Universidad de Sonora

División de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas

Una Metodología para Abordar Problemas Algebraicos de Enunciado Verbal

Tesis que presenta

Israel Tarazón Acuña

Para obtener el grado de

Maestría en Ciencias
con especialidad en Matemática Educativa

Director de Tesis
Dr. José Luis Soto Munguía

Hermosillo, Sonora, México. Enero 2012

Agradecimientos

A Margarita, por estar conmigo y apoyarme, casi siempre.

A mi hijo Tristán Daniel, ya que desde los momentos de su llegada fue un revulsivo anímico para la conclusión del presente trabajo.

A mis padres y hermanos que siempre me están apoyando.

A mi director de tesis, Dr. José Luis Soto Munguía, por creer en mí y contribuir con su gran capacidad y disposición permanente, el hacer de mí una mejor persona y durante ese proceso consolidar mi formación docente y profesional.

A la Dra. María de Lourdes Guerrero Magaña, por sus opiniones sobre el presente trabajo.

A la M.C. Maricela Armenta Castro, por sus valiosas críticas, opiniones y orientaciones tanto durante mi instrucción escolar, como en la cuidadosa y eficiente revisión del presente trabajo.

Un especial agradecimiento a la Dra. Silvia Elena Ibarra Olmos, por sus buenos “comentarios” en los momentos más indicados, sin duda alguna sus “comentarios” marcaron puntos de inflexión en mi formación tanto personal como profesional.

A mis compañeros y maestros, los cuales motivaron y orientaron mis esfuerzos en el cumplimiento de este compromiso.

Índice de Contenido.

Introducción

En el presente trabajo se propone una metodología que permita a los estudiantes resolver problemas algebraicos que se presenten en forma verbal y a la vez, aportar datos empíricos sobre su funcionamiento, la cual está dirigida a estudiantes que inician el bachillerato mexicano.

Se trata de una metodología de enseñanza centrada en los procesos de resolución de problemas de texto, que pretende promover la comprensión y modelación algebraica de los problemas. Se trata de promover durante el proceso de solución el desarrollo de habilidades y actitudes como la iniciativa, creatividad, independencia, verbalización y el trabajo colaborativo.

En el primer Capítulo de este trabajo se presenta la justificación del mismo, en donde se muestra un panorama general del papel de la resolución de problemas en el bachillerato mexicano. Además se exhiben algunas evaluaciones internacionales, nacionales y locales, donde se ilustra el nivel que alcanzan los estudiantes mexicanos en la resolución de problemas.

En el segundo Capítulo se explica el marco teórico, con el cual se puede analizar, describir y caracterizar fenómenos muy particulares, los cuales ocurren cuando un alumno se involucra en la resolución de problemas algebraicos de enunciado verbal y en los que se ponen de manifiesto las dificultades enfrentadas por los estudiantes este trabajo se apoya en un Modelo Teórico Local para caracterizar e interpretar dichas dificultades y además poder describirlas. Los conceptos de Signo y Sistema Matemático de Signos, básicos en un Modelo Teórico Local, se discuten aquí con detalle.

En el tercer Capítulo se expone la Metodología Propuesta, la cual se encuentra dividida en tres fases: la primera de ellas tiene que ver con la comprensión del problema, la segunda con la sistematización y registro de la exploración de posibles soluciones, se promueve en esta fase la detección de patrones entre columnas de datos de las columnas de una tabla construida a lápiz y papel; mientras que en la tercera se propone el uso de la Hoja

Electrónica Excel, con el fin de facilitar las verificaciones hechas con lápiz y papel en la fase anterior. Sin embargo, el propósito más importante en esa última etapa es el de promover algunos aspectos importantes en la resolución de problemas verbales, como lo son: la identificación de variables y la manera en que están relacionadas estas variables en el problema.

A través de la resolución de problemas de texto, la metodología permite identificar las dificultades y deficiencias en el estudiante y proponer un tratamiento para superarlas. Se trata de una metodología centrada en el aprendizaje que pretende promover el desarrollo de competencias actitudinales.

La experimentación de la metodología propuesta es reportada en el cuarto Capítulo, resaltando cada una de las fases descritas en el capítulo anterior.

Para el quinto y último capítulo se exponen las conclusiones referentes a la metodología y sus aportaciones, las dificultades y limitaciones de ésta, además de las conclusiones de cada una de las fases de la experimentación de la puesta en práctica de la metodología. Al final del capítulo se incluyen las conclusiones generales del presente trabajo.

Capítulo 1

Justificación

1.1. El papel de la resolución de problemas en la reforma del bachillerato

Desde principios del año 2008, bajo el nombre de Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS) se ha echado a andar una profunda revisión curricular del bachillerato mexicano. Se pretende con ella resolver una serie de problemas crónicos que padece la Educación Media Superior de nuestro país.

Uno de estos problemas es la gran diversidad de planes de estudio que coexisten a lo largo del territorio nacional, desde los subsistemas nacionales, como los agrupados bajo el nombre genérico de Bachillerato Tecnológico, hasta aquellos que se encuentran bajo la responsabilidad de las universidades estatales, pasando por toda la gama de instituciones privadas que ofertan estudios de este nivel.

Esta diversidad trae consigo diferentes perfiles de egreso de los estudiantes y dificulta la movilidad estudiantil entre una modalidad de bachillerato y otra.

Por poner dos ejemplos, mientras la Dirección General de Bachilleratos (DGB) establece que (véase DGB, 2010): “su finalidad esencial es generar en el educando el desarrollo de una primera síntesis personal y social que le permita su acceso a la educación superior, a la vez que le dé una comprensión de su sociedad y de su tiempo y lo prepare para su posible incorporación al trabajo productivo”, la Dirección General de Educación Tecnológica e Industrial (DGETI) se propone (véase DGETI, 2010) “Formar personas con conocimientos tecnológicos en las áreas industriales, comerciales y de servicios, a través de la preparación de profesionales técnicos y bachilleres, con el fin de contribuir al desarrollo sustentable del país”.

A lo anterior se suma el problema de la cobertura educativa: sólo seis de cada 10 alumnos que ingresan al bachillerato terminan sus estudios, y es en este nivel donde se registra la mayor deserción y donde los índices de rezago educativo del país son más alarmantes.

Esas cifras han tenido, desafortunadamente, pocas variaciones en los diez años recientes, lapso en que la eficiencia terminal sólo pasó de 56 a 59 por ciento, mientras que su creciente matrícula presenta cada vez mayores desafíos.

1.1.1. El Marco Curricular Común

La RIEMS está proponiendo que los bachilleratos operen bajo un Marco Curricular Común (MCC), que no se traduce en homologar los Planes de Estudio, sino las competencias que promoverían todos los bachilleratos en México.

El MCC permite la articulación de los programas de estudio de distintas opciones de Educación Media Superior en el país. Comprende una serie de desempeños terminales expresados como competencias genéricas, competencias disciplinares básicas, competencias disciplinares extendidas y competencias profesionales (para el trabajo). Según la RIEMS, todas las modalidades y subsistemas de bachillerato compartirán los primeros dos tipos de competencias en el marco del Sistema Nacional de Bachillerato (SNB), y podrán definir el resto según sus propios objetivos.

Bajo los supuestos del MCC y el perfil del egresado, uno de los beneficios colaterales será la movilidad estudiantil, es decir, el tránsito de una institución a otra no tendrá mayor problema, dado que las competencias desarrolladas en los diferentes bachilleratos serán compartidas sin importar el plan de estudio.

1.1.2. El enfoque por competencias

No existe una acepción del término competencia que sea universalmente aceptada, pero una de las más comunes y que fija algunas ideas sobre el término, se refiere a la integración de habilidades, conocimientos y actitudes en un contexto específico. El enfoque por competencias reordena y enriquece los planes de estudio existentes y se adapta a sus objetivos; no busca reemplazarlos, sino complementarlos y especificarlos. Define estándares compartidos que hacen más flexible y pertinente el currículo de la EMS. En el contexto del SNB, las competencias genéricas determinan el Perfil del Egresado.

Educar con un enfoque en competencias significa crear experiencias de aprendizaje para que los estudiantes desarrollen habilidades que les permitan movilizar, de forma integral, recursos que se consideran indispensables para realizar satisfactoriamente las actividades demandadas.

1.1.3. El papel de la resolución de problemas en el enfoque por competencias

El enfoque por competencias, que se plantea también para el resto de los niveles educativos y concuerda con diversos proyectos internacionales, es la base fundamental para orientar el currículo, la docencia y el aprendizaje donde, en este enfoque se propone la resolución de problemas como estrategia metodológica creadora de conocimiento y que potencia el desarrollo de competencias en los estudiantes.

Para el caso de las matemáticas, las competencias disciplinares buscan propiciar el desarrollo de la creatividad, el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes.

Un estudiante que cuente con las competencias disciplinares de matemáticas puede argumentar y estructurar mejor sus ideas y razonamientos. Las competencias reconocen que a la solución de cada tipo de problema matemático corresponden diferentes conocimientos y habilidades, y el despliegue de diferentes valores y actitudes.

Por ello, los estudiantes deben poder razonar matemáticamente, y no simplemente responder ciertos tipos de problemas mediante la repetición de procedimientos establecidos. Esto es una condición necesaria para que puedan aplicar esta disciplina más allá del salón de clases.

1.2. Evaluaciones donde se pone de manifiesto la resolución de problemas

Actualmente en nuestro país y particularmente en nuestro estado se aplican sistemáticamente evaluaciones a los diferentes niveles de educación, cuyos resultados podrían brindarnos un panorama del grado o nivel de concreción de las distintas competencias propuestas para el nivel de bachillerato, a continuación nos referiremos a las más importantes

1.2.1. Evaluación PISA

Resolución de problemas

Esta evaluación nace con la necesidad planteada por algunos países de estar informados acerca de la preparación que dan sus sistemas educativos a los estudiantes para la vida. Muchos países vigilan el aprendizaje de los alumnos con el fin de obtener una respuesta a esta cuestión. Además se cree que el análisis y la evaluación, unidos a los incentivos apropiados, pueden impulsar a los alumnos a aprender mejor, a los profesores a enseñar mejor y a las escuelas a crear entornos más favorables y productivos.

Para responder a la necesidad de disponer de datos sobre el rendimiento escolar que fueran comparables internacionalmente, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) puso en marcha en 1997 el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (conocido como PISA por sus siglas en Inglés), que representa el compromiso de los gobiernos de examinar, de forma periódica y en un marco común internacional, los resultados de los sistemas de educación, medidos en función de los logros alcanzados por los alumnos.

El examen PISA se ha venido aplicando cada tres años a partir del año 2000, pero por primera vez se enfatizó el área de matemáticas en el año 2003, aunque el examen incluía, como en todas las aplicaciones posteriores, las áreas de Español y Ciencias.

Para la evaluación PISA se han seleccionados tres tipos de problemas del ámbito matemático: toma de decisiones, análisis y diseño de sistemas y tratamiento de disfunciones.

En la resolución de problemas un elemento que juega un rol muy importante es el contexto del problema el cual trata de ubicar los problemas con relación a la experiencia de los estudiantes en materia de solución de problemas.

Normalmente en los problemas escolares, los contextos seleccionados aparecen desligados de la vida cotidiana de los estudiantes. Por consiguiente, el proyecto PISA propone emplear contextos de la vida personal, laboral, del tiempo libre y de la comunidad. Dichos contextos son tomados de los ámbitos tanto curriculares como extracurriculares.

Las capacidades de razonamiento son otro elemento importante en las evaluaciones de PISA. Al resolver un problema el estudiante requiere no solo conocimientos sino destrezas o capacidades, y una vez resuelto el problema tiene que comunicar sus resultados, para lo cual requiere organizar la información de manera lógica.

En el proyecto PISA, las competencias para la resolución de problemas y la manera como son evaluadas (OCDE, 2003, p. 149) se definen como:

> Puede describirse en términos de la capacidad de los alumnos para crear y supervisar cierto número de procesos dentro de una determinada gama de tareas y situaciones. La evaluación de la solución de problemas intenta identificar los procesos utilizados en diversas situaciones y áreas de contenido para describir y cuantificar, si es posible, la calidad de los resultados del trabajo de los alumnos.

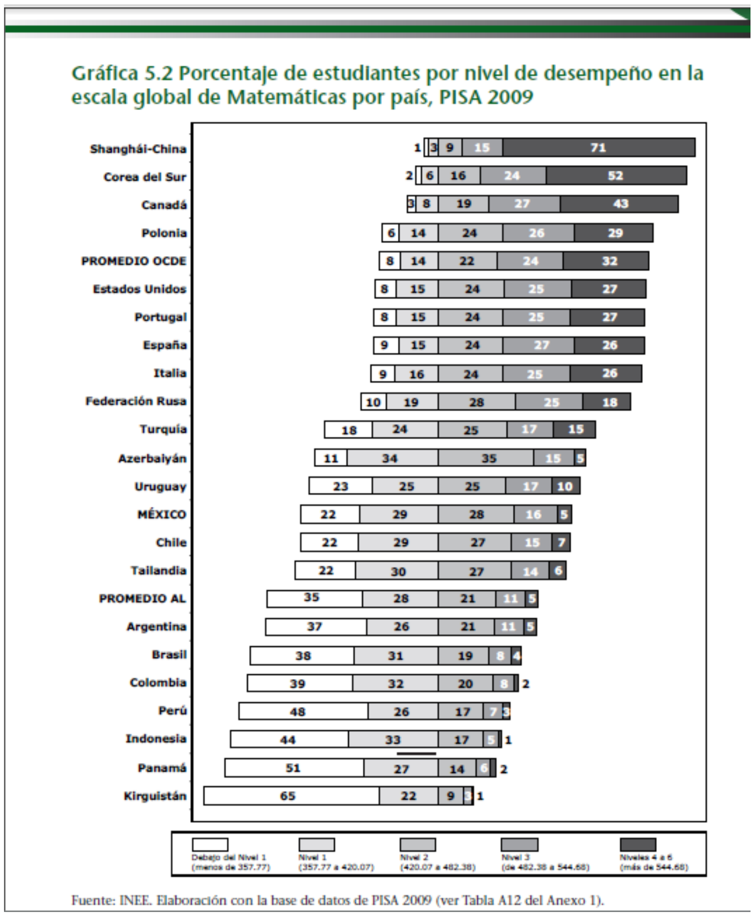


Tabla 1

Los estudiantes mexicanos fueron clasificados, según su desempeño en este examen en los niveles *por debajo del nivel* 1 (22%), *nivel* 1 (29%), *nivel* 2 (28%), *nivel* 3 (16%) y solamente el 5% de los estudiantes alcanzaron o sobrepasaron el *nivel* 4. PISA describe a los alumnos ubicados "por debajo del nivel 1" como aquellos que "no son necesariamente incapaces de realizar cualquier operación matemática. Sin embargo, si eran incapaces de utilizar las habilidades en las situaciones más sencillas de PISA”.

Para dar una idea del tipo de problemas que PISA clasifica en cada nivel, se presentan los dos ejemplos siguientes:

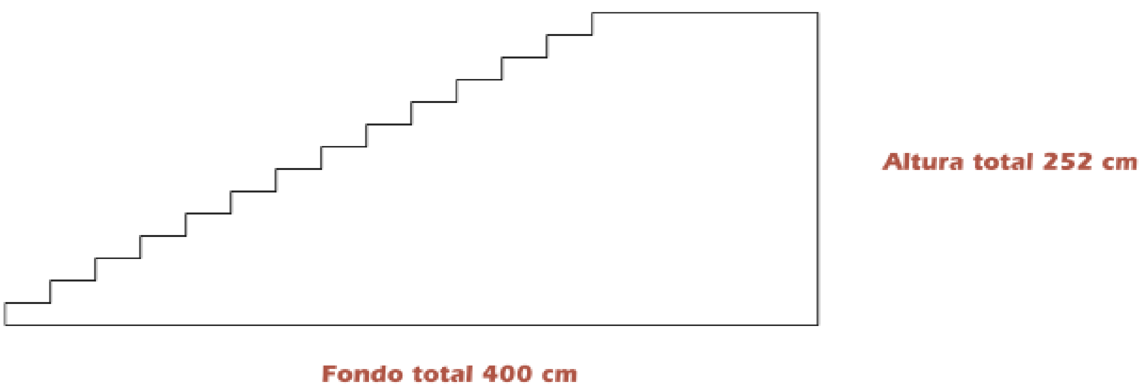
El problema de la escalera

Para PISA este problema se considera del nivel 2 y está planteado en el contexto de la vida real, en el sentido de que podría ser resuelto por un carpintero que construye una escalera.

Figura 2.4b ■ **Una muestra de ejercicios de matemáticas utilizados en PISA para la escala espacio y forma: Unidad ESCALERA**

ESCALERA

El esquema siguiente ilustra una escalera de 14 peldaños y una altura total de 252 cm:



PREGUNTA 2

¿Cuál es la altura de cada uno de los 14 peldaños?

Altura: ....cm.

Como puede verse en el problema la información se proporciona mediante representaciones gráficas y numéricas. Se trata aparentemente de un problema sencillo donde toda la información es explícita en el problema y podría ser resuelto mediante una simple división entre números enteros; sin embargo la presencia de datos no relevantes en la figura seguramente produjo algún descontrol en los estudiantes a la hora de seleccionar la operación apropiada. Llama la atención que la presencia de datos innecesarios en el problema haya resultado un obstáculo insalvable para muchos estudiantes, sobre todo si se piensa que esta característica del problema es precisamente la que lo aproxima a los problemas de la vida real.

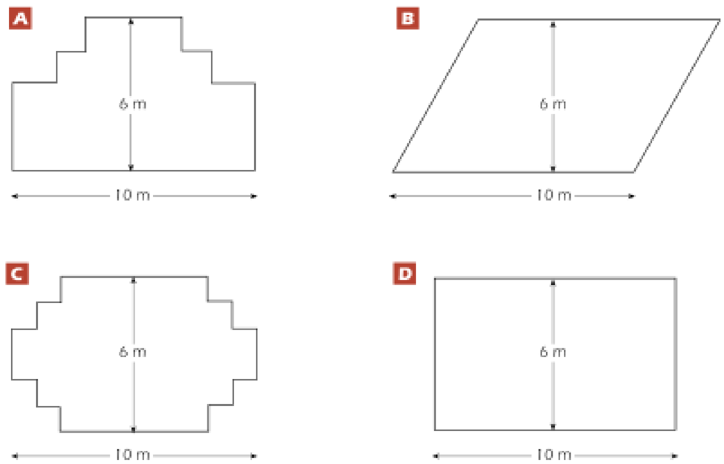
Para resolver este problema se requiere que los estudiantes hayan desarrollado una habilidad indispensable en la competencia de resolución de problemas, esta habilidad es la de distinguir los datos relevantes de los no relevantes en el enunciado de un problema. Sin esta habilidad desarrollada es prácticamente imposible seleccionar la operación aritmética que conduce a la resolución del problema.

El problema del Carpintero.

En la clasificación de PISA este problema está ubicado en el nivel 6, a diferencia del problema anterior, está planteado en un contexto escolar en el sentido de que este es el tipo de problemas que podrían abordarse en el salón de clase.

CARPINTERO

Un carpintero tiene 32 metros de madera y quiere fabricar el borde de un parterre. Está considerando los siguientes diseños de parterre.

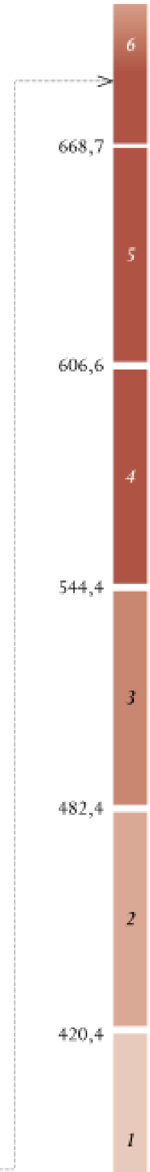


PREGUNTA 1

Rodea «Sí» o «No» para indicar si el diseño del parterre puede realizarse con 32 metros de madera.

Diseño del parterre	Utilizando este diseño, ¿puede fabricarse el parterre con 32 metros de madera?
Diseño A	*Sí / No*
Diseño B	*Sí / No*
Diseño C	*Sí / No*
Diseño D	*Sí / No*

Puntuación 1 (687)



Como podemos ver en el problema la información se presenta gráfica y numéricamente, sin embargo la primera de ellas es trascendental para discriminar entre los diseños que son viables y los que no, por tanto el problema lo ubican en el área de espacio y forma. El diseño D pareciera ser el más sencillo de todos, porque el perímetro puede ser obtenido de manera directa sumando los lados del rectángulo, cuyas medidas se muestran directamente en la gráfica, sin embargo en los incisos A y C se requiere cuantificar por separado los lados horizontales y verticales de los “escalones”.

La figura de la opción B es la única cuyo perímetro no mide 32 metros; para detectarlo pudieran necesitarse ciertos conocimientos y habilidades geométricas que permitan visualizarlo, como por ejemplo rotar los lados no horizontales, hasta transformar la figura en un rectángulo, que tendrá el mismo perímetro que el paralelogramo mostrado y cuya base seguirá midiendo 10 metros, pero su altura medirá más de 6 metros; por lo tanto la figura propuesta tendrá un perímetro mayor que 32 metros.

Cabe mencionar que el vocablo “parterre” es de origen francés y prácticamente no se usa en nuestro país, su inclusión en el problema se debe posiblemente a que la versión del reporte de PISA ha sido traducido en España.

Problemas como el anterior, considerados por PISA como los de nivel de dificultad más alto, fueron resueltos correctamente por menos del 1% de los estudiantes mexicanos examinados.

1.2. 2 Examen Enlace (2009)

La Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares, más conocido como ENLACE, es un examen que pretende evaluar el desempeño académico en Español y Matemáticas de los alumnos de primaria (tercero a sexto grado), estudiantes de secundaria (todos los grados) y jóvenes de preparatoria (último grado). Este examen evalúa también una tercera asignatura que cambia año con año.

Los últimos resultados publicados se refieren a la aplicación de este examen en el año 2009, en este año fueron evaluados 808346 estudiantes a nivel nacional, de los cuales 20355 estudiaban en el Estado de Sonora.

De nueva cuenta nos encontramos con un desempeño pobre de los estudiantes cuando enfrentan problemas donde entran en juego distintos niveles de dominio de herramientas matemáticas.

Los resultados son desalentadores. Aproximadamente la mitad de los estudiantes que cursan el bachillerato (46.5%) alcanzan lo que ENLACE llama un nivel de *dominio insuficiente*, lo cual significa que cuando mucho pueden resolver problemas donde la tarea se presenta directamente y que en general requieren de habilidades matemáticas consideradas del nivel más bajo. Llama la atención que el desempeño de los estudiantes sonorenses ha sido de los peores en el país: el 54.2% se ubicaron en el *dominio insuficiente*. En el nivel medio superior ENLACE considera problemas como el siguiente: (incluido en ENLACE 2010)

Problema de fracciones equivalentes

Por la manera como se presenta la información y por la ausencia de contexto, este problema tiene más bien las características de un ejercicio matemático.

20.

Una fracción equivalente a $\frac{7}{4}$ es:

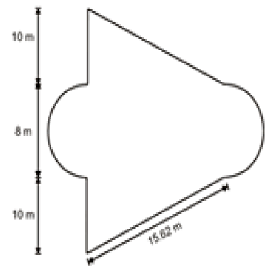
- A) $\frac{4}{7}$
- B) $\frac{49}{16}$
- C) $\frac{56}{32}$
- D) $\frac{49}{4}$

El propósito principal de este reactivo pareciera ser la verificación del conocimiento de fracción equivalente. Si un estudiante no puede encontrar la respuesta correcta es porque no está familiarizado con esta noción o bien, estándolo, no puede ejecutar operaciones elementales entre fracciones. Los estudiantes han ejecutado ejercicios similares desde la educación primaria, por lo cual la existencia de un gran porcentaje de estudiantes que no han podido resolverlo constituye una severa crítica al sistema educativo mexicano.

El problema de la sala del museo

Para este problema se requieren habilidades y capacidades que ENLACE considera del más alto nivel y está planteado en un contexto supuestamente real, puesto que se sugiere en el enunciado que se trata de un problema de aplicación para un electricista.

Una sala de museo tiene la forma como se muestra en la figura.



Para la instalación eléctrica se necesita tender un cable alrededor de todos los muros. ¿Cuántos metros deberá medir el cable?

- A) **67.24**
- B) **76.36**
- C) **82.64**
- D) **101.48**

En el problema podemos observar la información de manera gráfica y las medidas reales de la longitud de algunos muros. Posiblemente la mayor dificultad en este problema proviene del hecho de que la medida de las semicircunferencias, indispensable para resolverlo, no se muestra de manera explícita en el problema. Para calcular el perímetro de las paredes curvas, el estudiante tendrá que identificar en el dibujo el diámetro de las semicircunferencias y luego utilizar la fórmula del perímetro de una circunferencia para concluir que la medida total de las paredes curvas es 8π, tendrá que conocer el valor de π, calcular el valor de 8π e incluir este valor en el cálculo total.

