 AM), lo cuenta a sus dos mejores amigos pidiéndoles que lo mantengan en secreto. Pero, diez minutos después estas personas rompen el pacto de confianza contándoselo cada una a otros dos íntimos amigos. Si este secreto fuera contado de este modo, siempre cada diez minutos y siempre a dos nuevos amigos que no lo conocían. Y, considerando que en Hermosillo, Sonora hay 768954 habitantes. ¿A qué horas estarán todos los habitantes enterados?

<u>Problema 2.</u> Encuentra cuantas personas pueden enterarse de un secreto en un día determinado, si la información se transfiere diariamente de la forma expresada en el siguiente diagrama. Justifique su respuesta.



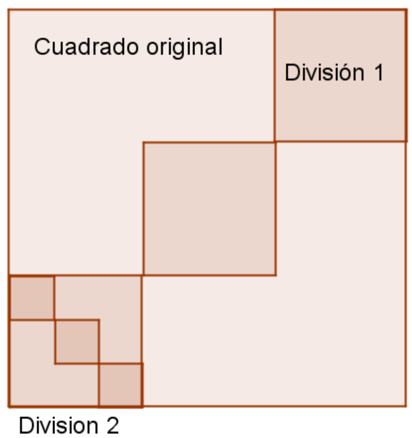
<u>Problema 3. Abstracción:</u> Complete la siguiente tabla y proponga algún fenómeno natural o social que pueda explicarse a partir de la información que se te presenta. Justifique su respuesta.

Día no.		
	(7)	
	(7)(7)(7)(7)(7)(7)	
30		
43		
58		
87		

Tarea 2: División de un cuadrado

Problema 4. Se quiere dividir un cuadrado en cuadrados iguales, durante 100 veces de la siguiente forma. El primer cuadrado se divide en cuatro. Los cuadrados resultantes se dividen cada uno en cuatro y así sucesivamente. Encuentra cual es el número total de cuadrados generados en la división 100.

Problema 5. La siguiente figura representa la forma en que se quiere dividir un cuadrado un determinado número de veces. Si estas divisiones se llevan a cabo durante 73 veces. Encuentra el total de cuadrados generados en dicha división. Justifique su respuesta.



Problema 6. Si el número de cuadrados iguales que resulta de un determinado número de divisiones de un cuadrado es 95367431640625. ¿En cuántos cuadrados iguales se divide el cuadrado original? ¿Por qué?

<u>Problema7.</u> Escriba los encabezados de la tabla, complétela y explique qué situación representa la información que contiene. ¿Por qué?

1	64		
2			
3			
10			
20			
49			
74			
x			

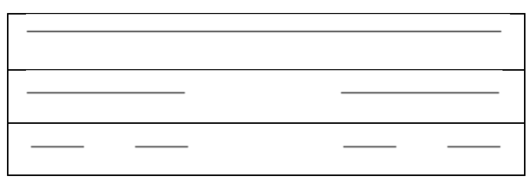
Bloque II. Tipos de tareas II: Fractales

El objetivo concreto de este bloque de tareas es que el estudiante aplique la multiplicación de potencias con base racional positiva y exponentes naturales $\underbrace{\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b}\cdots\frac{1}{b}}_{n \ \ veces}=\left(\frac{1^n}{b^n}\right)$ en la resolución de problemas.

Tarea 1. Conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor es el primer fractal conocido. Fue ideado por George Cantor en 1883 como ejemplo de conjunto de longitud cero cuyos puntos se pueden identificar uno a uno con todos los puntos de una recta (que tiene longitud infinita).

<u>Problema 1.</u> Se quiere construir el conjunto de Cantor a partir de la siguiente información. Se parte de un segmento de longitud 1. Se divide en tres partes iguales y se elimina la parte central. Después, cada una de las dos partes se divide en tres partes iguales y se eliminan de nuevo las partes centrales en cada una de ellas y así sucesivamente durante 20 divisiones. Encuentre la longitud de cada una de las partes del conjunto de Cantor después de las divisiones propuestas.



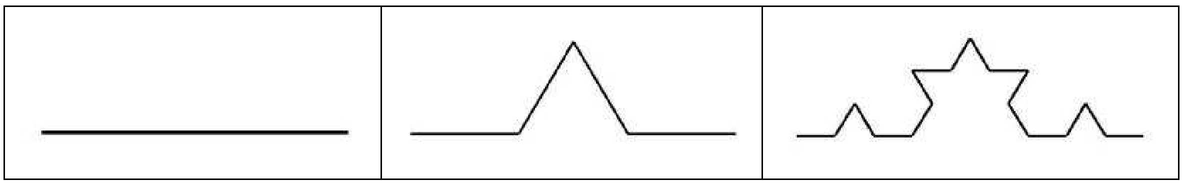
<u>Problema 2.</u> Dada la situacion problema anterior, establezca una longitud del segmento de partida diferente y encuentre la longitud de cada una de las partes del conjunto de Cantor.

Tarea 2. La curva de Koch

La curva de Koch fue ideada por Helge von Koch en 1904 como ejemplo de curva de longitud infinita contenida en un recinto acotado y sin tangente en cualquier punto.

Nota. La curva de Koch es la curva a la que se van aproximando las sucesivas poligonales que resultan en cada paso.

Problema 3. El Ingeniero Leyva, quiere construir la curva de Koch integrada por 16384 partes iguales. La construcción inicia con la división de un segmento de longitud 1 en 3 partes iguales; en la parte central se construye un triángulo equilátero, al cual se le suprime la base. Posteriormente, con cada una de las partes de la figura generada se repite el procedimiento anterior y así sucesivamente hasta llegar a la figura formada por las 16384 partes iguales. Encuentra la longitud de cada parte de la curva.

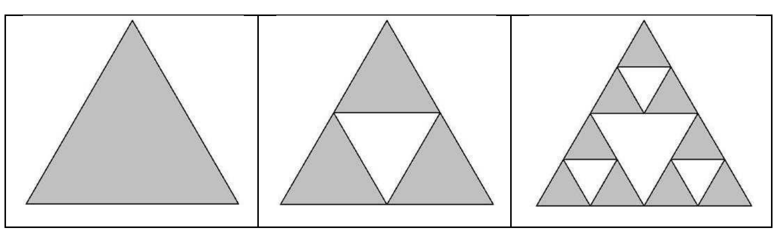


Problema 4. Dada la situacion problema anterior, establezca una longitud del segmento de partida diferente y encuentre la longitud de cada una de las partes de la curva de Koch.

Tarea 3. El triángulo de Sierpinski

El triángulo de Sierpinski fue ideado por Waclaw Sierpinski en 1915.

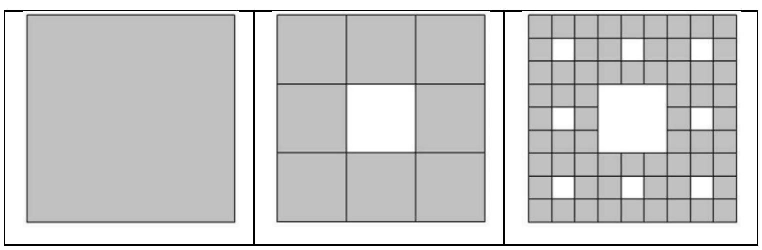
Problema 5. Se quiere construir un triángulo de Sierpinski con 14348907 triángulos. Para su construcción se parte de un triángulo equilátero de lado 1. El primer paso consiste en dividirlo en cuatro triángulos equiláteros iguales (lo que se consigue uniendo los puntos medios de los lados) y eliminar el triángulo central, es decir nos quedamos con los tres triángulos equiláteros de los vértices. El segundo paso de la construcción consiste en hacer lo mismo que hemos hecho en el primer paso sobre cada uno de los tres triángulos que forman obtenidos en el paso anterior y se continua repitiendo los pasos así sucesivamente. ¿Cuánto mide el lado de los triángulos que forman el triángulo de Sierpinski?



Problema 6. Dada la situacion problema anterior, establezca una longitud del segmento de partida diferente y encuentre la longitud de cada una de los lados de los triangulos que forman el triángulo de Sierpinski.

Tarea 4. La alfombra de Sierpinski

Problema 7. La construcción del fractal conocido como la alfombra de Sierpinski Se lleva a cabo de la siguiente manera. Se parte de un cuadrado de lado 1 y el primer paso consiste en dividirlo en nueve cuadrados iguales (lo que se consigue dividiendo cada lado en tres partes iguales) y eliminar el cuadrado central, es decir nos quedamos con ocho cuadrados. El segundo paso de la construcción consiste en hacer lo mismo que hemos hecho en el primer paso sobre cada uno de los ocho cuadrados obtenidos en el paso anterior. Y se repite el proceso infinitas veces, obteniendo como resultado final el objeto fractal conocido como alfombra de Sierpinski. Si queremos construir la alfombra de Sierpinski con 23 repeticiones. ¿Cuál es la longitud de los lados de los cuadrados resultantes en esa división?



Problema 8. Dada la situacion problema anterior, establezca una longitud del lado del cuadrado inicial diferente y encuentre la longitud de cada una de las partes que constituyen la alfombra de Sierpinski.

Bloque III. Tipos de tareas III: Matemáticos

El objetivo de este bloque de tareas es institucionalizar la definición de potencia $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \quad veces} = a^n$ e introducir a los estudiantes a la multiplicación de potencias con base natural positiva y exponentes naturales y cero $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

<u>Tarea 1</u>

Estudiante: ____ Tiempo: 100 minutos

1. Completa las siguientes tablas.

Tabla 1		
Multiplicación de números naturales	Resultados en potencias	Resultados en números naturales
		1
	2^1	
2x2	2^2	
	2^3	8
		16
2x2x2x2x2		32
	2^6	
2x2x2x2x2x2x2		128
2x2x2x2x2x2x2x2	2^8	
		Explica que significan para ti los números de la columna anterior
	2^{47}	
$\underbrace{2x2x2x....2x2}_{\text{93 veces}}$		
	2^{182}	
	2^{379}	
	2^n	

Tabla 2		
Multiplicación de números naturales	Resultados en potencias	Resultados en números naturales
		1
	7^1	7
7x7	7^2	
7x7x7		
	7^4	
	7^5	
7x7x7x7x7x7		
	7^7	
7x7x7x7x7x7x7x7		
		Explica que significan para ti los números de la columna anterior
	7^{25}	
	7^{93}	
$\underbrace{7\boldsymbol{x}7\boldsymbol{x}7\boldsymbol{x}....7\boldsymbol{x}7}_{\text{182 veces}}$		
	7^{379}	
	7^n	

Tabla 3		
Multiplicación de números naturales	Resultados en potencias	Resultados en números naturales
		1
	9^1	
17x17x17x17		
		8464
	130^{17}	
$\underbrace{654\boldsymbol{x}654\boldsymbol{x}....\boldsymbol{x}654}_{56\text{veces}}$		
	1326^{87}	
		Explica que significan para ti los números de la columna anterior
	4000^{390}	
$\underbrace{3918\boldsymbol{x}3918\boldsymbol{x}....\boldsymbol{x}3918}_{182\text{ veces}}$		
	15437^{428}	
	284567^{n}	

2. Completa los encabezados y realiza las operaciones que se te indican en las siguientes tablas.

Tabla 1			
Multiplicación de números naturales		Resultados expresados en potencias	Que observas en los exponentes
	$(2^2)(2^3)$		
		2^7	
(2x2x2x2x2x2x2) (2x2x2)			
$(\underbrace{2\boldsymbol{x}2\boldsymbol{x}..\boldsymbol{x}2}_{\text{25 veces}})(\underbrace{2\boldsymbol{x}2\boldsymbol{x}..\boldsymbol{x}2}_{\text{47 veces}})$			
		2^{195}	
		2^{343}	
		$2^{2\boldsymbol{n}}$	
$(\underbrace{2\boldsymbol{x}2\boldsymbol{x}..\boldsymbol{x}2}_{\boldsymbol{n}\text{ veces}})(\underbrace{2\boldsymbol{x}2\boldsymbol{x}..\boldsymbol{x}2}_{\boldsymbol{m}\text{ veces}})$			

Tabla 2			
Multiplicación de números Naturales		Resultados expresados en potencias	Que observas en los exponentes
(7x7)(7x7x7)			
		7^5	
	7^{37} x 7^{94}		
$(\underbrace{7\boldsymbol{x}7\boldsymbol{x}..\boldsymbol{x}7}_{16\text{ veces}})(\underbrace{7\boldsymbol{x}7\boldsymbol{x}..\boldsymbol{x}7}_{37\text{ veces}})$			
		7^{195}	
		7^{1200}	
		$7^{2\boldsymbol{n}}$	
$(\underbrace{7\boldsymbol{x}7\boldsymbol{x}..\boldsymbol{x}7}_{\boldsymbol{n}\text{ veces}})(\underbrace{7\boldsymbol{x}7\boldsymbol{x}..\boldsymbol{x}7}_{\boldsymbol{m}\text{ veces}})$			

Tabla 3			
Multiplicación de números Naturales		Resultados expresados en potencias	Que observas en los exponentes
(217x217)(217x217x217)			
		1500^{25}	
$(\underbrace{714x714x\cdots714}_{16\text{ veces}})(\underbrace{714x714x\cdots x714}_{37\text{ veces}})$			
	9218^{45} 9218^{97}		
		10435^{195}	
		345678^{1200}	
$(\underbrace{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\cdot\ldots\cdot\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{n}\text{ veces}})(\underbrace{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\cdot\ldots\cdot\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{m}\text{ veces}})$			

3. Define que es una potencia utilizando:

Lenguaje natural	Literales	Muestre un ejemplo

4. Define que significa la multiplicación de potencias.

Lenguaje natural	Literales	Muestre un ejemplo

Capítulo 5

Análisis de instrucción y gestión de la clase

En este capítulo, presentamos la forma como contribuye el análisis de instrucción propuesto en al análisis didáctico (elementos teóricos). En este análisis, hicimos una selección de las tareas diseñadas en el capítulo anterior para estructurar la secuencia didáctica definitiva. Para lograr lo anterior, analizamos dos tareas. Una tarea del primer bloque y otra del segundo bloque tomando como referencia la tabla 4.1 del capítulo anterior para identificar las capacidades que los estudiantes pueden poner en juego cuando aborden las tareas , las competencias matemáticas a las que dichas capacidades contribuyen y las posibles trayectorias de aprendizaje que se pueden seguir. Finalmente, con esa información evaluar la pertinencia de las tareas. Incluimos también la gestión de la clase y la estrategia didáctica a seguir.

5.1 Análisis de instrucción

> *"En este análisis, el profesor analiza y selecciona las tareas que constituirán las actividades de enseñanza y aprendizaje objeto de la instrucción y para hacerlo, el profesor debe ser capaz de analizar una tarea con el propósito de:*
>
> - *Identificar las capacidades que se pueden poner en juego cuando los estudiantes la aborden;*
> - *Identificar las competencias a las que esas capacidades, con la tarea en cuestión, pueden contribuir;*
> - *Establecer los posibles caminos de aprendizaje que los estudiantes pueden recorrer cuando aborden la tarea y,*
> - *Evaluar la pertinencia de la tarea a partir de esta información"* (Gómez, 2002).

Para iniciar este análisis, clarificaremos el significado de tarea y actividades, ya que las utilizaremos frecuentemente durante el desarrollo de este trabajo. Hablaremos de una tarea cuando nos estemos refiriendo a las hojas de trabajo que el profesor entregará a los estudiantes; mientras que a las acciones que estudiantes y profesor realizan con motivo de una tarea las llamaremos actividades.

En cada sesión de trabajo, el profesor, asigna una tarea o una secuencia de tareas, con el propósito que los estudiantes logren el objetivo de aprendizaje concreto que estableció en su planificación. Además, el profesor puede establecer en qué medida contribuye a unas competencias.

Por otro lado, los estudiantes al iniciar una tarea, deberán tener el propósito de resolverla. En este sentido, las actuaciones del profesor y de los estudiantes, se componen de acciones en las que ambos pretenden lograr los propósitos correspondientes. Al realizar dichas acciones, los estudiantes y el profesor ponen en juego una serie de capacidades que contribuyen al desarrollo de algunas competencias. Por lo tanto, en la planificación incluiremos el análisis y la selección de las tareas, la previsión de las posibles acciones de los estudiantes al abordar una tarea y de la secuencia de capacidades que ellos pueden poner en juego al realizarlas (caminos de aprendizaje).

5.1.1 Diseño y selección de las tareas

Las tareas que hemos seleccionado, las consideramos no rutinarias, ya que parten de una situación problema y los estudiantes tienen que llevar a cabo una serie de actividades durante el proceso de resolución. Este proceso, por el que pasan los estudiantes, es considerado como el eje central de su formación matemática y ha sido uno de los aspectos más destacados del movimiento de reforma de la matemática educativa que, desde la década de los ochentas, tiene lugar a nivel internacional.

A nivel nacional, recientemente la reforma en secundaria 2006 (RS) y la reforma integral en la educación media superior 2008 (RIEMS), destacan la importancia de desarrollar en los estudiantes las capacidades para clarificar, formular y resolver problemas. Es decir, estas reformas, proponen un cambio significativo en las actividades tradicionales del profesor. Por lo tanto, éste deberá replantear sus actividades y proponer tareas que induzcan a los estudiantes a desarrollar las capacidades que se pretenden en dichas reformas.

Para diseñar una tarea es esencial la identificación de un fenómeno o de un problema del mundo real (fenomenología). Una vez que se tiene, se construye el enunciado del problema, que los estudiantes tratarán de resolver y para hacerlo, tomaremos en cuenta al menos los siguientes aspectos: La presencia de la estructura matemática en el enunciado del problema; precisión y claridad en las demandas que se espera que los estudiantes realicen y los recursos o materiales didácticos que los estudiantes tendrán disponibles para abordar la tarea (Pizarrón, computadora, libros de texto, calculadora científica, etc.).

Para diseñar una secuencia didáctica o una secuenciación de tareas, con la cual se pretende lograr un objetivo de aprendizaje. Éstas, deben complementarse en el propósito de poner en juego los caminos de aprendizaje que lo configuran. En este sentido, el profesor debe agrupar en tipos, las tareas que caracterizan un objetivo de aprendizaje. Por lo tanto, un tipo de tareas es un conjunto de tareas concretas que generan los mismos caminos de aprendizaje. A su vez, la secuencia didáctica, deberá incluir tareas de diversos tipos que se complementen entre sí pero, que impliquen diferentes caminos de aprendizaje. Además, dicha secuenciación deberá considerar las dificultades de los estudiantes que el profesor considera relevantes, junto con las estrategias alternativas que hipotéticamente supone que los estudiantes pueden poner en juego. Esto implica que, en la secuenciación, el profesor debe dar preferencia a aquellos tipos de tareas cuyos caminos de aprendizaje incluyen dificultades de los estudiantes.

Para estructurar la secuencia didáctica, para promover el aprendizaje del objeto matemático potencia, hemos dividido los tipos de tareas en tres bloques.

En el primer bloque, incluimos 5 tareas y las hemos enmarcado como tipos de tareas relacionadas con problemas de crecimiento exponencial. El propósito concreto de este bloque, es que los estudiantes conjeturen sobre el papel de la multiplicación repetida en la resolución de problemas y desarrollen comprensiones acerca de la situación problemática involucrada (crecimiento exponencial). En otras palabras, en este bloque de tareas el estudiante requiere aplicar la multiplicación de potencias con base entera positiva (a) y exponentes naturales (n) en el proceso de resolución ($\underbrace{\boldsymbol{a \cdot a \cdot a \cdots a}}_{\boldsymbol{n \quad veces}} = \boldsymbol{a^n}$).

Tareas

Estudiante: ____ Tiempo: minutos

Los secretos

¿Sabes de lo que me acabo de enterar?; "Te voy a contar algo pero no se lo digas a nadie. ¿Me lo prometes? "No me creas pero me enteré que…" Estas y muchas más son las maneras en que se cuentan los secretos.

