"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemáticas

Seguimiento a la Reforma Integral de la Educación Media Superior: textos, prácticas docentes, y desarrollo de competencias matemáticas de los estudiantes

TESIS

Que para obtener el Grado de

Maestría en Ciencias

Con especialidad en Matemática Educativa

Presenta

Gloria Angélica Moreno Durazo

Director de tesis

Dr. Agustín Grijalva Monteverde

Hermosillo, Sonora, México Diciembre de 2012

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemáticas

Seguimiento a la Reforma Integral de la Educación Media Superior: textos, prácticas docentes, y desarrollo de competencias matemáticas de los estudiantes

TESIS

Que para obtener el Grado de

Maestría en Ciencias

Con especialidad en Matemática Educativa

Presenta

Gloria Angélica Moreno Durazo

Director de tesis

Dr. Agustín Grijalva Monteverde

Miembros del Comité Revisor y Jurado

Dr. Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza

Dr. José Ramón Jiménez Rodríguez

Dr. Ramiro Ávila Godoy

Dr. Agustín Grijalva Monteverde

Agradecimientos

A mi madre porque siempre me ha impulsado, ella me dice “sí se puede” sin importar que tan complicado sea el reto.

A mi padre por su incansable interés por proporcionarnos lo necesario.

A mis hermanos por preocuparse siempre por mi bienestar.

A Abraham que siempre está a mi lado.

A todos mis amigos y compañeros porque con ustedes compartí esta maravillosa experiencia y también de ustedes aprendí.

A todos mis profesores por sus enseñanzas y por los comentarios realizados a este trabajo. Especialmente quiero agradecer a mi director de tesis, Dr. Agustín Grijalva quien fue mi principal guía en mi estancia en esta maestría, por dedicarme tantas horas de estudio.

A los miembros del Comité Revisor y Jurado por los comentarios que permitieron mejorar este trabajo Dr. Ricardo Cantoral, Dr. José Ramón Jiménez, Dr. Ramiro Ávila, Dr. Agustín Grijalva.

A las instituciones que me permitieron seguir preparándome, el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología y la Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa en la Universidad de Sonora. Además, quiero agradecer al Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios #206 por permitirme realizar observaciones y aplicar evaluaciones a sus estudiantes.

Contenido

Introducción

En la actualidad existe un seguimiento global al modelo educativo basado en competencias. En nuestro país, las reformas tanto en la Educación Básica como en la Educación Media Superior son evidencia de este seguimiento. En el presente documento mostramos una investigación realizada con el objetivo de determinar cómo influye la Reforma Integral de la Educación Media Superior en la elaboración de libros de texto, en las actividades desarrolladas por los docentes en un salón de clases y, por último, determinar cuál es el nivel de desarrollo de las competencias matemáticas en los estudiantes.

Recurrimos al Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios # 206 para que nos permitiera realizar observaciones durante las clases impartidas por un docente y analizar el libro de texto que usaría como guía principal.

En el análisis del libro de texto estamos interesados en identificar cuáles son las competencias matemáticasque se promueven con la realización de las actividades didácticas sugeridas y, el nivel de promoción. Para ello, elegimos el *Proyecto: Para elaborar el libro de texto de la asignatura de matemáticas para el sexto semestre: Matemáticas Aplicada (Cálculo Integral)* que en los hechos es ya un libro de texto.

El desarrollo de este trabajo lo encapsulamos en cuatro capítulos, los cuales describimos a continuación. En el primer capítulo, al que nombramos *La problemática y su justificación*, abordamos los siguientes aspectos:

- Características generales de la Educación Media Superior. En este aspecto se plantean algunos de los retos que enfrenta este nivel educativo, entre ellos encontramos la mejora en la calidad educativa; este reto lo vemos reflejado en las evaluaciones que se aplican a los estudiantes. Además, mostramos a groso modo los procesos que constituyen la reforma enfocándonos en la creación de un marco curricular común, donde se adopta el modelo basado en competencias.
- Modelo con base en las competencias. El impacto del término competencia en la educación, el seguimiento de este modelo en diferentes proyectos internacionales y, localmente, en la Reforma Integral de la Educación Media Superior, la perspectiva del profesorado sobre la reforma citada y los modelos para evaluar competencias matemáticas también son parte de los aspectos abordados en este capítulo.

Como parte del primer capítulo también presentamos el objetivo general de esta investigación y los objetivos específicos que ayudaron a conseguirlo, ambos se muestran enseguida.

Objetivo general:

Evaluar el grado de adaptación del bachillerato a los lineamientos de la Reforma Integral de la Educación Media Superior: libros de texto, prácticas docentes y nivel de competencias de los estudiantes. Un estudio de casos.

Para el logro de este propósito nos hemos planteado el logro de los siguientes objetivos específicos:

- Determinar si el libro de texto promueve el desarrollo de las competencias matemáticas establecidas en la Reforma Integral de la Educación Media Superior.
- Determinar si las prácticas profesionales del docente en el salón de clases y las actividades consecuentemente desarrolladas por los alumnos, se corresponden con lo establecido en la Reforma.
- Determinar cuáles de las competencias matemáticas definidas en la Reforma Integral de la Educación Media Superior desarrollan efectivamente los estudiantes.

En el segundo capítulo, *Elementos teórico - metodológicos*, primeramente fijamos los elementos que corresponden a los aspectos teórico. Este trabajo sigue los lineamientos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática, conocido como EOS.

Entre los elementos que consideramos de este enfoque tenemos las prácticas matemáticas, definidas como "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero 1994).

Asociados a las prácticas matemáticas se encuentran los objetos matemáticos considerados como emergentes de un sistema de prácticas que realiza un sujeto (institución o persona), elementos también involucrados en el desarrollo de esta investigación.

En el EOS no se brinda una definición respecto a los procesos matemáticos sino se formula un listado con los procesos considerados más importantes en la actividad matemática, entre ellos encontramos: institucionalización–personalización, generalización– particularización, descomposición–reificación, materialización–idealización, representación– significación.

Los elementos del enfoque ontosemiótico que se han mencionado en los párrafos anteriores intervienen en el modelo seleccionado para evaluar competencias matemáticas, el cual describimos más adelante.

Describimos también, en el capítulo dos, la metodología de la investigación y el desarrollo de la misma, el cual agrupamos en tres acciones distintas sobre el instrumento de evaluación de la siguiente manera:

- Desarrollo del instrumento de evaluación.
- Implementación del instrumento de evaluación.
- Análisis de las respuestas otorgadas por estudiantes al instrumento de evaluación.

En la exploración sobre los modelos existentes para evaluar competencias matemáticas encontramos que éstas se separan en dos maneras: la primera es llamada a priori, esto es, se diseña un problema en determinado nivel de desarrollo y si el estudiante es capaz de resolverlo entonces posee la competencia a ese nivel. Por otro lado, la segunda modalidad es llamada a posteriori, la cual consiste en la observación y el análisis de los procedimientos seguidos por los estudiantes para la resolución de algún problema.

El modelo seleccionado para realizar el análisis del instrumento de evaluación es uno dentro de la modalidad a posteriori. Para evaluar las competencias desarrolladas por los estudiantes del bachillerato seguimos el modelo presentado por Rubio (2012) que consta de los siguientes pasos:

1. "Resolver el problema, obteniendo un protocolo de la solución del problema.
2. Hacer un análisis del problema destacando algunas acciones, objetos y procesos, considerando las herramientas propuestas por el EOS.
3. Para cada una de las ocho competencias decidir, a partir del análisis realizado en el punto 2, si la competencia es de reproducción, conexión y reflexión.
4. Asignar el problema a uno de los tres grupos, según el nivel que hayamos asignado a las diferentes competencias.
5. Retroalimentar al alumno." (Rubio 2012, p. 164)

En el capítulo tres presentamos el análisis del proceso de estudio, considerado como la interacción del alumno con el libro de texto y las interacciones alumno-profesor. Estamos conscientes de que el alumno puede tener otros acercamientos con los objetos matemáticos en estudio, sin embargo, analizar todas las posibles interacciones es una tarea irrealizable.