Es importante observar en este problema que:

- En ninguna parte se especifica si las paredes curvas tienen forma de semicircunferencias o no, solo se cuenta con la percepción visual de la gráfica, inculcando en el estudiante la cultura de obtener conclusiones sobre aspectos que en el texto o la gráfica, no son explícitos
- Es un problema de aplicación solo en apariencia, dado que difícilmente a un electricista se le podría presentar un problema con estas características, es decir, un solo cable cuando al menos llevan dos o lo ficticio de la silueta del museo entre otros.

Es alarmante el bajo porcentaje (3%) de estudiantes que está en posibilidades de resolver problemas de este nivel.

1.2.3. Evaluación IIEEES

El Instituto de Innovación y Evaluación Educativa del Estado de Sonora (IIEEES), ha venido evaluando el desempeño académico de los estudiantes sonorenses de bachillerato desde el año 2005. Lo hace a través de un instrumento que incluye las asignaturas de Matemáticas, Español e Inglés (aunque en 2010 incluyó Ciencias Naturales). El reporte del IIEEES (IEEES, 2010) no describe el propósito de la evaluación que está aplicando, pero se infiere del documento que en el caso de matemáticas pretende medir las habilidades desarrolladas por los estudiantes en los diferentes tópicos que se enseñan en el bachillerato; posiblemente con el fin de tomar las medidas remediales pertinentes.

En el año 2010 el instrumento de evaluación fue aplicado a 82,650 estudiantes de bachillerato de los 303 diferentes planteles del estado (se cuentan como planteles diferentes los turnos matutino y vespertino de cada plantel).

Los resultados reportados en ese año ratifican el escaso desarrollo logrado por los jóvenes sonorenses en todas aquellas habilidades relacionadas con la resolución de problemas.

Para mostrar lo anterior, se plantean los siguientes dos problemas tomados de la evaluación IIEEES 2010.

Un problema sobre interés bancario (B23)

Este problema se aplicó a estudiantes del segundo semestre del bachillerato, y ha sido clasificado como un problema difícil por el IEEES en virtud de que el 75% no pudo resolverlo correctamente.

Un banco paga un interés anual del 35%. Si invierto $250 y al final del año reinvierto el capital e interés. ¿Cuánto tendré al final del segundo año?

A. $87.5
B. $118.12
C. $362.47
D. $455.62

La información se presenta aquí de forma verbal y numérica, y en ella se proporciona de manera explícita la tasa de interés anual y el capital inicial. El problema requiere el manejo del concepto de porcentaje, sin el cual es imposible resolver el problema. La pregunta final del problema dice "¿Cuánto tendré al final del segundo año?" posiblemente fue interpretada por los estudiantes como una pregunta que se refiere solamente al interés generado en dos años y seleccionaron por esa razón las opciones A y B.

Al respecto de este tipo de problemas, el informe declara (IEEES, 2009-2010, pp. 13):

> Se observa buen desempeño en el uso de números decimales en aplicaciones de porcentajes directos; pero si es necesario el cálculo combinado de porcentajes donde son necesarias más de dos operaciones, los alumnos manifiestan serios problemas;

Lo que el informe asegura podría tener muchas causas, por ejemplo, el hecho de que los estudiantes pueden ejecutar cálculos aritméticos sin una significación de lo que se hace, posiblemente por ello calculan el 35% de 250, obteniendo 87.5 pero no encuentran qué hacer con el resultado. Aquellos estudiantes que seleccionaron las opciones A o B seguramente no entienden el problema o bien entendiéndolo no pudieron hacer una estimación que les permitiera descartarlas. Adicionalmente el bajo índice de respuestas correctas pareciera revelar la despreocupación de los estudiantes por verificar si la opción escogida es correcta.

El problema del vino (B53)

Este problema se aplicó a alumnos del sexto semestre del bachillerato y fue catalogado por el IIEEES como complicado, dado el alto porcentaje de alumnos que no pudieron resolverlo correctamente (70%).

Un vino contiene 14% en volumen de alcohol etílico. ¿Cuántos mililitros de alcohol hay en una botella que contiene 2.5 lts de vino?

A. .35 mililitros
B. .4 mililitros
C. 250 mililitros
D. 350 mililitros

Como puede verse en el problema la información se muestra en forma verbal y numérica, en ella se proporciona explícitamente el porcentaje de alcohol etílico en el vino.

A juicio del IEES se trata de un problema complicado, dado el bajo índice de alumnos que pudieron resolverlo correctamente, aunque podría ser resuelto mediante una simple multiplicación de .14 por 2.5, la dificultad podría estribar en cómo interpretar el resultado de la multiplicación, el número .35 que arroja la calculadora conduce al estudiante a seleccionar la opción A, que es incorrecta. Para llegar a la solución correcta se requiere interpretar el .35 como 35 centésimos de litro y luego traducirlo a mililitros, lo cual pudiera tomarse como otro problema inmerso dentro del problema original.

Lo anterior explicaría por qué el nivel de respuestas ha sido tan bajo para este tipo de problemas. Sin embargo, las explicaciones que da el IIEEES sobre por qué, se trata de un problema difícil son insuficientes para explicar el bajo índice de respuestas correctas, al englobar este tipo de problemas en los que es necesario efectuar dos o más operaciones, se piensa que los estudiantes están en condiciones de efectuar dos o más operaciones, pero solo cuando tiene una significación de lo que hace. Con base en esto, pareciera que las dificultades que impiden a los estudiantes resolver el problema correctamente están relacionadas con las significaciones del concepto de porcentaje, y con las confusiones que origina el cambio de unidades de volumen.

1.3. La RIEMS y las evaluaciones estandarizadas

Al respecto del enfoque por competencias los documentos de la RIEMS (SEP, 2008b) aseguran que:

> Un planteamiento de esta naturaleza es sumamente proclive a desarrollarse en el marco de una perspectiva constructivista de la enseñanza, que elimina de las prácticas educativas la memorización no significativa y favorece el aprendizaje basado en resolución de problemas.

Se espera por lo tanto que conforme la Reforma se vaya concretando en los diversos bachilleratos existentes, la resolución de problemas se vaya convirtiendo en el eje central de la enseñanza de la matemática.

Educar con un enfoque en competencias requiere diseñar experiencias de aprendizaje en las que el estudiante tenga que enfrentarse a situaciones problemáticas que le exijan movilizar articuladamente sus conocimientos, sus habilidades y sus actitudes; como condición para dar respuesta a estas situaciones. El cumplimiento de los propósitos formulados en la RIEMS conduciría a la formación de un porcentaje cada vez mayor de estudiantes que pudieran alcanzar lo que en PISA se considera el nivel 5 y que se define como (OCDE, 2003b, pp. 47):

> Los alumnos pertenecientes a este nivel pueden trabajar estratégicamente utilizando habilidades de pensamiento y razonamiento bien desarrolladas, así como representaciones adecuadamente relacionadas, caracterizaciones simbólicas y formales, e intuiciones relativas a estas situaciones. Pueden reflexionar sobre sus acciones y formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.

Los resultados arrojados por las evaluaciones de PISA representan una de las preocupaciones que ha motivado la RIEMS. Pero los propósitos formulados en esta reforma resultan bastante ambiciosos, si se toma en cuenta el rendimiento mostrado por nuestros estudiantes en la parte matemática de los exámenes PISA. Baste decir, por ejemplo, que en el último reporte de PISA, el porcentaje de estudiantes mexicanos que alcanzó el nivel 5 antes mencionado no llegó al 1 %.

El examen ENLACE es el instrumento de evaluación más importante que se aplica al bachillerato nacional, este examen tiene características muy diferentes al examen PISA, principalmente en lo que se refiere al contexto de los problemas planteados. Hasta su última aplicación en el año 2010, este examen todavía no refleja la incorporación de los planteamientos de la RIEMS. A pesar de que los reactivos que integran el examen no se refieren a la "matemática en contexto" como lo sugiere la RIEMS, los resultados de esta evaluación constituyen una buena referencia acerca del nivel de desempeño matemático en el que se encuentran los estudiantes mexicanos y que la RIEMS se ha propuesto transformar.

Para ilustrar la desalentadora situación de los bachilleres mexicanos, baste decir que solamente el 3.4% de ellos, (SEP, 2008a) alcanza lo que en ENLACE se llama el nivel de excelencia y que define como:

> Emplean operaciones con fracciones para solucionar problemas y resolver combinaciones con signos de agrupación. Convierte cantidades de sistema decimal a sexagesimal. Aplica conceptos avanzados de probabilidad. Soluciona problemas con series de imágenes tridimensionales y aplica conceptos de simetría. Utiliza fórmulas para calcular el perímetro de composiciones geométricas. Determina los valores de los elementos de la circunferencia, la parábola y la elipse a partir de su ecuación y viceversa. Identifica la ecuación de una recta a partir de sus elementos y la aplica para encontrar la distancia entre dos puntos. Soluciona problemas donde se aplican funciones y leyes trigonométricas.

Es de resaltar que en el bachillerato sonorense el porcentaje de estudiantes que alcanzó el nivel de excelencia en esta prueba apenas llegó al 2.2%, situándonos ligeramente por encima del Estado de Guerrero que se encuentra en el último lugar.

Finalmente, la Secretaría de Educación y Cultura del Estado de Sonora cuenta con su propia evaluación del Nivel Medio Superior desde hace seis años (IIEEES). Esta evaluación no cuenta con una taxonomía a priori de los niveles de dificultad de los reactivos y por lo tanto no muestra una caracterización de cuáles son los reactivos más difíciles en su examen, sino hasta después de aplicarlo. Aunque en su informe más reciente no incluye un análisis detallado del desempeño de los estudiantes en la resolución de problemas; como se ha visto aquí mismo, los estudiantes evaluados tienen serias dificultades para resolver los problemas más sencillos.

1.4. Reflexiones Finales

La RIEMS propone una enseñanza basada en el planteamiento y resolución de problemas, además dentro de esta reforma, el enfoque por competencias presenta la resolución de problemas como creadora de conocimientos y que potencia el desarrollo de competencias en los estudiantes.

Por otra parte, las evaluaciones estandarizadas tanto internacionales como nacionales y regionales dan cuenta de nuestra realidad en lo que se refiere al mal desempeño de los estudiantes cuando se involucran en actividades de resolución de problemas. Los resultados de los tres instrumentos de evaluación analizados aquí, dejan clara la enorme distancia que existe entre los propósitos de la RIEMS y el nivel alcanzado por los estudiantes de preparatoria, en lo que se refiere a la resolución de problemas matemáticos.

Una primera dificultad con la que se enfrenta un estudiante al intentar resolver un problema matemático es la comprensión de su enunciado. Esta dificultad podría explicar en gran parte los bajos resultados obtenidos en los exámenes estandarizados, porque la incomprensión de estos enunciados inhibe la aplicación de cualquier herramienta o habilidad matemática. La literatura en Matemática Educativa cuenta con abundantes reportes sobre las dificultades implicadas durante el proceso de resolución de un problema: más allá de la comprensión del enunciado, las dificultades se reflejan también en la búsqueda de estrategias, ejecución de estas estrategias y el análisis de las soluciones cuando éstas se han encontrado.

Es preocupante que los materiales de enseñanza producidos hasta ahora para el área de matemáticas con el "enfoque" de la RIEMS, no parecen estar tomando con seriedad las complejidades presentes en los procesos de resolución de problemas. En particular en los libros de texto de matemáticas, publicados recientemente por las instituciones locales de educación media superior, es notoria la ausencia de planteamientos metodológicos sobre la resolución de problemas.

En el presente trabajo se pretende hacer un planteamiento metodológico que permita a los estudiantes resolver problemas algebraicos de enunciado verbal en mejores condiciones. Ciertamente que estos problemas no cubren toda la gama de los que se abordan en el bachillerato, pero algunos aspectos de esta metodología podrían aplicarse a problemas no algebraicos y cuyo enunciado no fuera necesariamente verbal.

Capítulo 2

Referencias Teóricas

En la actualidad gran cantidad de modelos teóricos intentan caracterizar y explicar de manera general la fenomenología que se genera en los procesos de aprendizaje de las matemáticas, sin embargo el hecho de ser teorías que podrían describir y caracterizar un amplio rango de fenómenos, es precisamente lo que las hace inviables para las pretensiones del presente trabajo, dado que en este caso se trata de analizar, describir y caracterizar fenómenos muy particulares, a saber, aquellos que se presentan durante las tareas de resolución de problemas algebraicos de enunciado verbal y en los que se ponen de manifiesto las dificultades enfrentadas por los estudiantes. Es en ese sentido y para los propósitos del trabajo se optó por utilizar como marco la teoría de los Modelos Teóricos Locales. Ya que se pretende tener un panorama sobre todas aquellas acciones emprendidas por el estudiante cuando intenta resolver un problema, un Modelo Teórico Local permitirá caracterizar los obstáculos que impiden un buen desempeño en la resolución de problemas algebraicos de enunciado verbal, puesto que el modelo se ha creado para eso.

Los Modelos Teóricos Locales (MTL) desarrollados por Eugenio Filloy (1999), se caracterizan por su recursividad y localidad; es decir un MTL es recursivo, porque considera que el significado asociado a un objeto no es fijo, éste puede cambiar dependiendo del uso que se le da en la resolución de un problema, y es local dado que no intenta explicar o analizar una amplia gama de fenómenos, solo se limita a analizar los fenómenos que se engloban en el análisis del uso de sistemas de signos que el sujeto ha desarrollado como producciones propias y que constituyen sus propios sistemas de signos.

2.1 Signo y Sistema matemático de Signos

En el MTL hay dos conceptos claves, el de Signo y el de Sistema Matemático de Signos (SMS); que se define en los siguientes términos:

Signo

Un MTL incorpora la definición tríadica de signo integrada por un símbolo (S), el objeto (O) representado por el signo y el interpretante (I) para quien el signo representa precisamente ese objeto (*cf*. Puig, 2003).

Sistema Matemático de Signos

Enfocar la atención en un solo signo, matemático o no, puede ocultar el hecho de que ningún signo existe de manera aislada.

Frecuentemente se hacen distinciones de dos sistemas de signos cuando se interpreta un problema algebraico de enunciado verbal, uno conformado con los signos usados mayormente en las matemáticas (+,– , o expresiones que indican el doble de, etc.…) y otro por los signos de la lengua natural. Pero desde el punto de vista de los procesos de significación esta distinción deja de ser importante. Lo que entonces aparece como crucial es el sistema de signos tomado en su conjunto y lo que hay que calificar de matemático es el sistema y no los signos, porque es este sistema el responsable del significado de los enunciados.

Puig (2003) explica la necesidad de contar con un SMS en los siguientes términos:

> Hay que hablar de sistemas matemáticos de signos y no de sistemas de signos matemáticos, subrayando con la colocación del adjetivo 'matemáticos' que lo que tiene el carácter matemático es el sistema y no meramente los signos individuales, y que, por tanto, lo que nos interesa para el desarrollo de la matemática educativa es estudiar cuáles son las características de esos sistemas (matemáticos) de signos debidas no sólo a que son sistemas de signos sino a que son precisamente sistemas matemáticos.

Una de las principales características de los SMS, que Eugenio Filloy introdujo hace ya algún tiempo, es que emplea una noción de sistemas de signos lo suficientemente amplia como para que pueda servir como herramienta de análisis de los textos que producen los alumnos, cuando se les está enseñando matemáticas en los sistemas escolares. Esta característica, a la que se recurre con frecuencia en el presente trabajo y que dará la pauta para clarificar los métodos o estrategias utilizadas por los alumnos cuando de resolver problemas algebraicos de enunciado verbal se trate.

En un MTL la producción de signos no proviene de sujetos en abstracto, por el contrario el interés está centrado en los signos que produce un sujeto concreto ante una situación concreta, Filloy (2008) lo expresa en los siguientes términos:

> La perspectiva semiótica adoptada en la teoría de los modelos locales engloba en el análisis de relaciones entre sistemas de signos a las producciones propias de los sujetos y ésa es una característica esencial de dicho acercamiento teórico.

Cada individuo va construyendo su propio SMS, que le permite hacer operaciones en un cierto nivel de complejidad, sin embargo habrá situaciones o problemas cuya dificultad estribe propiamente en las limitaciones inherentes al SMS creado de manera individual, es ahí donde emerge la necesidad de ampliar los horizontes de este SMS y modificarlo para contar con uno más eficiente y que pueda usarse como herramienta que le permita resolver problemas de manera más exitosa. Se espera que las modificaciones que sufra el SMS lo aproximen, de manera natural a los sistemas de signos institucionalmente aceptados.

En síntesis, este acercamiento teórico proporciona herramientas para decodificar un SMS, permite identificar los significados asociados con algunos conceptos matemáticos y caracterizar la naturaleza de los obstáculos que impiden resolver problemas de enunciado verbal. Estos elementos tendrán que tomarse en cuenta para proponer el modelo de enseñanza correspondiente.

2.2 Los Cuatro Componentes del MTL

El MTL integra cuatro componentes, que concibe como modelos inseparables; de tal forma que al proponer problemas de enunciado verbal a un estudiante se puedan identificar las interrelaciones y los obstáculos que tienen lugar durante la evolución de todos los procesos pertinentes relacionados con cada uno de los cuatro componentes.

1. Modelo de Enseñanza (Texto y Expresión Textual)
2. Modelo de Competencia Formal
3. Modelo de procesos de Cognición
4. Modelo de Comunicación

2.2.1 Modelo de Enseñanza

Un modelo de enseñanza es un repertorio o secuencia de textos, es adecuado hacer la aclaración de que Filloy, Rojano y Puig, no hacen referencia a "textos" como alguna serie de escritos, libros o cualquier otra forma tangible que brinde un panorama acerca de la posible formación de los alumnos en su instrucción escolar.

Los autores conciben un *texto* como una manifestación de lenguaje matemático y no como un texto escrito, además consideran pertinente adoptar la noción de texto como "el resultado de un trabajo de lectura/transformación hecho sobre un espacio textual" propuesto por Talens y Company, (1984, pág. 32). También son estos textos los que pueden ser utilizados para analizar cualquier proceso mediante el cual se da sentido a un concepto en específico.

Una definición de los conceptos *texto* (T) y *espacio textual* (ET) puede verse en (Puig, 2003), donde plantea también que existe una correspondencia entre estos conceptos y las nociones de sentido y significado.

> Un texto es el resultado de un trabajo de lectura/transformación realizado sobre un espacio textual, cuya intención no es extraer o desentrañar un significado inherente al espacio textual sino producir sentido. El espacio textual tiene existencia empírica, es un sistema que impone una restricción semántica a quien lo lee; el texto es la nueva articulación de ese espacio, individual e irrepetible, realizada por una persona como consecuencia de un acto de lectura.

Además de la distinción entre T y ET, también existe diferencia de posiciones a considerar durante un proceso de lectura, dado que cualquier T es producto de una lectura de ET, sin embargo es este T el que se evoca en una eventual necesidad, con lo cual toma el papel de ET y así sucesivamente.

Es en este sentido que un Modelo de Enseñanza es una colección de T que se toman como ET para su lectura y transformación en otros T para dar sentido a sus lecturas.

Visto de esta manera, puede describirse el trabajo de los alumnos (y de los maestros) durante los procesos de enseñanza aprendizaje, como un proceso reiterado de lectura/transformación de espacios textuales en textos.

2.2.2 Modelo de Competencia Formal

En este componente del Modelo Teórico Local, se delimita lo que se conoce como competencia[1] en la lengua natural, competencia algebraica y competencia en el proceso de modelación. El centro del proceso de resolución, es el paso del enunciado del problema, que se presenta escrito en lenguaje natural, a una expresión del lenguaje del álgebra, por lo general una ecuación. Por tanto, en la resolución algebraica de problemas está implicada, por un lado, la competencia en ambos lenguajes, y por otro, la competencia en el proceso de transitar de un texto escrito en el lenguaje natural a un texto escrito en el lenguaje del álgebra.

Por competencia en la lengua natural, se entenderá la posibilidad de que el estudiante pueda identificar en un ET aquellos significados que lo hacen consistente semánticamente. Por ejemplo, al leer frases como “agregar”, “echar”, “aumentar” e “incrementar” el alumno las pueda asociar con una suma de elementos de un mismo conjunto, por referirnos a un caso particular.

La competencia algebraica en este modelo se refiere a la identificación del significado de las expresiones algebraicas compuestas y sus reglas de sintaxis y la forma como éstas se refieren a cantidades por el intermedio de las relaciones entre cantidades, se refiere también a la posibilidad de que estas expresiones puedan ser transformadas en otras, de acuerdo con estas reglas de sintaxis y a las destrezas para aplicar y controlar algoritmos y fórmulas.

La competencia de modelación resulta clave en el proceso de resolución de un problema de enunciado verbal, exige la conjugación de las dos competencias anteriores, pero es algo

[1] El concepto de competencia en un MTL no se refiere al concepto al que hacen alusión las reformas educativas emprendidas recientemente en México en todos los niveles preuniversitarios; se vincula más bien al concepto actuación (matemática), es decir la competencia es un dominio más o menos amplio de las matemáticas, sobre resolución de problemas aritméticos, geométricos o algebraicos, ya sea de manera heurística o por métodos institucionales.

más que eso. Se refiere esencialmente a la posibilidad de traducir con fluidez el sistema de signos de la lengua natural al sistema matemático de signos del álgebra. En otras palabras, se refiere a que un alumno pueda detectar y decodificar en el enunciado verbal de un problema "ciertas" palabras que describen relaciones claves en el problema; independientemente de la identificación de otras relaciones que no están explicitas en el enunciado del problema.

2.2.3 Modelo de procesos de Cognición

Los procesos de cognición, que se ponen en práctica en la resolución de problemas algebraicos de enunciado verbal, tienen que ver con formas del pensamiento matemático y su comunicación (mediante el uso de una terminología institucionalmente aceptada), los cuales se van refinando conforme aumente la cantidad de problemas resueltos, como lo son: identificación de las cantidades que están cambiando y de las que no (identificación de variables), la relaciones entre cantidades variables y de cómo se da la dependencia entre ellas (relación entre variables).

Las dificultades enfrentadas por los estudiantes que se evidencian al observar actuaciones fuera del Modelo de competencias establecidas, pueden ser enfrentadas mediante el uso de dos métodos de aprendizaje para la resolución de problemas, que podrían resumirse en los siguientes términos:

1. El Método Analítico de Exploraciones Sucesiva (MAES), que consiste básicamente en usar datos particulares con el fin de explorar posibles soluciones del problema y desencadenar el análisis de las relaciones inmersas en él. El método puede ser ilustrado con la resolución del problema siguiente (Véase Filloy, Rojano y Rubio 2001, pp. 159-161):

> Una maestra tiene 120 chocolates y 192 caramelos que va a repartir entre sus alumnos.
> Si cada alumno recibe 3 caramelos más que chocolates ¿Cuántos alumnos hay?

El método aplicado a este problema iniciaría dándole un valor particular al número de estudiantes, previamente identificado como la incógnita. Si este valor inicial fuera, por ejemplo 12, el método podría conducir a la pregunta ¿192/12 = 120/12 + 3? La respuesta negativa a esta pregunta conduce a la conclusión de que 12 no es una solución al problema porque la igualdad no se cumple, pero la pregunta deja al descubierto las relaciones aritméticas del problema lo cual permite sustituir el 12 por otros candidatos a solución o bien a la búsqueda algebraica mediante la resolución de la ecuación

$$192/x = 120/x + 3.$$

2. El Método Cartesiano (MC). El MTL ha sido construido para explicar los procesos de resolución de problemas de enunciado verbal y ha tomado al MC como el método heurístico que utilizaría un resolutor "*experto*". A pesar de que Descartes utilizó este método para modelar y resolver situaciones geométricas en "La Geometría" (Descartes, 1954, Pág. 2-10), en este MTL el método ha sido descrito y sistematizado pensando en su aplicación a la resolución de problemas de enunciado verbal, en los siguientes términos (Filloy, Puig, & Rojano, 2008, pp. 327-342).

1. Una lectura analítica del enunciado del problema que lo reduce a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades.
2. Elección de una cantidad que se va a representar con una letra (o de unas cuantas cantidades que se van a representar con letras distintas).
3. Representación de otras cantidades mediante expresiones algebraicas que describen la relación (aritmética) que esas cantidades tienen con otras que ya han sido previamente representadas por una letra o una expresión algebraica.
4. Establecimiento de una ecuación (o tantas como letras distintas se haya decidido introducir en el segundo paso), igualando dos expresiones, de las que se han escrito en el tercer paso, que representen la misma cantidad.
5. Transformación de la ecuación en una forma canónica.
6. Aplicación de la fórmula o algoritmo de solución a la ecuación en forma canónica.
7. Interpretación del resultado de la ecuación en términos del problema.

2.2.4 Modelo de Comunicación

Este componente trata del intercambio de mensajes entre sujetos (alumno-alumno(s) o alumno-maestro) con diferentes grados de dominio dentro de un SMS. En general este modelo de comunicación marca la pauta en cuanto los términos o terminología que se debe utilizar para la comunicación, formación o decodificación de algún texto. De esta manera el lenguaje juega un papel importante, dado que es el medio de comunicar y gestionar significados matemáticos referentes a las actividades propuestas.