Los secretos por lo general provienen de una fuente extraoficial que generalmente nadie conoce. La fuente permanece oculta. Nadie es responsable, pero todo el mundo lo sabe. Esto lo hace parecer misterioso y da la sensación de que se trata de algo a lo que solo unos cuantos tienen acceso.

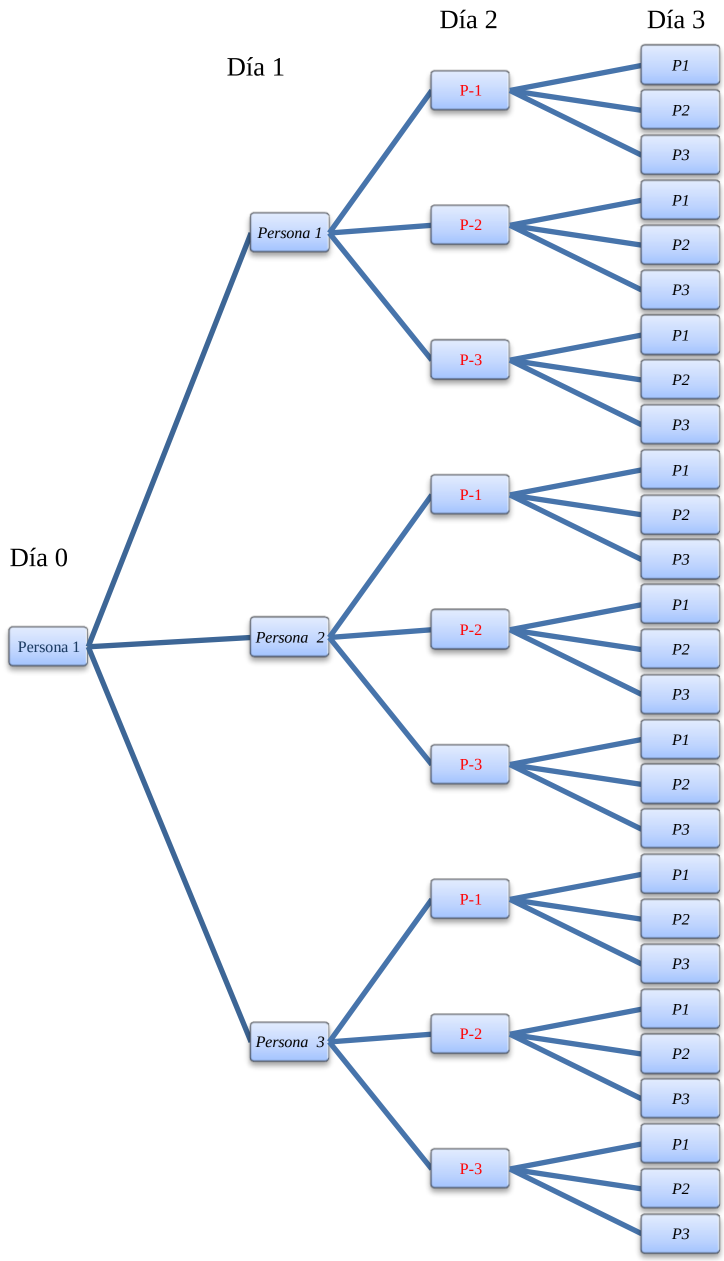
Una de las formas más efectivas de comunicar algo es hacerlo de boca a boca, de persona en persona. Pero también existen otras como: la telefonía, el internet, etc. ¿Alguna vez has guardado o contado algún secreto…?

1. Una persona se entera de un secreto que una familia guarda celosamente en un documento a las 10 de la mañana (10:00 AM), y transcurridos 10 minutos (10:10 AM), lo cuenta a sus dos mejores amigos pidiéndoles que lo mantengan en secreto. Pero, diez minutos después estas personas rompen el pacto de confianza contándoselo cada una a otros dos íntimos amigos. Si este secreto fuera contado de este modo, siempre cada diez minutos y siempre a dos nuevos amigos que no lo conocían. Y, considerando que en Hermosillo, Sonora hay 768954 habitantes. ¿A qué horas estarán todos los habitantes enterados?
2. Suponiendo que el secreto se continúa contando de la misma forma pero a personas que viven fuera de Hermosillo. ¿Cuántas personas se enterarán del secreto exactamente a las 17:00 PM? Justifica tu respuesta
3. Si consideramos que la persona que se enteró del secreto, lo cuenta a sus dos mejores amigas, 5 minutos después de conocerlo; y que sus amigas a su vez, lo cuentan también cada una de ellas a dos nuevas personas, 5 minutos después de conocer el secreto y así sucesivamente. ¿Cuántas personas conocerán el secreto a las 17:00 de la tarde? Justifica tu respuesta.
4. Suponiendo que el secreto se continúa contando cada 5 minutos pero esta vez cada persona que conoce el secreto lo cuenta a 5 nuevas personas. ¿Cuántas personas se

enterarán del secreto exactamente a las 17:00 PM? Justifica tu respuesta

5. Si este secreto que se conoció a las 10:00AM lo conocen a las 12:30 exactamente 1073741824 personas. ¿Cuál fue la forma como se enteraron? Es decir, la primera persona que se enteró del secreto se lo contó a cuantas personas. Estas nuevas personas que lo conocen a cuántas personas se lo contaron cada una de ellas, etc. ¿Cada cuanto tiempo se contaba el secreto? Justifica tu respuesta.

6. Encuentra cuantas personas pueden enterarse de un secreto el día 76, si la información se transfiere diariamente de la forma expresada en el siguiente diagrama.



La resolución de este tipo de tareas, implica que el estudiante aplique la multiplicación repetida de números naturales (potencias de la misma base y exponentes naturales, herramientas que en este problema en particular, le permiten determinar el número de personas que se enteran en cada uno de los intervalos de tiempo, con los cuales al llevar a cabo la sumatoria correspondiente los estudiantes estarán en posibilidades de llegar a la solución del problema. por otro lado, en este trabajo tratamos de promover la utilización de la potencia para resolver este tipo de problemas, por lo que los estudiantes necesitan encontrar la relación que existe entre las variables involucradas en la situación, es decir, la relación que existe entre el número de nuevos amigos que se enteran (base) con el número de intervalos de tiempo utilizados (exponente).

En el segundo bloque, incluimos 2 tareas y las hemos enmarcado como tipos de tareas relacionadas con problemas de de-crecimiento exponencial. El objetivo concreto de este bloque de tareas es que el estudiante aplique la multiplicación repetida de potencias con base natural positiva y exponentes naturales $\underbrace{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\cdots\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{n}\quad\boldsymbol{veces}}=\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}$ así como también la multiplicación repetida de potencias de la misma base racional positiva y exponentes naturales $\underbrace{\frac{1}{\boldsymbol{b}}\cdot\frac{1}{\boldsymbol{b}}\cdot\frac{1}{\boldsymbol{b}}\cdots\frac{1}{\boldsymbol{b}}}_{\boldsymbol{n}\quad\boldsymbol{veces}}=\left(\frac{1^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}}\right)$ y cuando lo requiera, las multiplique para finalmente arribar a la solución de este tipo de problemas.

$$\underbrace{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\cdots\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{n}\quad\boldsymbol{veces}}\ \underbrace{\frac{1}{\boldsymbol{b}}\cdot\frac{1}{\boldsymbol{b}}\cdot\frac{1}{\boldsymbol{b}}\cdots\frac{1}{\boldsymbol{b}}}_{\boldsymbol{n}\quad\boldsymbol{veces}}=\left(\frac{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}}\right)$$

<u>Tareas</u>

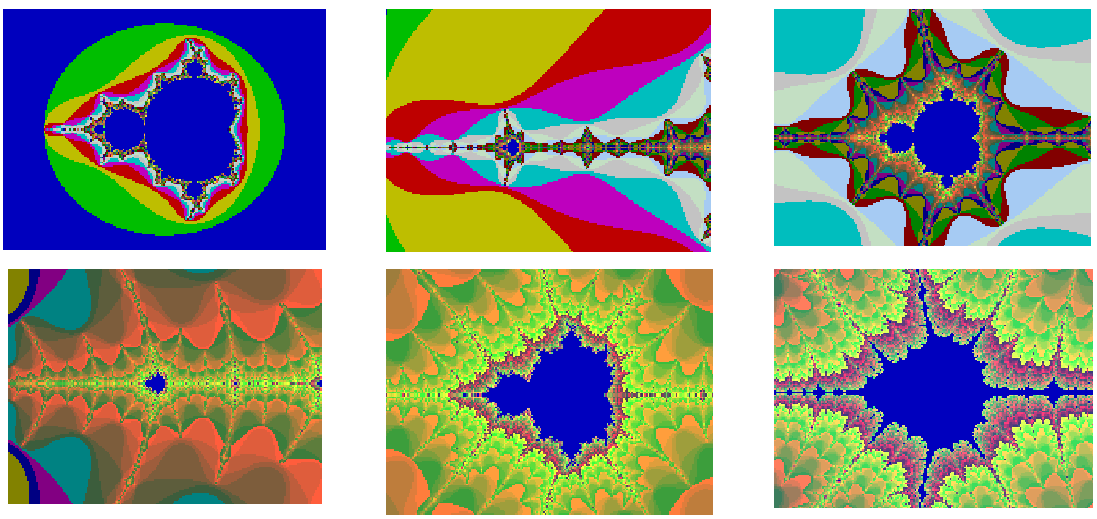
Estudiante: ____ Tiempo: 50 minutos

Los Fractales

Un fractal es un objeto semi geométrico cuya estructura básica, fragmentada o irregular, se repite a diferentes escalas.

La palabra fractal, referida a conjuntos matemáticos, apareció por primera vez en el año 1977 cuando Benoit Mandelbrot la utilizó en su libro, The Fractal Geometry of Nature para referirse a ciertos conjuntos con todas o algunas de las siguientes propiedades:

- *a) Tienen detalles a todas las escalas, entendiendo por esto que mirados a cualquier nivel de escala (zoom) manifiestan detalles ya observados a nivel global.*
- *b) Están formados por partes que son semejantes al conjunto total.*
- *c) Tienen una descripción algorítmica simple, entendiendo por ello que su construcción se basa en un algoritmo sencillo.*



El conjunto de Cantor, fue el primer fractal que se conoció y fue ideado por George Cantor en 1883 como ejemplo de conjunto de longitud cero cuyos puntos se pueden identificar uno a uno con todos los puntos de una recta (que tiene longitud infinita).

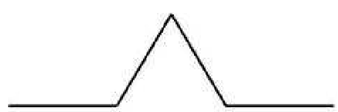
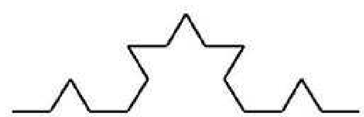
1. Se quiere llegar a la construcción del conjunto de Cantor a partir de la siguiente información. Se parte de un segmento de longitud 1. Se divide en tres partes iguales y se elimina la parte central. Después, cada una de las dos partes restantes se divide en tres partes iguales y se eliminan de nuevo las partes centrales en cada una de ellas y así sucesivamente durante 83 divisiones. Encuentre la longitud de cada una de las partes en que ha sido dividido el segmento

en la división 83. Justifique su respuesta

Divisiones	Partes del segmento
0	
1	
2	

La curva de Koch, es otro ejemplo de fractal y fue ideada por Helge von Koch en 1904 como ejemplo de una curva de longitud infinita.

2. El Ingeniero Leyva, quiere construir la curva de Koch. La construcción inicia con la división de un segmento de longitud 1 en 3 partes iguales; en la parte central se construye un triángulo equilátero, al cual se le suprime (quita) la base. Posteriormente, con cada una de las partes de la curva formada se repite el procedimiento anterior durante 217 veces. Encuentra la longitud de la curva que se construye en la última división (217) utilizando fracciones.

Número de divisiones del segmento		
0	1	2
		

Para resolver la tarea 1 de este bloque, los estudiantes deberán aplicar la multiplicación repetida de potencias de la misma base racional (positiva) y exponentes naturales para encontrar la longitud de cada parte que conforma la figura en la división propuesta. Mientras tanto para la resolución de la tarea 2, los estudiantes aplicarán la multiplicación repetida de potencias de la misma base (natural) para encontrar el número total de partes de la figura después de las 217 divisiones. Después, deberán aplicar la multiplicación repetida de potencias de la misma base racional (positiva) y exponentes naturales para encontrar la longitud de cada parte que conforma la en la división propuesta y por ultimo multiplicar los resultados obtenidos para finalmente obtener la solución del problema. Y, en general, para resolver este tipo de problemas los estudiantes necesitan encontrar la relación que existe entre las variables involucradas en esta situación, es decir, la relación que existe entre el número de partes que componen cada una de las secciones que en su totalidad integran la figura deseada (base) con el número de divisiones que se le hacen a la figura (exponente). Así como también, es absolutamente necesario encontrar la relación entre el número de partes en que se divide la longitud del segmento (base) con el número de divisiones que se hacen a los segmentos.

5.1.2 Capacidades que se pueden poner en juego cuando los estudiantes trabajen con las tareas del bloque I

C1, C2, C3, C5, C6, C10, C11, C12, C13 Y C14

C1	Identifica las principales variables (base y el exponente) de una situación problema, construye tablas y organiza la información
C2	Elabora diagramas que describen la situación problema con sus principales variables
C3	Establece las relaciones que mejor se ajustan al comportamiento de las variables registrado en las tablas y diagramas.
C5	Registra sus ideas en tablas.
C6	Comunica sus ideas por medio de tablas
C10	Interpreta fenómenos naturales, sociales y matemáticos usando y creando diferentes representaciones.
C11	Aplica modelos para interpretar fenómenos diversos
C12	Genera y aplica modelos matemáticos en diferentes contextos
C13	Justifica la solución de los problemas matemáticamente mediante diferentes representaciones Por medio del lenguaje natural
C14	Justifica la solución de los problemas matemáticamente mediante diferentes representaciones Por medio del lenguaje numérico

5.1.3 Competencias a las que las capacidades promovidas con las tareas del bloque I, pueden contribuir

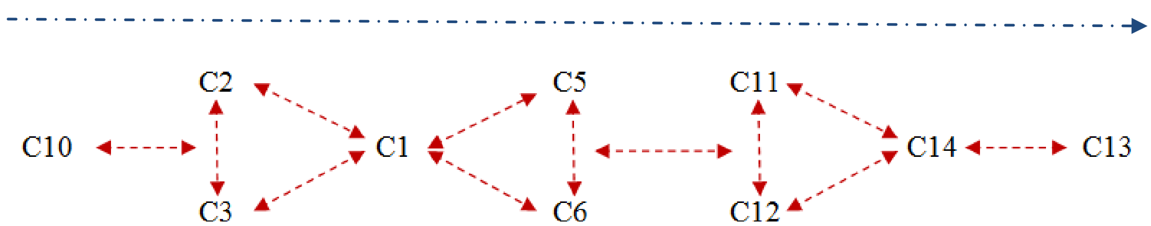
Bloque 1

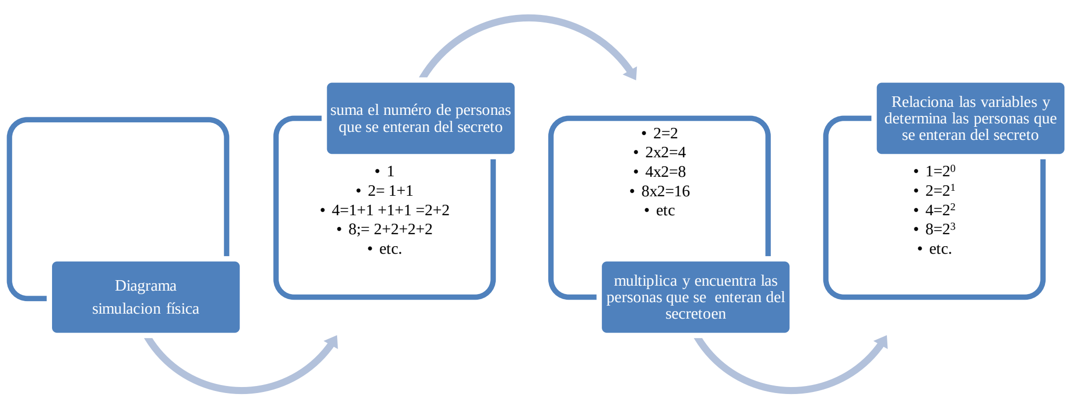
Capacidades que pretendemos promover en los estudiantes y competencias disciplinares en matemáticas bajo el marco de la Reforma Integral en la educación Media superior 2008 a las que dichas capacidades contribuyen									
Capacidades a promover		Competencias							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Construye y establece distintas representaciones de la potencia.									
C1	Identifica las principales variables (base y el exponente) de una situación problema, construye tablas y organiza la información.		x			x			
C2	Elabora diagramas que describen la situación problema con sus principales variables.		x			x			
C3	Establece las relaciones que mejor se ajustan al comportamiento de las variables registrado en las tablas y diagramas.		x			x			
Expresa y organiza sus ideas mediante tablas.									
C4	Decodifica e interpreta la información organizada en tablas.		x						x
C5	Registra sus ideas en tablas.		x				x		
C6	Comunica sus ideas por medio de tablas.		x		x		x		
Expresa y organiza sus ideas mediante tablas.									
C7	Decodifica e interpreta los diagramas.		x						x
C8	Registra sus ideas en diagramas.		x						
C9	Comunica sus ideas con diagramas.		x		x				
Modela e interpreta fenómenos naturales, sociales y matemáticos usando y creando diferentes representaciones.									
C10	Interpreta fenómenos naturales, sociales y matemáticos usando y creando diferentes representaciones.	x							
C11	Aplica modelos para interpretar fenómenos diversos.	x						x	
C12	Genera y aplica modelos matemáticos en diferentes contextos.	x						x	
Justifica la solución de los problemas mediante diferentes representaciones.									
C13	Por medio del lenguaje natural			x					
C14	Matemáticamente por medio del lenguaje numérico			x	x		x		
Competencias disciplinares matemáticas									

1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.
3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea.
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Tabla 5.1: Tabla de capacidades y competencias con tareas del bloque I

5.1.4 Establecer los posibles caminos de aprendizaje que los estudiantes pueden recorrer cuando aborden las tareas del bloque I





5.1.5 Evaluar la pertinencia de las tareas del bloque I

Con la información que obtenemos del análisis de esta tarea, llegamos a la conclusión que es significativa, en el sentido que para su resolución, los estudiantes requieren aplicar la multiplicación repetida. Ésta, a su vez, la utilizaremos posteriormente para introducir la definición de potencia. Además, los estudiantes estarán contarán con los conocimientos previos para arribar a la multiplicación de potencias de la misma base (natural positiva) para exponentes naturales y exponente cero. Por otro lado, con esta tarea se ponen en juego las capacidades C1, C2, C3, C5, C6, C10, C13 Y C14 que favorecen el desarrollo de las competencias 1,2, 4, 5 6 y 7. Finalmente, rescatamos que será necesario abordar tareas que coadyuven al desarrollo de las competencias 3 y 8 en la medida que nos sea posible ya que con esta tarea no las estamos promoviendo.