En el análisis del libro de texto, el interés es identificar las competencias que son viables a desarrollarse por parte de los estudiantes en la solución de las situaciones problema presentes en cada unidad, para ello, empleamos el modelo de Rubio descrito anteriormente.

Para el análisis de las clases impartidas, primeramente se describen sus características generales y se presenta el perfil del docente según la Reforma Integral de la Educación Media Superior.

Para concluir con el análisis del proceso de estudio, éste fue valorado. Tomamos como elementos para esta tarea los criterios parciales de idoneidad didáctica, definida en el EOS como "el criterio sistémico de pertinencia o adecuación de un proceso de instrucción al proyecto educativo, cuyo principal indicador empírico puede ser la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos / implementados". (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2007), p. 1)

Dentro del capítulo cuatro mostramos los resultados del análisis realizado a las respuestas que brindaron los estudiantes al instrumento de evaluación, primeramente mostramos una visión global de las acciones realizadas por los estudiantes al resolver la evaluación escrita, enseguida ejemplificamos el análisis sobre las respuestas de los estudiantes con fin de detectar las competencias matemáticas intervinientesen cada situación problema planteada a cada estudiante y, por último, mostramos los resultados personales de cada estudiante.

Para cada estudiante presentamos una tabla que relaciona las situaciones problema planteadas y el nivel de desarrollo de cada competencia, después se muestra una tabla con el nivel de desarrollo de las competencias matemáticas. El análisis personal concluye con la identificación de conflictos semióticos relacionados con el Cálculo Integral y con objetos matemáticos abordados en cursos anteriores, estos conflictos están definidos en el EOS como cualquier disparidad entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos.

En la última sección presentamos las conclusiones de la investigación, donde plasmamos el nivel de obtención de los objetivos específicos y, con estos, el logro del objetivo general. Además, declaramos las líneas de trabajo abiertas.

CAPÍTULO I

La problemática y su justificación

1.1 Características generales de la Educación Media Superior

Cada vez es más frecuente escuchar que vivimos en una sociedad de la información y el conocimiento. Aunque parecieran usarse indistintamente, se hace con ello referencia a que vivimos en una sociedad de la información, caracterizada por la gran capacidad de la humanidad para crear y almacenar información, a la vez del desarrollo tecnológico para difundirla entre toda la población.

En cambio, por sociedad de conocimiento se entiende la capacidad de los ciudadanos para hacer una selección crítica de la información que les es de utilidad y prescindir de aquella que no juega un papel importante en la solución de sus problemas, ya sean de carácter individual o social.

Reconociendo entonces la importancia de que los ciudadanos del presente y del futuro inmediato desarrollen competencias para desenvolverse en la sociedad de la información y el conocimiento, los reclamos sociales han motivado que se ponga cada vez mayor énfasis en elevar el nivel educativo de los jóvenes, futuros ciudadanos de nuestro país.

Esta exigencia se pone de manifiesto de diferentes maneras, y una de ellas la encontramos en la rapidez con la cual se ha instituido la obligatoriedad de la enseñanza secundaria y el bachillerato. En el caso de la educación secundaria, ésta se declaró como obligatoria en 1993, en tanto que el mes de diciembre de 2010 la Cámara de Diputados aprobó reformas a los artículos constitucionales 3 y 31, estableciendo la obligatoriedad de la Educación Media Superior en el país, responsabilizando a todos los niveles de gobierno: federal, estatales, Distrito Federal y municipales para ofrecer enseñanza del bachillerato de forma gratuita.

Esta determinación debe valorarse muy positivamente por todo lo que ello significa para el desarrollo del país, pero trae aparejada consigo una serie de circunstancias problemáticas que deben atenderse y que, en nuestro caso, se corresponden directamente con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en todos sus aspectos, curriculares, formación de profesores, empleo de los recursos tecnológicos, elaboración de textos, por citar algunos.

Los aspectos señalados han venido mencionándose en diferentes foros y propuestas previas a la aprobación de la obligatoriedad del bachillerato, reconociéndose que la Educación Media Superior enfrenta una serie de retos que provienen de distintas fuentes y están relacionadas estrechamente con los factores señalados.

Uno de los retos que enfrenta la educación en nuestro país es la mejora en la calidad, es necesario que los estudiantes tengan un mejor dominio de habilidades, destrezas y conocimientos. Encontramos reflejada la deficiencia que presentan los estudiantes con respecto a este domino en las evaluaciones que de forma normal se realizan en todos los niveles educativos, y que en los últimos años se han sistematizado en nuestro país, resaltando el caso de las evaluaciones internas en la Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE) y las externas en el Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA, por sus siglas en ingles).

La evaluación ENLACE se aplica en nuestro país a estudiantes que cursan tanto la Educación Básica como la Educación Media Superior. En el caso de la Educación Básica se aplica esta evaluación a estudiantes que cursan tercero, cuarto, quinto y sexto grado de primaria, y en secundaria se aplica en los tres años.

Los estudiantes del último grado de la Educación Media Superior son a los que se aplica esta evaluación, en este nivel educativo el interés es evaluar las competencias disciplinarias básicas de los campos de comunicación (Comprensión Lectora) y Matemáticas. En matemáticas se evalúan los niveles de reproducción, conexión y reflexión en los siguientes contenidos: cantidad, espacio y forma, cambios y relaciones.

En el sitio WEB de la Secretaría de Educación Pública (2011) se menciona que la prueba ENLACE se aplica en la Educación Media Superior para ver en qué medida los alumnos son capaces de poner en práctica, en situaciones problema en contexto extra-matemático, las competencias básicas de los campos de Comunicación y Matemáticas. Además, se hace mención del propósito de la aplicación de estas evaluaciones.

> "El propósito central de la evaluación Enlace es generar una sola escala de carácter nacional que proporcione información comparable de los conocimientos y habilidades que tienen los estudiantes en los temas evaluados, que permita:
>
> - Estimular la participación de los padres de familia así como de los jóvenes, en la tarea educativa.
> - Proporcionar elementos para facilitar la planeación de la enseñanza en el aula.
> - Atender requerimientos específicos de capacitación a docentes y directivos.
> - Sustentar procesos efectivos y pertinentes de planeación educativa y políticas públicas.
> - Atender criterios de transparencia y rendición de cuentas."

La evaluación PISA se aplica a estudiantes de 15 años de edad (en tercero de secundaria), quienes serán los próximos estudiantes de bachillerato, con el fin de conocer si están capacitados para enfrentar los requerimientos de la sociedad del conocimiento. Se aplica a esta edad porque en la mayoría de los países miembros de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), es en esta etapa cuando se encuentran culminando sus estudios obligatorios. Con la reciente aprobación de la obligatoriedad del bachillerato en nuestro país dejará de ser ése el caso.

Las áreas de interés en los exámenes PISA son las habilidades de Lectura, Matemáticas y Ciencias. Concebidas como las competencias esenciales para el desarrollo de los individuos en una sociedad cada vez más demandante y competitiva. Particularmente, en matemáticas se toma en consideración cuatro subtemas: espacio y forma, cambio y relaciones, cantidad, y probabilidad.

1.1.1 Reforma Integral de la Educación Media Superior

Por otro lado, respecto a los factores organizacionales y curriculares, a partir de un estudio sobre la diversidad de planteamientos curriculares en el nivel medio superior, la Secretaría de Educación Pública estableció la llamada Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS) y, con ella, el Sistema Nacional de Bachillerato (SNB).

La reforma concibe cuatro grandes procesos. El primero de ellos define los contenidos del Sistema Nacional de Bachillerato, lo que implica la construcción de un marco curricular común, que será compartido por las instituciones que pertenecen a la Educación Media Superior, este marco contempla tres estilos de competencias: genéricas, disciplinares y profesionales; las últimas dos se dividen en básicas y extendidas. En la siguiente tabla se mencionan más profundamente las componentes del marco curricular común del SNB.