En la experimentación de la metodología propuesta en el presente trabajo, este componente también se estudia a través de la interacción social entre parejas con esbozos de aprendizaje colaborativo. Facilitando de cierta manera la detección de las dificultades enfrentadas en la decodificación de textos.

Capítulo 3

La Metodología Propuesta

Tal como se expuso en capítulos anteriores, la resolución de problemas en los cursos de matemáticas es un asunto de primer orden. Las dificultades que enfrentan los estudiantes para resolverlos, pudieran estar reflejando la forma en que fueron tratados estos temas en los niveles educativos previos y actuales, en el sentido de que en el desarrollo de los contenidos de matemáticas por lo regular se privilegian los aspectos operativos y la memorización del conocimiento, más que el análisis de situaciones o estrategias para la resolución de problemas. Por otra parte pudiera ser reflejo de la falta de atención, por parte del sistema educativo, al desarrollo de habilidades y actitudes como la iniciativa, la participación, la creatividad, la independencia, la socialización, la verbalización, la argumentación y la búsqueda de soluciones a situaciones nuevas a partir de las herramientas acumuladas.

En el presente trabajo se propone una metodología de enseñanza que apoye la resolución de problemas de texto. Se hará referencia a estos problemas en el sentido que lo hace Charnay como una terna situación-alumno-entorno (Charnay, R, 1988):

> Sólo hay problema si el alumno percibe una dificultad: una determinada situación que "hace problema" para un determinado alumno puede ser inmediatamente resuelta por otro (y entonces no será percibida por este último como un problema). Hay, entonces, una idea de obstáculo a superar. Por fin, el entorno es un elemento del problema, en particular las condiciones didácticas de la resolución (organización de la clase, intercambios, expectativas explícitas o implícitas del docente).

La metodología propuesta aquí no es general, el tipo de problemas en los que se enfoca son problemas verbales que pueden ser resueltos de manera algebraica, además está dirigida a estudiantes que inician el bachillerato, lo cual restringe el campo matemático a las herramientas básicas de aritmética y álgebra.

Las características de los problemas a abordar son:

- Problemas que pueden ser resueltos por métodos algebraicos.
- Son enunciados verbalmente.
- Que no puedan ser resueltos fácilmente por métodos aritméticos.
- Al alcance de los estudiantes recién egresados de secundaria.

Características de la Metodología:

- Apoya la resolución de problemas de texto.
- Centrada en el aprendizaje (modelo de cognición).
- Integra diagnóstico y tratamiento (Recursividad).
- Promueve competencias actitudinales (Autonomía).

Esta metodología consta de tres fases las cuales, se describen en las siguientes secciones.

3.1 Primera fase de la metodología

En la presente propuesta, la actividad en el aula inicia con el planteamiento de un problema que ha sido previamente seleccionado para despertar el interés de los alumnos y pueda involucrarlos en el proceso de resolución.

Una primera dificultad en el proceso de resolución es la comprensión del problema. Se parte aquí del supuesto de que el estudiante leerá cuidadosamente el problema, pero no necesariamente comprenderá su enunciado en el sentido que interesa aquí, esto es, parece difícil que espontáneamente la comprensión del estudiante alcance la identificación de los datos relevantes, detecte la relación entre ellos, perciba la naturaleza de la solución e identifique las variables involucradas en el problema.

La no comprensión del problema por parte del estudiante, plantea un reto para el profesor, que en ese momento desconoce los diferentes aspectos del problema que no tienen significado para el estudiante o tienen un significado erróneo.

En esta metodología el papel del profesor no consiste en identificar y aclarar al estudiante cuál es la dificultad que le impide avanzar en el problema; se trata por el contrario que el estudiante aclare sus confusiones a través de su propia actividad. Pero esta actividad será propuesta directamente por el profesor y consistirá simplemente en proponerle un número (o una pareja o una terna de números, dependiendo del problema) y pedirle que verifique si ese número es una solución del problema.

Las características deseables para el número a proponer son: que el número dado no sea la solución del problema y que no sea tan complicado operar con él, como para que exagere el costo de la verificación al estudiante.

En la verificación del número propuesto como solución, tomará gran importancia lo que los alumnos realicen durante esta actividad, ya sea que lo hagan de manera oral o escrita, ya que este proceso de verificación será la fuente más confiable para que el profesor identifique los conceptos matemáticos puestos en juego, cómo se ponen en práctica y la comprensión total o parcial del problema planteado. Con base en las observaciones de la tarea desarrollada por el estudiante, el maestro propondrá la siguiente actividad, que no será la misma para todos los estudiantes, porque dependerá de lo que cada uno haya hecho y de las conclusiones a las que haya llegado.

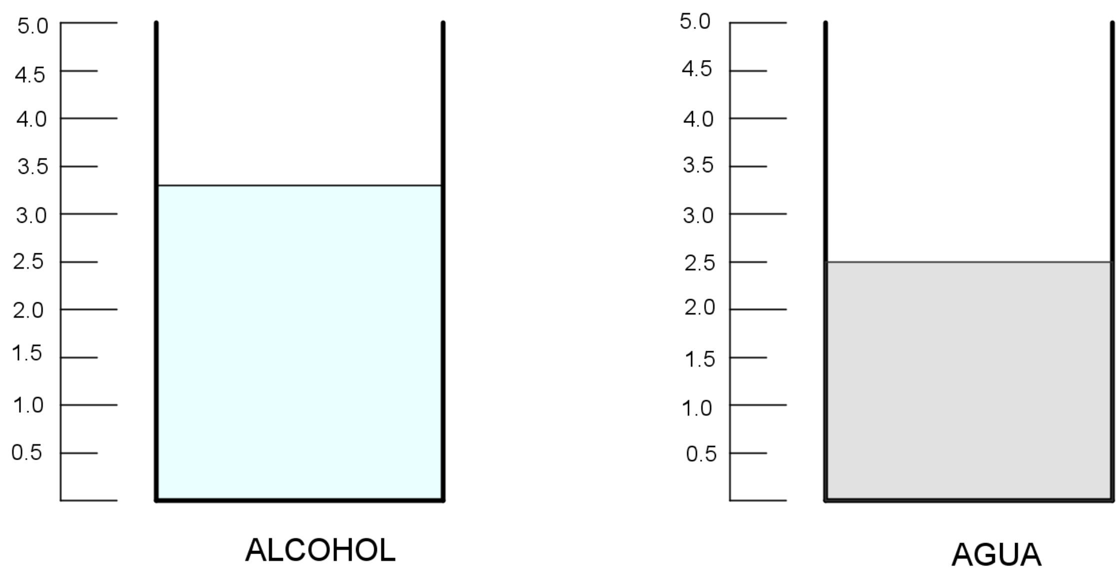
El profesor tendrá que distinguir dos tipos de estudiantes en este momento: los que pueden verificar que el número no es solución del problema y los que no pueden hacerlo.

En el caso de los primeros, el profesor les propondrá otro número como candidato a solución y les pedirá de nuevo que verifiquen si el número es o no solución del problema.

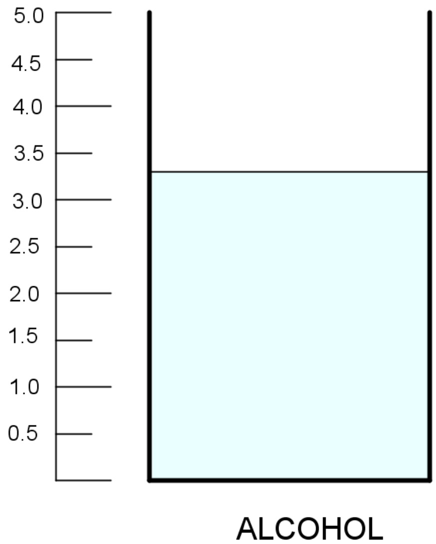
En el caso de los segundos el profesor propondrá una simulación del problema con el propósito de involucrar al estudiante en la estructura interna del problema. Entre estos últimos estudiantes no solamente estarán incluidos aquellos que no pudieron llevar a cabo la verificación sino también los que habiendo descartado el número como solución, lo hicieron basándose en un procedimiento erróneo o incoherente. Para precisar lo que se entiende aquí por simular un problema, se ilustrará con un ejemplo, supongamos que el problema es el siguiente:

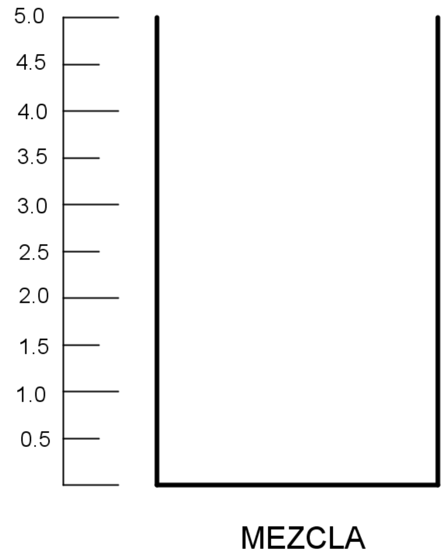
Mezcla de Alcohol
Un recipiente contiene dos litros y medio de agua, ¿qué cantidad de alcohol tendrá que mezclarse con el agua, para que la mezcla contenga el 10% de alcohol?

Supóngase que el profesor ya preguntó al estudiante si un litro era o no solución al problema, y el estudiante falló en su verificación. En este caso el profesor podrá proponer una primera simulación del problema basada por ejemplo en "dibujos", sobre la que el estudiante podrá trabajar en una hoja como la que se ve en la siguiente figura:



Para iniciar la simulación, el profesor podrá formular preguntas como la siguiente:
Si quieres verificar si un litro es una solución del problema, marca cómo quedarían los niveles de los líquidos en el siguiente dibujo.





Una vez que el estudiante ha realizado la tarea sobre el dibujo, se podrán plantear preguntas como la siguiente:

En la mezcla obtenida, ¿el 10% será alcohol?

Cabe la posibilidad de que la simulación no funcione en el sentido de que el estudiante de todos modos no pueda entender lo que significa verificar si un litro es o no solución del problema. El profesor en este caso deberá tener a la mano lo necesario para plantear una simulación diferente, en este caso, por ejemplo usando materiales manipulables. Para el problema anterior por ejemplo, esta simulación podría consistir en lo siguiente:

Se colocan 25 canicas de color azul en un frasco y 25 canicas de color blanco en otro frasco, las canicas de color azul representarán el alcohol en el modelo y las de color blanco el agua. Es posible que antes de operar con el modelo, el estudiante se tenga que familiarizar con él, esto es, no se parte de que el estudiante entiende que el modelo realmente sirve como tal. Para verificar esta familiarización el alumno podría responder preguntas como la siguiente: ¿si en cada frasco están representados 2.5 litros de líquido, qué cantidad de líquido representa cada canica?

Una vez asegurados de que el modelo del problema funciona como tal, podría plantearse lo que significa en el modelo la verificación de que un litro no es solución del problema, podrían plantearse preguntas como, ¿cuántas canicas azules tendremos que agregar al frasco de las canicas blancas para agregar al agua un litro de alcohol?, para después abordar la verificación misma con preguntas como: ¿qué porcentaje de alcohol representan las canicas azules agregadas?, ¿en el total de canicas qué representa la mezcla?

Este segundo grupo tendrá que seguir verificando si un número es o no solución del problema, utilizando el modelo hasta que ya no lo necesite en la verificación; cuando este grupo logre desprenderse del modelo, entonces estará aproximadamente al nivel del primer grupo.

Ahora el profesor les propondrá otro número como candidato a solución y les pedirá de nuevo que verifiquen si el número es o no solución del problema. Este proceso continuará hasta que a juicio de él, se tengan verificaciones coherentes de que los números propuestos no son soluciones del problema.

3.2 Segunda fase de la metodología

Con todos aquellos estudiantes que hayan podido verificar soluciones, se pasará ahora a otra fase, en la cual se pretendería la sistematización y registro de la exploración de posibles soluciones. Para apoyar esta fase, al alumno podría proporcionársele una tabla como la siguiente (que se refiere al problema de mezclas planteado antes), o bien dejarle la tarea de que se construya.

	Volumen de Agua	Volumen de Alcohol	Volumen de la Mezcla	Porcentaje de Alcohol en la mezcla
1	2.5	1		
2	2.5	2		
3	2.5			
4	2.5			
5	2.5			
6	2.5			

Durante el llenado de esta tabla es importante que el estudiante detecte los patrones presentes en sus cálculos y los pueda expresar como operaciones entre columnas. No se espera que esta detección sea automática y posiblemente habrá que plantear algunas actividades sobre la tabla que le permitan detectar estos patrones. Estas actividades incluirían dar respuesta a preguntas como las siguientes.

- En el renglón 3 describe cómo le hiciste para calcular el volumen de la mezcla.
- Si hubiera un renglón número siete y en ese renglón el volumen de la mezcla fuera 2.8 litros, ¿qué número debiera tener la columna "Volumen de Alcohol"?
- Si hubiera un renglón número ocho y en ese renglón el porcentaje de alcohol en la mezcla fuera el 50%, ¿qué cantidad aparecería en la columna "Volumen de Alcohol"?, ¿qué cantidad aparecería en la columna "Volumen de la Mezcla"?

- Describe como obtuviste los números con los que llenaste la columna "Volumen de la Mezcla".

- Describe cómo obtienes los números con los que llenaste la columna de porcentajes.

- Cuando los valores de la columna "Volumen de Alcohol" disminuyen, ¿qué pasa con los valores de la columna "Porcentaje de Alcohol"?

3.3 Tercera fase de la metodología

Los estudiantes que hasta ahora pudieron verificar si un número es solución o no, detectaron los patrones presentes en sus cálculos y los pudieron expresar como operaciones entre columnas, serán candidatos a entrar a otra fase de la metodología donde se les propondrá el uso de la Hoja Electrónica Excel (HE), con el fin de facilitar las verificaciones que habían estado haciendo con lápiz y papel.

Sin embargo, el propósito más importante en esta etapa es el de promover algunos aspectos importantes en la resolución de problemas verbales, como son: la identificación de variables y la manera en que están relacionadas estas variables en el problema.

Durante esta fase el estudiante tendrá que diseñar en Excel la tabla con la que ha venido trabajando. Es precisamente durante el proceso de diseño que se vuelve indispensable identificar las variables del problema, sus relaciones y sus significados, para poder indicar en Excel cómo se debe operar con las columnas. Al inicio del diseño, la tabla en Excel se vería como en la Figura 1.

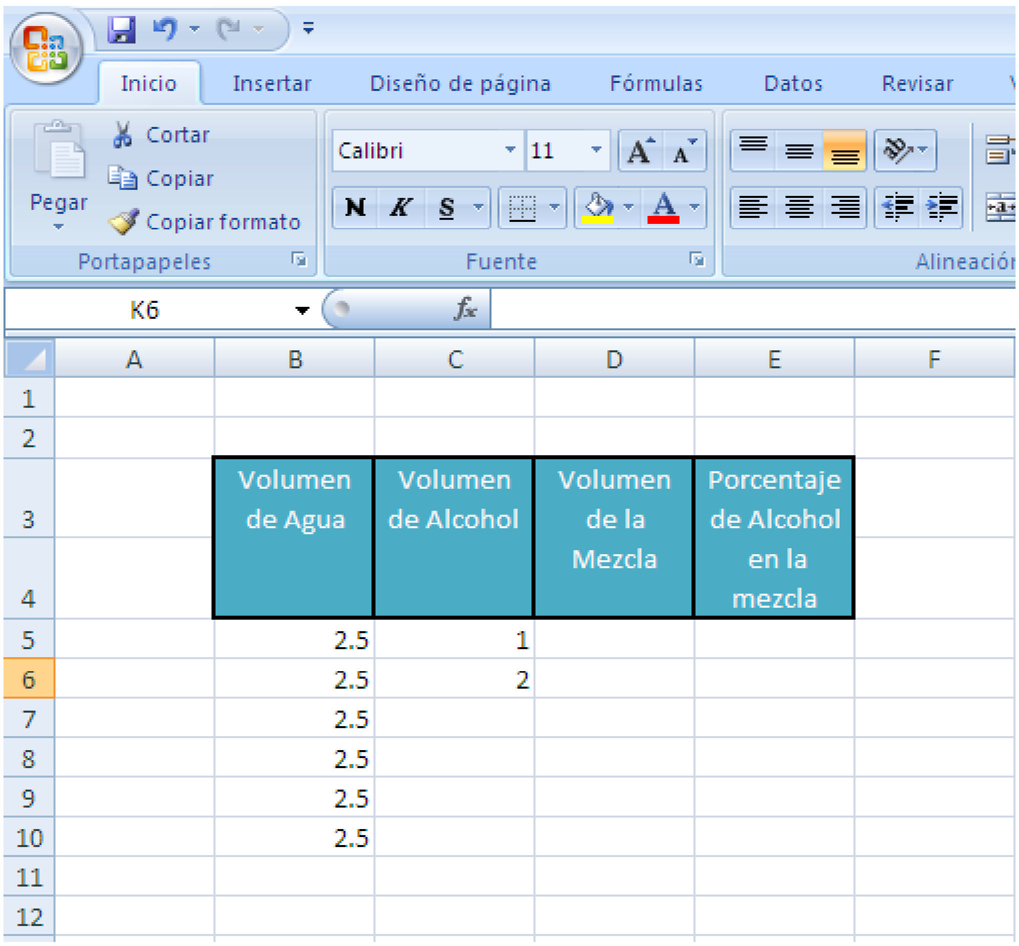
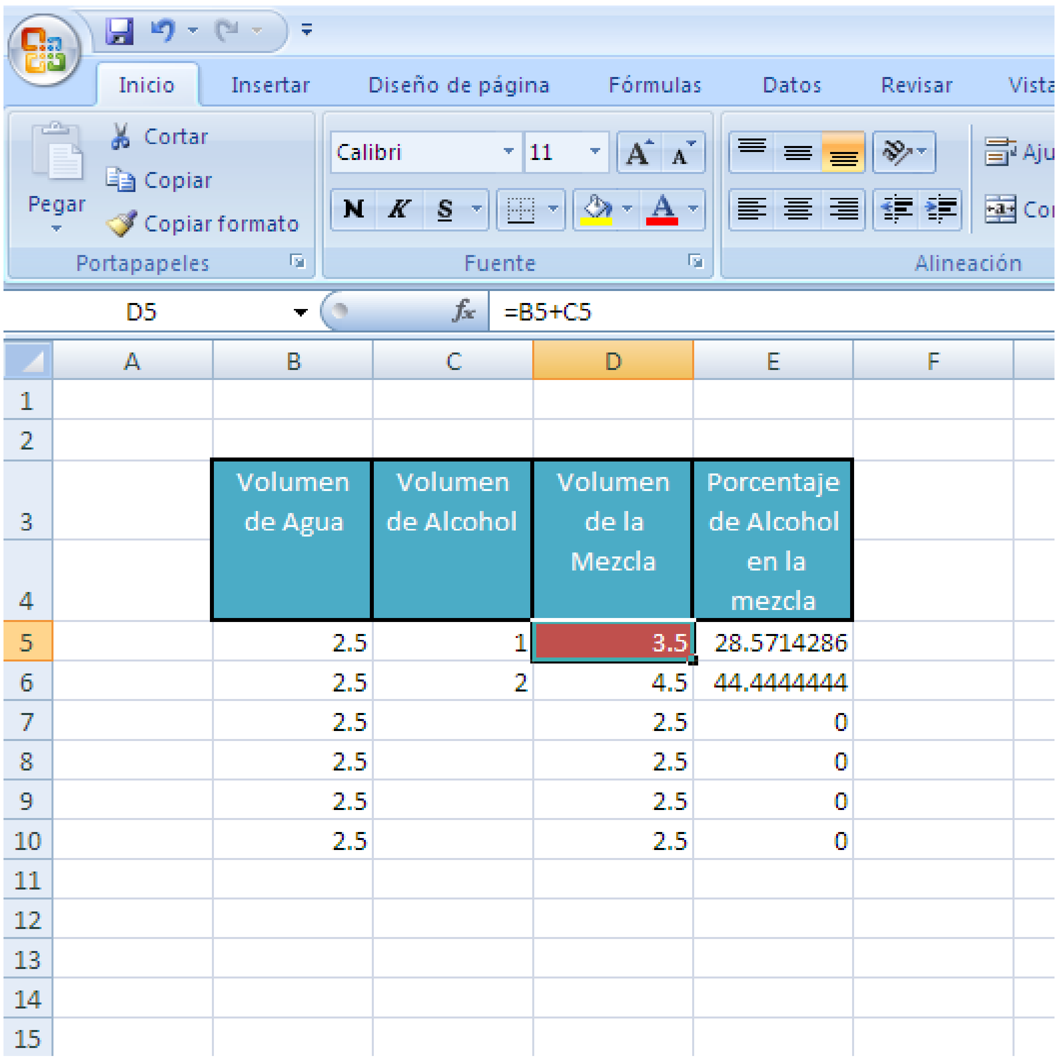


Figura 1.

La importancia del uso de la HE radica en que para concluir el diseño de la tabla, será necesario que el alumno programe las funciones haciendo referencia a las coordenadas que usa Excel para ubicar las celdas.

Como por ejemplo, para obtener el volumen de la mezcla en el quinto renglón es necesario que el alumno la programe en términos de la suma de las columnas "Volumen de Agua" y "Volumen de Alcohol"; en este caso el alumno podrá colocar el cursor en la casilla D5 y escribir en la barra de funciones la fórmula =B5+C5. Se espera de esta manera que las instrucciones dadas a Excel sirvan como una primera aproximación a la simbolización algebraica. Ciertamente el estudiante no está escribiendo expresiones como Z=X+Y, pero le está ordenando a Excel que haga D5= B5+C5. Se espera que al final del diseño, el estudiante trabaje con una tabla como la que muestra la Figura 2.



Volumen de Agua	Volumen de Alcohol	Volumen de la Mezcla	Porcentaje de Alcohol en la mezcla
2.5	1	3.5	28.5714286
2.5	2	4.5	44.4444444
2.5		2.5	0
2.5		2.5	0
2.5		2.5	0
2.5		2.5	0

Figura 2

Hasta aquí los estudiantes han podido operar con columnas y representar relaciones entre columnas utilizando el lenguaje de la hoja electrónica, pero no han podido construir un modelo algebraico del problema. Se espera que el trabajo realizado por ellos apoye la comprensión de la estructura del problema (variables, constantes, relación entre variables, etc.) y los dote de una primera aproximación a la construcción del modelo algebraico.

La construcción del modelo algebraico no es automática después de trabajar con la hoja de cálculo, se requiere contar con una estrategia que aproveche las tareas realizadas anteriormente y que permita la interpretación como variables de las columnas con las que se ha operado.

Capítulo 4

Experimentación

En el presente trabajo se propone una metodología de enseñanza que apoye la resolución de problemas algebraicos de enunciado verbal y está dirigida a estudiantes que inician el bachillerato, restringiendo el uso de las herramientas matemáticas a las propias de alumnos que cursan los primeros semestres, limitándolas prácticamente a la aritmética y al álgebra.

En esta propuesta metodológica la actividad inicia con el planteamiento de un problema previamente seleccionado por el maestro con el fin de poner en práctica la metodología. Una primera dificultad en el proceso de resolución es la comprensión del problema, otras posibles dificultades tendrán que ver con identificación de cantidades variables o constantes, detección de relaciones entre variables, etc. Estas dificultades no necesariamente serán las mismas para cada estudiante, esto dependerá de la terna situación-alumno-entorno; sin embargo la presente metodología se propone detectarlas en cada caso e irlas enfrentando durante el proceso de resolución del problema. Con respecto a las dificultades mencionadas, la tarea del docente no se limitaría a detectarlas, más bien se trata de que la detección de dificultades se acompañe del planteamiento de actividades que permitan al estudiante superarlas.

Esta metodología fue experimentada con 10 estudiantes de los primeros semestres de bachillerato que participaron de manera individual o por parejas en sesiones de aproximadamente 45 minutos que fueron filmadas en video. Las características de los alumnos participantes serán descritas antes de las escenas reportadas; en todas las escenas participa un profesor conduciendo el proceso, además todos los estudiantes son alumnos de Colegio de Bachilleres Plantel Nogales.

En las transcripciones los alumnos serán identificados como E y el maestro como M y en los casos donde participen dos alumnos se identificaran como E1 y E2.

Las escenas tienen lugar dentro de la sala audiovisual del plantel escolar y la mayor parte de ella son realizadas en el pizarrón y grabadas en video con una cámara de mano instalada en un trípode.

4.1 Experimentación de la primera fase de la metodología

La experimentación será reportada en fases o etapas dentro de la resolución de los problemas, la primera de ellas tiene que ver con la comprensión del problema, el cual es un asunto de primer nivel dado el gran número de obstáculos dentro de la resolución de problemas de texto que tienen origen en la no comprensión del problema. Durante el desarrollo de esta fase se detectaron y enfrentaron dificultades relacionadas con:

- Deficiencias en el dominio de la lengua natural.
- La decodificación errónea del espacio textual al texto.
- La decodificación incompleta del espacio textual al texto.

A continuación mostraremos algunos fragmentos de episodios donde se hace patente la no comprensión del enunciado del problema.