5.1.6 Capacidades que se pueden poner en juego cuando los estudiantes trabajen con las tareas del bloque II

C1, C2, C5, C6, C9, C10, C11, C12, C13 Y C14

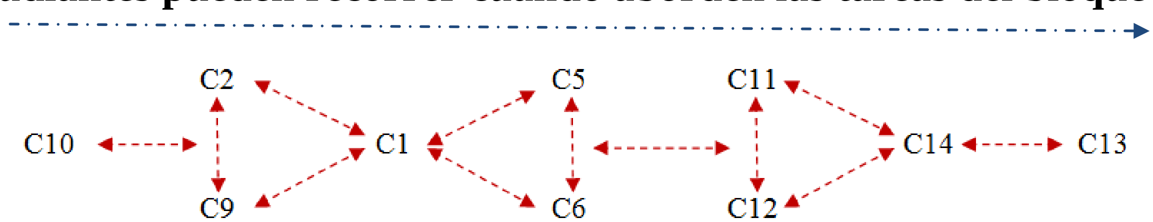
C1	Identifica las principales variables (base y el exponente) de una situación problema, construye tablas y organiza la información.
C2	Elabora diagramas que describen la situación problema con sus principales variables.
C5	Registra sus ideas en tablas.
C6	Comunica sus ideas por medio de tablas.
C9	Comunica sus ideas con diagramas.
C10	Interpreta fenómenos naturales, sociales y matemáticos usando y creando diferentes representaciones.
C11	Aplica modelos para interpretar fenómenos diversos
C12	Genera y aplica modelos matemáticos en diferentes contextos
C13	Justifica la solución de los problemas matemáticamente mediante diferentes representaciones. Por medio del lenguaje natural
C14	Justifica la solución de los problemas matemáticamente mediante diferentes representaciones. Por medio del lenguaje numérico

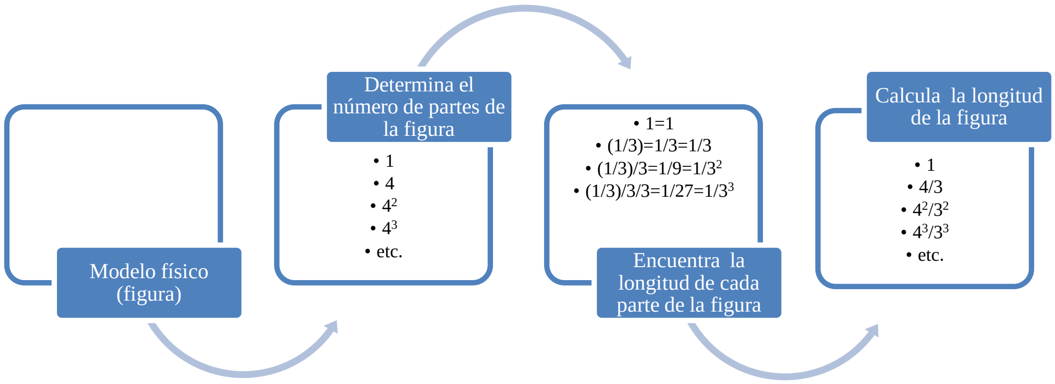
5.1.7 Competencias a las que las capacidades promovidas con las tareas del bloque II pueden contribuir

Capacidades y competencias a promover con las tareas del bloque II		Competencias							
		1	2	3	4	5	6	7	8
C1	Identifica las principales variables (base y el exponente) de una situación problema, construye tablas y organiza la información.		x			x			
C2	Elabora diagramas que describen la situación problema con sus principales variables.		x			x			
C5	Registra sus ideas en tablas.		x				x		
C6	Comunica sus ideas por medio de tablas.		x		x		x		
C9	Comunica sus ideas con diagramas.		x		x				
C10	Interpreta fenómenos naturales, sociales y matemáticos usando y creando diferentes representaciones.	x							
C11	Aplica modelos para interpretar fenómenos diversos	x						x	
C12	Genera y aplica modelos matemáticos en diferentes contextos	x						x	
C13	Justifica la solución de los problemas matemáticamente mediante diferentes representaciones. Por medio del lenguaje natural		x						
C14	Justifica la solución de los problemas matemáticamente mediante diferentes representaciones. Por medio del lenguaje numérico		x				x		
1.	Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.								
2.	Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.								
4.	Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.								
5.	Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.								
6.	Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea.								
7.	Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia								

Tabla 5.2: Capacidades y competencias a promover con las tareas del bloque II

5.1.8 Establecer los posibles caminos de aprendizaje que los estudiantes pueden recorrer cuando aborden las tareas del bloque II





5.1.9 Evaluar la pertinencia de las tareas del bloque II

Con la información que obtenemos del análisis de esta tarea, consideramos que es significativa ya que a partir de su resolución, los estudiantes en un primer momento aplican la multiplicación de potencias de la misma base (natural), después tienen que aplicar la multiplicación de potencias de base racional (positiva) y finalmente llevan a cabo la multiplicación de ambos resultados para llegar a la solución del problema. Por otro lado, se ponen en juego algunas capacidades que favorecen el desarrollo de las competencias 1,2, 4 5,6 y 7. Por otra parte, también podemos rescatar que será necesario abordar tareas que favorezcan el desarrollo de las competencias 3y 8 en la medida que nos sea posible ya que no las estamos promoviendo con esta tarea.

5.2 Gestión de la Clase

La clase se desarrollará en un ambiente que le permita al profesor dar seguimiento a los estudiantes durante la realización de las tareas propuestas. En este sentido, el profesor deberá estar preparado para reaccionar a las actuaciones de los estudiantes al momento de abordar las tareas y Además, se pretende promover el desarrollo del pensamiento matemático.

Las tareas propuestas, son situaciones novedosas con la pretensión de que resulten significativas para los estudiantes, ya que las hemos enmarcado en contextos o circunstancias familiares como lo son los secretos o la división de segmentos, etc., y buscando que sean atractivas y motivadoras. Además, éstas deberán ser resueltas por los estudiantes a partir de sus conocimientos y estructuras cognitivas previas; ya que, no se requiere de la aplicación de un algoritmo o de un procedimiento rutinario, es decir, intentamos que la resolución de las mismas, representen un reto intelectual para ellos.

Con estas situaciones, pretendemos estimular a los estudiantes a reestructurar sus conocimientos con el fin de solucionar el problema, además de una modificación de las estructuras cognitivas previas que les permita incluir, nuevos casos o contextos de aplicación de los conceptos involucrados –*potencia*—.

En nuestra experiencia didáctica con el concepto potencia en el bachillerato y en un cuestionario que se les aplicó a estudiantes del primer semestre de bachillerato tecnológico, se detectó la escasa habilidad de los estudiantes en la resolución de problemas en los cuales se requiere la aplicación del objeto matemático potencia.

Tomando en cuenta lo anterior y la diversidad de estudiantes, consideramos pertinente que el profesor realice algunas acciones para apoyar aquellos alumnos que hipotéticamente suponemos presentarán dificultades en su resolución. Estas acciones, tienen como objetivo que los estudiantes logren superar estas dificultados en la resolución del problema, es decir, logren avanzar en la comprensión de los mismos.

Las acciones que realizará el profesor en el momento que los estudiantes presenten dificultades para resolver las tareas propuestas, las presentamos en la tabla 5.1. Esta tabla, contiene dos columnas. En la primera, presentamos las dificultades esperadas que cometerán los estudiantes y en la segunda las acciones que realizará el profesor si estas dificultades se le presentan.

Bloque I: Tareas 1, 2, 3 y 4. El secreto	
Dificultades de los estudiantes	Acciones del profesor (propuestas)
1. Los estudiantes no pueden describir la forma en que se incrementa el número de personas que se enteran a medida que transcurre el tiempo	a) Hacer una simulación física con sus compañeros de clase b) Construir un diagrama
2. Los estudiantes no pueden identificar las variables involucradas en estos problemas. (Relación entre los intervalos de tiempo –e*xponente*— con el número de personas a las que cada persona cuenta el secreto –*base*—).	a) Proponer la elaboración de una tabla y organizar en ella la información que van generando b) Proporcionar la tabla para que sea llenada por los estudiantes

	c) Proporcionar una tabla con diferentes niveles de llenado
3. Dificultades para aplicar la multiplicación repetida para determinar el número de personas enteradas.	a) Proponer a los estudiantes dejar las operaciones aritméticas indicadas para que puedan observar el patrón que presenta la información que están obteniendo
4. Los estudiantes no logran identificar la relación que existe entre los intervalos de tiempo y el número de personas que se enteran a una hora establecida	a) Calcular el número de personas que se enteran exactamente a las 10:10 hrs b) Calcular el número de personas que se enteran exactamente a las 10:40 hrs. c) Si se sabe que se enteran 16 personas. Determinar el tiempo requerido. d) Si se sabe que se enteran 128 personas. Determinar el tiempo requerido
5. Los estudiantes no pueden justificar o argumentar sus respuestas.	a) Proponer el uso de diferentes representaciones b) Describir verbalmente el proceso de resolución c) Hacer por medio de un diagrama de flujo el proceso de resolución
Bloque II: tareas 1 y 2 Fractales	
Dificultades de los estudiantes	Acciones del profesor (propuestas)
1. Los estudiantes no pueden describir la forma en que disminuye la longitud de las partes de la figura con las divisiones.	a) Hacer una simulación con segmentos que al dividirlos el resultado sean números enteros (segmento inicial de longitud 9).
2. Los estudiantes no pueden identificar las variables involucradas en estos problemas. (Relación entre el número de partes en que se divide cada segmento –*base*— con el número de divisiones que se le hacen –*exponente*—).	a) Proponer la elaboración de una tabla y organizar en ella la información que van generando b) Proporcionar la tabla para que sea llenada por los estudiantes c) Proporcionar una tabla con diferentes niveles de llenado
3. Dificultades para aplicar la multiplicación repetida de fracciones para calcular la longitud de las partes de la figura.	a) Proponer a los estudiantes dejar las operaciones aritméticas suspendidas para que puedan observar el patrón que presenta la información que están obteniendo.

	b) Proporcionar el algoritmo para la multiplicación de fracciones.
4. Los estudiantes no logran identificar la relación que existe entre el número de divisiones os intervalos de tiempo y el número de personas que se enteran a una hora establecida,	a) Calcular la longitud de las partes de la figura en la primera división b) Calcular la longitud de las partes de la figura en la cuarta división c) Si cada parte de la figura mide 1/27. Preguntar cuantas divisiones se hicieron d) Si cada parte de la figura mide 1/243. Preguntar cuantas divisiones se hicieron
5. Los estudiantes no pueden justificar o argumentar sus respuestas.	a) Proponer el uso de diferentes representaciones b) Describir verbalmente el proceso de resolución c) Hacer por medio de un diagrama de flujo el proceso de resolución

Tabla 5.3:Dificultades de los estudiantes y acciones del profesor

5.3 Estrategia didáctica

Finalmente, para la resolución de las tareas, se tiene contemplada la siguiente estrategia:

1. Inicialmente el profesor entrega una hoja de trabajo a cada estudiante y les pide que la analicen. Esta hoja, contiene la introducción a la fenomenología y la situación problema que los estudiantes intentarán resolver en 55 minutos.
2. Después, el profesor, inicia una discusión grupal en torno a la fenomenología donde se enmarca la situación problema, con el propósito de sensibilizar a los estudiantes alrededor de este tipo de situaciones (5 minutos).
3. Para continuar, el profesor les pide a los estudiantes que la resolución de esta situación se llevará a cabo de manera individual y únicamente podrán interactuar con el profesor de manera personal (25 minutos).
4. Para intentar rescatar a los estudiantes que presenten dificultades en la resolución del problema, se les pedirá a sus compañeros que si hayan logrado avanzar en el proceso de resolución para que expongan sus conclusiones al resto del grupo. Estas exposiciones se

harán con el propósito de homogenizar los avances en la resolución y tratar de que los estudiantes que presentaron dificultades puedan continuar (5 minutos).

5. Si persisten las dificultades, el profesor les pedirá a los estudiantes que resuelvan el problema en equipos de 2 personas, incluyendo en cada equipo un elemento que si haya logrado avances significativos en el proceso de resolución. (En este escenario, la negociación de significados se dará entre los miembros del equipo –*al interior*— o con el profesor (10 minutos).
6. Una vez que se haya logrado la resolución del problema, el profesor seleccionará a los equipos para que expongan sus resultados o propuestas de resolución a través de una discusión grupal –*plenaria*— (10 minutos). La selección anterior, tiene como objetivo enriquecer los significados que los estudiantes hayan construido durante el proceso de resolución, al llevarse a cabo las negociaciones entre ellos. Además, los criterios que utilizaremos para la selección de los equipos serán: Equipos que arribaron a la solución del problema y variantes en los tipos de respuesta presentados.

Capítulo 6

Análisis de actuación, conclusiones y sugerencias

En este capítulo, presentamos un condensado del análisis de la actuación que tuvieron cuatro estudiantes, cuando se puso en escena la secuencia didáctica, que diseñamos para promover el aprendizaje del objeto matemático potencia. Además, incluimos, las conclusiones finales, y las sugerencias.

6.1 Análisis de actuación

El análisis de actuación debe basarse en el análisis de la actuación de los estudiantes durante la puesta en escena de la secuencia didáctica y, al interactuar con los compañeros de clase y el profesor. (Gómez, 2002)

Con este análisis, se concluye el primer ciclo del análisis didáctico y con la información que se obtiene de la puesta en escena de la secuencia didáctica, determinamos la comprensión de los estudiantes en ese momento, además contaremos con elementos para preparar los contenidos a tratar en el salón de clases y la determinación de objetivos de aprendizaje para el nuevo ciclo.

6.1.1 Propósitos del análisis de actuación

1. Establecer el seguimiento del avance logrado por los estudiantes, el cual podemos determinar al contrastar las predicciones que se hicieron en la planificación, con lo que sucedió realmente cuando la secuencia didáctica se puso piloteó.
2. Determinar los logros y deficiencias de la secuencia didácticas cuando se piloteó en el salón de clases.
3. Disponer de elementos para caracterizar el aprendizaje de los estudiantes con el pilotaje de la secuencia didáctica.
4. Obtener información significativa para la planificación de un nuevo ciclo del análisis didáctico.

6.1.2 Antecedentes de la muestra

Durante el semestre 2010-2, se utilizó un grupo del turno matutino generación 10-13 que se conforma por 50 estudiantes y que actualmente cursan el primer semestre de bachillerato tecnológico del subsistema CBTIS. A este grupo, se le imparte la asignatura Álgebra en horario de 10:50 a 12:30 los lunes, de 10:50 a 11:40 los martes y los miércoles de 7:55 a 8:40. Del total de los 50 alumnos del grupo, se tomó una muestra de cuatro estudiantes para llevar a la práctica esta versión de la secuencia didáctica. Esta muestra se tomó haciendo una invitación al grupo donde se solicitaba la participación de cuatro estudiantes que estuvieran dispuestos a realizar una actividad relacionada con la clase de Álgebra. Además, el carácter de su participación sería de primera instancia de manera voluntaria y sin especificar el tema o concepto que se pondría en juego. Únicamente se expuso que se trataba de una actividad extra clase. Consideramos pertinente declarar, que los estudiantes que trabajaran con las tareas propuestas son estudiantes de primer ingreso. Por lo anterior, no se tiene historial de su rendimiento académico o de sus calificaciones. Además, el curso de Álgebra, es básicamente el primer curso de matemáticas que se le imparte a este grupo en el bachillerato.

Estos estudiantes, al menos teóricamente han trabajado bajo los lineamientos de la Reforma en Secundaria 2006. Esta reforma, plantea un enfoque basado en competencias y presenta una metodología de trabajo con base en resolución de problemas, se promueve el sentido numérico y pensamiento algebraico, etc. Además, durante la educación que recibieron en el nivel precedente, estos estudiantes, tuvieron contacto con el manejo del objeto matemático potencia y sus características o propiedades a través de las leyes de los exponentes, utilizando representaciones numéricas, analíticas y geométricas.

6.1.3 Análisis de resultados

En este apartado, presentamos un condensado del análisis de las actuaciones que tuvieron cuatro estudiantes con la primera versión de las tareas que conforman la secuencia didáctica. Los resultados, los organizamos con las actividades que hicieron los estudiantes (figuras), además incluimos las capacidades que pusieron en juego; las trayectorias que siguieron; los obstáculos, errores y dificultades que exteriorizaron y las competencias disciplinares matemáticas propuestas por la RIEMS 2008 a las que contribuyeron cada una de las tareas que se pilotearon.

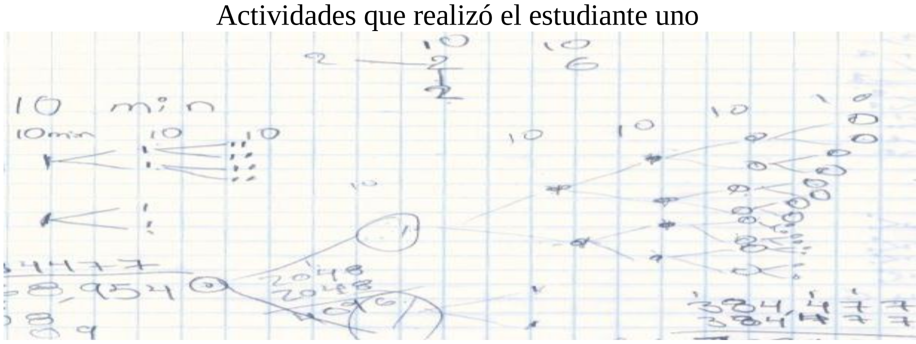
6.1.3.1 Tipos de tareas I (problemas de crecimiento exponencial)

<u>Tarea1</u>

1. Una persona se entera de un secreto que una familia guarda celosamente en un documento a las 10 de la mañana (10:00 AM), y transcurridos 10 minutos (10:10 AM), lo cuenta a sus dos mejores amigos pidiéndoles que lo mantengan en secreto. Pero, diez minutos después estas personas rompen el pacto de confianza contándoselo cada una a otros dos íntimos amigos. Si este secreto fuera contado de este modo, siempre cada diez minutos y siempre a dos nuevos amigos que no lo conocían. Y, considerando que en Hermosillo, Sonora hay 768954 habitantes. ¿A qué horas estarán todos los habitantes enterados?

Tarea 1: (estudiante 1). Para la resolución de esta tarea, este estudiante, inició haciendo algunas simulaciones a través de diagramas (conversión), mediante los cuales intentaba extraer la parte matemática de la situación que se le presentó en lenguaje natural. En estos diagramas, se percibe que el estudiante logró identificar las variables involucradas en esta situación –*intervalos de tiempo de 10 minutos y personas que se enteran en cada intervalo*— (figura 6.1).

Actividades que realizó el estudiante uno



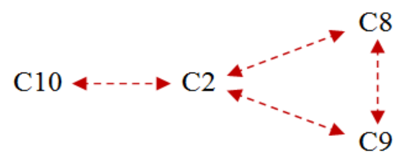
Pasó del lenguaje natural al diagrama (Conversión)

Figura 6.1

Capacidades Puestas en juego

C2 Elabora diagramas que describen la situación problema con sus principales variables.
C8 Registra sus ideas en diagramas.
C9 Comunica sus ideas con diagramas.
C10 Interpreta fenómenos naturales, sociales y matemáticos usando y creando diferentes representaciones.

Trayectorias cognitivas



Obstáculos, errores y dificultades

Error: división del total de habitantes de Hermosillo entre dos, no resuelve el problema

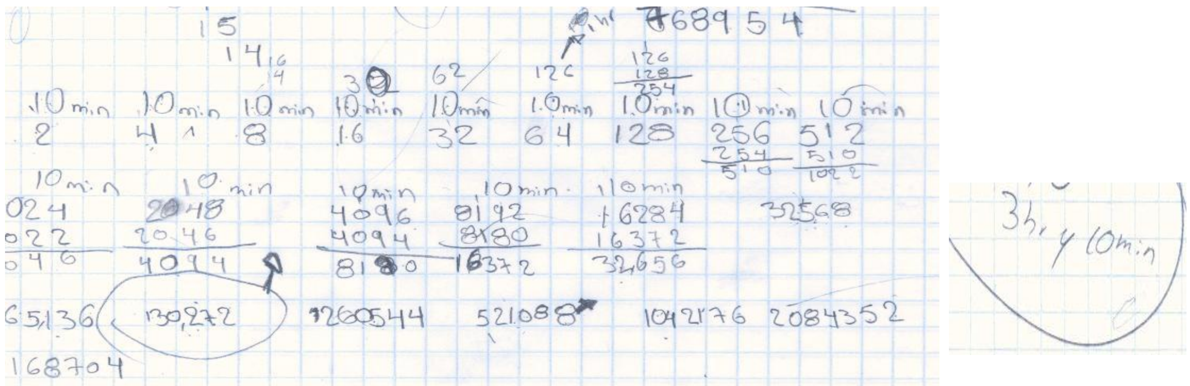
Dificultades para calcular las personas que se enteran en cada intervalo de tiempo y para continuar simulando la situación en el diagrama.