Competencias		Objetivo
Genéricas		Son competencias clave, por su importancia y aplicaciones diversas a lo largo de la vida; transversales, por ser relevantes a todas las disciplinas y espacios curriculares de la EMS; y transferibles, por reforzar la capacidad de los estudiantes de adquirir otras competencias.
Disciplinares	Básicas	Integran conocimientos, habilidades y actitudes y se construyen desde la lógica de las disciplinas en las que tradicionalmente se ha organizado el saber. Dan sustento a la formación de los estudiantes en el Perfil del Egresado. Pueden desarrollarse en distintos contextos curriculares y a partir de distintas estrategias educativas y contenidos.Son las competencias disciplinares que deben desarrollar todos los estudiantes del bachillerato. Representan la base común de la formación disciplinar en el marco del SNB.
	Extendidas	Dan especificidad al modelo educativo de los distintos subsistemas de la EMS; no serán compartidas por todos los egresados del nivel educativo. Son de mayor profundidad o amplitud que las competencias disciplinares básicas.
Profesionales	Básicas	Se refieren a un campo del quehacer laboral. Definen la capacidad productiva de un individuo en cuanto a conocimientos, habilidades y actitudes requeridas en

	Extendidas	un determinado contexto de trabajo. Dan sustento a la formación de los estudiantes en el Perfil del Egresado.Proporcionan a los jóvenes formación elemental para incorporarse al mercado de trabajo. Preparan a los jóvenes con una calificación de nivel técnico para incorporarse al ejercicio.

Tabla 1.1 Las competencias del Sistema Nacional de Bachillerato. Tomado del sitio WEB http://www.profordems.cfie.ipn.mx.

El Consejo Nacional de Autoridades Educativas (CONAEDU) y la Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior (ANUIES) compartieron el documento *Competencias disciplinares básicas del Sistema Nacional de Bachillerato*, donde se describe la naturaleza de las competencias disciplinares básicas y se muestran tres de sus características fundamentales:

1. “Se organizan en cuatro campos disciplinares amplios.
2. Pueden aplicarse en distintos enfoques educativos, contenidos y estructuras curriculares.
3. Dan sustento a la formación de los estudiantes en las competencias genéricas que integran el Perfil de Egreso del SNB.” (CONAEDU, ANUIES 2008, p. 3)

En la siguiente tabla se presenta la relación entre los campos disciplinares y las disciplinas que contienen:

Campo disciplinar	Disciplina
Matemáticas	Matemáticas
Ciencias experimentales	Física, química, biología y ecología
Ciencias sociales	Historia, sociología, política, economía y administración
Comunicación	Lectura y expresión oral y escrita, literatura, lengua extranjera informática

Tabla 1.2 Relación entre los campos disciplinares y las disciplinas. Tomado de CONAEDU, ANUIES (2008).

En el segundo proceso que contempla la RIEMS se recurre a las modalidades que contempla la Ley General de Educación para la Educación Media Superior (escolarizada, no escolarizada y mixta) y se define la estructura de la oferta educativa para este nivel. Esta definición permitirá reconocer y certificar los distintos tipos de oferta y lograr así su integración al Sistema Nacional de Bachillerato.

El tercer proceso contempla mecanismos de gestión específicos para llevar a cabo la reforma. Para lograr que la reforma sea exitosa, es necesario que los subsistemas de la Educación Media Superior alcancen ciertos estándares. Por último, el cuarto proceso es la certificación nacional, es el cierre de los procesos anteriores. Esta certificación será la expresión oficial del Sistema Nacional de Bachillerato.

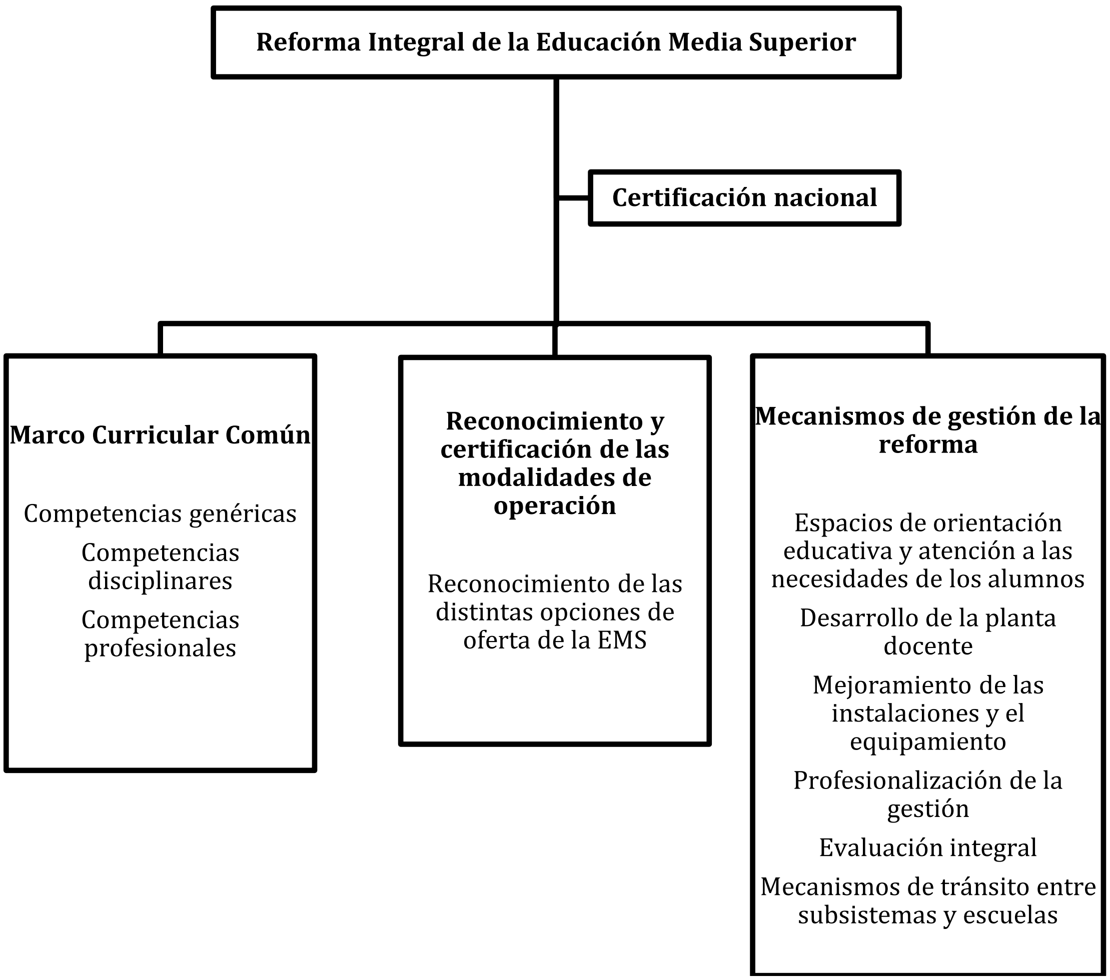


Figura 1. Procesos de la Reforma Integral de la Educación Media Superior

1.2 Modelo con base en las competencias

Durante un largo periodo, la educación tuvo como interés principal que los estudiantes contaran con una enseñanza de calidad, es decir, proporcionar al alumnado un docente con gran dominio de la temática presente en los programas de estudio y que éste, a su vez, pudiera compartirla de forma clara. Posteriormente las concepciones evolucionaron y el interés primordial se centró en el alumno, esto es, dentro del foco de atención no sólo está el proceso de enseñanza también se incluye al proceso de aprendizaje.

En la actualidad se acepta que el conocimiento no es lo único que se debe fomentarse en los alumnos, como herramientas los estudiantes deben poseer todo aquello que le permita ser más competente en la realización de actividades específicas, es decir, deben promoverse en ellos ciertas competencias de utilidad para su formación profesional.

La bibliografía sobre las competencias es sumamente extensa y, aunque las definiciones que encontramos son diferentes, podemos señalar algunos rasgos comunes. Un ejemplo representativo y con el que coincidimos lo proporciona Rodríguez y Feliú (1996), quienes definen competencia como "Conjuntos de conocimientos, habilidades, disposiciones y conductas que posee una persona, que le permiten la realización exitosa de una actividad".