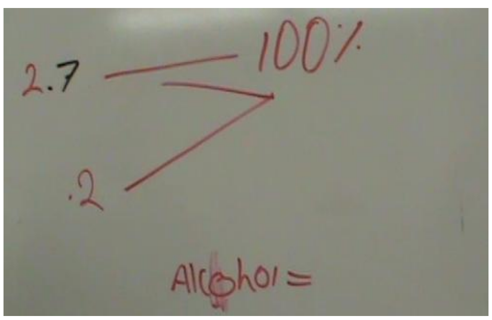
Caso 1.

La siguiente es parte de la transcripción de una escena en la que dos estudiantes se involucran en la resolución del siguiente problema:

Mezcla de Alcohol
Un recipiente contiene dos litros y medio de agua, ¿qué cantidad de alcohol tendrá que mezclarse con el agua, para que la mezcla contenga el 10% de alcohol?

Al momento de la experimentación ambos alumnos cursaban el cuarto semestre y no contaban con un buen historial académico, lo cual se reflejaba en la reprobación de por lo menos 3 cursos cada uno, en el incumplimiento de sus tareas y en su asistencia irregular a clases.

En el episodio que se mostrará, los estudiantes ya habían intentado infructuosamente resolver el problema, y el profesor está intentando que verifiquen si un número es solución o no del problema.

M.- Si tengo 2.5 litros de agua y le agrego .3 litros de alcohol. ¿Cuánto voy a obtener al mezclar? [Hasta este momento los estudiantes han escrito en el pizarrón lo que muestra la Figura 1]  Figura 1 E1.- Serían… 11.1 [Refiriéndose al porcentaje de alcohol que representa .3 de 2.7] E2.- No E1.- Sí, ¡cómo no! E2.- Son 3 litros	• La competencia formal de estos alumnos no les alcanza para lograr interpretar correctamente la pregunta que está haciendo el maestro en este momento, dado que no logran asociar adecuadamente el término “agregar” con la operación aritmética de suma; debido posiblemente al poco desarrollo de sus competencias en el manejo de la lengua natural. El espacio textual se convierte así en un texto que ha sido mal decodificado, debido principalmente a que el “agrego” no se traduce por E1 como suma y debido a ello el porcentaje se calcula como .3/2.7= 11.1. La decodificación de E2 es igualmente incorrecta aunque en su caso el “agrego” si está asociado con sumar, pero agrega la nueva cantidad de alcohol a la mezcla previa.
[Posteriormente se obtiene la siguiente expresión]	• Los alumnos logran detectar variables en el problema, una “cierta” cantidad x se agrega de alcohol y la mezcla entre

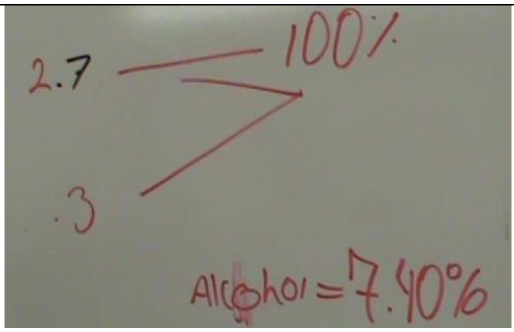


Figura 2

M.- Y, ¿qué cantidad de alcohol tendrá que mezclarse con el agua, para que la mezcla contenga el 10% de alcohol?

E2.- Yo digo que son 3 litros en total aquí profe. [Refiriéndose al volumen total de la mezcla]

M.- Mm…

E1.- yo digo que no… Sácalo, no vamos a perder nada si lo calculas.

M.- ¡Sí! Comprobemos [mientras E2 borra el pizarrón]

E1.- Yo digo que 3 se va a ir demasiado grande.

Han obteniendo la siguiente expresión

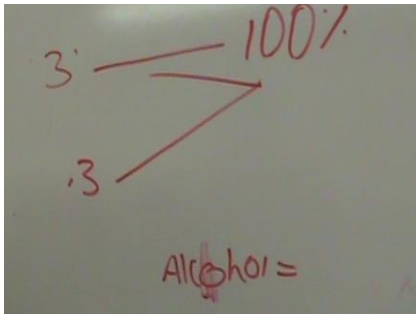


Figura 3

En la cual se representan dos cantidades, la cantidad fija de agua 2.5 con el alcohol agregado para obtener una mezcla total $(2.5 + x)$, sin embargo no logran establecer una relación entre ambas variables,[$\frac{x}{2.5+x}$*100], muestra de ello es cuando E2 propone $\frac{.3}{3} * 100$ que efectivamente si es el 10 porciento, confundiendo la variable $2.5 + x$ con la variable 2.7 + x, como si la cantidad x de alcohol se estuviera vertiendo sobre los 2.7 litros de mezcla, pero encontrando dos cantidades que están en la razón de 1 a 10, lo cual supuestamente resuelve el problema.

Mostrando que el sistema de prácticas del alumno E2 le es suficiente para realizar cálculos de porcentaje elementales (el 10% de 3 litros es .3), resultado que se ve reforzado por el hecho de que efectivamente .3 + 2.7 =3.

- El modelo de cognición (actuación) de ambos alumnos es insuficiente para enfrentar las dificultades que experimentan al establecer las relaciones y las variables presentes en el problema. En particular la relación entre la cantidad de alcohol y la mezcla se ha distorsionado, haciendo variar la cantidad de agua que está fija en el

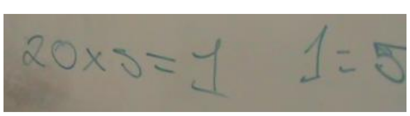
una de las cuales es el 10% de la otra	problema, en aras de forzar el porcentaje solicitado.

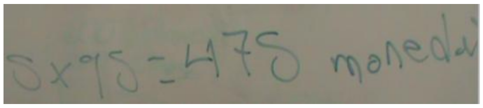
Caso 2.
La siguiente es parte de la transcripción de una escena en la que un estudiante se involucra en la resolución del siguiente problema

Cambio de monedas.
Un niño que había estado ahorrando dinero en monedas de 20 centavos decide cambiarlas por monedas de mayor valor. Al cambiarlas recibe solamente monedas de un peso, pero ahora tiene 96 monedas menos de las que tenía. ¿Cuántas monedas de 20 centavos tenía ahorradas?

El alumno tiene un comportamiento escolar ligeramente por debajo del promedio y cuenta con antecedentes de mala conducta, conjuntamente muestra notable desinterés por permanecer en clases sin importar cuál sea la materia incluyendo matemáticas, actualmente cursa el cuarto semestre de bachillerato.

En este momento al alumno se le presentó el problema en forma escrita y se le dio un tiempo de dos minutos para que iniciara el proceso de resolución. En la siguiente tabla se transcriben los primeros intentos por resolver el problema y el análisis sobre las dificultades enfrentadas por el estudiante.

 Figura 1	• Muestra "cierta" competencia en el dominio de la lengua natural en la decodificación correcta de la relación 5 a 1 entre las monedas de centavos y las de peso, como lo evidencia la Figura 1.

 Figura 2	• La decodificación errónea del párrafo “pero ahora tiene 96 monedas menos de las que tenía” desencadena una serie de argumentos, procesos y conclusiones erróneas, la que se muestra en Figura 2 en la que supone tener 95 pesos, etc. Todas ellas derivadas de la decodificación errónea (no compresión del problema)
E.- 1 igual a 5, ¡ahí está! 475 es el número de monedas… ahí está. [Mira al maestro esperando la confirmación del resultado] M.- 5 por 95 [sic]… ¿tú dices que tiene 475 monedas [interrumpe E] de 20 centavos? E.- A no, no, no espéreme… a ver… cinco… ¡Sí! De hecho sí. Creí que me había confundido pero ¿no sé si esté bien? ¿Está mal? [Mirando a M esperando alguna confirmación]	• No exhibe competencia en modelación, lo cual se muestra al no detectar “ciertas” palabras que describen relaciones claves en el problema; “pero ahora tiene 96 monedas menos de las que tenía” la cual representa la otra relación entre las variables del problema $x - y = 96$, producto de la decodificación errónea de que el número 96 es la diferencia entre dos cantidades variables.
M.- No sé… ¿475 monedas de 20 centavos dices? E.- Aja. M.- ¿Cuántos pesos son ésos?... los cambió	• Al no tener experiencia en la resolución de problemas ocasiona que los sistemas de prácticas y su modelo de cognición resultan

a pesos ¿No? E.- Bueno es que ¡mire! La explicación seria que… M.- A ver E.- Por cada… de cinco monedas de 20 centavos obtienes un peso, entonces como tienes cinco monedas por cada peso, multiplicarías las cinco monedas por las 95 que ya tienes, entonces te daría un resultado de 475 monedas.	inaplicables. Tanto unos como otros han sido forjados por la escuela y provienen sin duda de los modelos de enseñanza por los que el estudiante ha pasado.

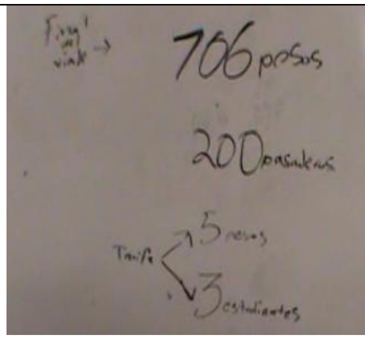
Caso 3.

La siguiente es parte de la transcripción de una escena en la que dos estudiantes se involucran en la resolución del siguiente problema de texto:

Microbús.
Al finalizar su ruta, un chofer de microbús recaudó 706 pesos y el contador electrónico del microbús indica que trasladó 200 pasajeros. Si se sabe que la tarifa general es de 5 pesos, pero los estudiantes pagan una tarifa especial de 3 pesos, ¿cuántos pasajeros eran estudiantes y cuántos no?

Al momento de la experimentación ambos alumnos cursaban el cuarto semestre y contaban con un buen historial académico, lo cual se refleja en el hecho de que hasta el momento de la experimentación habían aprobado todos sus cursos y en los cursos de ciencias sus calificaciones eran particularmente buenas.

Se les proporciona el problema de forma escrita en una hoja de papel y se les da un tiempo adecuado para que inicien con el proceso de resolución del problema escribiendo lo que a continuación mostramos:

 Figura 1 M.- ¿Está claro el problema? E1.- Mmm si [y afirmando con la cabeza] E2.- Sí E1.- Juntaron 706 pesos, eran 200 pasajeros y la tarifa es de 3 y 5 pesos… E2.- [Toca con los dedos el pizarrón con ritmo] ¿706? [mira a E1]	• La decodificación del espacio textual se restringe al SMS de la aritmética, según lo muestra la Figura 1, pero no hay evidencias de que esta decodificación incluya las relaciones entre las variables presentes en el problema. Hasta este momento no hay intentos por decodificar las incógnitas ni las relaciones que guardan entre ellas en el problema, tampoco se observa la intención de relacionar el número 706 con las cantidades de dinero aportadas por estudiantes y por los no estudiantes.
M.- ¿No hay ideas? [Refiriéndose a cómo abordar el problema] E2.- Tengo la mente en aaa… E1.- Si tuviéramos la fórmula… E2.- ¿No trae fórmula? M.- Mmmhm. Para este caso no hemos dado ninguna fórmula, ¡les cambio el problema! a ver qué les parece E2.- A ver	• Cuando E1 menciona “si tuviéramos la fórmula” o E2 dice “¿No trae fórmula?” pudiera estar reflejando las experiencias escolares previas al resolver problemas. Estas experiencias provienen de una característica de los modelos de enseñanza por los que han pasado, en los que resolver un problema se asocia con aplicar una fórmula proporcionada por el profesor o bien seleccionada entre un conjunto de fórmulas explicadas como parte del tema que se está enseñando. En el problema que los estudiantes intentan resolver ni tienen una fórmula a la mano ni saben en qué

	tema se ubica; es natural por lo tanto que no sepan qué hacer.
M.- Si les digo que van 50 estudiantes y 50 que no son estudiantes ¿Esa es la solución del problema? E2.- ¿50 estudiantes y 50 que no son? M.- Sí E2.- ¿Y los otros 100? ¿Entonces serían 100 en total? M.- ¿No podría ser así entonces? E1 y E2 [mueven la cabeza en señal de negación] M.- ¿Por qué no? E1.- Porque serian 250 la cantidad ésta [señalando en la Fig. 1, la tarifa de 5 pesos] y… no da 706 M.- ¿No completamos los 706? E1 y E2.- No	• La propuesta por parte del maestro de 50 alumnos y 50 que no son alumnos, nos permite tener evidencia de la detección de una de las relaciones involucradas en el problema, muestra de ello es que pregunta “¿Y los otros 100?” sin embargo un efecto colateral se muestra con el titubeo sobre los datos del problema por parte del alumno, donde podría pensar que el error esta su percepción del problema y no en la propuesta del maestro.
M.- Y si les digo que son 100 estudiantes y nada más hay estudiantes en el camión. E2.- Tampoco da. M.- ¿Por qué? ¿A qué se refieren? E2.- No da la cantidad del final del viaje [señalando en la Fig. 1, los 706 pesos] M- Y si en el camión viajan 100 personas y ninguno es estudiante. E2.- No, 100x5=500, serían como 800 pesos	• La propuesta del maestro de 100 estudiantes y ninguno de tarifa completa, el alumno E2 objeta la pareja solución propuesta por el maestro y lo hace explícito en SMS aritmético, además, el maestro propuso dos parejas de soluciones ((50,50) y (100,0)) y ellos la toman como una sola, posiblemente porque la conjunción de ambas satisface otra de las variables del problema que

M.- ¿800 pesos? ¿Cómo junta los 800 pesos? E2.- Si fueran 100 y 100 M.- ¿100 y 100? ¿Puede que hayan subido 100 y 100 en el camión? E1.- No E2.- Si M.- ¿Por qué?	ninguna de las anteriores la hacía, resaltando que los alumnos si pueden discriminar entre candidatos viables de solución. • En esta etapa los alumnos detectaron las variables involucradas en el problema y logran relacionarlas al sumar el dinero total del recorrido "100x5=500, serían como 800 pesos"
E1.- Porque son 706 pesos los que reúne y el número de alumnos tiene que terminar en 2 para que dé 6.	• La conclusión a la que llega es errónea, pero muestra que busca regularidades numéricas en el problema. • En esta etapa el modelo de actuación (cognición) comienza a mejorar, lo cual se manifiesta cuando el sistema de prácticas de E1 le alcanza para conjeturar que "el número de alumnos tiene que terminar en 2 para que dé 6" refiriéndose a que el monto final es 706 pesos es un número que termina en 6
M.- Y, ¿cuántos pasajeros subieron al camión? E2.- 200, pero 100 y 100 no nos da el monto final. M.- ¿Y cuántos pasajeros subieron que eran estudiantes y cuántos no? E2.- Mmmhm sabe, cambia mucho el dinero total, depende de cuantos eran de 3 y	Sin embargo su SMS, ni su modelo de cognición ni el sistema de prácticas les alcanza en este momento para responder la pregunta original "¿Y cuántos pasajeros subieron que eran estudiantes y cuántos no?" posiblemente porque la detección y codificación de las variables es insuficiente mientras no se cuente con una estrategia de

5… E1.- yo creo que menos estudiantes que personas [que no son estudiantes]	búsqueda y no se tengan ni siquiera intentos por codificar en SMS del álgebra, mucho menos la posibilidad de contar con un modelo algebraico.

4.2 Experimentación de la segunda fase de la metodología

En el momento en que los alumnos estén en posibilidad de comprobar adecuadamente si un número (o un conjunto de números) es solución o no del problema, entonces entrarían a otra fase de la resolución del problema en la que estarían verificando si un número dado es una solución para el problema y estarían tratando de sistematizar estos cálculos hasta construir una tabla con ellos. En esta fase se espera que los alumnos:

- Discriminen entre las constantes y las variables involucradas.
- Identifiquen en los hechos las relaciones presentes en el problema.
- Detecten los patrones que siguen las relaciones entre columnas.
- Reconozcan en el proceso de construcción de la tabla, las operaciones entre columnas que están realizando.

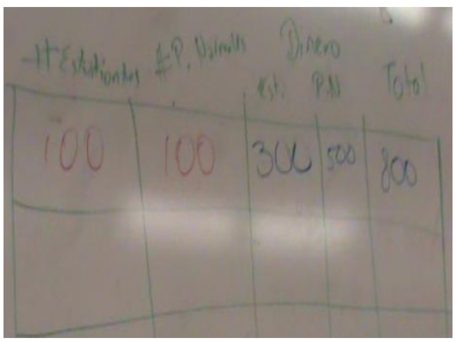
A continuación mostraremos algunos fragmentos de episodios donde se intenta construir la tabla como resultado del proceso de registro y sistematización de posibles soluciones del problema.

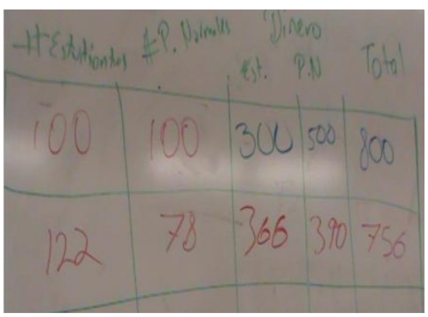
Caso 1.

La siguiente es parte de la transcripción de una escena en la que dos estudiantes se involucran en la resolución del problema del Microbús ya citado en 4.1.

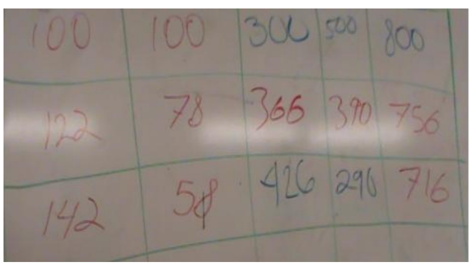
Al momento de la experimentación ambos alumnos cursaban el cuarto semestre y contaban con un buen historial académico, al no tener materias reprobadas como física, química o matemáticas, tienen tendencia a perder la concentración si el tema a tratar no es atractivo o interesante para ellos, lo cual se refleja en la reprobación de materias que tienen que ver con actividades para escolares debido principalmente a su asistencia irregular a esas clases.

En el episodio que se mostrará, los estudiantes ya habían intentado infructuosamente resolver el problema, y el profesor está intentando que verifiquen si un número es solución o no del problema. En esta etapa los estudiantes eran capaces de discriminar entre candidatos viables como solución o no, sin embargo no podían detectar patrones en sus cálculos, que les permitieran proponer candidatos para que los acerque sistemáticamente a la solución.

 Figura 1 M.- Entonces 100 y 100 no viajaron en el camión, ¿verdad? E2.- No	• Los alumnos logran detectar las variables involucradas en el problema y relacionarlas adecuadamente (pero no de manera articulada), muestra de ello es cuando E2 calcula, si subieron 150 alumnos y 50 no alumnos "serian 150x3 y 50x5 y da 450 y 250 son 700" el 700 denota que logra relacionar las variables con el dinero total. Por lo que podemos decir que el modelo de competencia de ambos alumnos les es suficiente en este momento para decodificar aceptablemente el espacio textual del problema. Sin embargo el modelo de cognición (actuación) les resulta insuficiente para acercarse sistemáticamente a la solución del problema, lo cual evidencian al no proponer algún candidato en la pregunta del maestro "¿Y cuántos pasajeros subieron que eran estudiantes y cuántos

	no?”
M.- ¿Y cuántos creen que viajaron en el camión? [Silencio de aproximadamente 5 segundos] M.- ¿Cuántos proponen? ¿No serán 150 alumnos y 50 no alumnos? E2.- Serían 150×3 y 50×5 y da 450 y 250 son 700 [ríe] ¡no da! E1.- No serán 122 y 78 [refiriéndose a la cantidad de pasajeros alumnos y no alumnos respectivamente] M.- A ver probemos, para eso estamos, pero apúntenlos en la tabla M.- ¿Y cuánto dinero reúnen por los 122 alumnos y los 78 no alumnos? [mientras E1 modificaba la Figura 1]  Figura 2 M.- ¿Y en total? E2.- 756, pero ahí va. M.- ¿Por qué crees que por ahí va? ¿Porque nos estamos acercando a 706?	• El silencio y la ausencia de iniciativa en ambos alumnos podría seguir reflejando inconsistencias en su modelo de cognición. • Con la utilización de la Tabla, se espera que los alumnos organicen sus exploraciones y a la vez promover la detección de relaciones entre variables, por ejemplo el aumento en la cantidad de alumnos en el camión y la disminución del monto final detectado por E1 y que fue propuesto por el maestro, muestra evidencia de la utilidad de este recurso.
E2.- ¡Sí! Pero lo estamos haciendo al	• El reclamo de E2 cuando menciona

tanteo… Debe de haber una fórmula. M.- ¿Forma? E1.- No, fórmula	"Debe de haber una fórmula" pudiera estar reflejando que en la manera en que fueron forjados sus modelos de enseñanza siempre se inicia con una fórmula, una definición o un concepto y a partir de ésta se realiza una actividad, en su caso resolver ejercicios y no a la inversa, al no ser éste el caso, se encuentra sin la herramienta necesaria para responder la pregunta de ¿qué hacer?, o ¿cómo actuar en estos casos?
M.- ¿Y qué proponen, más estudiantes o personas que pagan tarifa completa? E1.- Más estudiantes M.- ¿Por qué más estudiantes? E2.- Porque la tarifa es más baja M.- ¿Y cuántos proponen?... [E1 le muestra resultados en la calculadora a E2] pueden decir los que estén pensando y los probamos a ver qué pasa, ¿cuántos proponen? E1.- Si aumentan [señalando en la Figura 3 la columna de alumnos] disminuye [refiriéndose ahora al monto final] (breve silencio) vamos a subirle 20 estudiantes más. M.- ¿Por qué 20? E2.- Yo era los que estaba haciendo E1.- Porque, más o menos conté, por ejemplo, por cada estudiante más serian 3 pesos y si fuera de tarifa normal son 5,	• En esta etapa del problema, el modelo de cognición de ambos alumnos ya es más robusto dado que además de detectar variables, relaciones entre ellas, saben qué efectos producirán la manipulación sobre ellas, además la comunicación y argumentación entre ellos y con el maestro, ha mejorado sustancialmente.

serian como dos pesos menos por cada estudiante más que le suba. E2.- Y tiene que terminar en 2 para que el monto total termine en 6 [Señalando la columna de “número de estudiantes”] E1.- Si el 2 se me ocurrió desde el principio por que termina en 6 [Refiriéndose a al número de alumnos y al monto total respectivamente] M.- Aah, ¡muy inteligentes! El número de alumnos termina en 2 para que el monto termine en 6 pesos [en ese momento E1 modifica la Figura 2] ¿y cuánto dinero reuniría con esas cantidades de pasajeros? [obteniendo lo siguiente]  Figura 3 M.- Y si seguimos con esa lógica de perder dos pesos por cada alumno más que subimos ¿Cuántos alumnos subieron y cuantos que no son alumnos para obtener 706 pesos? E2.- 5, para perder los 10 aquí [señalando la columna del monto total en Figura 3] E1.- ¡No!, en total [mirando a E2] son [modifica la tabla de la Figura 3, mientras	• En esta etapa la decodificación del espacio textual muestra la correcta detección y manipulación de las relaciones entre las variables involucradas en el problema, el modelo de competencia formal les permite transitar entre expresiones orales y aritméticas con cierta facilidad, el modelo de cognición les permite conjeturar operaciones que al inicio del problema les resultaban complejas. Además, reconocen en el proceso de construcción de la tabla, las operaciones entre columnas que están realizando.

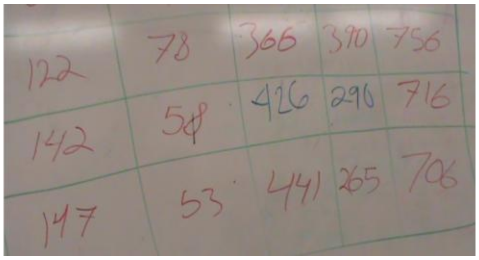
<table>
<tr>
<td>E1 escribió 147 y 53, mientras E2 calculó el dinero recaudado correspondiente a 147 alumnos y 53 no alumnos]


Figura 4</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Caso 2.

La siguiente es la transcripción de una escena en la que dos estudiantes se involucran en la resolución del Problema del Alcohol, ya referido en 4.1.

Ambas estudiantes han tenido un rendimiento escolar ligeramente por encima del promedio y cuentan con antecedentes de trabajo colaborativo en el salón de clases, en el momento de la exploración ellas cursaban el primer semestre del bachillerato.

Hasta este momento a las alumnas se les presentó el problema de forma escrita y fallaron en su resolución, sin embargo en la fase inicial de la metodología evidenciaban la detección de variables, sin poder establecer una relación entre ellas. Se propone el uso de la Tabla para reforzar la detección de variables y que detecten patrones en sus cálculos.