Competencias disciplinares matemáticas promovidas

2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

Para continuar el proceso de resolución, este estudiante organizó la información que interpretó del diagrama en tres filas (conversión), en la primera anotó los intervalos de tiempo de diez minutos; en la segunda el número de amigos que se enteran del secreto en cada instante y por último en la tercera fila hizo una acumulación de las personas que están enteradas hasta ese momento. Para concluir esta tarea, este estudiante hace una acumulación de las personas enteradas y de los intervalos de tiempo que transcurren cada vez que se cuenta de nuevo el secreto y encontró como solución 3 hrs y 10 minutos. Es importante declarar que lo que plasmamos en estas hojas son nuestras interpretaciones acerca de las evidencias mostradas en las hojas de trabajo de este estudiante. Además, a pesar de que se les pidió que redactaran brevemente la solución. Este estudiante solo logra escribir lo que se muestra en la figura 6.2 como la solución del problema. En concreto, este estudiante, aun cuando llegó a la respuesta correcta, no pudo justificar mediante otra representación.

Actividades que realizó el estudiante uno



Pasa del diagrama a la representación numérica (conversión)

Figura 6.2

Capacidades Puestas en juego

C1 Identifica las principales variables (base y el exponente) de una situación problema, construye tablas y organiza la información

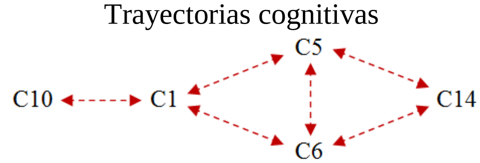
C5 Registra sus ideas en tablas.

C6 Comunica sus ideas por medio de tablas

C10 Interpreta fenómenos naturales, sociales y matemáticos usando y creando diferentes representaciones.

C14 Justifica la solución de los problemas matemáticamente por medio del lenguaje numérico

Trayectorias cognitivas



Obstáculos, errores y dificultades

Obstáculos: Al realizar las multiplicaciones repetidas no logra dejar las operaciones matemáticas suspendidas y le impide detectar patrones que lo ayuden a resolver el problema.

Errores: No considera la primera persona que se entera del secreto, por lo tanto no logrará hacer la acumulación correcta para la solución final.

Dificultades para expresar verbalmente la solución final.

Competencias disciplinares matemáticas promovidas

2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.

3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.

5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su

comportamiento.

Con el propósito de que los estudiantes encontraran la relación entre las variables involucradas, se le proporcionó una nueva hoja de trabajo (ver figura 6.3). Cabe aclarar que esta tabla no tuvo el impacto esperado, ya que solo utilizaron la tabla para incluir la información que habían generado anteriormente, sin buscar las relaciones pretendidas.

Actividades que realiza el estudiante uno

c) Organiza la información en la siguiente tabla

Hora	~~Veces que se cuenta el secreto~~ No. de intervalos de tiempo	Cálculos realizados para determinar el número de personas que se enteran del secreto exactamente a esta hora	Número de personas que se enteran del secreto exactamente a esta hora	Número total de habitantes que se han enterado del secreto hasta esta hora
10:00	0		1	1
10:10	1		2	3
10:20	2		4	7
10:30	3		8	15
10:40	4		16	31
10:50	5		32	63

Figura 6.3

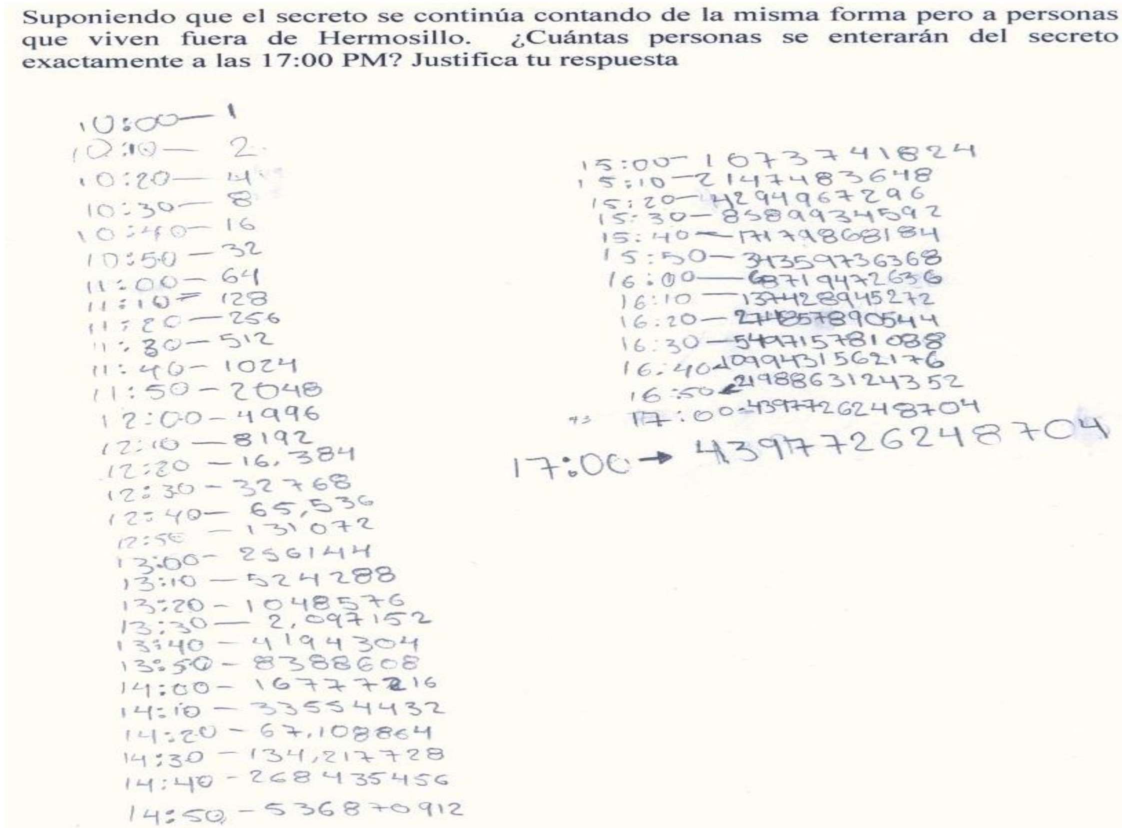
La siguiente sesión de trabajo, iniciamos con una variante del problema original. En esta versión (Tarea 2), se alejó un poco la solución del problema con el objetivo que los estudiantes no lograran hacer las multiplicaciones en las calculadoras, dado que los resultados rebasarían los dígitos de las mismas y esto los conduciría a buscar alternativas para arribar a la solución del problema.

El objetivo que nos planteamos originalmente, no se cumplió, ya que en el momento que los resultados rebasaron los dígitos de la calculadora y los observaban en notación científica, los estudiantes se regresaron a continuar realizando las multiplicaciones manualmente hasta que obtuvieron la solución del problema.

En esta etapa, se observó una mayor seguridad al momento de iniciar la resolución (ver figura. 6.4). En esta ocasión nuevamente los estudiante encuentran la solución del problema numéricamente, pero aunque oralmente si justifican la solución, no logran hacer una descripción escrita de la misma.

Actividades que realizó el estudiante uno

Tarea 2.


Suponiendo que el secreto se continúa contando de la misma forma pero a personas que viven fuera de Hermosillo. ¿Cuántas personas se enterarán del secreto exactamente a las 17:00 PM? Justifica tu respuesta

10:00 — 1
10:10 — 2
10:20 — 4
10:30 — 8
10:40 — 16
10:50 — 32
11:00 — 64
11:10 — 128
11:20 — 256
11:30 — 512
11:40 — 1024
11:50 — 2048
12:00 — 4096
12:10 — 8192
12:20 — 16,384
12:30 — 32768
12:40 — 65,536
12:50 — 131072
13:00 — 256144
13:10 — 524288
13:20 — 1048576
13:30 — 2,097152
13:40 — 4194304
13:50 — 8388608
14:00 — 16777216
14:10 — 33554432
14:20 — 67,108864
14:30 — 134,217728
14:40 — 268435456
14:50 — 536870912

15:00 — 1073741824
15:10 — 2147483648
15:20 — 4294967296
15:30 — 8589934592
15:40 — 17179868184
15:50 — 34359736368
16:00 — 68719472636
16:10 — 137428945272
16:20 — 274857890544
16:30 — 549715781088
16:40 — 1099431562176
16:50 — 2198863124352
17:00 — 4397726248704

17:00 → 4397726248704

Pasa de la representación del enunciado en la lengua natural a la representación numérica(conversión)

Figura 6.4

Capacidades Puestas en juego

C1 Identifica las principales variables (base y el exponente) de una situación problema, construye tablas y organiza la información

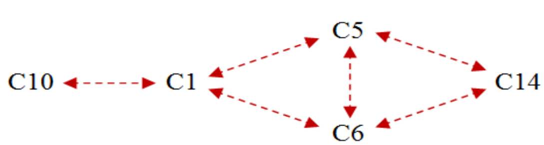
C5 Registra sus ideas en tablas.

C6 Comunica sus ideas por medio de tablas

C10 Interpreta fenómenos naturales, sociales y matemáticos usando y creando diferentes representaciones

C14 Justifica la solución de los problemas matemáticamente por medio del lenguaje numérico

Trayectorias cognitivas



Obstáculos, errores y dificultades

Obstáculo: Aplicar la multiplicación en cada intervalo de tiempo; dificultades para encontrar relaciones entre las variables involucradas.

Competencias disciplinares matemáticas promovidas

2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.
3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

En la siguiente tarea (3) que conforma la secuencia, se modificó la variable intervalo de tiempo de 10 minutos a 5 minutos, con el propósito que los estudiantes observaran la relación que existe entre los intervalos de tiempo y el número de personas que se enteran del secreto.

Tres estudiantes hicieron la interpretación correcta. Solo este estudiante (1), no detecta el cambio en los intervalos de tiempo (5 minutos) y resuelve el problema matemáticamente considerando los intervalos de tiempo de 10 minutos pero sin intentar conectar el resultado con la situación que estaba resolviendo.

Una vez que los estudiantes, llegaron a la "solución" y observando que seguían multiplicando repetidamente por dos, sin hacer intentos de buscar las relaciones entre las variables involucradas, se llevó a cabo una integración en equipos de dos personas, para ver si lográbamos concretar el objetivo que nos habíamos propuesto. Aclaramos que aún cuando las negociaciones se dieron en equipo, cada integrante resolvió en su hoja de trabajo el problema. El equipo uno quedó conformado por los estudiantes uno y dos y el equipo dos por los estudiantes tres y cuatro. Por lo anterior cuando nos estemos refiriendo al estudiante uno o dos haremos referencia al equipo uno y lo mismo para el equipo dos y los estudiantes tres y cuatro.

En esta ocasión, el profesor comentó a los estudiantes sobre la importancia en matemáticas de dejar las operaciones suspendidas (indicadas) en la búsqueda de patrones que nos permitan generalizar los resultados obtenidos. Además les resaltó que por obvias que les parezcan algunas operaciones que ellos pueden realizar mentalmente las debe comunicar por medio de alguna representación. Con lo anterior, el profesor puede tener acceso a la matemática que están intentando aplicar los estudiantes. Después, los conduce a retomar desde el primer intervalo de tiempo las operaciones que realizaron para llegar a los resultados finales. Además, fue necesario recurrir a las fórmulas de cálculo de áreas para lograr que emergiera la noción de exponente.

Actividades que realiza el estudiante uno

Tarea 3

3. **Si consideramos que la persona que se enteró del secreto, lo cuenta a sus dos mejores amigas, 5 minutos después de conocerlo; y que sus amigas a su vez, lo cuentan también cada una de ellas a dos nuevas personas, 5 minutos después de conocer el secreto y así sucesivamente. ¿Cuántas personas conocerán el secreto a las 17:00 de la tarde? Justifica tu respuesta.**

Al pasar del enunciado a la tabla (conversión)

a) Organiza la información en la siguiente tabla

Hora	veces contado	Personas Enteradas	Personas total
10:00	veces contado	Personas enteradas x	Personas total
10:10	1	2	3
10:20	2	$4 = 2\times2 = 2^2$	7
10:30	3	$8 = 2\times2\times2 = 2^3$	15
10:40	4	16 2^4	31
10:50	5	32 2^5	63
11:00	6	64 2^6	127
11:10	7	128 2^7	255
11:20	8	256 2^8	511
11:30	9	512 2^9	1023
11:40	10	1024 2^{10}	2047
11:50		2048 2^{11}	4095 $-1\}x+y$
12:00		4096 2^{12}	8191
12:10		8192 2^{13}	16383
12:20		16,384 2^{14}	32,767
12:30		32,768 2^{15}	65,535
12:40		65536 2^{16}	131,071
12:50		131,072 2^{17}	262,143
1:00		262,144 2^{18}	524287
1:10		524,288 2^{19}	1048575
1:20		4397726248704	
1:30			

Tratamientos

Elevas el dos al numero de veces que lo cuentas.

4397726248703 2^{42}
4397726248704
8795452497407

se multiplica el numero de personas enteradas por 2.

8,795,452,497,407

se multiplica el numero de personas en total, mas 1

Figura 6.5

Capacidades Puestas en juego

C1 Identifica las principales variables (base y el exponente) de una situación problema, construye tablas y organiza la información

C5 Registra sus ideas en tablas

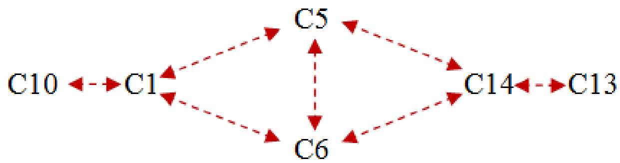
C6 Comunica sus ideas por medio de tablas

C10 Interpreta fenómenos sociales usando y creando diferentes representaciones

C13 Justifica la solución de los problemas matemáticamente por medio del lenguaje natural

C14 Justifica la solución de los problemas matemáticamente por medio del lenguaje numérico

Trayectorias cognitivas



Obstáculos, errores y dificultades

Obstáculo: El total de personas enteradas del secreto.
Errores: No representa correctamente los intervalos de tiempo (5 minutos); el total de personas enteradas.
Dificultades: La representación del exponente cero y el exponente uno; dificultades para interpretar el resultado final.

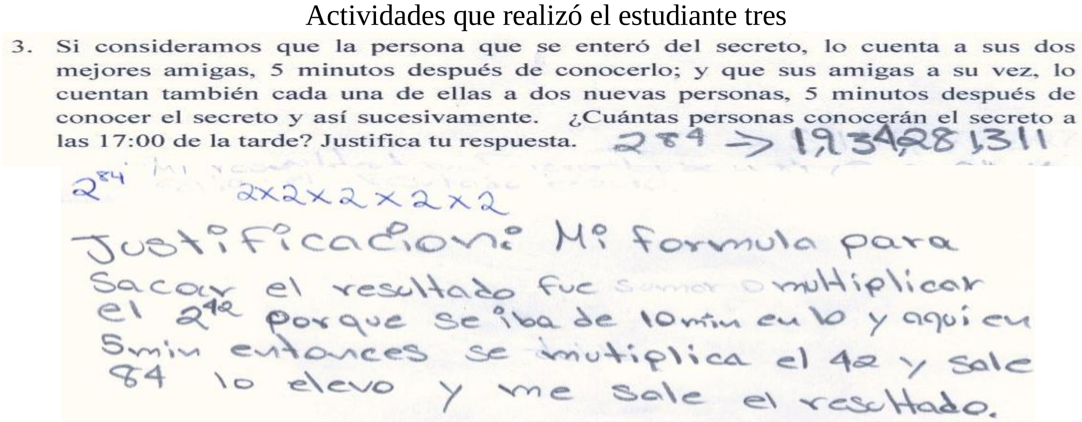
Competencias disciplinares matemáticas promovidas

2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.
3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

El estudiante tres por su parte, al inicio realizó un procedimiento similar al estudiante uno. Pero, cuando realizó los tratamientos para pasar de los números naturales a la potencia hizo una especie de comprobación con la calculadora. Al pedirle la justificación del mismo, la presentó explicando el significado que ha construido de la potencia durante este proceso de resolución de problemas. En otras palabras este estudiante encontró una fórmula para resolver problemas (ver figura 6.6).

Actividades que realizó el estudiante tres

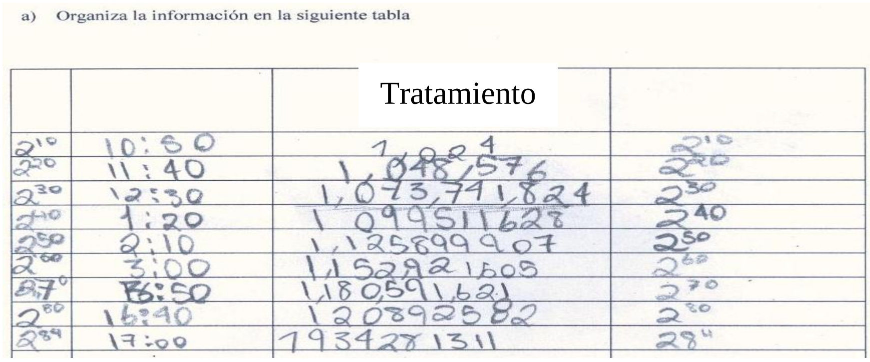
Conversión



3. Si consideramos que la persona que se enteró del secreto, lo cuenta a sus dos mejores amigas, 5 minutos después de conocerlo; y que sus amigas a su vez, lo cuentan también cada una de ellas a dos nuevas personas, 5 minutos después de conocer el secreto y así sucesivamente. ¿Cuántas personas conocerán el secreto a las 17:00 de la tarde? Justifica tu respuesta. 2^{84} → 1,934,281,311

2^{84} 2x2x2x2x2

Justificación: Mi formula para sacar el resultado fue ~~sumar o~~ multiplicar el 2^{42} porque se iba de 10 min en 10 y aquí en 5 min entonces se mutiplica el 42 y sale 84 lo elevo y me sale el resultado.



a) Organiza la información en la siguiente tabla

Tratamiento

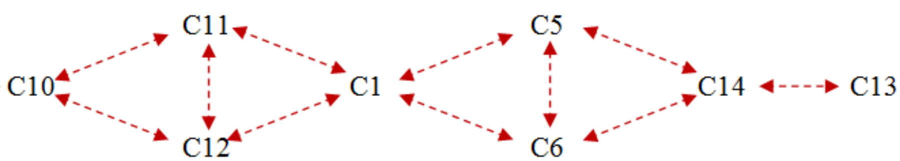
2^{10}	10:60	1,024	2^{10}
2^{20}	11:40	1,048,576	2^{20}
2^{30}	12:30	1,073,741,824	2^{30}
2^{40}	1:20	1 099511628	2^{40}
2^{50}	2:10	1,125899907	2^{50}
2^{60}	3:00	1,152921505	2^{60}
2^{70}	15:50	1,180591621	2^{70}
2^{80}	16:40	120892582	2^{80}
2^{84}	17:00	193428131	2^{84}

Figura 6.6

Capacidades Puestas en juego

C1 Identifica las principales variables (base y el exponente) de una situación problema, construye tablas y organiza la información
C5 Registra sus ideas en tablas.
C6 Comunica sus ideas por medio de tablas
C10 Interpreta fenómenos naturales, sociales y matemáticos usando y creando diferentes representaciones.
C11 Aplica modelos para interpretar fenómenos diversos.
C12 Genera y aplica modelos matemáticos en diferentes contextos.
C13 Justifica la solución de los problemas por medio del lenguaje natural
C14 Justifica la solución de los problemas matemáticamente por medio del lenguaje numérico

Trayectorias cognitivas



Obstáculos, errores y dificultades

Obstáculos: el uso de la calculadora para multiplicar y comprobar resultados le impide trabajar solamente con potencias.