El término *competencia* ha sido utilizado por la humanidad a lo largo de su existencia, empleándose en el ámbito empresarial y profesional, entre otros. Sin embargo, la adopción del término en un ambiente educativo podría decirse que es reciente.

> "El uso institucionalizado de la competencia en el desarrollo de la formación profesional es un fenómeno reciente que ha aparecido mezclado con otras innovaciones, tales como la introducción del auto aprendizaje, la integración de teoría y práctica, la validación del aprendizaje previo y de las nuevas teorías de aprendizaje, tales como el aprendizaje auténtico, el constructivismo social y la construcción del conocimiento". (Mulder, Wigel y Collings 2007, p. 3)

La renovación de currículos adoptando el enfoque basado en competencias se ha venido exhibiendo con mucha frecuencia. Proyectos como PISA/OCDE y Tuning son ejemplo del interés mundial en la educación con base en competencias, en nuestro país las recientes reformas a los currículos escolares de la educación obligatoria nos brindan evidencia acerca de este interés.

Sin embargo, este seguimiento al modelo no implica que sea aceptado de manera global, algunos autores señalan las teorías y críticas, un ejemplo de las críticas lo encontramos en Mulder et al (2007) quienes mencionan aspectos sobre el uso de la competencia en Inglaterra, Alemania, Francia y Países Bajos.

> "Estas críticas abarcan aspectos tales como la falta de una definición coherente del concepto de competencia, la pérdida de una relación mutua entre competencia y desempeño, la noción errónea de que el empleo del concepto de competencia disminuye el valor del conocimiento, las dificultades del diseño de los principios educativos basados en las competencias tanto en los niveles curriculares y de la instrucción, la baja estimación de las consecuencias organizativas de la educación basada en la competencia y los muchos problemas en el área de evaluación de la competencia." (Mulder et al 2007, p. 1)

Por otro lado tenemos a investigadores que acogen el modelo de manera positiva. Serna (2007) menciona que el Enfoque Curricular Basado en Competencias (ECBC) puede proponerse como un medio novedoso que además de confiar al alumno el papel protagónico de su aprendizaje promueva el desarrollo humano en los miembros de las instituciones que lo adopten.

“Como marco regulador, proponemos que la apropiada integración del concepto de desarrollo humano en un programa que siga el ECBC debe considerar:

- Que los fines educativos manifestados en el modelo institucional deben incluirse en los programas de estudio basados en competencias como marco para adecuar o elaborar los perfiles de egreso.
- Que la formación basada en competencias no excluye ni limita el aprendizaje y la práctica de conductas éticas y pro-sociales.
- Que la función social de las universidades mexicanas continúa vigente y es una responsabilidad institucional.
- Que el desarrollo humano constituye una alternativa sólida para formar a los alumnos en una cultura de libertad con responsabilidad.” (Serna 2007, p. 21)

1.2.1 El modelo competencial en la Reforma Integral de la Educación Media Superior

En el sitio WEB de la Secretaría de Educación Pública (2008), donde se explica la Reforma Integral de Educación Media Superior, se dice que el propósito es definir aquellos desempeños terminales que el egresado del bachillerato debe alcanzar, mediante la existencia de distintos planes de estudio con un marco curricular común, delimitado por tres conjuntos de competencias y conocimientos a desarrollar:

- Competencias genéricas.

  Estas competencias capacitan al individuo para continuar aprendiendo de forma autónoma a lo largo de su vida, y para desarrollar relaciones armónicas con quienes le rodean y participar eficazmente en su vida social, profesional y política.

- Competencias disciplinares.

  Estas competencias se caracterizan por demandar la integración de conocimientos, habilidades y actitudes necesarias para la resolución de un problema teórico o práctico. Estas competencias requieren para su realización de los conocimientos, pero no se limitan a ellos.

- Competencias profesionales.

  Estas competencias son aquellas que se refieren a un campo del quehacer laboral. Se trata del uso particular del enfoque de competencias aplicado al campo profesional.

Las competencias disciplinares básicas integran, con las competencias genéricas, el marco curricular común del Sistema Nacional de Bachillerato. En otra sección del documento compartido por el Consejo Nacional de Autoridades Educativas y la Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior se definen las competencias disciplinares básicas.

> “Son nociones que expresan conocimientos, habilidades y actitudes que se consideran los mínimos necesarios de cada campo disciplinar para que los estudiantes se desarrollen de manera eficaz en diferentes contextos y situaciones a lo largo de la vida.” (CONAEDU, ANUIES 2008, p. 3)

Como podemos observar la definición respecto al término competencia que hemos asumido no se contrapone de ninguna manera con la definición proporcionada en la reforma de competencia disciplinar.

Con relación a las competencias disciplinares en el área de Matemáticas se menciona que “buscan propiciar el desarrollo de la creatividad, el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes. Un estudiante que cuente con las competencias disciplinares de matemáticas puede argumentar y estructurar mejor sus ideas y razonamientos”. (CONAEDU, ANUIES 2008, p. 8)

A continuación mencionamos las competencias disciplinares en el área de Matemáticas establecidas en la Reforma Integral de la Educación Media Superior, estas competencias forman parte del perfil de egreso de los estudiantes y las cuales estamos interesados en evaluar.

1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.

2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.

3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea.
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

1.2.2 Investigaciones sobre el modelo educativo basado en competencias

La educación en nuestro país desde el nivel básico hasta la Educación Media Superior, y en algunos casos la Educación Superior, ha incorporado en su currículo el modelo educativo basado en competencias. Esta medida se ha venido implementando hace algunos años en diferentes ciclos, en 2004 el modelo se incluyó en el currículo de la educación preescolar; dos años después se implementó en secundaria y, para finalizar con la Educación Básica, en el 2009 se renovó el currículo de primaria incluyendo el modelo basado en competencias.

En el sitio WEB de la Secretaría de Educación Pública (2009) se menciona que la Reforma Integral de la Educación Básica busca la continuidad entre los niveles que conforman la Educación Básica: preescolar, primaria y secundaria, para que las nuevas generaciones cuenten con los conocimientos, habilidades y valores que les permitan afrontar los retos sociales del futuro.

Anteriormente mencionamos la Reforma Integral de la Educación Media Superior, la cual consiste en la creación de un Sistema Nacional de Bachillerato con base en cuatro procesos: construcción de un marco curricular común adoptando el modelo basado en competencias, definición y reconocimiento de la porciones de la oferta de la Educación Media Superior, profesionalización de los servicios educativos y por último la certificación Nacional Complementaria.

En ambas reformas se considera a la evaluación como parte elemental en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, ya que nos rinde informes acerca de las deficiencias y logros con los que se cuentan. En la actualidad existen instituciones nacionales e internacionales encargadas de hacer las evaluaciones en el alumnado. Con la renovación de los currículos en los diferentes niveles educativos es necesario realizar estas evaluaciones pensando en las competencias que forman el perfil de egreso del estudiante en los distintos niveles.

En la educación primaria se han realizado investigaciones de diferentes tipos, entre ellas sobre los materiales educativos. Estas investigaciones giran alrededor de los libros de texto, esto es, en el sitio WEB de la Secretaría de Educación Pública (2009) podemos encontrar investigaciones, evaluaciones y opiniones sobre los libros de texto, foros estatales para el diálogo y análisis de los libros de texto.

Pero el interés por estudiar cómo se está dando el proceso de evaluación de los aprendizajes esperados en el modelo basado en competencias en educación primaria se pone de manifiesto en diversas investigaciones encontradas en otros ámbitos. Así, De la Cruz (2011) hace una exploración desde el punto de vista de los profesores. En ella menciona que la mayoría de los profesores evalúa los conocimientos adquiridos por los estudiantes de manera cuantitativa, pues consideran que es más fácil obtener un resultado, mientras que son pocos los que procuran evaluar de las maneras que propone la reforma.