M.- Como gusten, pero para organizar un poquito nuestras ideas, porque a veces hablamos mucho, pero a lo mejor si la vemos escritas se nos va a ser un poco más fácil entenderlas, se propone otra herramienta para tener de manera organizada los razonamientos y cálculos que tengamos, se proporciona una tabla. [Se proporciona una hoja de papel con una la Figura 1]	• La decodificación del espacio textual del enunciado del problema les es suficiente en este momento para detectar variables presentes en el problema (mezcla total en función del volumen del alcohol y porcentaje de alcohol como $\frac{x}{2.5+x}$*100)

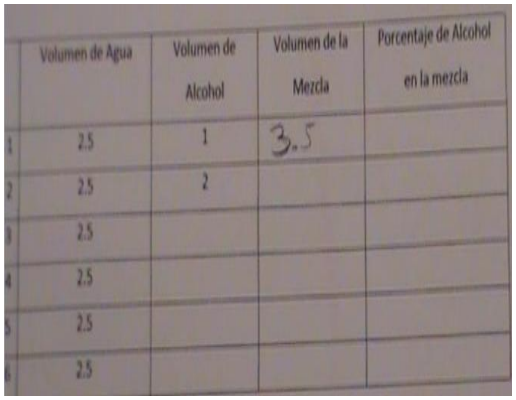
<table>
<tr>
<td>M.- Cuando le agregamos un litro de alcohol ¿Cuánto era la mezcla en total?
E1 y E2.- Responden 3.5 [al mismo tiempo]
M.- Apúntenlo en la tabla [E2 lo escribe]

<table>
<tr><th></th><th>Volumen de Agua</th><th>Volumen de Alcohol</th><th>Volumen de la Mezcla</th><th>Porcentaje de Alcohol en la mezcla</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2.5</td><td>1</td><td>3.5</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>2.5</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>2.5</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>2.5</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>2.5</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>2.5</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
Figura 1
M.- Y ¿Cuál fue el porcentaje de alcohol en esa mezcla?
E1.- Entonces aquí es 38.57 [señalando en el primer renglón de la cuarta columna de la Figura 1 y lo escribe]
M.- ¿Cómo obtuvimos eso?
E1.- Con regla de tres, así [hace referencia a Figura 1]</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>M.- Ahora volviendo al problema, yo quiero que el porcentaje de alcohol sea el 10 % [interrumpe E1]
E1.- Entonces le tenemos que poner ¡menos!
M.- ¿Menos alcohol?
E1.- Si, para que salga menos el porcentaje de alcohol [Señalando la columna del porcentaje de alcohol] hay que echarle menos para que salga más poquito.
M.- Ok, digamos en el renglón 3 [señalando la</td>
<td>• E1 comienza a realizar conjeturas, aunque incipientes aún, reflejan un intento por articular las variables y relaciones del problema, lo cual se manifiesta al conjeturar erróneamente que si cambiamos el volumen de alcohol de 1 litro a medio, la columna porcentaje de alcohol también decrecerá a la mitad.</td>
</tr>
</table>

Tabla 1] en el 2 ya no lo calculamos porque es dos litros de alcohol [Interrumpe E2]

E2.- Aquí serían 3…[señalando el renglón 3, columna del Volumen de Alcohol]

M.- ¿Tú crees que si le agregamos 3?

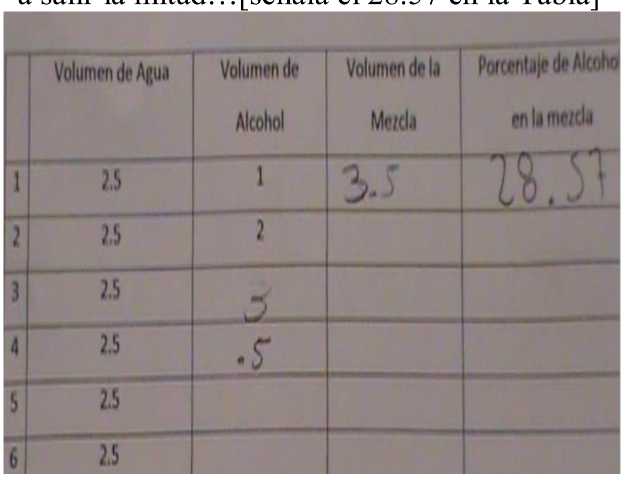
E1.- No…

E2.- Quise decir no el doble, sino la mitad .5

M.- A ver ¿Y si le agregamos .5 litros de alcohol?

E2.- Aquí [apuntando el renglón cuatro de la columna Volumen de Alcohol]

E1.- Yo creo que un poquito menos, porque va a salir la mitad…[señala el 28.57 en la Tabla]



	Volumen de Agua	Volumen de Alcohol	Volumen de la Mezcla	Porcentaje de Alcoho en la mezcla
1	2.5	1	3.5	28.57
2	2.5	2		
3	2.5	3		
4	2.5	.5		
5	2.5			
6	2.5			

Figura 2

M.- Bueno, vamos por pasos, ¿cuánto será de .5?

E1.- Van a ser 3.5 de la mezcla…en total

M.- ¿Por qué 3.5?

E2.- Ya no son 3.5, eso fue cuando le agregas uno nada más… entonces aquí le vamos a poner el 2.5 +.5 [interrumpe E1]

E1.- Tres le pongo entonces

- La tabla que se muestra en este episodio fue proporcionada a las estudiantes por el profesor. Esto ha ocasionado algunas dificultades para decodificar la información contenida en la tabla; estas dificultades se evidencian en algunas intervenciones como la de E2 cuando aclara: "Quise decir no el doble, sino la mitad .5", y que revelan sus intentos por descifrar las relaciones que están implícitas en la tabla, pero que ella no propuso. Se resalta aquí esta dificultad porque en otros casos en los que el estudiante ha propuesto su propia tabla la dificultad se hace presente en menor medida.

- Cuando el maestro pregunta "¿cuánto será de .5?", la respuesta de E1 denota que no ubica el renglón donde se está formulando la pregunta y por eso responde "Van a ser 3.5 de la mezcla…en total". Este desconcierto de E1 puede ser también consecuencia de su poca familiaridad con la tabla.

E2.- Mm sí.

E1.- En medio litro sería tres, ese es el cien por ciento [y procede a calcular el porcentaje de alcohol con la calculadora]

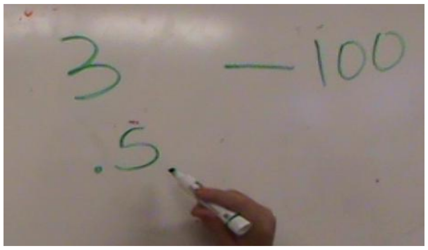
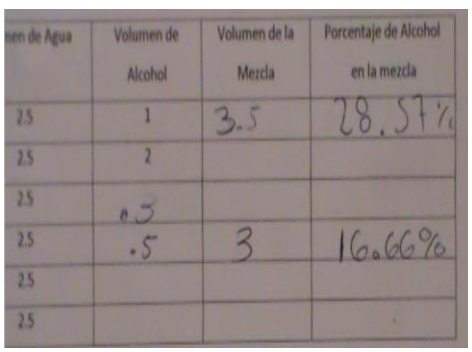


Figura 3

E1.- .5 por cien son 50 y entre 3 son [viendo a E2]

E2.- 16.66

M.- Bueno, entonces en la columna porcentaje de alcohol anoten el porcentaje correspondiente [obteniendo la siguiente tabla]



...en de Agua	Volumen de Alcohol	Volumen de la Mezcla	Porcentaje de Alcohol en la mezcla
2.5	1	3.5	28.57%
2.5	2		
2.5	.3		
2.5	.5	3	16.66%
2.5			
2.5			

Figura 4

E1.- Entonces le tenemos que agregar un tantito menos [el menos lo dicen a la par E1 y E2 y también a la par proponen un candidato cada quien]

E1.- .2

E2.- .3

M.- A ver, probemos con .3

E2.- Aquí va 2.8 [escribiendo en la tabla de la

- En este momento de la resolución del problema se observa una mayor sistematización para seleccionar los candidatos a solución, lo cual puede deberse a que el uso de la tabla para registrar sus exploraciones los abstrae un poco del algoritmo de cálculo y puedan enfocarse en la detección de los patrones que están presentes en las relaciones entre las columnas.

- Cuando las alumnas proponen sus respectivos candidatos a solución (E1propone .2 y E2 propone .3), y la naturalidad con que realizan los

Figura 4, al mismo tiempo que E1 escribe de nueva cuenta la regla de tres para calcular el porcentaje de alcohol] E1.- .3 por 100 entre 2.8 [observa a E2 que tiene la calculadora] E2.- 10.71 M.- Ya nos vamos acercando, escríbelo en la tabla. ¿Entonces cuánto le agregamos? E1.-…. 25 [mirando a E2] M.- Bueno escríbelo abajo, en el renglón 5. ¿Entonces si le agregamos .25 de alcohol? [Mientras el maestro hace la pregunta E2 completa las columnas Volumen de Alcohol y total de la mezcla, y E1 escribe en el pizarrón la regla de tres para calcular el porcentaje] E1.- .25 por cien entre 2.75 [mirando a E2] E2.- .25 por cien entre, ¿2.75? E1.- Si [viendo al pizarrón] E2.- 9.09 [y ríe] E2.- Entonces ¿es? E1.- ¡.27! E2.- [Entre risas] Bueno aquí ¿cuánto es? [Señalando la columna de porcentaje de alcohol en la mezcla] E1.- 9.09 [E2 lo anota en la tabla, hasta obtener lo que aparece en la Figura 5]	cálculos pertinentes, se evidencia que han quedado atrás las dificultades propias de trabajar con algoritmos aritméticos, y clarificando cada vez más las operaciones entre columnas, con base en eso, las alumnas han dado un especie de “salto cognitivo” entre los algoritmos aritméticos y las operaciones entre columnas.

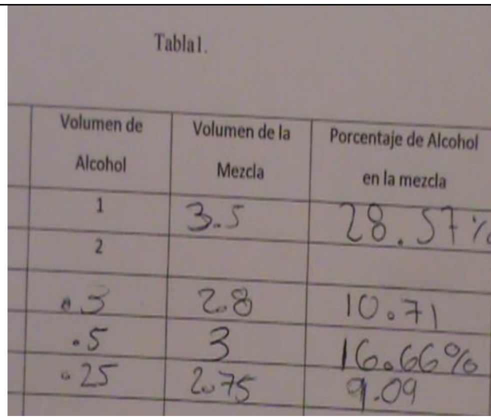


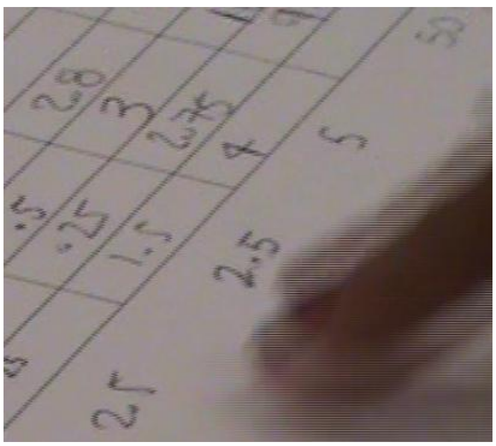
Tabla1.

Volumen de Alcohol	Volumen de la Mezcla	Porcentaje de Alcohol en la mezcla
1	3.5	28.57%
2		
.3	2.8	10.71
.5	3	16.66%
.25	2.75	9.09

Figura 5

M.- Bueno hagamos una pausa, siéntense en los pupitres [están una al lado de la otra] y E2, tú continua escribiendo [M le proporciona la tabla con la que estaban trabajando] pueden comunicarse o preguntar entre sí, sin ninguna restricción.
Si hubiera un renglón seis donde el volumen de la mezcla fuese de 4, ¿cuánto alcohol le agregué?
E2.- Este [señalando en el renglón 6 la columna volumen de la mezcla]
E1.- 1.5 [bajando el volumen de la voz]
E2.- Si
M.- ¿Si?
E2.- [Completa los espacios del renglón 6 y señala la casilla del volumen del agua (2.5), luego la del volumen de alcohol (1.5) y por último la del volumen de la mezcla (4)]
M.- Si tuviéramos un renglón 7, donde el porcentaje de alcohol en la mezcla fue el 50%...fue el 50%...
E2.- [Lo escribe en la tabla]

- Es de resaltar la naturaleza del tipo de preguntas que el maestro realizara, dado que se tratan del tipo "pensamiento reversible", ya que hasta ahora los cuestionamientos habían sido en una sola dirección, como por ejemplo "¿Entonces si le agregamos .25 de alcohol, cuánto es la mezcla total?". Y ahora son preguntas como: "Si hubiera un renglón seis donde el volumen de la mezcla fuese de 4, ¿Cuánto alcohol le agregué?", que implica otro tipo de razonamiento y a la par otro tipo de dificultades.
- Las preguntas que el profesor está haciendo en este episodio tenían el propósito de confirmar si las estudiantes mantenían los significados de las operaciones

E1.- ¡5! E2.- Ah sí. [Afirmando con la cabeza] M.- ¿Cuál será el volumen total de la mezcla? E2.- Será como 5 M.- Apúntalo en la tabla M.- Y ¿Cuánto alcohol le eché para tener esa mezcla? E1.- 2.5… , ¿qué no?… si [mientras E2 lo escribe en la tabla, tal como se ve en la Figura 6]  Figura 6	aritméticas asociados al fenómeno que se pretendía modelar. • En particular, la intervención del maestro al comentar y cuestionar “Si hubiera un renglón seis donde el volumen de la mezcla fuese de 4, ¿Cuánto alcohol le agregué?”, tiene la intención de confirmar si se han detectado las relaciones entre las columnas Volumen de la Mezcla y Volumen de Alcohol. La respuesta de la alumna de 1.5, es correcta aunque con cierto titubeo, el cual, pudiera deberse al cambio en el tipo de preguntas, lo cual se disipa en el resto de las preguntas, y entrever que las estudiantes si mantienen los significados de las operaciones aritméticas asociados al problema. • El resto de las intervenciones, son en torno a hacer patente las detecciones de relaciones presentes en la construcción de la tabla. Y la verificación de la detección del patrón.

Caso 3.

La siguiente es una escena en la que un estudiante se involucra en la resolución del Problema del Alcohol mencionado en 4.1.

El alumno tiene un nivel superior al promedio sin llegar a ser sobresaliente en todas las materias, sin embargo lo es en física, matemáticas y computación, sobre todo en computación, característica que aprovecharemos en la puesta en práctica de la metodología, otra característica del alumno muy particular es la de siempre buscar “otra forma resolver los problemas” que se le presenten. En el momento de la exploración cursaba el cuarto semestre de bachillerato.

Al alumno se le presenta el problema de forma escrita y se le proporciona un tiempo razonable para que intente resolverlo hasta que el alumno pregunta:

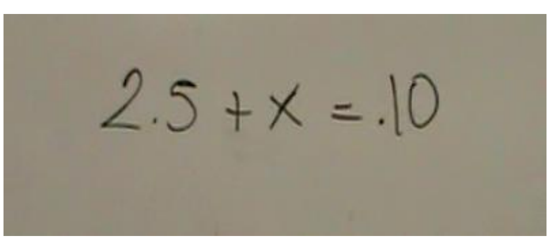
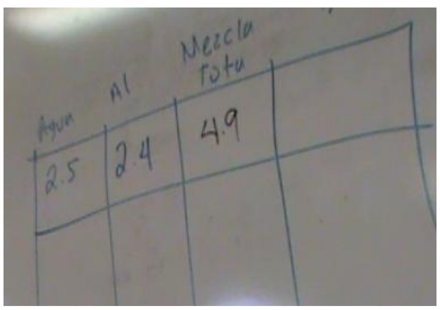
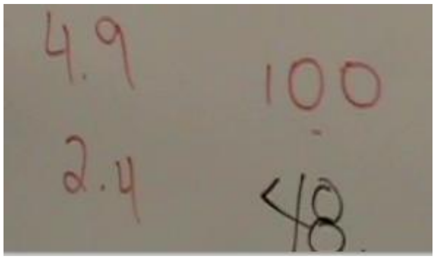
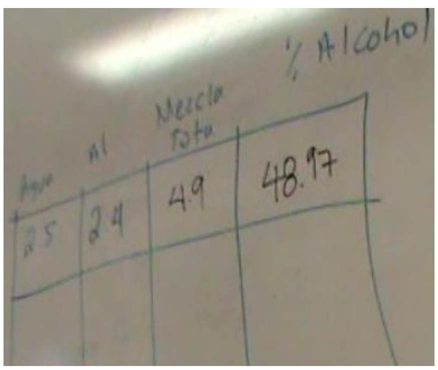
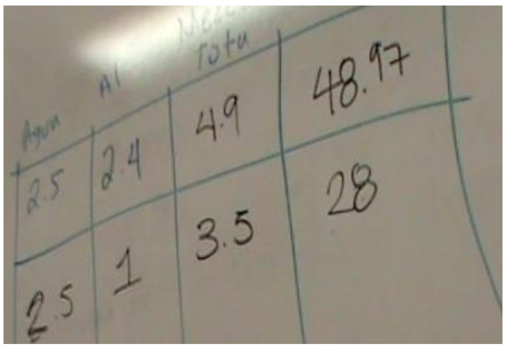
E.- Mezclar, …sería como… M.- Mezclar… E.- Echo tanto por ciento de alcohol para que se mezclen M.- Si [gesto de aprobación]… te propongo que si yo tengo estos recipientes [en una hoja de papel dibujados] y si en este recipiente yo tengo 2.5 lts. de agua y en este otro alcohol, ¡bastante cantidad! La pregunta es: ¿Qué cantidad de alcohol le tendré que agregar a esto [señalando en el dibujo el recipiente que contiene el agua], para que sea el 10% de alcohol? E.- Sería [intenta representar mediante una ecuación el modelo del problema, obteniendo la ecuación de la Figura 1]  	• La intervención del maestro al proponer una simulación basada en dibujos, disipó la confusión del alumno sobre el término “mezclar”, sin embargo no le es suficiente para decodificar el espacio textual y lograr una correcta codificación en un SMS del álgebra, lo cual se pone en evidencia al escribir la expresión mostrada en la Figura 1. • Es de resaltar que al alumno le resulta muy claro que “una cierta cantidad” o una expresión propia del SMS del álgebra debe de ser igualada con el 10%, el cual iguala con una cantidad (litros de mezcla) y no con una fracción, como la siguiente [$\frac{x}{2.5+x}$*100], que podría representar el porcentaje de alcohol en la mezcla

Figura 1. E.- Serían 2.4 M.- ¿Cómo? E.- Serían 2.4 de agua… ¿No es así?	• Aunque menciona el 2.4 como cantidad de agua, el desarrollo posterior del episodio muestra que sí está pensando en alcohol.
M.- Mm ¡probemos!... Entonces tú dices que es 2.4 ¿no? Te propongo esto [incorpora el uso de una tabla con el fin de organizar las ideas y los cálculos] ¿Cuánto es la mezcla total?  Figura 2. E.- 4.9 [incorporándolo a la Figura 2] M.- 4.9 y de esto [señalando la columna de la mezcla total en Figura 2] ¿Qué porcentaje es de alcohol? Pasan algunos segundos (entre 3 y 6) M.- ¿Cómo saco el porcentaje de alcohol? E.- Es el .10	• La intervención del maestro es en torno al modelo de cognición del alumno, dado que el maestro ignora si el alumno detectó o no las variables y la forma como están relacionadas en el problema, propone un método de resolución de problemas similar al MAES, con objetivos distintos; el primero de ellos es verificar si la solución encontrada por el alumno es correcta o no y el segundo y más importante, es que por medio de la exploración con un dato particular se desencadene la identificación de las relaciones inmersas en el problema. • Se propone el uso de la tabla para facilitar que el alumno discrimine entre las constantes y las variables involucradas y además, detecte los patrones que siguen las relaciones entre columnas.
M.- Vamos a ver si es cierto, ¿cómo calculo el porcentaje de alcohol? E.- 4.9 por 100 y… M.- Pero es el de la mezcla total ésta, ¿no?	• En esta etapa de la resolución del problema se hizo un paréntesis para plantearle al alumno una actividad que le aclarara el concepto de porcentaje, en

y yo quiero saber de esta mezcla total ¿qué porcentaje es alcohol? [E realiza la operación que se muestra en la Figura 3, posiblemente pensando en una regla de tres]  Figura 3. M.- Entonces es el 48%, apúntalo en la tabla [E modifica la Figura 2, obteniendo la Figura 4]  Figura 4 E.- ¿Y no debe de ser? M.- ¿No? ¿Pues cuánto esperamos? E.- El 10 M.- ¿Qué opinas, le agregamos más alcohol o menos? E.- Menos	virtud de las confusiones que ha mostrado cuando intenta aplicarlo. Se ha decidido hacer esto, dado el papel relevante de este concepto en la resolución del problema. • La respuesta del estudiante de .10, tiene que ver con la decodificación de ET en el cual el único porcentaje que aparece es el 10%.
M.- ¿Cuánto?... ¿Cuánto se te ocurre? E.- Pues… [Un periodo corto de silencio.] M.- ¿Cuánto se te ocurre? [E realiza	• En esta etapa de la resolución del problema los silencios del estudiante podrían interpretarse como falta de

operaciones con su calculadora] ¿Piensas un litro? [Ya que lo dedujo a partir de los cálculos que el alumno hacía en su calculadora] E.- Si. M.- Ponlo en la tabla para ir aclarando las ideas [refiriéndose a Figura 4 y obteniendo]  Figura 5	seguridad acerca de las relaciones entre variables o entre columnas. • La sugerencia de M es en torno a la observación de los cálculos observados en la pantalla de la calculadora de E.
M.- Ya bajó el porcentaje [refiriéndose a la cuarta columna en la Figura 5] pero, todavía no. ¿Qué opinas? E.- Lo que yo quiero es poner 10 aquí y el 2.5 aquí [señalando columnas en la Figura 4] M.- ¿Y cómo le hago para encontrar lo del medio? [Haciendo referencia a las columnas de alcohol y mezcla total] E.- ¡Sí!… ¿Cómo sería? M.- Podríamos hacer eso si tuviéramos [interrumpe E] E.- Esto por esto, entre 100, no esto por esto entre esto [señalando en la Figura 5, la columna correspondiente en cada ocasión]	• Cuando el alumno menciona “Lo que yo quiero es poner 10 aquí y el 2.5 aquí [señalando columnas en la Figura 4]” muestra claridad en la detección de las relaciones entre constantes y variables y tiene claro también cuál es la incógnita involucrada en el problema, sin embargo no alcanza a decodificar el espacio textual como para codificarlo en el SMS del álgebra lo cual le impide modelar el problema.

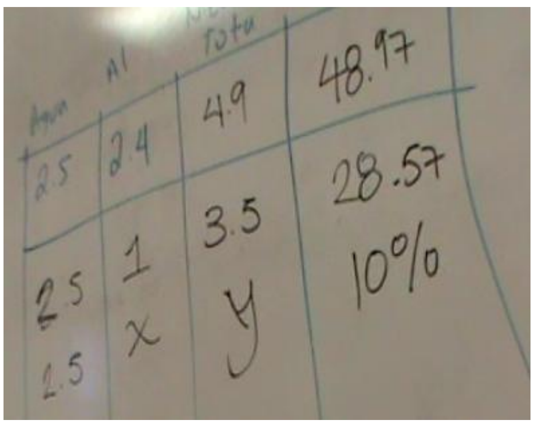
<table>
<tr>
<td>
M.- ¿Cómo dijiste eso?
E.- Esto, la columna de aluminio [sic] por cien, entre la mezcla total, pero no sé, me falta qué cantidad de aluminio tengo que agregarle
M.- ¡Muy bien! A ver repasa lo que dijiste.
E.- La cantidad de alcohol, para que me dé tanta mezcla y que ésta sea el 10 por ciento [a la par lo modifica en la Figura 5, obteniendo]


Figura 6
E.- Pero me quedan dos incógnitas
M.- Dos incógnitas, ok… Pero… la mezcla total depende de qué tanto alcohol le agregué
</td>
<td>
• La verbalización que realiza el alumno, evidencia claridad en la detección de variables, relaciones entre columnas y detección de patrones presentes en la construcción de la tabla, sin embargo su modelo de competencia, particularmente su competencia en modelación le es insuficiente para lograr concretar un modelo adecuado al problema, lo cual se evidencia al etiquetar como variables x é y, ocasionando dificultades insalvables para él en este momento, entendiendo que él expresó dos cantidades que están cambiando, pudiendo expresarlo como una cantidad que varía en función de la cantidad de alcohol. Posiblemente fueron estas dificultades las que impidieron la realización de una correcta expresión simbólica. Aunque verbalmente si logra expresarla.
</td>
</tr>
</table>

4.3 Experimentación de la tercera fase de la metodología

Una vez que los alumnos han transitado por la fase de comprensión del problema y pueden verificar si un número o conjunto de números es solución del problema y además, puedan sistematizar las operaciones necesarias para llevar a cabo dicha verificación, mediante la construcción de la tabla; reconociendo en el proceso de construcción de la tabla las operaciones entre columnas que están realizando, serán candidatos a entrar a otra fase en la resolución del problema, donde se propone la incorporación de la hoja electrónica Excel (HE), con los siguientes propósitos:

- Aprovechar la potencia de Excel, para economizar los cálculos.
- Identificar y expresar las relaciones entre columnas, como relaciones entre variables.
- Utilizar relaciones "algebraicas", para escribir instrucciones en Excel.
- Proponer y resolver el modelo algebraico del problema, con base en las relaciones alimentadas al Excel.