Error en los intervalos de tiempo de 10 minutos

Competencias disciplinares matemáticas promovidas

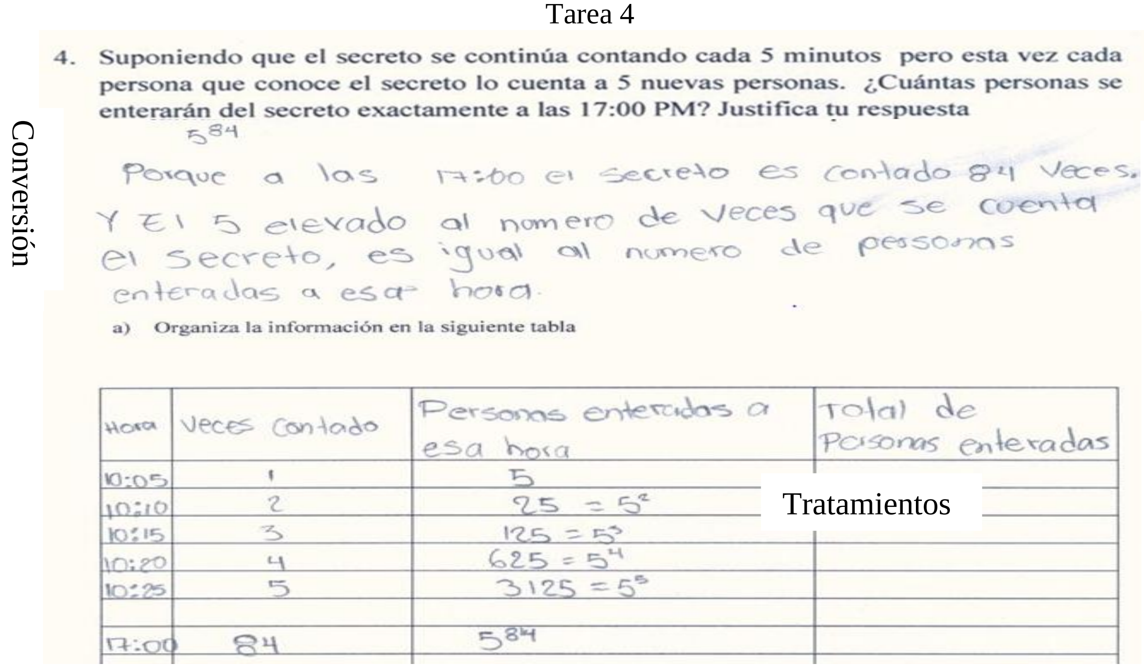
1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.
3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.

En la tarea 4, el estudiante uno logró identificar las variables involucradas en esta situación (intervalos de 5 minutos y cada persona que conoce el secreto lo cuenta a 5 nuevas personas que no lo conocen) y aplicó la potencia para resolverla. Es decir, esta nueva herramienta matemática ocupó el lugar que originalmente tenía para él la multiplicación repetida. Es importante mencionar que aún no se ha institucionalizado la definición de potencia.

Una vez que este estudiante arribó a la solución, se le pidió que justificara su respuesta con el propósito de observar si el estudiante era capaz de abandonar la parte matemática del problema y regresar al contexto y proponer la solución. Para hacer lo anterior, este estudiante pidió una tabla y escribió lo que presentamos en la figura 6.7. Al parecer, trató de mostrar la relacion que describio textualmente anteriormente.

Actividades que realizó el estudiante uno

Tarea 4



4. **Suponiendo que el secreto se continúa contando cada 5 minutos pero esta vez cada persona que conoce el secreto lo cuenta a 5 nuevas personas. ¿Cuántas personas se enterarán del secreto exactamente a las 17:00 PM? Justifica tu respuesta**

5^{84}

Porque a las 17:00 el secreto es contado 84 veces. Y El 5 elevado al nomero de veces que se cuenta el secreto, es igual al numero de personas enteradas a esa hora.

a) **Organiza la información en la siguiente tabla**

Hora	Veces contado	Personas enteradas a esa hora	Total de Personas enteradas
10:05	1	5	
10:10	2	$25 = 5^2$	
10:15	3	$125 = 5^3$	
10:20	4	$625 = 5^4$	
10:25	5	$3125 = 5^5$	
17:00	84	5^{84}	

Figura 6.7

Capacidades Puestas en juego

C1 Identifica las principales variables (base y el exponente) de una situación problema, construye tablas y organiza la información

C5 Registra sus ideas en tablas

C6 Comunica sus ideas por medio de tablas

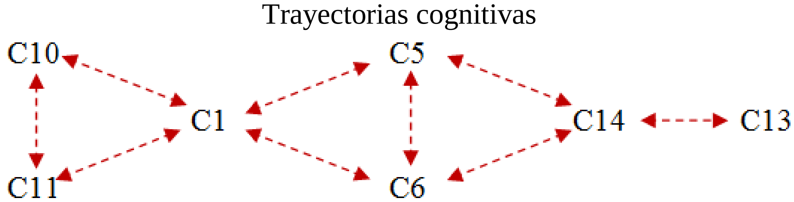
C10 Interpreta fenómenos sociales usando y creando diferentes representaciones

C11 Aplica modelos para interpretar fenómenos diversos

C13 Justifica la solución de los problemas por medio del lenguaje natural

C14 Justifica la solución de los problemas matemáticamente por medio del lenguaje numérico

Trayectorias cognitivas



Obstáculos, errores y dificultades

Dificultades para representar los exponentes cero y uno.

Errores: No considera el tiempo inicial ni la primera persona que se entera del secreto.

Competencias disciplinares matemáticas promovidas

1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.
3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.

Como actividad de cierre de este tipo de tareas, los estudiantes resolvieron la tarea 5. En esta tarea, se les proporcionó la información que en el problema original era la incógnita y se les cuestionó acerca de la forma como sería contado el secreto. Esta variante la hicimos con el propósito de conocer si se había logrado alguna comprensión por parte de los estudiantes. Es decir, si ya era capaz de recorrer el camino hacia adelante en este tipo de situaciones, queríamos observar si era capaz de transitarlo también de regreso (ver figura 6.8).

Actividades que realiza el estudiante uno

5. Si este secreto que se conoció a las 10:00AM lo conocen a las 12:30 exactamente 1073741824 personas. ¿Cuál fue la forma como se enteraron? Es decir, la primera persona que se enteró del secreto se lo contó a cuantas personas. Estas nuevas personas que lo conocen a cuántas personas se lo contaron cada una de ellas, etc. ¿Cada cuanto tiempo se contaba el secreto? Justifique su respuesta

Cada 5 min, porque para las 12:30 el secreto se cuenta 30 veces y, El 2 elevado al numero de veces que se cuenta el secreto es igual al numero de personas enteradas a esa hora.

a) Organiza la información en la siguiente tabla

Hora	Veces Contado	Personas enteradas a esa hora
10:00	0	1
10:05	1	2
10:10	2	$4 = 2^2$
10:15	3	$8 = 2^3$
10:20	4	$16 = 2^4$
10:25	5	$32 = 2^5$
12:30	30	$1,073,741,824 = 2^{30}$

Figura 6.8

Capacidades Puestas en juego

C1 Identifica las principales variables (base y el exponente) de una situación problema, construye tablas y organiza la información

C5 Registra sus ideas en tablas

C6 Comunica sus ideas por medio de tablas

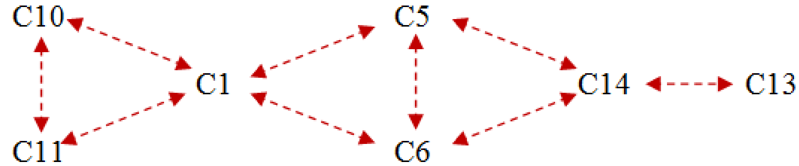
C10 Interpreta fenómenos sociales usando y creando diferentes representaciones

C11 Aplica modelos para interpretar fenómenos diversos

C13 Justifica la solución de los problemas por medio del lenguaje natural

C14 Justifica la solución de los problemas matemáticamente por medio del lenguaje numérico

Trayectorias cognitivas



Obstáculos, errores y dificultades

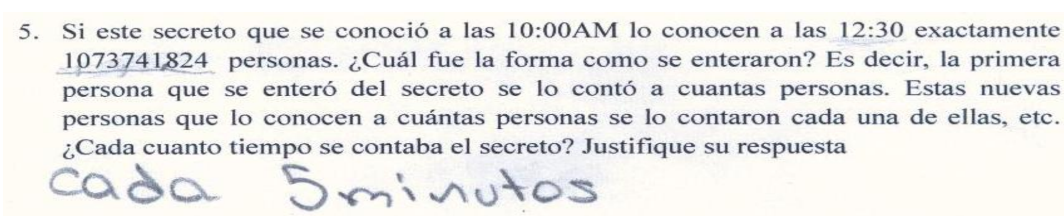
Dificultades para representar los exponentes cero y uno.

Competencias disciplinares matemáticas promovidas

1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.
3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.

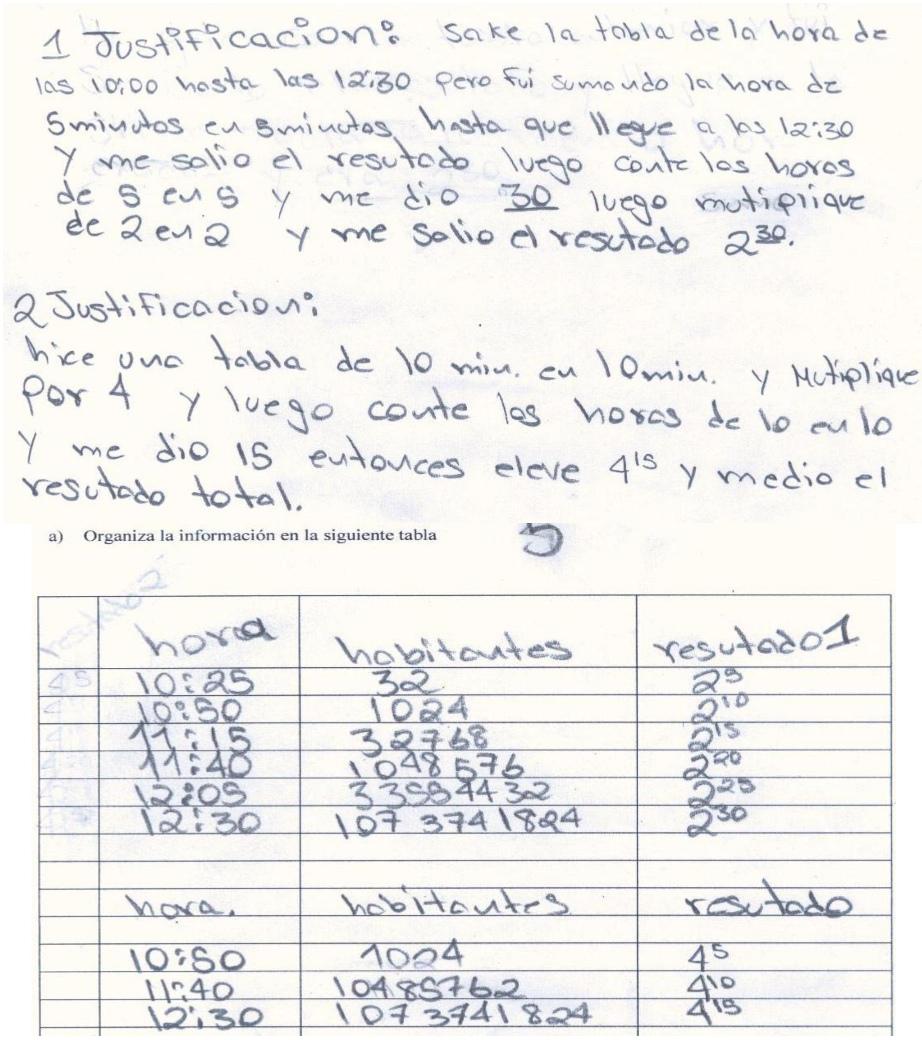
Por su parte, el estudiante 3 recordó que anteriormente resolvió un problema y esta respuesta era parte del proceso de resolución. Ante esta respuesta inesperada, el profesor reacciona y le pregunta verbalmente si existe otra solución distinta y por prueba y error encuentra una equivalente (ver figura 6.9).

Actividades que realizó el estudiante tres



5. Si este secreto que se conoció a las 10:00AM lo conocen a las 12:30 exactamente 1073741824 personas. ¿Cuál fue la forma como se enteraron? Es decir, la primera persona que se enteró del secreto se lo contó a cuantas personas. Estas nuevas personas que lo conocen a cuántas personas se lo contaron cada una de ellas, etc. ¿Cada cuanto tiempo se contaba el secreto? Justifique su respuesta

cada 5minutos



1 Justificacion: Sake la tabla de la hora de las 10:00 hasta las 12:30 pero fui sumando la hora de 5minutos en 5minutos hasta que llegue a las 12:30 Y me salio el resutado luego conte las horas de 5 en 5 y me dio 30 luego mutipique de 2 en 2 y me salio el resutado 2^{30}.

2 Justificacion: hice una tabla de 10 min. en 10min. y Mutiplique por 4 y luego conte las horas de 10 en 10 Y me dio 15 entonces eleve 4^{15} y medio el resutado total.

a) Organiza la información en la siguiente tabla

hora	habitantes	resutado1
10:25	32	2^5
10:50	1024	2^{10}
11:15	32768	2^{15}
11:40	1048576	2^{20}
12:05	33554432	2^{25}
12:30	107 3741824	2^{30}

hora.	habitantes	resutado
10:50	1024	4^5
11:40	10485762	4^{10}
12:30	107 3741824	4^{15}

Figura 6.9

Capacidades Puestas en juego

C1 Identifica las principales variables (base y el exponente) de una situación problema, construye tablas y organiza la información

C5 Registra sus ideas en tablas.

C6 Comunica sus ideas por medio de tablas

C10 Interpreta fenómenos naturales, sociales y matemáticos usando y creando diferentes representaciones.

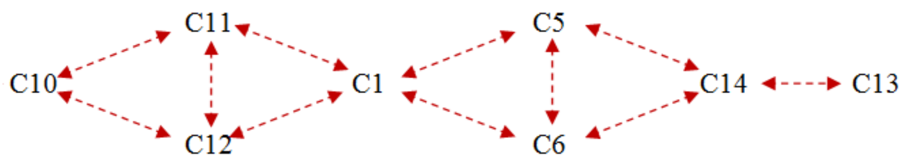
C11 Aplica modelos para interpretar fenómenos diversos.

C12 Genera y aplica modelos matemáticos en diferentes contextos.

C13 Justifica la solución de los problemas por medio del lenguaje natural

C14 Justifica la solución de los problemas matemáticamente por medio del lenguaje numérico

Trayectorias cognitivas



Obstáculos, errores y dificultades

Obstáculos: Representar los resultados como potencia y paralelamente llevar utilizar la calculadora para dar los resultados en el dominio de los números naturales. Lo anterior no le permite desprenderse de las estructuras multiplicativas.

Dificultades para expresar verbalmente la solución del problema.

Competencias disciplinares matemáticas promovidas

1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.

2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.

3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.

5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia

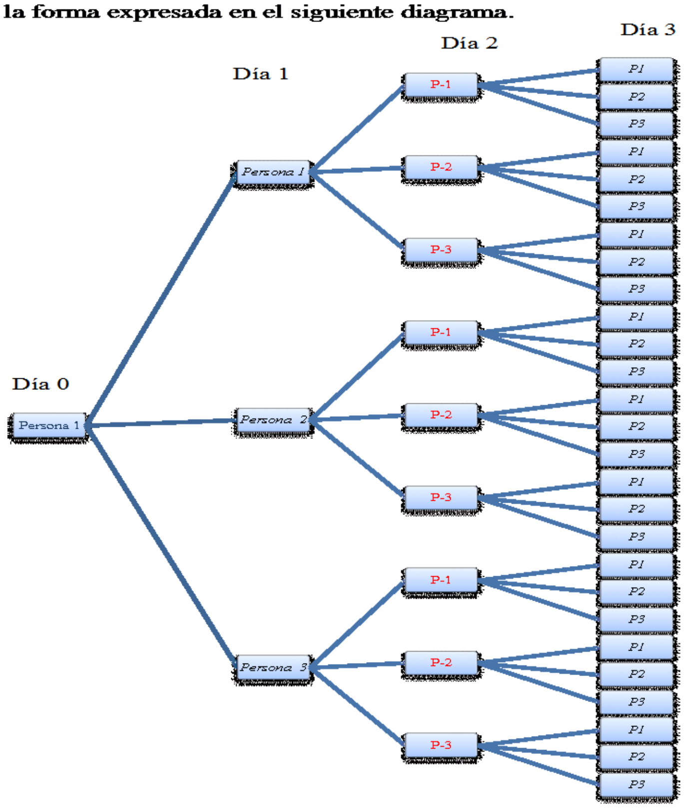
La siguiente tarea (6), fue un trabajo extra clase que los estudiantes realizaron una vez que se terminó con la secuencia de tareas mostrada anteriormente. El propósito de esta tarea fue conocer si los estudiantes eran capaces de interpretar la información contenida en un diagrama y resolver lo que se les cuestionaba.

Hoja de trabajo

Tarea 6

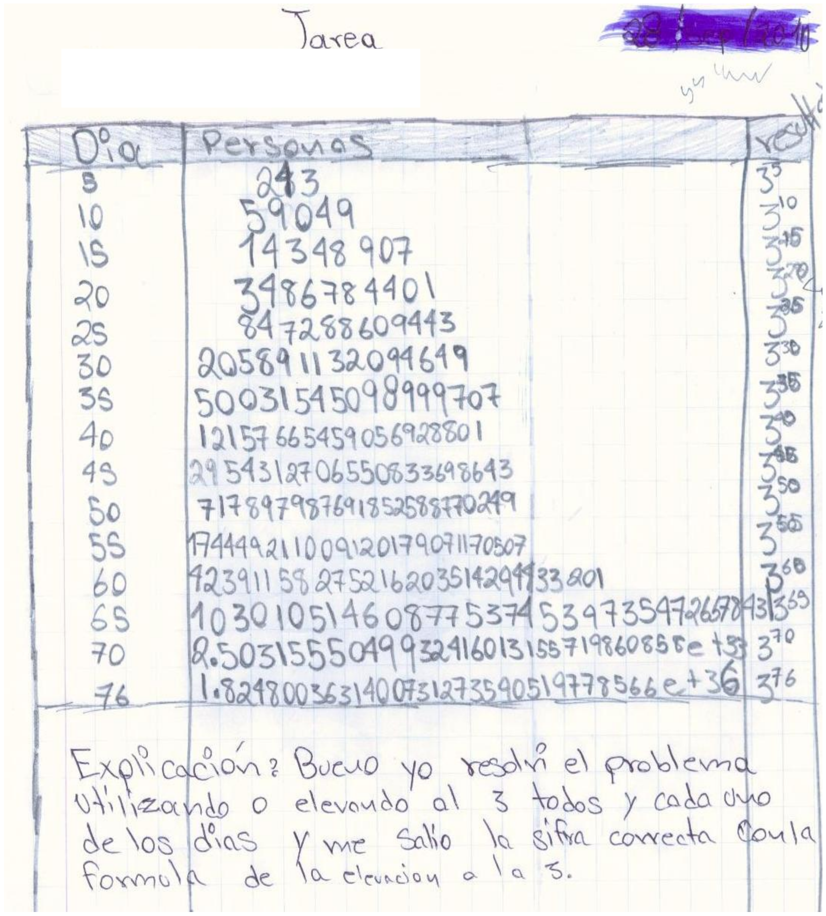
Estudiante: ______________________________ **Tiempo: 55minutos**

Encuentra cuantas personas pueden enterarse de un secreto el día 76, si la información se transfiere diariamente de la forma expresada en el siguiente diagrama.