> "Es tan importante que el docente conozca y aplique en su práctica todas las herramientas que se sugieren para la evaluación de los aprendizajes esperados con un enfoque por competencias como la autoevaluación, la coevaluación, así como los momentos de aplicarla como la evaluación inicial, la formativa o continua para llegar a la final o sumativa. Así como el uso de distintos recursos para recopilar información donde se pueda evaluar no sólo conocimientos sino

> también actitudes, habilidades y valores que el niño desarrolle." (De la Cruz 2011, p. 119)

En el sitio WEB de la Secretaría de Educación Pública (2009) también podemos encontrar evaluaciones para el caso de la educación secundaria. En el sitio se presenta un estudio de opinión sobre los materiales educativos de telesecundaria y otro sobre los materiales impresos de la asignatura de tecnología.

Con relación al desarrollo de competencias, a los estudiantes de secundaria se les aplica la evaluación PISA con el fin de conocer si están capacitados para enfrentar los requerimientos de la sociedad del conocimiento. Rico (2004) explica el dominio que se evalúa con el proyecto PISA/OCDE y distingue las siguientes componentes.

> 1.- "La situación o contexto en que se localiza el problema.
>
> 2.- El contenido matemático que se debe utilizar para resolver el problema.
>
> 3.- Las competencias que deben activarse para conectar el mundo real, donde surge el problema, con las matemáticas." (Rico 2004, p. 5)
>
> "Contextos, contenidos y procesos proporcionan la dimensión conceptual para la evaluación del proyecto PISA/OCDE, muestran las claves que articulan el dominio desde la perspectiva predominante de la disciplina. La dimensión cognitiva, el papel relevante del sujeto que aprende, viene establecida en este estudio por las competencias que delimitan el dominio. Las competencias que aquí se postulan sostienen que es el sujeto quien moviliza los contenidos y articula procesos que dan respuesta a cuestiones planteadas desde el mundo real." (Rico 2004, p. 9)

En Resultados de las pruebas PISA 2009 en México. Habilidades para la vida en estudiantes de 15 años (2010) tenemos que en nuestro país más de la mitad de los estudiantes se encuentran en el nivel 1 o por debajo de él, es decir, estos estudiantes saben responder a preguntas relacionadas con contextos familiares, en los que está presente toda la información relevante y las preguntas están claramente definidas, son capaces de identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas en situaciones explícitas, pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados.

Para darnos una idea de las deficiencias que éstos resultados representan, diremos que se considera que el nivel 2 es el mínimo necesario para la vida en la sociedad actual, y alcanzar los niveles 5 y 6 significa que un alumno está preparado para realizar actividades cognitivas complejas, es decir, un alumno posee un pensamiento y razonamiento matemático avanzado, puede aplicar su entendimiento y comprensión, así como su dominio de las operaciones y relaciones matemáticas formales y simbólicas, y desarrollar nuevos enfoques y estrategias para abordar situaciones nuevas.

En Resultados de las pruebas PISA 2009 en México. Habilidades para la vida en estudiantes de 15 años (2010) podemos ver que México pertenece al grupo de países con media significativamente menor al promedio de la OCDE y por arriba de la media de los países de América Latina, en todos los conceptos matemáticos evaluados.

En el caso de la Educación Media Superior encontramos evaluaciones de conocimientos y habilidades con la implementación de la prueba Enlace. Los resultados son mostrados por la Secretaría de Educación Pública (2011), donde se reporta al 75.3 % de los estudiantes en la categoría de insuficiente y elemental, al 24.7 % en la categoría bueno y excelente, todo esto en la habilidad Matemática.

Respecto a la implementación de la Reforma Integral de la Educación Media Superior, López (2011) realiza un diagnóstico desde la perspectiva de los profesores que laboran en el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora; en esta investigación se muestra la falta de familiaridad por parte de los profesores con relación al modelo educativo basado en competencias.

Relacionado a las evaluaciones señala que "los planes de estudio se sustentan en teorías de aprendizaje y estas definen el rol del docente, del alumnado, el concepto de enseñanza aprendizaje, así como estrategias de enseñanza y evaluación, aspectos que marcan las transformaciones en la práctica docente" (López 2011, p. 70). En ello basa la importancia de que los profesores conozcan los instrumentos de evaluación que se manejan en el modelo educativo basado en competencias y, como resultado, obtiene que estos instrumentos de evaluación son poco conocidos por los profesores.

Con los comentarios expuestos anteriormente concluimos que investigaciones acerca de la evaluación de competencias matemáticas en estudiantes en los diferentes niveles educativos son pocas. Sin embargo, hay investigaciones que nos muestran algún método para poder realizar esta evaluación.

Para la evaluación de competencias matemáticas existen dos metodologías, una a priori y la otra a posteriori. La metodología a priori consiste en el planteamiento de una situación problema a determinado nivel, sí el joven es capaz de resolverla entonces posee competencias a ese nivel. Por otro lado, la metodología a posteriori considera las acciones, procedimiento y objetos utilizados por el joven en la solución de la situación problema y, con base en este análisis, determina el nivel de desarrollo de las competencias.

En seguida mostramos la metodología seguida por evaluaciones a gran escala como PISA (a priori), debido precisamente al volumen de datos que maneja.

> "El proceso de evaluación de competencias es el siguiente: (1) dada una tarea, lo que se hace es determinar un nivel global de complejidad de las competencias en una escala de 1 a 3 (reproducción, conexión y reflexión) en función de la respuesta de un sujeto ideal o de un "experto", y (2) dada una respuesta de un alumno a esta tarea, se le asigna una puntuación, de manera que, en función de la puntuación global obtenida en el conjunto de las tareas que se le propusieron

resolver, permite situar al alumno en una escala de rendimiento (o nivel de de competencia) de 1 a 6”. (Rubio 2012, p. 115)

Para ejemplificar la otra metodología (a posteriori) mostramos dos investigaciones donde se evalúan competencias matemáticas. Entre los investigadores que sugieren cómo llevar a cabo esta clase de evaluaciones encontramos a Meavilla (s/f), quien nos muestra uno de estos caminos para evaluar competencias matemáticas en los estudiantes. Con relación a la evaluación menciona “las competencias matemáticas específicas son muy generales y, por tanto, resultan difíciles de evaluar. Entonces primeramente conviene adaptarlas a cursos concretos y a bloques de contenidos específicos”.

La tarea de evaluar competencias matemáticas la concentra en los siguientes cuatro pasos:

1. A partir de los criterios de evaluación de cada curso, se seleccionan aquellas capacidades susceptibles de ser incluidas en alguna de las competencias matemáticas específicas.
2. Se incluyen dichas capacidades en las competencias matemáticas específicas correspondientes y se determinan las competencias básicas que permiten adquirir.
3. Se diseñan actividades de enseñanza y aprendizaje que permitan adquirir las competencias matemáticas específicas que se hayan seleccionado.
4. Se elaboran fichas para la evaluación / calificación de las actividades anteriores.

Otra de las investigaciones en las que podemos encontrar un método para evaluar competencias matemáticas en estudiantes nos la brinda Rubio (2012), a continuación mostramos el modelo que propone.

1. Resolver el problema, obteniendo un protocolo de la solución del problema.
2. Hacer un análisis del problema destacando algunas acciones, objetos y procesos, considerando las herramientas propuestas por el EOS.
3. Para cada una de las ocho competencias decidir, a partir del análisis realizado en el punto 2, si la competencia es de reproducción, conexión y reflexión.
4. Asignar el problema a uno de los tres grupos, según el nivel que hayamos asignado a las diferentes competencias.
5. Retroalimentar al alumno. (Rubio 2012, p. 164)

1.3 Objetivos

Nuestro interés se centra en las competencias disciplinares del área de Matemáticas en el bachillerato, aunque consideramos que no se pueden aislar totalmente de las competencias genéricas ni de las profesionales. Este trabajo tiene como objetivo general:

Evaluar el grado de adaptación del bachillerato a los lineamientos de la Reforma Integral de la Educación Media Superior: libros de texto, prácticas docentes y nivel de competencias de los estudiantes. Un estudio de casos.