Sin embargo, habrá que mencionar que el uso de la HE conlleva ciertas dificultades en algunos de los alumnos, producto de la poca familiaridad con HE. Es recomendable tener una sesión exclusiva con Excel, antes de poner en práctica la metodología, usando por ejemplo las actividades propuestas por Rojano y Ursini (1997), o bien las contenidas en (SEP-ILCE, 2000).

Caso 1.

Hasta este momento el alumno, al que se refiere el presente caso, puede verificar si un número es solución del problema o no, pero no ha logrado automatizar las verificaciones o dicho en otras palabras no ha podido identificar los patrones presentes en la verificación. Tal como se ha planteado antes, se espera que el trabajo con Excel le ayude a percibir y expresar estos patrones. El problema que se está resolviendo es el de "la mezcla de alcohol", ya mencionado en otras partes de este trabajo. A continuación se analiza el fragmento de episodio

<table>
<tr>
<td>[Se inició con el programa Excel, indicándole que escribiera los encabezados obteniendo la pantalla que se muestra en la Figura 1]

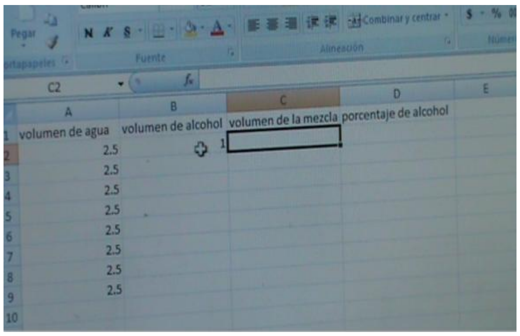
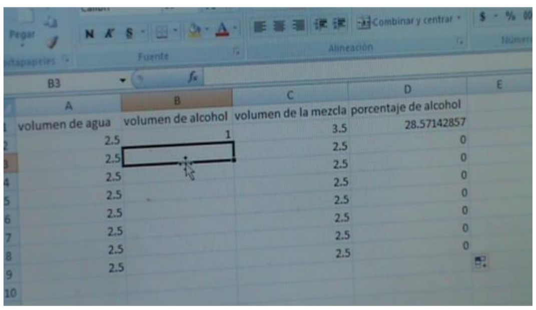
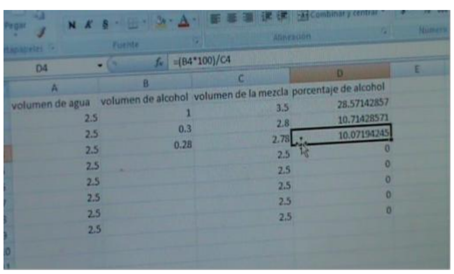
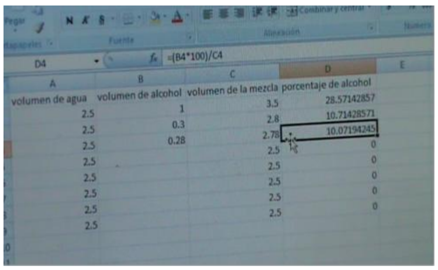


Figura 1
M.- Si quisiéramos decirle a Excel que en esta columna [refiriéndose a la columna Volumen de la Mezcla en la Figura 1] calcule automáticamente el volumen de la mezcla ¿qué le tendríamos que decir?
E.- Poniendo la fórmula aquí [refiriéndose a la celda C2 de la Figura 1] y sólo lo hace.
M.- ¿Cuál fórmula?
E.- Una que sume estas dos, A2 y B2… [En pantalla solo aparece A2+B2, pero Excel no calcula la suma] ¿Pero cómo se ponen?
M.- Se empieza con el igual [refiriéndose a la sintaxis para introducir el comando a Excel] y ¿Cómo le digo a Excel que calcule el porcentaje del alcohol?</td>
<td>• En la construcción de la Tabla utiliza relaciones “algebraicas”, para escribir instrucciones en Excel. Al pedirle a Excel que calcule la suma de las celdas A2 y B2, el alumno escribe “A2+B2”, porque el SMS utilizado por Excel difiere tanto del SMS de la aritmética como del SMS del álgebra, que son los que el estudiante conoce. Por esta razón el profesor tiene que indicarle que la escritura correcta es “=A2+B2”, en donde el signo igual tiene un significado distinto a los que tiene en aritmética y álgebra.</td>
</tr>
<tr>
<td>E.- Pero… Y si le digo que estos 3.5, ¡no!</td>
<td>• En esta etapa de la resolución del</td>
</tr>
</table>

El 1 entre los 3.5 y por cien, ¿qué no? M.- Pero para Excel le tendríamos que hablar en términos de celdas y no de números. E.- Aha, pues (B2 *100)/C2, M.- Escríbela en la celda correspondiente y ahora aprovechando que en Excel podemos posicionarnos en esta celda y en la esquina inferior izquierda [refiriéndose a C1 y D1] y la arrastramos, se ejecuta la misma orden para cada uno de los renglones [obteniendo Figura 2]  Figura 2	problema el estudiante evidencia que puede identificar y expresar las relaciones entre columnas (porcentaje de alcohol escrito como = (B2/C2)*100), sin embargo lo hace para casos particulares, posiblemente, basado en su manejo del SMS de la aritmética. Cuando el maestro le solicita expresarlo en términos de celdas, lo que el alumno hace es una codificación al SMS de Excel, que difiere del aritmético y del algebraico, estas diferencias quedan claramente ilustradas aquí con el uso del signo "igual" en Excel. En este software el signo "igual" tiene connotaciones de orden o ejecución, mientras que en un SMS algebraico su sintaxis y significado son mucho más complejos.
E.- ¿Por qué salen cero? [Refiriéndose a la columna de porcentaje de alcohol mostrada en la Figura 2] M.- ¿Por qué crees? E.- Mmhm… Sabe M.- La fórmula que pusiste en la columna Porcentaje de Alcohol, ¿qué celdas involucra? E.- ¿Involucra? M.- Relaciona o, ¿cuáles usas para calcular	• Cuando el alumno pregunta "¿Por qué salen cero?" (ver Figura 2), podría estar reflejando deficiencias en el SMS de Excel, dado que en el SMS del álgebra cuando se tiene la expresión xy, lo interpretamos como la multiplicación de dos números cualesquiera, sin que haya un signo que lo indique, además en el SMS de la aritmética cuando tenemos el

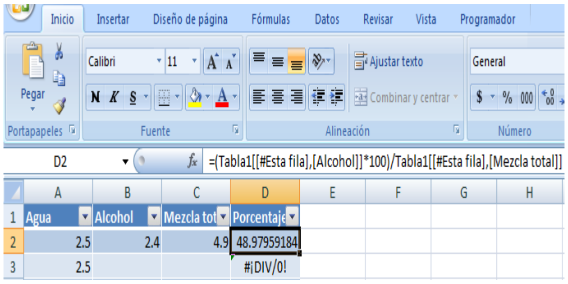
esa columna? E.- Aha, pues volumen de alcohol y de la mezcla M.- Y como no le has dado valor…	número 3^2, decimos que el exponente es 2 y cuando tenemos el número 3, decimos que el exponente es 1, sin necesidad de escribir el número 1, lo cual es institucionalmente aceptado en el SMS de la Aritmética, sin embargo en el SMS de Excel, si a un espacio o a una variable, no le asignamos un valor específico, entonces el SMS lo reconoce o lo asocia como si fuese cero.
M.- Ahora podemos probar con algún candidato, ¿cuál propusiste tú antes? El que no alcanzamos a saber si era el correcto. E.- Aha era .3 litros ¿Lo pongo ahí? [Señalando la celda B3 de la Figura 3]  Figura 3 M.- Si, y a ver, ¿qué resultado nos proporciona? E.- Nos da el 10.71 porciento de alcohol. M.- Y tú ¿qué crees? ¿Le debemos de agregar más alcohol o menos? [Interrumpe E] E.- ¡Menos! M.- ¿Por qué menos?	• En esta etapa de la resolución del problema se puede aprovechar la potencia de Excel, para economizar y sistematizar los cálculos, lo cual permite al estudiante centrar su actividad cognitiva (modelo de cognición) en otros aspectos del problema como la detección de patrones en la tabla, el control de los efectos de la variable independiente (Volumen de Alcohol). Esta actividad cognitiva queda de manifiesto cuando el estudiante propone con bastante precisión la nueva cantidad de alcohol (.28 en lugar de .3) que puede acercarlo a la solución.

E.- Por que está bajando esto, cuando le damos menos aquí [señalando la columna de Porcentaje de Alcohol y la de Volumen de Alcohol respectivamente] M.- Entonces ¿Cuánto propones? E.- Mmh .28 ¿no será? [Modificando la pantalla de la Figura anterior y obteniendo la que se muestra en la Figura 4]  Figura 4	• En este momento de la resolución del problema han quedado atrás las dificultades con Excel, lo cual se muestra en el estudiante con el control sobre la variable independiente.

Caso 2

Este es el fragmento de un episodio donde un alumno se involucró en la resolución del problema “Mezcla de Alcohol” mostrado anteriormente; inicialmente el alumno intenta plantear una ecuación que modela el problema, pero el modelo es incorrecto. Al resolver la ecuación obtiene un número que no es solución del problema, sin embargo en el proceso de verificación, descubre que la solución que ha encontrado es incorrecta y a la par descubre algunas inconsistencias en su decodificación del espacio textual del problema y que lo han llevado a percibir que el modelo es incorrecto, aunque no ha podido construir un modelo correcto. Se espera que con ayuda de Excel aclare las dudas en su decodificación del ET y logre concretar una codificación correcta en un SMS del álgebra. Lo que a la postre pudiera llevarlo a encontrar la solución del problema.

[Se inició esta parte solicitando al alumno que escribiera los encabezados de las columnas y además se le cuestionó: ¿cómo le decimos a	• En la decodificación que el alumno realiza de cómo calcular el porcentaje de alcohol, se observa que procede

Excel que calcule el porcentaje?]  Figura 1 M.- En la siguiente está indefinido porque no hemos puesto una cantidad de alcohol para el siguiente renglón [mientras que E lo realizaba] ¡listo! ¿Tendrás que repetir la fórmula para todos los de la misma columna? E.- ¿Es la misma, qué no? Entonces nada más la copio encima y ya, pero salen signitos… M.- ¿No será porque no has escrito nada aun en la columna de alcohol?	como si se tratara de un SMS aritmético, es decir decodifica en Excel solamente un caso particular. Esto lo conduce a una inconsistencia, posiblemente debida a su experiencia con los SMS aritmético y algebraico, en los cuales si un valor no está definido, no se le asocia siempre con cero, como sucede con el SMS de Excel. Lo anterior explica el titubeo del estudiante cuando observa los "signitos" mostrados por Excel. • En el proceso de construcción de la tabla el alumno utilizó relaciones propias del SMS del Excel (tratando las columnas como variables) para escribir instrucciones en Excel. El estudiante espera que al copiar la primera celda en el resto de la columna, Excel registre el cálculo que hizo en esta celda, pero que no lo ejecute, de ahí que pregunte con sorpresa "¿Es la misma, qué no? Entonces nada más la copio encima y ya, pero salen signitos…". Da la impresión de que su expectativa era que Excel dejaría la columna en blanco esperando a que él proporcionara la cantidad de alcohol, justo como si se

<table>
<tr>
<td></td>
<td>tratara de una función cuyo valor se calcula dándole un valor a la variable independiente; tal como sucede al trabajar en el SMS del álgebra.</td>
</tr>
<tr>
<td>
E.- Lógicamente [a la par E comienza a asignarle valores a la columna de alcohol]

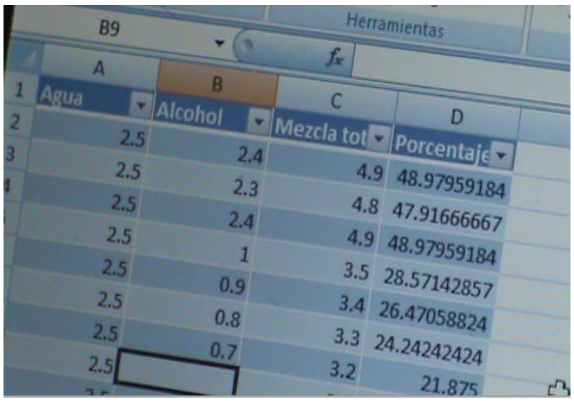


Figura 2

M.- ¿Cómo le estas asignando los valores?

E.- Que se vayan acercando al cero.

M.- Al cero ¿por qué al cero?

E.- Porque con el 2.4 se pasa, debe de ser una cantidad menor para que llegue al diez. Si pongo el 10 aquí [en la columna porcentaje] ¿no sé si? (Tal vez esperando que Excel le proporcionara la cantidad de alcohol para agregar)

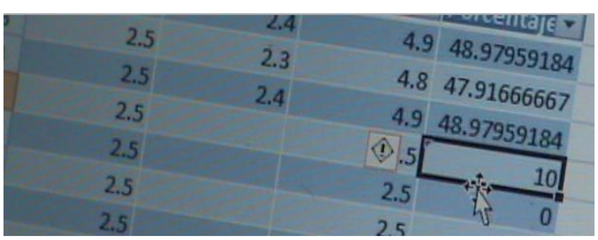
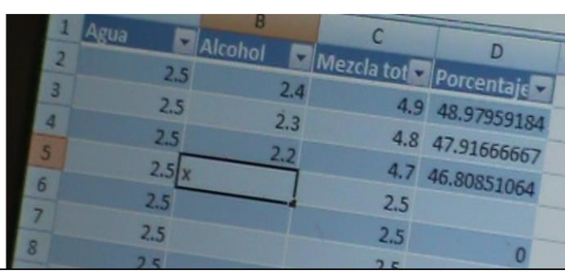


Figura 3

M.- No da, es que no tenemos valor asignado
</td>
<td>

- Cuando E comienza a asignar valores está aprovechando la potencia de Excel, para economizar los cálculos.

- El alumno al trabajar con la tabla en el SMS de Excel detecta que este sistema, al proporcionarle un valor en la celda “alcohol”, el sistema le proporciona automáticamente el porcentaje de alcohol en la mezcla total, y el alumno al estar familiarizado con otros SMS (aritmético y algebraico) donde es factible, el “regreso” intuyó que si en la celda del porcentaje escribía 10, posiblemente Excel proporcionaría el valor de la otra variable
</td>
</tr>
</table>

en la columna de alcohol	
E.- Apenas yéndome así uno por uno, pero no, se me *afigura* que no tiene caso. M.- Si, y aparte el resultado que encuentres no será muy exacto E.- ¿Sí? M.- Ahí ya va bajando [E continuó con su aproximación asignando valores a la columna de alcohol] E.- Apenas que tuviéramos una fórmula para calcular el valor exactamente. M.- Muy bien. A ver si podemos llegar a la fórmula, ¿qué hiciste para escribir la fórmula de la última columna? [Refiriéndose a la columna de porcentaje en la Figura 3] E.- Multipliqué la… cantidad de alcohol por cien [Señalando la columna correspondiente en cada ocasión] entre la mezcla total. M.- Entre la mezcla total ¡muy bien! E.- Y te da el porcentaje M.- Como no conocemos la cantidad de alcohol, le podemos llamar con una variable, llamémosle "x". [E afirma con la cabeza y modifica Figura 3] 	• El modelo de Cognición (actuación) del alumno es bueno en el sentido que muestra iniciativa al seguir haciendo iteraciones con el modelo y puede ver el problema desde una perspectiva que analiza la estrategia en función del resultado, esto se hace patente con el comentario o critica sobre el MAES (tanteo). • En esta etapa el maestro interviene al notar la necesidad en el alumno por proponer y posiblemente resolver el modelo algebraico del problema, con base en las relaciones identificadas en Excel. • Cuando el alumno le asigna el valor de "x" a la cantidad de alcohol, lo que podría esperar es que Excel escribiera una ecuación en el SMS del álgebra, lo cual en el SMS de Excel es un valor erróneo utilizado en la fórmula.

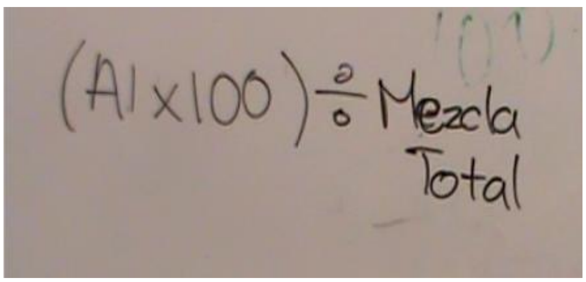
<table>
<tr><td>Figura 4</td><td></td></tr>
<tr><td>
M.- Ven para acá [lo lleva al pizarrón] no conozco la cantidad de alcohol, con esto en la mente, tampoco sabemos la mezcla total, pero llamémosle por decir así “x” a la cantidad de alcohol, ¿cómo sacaste la fórmula para calcular la porcentaje? [Refiriéndose a Figura 4]
E.- Alcohol por cien entre mezcla total [al mismo tiempo lo escribió]


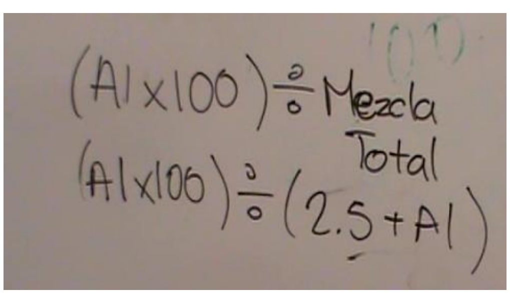
Figura 5
M.- Y la mezcla total, ¿es una mezcla de qué?
E.- De agua y alcohol
M.- De agua y alcohol, ¿y cuánto es de agua?
E.- 2.5
M.- ¿Y no podríamos llamarle así? [E comienza a reescribir lo que aparece en la Figura 5, obteniendo lo que se muestra en la Figura 6]


Figura 6
</td><td>
• En esta etapa de la resolución del problema se pretende la concreción de una ecuación algebraica, donde se pone en evidencia el modelo de competencia formal del alumno y específicamente el de competencia en modelación. Una vez que el maestro observa las dificultades enfrentadas por E para construir el modelo algebraico, intenta concientizarlo sobre ¿qué está haciendo Excel? (por ejemplo en la Figura 4). Lo que se esperaba es que el alumno respondiera:
$$\frac{Al * 100}{2.5 + Al} = 48.97$$
$$\frac{Al * 100}{2.5 + Al} = 47.91666$$
$$\frac{Al * 100}{2.5 + Al} = 48.97$$
Para cuestionarle ¿y qué porcentaje queremos?, tratando de inducirlo a que escriba:
$$\frac{Al * 100}{2.5 + Al} = 10$$
La cual es una de las posibles ecuaciones algebraicas que modela el problema. Sin embargo como el SMS de Excel funciona como un computador automatizado de celdas,
</td></tr>
</table>

M.- Muy bien, y ¿esta fórmula, esta función tiene que ser igual a cuánto?

E.- ¿Igual?

M.- Si

E.- ¿Deshaciéndola o qué?

M.- ¿A qué cantidad tiene que ser igual el porcentaje de alcohol en la mezcla?

E.- Aha sí, es cierto a 10 [a la par modifica la Figura 6]

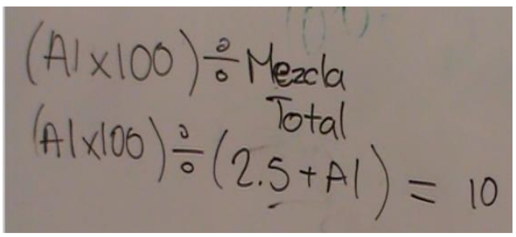


Figura 7

M.- ¿Cómo le hago para encontrar el alcohol?

E.- Despejando me imagino.

M.- ¡Muy bien! ¿Y cómo hago eso? Si quieres borra esta parte [haciendo referencia a una sección del pizarrón, luego de realizar las operaciones pertinentes, y cometiendo algunos errores en el trayecto, llega a lo que muestra la Figura 8]

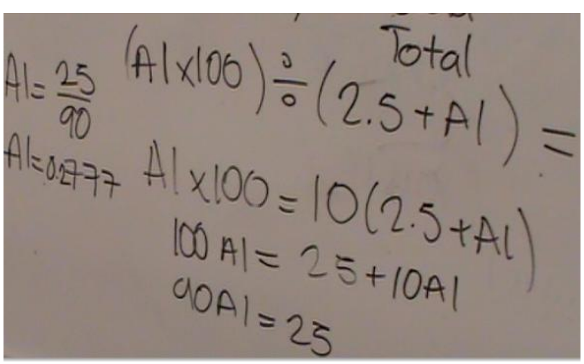


Figura 8

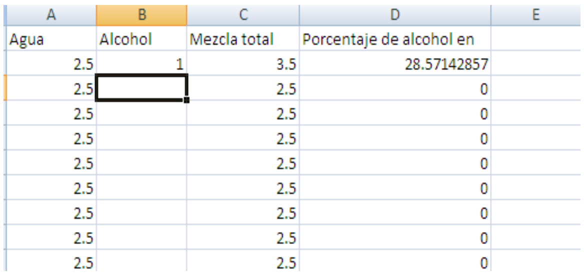
donde no se muestran expresiones simbólicas es difícil que el alumno identifique estas expresiones como la parte izquierda de las igualdades anteriores, aunque sean iguales a la que él tecleo como fórmula en la columna porcentaje de la Figura 6.

Es por esto que se vuelve trascendente la concientización del alumno sobre ¿qué está haciendo Excel? Cuando el alumno propone un valor particular.

- En este momento de la resolución del problema el modelo de competencia formal del alumno y particularmente la competencia en modelación serán cruciales en la resolución del mismo, dado que es aquí donde se requiere esencialmente la posibilidad de traducir con fluidez el sistema de signos de la lengua natural al sistema matemático de signos del álgebra. En otras palabras, se refiere a que un alumno pueda detectar y decodificar en el enunciado verbal de un problema “ciertas” palabras que describen relaciones claves en el problema; independientemente de la identificación de otras relaciones que no están explicitas en el enunciado.

M.- ¿Qué te pareció más fácil o más económico de resolver con la fórmula que hiciste o con las tablas que hicimos? E.- La tabla me ayudó, pero hacerlo así es más fácil [refiriéndose a la parte algebraica Figura 8] y que darle cada valor [Refiriéndose a Excel] M.- Y aparte así es más exacto E.- Si, en el Excel nunca le di. M.- ¿Y con el tanteo no te sentías "cómodo"? E.- ¡Adivinando! M.- Está bien como lo dijiste, porque nos sirve el tanteo para aclararnos cierto tipo de variables que tal vez no entendíamos E.- Te saca de dudas, pero es mejor hacerlo así [señalando Figura 8]. La tabla también ayuda pero de todas maneras es mejor tener la fórmula [señalando Figura 8]	• El hecho de que el alumno tenga preferencia por el uso de la fórmula por encima de la tabla o tanteo, podría estar evidenciado que reconoce en la medida de sus posibilidades el potencial que tiene el uso del SMS del álgebra, por encima de un SMS de la aritmética. El estudiante prefiere el método algebraico por que la asignación de valores le ha resultado costosa y no lo ha conducido a la solución precisa, mientras el planteamiento de la ecuación le permite llegar a la solución rápidamente. Sus intervenciones no denotan que relacione el trabajo previo con el planteamiento de la ecuación, pero la metodología no plantea la posibilidad de que el estudiante tome conciencia de esa relación.

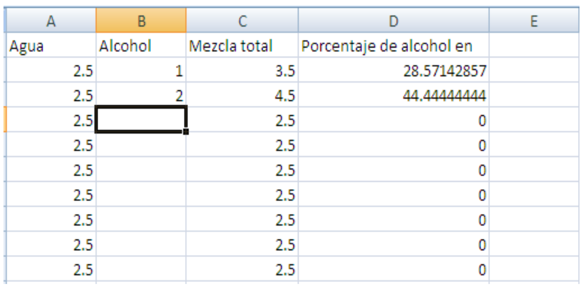
Este es un fragmento de un episodio donde un alumno se involucró en la resolución del problema "Mezcla de Alcohol" ya mostrado anteriormente; en este episodio el alumno inicia la construcción de un tabla en Excel para tratar de automatizar los cálculos necesarios para verificar si un número es o no solución del problema, hasta este momento el alumno podía constatar con lápiz y papel si un número era solución del problema o no, sin embargo no detectaba la relación entre el número propuesto como solución y el porcentaje de alcohol en la mezcla. Se esperaba que con el uso de Excel lograra detectar esta relación y pudiera concretar una codificación en un SMS del álgebra que le permitiera llegar a la solución.