Ante esta tarea, el estudiante tres interpretó el diagrama correctamente, determinó las variables involucradas en la situación problema y construyó una tabla. En ésta, expresó la forma como se contaba el secreto. Es decir, cada persona que lo conocía se lo contaba a tres nuevas personas y así sucesivamente. Para resolverlo, multiplicó repetidamente por tres y comprobaba con la calculadora por medio de potencias. A manera de ejemplificar verificaba haciendo tratamientos en esta representación si 3x3x3 era igual a 3^3, etc. Todo el proceso anterior lo realizó sistemáticamente y cuando finalizó la tarea, él consideraba a la potencia como una fórmula (modelo) para resolver problemas correctamente. En ese momento se le cuestionó acerca de lo que significaba una fórmula y no logró concretarlo. Cabe aclarar que aun cuando el resultado es correcto la forma como lo explicó en la lengua natural (verbalmente) no corresponde a dicho resultado (ver figura 6.10).

Actividades que realizó el estudiante tres



Tarea [redacted]

Día	Personas	resultado
5	243	3^5
10	59049	3^{10}
15	14348907	3^{15}
20	3486784401	3^{20}
25	847288609443	3^{25}
30	205891132094649	3^{30}
35	50031545098999707	3^{35}
40	12157665459056928801	3^{40}
45	2954312706550833698643	3^{45}
50	717897987691852588770249	3^{50}
55	174449211009120179071170507	3^{55}
60	42391158275216203514294433201	3^{60}
65	103010514608775374539735472657843	3^{65}
70	2.50315550499324160131557198608558e+33	3^{70}
76	1.8248003631400731273590519778566e+36	3^{76}

Explicación: Bueno yo resolví el problema utilizando o elevando al 3 todos y cada uno de los días y me salió la sifra correcta con la formula de la elevacion a la 3.

Figura 6.10

Capacidades Puestas en juego

C1 Identifica las principales variables (base y el exponente) de una situación problema, construye tablas y organiza la información

C3 Establece las relaciones que mejor se ajustan al comportamiento de las variables registrado en diagramas

C5 Registra sus ideas en tablas.

C6 Comunica sus ideas por medio de tablas

C7 Decodifica e interpreta los diagramas

C10 Interpreta fenómenos naturales, sociales y matemáticos usando y creando diferentes representaciones.

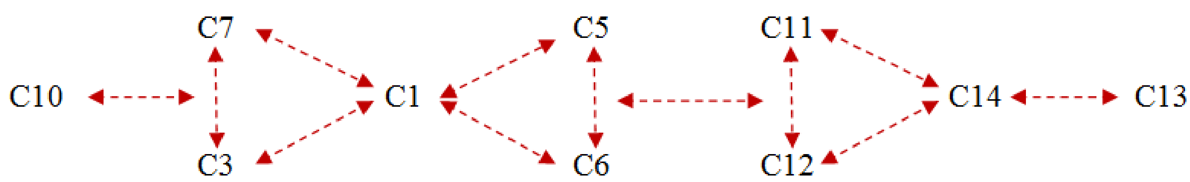
C11 Aplica modelos para interpretar fenómenos diversos.

C12 Genera y aplica modelos matemáticos en diferentes contextos.

C13 Justifica la solución de los problemas por medio del lenguaje natural

C14 Justifica la solución de los problemas matemáticamente por medio del lenguaje numérico

Trayectorias Cognitivas



Obstáculos, errores y dificultades

Obstáculos: La multiplicacion repetida para comprobar resultados

Errores: La explicación verbal no corresponde a la solución que presenta.

Dificultades para representar los exponentes cero y uno.

Competencias disciplinares matemáticas promovidas

1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.
3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

6.1.3.2 Tipos de tareas II (problemas de decaimiento exponencial)

Tarea 7. El conjunto de cantor (Fractales)

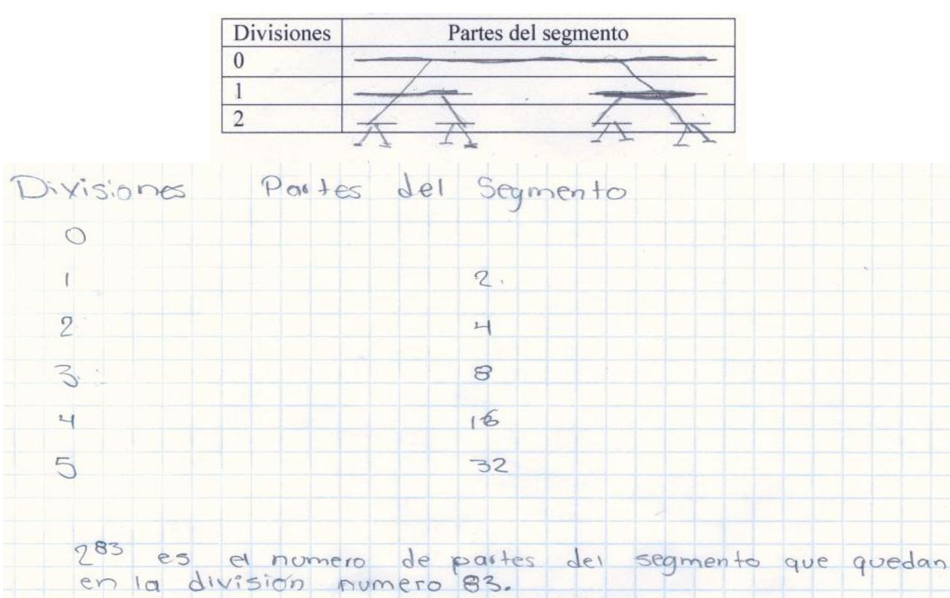
Esta tarea, tiene como objetivo que los estudiantes construyan la noción de potencia con base racional positiva y exponentes cero y naturales a partir de la resolución de problemas en los cuales subyace esta fenomenología.

Tarea 7. Se quiere llegar a la construcción del conjunto de Cantor a partir de la siguiente información. Se parte de un segmento de longitud 1. Se divide en tres partes iguales y se elimina la parte central. Después, cada una de las dos partes restantes se divide en tres partes iguales y se eliminan de nuevo las partes centrales en cada una de ellas y así sucesivamente durante 83 divisiones. Encuentre la longitud de cada una de las partes en que ha sido dividido el segmento en la división 83. Justifique su respuesta.

Divisiones	Partes del segmento
0	————————————————
1	—————— ——————
2	—— —— —— ——

Para realizar esta tarea (7), este estudiante inició representando con figuras la forma en que iba cambiando el segmento original. Después que logró hacer la interpretación correcta de la situación planteada, tuvo problemas para dividir repetidamente entre 3. Cabe aclarar que los cuatro estudiantes presentaron la misma dificultad con la división de fracciones. Ante esta situación el profesor les proporcionó el algoritmo que se sigue para las operaciones con fracciones con el propósito de que lograran avanzar en el proceso de resolución. Los resultados que se obtuvieron los presentamos en la siguiente figura (6.11).

Actividades que realizó el estudiante uno



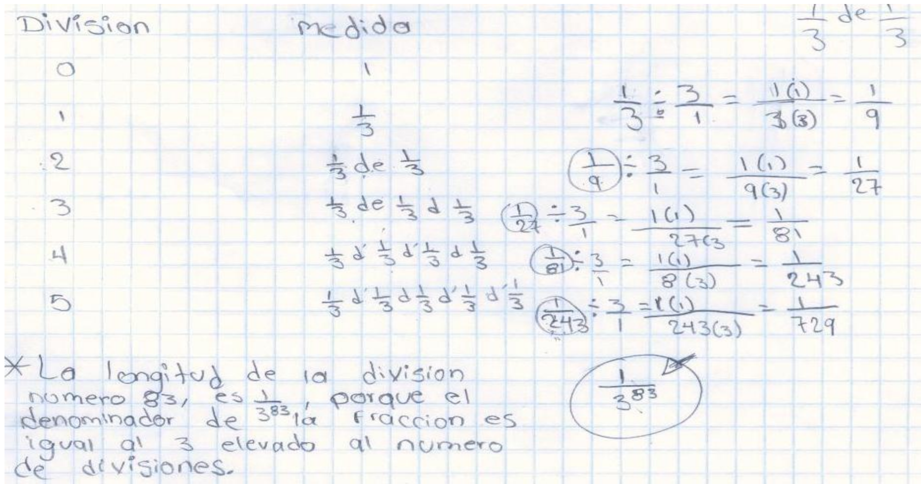


Figura 6.11

Capacidades Puestas en juego

C1 Identifica las principales variables (base y el exponente) de una situación problema, construye tablas y organiza la información

C2 Elabora diagramas que describen la situación problema con sus principales variables.

C3 Establece las relaciones que mejor se ajustan al comportamiento de las variables registrado en las tablas y diagramas

C5 Registra sus ideas en tablas.

C6 Comunica sus ideas por medio de tablas

C8 Registra sus ideas en diagramas.

C9 Comunica sus ideas con diagramas.

C10 Interpreta fenómenos naturales, sociales y matemáticos usando y creando diferentes representaciones.

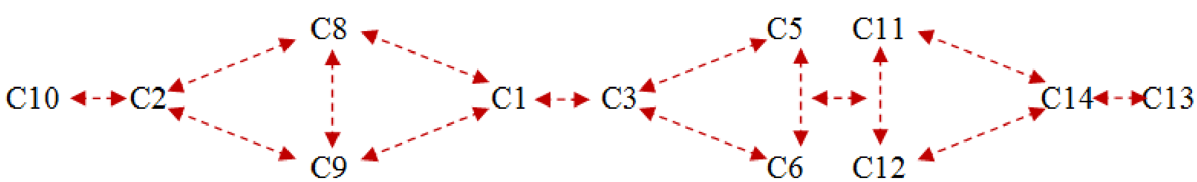
C11 Aplica modelos para interpretar fenómenos diversos.

C12 Genera y aplica modelos matemáticos en diferentes contextos.

C13 Justifica la solución de los problemas por medio del lenguaje natural

C14 Justifica la solución de los problemas matemáticamente por medio del lenguaje numérico

Trayectorias Cognitivas



Obstáculos, errores y dificultades

Dificultades para multiplicar y dividir fracciones de fracciones

Competencias disciplinares matemáticas promovidas

1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.
3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.

El estudiante tres, por su parte llega a la solución del problema pero, representó la situación planteada con figuras de la siguiente forma (ver figura 6.12).

Actividades que realizó el estudiante tres

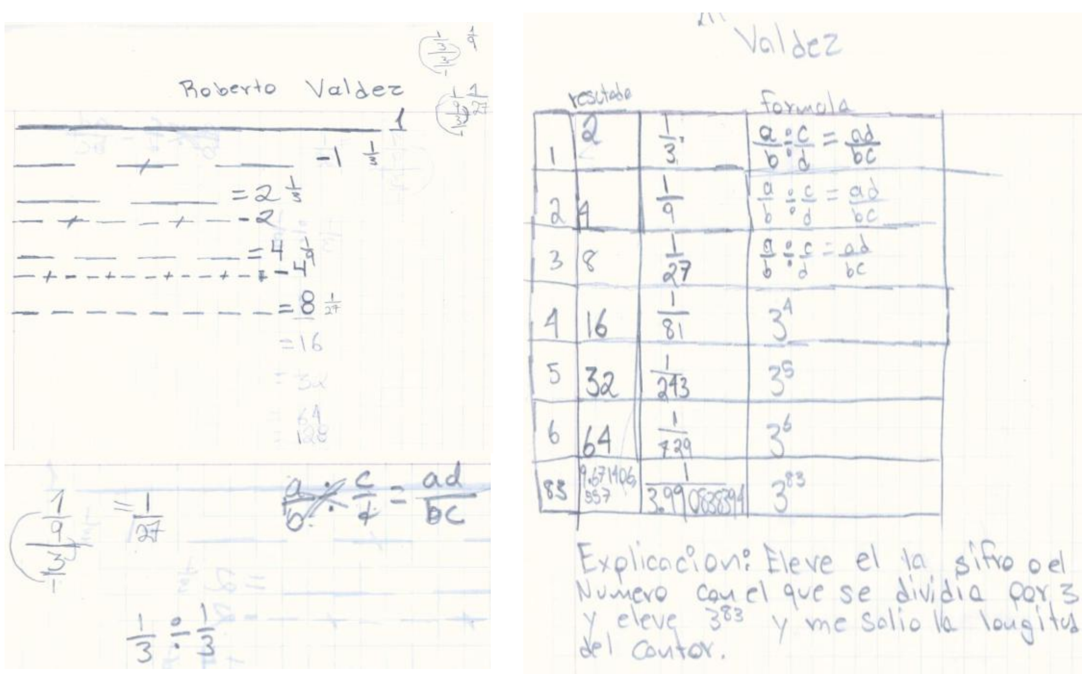


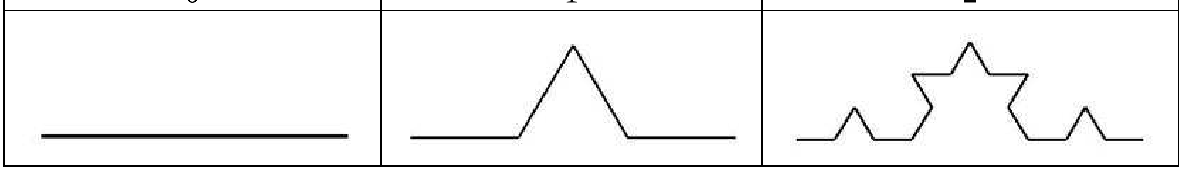
Figura 6.12

Tarea 8. La curva de koch (Fractales)

Esta tarea, tiene como objetivo coadyuvar a que los estudiantes construyan la noción de potencia con base racional positiva y exponentes cero y naturales que se trabajó en la tarea 7 a partir de la resolución de problemas en los cuales subyace esta fenomenología.

Tarea 8. El Ingeniero Leyva, quiere construir la curva de Koch.
La construcción inicia con la división de un segmento de longitud 1 en 3 partes iguales; en la parte central se construye un triángulo equilátero, al cual se le suprime (quita) la base. Posteriormente, con cada una de las partes de la curva formada se repite el procedimiento anterior durante 217 veces. Encuentra la longitud de la curva que se construye en la última división (217) utilizando fracciones.

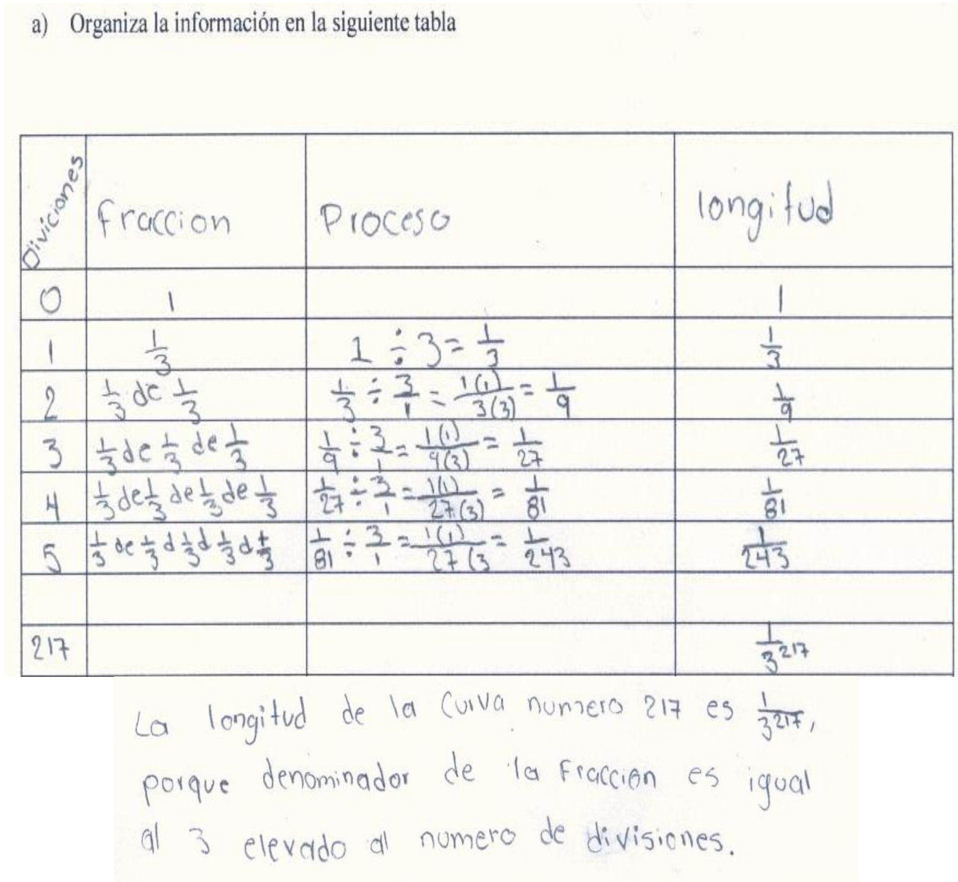
Número de divisiones del segmento		
0	1	2



Ante esta tarea, los estudiantes mostraron mayor seguridad al aplicar la potencia en la resolución del problema. Para terminar, a los estudiantes se les cuestionó sobre la longitud total de la figura. El propósito de esta pregunta fue conocer si los estudiantes pueden aplicar los conocimientos que se pretendía construir con las tareas que componen la secuencia didáctica. Consideramos pertinente aclarar que estos dos estudiantes dieron la solución correcta (ver figuras 6.37 Y 6.40).

Actividades que realizó el estudiante uno

Número de divisiones del segmento		
0	1	2



a) Organiza la información en la siguiente tabla

Divisiones	fraccion	Proceso	longitud
0	1		1
1	$\frac{1}{3}$	$1 \div 3 = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \div \frac{3}{1} = \frac{1(1)}{3(3)} = \frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
3	$\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9} \div \frac{3}{1} = \frac{1(1)}{9(3)} = \frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$
4	$\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{27} \div \frac{3}{1} = \frac{1(1)}{27(3)} = \frac{1}{81}$	$\frac{1}{81}$
5	$\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{3}$ d $\frac{1}{3}$ d $\frac{1}{3}$ d $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{81} \div \frac{3}{1} = \frac{1(1)}{27(3} = \frac{1}{243}$	$\frac{1}{243}$
217			$\frac{1}{3^{217}}$

La longitud de la curva numero 217 es $\frac{1}{3^{217}}$, porque denominador de la fraccion es igual al 3 elevado al numero de divisiones.

Figura 6.13

Capacidades Puestas en juego

C1 Identifica las principales variables (base y el exponente) de una situación problema, construye tablas y organiza la información

C2 Elabora diagramas que describen la situación problema con sus principales variables.

C3 Establece las relaciones que mejor se ajustan al comportamiento de las variables registrado en las tablas y diagramas

C5 Registra sus ideas en tablas.

C6 Comunica sus ideas por medio de tablas

C8 Registra sus ideas en diagramas.

C9 Comunica sus ideas con diagramas.

C10 Interpreta fenómenos naturales, sociales y matemáticos usando y creando diferentes representaciones.

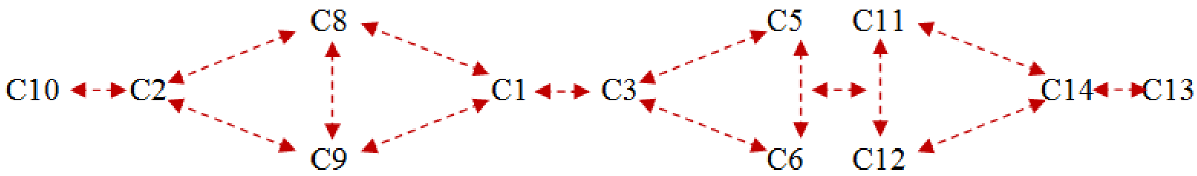
C11 Aplica modelos para interpretar fenómenos diversos.

C12 Genera y aplica modelos matemáticos en diferentes contextos.

C13 Justifica la solución de los problemas por medio del lenguaje natural

C14 Justifica la solución de los problemas matemáticamente por medio del lenguaje numérico

Trayectorias Cognitivas



Obstáculos, errores y dificultades

Dificultades para multiplicar fracciones y dividir fracciones de fracciones

Competencias disciplinares matemáticas promovidas

1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.

2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.