Para alcanzar este objetivo seguimos la sugerencia de Meavilla mencionada anteriormente sobre la adaptación necesaria para evaluar competencias matemáticas, por lo que, fijamos el centro de atención en el Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios (CBTIS). Específicamente, nos interesa valorar la actividad del docente en un curso de Cálculo Integral (Matemáticas Aplicadas para el CBTIS). Además, hacer un análisis del *Proyecto: Para elaborar el libro de texto de la asignatura de matemáticas para el sexto semestre: Matemáticas Aplicada (Cálculo Integral)* de Hipólito Orduño Vega, que en los hechos es ya un libro de texto para el curso, pero aún sin edición formal.

Empleamos elementos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimientos y la Instrucción Matemática para respaldar los análisis tanto para valorar el nivel de promoción de las competencias matemáticas en las actividades presentes en el libro, como para identificar componentes del perfil del docente definido por la reforma y para determinar el nivel de desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes.

Para el logro del objetivo general nos hemos planteado la obtención de los siguientes objetivos específicos:

- **Determinar si el libro de texto promueve el desarrollo de las competencias matemáticas establecidas en la Reforma Integral de la Educación Media Superior.**
- **Determinar si las prácticas profesionalesdel docente en el salón de clases y las actividades consecuentemente desarrollada por los alumnos, se corresponden con lo establecido en la Reforma.**
- **Determinar cuáles de las competencias matemáticas definidas en la Reforma Integral de la Educación Media Superior desarrollan efectivamente los estudiantes.**

Los análisis señalados se enfocan a la obtención de los objetivos específicos de la investigación y, con ello, de la obtención del objetivo general de la misma. Para plantearlos en una forma más operativa, nos proponemos responder las siguientes preguntas de investigación:

- ¿El libro de texto promueve el desarrollo de las competencias establecidas en la Reforma Integral de la Educación Media Superior? ¿Cuáles si y cuáles no?
- ¿Las prácticas profesionales del docente en el salón de clases y las actividades consecuentemente desarrollada por los alumnos, se corresponden con lo establecido en la Reforma?
- ¿Cuáles de las competencias matemáticas definidas en la Reforma Integral de la Educación Media Superior desarrollan efectivamente los estudiantes?

1.4 Justificación

El modelo educativo basado en competencias tiene mucha popularidad en nuestro país y en los últimos años, las reformas establecidas en los diferentes niveles educativos brindan evidencia de ello. Por este hecho, realizar investigaciones sobre el seguimiento a los establecimientos de la reforma por los tres principales actores en los procesos de enseñanza y de aprendizaje: docente-alumno-libro de texto, toma un punto central para la educación de cada individuo.

En párrafos anteriores se mencionan las investigaciones alrededor de la aplicación del modelo con base en competencias. En las líneas desarrolladas se presentan diversos trabajos entre los que se encuentran análisis de libros de textos, opiniones sobre materiales educativos y evaluaciones en estudiantes.

En el caso de la escuela primaria se encontraron trabajos desarrollados en evaluación de libros de texto y materiales educativos. En relación a la escuela secundaria se encontraron estudios de opinión acerca de materiales educativos y materiales impresos, evaluación de competencias en estudiantes, es importante señalar que las competencias evaluadas son las que el proyecto PISA/OCDE define para el estudiante en este nivel. Para Bachillerato se encontraron trabajos centrados en diagnosticar la implementación de la reforma educativa en este nivel desde la perspectiva del profesorado y, en evaluación de conocimiento y habilidades.

Las pocas investigaciones evaluando las competencias de estudiantes en un lugar donde se aplica este modelo justifica de manera suficiente el interés por este tipo de investigación.

Por otro lado, la Reforma Integral de la Educación Media Superior (2008) contempla entre sus metas para el 2012 que el 100% de los estudiantes tengan la certificación del Sistema Nacional de Bachillerato.

Atendiendo a esta meta podemos decir que nuestra investigación se realiza oportunamente y nos dará por una parte una valoración del impacto de la aplicación del nuevo modelo curricular y, por otra, nos dará pautas para realizar este tipo de evaluaciones que, previo los refinamientos correspondientes, resulten más efectivas y eficientes para analizar los objetivos y metas planteadas en la citada Reforma.

Estamos conscientes de que ésta es una primera aproximación a la realización de evaluaciones sobre el desarrollo de competencias disciplinares, y en tal sentido nuestro interés no sólo es hacer una evaluación concreta sino, primordialmente, contribuir al establecimiento de criterios para realizar este tipo de evaluaciones.

Por otro lado, involucramos al objeto matemático la integral de una función en las situaciones problema que constituyen la evaluación escrita ya que, generalmente, el curso de Cálculo Integral se ubica curricularmente en el último semestre de la Educación Media Superior. De esta manera, evaluamos en próximos egresados las competencias matemáticas que forman parte de su perfil de egreso.

Además, en el libro de texto que siguieron estos estudiantes durante las clases de Matemáticas Aplicadas (Cálculo Integral) se menciona que sigue a la Reforma Integral de la Educación Media Superior y, aún más, en cada unidad declara las competencias matemáticas que el alumno desarrollará en la realización de las actividades propuestas.

CAPÍTULO II

Elementos teóricos – metodológicos

2.1 Marco teórico

Dada la amplitud de nuestro estudio, analizando un libro de texto, las prácticas docentes y los resultados de los estudiantes, el marco teórico que requeríamos emplear debería ofrecernos la posibilidad de hacer análisis de estos tres factores. Esto es, el marco teórico debería tener elementos para hacer análisis epistemológicos, didácticos y cognitivos, que permitiera analizar el hecho educativo desde diferentes perspectivas pero integradas dentro de un sólo proceso.

El marco teórico debería ofrecernos la posibilidad de analizar tanto la promoción de competencias matemáticas como el desarrollo de las mismas por los estudiantes y, por su carácter pragmático nos resultó conveniente y convincente emplear el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS). En este enfoque los significados de los objetos matemáticos se conciben como los sistemas de prácticas desarrollados por un sujeto al resolver su determinado tipo de situaciones problema y precisamente nuestro interés estaba centrado en estudiar los sistemas de prácticas promovidos en los textos y promovidos por los profesores, así como las prácticas que efectivamente desarrollaban de los estudiantes.

En general, podemos afirmar que es importante que en cualquier proceso de enseñanza y de aprendizaje sea posible describir, explicar y valorar lo sucedido en dicho proceso. En dependencia del tipo de proceso, deben poder usarse herramientas del enfoque teórico encaminadas a estudiar dicho proceso.

El Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática ha desarrollado herramientas de análisis para realizar estudios de diferente carácter, algunas de las cuales son útiles para estudios a nivel macro como puede ser el análisis de un texto y otras a nivel micro, como puede ser el estudio cognitivo de los significados que un sujeto asigna a los objetos matemáticos.

En general, el EOS cuenta con cinco niveles de para el estudio de los procesos educativos: son:

1. Análisis de las prácticas matemáticas
2. Análisis de objetos y procesos matemáticos
3. Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas y de conflictos semióticos
4. Identificación del sistema de normas y metanormas
5. Valoración de la idoneidad didáctica

Los cuatro primeros niveles mencionados son la herramienta para describir y explicar los procesos de estudio, esto es, en ellos se responde las cuestiones ¿qué está pasando y porqué? Para valorar este proceso se hace uso del quinto nivel.

En esta sección mencionamos cuáles de estos elementos teóricos retomamos para alcanzar el objetivo de este trabajo. Nuestro objetivo central es evaluar el seguimiento de los establecimientos de la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS) por parte de los dos principales intervinientes en el proceso de enseñanza: el docente y el libro de texto. Además, determinar el impacto de éstos en los estudiantes analizando el nivel de desarrollo de las competencias matemáticas definidas por esta reforma.

Relacionado con la identificación de las competencias matemáticas que se promueven con la realización de las actividades didácticas presentes en cada unidad del libro de texto y, con la identificación de las competencias matemáticas que desarrollaron los estudiantes al concluir el proceso de estudio, recurrimos a los niveles 1 y 2. Esto es, considerando las prácticas matemáticas, los objetos y procesos matemáticos empleados para la solución de las situaciones problema se identifican los descriptores de cada competencia matemática.