<table>
<tr>
<td>[Después de unos minutos E elaboró la tabla que muestra la Figura 1]

<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th><th>E</th></tr><tr><td>Agua</td><td>Alcohol</td><td>Mezcla total</td><td>Porcentaje de alcohol en</td><td></td></tr><tr><td>2.5</td><td>1</td><td>3.5</td><td>28.57142857</td><td></td></tr><tr><td>2.5</td><td></td><td>2.5</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>2.5</td><td></td><td>2.5</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>2.5</td><td></td><td>2.5</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>2.5</td><td></td><td>2.5</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>2.5</td><td></td><td>2.5</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>2.5</td><td></td><td>2.5</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>2.5</td><td></td><td>2.5</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>2.5</td><td></td><td>2.5</td><td>0</td><td></td></tr></table>Figura 1
M.- Aquí ¿cómo construiste la mezcla total?, ¿cómo le dijiste a Excel que calculara la mezcla total?
E.- Sumé al agua que ya tenía, más el alcohol… más la cantidad de alcohol que vayamos a agregar</td>
<td>• En el proceso de construcción de la tabla el alumno evidenció la detección de variables y cómo éstas están relacionadas, además utilizó relaciones propias del SMS del Excel usando columnas como variables para dar instrucciones a Excel (ver Figura 1) de cómo hacer las operaciones entre las columnas.</td>
</tr>
<tr>
<td>M.- Ok… Y si ahora te preguntara, el porcentaje de alcohol, ¿cómo lo calculo?, ¿cómo le dijiste a Excel que lo calculara?
E.- Éste entre éste por cien...
M.- Eeh… Cuando dices éste entre éste, ¿a qué te refieres?
E.- A la cantidad de alcohol entre la mezcla y lo que me dé por cien.</td>
<td>• La respuesta del estudiante “Éste entre éste por cien” se refiere a la cantidad de alcohol dividida entre la mezcla y multiplicada por cien, utiliza el SMS de la lengua natural, pero las variables están expresadas del tal modo que tienen algunas características algebraicas, por lo menos en el sentido que adquieren términos como “cantidad de alcohol” que denotan variables, o “entre” que denotan operaciones entre esas variables aunque no estén escritas en el SMS del álgebra.</td>
</tr>
<tr>
<td>M- Ah ¡muy bien!... así la construimos,</td>
<td>• En este atapa de la resolución el</td>
</tr>
</table>

ahora con el último candidato que vimos la sesión anterior, ¿te acuerdas cuál era?

E.- ¿Cuándo estuvimos intentando con el número 2?

M- Ándale, probemos con el número 2 por ejemplo… En la columna del alcohol ahora probemos con el número 2 a ver qué nos da [mientras E modificaba la tabla de Excel hasta dejarla como se ve en la Figura 2]



A	B	C	D	E
Agua	Alcohol	Mezcla total	Porcentaje de alcohol en	
2.5	1	3.5	28.57142857	
2.5	2	4.5	44.44444444	
2.5		2.5	0	
2.5		2.5	0	
2.5		2.5	0	
2.5		2.5	0	
2.5		2.5	0	
2.5		2.5	0	
2.5		2.5	0	

Figura 2

Bueno…

E.- Nos da 44.44

M.- Ok, y ¿cuánto dice Excel que es el porcentaje de alcohol?

E.- 44.44

maestro intenta aprovechar el nuevo estatus de "variable" que la columna alcohol pareciera haber adquirido en el proceso. El estudiante no tiene dificultades para dar las instrucciones a Excel para calcular el porcentaje de alcohol correspondiente en la mezcla cuando se agregan 2 litros, pero no parece sorprenderle que el porcentaje obtenido sea de 44.44, más alejado de la solución.

M.- 44.44… y… ¿Cómo Excel calcula el 44.44?, ¿ese resultado?

E.- El alcohol de los 2 [refiriéndose a cantidad de alcohol]… sería ese alcohol entre la mezcla total por cien

M.- El alcohol, entre, la mezcla total… por cien… Muy bien…. A ver si lo hiciéramos nosotros acá en el pizarrón ¿Cómo lo escribiríamos? … Escríbeme eso que dijiste. ¿Entonces dijiste que era cómo?

- La intención del maestro en esta parte es que el estudiante encuentre una manera de expresar el algoritmo que Excel realiza para calcular el porcentaje de alcohol en la mezcla. Aunque la expresión encontrada por el estudiante no es algebraica, de nuevo puede decirse que tiene algunas características algebraicas como la suspensión de operaciones

E.- Entonces sería… El alcohol entre la mezcla ¿y cuánto tenemos de agua?

M.- 2.5… Bueno pero [interrumpe E]

E.-Sería el alcohol que sería 2 entre… [mira la pantalla de la computadora] 4.5 por cien [Obteniendo lo que muestra la Figura 3]

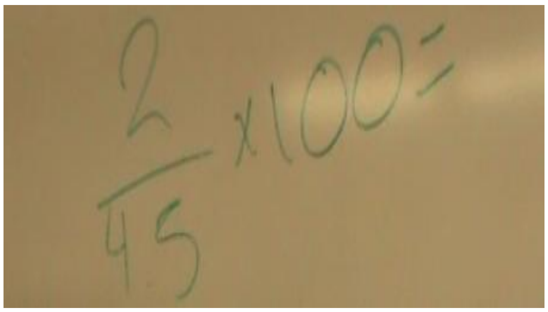


Figura 3

y el uso de números particulares como símbolos para representar cantidades que no son particulares.

M.- Una vez que probamos con la cantidad de alcohol 2, ¿qué otra cantidad se te ocurre probar?

E.- El 3 sería bueno [habla en voz baja, ha dejado el pizarrón y trabaja de nuevo en Excel]

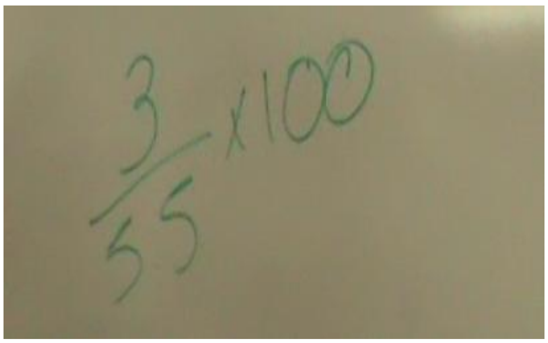
M.- ¿El 3? [Mira a E] ok, con el 3 entonces probemos. [mientras E modifica la tabla de Excel hasta obtener lo que se muestra en la siguiente Figura]

A	B	C	D	E
Agua	Alcohol	Mezcla total	Porcentaje de alcohol en	
2.5	1	3.5	28.57142857	
2.5	2	4.5	44.44444444	
2.5	3	5.5	54.54545455	
2.5		2.5	0	
2.5		2.5	0	
2.5		2.5	0	
2.5		2.5	0	
2.5		2.5	0	
2.5		2.5	0	
2.5		2.5	0	

Figura 4

Bueno con el 3, ¿cómo le hace Excel para

- Una vez que el alumno escribió la expresión en el SMS de la aritmética, el maestro le solicita otro candidato a solución, con la intención, ya mencionada antes, de que centre la atención en el algoritmo que Excel está ejecutando. Sin embargo, los candidatos a solución propuestos por el alumno están cada vez más lejos de la solución como puede verse en la Figura 4, pero E no pareciera percatarse de ello a pesar de que los números registrados en la columna del porcentaje se alejan cada vez más del número 10.

calcular el porcentaje?... ¿Cómo le hace? E.- Pues… M.- ¿Cómo lo calcula? E.- La cantidad de alcohol… Mmhm entre el total de mezcla y ¡por cien! M.- Muy bien… Ok a ver, escríbelo otra vez en el pizarrón eso que me acabas de decir  Figura 5 Y… ¿cuánto da?, ¿cuánto dice Excel que da? E.- Mmmm dice Excel que da [se retira del pizarrón y observa en la computadora] 54.54 y 54 [refiriéndose a la expansión decimal] M.- Pues si, a eso es igual [mientras E modifica la expresión en el pizarrón para obtener lo que se muestra en la siguiente Figura]	• Cuando el alumno propone el valor 3, las intervenciones de M pretenden mejorar la expresión lograda por E para el valor 2 (Figura 3). Efectivamente ahora E tiene una mejor expresión aritmética para describir el algoritmo de Excel, en la cual se precisa el porcentaje calculado por Excel; es importante enfatizar que E ha introducido a su expresión un nuevo signo del SMS de la aritmética, a saber, el signo igual que utiliza para expresar que Excel ha realizado un cálculo, esto es, lo utiliza con un significado poco usual en el SMS del álgebra cuando se resuelven ecuaciones.

<table>
<tr>
<td>

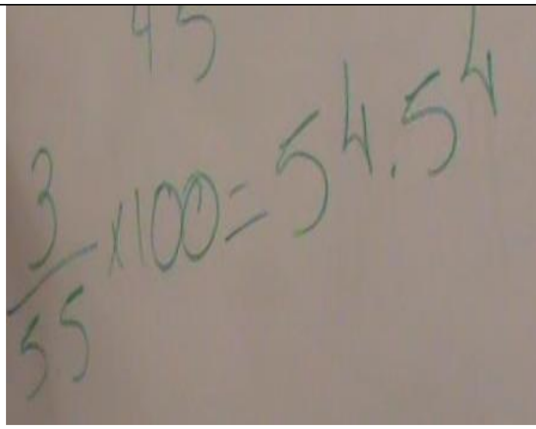


Figura 6
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>

…

M.- ¿Y cuánto quiere el problema que sea el resultado?

E.- Pueeees… diez.

M.- El diez [moviendo la cabeza en señal de aprobación] ok, y lo que estamos cambiando es el volumen de alcohol, la cantidad de alcohol que agregamos, como no sabemos cuánto, llamémosle “X” cantidad de alcohol. [mientras E escribe lo siguiente en el pizarrón obteniendo lo que muestra la Figura 8]

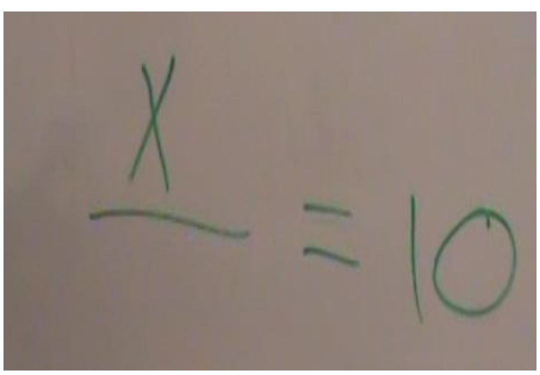


Figura 8

Ok, si lo vamos a presentar así [interrumpe E]
</td>
<td>

- Después que E escribió la expresión

$$\frac{3}{5.5} * 100 = 54.5454$$

Correspondiente al valor 3, su actividad se concentra en hacer lo mismo para los valores 4 y 5, obteniendo las expresiones correspondientes:

$$\frac{4}{6.5} * 100 = 61.53$$

$$\frac{5}{7.5} * 100 = 66.66$$

Pero el episodio donde obtiene estas expresiones no se reporta aquí porque la actividad se ha tornado repetitiva. El episodio se retoma una vez que el estudiante ha concluido la lista mencionada.

- La expresión que el alumno logra concretar es incorrecta como se muestra en la Figura 10, a pesar de que en pasadas expresiones tenia éxitos en plantear el modelo para
</td>
</tr>
</table>

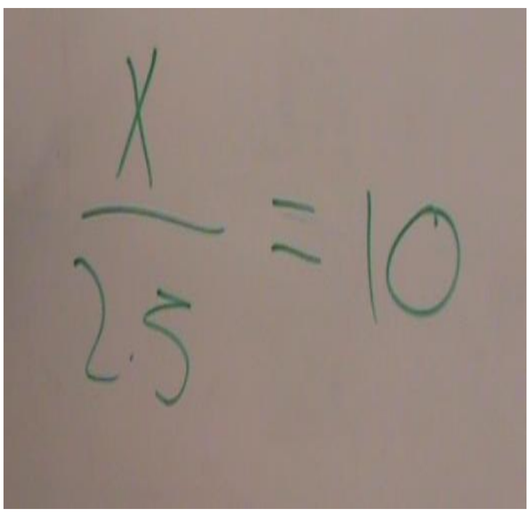
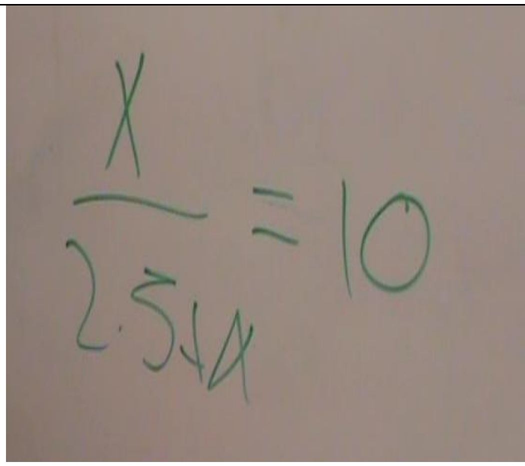
<table>
<tr>
<td>
E.- Para sacar el volumen… ¿y éste? [Señalando en la Figura 8, en el miembro izquierdo en el lugar del denominador]
M.- Ok… En las anteriores, ¿qué poníamos abajo? [Refiriéndose al denominador del miembro izquierdo]
E.- La masa total, ¡mezcla total!
M.- Mezcla total, y ¿la mezcla total de qué está compuesta?
E.- Agua y alcohol
M.- Agua y alcohol [En ese instante E modifica la Figura 8]


Figura 9
M.- Ok, el agua ya es fijo… ¿Y qué le estamos agregando al agua?
E.- El alcohol [y modifica la Figura 9 para obtener]
</td>
<td>
calcular el porcentaje de alcohol en cada caso particular, evidenciando de esta manera que logra detectar variables y además utilizar el SMS de Excel para programar cálculos, como operaciones entre columnas. Pero evidencia también que el paso a la expresión escrita en un SMS del álgebra no es inmediato.

• Cabe destacar que a pesar de que el alumno planteó una expresión incorrecta, sus intentos por resolverla fueron infructuosos, evidenciando múltiples deficiencias en los procedimientos algebraicos necesarios, lo cual contradice la idea de que una vez obtenido el modelo algebraico de un problema, las herramientas aportadas por el modelo de enseñanza le permitirán resolver el modelo sin dificultades.
</td>
</tr>
</table>

 Figura 10	

Capítulo 5

Conclusiones

En este el último capítulo se presentan las conclusiones del presente trabajo. Se han organizado partiendo desde consideraciones de carácter general, hasta aquellas que son más específicas, pero teniendo en cuenta cada una de las fases de la metodología en la resolución de problemas.

5.1 Sobre la metodología y sus aportaciones

En la actualidad la resolución de problemas en nuestros cursos de matemáticas es un asunto importante y más aún cuando hoy en día los problemas se presentan “en contexto”, lo cual no nada más exige de nuestros estudiantes habilidades para manipular con cierta destreza alguno de los métodos de solución propuesto en clase, sino además una movilización articulada de conocimientos, habilidades y destrezas enfocadas hacia la resolución de un problema, comúnmente denominadas competencias, y en nuestro trabajo en particular se traducirían en que el alumno sea capaz de resolver un problema que se le plantea en forma escrita, lo cual implica que pueda decodificar el ET, sea competente para modelarlo mediante una ecuación algebraica y además pueda resolver la o las ecuaciones que modelan el problema. Expresado en términos del MTL, diríamos que el alumno tiene que lograr una decodificación de un espacio textual y que sus SMS sean lo suficientemente amplios para lograr codificarlo en el SMS del álgebra y solucionarlo, además de comunicar la solución.

Nuestro interés son las dificultades que enfrentan los estudiantes para resolver problemas que se presenten de forma escrita y que pudieran ser resueltos mediante el uso de métodos algebraicos.

Con el uso sistemático de la metodología propuesta en este trabajo se espera que los alumnos, con base en su propia actividad, modifiquen o complementen los significados asociados a las variables, a las relaciones y a las acciones descritas en el ET. Estos significados no permanecen necesariamente fijos a lo largo del proceso de resolución del problema y la metodología le apuesta a que los cambios de significación ayuden a solventar las dificultades que impiden al estudiante resolver exitosamente un problema.

5.1.1 Dificultades y limitaciones de la metodología

Dentro de las dificultades de la metodología, aunque no son exclusivas de ésta, podemos destacar las siguientes:

Dificultades

1. La resistencia de los alumnos en cambiar su rol dentro del aula. En virtud de que la metodología propone un rol distinto para el profesor en el que ya no jugará el papel de expositor o presentador, entonces el rol del estudiante tendrá que ser otro. Hay entonces una resistencia natural del estudiante a pasar de receptor a un agente activo de aprendizaje. La metodología se basa en la actividad del propio alumno que tendrá que construir bajo la conducción del profesor, sus propios significados (conocimientos y habilidades) y socializarán. A lo largo de la experimentación estas resistencias han quedado de manifiesto en las peticiones expresas de los estudiantes de que el profesor les proporcione más ideas sobre lo que tienen que hacer, o de plano les suministre métodos o fórmulas que conduzcan a la solución del problema.

2. Otra dificultad es la referente a los procesos de decodificación, que en los MTL son vistas como los obstáculos para convertir un ET a T. Cuando a los alumnos se les presentan los problemas en forma escrita, y no hay una traducción consistente, ellos evidenciarán dificultades para comprender los enunciados de los problemas (con frecuencia relacionadas con la competencia en la lengua natural), lo cual inhibe una interpretación adecuada del ET y una correcta traducción a otro SMS, desencadenando operaciones erróneas en la resolución de problemas, la cual se ataca de manera frontal en el presente trabajo. En el capítulo anterior pueden verse algunos casos que exhiben esta dificultad, entre los que sobresalen los modelos algebraicos erróneos propuestos por algunos de los estudiantes.

3. La metodología se ha experimentado de manera individual o con parejas de estudiantes; esto ha sido así porque se requiere de poner particular atención en los procesos que cada estudiante desarrolla y en las dificultades que enfrentan. Es de suponerse entonces que la aplicación a grupos más grandes de estudiantes tendrá entonces algunas dificultades de gestión en el aula y de atención a los avances mostrados por los estudiantes.

4. Dentro de las dificultades también se incluye el uso e incorporación de la Hoja Electrónica de Excel, aunque tiene muchas ventajas como: la posibilidad de realizar cálculos de gran cantidad de valores con una sola instrucción, facilita la detección de patrones y relaciones presentes en la tabla de Excel, entre otras cosas. Sin embargo, los signos que son utilizados también pueden considerarse como un nuevo SMS, con las ventajas y desventajas que esto constituye. Dentro de las dificultades que originan la introducción del SMS de Excel, podemos mencionar la siguiente: al tratarse de un nuevo SMS la sintaxis o terminología puede resultar extraña para el estudiante y ocasionarle problemas para codificar en los SMS que más conoce o viceversa. Para ilustrar este hecho podemos mencionar el siguiente fragmento (tomado del Caso 1 de la primera fase de la metodología).

M.- Si quisiéramos decirle a Excel que en esta columna [refiriéndose a la columna Volumen de la Mezcla en la Figura 1] calcule automáticamente el volumen de la mezcla ¿qué le tendríamos que decir?
E.- Poniendo la fórmula aquí [refiriéndose a la celda C2 de la Figura 1] y sólo lo hace.
M.- ¿Cuál fórmula?
E.- Una que sume estas dos, A2 y B2… [En pantalla solo aparece A2+B2, en vez de calcular la suma] ¿Pero cómo se ponen?
M.- Se empieza con el igual [refiriéndose a la sintaxis para introducir el comando a Excel]”

5. Otra dificultad producto de este nuevo SMS de Excel es la decodificación de los resultados que arroja Excel, al ser un programa que automatiza los cálculos que realiza y sólo presenta en pantalla el “resultado”, puede perderse la idea del proceso de cómo llegar a ese valor (puede hacer ajeno al estudiante del proceso que se sigue para llegar al resultado que Excel presenta como solución, lo cual, para esta metodología es una parte importante del proceso). Tanto esta dificulta como la anterior interfieren con los SMS del alumno, por lo cual la metodología propuesta deberá poner mayor atención en la fase que utiliza este recurso tecnológico.

Limitaciones:

La detección, decodificación y posibles interpretaciones de los SMS autóctonos de los alumnos por parte del profesor, juegan un papel preponderante en la metodología durante la resolución de algún problema de texto, ya que de ello dependerán las acciones que se propondrán al alumno. Por lo que una limitante es que necesariamente se debe aplicar a grupos reducidos de alumnos, dos o tres, siendo la aplicación ideal con un solo alumno.

Se pudiera aplicar con grupos más grandes una vez que se hayan caracterizado las dificultades individuales, organizando equipos con estudiantes que compartan estas dificultades. Esta aplicación sin embargo exigirá al profesor estar al pendiente de cada una de las actividades desarrolladas en los equipos, puesto que sus intervenciones dependen en gran medida del desarrollo de las actividades que se estarán proponiendo. Con base en las observaciones de la tarea desarrollada por el estudiante, el maestro propondrá la siguiente actividad, que no necesariamente será la misma para todos los estudiantes, porque dependerá de lo que cada uno haya hecho y de las conclusiones a las que haya llegado, lo cual podría pasar desapercibido con una gran cantidad de alumnos.

En la aplicación de esta metodología podría suceder que durante alguna de las fases de la metodología el alumno logre solucionar el problema, esa no se considera por sí misma una limitación. Pero al encontrar la solución de algún problema, la metodología al quedar inconclusa podría dejar la idea en el estudiante de que alguno de los métodos considerados dentro del SMS de la aritmética como “tanteo”, MAES o Excel permiten resolver cualquier problema. Y esto si constituirá una limitante porque se estaría fomentando la resistencia a usar métodos algebraicos. Esta consecuencia estaría en contradicción con el objetivo que tiene el presente trabajo, el uso de los métodos de exploración aritmética, a saber, que por medio del uso de alguno de estos métodos el alumno logre aclarar las dificultades que no le permiten abordar el problema correctamente y eventualmente logre concretar una expresión en un SMS del álgebra.

5.2 Sobre las Fases de la Metodología

En la resolución de problemas algebraicos de enunciado verbal, la comprensión del problema es un asunto de primer nivel dado el gran número de obstáculos dentro de la resolución de problemas de texto que tienen origen en la no comprensión del problema. Durante la primera fase se detectaron y enfrentaron dificultades relacionadas con:

- Deficiencias en el dominio de la lengua natural.
- La decodificación errónea del espacio textual al texto.
- La decodificación incompleta del espacio textual al texto.

5.2.1 Primera Fase de la Experimentación

Dentro de la primera fase de la metodología, específicamente en el primer caso se abordó una deficiencia del dominio de la lengua natural, la cual, queda en evidencia, por ejemplo cuando los alumnos no logran asociar adecuadamente el término “agregar” en una de las preguntas formuladas por el maestro:

> “Si tengo 2.5 litros de agua y le agrego .3 litros de alcohol ¿cuánto voy a obtener al mezclar?”

Para los alumnos si hay un cambio en la cantidad de alcohol, pero no logran detectar que al agregar .3 litros de alcohol, el volumen de la mezcla cambia como resultado de haber agregado el alcohol. En términos del MTL, la competencia formal de estos alumnos no les alcanza para lograr interpretar correctamente la pregunta que está haciendo el maestro en este momento, dado que no logran asociar adecuadamente el término “agregar” con la operación aritmética de suma; debido posiblemente al poco desarrollo de sus competencias en el manejo de la lengua natural, donde el espacio textual se ha convertido en un texto mal decodificado, debido principalmente a que el "agrego" no se traduce por E1 como suma y en consecuencia el porcentaje se calcula como .3/2.7, en lugar de .3/2.8.

La decodificación de E2 es igualmente incorrecta aunque en su caso el "agrego" está asociado con sumar, pero añade la nueva cantidad de alcohol a la mezcla previa, producto de la confusión de la variable 2.5 + x con la variable 2.7 + x.

> E2.- Yo digo que son 3 litros en total aquí profe. [Refiriéndose al volumen total de la mezcla]

Para este caso en particular, el uso de una simulación por medio de dibujos les resultó de gran ayuda, lo cual, se ve reflejado en episodios subsecuentes donde los alumnos logran detectar variables en el problema. En el problema, una "cierta" cantidad x de alcohol se agrega a la cantidad fija de agua para obtener una mezcla total $(2.5 + x)$, sin embargo E2 no logra establece una relación entre las variables x y $2.5 + x$, por esta razón propone $\frac{.3}{3} * 100$ como el porcentaje de alcohol en la mezcla que efectivamente es el 10 porciento. Alterando la variable $2.5 + x$ con tal de encontrar dos cantidades que estén en la razón de 1 a 10, lo cual supuestamente resuelve el problema. Mostrando que el sistema de prácticas del alumno E2 le permite realizar cálculos de porcentaje elementales (El 10% de 3 litros es .3), pero no resolver el problema.

En el segundo caso reportado en esta fase de la experimentación, se exhibe una decodificación errónea del espacio textual al texto. El problema abordado en este caso es el problemas de las monedas, cuyo enunciado como se recordará, era el siguiente:

> Un niño que había estado ahorrando dinero en monedas de 20 centavos decide cambiarlas por monedas de mayor valor. Al cambiarlas recibe solamente monedas de un peso, pero ahora tiene 96 monedas menos de las que tenía. ¿Cuántas monedas de 20 centavos tenia ahorradas?