3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

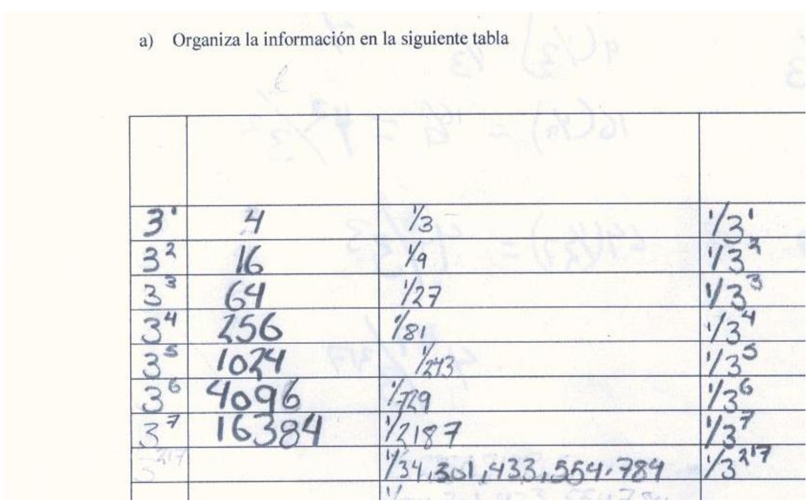
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.

5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.

Por su parte, el estudiante cuatro, realizó lo que presentamos en la figura siguiente (fig. 6.40).

Actividades que realizó el estudiante cuatro



a) Organiza la información en la siguiente tabla

3^1	4	1/3	$1/3^1$
3^2	16	1/9	$1/3^2$
3^3	64	1/27	$1/3^3$
3^4	256	1/81	$1/3^4$
3^5	1024	1/243	$1/3^5$
3^6	4096	1/729	$1/3^6$
3^7	16384	1/2187	$1/3^7$
		1/34,301,433,554,784	$1/3^{217}$

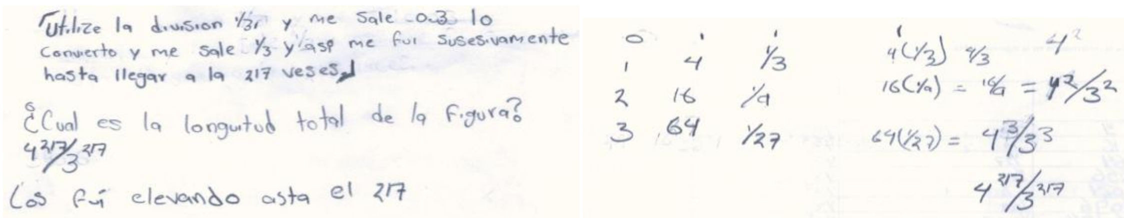


Figura 6.14

6.1.4.3 Tipos de tareas III (problemas matemáticos)

Las siguientes tareas, tienen como propósito institucionalizar la definición de potencia que los estudiantes construyeron cuando trabajaron con las tareas que constituyeron la secuencia didáctica anterior. Además, también pretendemos introducir a los estudiantes al estudio de las propiedades que permiten la conceptualización de este objeto matemático y en particular, en este trabajo abordamos la multiplicación de potencias con la misma base natural, exponentes naturales y el exponente cero.

Hoja de trabajo
Actividad 5

Estudiante cuatro

Tiempo: 100 minut

Tabla 1		
Multiplicación de números naturales	Resultados en potencias	Resultados en números naturales
2	2^0	1
2	2^1	2
2x2	2^2	4
2x2x2	2^3	8
2x2x2x2	2^4	16
2x2x2x2x2	2^5	32
2x2x2x2x2x2	2^6	64
2x2x2x2x2x2x2	2^7	128
2x2x2x2x2x2x2x2	2^8	256
		Explica que significan para ti los números de la columna anterior
$\underbrace{2x2x2x...2x2}_{47 veces}$	2^{47}	El 2 se multiplica 47 veces, 2 elevado a la 47
$\underbrace{2x2x2x....2x2}_{93\ veces}$	2^{93}	El 2 se multiplica 93 veces, 2 elevado a la 93
$\underbrace{2x2x2x...2x2}_{182\ veces}$	2^{182}	El 2 se multiplica 182 veces. 2 elevado a la 182
$\underbrace{2x2x2x...2x2}_{379\ veces}$	2^{379}	El 2 se multiplica 379 veces, el 2 elevado a la 379.
$\underbrace{2x2x2x...2x2}_{2^n\ veces}$	2^n	El 2 se multiplica n veces.

Estudiante

Tabla 2

Multiplicación de números naturales	Resultados en potencias	Resultados en números naturales
$7 \times \frac{1}{7}$	7^{0}	1
7×1	7^{1}	7
7x7	7^{2}	49
7x7x7	7^{3}	343
7x7x7x7	7^{4}	2401
7x7x7x7x7	7^{5}	16807
7x7x7x7x7x7	7^{6}	117649
7x7x7x7x7x7x7	7^{7}	823543
7x7x7x7x7x7x7x7	7^{8}	5764801
		Explica que significan para ti los números de la columna anterior
$\underbrace{7x7x7..7x7}_{25}$	7^{25}	Fui Multiplicando 7x7x7 Sucesivamende y Me
$\underbrace{7x7x7..7x7}_{93}$	7^{93}	Salia el resutado Natural pero luego
$\underbrace{7x7x7x....7x7}_{182\ \text{veces}}$	7^{182}	eleve a la 7 y ya No Multiplicaba y Me
$\underbrace{7x7x7x7..7x7}_{379}$	7^{379}	Salia el resultado Natural
$\underbrace{7x7x7..7x7}_{11}$	7^{n}	elevando a la 7.

Tabla 3		
Multiplicación de números naturales	Resultados en potencias	Resultados en números naturales
$9 \times \frac{1}{9}$	9^0	1
9×1	9^1	9
17x17x17x17	17^4	83521
$\underbrace{92 \times 92}_{2}$	92^2	8464
$\underbrace{130 \times 130 \times 130}_{17 \text{ veces}}$	130^{17}	8650415919
$\underbrace{654x654x....x654}_{56 \text{veces}}$	654^{56}	
$\underbrace{1326 \times 1326}_{87}$	1326^{87}	
		Explica que significan para ti los números de la columna anterior
$\underbrace{4000 \times 4000..}_{390}$	4000^{390}	Me fui guiando con los sifros a los resutados
$\underbrace{3918x3918x....x3918}_{182 \text{ veces}}$	3918^{182}	Y así sacaba las elevaciones que me
$\underbrace{15437 \times 15437}_{428 \text{ veces}}$	15437^{428}	diera el mismo resutado que hábia
$\underbrace{284567}_{11 \text{veces}}$	284567^{11}	en los numeros Naturales.

Figura 6.15

Capacidades Puestas en juego

C4 Decodifica e interpreta la información organizada en tablas.

C5 Registra sus ideas en tablas.

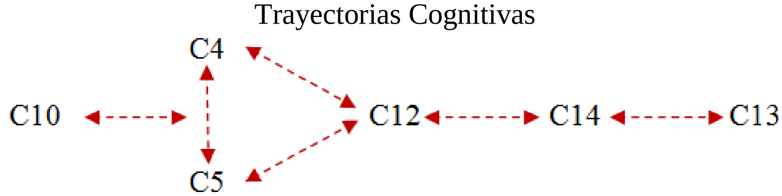
C10 Interpreta fenómenos naturales, sociales y matemáticos usando y creando diferentes representaciones.

C12 Genera y aplica modelos matemáticos en diferentes contextos.

C13 Justifica la solución de los problemas por medio del lenguaje natural

C14 Justifica la solución de los problemas matemáticamente por medio del lenguaje numérico.

Trayectorias Cognitivas



Obstáculos, errores y dificultades

Obstáculos: La multiplicacion repetida para las potencias cero y uno

Errores al expresar la potencia uno como multiplicación.

Dificultades para expresar verbalmente la multiplicación repetida.

Competencias disciplinares matemáticas promovidas

1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.
3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Para la siguiente tarea que corresponde a la multiplicación de potencias de bases naturales y exponentes naturales y exponente cero.

2. Completa los encabezados y realiza las operaciones que se te indican en las siguientes tablas.

Tabla 1

Multiplicación de números naturales		Resultados expresados en potencias	Que observas en los exponentes
(2x2) (2x2x2)	$(2^2)(2^3)$	2^5	Sumo los exponentes
(2x2x2) (2x2x2x2)	2^3 2^4	2^7	Sumo los exponentes 128
(2x2x2x2x2x2x2) (2x2x2)	2^7 2^3	2^{10}	Sumo los exponentes 1,024
$(\underbrace{2x2x..x2}_{25\text{ veces}})(\underbrace{2x2x..x2}_{47\text{ veces}})$	2^{25} 2^{47}	2^{72}	Sumo los Exponentes
$(\underbrace{2x2x2...x2}_{97\text{ veces}})(\underbrace{2x2x...x2}_{98\text{ veces}})$	2^{97} 2^{98}	2^{195}	Sumo los exponentes
$(\underbrace{2x2x2...x2}_{125\text{ veces}})(\underbrace{2x2x2...x2}_{318\text{ veces}})$	2^{125} 2^{218}	2^{343}	Sumo los exponentes
$(\underbrace{2x2..x2x}_{n\text{ veces}})$	2^{1n} 2^{1n}	2^{2n}	Sumo los exponentes
$(\underbrace{2x2x..x2}_{n\text{ veces}})(\underbrace{2x2x..x2}_{m\text{ veces}})$	2^n 2^m	2^{nm}	Sumo los exponentes

Tabla 2

Multiplicación de números Naturales	Suma y Multiplicación de formulas.	Resultados expresados en potencias	Que observas en los exponentes
(7x7)(7x7x7)	$(7^2)(7^3)$	7^5	se suman los exponentes y sale la potencia o la
(7x7x7) (7x7)	$(7^3)(7^2)$	7^5	formula.
$\underbrace{(7x7x7x7x7)}_{37}\underbrace{(7x7x7..)}_{94}$	$7^{37} \times 7^{94}$	7^{3478}	se mutiplica el exponente y el resultado de la
$(\underbrace{7x7x...x7}_{16\ veces})(\underbrace{7x7x...x7}_{37\ veces})$	$7^{16} \times 7^{37}$	7^{592}	mutiplicacion del exponente es la potencia de la
$\underbrace{(7x7...)}_{13}\underbrace{(7x7...)}_{15}$	$7^{13} \times 7^{15}$	7^{195}	elevacion por ejemplo: 7^{1200} (7x7x7)(7x7) 120 X 10 = 1200
$\underbrace{(7x7x7...)}_{30}\underbrace{(7x7...)}_{40}$	$7^{30} \times 7^{40}$	7^{1200}	
$\underbrace{(7x7)}_{2}\underbrace{(7x7x7...)}_{n}$	$7^2 \times 7^n$	7^{2n}	
$(\underbrace{7x7x...x7}_{n\ veces})(\underbrace{7x7x...x7}_{m\ veces})$	$7^n \times 7^m$	7^{nm}	Mutiplicar los literales y sale el resultado.

Tabla 3

Multiplicación de números Naturales	Suma de formulas	Resultados expresados en potencias	Que observas en los exponentes
(217x217)(217x217x217)	217^2 217^3	217^5	se suman los exponentes
$\underbrace{(1500x1500...)}_{10}\underbrace{(1500x1500...)}_{15}$	1500^{10} 1500^{15}	1500^{25}	aunque no tengan parentesis. el
$(\underbrace{714x714x\cdots714}_{16\ veces})(\underbrace{714x714x\cdots x714}_{37\ veces})$	714^{16} 714^{37}	714^{53}	por que la elevacion se
$\underbrace{(9218x9218...)}_{45}\underbrace{(9218x9218)}_{97}$	9218^{45} 9218^{97}	9218^{142}	tiene que sumar para que salga
$\underbrace{(10435x...)}_{95}\underbrace{(10435x...)}_{100}$	10435^{95} 10435^{100}	10435^{195}	la potencia correcta
$\underbrace{(345678...)}_{500}\underbrace{(345678...)}_{700}$	345678^{500} 345678^{700}	345678^{1200}	
$(\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ veces})(\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\ veces})$	a^n a^m	a^{nm}	

Figura 6.16

Capacidades Puestas en juego

C4 Decodifica e interpreta la información organizada en tablas.

C5 Registra sus ideas en tablas.

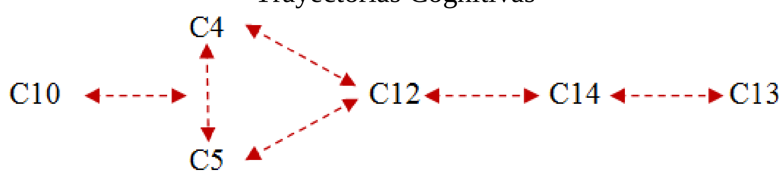
C10 Interpreta fenómenos naturales, sociales y matemáticos usando y creando diferentes representaciones.

C12 Genera y aplica modelos matemáticos en diferentes contextos.

C13 Justifica la solución de los problemas por medio del lenguaje natural

C14 Justifica la solución de los problemas matemáticamente por medio del lenguaje numérico.

Trayectorias Cognitivas



Obstáculos, errores y dificultades

Obstaculos: La multiplicación de números naturales.

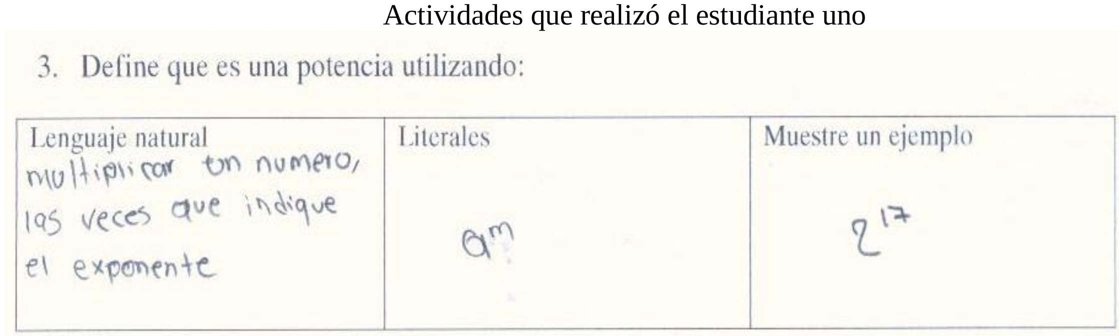
Errores: Para la representación de la multiplicacion de potencias en lenguaje numérico.

Dificultades para interpretar el significado de los exponentes y para sumar las literales (7^n) (7^m) y (a^n) (a^m).

Competencias disciplinares matemáticas promovidas

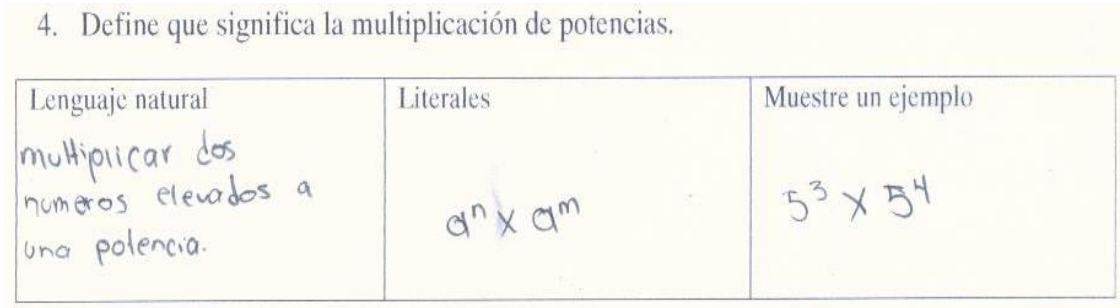
1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.
3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Actividades que realizó el estudiante uno



3. Define que es una potencia utilizando:

Lenguaje natural	Literales	Muestre un ejemplo
multiplicar un numero, las veces que indique el exponente	a^m	2^{17}



4. Define que significa la multiplicación de potencias.

Lenguaje natural	Literales	Muestre un ejemplo
multiplicar dos numeros elevados a una potencia.	$a^n \times a^m$	$5^3 \times 5^4$

Figura 6.17

Capacidades Puestas en juego

C4 Decodifica e interpreta la información organizada en tablas.

C5 Registra sus ideas en tablas.

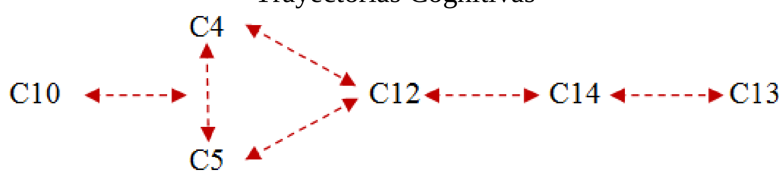
C10 Interpreta fenómenos naturales, sociales y matemáticos usando y creando diferentes representaciones.

C12 Genera y aplica modelos matemáticos en diferentes contextos.

C13 Justifica la solución de los problemas por medio del lenguaje natural

C14 Justifica la solución de los problemas matemáticamente por medio del lenguaje numérico.

Trayectorias Cognitivas



Obstáculos, errores y dificultades

Dificultades para expresar verbalmente el significado de la multiplicacion de potencias.

Competencias disciplinares matemáticas promovidas

1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.

2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.

3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.

7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.

8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

6.2 Conclusiones

En el primer capítulo de este documento, abordamos la problemática en torno al aprendizaje del concepto potencia. Inicialmente, fue una inquietud personal, la cual complementamos con la revisión de algunas investigaciones que incidían en la problemática de este objeto matemático. Estas investigaciones, reportaron el pobre significado del mismo y que algunas de las probables causas eran: La introducción de su definición, básicamente bajo un acercamiento de transformación de expresiones algebraicas, el uso de estructuras multiplicativas para las potencias, etc. Después, confirmamos la presencia curricular de este concepto en secundaria y bachillerato. Finalmente detectamos que la potencia, sirve de herramienta en gran parte de las diferentes asignaturas en el bachillerato. Por señalar algunas, sirve de herramienta básica en los cursos de Álgebra, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial y Cálculo Integral, etc. Por lo anterior, tomamos la decisión de diseñar una secuencia didáctica para promover el aprendizaje del concepto potencia en el bachillerato, a través de la resolución de problemas y contribuir por este medio a subsanar la problemática planteada.

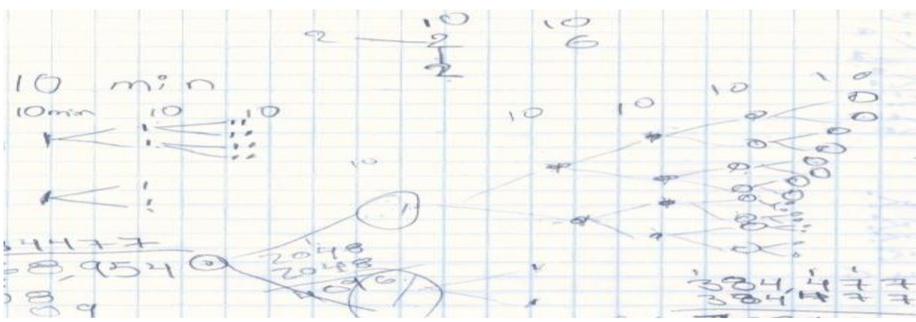
Para realizar el diseño de la secuencia didáctica, nos apoyamos teóricamente con algunos elementos del Análisis Didáctico (Gómez, 2002). Este análisis, a su vez nos permitió realizar una valoración de las tareas que integran nuestra propuesta, a través de las actividades que realizaron los estudiantes al trabajar en el pilotaje con la secuencia didáctica y compararlos con las actividades que hipotéticamente planteamos sucedería.