También se realiza una valoración del libro de texto apelando los criterios parciales de idoneidad didáctica: epistémico y cognitivo.

El perfil del docente definido por la RIEMS se corresponde de buena manera con los componentes y descriptores de los criterios parciales de idoneidad didáctica: emocional, ecológico, interaccional y mediacional. Es por ello, que para valorar el seguimiento del docente a la reforma utilizamos estos criterios de idoneidad.

Para profundizar en los elementos que intervienen en este enfoque mostraremos a continuación una síntesis de ellos.

2.2.1 Prácticas matemáticas y significados

La *situación–problemática* es un elemento primario en este enfoque, se le otorga a la actividad de resolución de problemas el papel central en la construcción del conocimiento matemático (Godino, Batanero y Font 2008). A partir de las situaciones problema se definen nociones como prácticas, objetos y significado.

Se consideran las *prácticas matemáticas* como "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero 1994).

Llamamos *prácticas matemáticas prototípicas* a los invariantes que encontramos en la resolución de los problemas. Por ejemplo, en el caso de que el problema sea encontrar los puntos de intersección de las funciones $f(x) = x^2$ y $f(x) = x$, una práctica habitual para encontrar estos puntos consiste en formar una ecuación igualando las funciones y encontrar el conjunto solución; esta expresión es aplicable aún cuando sean otras las funciones. Lo que interesa no es la práctica particular sino el invariante operatorio mostrado en la resolución de los problemas.

Cuando alguien emprende el camino hacia la solución de un problema realiza las siguientes acciones u otras similares: visualiza la situación problema, establece hipótesis, define y ejecuta un plan de acción, comprueba resultados. En el desarrollo de estas acciones se puede encontrar con obstáculos, fallos o errores que le hagan reconsiderar sus ideas, hasta encontrar la solución al problema; todas las acciones o expresiones realizadas son efectivamente prácticas matemáticas. Sin embargo, Godino y Batanero (1994) explican que una *práctica matemática es significativa* (o tiene sentido) si esta práctica desempeña una función para la consecución del objetivo en los procesos de resolución de un problema, o bien para comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas.

Por todo lo mencionado anteriormente las prácticas de interés para nosotros son las prácticas matemáticas significativas prototípicas. A partir de aquí cuando hagamos mención a prácticas matemáticas nos estaremos refiriendo al tipo significativa y prototípica.

El sujeto que realiza las prácticas matemáticas puede ser una persona o una institución (constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas). Por lo que al sistema de prácticas para resolver un campo de problemas y compartidas en el seno de la institución se conoce como *prácticas matemáticas institucionales* y al sistema de prácticas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas se le llaman como *prácticas matemáticas personales*(Godino y Batanero 1994).

Relacionado con las prácticas matemáticas nos encontramos a los significados, definiendo el *significado* que un sujeto dé a un objeto matemático como el sistema de prácticas que éste realice. Dependiendo de quién realice este sistema el significado se divide en: *significado personal y significado institucional*.

Los significados personales se clasifican en los siguientes tipos. *Global:* sistema de prácticas que es capaz de manifestar el sujeto relativas a un objeto matemático, *declarado:* da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional. *Logrado:* corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. (Godino, Batanero y Font 2009)

En un proceso de estudio específico los significados institucionales se clasifican en los siguientes tipos: *referencial,* sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido; *pretendido,* sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio por parte del docente; *implementado,* el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente; *evaluado,* el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.(Godino, Batanero y Font 2009)

2.2.2 Objetos matemáticos y procesos matemáticos

En el EOS se declaran como emergentes de un sistema de prácticas que realiza un sujeto (persona/ institución) a los *objetos matemáticos*. "Dicha emergencia es un fenómeno complejo cuya explicación implica considerar, como mínimo, dos niveles de objetos que emergen de la actividad matemática". (Godino, Batanero y Font 2009)

Como primer nivel tenemos los siguientes objetos matemáticos: *lenguajes, conceptos–definiciones, proposiciones, procedimientos, argumentos*.

- Situaciones – problema. Entendidas como problemas intra-matemáticos, problemas extra-matemático, tareas, ejercicios.
- Elementos lingüísticos. Entendidos como términos, expresiones, notaciones y gráficos en sus diversos registros (escrito, oral, gestual)
- Conceptos - definición. Introducidos mediante definiciones o descripciones (área, función, integral)
- Proposiciones. Enunciados sobre conceptos
- Procedimientos. Algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo.
- Argumentos. Enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos.

El segundo nivel de objetos según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las siguientes facetas o dimensiones duales (Godino, 2002): *personal–institucional, ostensivo–no ostensivo, expresión–contenido, extensivo–intensivo, unitario–sistémico.*

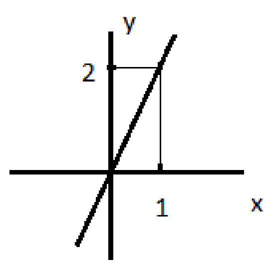
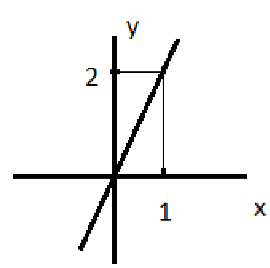
- Personal – institucional. Si los sistemas de prácticas son compartidas en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran objetos institucionales, mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como objetos personales.
- Ostensivo –no ostensivo. Se entiende por ostensivo cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar a otro. Los objetos institucionales y personales tienen una naturaleza no ostensiva (no perceptibles por sí mismos). Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos).
- Expresión – contenido: antecedente y consecuente de cualquier función semiótica. Los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unos con otros, estas relaciones se establece por medio de funciones semióticas (relación entre un antecedente y un consecuente establecida por un sujeto de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia).
- Extensivo – intensivo (ejemplar - tipo). Un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular (por ejemplo, $\int x^2 dx$) y una clase más general (por ejemplo $\int x^n \, dx$).
- Unitario – sistémico. En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que en otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio.

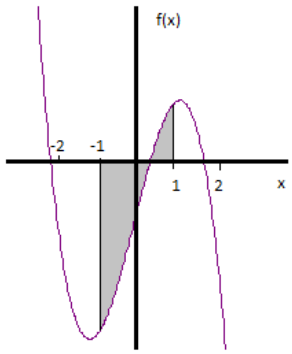
La emergencia de los objetos matemáticos pertenecientes al primer nivel tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos y argumentación.

Por otra parte, los objetos matemáticos pertenecientes al segundo nivel dan lugar a los siguientes procesos cognitivos/epistémicos:institucionalización–personalización; generalización– particularización; descomposición–reificación; materialización–idealización; representación– significación.

Debido a la variedad de procesos existentes en la actividad matemática, en el EOS se hace un listado de procesos elementales que son considerados importantes en esta actividad. En este listado encontramos los siguientes procesos: significación, representación, personalización, institucionalización, idealización, materialización, reificación, descomposición, particularización, generalización, algoritmización, argumentación, comunicación, enunciación, definición, problematización.

A continuación se ejemplifican los procesos mencionados. En las tablas se presenta una situación problema, asociada a ésta se presenta una solución que da lugar al proceso expuesto y a su vez se le asocia el objeto matemático presente en la situación.

Significación		
 $f(x) = 2x$	Recta de la forma $f(x) = mx + b$, donde $m=2$ y $b=0$	Concepto (recta)
Representación		
Recta de la forma $f(x) = mx + b$, donde $m=2$ y $b=0$	 $f(x) = 2x$	Lenguaje gráfico y algebraico
Personalización		

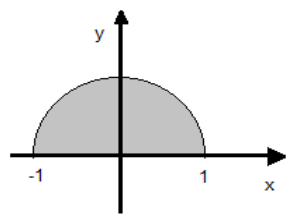
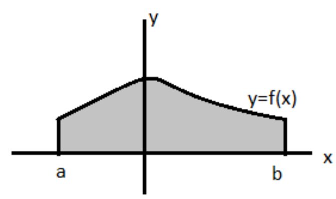
<table>
<tr><td>Área entre la curva y el eje x ¿positiva o negativa? Halla el área entre la gráfica de $f(x) = -x^3 + 4x - 2$ y el eje x en [-1,1] (véase la figura)


a) Observando la figura en la que se muestra el área entre la gráfica y el eje *x*, ¿cómo esperas que sea su valor: positivo, negativo, cero?
b) Escribe la integral que representa el área a calcular en este problema
c) Utiliza el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema.