Aunque el alumno detectó una de las relaciones inmersas en el problema como lo es: la cantidad de monedas de 20 centavos en relación con las de un peso, la decodificación errónea de un fragmento del ET en el enunciado del problema desencadena una serie de argumentos, procesos y conclusiones erróneas, éste es el caso cuando el alumno realiza la operación 5×96 ó porque interpreta que el número 96 se refiere a la cantidad de pesos.

La competencia en modelación del alumno se muestra poco desarrollada, debido posiblemente a las deficiencias que manifiesta en lo que se refiere a competencia en la lengua natural, ya que el alumno puede detectar significados implícitos en el enunciado, como por ejemplo: la equivalencia entre un peso y cinco monedas de veinte centavos. el alumno logra codificar esta relación en el SMS de la aritmética tal como se muestra en la expresión “5=1”, que ha escrito en el pizarrón, sin embargo sus deficiencias en la lengua natural le impiden decodificar la otra relación clave en el problema; “pero ahora tiene 96 monedas menos de las que tenía”, la cual resulta clave para construir la expresión algebraica $x - y = 96$, misma que el estudiante no puede construir.

La escasa o nula experiencia en la resolución de problemas, ocasiona que la colección o el intercambio de textos del alumno, que provienen posiblemente de sus experiencias escolares, constituyen un obstáculo para el buen desarrollo para el modelo de enseñanza aquí experimentado. La superación de este obstáculo requiere, entre otras cosas de “experiencias” que le ayuden a conectar, lo que aborda en clases con problemas de la vida cotidiana.

Otra rasgo que distingue a sus modelos de aprendizaje y que incide en su modelo de cognición es la repetida costumbre del alumno en tratar de recibir información del maestro aun cuando éste no la brinde conscientemente, es decir, cuando el maestro formula una pregunta, el alumno la responde en forma interrogativa a e inmediatamente observa al maestro, posiblemente esperando la validación o rectificación de su respuesta, o bien que el profesor dicte la acción a realizar en este caso, lo cual se exhibe en el siguiente fragmento cuando el maestro cuestiona cuál es el resultado:

> “E.- 1 igual a 5, ¡ahí está! 475 es el número de monedas… ahí está. [Mira al maestro esperando la confirmación del resultado]
> M.- 5 por 95 [sic]… ¿tú dices que tiene 475 monedas [interrumpe E] de 20 centavos?

> E.- A no, no, no espéreme… a ver… cinco… ¡Sí! De hecho sí. Creí que me había confundido pero ¿no sé si esté bien? ¿Está mal? [Mirando a M esperando alguna confirmación]"

En el tercer caso, al inicio del episodio, no hay evidencias de que los alumnos intenten decodificar el ET del enunciado del problema (Problema del Microbús), o que intenten hacer una codificación en otro SMS como podría ser el algebraico, por medio de una expresión que relacione las tarifas del pasaje y la cantidad final recaudada. Lo que sí se pone en evidencia, son algunas características de sus formas de aprendizaje. Ambos alumno intentan resolver el problema, pero no bosquejan estrategia alguna que los conduzca a resolverlo exitosamente, el estudiante catalogado como E1 comenta: "si tuviéramos la fórmula", mientras el otro estudiante E2 cuestiona "¿No trae fórmula?".

Estos pasajes nos brinda un panorama de cómo han sido los modelo de enseñanza experimentados por los estudiantes en su escolaridad previa, sobre todo en lo que respecta a la resolución de problemas.

Durante los procesos de resolución los estudiantes han dejado en evidencia que sus modelos de actuación, sus modelos cognitivos o sus competencias formales han sido moldeadas por alguna de las siguientes acciones: emplear una fórmula proporcionada por el profesor, seleccionar una fórmula entre aquellas vistas en clase con anterioridad, y por último con la selección apropiada de los datos y las operaciones para combinarlos con el fin de llegar a la solución del problema.

En este caso al ser un problema para ellos atípico, dado que no tienen alguna fórmula proporcionada por el maestro y no se relaciona con lo visto recientemente en clase, es lógico pensar que los alumnos no sepan qué hacer al momento de plantearles el problema. Es aquí donde la metodología juega un papel trascendente, puesto que la intervención del maestro al proponer, por ejemplo:

> "Si les digo que van 50 estudiantes y 50 que no son estudiantes ¿Esa es la solución del problema?",

ha resultado un catalizador para avanzar en la resolución del problema tanto para los alumnos como para el maestro, ya que las respuestas de E1 y E2 se ponen en evidencia que han detectado las variables y relaciones inmersas en el problema.

La respuesta por ejemplo de E2:

> "¿ y los otros 100?"

revela que ha percibido que el número total de pasajeros son 200. Mientras que E1 afirma "no da" argumentando posteriormente que son 250 pesos, por los que pagan 5 pesos y sumado con el resto de dinero pagados por los pasajeros que pagaron 3 pesos, no completan la cantidad de 706 pesos, establecida como cantidad total recaudada (ver Figura 1). Este pasaje revela que E2 ha identificado la relación entre los montos cubiertos por estudiantes y no estudiantes, con el dinero total recaudado.

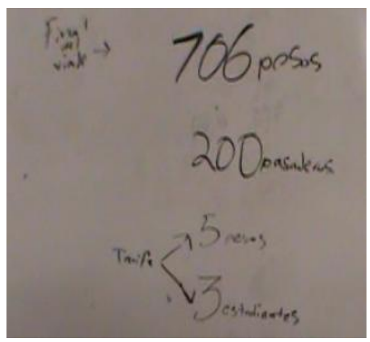


Figura 1

En esa etapa de la resolución todavía no logran aun responder la pregunta original del problema: "¿y cuántos pasajeros subieron que eran estudiantes y cuántos no?", posiblemente porque la detección y decodificación de las variables y las relaciones es insuficiente mientras no se cuente con una estrategia de búsqueda y no se tengan ni siquiera intentos por codificar en el SMS del álgebra, mucho menos la posibilidad de contar con un modelo algebraico.

Sin embargo, se exhibió que la metodología funciona en el sentido de que permite la detección de algunas relaciones entre las variables involucradas en el problema, además se hace patente el cambio gradual de significados asociados a los elementos del problema, los cuales pasaron de ser datos exclusivamente cuantitativos del problema (ver Figura 1.) a ser coeficientes que son relacionados directamente a las cantidades de pasajeros que pagaron cada uno de las tarifas.

Es claro al final de esta fase que los estudiantes han logrado expresar las relaciones mencionadas en el SMS de la aritmética, una evidencia de estas expresiones puede verse en el fragmento siguiente, tomado en la entrevista con E1:

Esto se pone en evidencia cuando el alumno catalogado como E1 responde la pregunta del maestro:

> M.-y si fueran 100 y 100 [refiriéndose a 100 pasajeros de tarifa 5 pesos y 100 alumnos de tarifa 3]
> E1.- $100\ x\ 5 = 500,$, serían como 800 pesos.

5.2.2 Segunda Fase de la Experimentación

En esta fase de la resolución del problema se espera que los alumnos estuvieran verificando si un número dado es una solución para el problema y tratando de sistematizar estos cálculos, hasta poder construir una tabla con ellos. Específicamente se espera que puedan:

- Discriminar entre las constantes y las variables involucradas.
- Identificar en los hechos las relaciones presentes en el problema.
- Detectar los patrones que siguen las relaciones entre columnas.
- Reconocer en el proceso de construcción de la tabla, las operaciones entre columnas que están realizando.

En el primer caso de esta fase se evidencia que los alumnos identifican las constantes y variables involucradas en el problema, además al constatar que una pareja de valores (cantidades de pasajeros de tarifa de 3 y 5 pesos) no es solución del problema, éstos utilizan un SMS propio de la aritmética, como se muestra en el siguiente fragmento donde los alumnos verifican si la pareja de números 150 (estudiantes) y 50 pasajeros (no estudiantes) no es una solución del problema:

> M.- ¿Cuántos proponen? ¿No serán 150 alumnos y 50 no alumnos?
> E2.- serian 150 × 3 y 50 × 5 y da 450 y 250 son 700 [ríe] ¡no da!

Denotando con esto que también logran relacionar estas variables con el dinero total al realizar la comprobación de esta pareja de valores.

El uso de la tabla a lápiz y papel jugó un papel importante al ratificar la detección de las variables. Y en el siguiente fragmento puede verse que los alumnos proponen candidatos a partir de los patrones que observan en la tabla:

> E1.- ¿No serán 122 y 78? [Refiriéndose a la cantidad de pasajeros alumnos y no alumnos respectivamente]
> M.- A ver probemos, para eso estamos, pero apúntenlos en la tabla, ¿y cuánto dinero reúnen por los 122 alumnos y los 78 no alumnos?
> M.- ¿Y en total?
> E2.- 756, pero ahí va.

La construcción de la tabla tiene como propósito que los alumnos sistematicen sus exploraciones y puedan detectar las relaciones entre las variables. Más allá de estas intenciones su trabajo sobre la tabla podría llevarlos a tratar las variables como tales aunque no alcancen a representarlas algebraicamente, como se expone en el siguiente fragmento:

> E1.- Porque, más o menos conté, por ejemplo, por cada estudiante más serían 3 pesos y si fuera de tarifa normal son 5, serían como dos pesos menos por cada estudiante más que le suba.

Obsérvese que E1 logra manipular la variable "número de estudiantes" sin recurrir al SMS del álgebra y alcanza a predecir por lo menos uno de los efectos de la manipulación, a saber, que el aumento en uno del número de estudiantes acompañado de la disminución en uno del número de "no estudiantes" trae como consecuencia la disminución del monto total en dos pesos.

Al final del proceso de resolución, la decodificación del espacio textual muestra la correcta detección y manipulación de las variables involucradas en el problema, lo que hace es factible el tránsito entre expresiones verbales y aritméticas con cierta facilidad, también se muestra en el episodio anterior una mayor seguridad en la ejecución de las operaciones que pudieran explicarse como consecuencia de una mayor claridad en las significaciones de las variables; éste es precisamente el carácter recurrente de las interacciones alumno-profesor al que se refieren los MTL.

En la experimentación encontramos evidencias, de que con el uso de la tabla se favorece la detección de las variables, además de la detección de patrones que se expresan como relaciones entre las columnas de la tabla, el siguiente fragmento ejemplifica el grado de concreción en la detección de las variables y refleja que la identificación ha resultado lo suficientemente clara como para responder preguntas que tienen un carácter reciproco con respecto a las que se habían formulado hasta este momento:

> M.- Si tuviéramos un renglón 7, donde el porcentaje de alcohol en la mezcla fue el 50%...fue el 50%...
> E2.- [Lo escribe en la tabla]
> E1.- ¡5!
> E2.- Ah sí. [Afirmando con la cabeza]
> M.- ¿Cuál será el volumen total de la mezcla?
> E2.- Será como 5

Habrá que resaltar el tipo de preguntas que el maestro realizó, dado que se trataron del tipo "pensamiento reversible", cuando hasta ese momento sólo se habían hecho preguntas del tipo "entonces si le agregamos .25 de alcohol, ¿cuánto es la mezcla total?" y ahora son "si hubiera un renglón siete donde el volumen de la mezcla fuese de 5, ¿cuánto alcohol le agregué?" que implica otro tipo de razonamiento. Lo anterior cual, constata el hecho de que la tabla les brindó la posibilidad de reafirmar la detección de las variables presentes en el problema, aunque estas relaciones se manifiestan como relaciones entre columnas de la tabla.

Otro aspecto en donde la tabla ha mostrado su utilidad está relacionado con la distinción entre las cantidades constantes y variables del problema, porque el estudiante observa cómo cambian los valores en las columnas de las variables, mientras en las columnas de las constantes los valores permanecen fijos. Aún en el caso particular de la variación que se observa en la columna del porcentaje, no se pierde de vista que el porcentaje establecido en el problema es una cantidad fija, el fragmento siguiente es una evidencia de esta distinción:

> E.- Lo que yo quiero es poner 10 aquí y el 2.5 aquí [señalando las columnas de porcentaje de la mezcla y agua respectivamente]

5.2.3 Tercera Fase de la Experimentación

En todos los casos que se trabajó con la HE, los alumnos necesariamente tenían que haber detectado previamente las variables presentes en los problemas y cómo éstas se relacionaban por medio de operaciones entre las columnas de la tabla elaborada a lápiz, esto último es lo que les permitía utilizar relaciones "algebraicas", para dar instrucciones en Excel, cuando se precisara realizar alguna operación. Durante la experimentación se encontraron evidencias de cómo los alumnos expresaron dichas relaciones:

> M.- Si lo que pretendemos es que Excel calcule el volumen de la mezcla, ¿cómo se lo tendríamos que decir?
> E.- Pues, sumando esto, con ésta [a la par que en la barra de funciones escribió "= A2+B2"]

Donde el alumno si bien no escribe expresiones como $x + y = 10$, que son características dentro de un SMS del álgebra, le ordena a Excel que en la casilla C2 ejecute la suma de A2 y B2 por medio de la expresión "=A2+B2", exhibiendo de este modo que el SMS que los alumnos utilizan para comunicarse con Excel les sirve para acercarse al álgebra.

Además de los efectos positivos que resulten de la introducción de la HE que se expusieron con anterioridad, también hay evidencias de un cierto "costo", que para algunos alumnos pudiera resultar excesivo y constituirse en un obstáculo para el desarrollo de la metodología, como puede verse en el siguiente episodio:

> M.- Si quisiéramos decirle a Excel que en esta columna [refiriéndose a la columna Volumen de la Mezcla en la Figura 1] calcule automáticamente el volumen de la mezcla ¿qué le tendríamos que decir?
>
> E.- Poniendo la fórmula aquí [refiriéndose a la celda C2 de la Figura 1] y sólo lo hace.
>
> M.- ¿Cuál fórmula?
>
> E.- Una que sume estas dos, A2 y B2… [En pantalla solo aparece A2+B2, en vez de calcular la suma]

Al escribir la instrucción en Excel "A2+B2" en lugar de "= A2 + B2", el alumno espera que el programa ejecute automáticamente la suma, sin embargo para Excel el signo "=" es una orden para que ejecute la operación indicada, que no se realizó, la no realización de la operación podría provocar en los estudiantes incertidumbres sobre lo que está haciendo, cuando en realidad se trata de un error de sintaxis al escribir la instrucción en Excel, con lo cual pudiera estar generando más dudas respecto a la interacción con la HE, en vez de aclarar las que se tenían previamente a la introducción de la HE.

Otra inconsistencia que se presentó en las experimentaciones tiene que ver con el carácter de automatización que Excel le confiere a las fórmulas, es decir si el alumno escribe (porcentaje de alcohol = (B2/C2)*100) y copia esta fórmula para los siguientes renglones, Excel automáticamente tomará lo que esté en B3 lo dividirá entre lo que esté en C3 y lo multiplicará por cien, sin embargo si estas celdas no tiene asignado algún valor, entonces el Excel las interpreta que las celdas contiene el valor cero, esto se exhibe con la pregunta del alumno:

E.- ¿Por qué salen signitos?

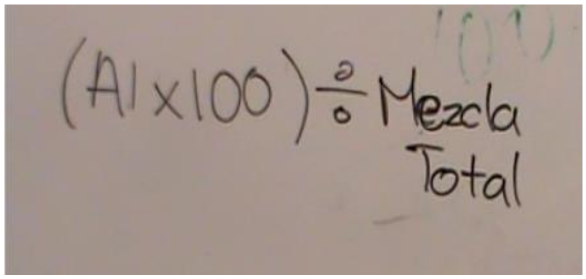
La decodificación en este caso del SMS de Excel es más compleja porque requiere además de la familiaridad con la sintaxis, tener claridad sobre la prohibición de dividir entre cero, que pudiera ser un problema conceptual difícil de desentrañar para un estudiante que acaba de ingresar al bachillerato.

Además de la sistematización de las exploraciones, es en esta fase, donde se espera que los estudiantes propongan y resuelvan el modelo algebraico del problema, con base en las relaciones alimentadas a Excel, el pasaje siguiente muestra a continuación la claridad ganada por un estudiante sobre la forma del modelo algebraico, pero expresado todavía en lenguaje natural:

> M.- Ok… Y si ahora te preguntara, el porcentaje de alcohol, ¿cómo lo calculo?, ¿cómo le dijiste a Excel que lo calculara?
> E.- Éste entre éste por cien...
> M.- Eeh… Cuando dices éste entre éste, ¿a qué te refieres?
> E.- A la cantidad de alcohol entre la mezcla y lo que me dé por cien.

El alumno ha logrado descifrar las relaciones involucradas en el problema y muestra mucha claridad sobre la construcción del modelo algebraico, sin embargo la competencia en modelación aun le es insuficiente para alcanzar a decodificarlo en otro lenguaje que no sea el verbal.

Durante la experimentación se encontró evidencia de que Excel les ayuda a construir una expresión algebraica del modelo, pero alcanzan a completar la ecuación que modela el problema, como se ilustra en la siguiente figura:



Ambas expresiones carecen del signo igual y por lo tanto, no se logran relacionar con el valor que en el problema se menciona como el resultado (10).

Los intentos que se han hecho para remediarlo fueron costosos y difíciles de alcanzar de forma autónoma, los casos exitosos han sido inducidos en algunos momentos. Esta parte de la metodología requiere replantearse, con cuidado, de tal forma que el Modelo de Enseñanza tome en cuenta que la escritura final del modelo algebraico no es un problema trivial. En una reformulación podría tomarse como base las investigaciones de Arnau D. y Puig L. (Arnau, 2010) la cual, usa exitosamente la hoja electrónica para construir modelos algebraicos de problemas verbales, aunque el problema didáctico que se está resolviendo no es exactamente el mismo.

5.3 Conclusiones Generales

Este apartado final está dedicado a las conclusiones en un resumen de los aspectos destacados de los capítulos anteriores, respetando el carácter de conclusiones es sobre aspectos generales del trabajo, es decir no se tratarán casos o situaciones particulares.

La RIEMS contempla como planteamiento general que la resolución de problemas es una actividad central en el aprendizaje de las matemáticas, independientemente de la metodología con la cual se espere trabajar, sin embargo, ha quedado en evidencia durante el desarrollo de este trabajo, que la introducción de este enfoque tendrá que enfrentar una serie de dificultades, como la resistencia a abandonar la convicción de que la resolución de problemas es un fin, para sustituirla por otra donde esta resolución sea vista como un medio para el aprendizaje. Además, los modelos de enseñanza con los que el alumno ha estado en contacto pudieran constituir otra dificultad, ya que en los cursos escolares de Nivel Básico la resolución de problemas se asocia con saber identificar y aplicar las fórmulas correspondientes, privilegiando los ejercicios matemáticos sobre los problemas.

Se esperaría que estas dificultades identificadas para introducir en el bachillerato la resolución de problemas como parte del proceso de aprendizaje, disminuyan conforme se apliquen las reformas curriculares que han sido aprobadas en los niveles escolares previos.

El Modelo Teórico Local utilizado en este trabajo resultó de gran utilidad para descifrar, entender y explicar lo que los alumnos realizan al involucrarse en la resolución de problemas algebraicos de enunciado verbal, dado que permite explorar la actividad del alumno desde las perspectivas de cada uno de los cuatro componentes de este modelo teórico, permitiendo de esta manera describir y explicar los fenómenos que se presentan en el proceso de resolución. Además permite el análisis de situaciones muy particulares, debido a su carácter local, permitiendo focalizar nuestra atención en fenómenos concretos ante una situación concreta, aunado a esto, el carácter recursivo del MTL que se construye para entender y explicar los significados que él o los alumnos asocian a un objeto, los cuales pueden cambiar dependiendo del uso que se le da en la resolución de un problema.

La metodología propuesta en este trabajo ha resultado funcional en términos generales, sobre todo en las primeras fases, donde las intervenciones del maestro contempladas en la metodología son claves para que el estudiante avance en el proceso de resolución del problema, como se ha visto en los capítulos 3 y 4.

Sobre la primera fase puede decirse que ha respondido bien al propósito principal de mejorar la comprensión del problema, pero su puesta en práctica ha evidenciado la importancia de tomar en cuenta las deficiencias en el dominio de la lengua natural, que conducen a decodificaciones erróneas o incompletas del espacio textual en texto.

En la segunda fase se esperaba que la introducción de una tabla construida a lápiz y papel, permitiera: discriminar las constantes de las variables involucradas, identificar las relaciones presentes en el problema, detectar los patrones que siguen las relaciones entre columnas e identificar las operaciones entre columnas con las operaciones entre constantes y variables que involucra el problema. En la experimentación reportada puede apreciarse que está tabla ha resultado útil para promover las actividades cognitivas mencionadas.

En la tercera fase de la metodología, donde se involucra el uso de la Hoja Electrónica de Cálculo, fue donde se observaron mayores problemas para el funcionamiento de la Metodología, lo cual puede explicarse porque en esta fase concurren dos dificultades de naturaleza muy distinta; una de carácter cognitivo relacionada con la transición de la aritmética al álgebra y otra de carácter técnico relacionada con la familiaridad de los estudiantes con el manejo de la Hoja Electrónica. Lo anterior explicaría por qué los propósitos originalmente planteados para esta fase se cumplieron sólo parcialmente y un mejor logro de estos objetivos seguramente requiere de un refinamiento de esta fase, que tome en cuenta el manejo técnico de Excel y precise las relaciones existentes entre las columnas de Excel y la representación algebraica de las variables y relaciones involucradas en el problema.

En atención a lo expuesto en el párrafo anterior, debe concluirse que una línea de trabajo pendiente, es el estudio con mayor profundidad del uso de la Hoja Electrónica como herramienta didáctica para la construcción de modelos algebraicos.
Finalmente se agrega que el balance de la aplicación de esta Metodología puede considerarse positivo y pudiera servir como referente para el diseño de metodologías similares aplicables en otros temas de matemáticas, como por ejemplo la resolución de

problemas de máximos y mínimos en los cursos de Cálculo Diferencial; estos diseños constituirían otra línea de trabajo que estaría abierta.

Bibliografía

Arnau, D. (2010). *La enseñanza de la resolución algebraica de problemas en el entorno de la hoja de cálculo.* Tesis Doctoral no publicada. Universidad de Valencia.

Charnay, R. (1988). Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En Parra, C. & Saiz, I. (Comps). *Didáctica de matemáticas Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidos.

Descartes, R. (1954). *The Geometry*. New York: Dover.

DGB. (2010). Dirección General de Bachillerato. Consultada en febrero, 3, 2010: http://www.dgb.sep.gob.mx/

DGETI. (2010). Dirección General de Educación Tecnológica Industrial. Consultada en febrero, 3, 2010 de: http://www.dgeti.sep.gob.mx/

ENLACE (2010). *Evaluación Nacional de Logro Académico en Educación Media Superior.* México. Recuperado en julio 14, 2010, de: http://enlace.sep.gob.mx/ms/

ENLACE (2009). *Evaluación Nacional de Logro Académico en Educación Media Superior.* México. Recuperado en julio 14, 2010, de: http://enlace.sep.gob.mx/ms/

Filloy, E., et al. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). El Estudio Teórico Local del Desarrollo de Competencias Algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*. *26*(3), 327–342.

Filloy, E., Rojano, T. and Rubio, G. (2001). Propositions concerning the resolution of arithmetical-algebraic problems. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, and R. Lins (eds.), Perspectives on School Algebra (pp.155-176). Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

IEEES. (2009-2010). *Informe de Debilidades y Fortalezas Académicas del Bachillerato*. Recuperado en agosto 15, 2010, de: http://www.ieees.gob.mx/index.php?option=com_content&view=article&id=81%3Ainforme-de-debilidades-y-fortalezas-academicas-en-Bachillerato&catid=14&Itemid=1

OCDE (2003a). *Conocimientos y aptitudes para la vida* (*Informe Pisa). México: Santillana

OCDE. (2003b). *Informe PISA.* Recuperado en febrero 18, 2009, de: http://www.oecd.org/dataoecd/59/1/39732493.pdf

PISA (2010). *México en PISA 2009*. México, DF: INEE

Puig, L. (2003). Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. En E. Filloy (Ed.) Matemática Educativa: *Aspectos de la Investigación Actual*. México, DF: Fondo de Cultura Económica / CINVESTAV pp. 174-186.

Rojano, T & Ursini, Z, (1997). *Álgebra con Hojas Electrónicas de Cálculo*. México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica.

Rojano, T. y Sutherland, R. (1997). Pupil 's strategies and the Cartesian method for solving problems: the role of spreadsheets. *XXI International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, University of Helsinki, Lahti, Finland, Vol. 4.

SEP. (2006). *Programas de Estudio Educación Basica Secundaria Matemáticas.* México: SEP.

SEP. (2008a). ENLACE. Recuperado en julio 23, 2010, de: http://enlace.sep.gob.mx/ms/?p=resultados2008nac

SEP (2008b). RIEMS. México.SEP. Recuperado en julio 20, 2010 de: http://www.sems.gob.mx/aspnv/video/Reforma_Integral.pdf

SEP (2008c). *Competencias Disciplinares Basicas del Sistema Nacional del Bachillerato*. México: SEP.

SEP-ILCE. (2000). *Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo* (EMAT). México, DF: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.

Talens, J. and Company, J. M. (1984). The Textual Space: On the Notion of Text. *The Journal of the Midwest Modern Language Association*, *17*(2).