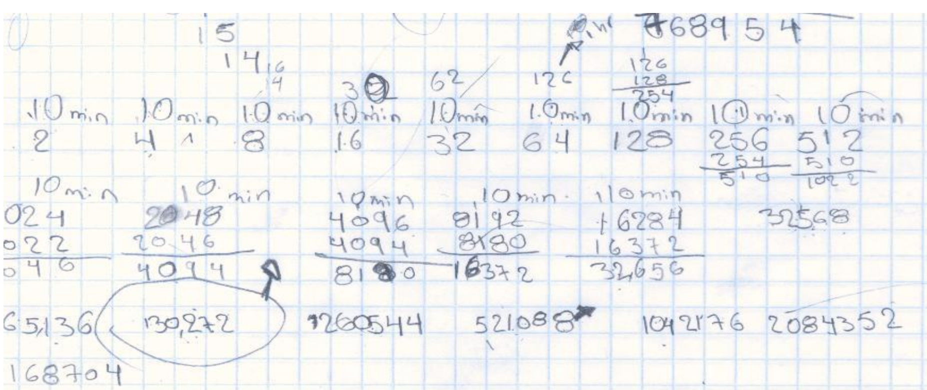
Con la información que obtuvimos en las dos etapas anteriores, hacemos una evaluación de nuestra propuesta tomando como base las previsiones que hicimos en el capítulo 5, dentro del análisis de instrucción. En este análisis, presentamos nuestras conjeturamos, acerca de la actuación de los estudiantes cuando trabajaran las tareas propuestas. Básicamente hicimos una caracterización de las capacidades que los estudiantes pondrían en juego con las tareas, las competencias disciplinares en matemáticas, propuestas por la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS), a las que las capacidades mencionadas anteriormente contribuían y las posibles rutas por donde se podría dar el aprendizaje y finalmente los posibles obstáculos, errores o dificultades que podrían tener los estudiantes al intentar resolver las tareas de la secuencia didáctica.

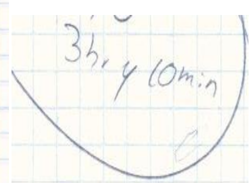
En el capítulo 6, presentamos un análisis de la actuación que tuvieron cuatro estudiantes, durante un pilotaje de la secuencia didáctica. Los resultados de este análisis, nos sirvieron para hacer una caracterización, de las capacidades que los estudiantes pusieron en juego cuando abordaron las tareas. También, pudimos determinar las competencias disciplinares en matemáticas bajo el marco de la RIEMS, que los estudiantes manifestaron en sus escritos, las rutas o caminos que siguieron, para resolver las tareas propuestas y por último, los obstáculos, errores y dificultades que los estudiantes realmente presentaron en la resolución de las tareas.

Para valorar nuestra propuesta, nuevamente utilizamos el análisis didáctico. En este sentido, a continuación les presentamos una contrastación, entre lo que hipotéticamente determinamos en el análisis de instrucción y lo que realmente sucedió, cuando los estudiantes trabajaron con la secuencia didáctica durante el pilotaje.

Actuaciones del estudiante







a) Organiza la información en la siguiente tabla

Hora	veces contado	Personas Enteradas	Personas total
10:00	veces contado	Personas enterades x	Personas total
10:10	1	2	3
10:20	2	$4 = 2\times2 = 2^2$	7
10:30	3	$8 = 2\times2\times2 = 2^3$	15
10:40	4	16 2^4	31
10:50	5	32 2^5	63
11:00	6	64 2^6	127
11:10	7	128 2^7	255
11:20	8	256 2^8	511
11:30	9	512 2^9	1023
11:40	10	1024 2^{10}	2047
11:50	11	2048 2^{11}	4095 −1 {x+y
12:00	12	4096 2^{12}	8191
12:10	13	8192 2^{13}	16383
12:20		16,384 2^{14}	32,767
12:30		32,768 2^{15}	65,535
12:40		65536 2^{16}	131,071
12:50		131,072 2^{17}	262,143
1:00		262,144 2^{18}	524287
1:10		524,288 2^{19}	1048575
1:20		4397726248704	
1:3			

Elevas el dos al numero de veces que lo cuentas

4397726248703
4397726248704
8795452497407

se multiplica el numero de personas en total, mas 1

se multiplica el numero de personas enteradas por 2

8,795,452,497,407

2^{84} $2\times2\times2\times2\times2$

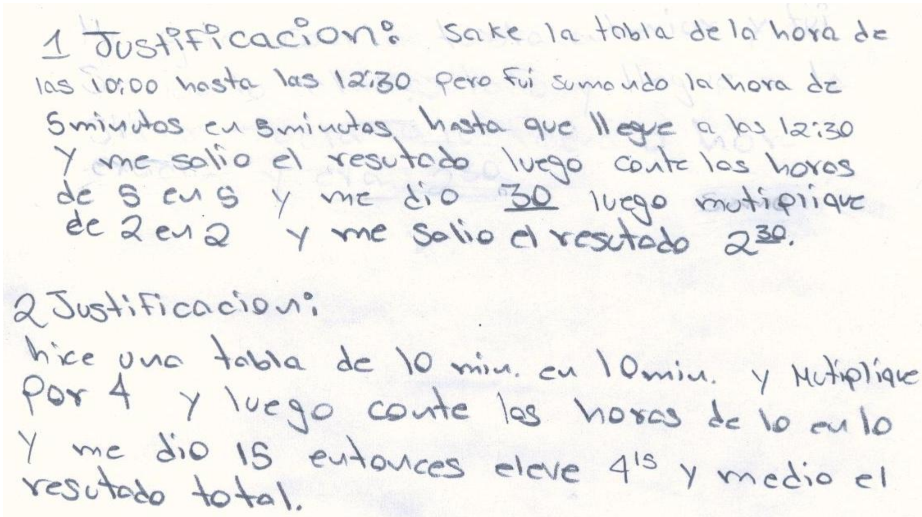
Justificación: Mi formula para sacar el resultado fue ~~sumar o~~ multiplicar el 2^{42} porque se iba de 10 min en 10 y aqui en 5 min entonces se mutiplica el 42 y sale 84 lo elevo y me sale el resultado.

a) Organiza la información en la siguiente tabla

Hora	Veces Contado	Personas enteradas a esa hora	Total de Personas enteradas
10:05	1	5	
10:10	2	$25 = 5^2$	
10:15	3	$125 = 5^3$	
10:20	4	$625 = 5^4$	
10:25	5	$3125 = 5^5$	
17:00	84	5^{84}	

a) Organiza la información en la siguiente tabla 5

	hora	habitantes	resutado1
45	10:25	32	2^5
	10:50	1024	2^{10}
	11:15	32768	2^{15}
	11:40	1048576	2^{20}
	12:05	33554432	2^{25}
	12:30	1073741824	2^{30}
	hora.	habitantes	resutado
	10:50	1024	4^5
	11:40	1048576	4^{10}
	12:30	1073741824	4^{15}



1 Justificacion: Sake la tabla de la hora de las 10:00 hasta las 12:30 pero fui sumando la hora de 5 minutos en 5 minutos hasta que llegue a las 12:30 y me salio el resutado luego conte las horas de 5 en 5 y me dio 30 luego mutiplique de 2 en 2 y me salio el resutado 2^{30}.

2 Justificacion: hice una tabla de 10 min. en 10 min. y Mutiplique por 4 y luego conte las horas de 10 en 10 y me dio 15 entonces eleve 4^{15} y medio el resutado total.

Con los resultados mostrados anteriormente, concluimos que los estudiantes para resolver estas tareas, recurrieron al uso de diferentes representaciones como bien podemos ver, hicieron conversiones del lenguaje natural al lenguaje numérico y viceversa, realizaron tratamientos en el registro numérico. Por otra parte, también utilizaron diagramas, tablas, figuras para finalmente arribar a la solución de la situación que se les presentó a través de las tareas.

Otro elemento a considerar, para la valoración de nuestra propuesta, consiste en comparar las Capacidades y Competencias matemáticas de los estudiantes que con la tarea pueden ser promovidas y revisar las capacidades y competencias que los estudiantes manifestaron cuando trabajaron con las tares.

En las tablas siguientes (tablas 5.1 y 6.1), mostramos la caracterización que realizamos en torno a los puntos planteados anteriormente.

Capacidades y competencias a promover con la tarea 1		Competencias							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Construye y establece distintas representaciones de la potencia.			x			x			
C1	Identifica las principales variables (base y el exponente) de una situación problema, construye tablas y organiza la información								
C2	Elabora diagramas que describen la situación problema con sus principales variables		x			x			
C3	Establece las relaciones que mejor se ajustan al comportamiento de las variables registrado en las tablas y diagramas.		x						

C5	Registra sus ideas en tablas.		x		x		x		
C6	Comunica sus ideas por medio de tablas		x		x		x		
C10	Interpreta fenómenos naturales, sociales y matemáticos usando y creando diferentes representaciones.	x							
C12	Genera y aplica modelos matemáticos en diferentes contextos	x						x	
C13	Justifica la solución de los problemas por medio del lenguaje natural			x	x				
C14	Justifica la solución de los problemas matemáticamente mediante diferentes representaciones: por medio del lenguaje numérico			x	x		x		
1	Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.								
2	Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.								
3	Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.								
4	Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.								
5	Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea.								
6	Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia								
7	Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia								

Tabla 5.1: Capacidades y competencias a promover con la tarea 1

Capacidades y competencias matemáticas que los estudiantes manifestaron con las tareas.

Capacidades que los estudiantes pusieron en juego cuando trabajaron con las tareas y competencias disciplinares en matemáticas bajo el marco de la Reforma Integral en la educación Media superior 2008 a las que dichas capacidades contribuyen.		Competencias							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Construye y establece distintas representaciones de la potencia.									
C1	Identifica las principales variables (base y el exponente) de una situación problema, construye tablas y organiza la información.		x			x			
C2	Elabora diagramas que describen la situación problema con sus principales variables.		x			x			
Expresa y organiza sus ideas mediante tablas.									
C5	Registra sus ideas en tablas.		x				x		

C6	Comunica sus ideas por medio de tablas.		x		x		x		
Expresa y organiza sus ideas mediante diagramas.									
C8	Registra sus ideas en diagramas.		x						
C9	Comunica sus ideas con diagramas.		x		x				
Modela e interpreta fenómenos naturales, sociales y matemáticos usando y creando diferentes representaciones.									
C10	Interpreta fenómenos naturales, sociales y matemáticos usando y creando diferentes representaciones.	x							
Justifica la solución de los problemas mediante diferentes representaciones.									
C14	Matemáticamente por medio del lenguaje numérico			x	x		x		

Competencias disciplinares matemáticas

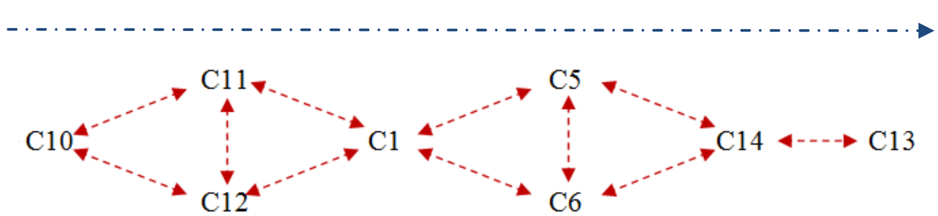
1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.
3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea.

Tabla 6.1: Tabla de capacidades y competencias reales con la tarea 1

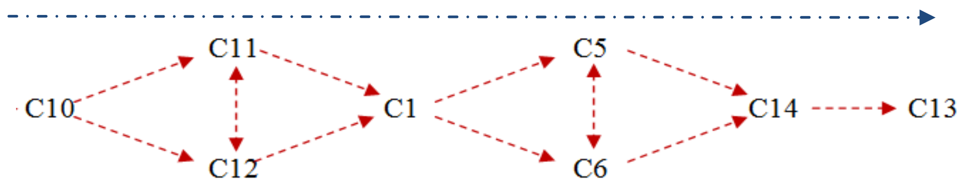
Comparando los resultados de las tablas anteriores (5.1 y 6.1), podemos observar que con las tareas que integran la secuencia didáctica (planeación), se induce a los estudiantes a transitar entre las diferentes representaciones que fueron caracterizadas en la tabla 5.1: capacidades y competencias a promover con la tarea 1.hipotética.

El siguiente punto que consideramos para la valoración, consistió en comparar las, conjeturas sobre las rutas de aprendizaje y las rutas que realmente siguieron.

Conjeturas sobre las rutas de aprendizaje.



Las rutas que realmente siguieron cuando trabajaron con la secuencia didáctica



Con esta valoración, observamos que las trayectorias previstas para las tareas y las trayectorias que siguieron los estudiantes al trabajar con las mismas coinciden. Cabe aclarar que aun cuando parecen iguales, realmente por los escritos de los estudiantes, la trayectoria indica que se sigue de izquierda a derecha. En cambio, nosotros habíamos previsto que en ocasiones tendrían que devolverse a ciertos puntos de las actividades, para poder continuar el proceso de resolución.

El último punto a considerar para la valoración de nuestra propuesta, consistió en revisar los obstáculos, errores y dificultades (tabla 4.1, capitulo 4, pág. 49), que los estudiantes podrían mostrar al trabajar la secuencia didáctica y los obstáculos que realmente mostraron (Capítulo 6. Apartado 6.1).

A continuación, mostramos algunos obstáculos, errores y dificultades reportados en investigaciones que básicamente.

1. Introducción de la definición mediante ejercicios de transformación de expresiones algebraicas.
2. La multiplicación reiterada.
3. El exponente cero.
4. El exponente uno.
5. La multiplicación de potencias (multiplicación de exponentes).
6. La generalización (literales en los exponentes).

Finalmente, con la planeación de las tareas (secuencia didáctica), pudimos coadyuvar en los siguientes obstáculos, errores y dificultades que fueron reportados en las investigaciones.

1. Introducción de la definición mediante ejercicios de transformación de expresiones algebraicas.

   a. En este trabajo, La definición de potencia, fue construida por los estudiantes y durante la plenaria, llevaron a cabo la negociación de los significados correspondientes.
2. La multiplicación reiterada.
   a. El obstáculo en la multiplicación repetida, lo trabajamos para los exponentes cero y uno y lo explicamos en los puntos dos y tres. Para las potencias negativas, números racionales e irracionales no las consideramos en este trabajo.
3. El exponente cero.
   a. Para este exponente, las tareas coadyuvan a otorgar significado, ya que al iniciar los intervalos de tiempo (cero intervalos) solo se entera una persona de la noticia.
4. El exponente uno.
   a. Para este exponente, que al ser calculada una potencia de exponente uno. Su resultado es desde el punto de vista de la institución correcto. Por lo tanto, no es un error, pero se le da significado en este trabajo, en el sentido de que cuando transcurre un intervalo de tiempo, las personas que se entran dependerá de la forma en que se cuenta el secreto.
5. La multiplicación de potencias de la misma base.
   a. En este trabajo, los estudiantes hicieran comparaciones entre las potencias que habían generado en el proceso de resolución de las tareas. Es decir, los estudiantes conjeturaron sobre el papel que juegan los exponentes cuando dos potencias de la misma base se multiplican (suma de exponentes).
6. La generalización de exponentes.
   a. La generalización a exponentes solo la realizamos para generalizar números, pero no se realizó formalmente con el uso de literales, ya que solo se llevó a cabo parcialmente al final de la secuencia didáctica.

Para culminar este apartado y las valoraciones anteriores, revisamos los cuatros objetivos específicos que nos propusimos alcanzar a lo largo de este trabajo de desarrollo docente.

Objetivos específicos

1. Realizar una secuenciación de diferentes tipos de tareas que se complementen entre sí, pero que impliquen trayectorias de aprendizaje distintas; considerando los obstáculos, errores y dificultades analizados en reportes de investigación.
2. Construir el significado del objeto matemático potencia visto como una herramienta para la resolución de problemas, mediante la utilización de contextos apropiados.
3. Promover capacidades que contribuyan al desarrollo de competencias disciplinares en matemáticas en el marco de la Reforma Integral de la Educación Media Superior 2008.
4. Coadyuvar al desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes.

Como las valoraciones anteriores, a continuación, presentamos un análisis del logro de los objetivos específicos

1. Primer objetivo: se identificaron contextos de interés para los estudiantes y una redacción que pudieron interpretar.

    a) Los estudiantes iniciaron la actividad matemática utilizando diferentes representaciones.

    b) Los estudiantes realizaron conversiones del lenguaje natural a la representación numérica, auxiliados por diagramas, tablas, etc., hasta arribar a la solución de las tareas propuestas

    c) Realizaron tratamientos en la representación numérica.

2. Segundo objetivo: los estudiantes resolvieron problemas que los ayudaron en:
    a) La construcción de la definición de potencia a través de la resolución de problemas.
    b) Obtener significado para el exponente cero.
    c) Obtener significado para el exponente uno.
3. Tercer objetivo: se hizo una valoración de tipo cualitativo contrastando las capacidades y competencias mostradas en las tablas 5.1 y 6.1 solo a nivel de observación.

   a) Las capacidades y competencias que se promueven con los Tipos de tarea I, contribuyen al total de capacidades y competencias planeadas para el trabajo. El resto de la planeación se observan en los tipos de tareas restantes (II y III).

4. Cuarto objetivo:
   a) Se contribuyó al desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes al promover la habilidad para la resolución de problemas.
   b) Al utilizar diferentes representaciones durante el proceso de resolución.

6.3 Sugerencias

Para concluir este trabajo, detectamos la necesidad de realizar algunos cambios en la secuencia didáctica en el orden siguiente:

1. Para el tipo de tareas I: Propusimos una tabla que indicaba en una columna “veces que se cuenta el secreto”. Sugerimos cambiar por intervalos de tiempo que transcurren.
2. En la tarea 5: la solución del problema es parte del proceso de resolución de la tarea 1. Proponemos cambiar dicha información.
3. Tenemos hojas de trabajo con indicaciones de realizar diagramas, tablas y preguntas conjuntamente. Sugerimos el uso de diagramas, tablas y preguntas por separado, atendiendo a las necesidades de cada estudiante
4. No trabajamos la representación analítica. Por lo anterior, proponemos considerar dicha representación.
5. Trabajamos parcialmente con tareas de fractales. Sugerimos explotar este recurso, ya que son tareas muy ricas y se puede realizar gran variedad de problema. Por ejemplo: cálculo de áreas, longitud total, longitud de cada parte, etc.
6. Para continuar este trabajo, proponemos que se trabajen las potencias racionales y negativas.

Bibliografía

Acosta, S. R. (2006). *Álgebra.* México: Dirección General de Educación Tecnológica Industrial, SEP.

Bednardz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). Acercamientos al álgebra: perspectivas para la investigación y la enseñanza.

D. Gódino, J. (2004). DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS PARA MAESTROS. Granada, España: GAMI, S.L. Fotocopias.

Dolores, C., Martínez, G., Farfán, R. m., Carrillo, C., & López, I. N. (2007). Naturaleza y significado de los exponentes. En D. Crisólogo, *MATEMÁTICA EDUCATIVA, Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula* (págs. 123-130). México: Díaz de Santos.

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. 21.

Ferrari Escolá, M. (2001). *Una Visión socioepistemológica. Estudio de la función Logarítmo.* Tesis de maestría. Instituto Politécnico Nacional CINVESTAV. México.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA, 7, 3* , 251-292.

Gómez, P., & Lupiañez, J. L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de preofesores de matemáticas de secundaria. *PNA. 1(2)* , 79-98.

Kriegler, S. (2007). ¿JUST WHAT IS ALGEBRAIC THINKING? 11.

Martínez Sierra, G. (2000). *Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales.* Tesis de maestría. Instituto Politécnico Nacional. CINVESTAV. México.

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA. (21 de Octubre de 2008). ACUERDO número 444 por el que se establecen las competencias que constituyen el marco curricular común del Sistema Nacional de Bachillerato. *Diario Oficial* , pág. 11.

SEMS. (2009). *Reforma curricular del Bachillerato tecnológico*. Recuperado el 25 de Julio de 2009, de Programas de estudio de las asignaturas del componente de formación básica y propedéutica: http://www.dgeti.sep.gob.mx/site/lanzador.phtml?idcont=121

SEP. (2006). *Reforma de Educación Secundaria.* Recuperado el 23 de Febrero de 2009, de http://www.reformasecundaria.sep.gob.mx/matematicas

Wu, H.-H. (2005). *Introduction to School Algebra(Draft).* University of California, Department of Mathematics, #3840, Berkeley, CA 94720-3840.