Escribe brevemente y claramente tu respuesta. El valor obtenido ¿es cómo lo esperabas en el inciso a)?</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Institucionalización</td></tr>
<tr><td>En este apartado observaste que:

La integral nos da el área entre la gráfica y el eje x a lo largo de un intervalo asignando signo positivo a las áreas arriba del eje x y signo negativo a las áreas debajo del eje x</td><td></td><td>Concepto

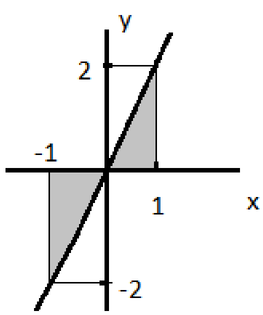
(integral)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Idealización</td></tr>
<tr><td>Encuentra el área sombreada</td><td>El problema se puede trasladar al</td><td>Concepto</td></tr>
</table>

	siguiente: Encuentra $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$	(integral)
Materialización		
Concepto de integral	 $$\int_a^b f(x)\,dx$$	Lenguaje gráfico y algebraico
Reificación		
Definición de integral	$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right)f(x_k)$$ Donde $\left(\frac{b-a}{n}\right)$ es la longitud de la base de cada uno de los rectángulos que circunscriben el área bajo la curva $f(x)$ y $f(x_k)$ es la altura del rectángulo k; x_k es el número del subintervalo k que tiene mayor imagen de todos los elementos del subintervalo	Concepto (integral)
Descomposición		
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right)f(x_k)$$ Donde $\left(\frac{b-a}{n}\right)$ es la longitud de la base de cada uno de los rectángulos que circunscriben el área bajo la curva $f(x)$ y $f(x_k)$ es la altura del	El área bajo la curva $f(x)$ queda definida mediante el valor al que se aproxima la suma de las áreas de rectángulos con longitud de la base $\left(\frac{b-a}{n}\right)$ y altura $f(x_k)$ cuando $n\to\infty$, donde x_k es el número del subintervalo k que tiene mayor	Concepto (integral)

rectángulo k; x_k es el número del subintervalo k que tiene mayor imagen de todos los elementos del subintervalo	imagen de todos los elementos del subintervalo	
Particularización		
Sean $f_1, f_2, \dots, f_n$ funciones integrables en [a, b] entonces la siguiente propiedad es verdadera: $\int_a^b [f_1(x) + \cdots + f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \dots + \int_a^b f_n(x)dx$	Sean f_1, f_2 funciones integrables en [a, b] entonces la siguiente propiedad es verdadera: $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$	Propiedad
Generalización		
Sean f_1, f_2 funciones integrables en [a, b] entonces la siguiente propiedad es verdadera: $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$	Sean $f_1, f_2, \dots, f_n$ funciones integrables en [a, b] entonces la siguiente propiedad es verdadera: $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)dx$	Propiedad
Algoritmización		
Resuelve $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+8}}dx$	Sea $u = 2x^2 + 8$, entonces $du = 4xdx$	Procedimiento (integración por método de sustitución)

	$\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+8}}dx = \frac{1}{4}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\sqrt{u}+c = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2+8}+c$	

Argumentación

Halle el área entre la gráfica $f(x) = 2x$ y el eje x en el intervalo [-1,1] (véase la figura) a) Encuentre el valor de la integral $\int_{-1}^{1} 2x\,dx$ b) Explique el resultado del inciso a) 	Respuesta el inciso b) La integral nos da el área entre la gráfica y el eje x a lo largo de un intervalo asignando signo positivo a las áreas arriba del eje x y signo negativo a las áreas debajo del eje x. Entonces el área bajo la curva $f(x) = 2x$ es cero ya que el triángulo que está sobre el eje x y el que está bajo el eje x tienen la misma área sólo que con signos contrarios.	Concepto (integral)

Enunciación

En estos problemas encontraste la relación entre la derivada de la función que determina el área bajo una curva y la función integrando, ¿cuál es?	La función integrando es la derivada de la función con la que se determina el área bajo una curva.	Concepto (integral)

Definición

Sean A, B conjuntos, una función f de A en B es una relación que le hace corresponder a cada elemento $x \in A$ uno y sólo un elemento $y \in B$. Es decir, $f: A \to B \;/\; y = f(x)$	Sean A, B conjuntos, una función f es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$, tal que: • $\forall x \in A, \exists y \in B / (x,y) \in f$ • $(x,y) \in f, (x,z) \in f \Rightarrow y = z$	Concepto (función)

Menciona una definición equivalente		
Problematización		
Escribe un enunciado de problema que corresponda a $\int_0^t [-x^2 + 27x]\, dx$	Una pelota es lanzada a una velocidad que se determina por la expresión $f(x) = -x^2 + 27x$, determine la posición de la pelota en cada instante t	Concepto (integral)
Comunicación		
Desde lo alto de un edificio de 40 metros de altura una persona lanza una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 27 m/s. Despreciando la resistencia del aire, determina la altura de la piedra medida desde el suelo a los t segundos. a) ¿En qué intervalo de tiempo la piedra sube? b) ¿Con que velocidad choca la piedra contra el suelo y en qué tiempo sucede esto?	Respuesta al inciso a) Cuando un cuerpo sube libremente, existe sobre él una aceleración negativa cuyo valor es$a(t) = -9.81 \frac{m}{s^2}$. Sabemos que la velocidad es la antiderivada de la aceleración y que$v(0) = 27 \frac{m}{s}$entonces$v(t) = -9.81t + 27$. Para encontrar el intervalo de tiempo en el que la piedra sube, tenemos que encontrar el punto donde la velocidad es cero ya que a partir de ahí la piedra empezara a caer. Entonces resolvemos $-9.81t + 27 = 0, t = 2.75$ El intervalo en el que la piedra sube es [0,2.75]	Concepto (integral)

Tabla 2.1 Ejemplificación de los procesos matemáticos.

2.2.3 Conflictos semióticos

Los *conflictos semióticos* sondefinidos como cualquier disparidad entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos. Estos conflictos los podemos clasificar en:

- Conflicto semiótico de tipo epistémico. Desajuste entre los significados institucionales de referencia y pretendido con el implementado que no han sido previstas *a priori* como constituyentes del proceso instruccional.
- Conflicto semiótico de tipo cognitivo. Desfase excesivo entre los significados institucionales implementados y los significados personales iniciales.

- Conflicto semiótico de tipo instruccional. Se da cuando ni el profesor ni los estudiantes son capaces de identificar un conflicto semiótico, o en caso de identificarlo, no disponen de los recursos matemático-didácticos necesarios para resolverlos.

2.2.4 Idoneidad didáctica

Con la finalidad de valorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje, en el EOS se introduce la noción de *idoneidad didáctica* de estos procesos.

> "La idoneidad didáctica es el criterio sistémico de pertinencia o adecuación de un proceso de instrucción al proyecto educativo, cuyo principal indicador empírico puede ser la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos / implementados". (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2007), p. 1)

Los mismos autores declaran que para hacer operativa la definición anterior, se introducen seis criterios parciales de idoneidad atendiendo a las siguientes dimensiones que caracterizan y condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje: epistémica, cognitiva, mediacional, emocional, interaccional y ecológica. Enseguida profundizaremos en estos criterios parciales de idoneidad, y mostraremos los componentes y descriptores presentes en Godino y colaboradores (2007) que les brindan funcionalidad.

- Idoneidad epistémica, Se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.

Componentes	Descriptores
Situaciones-problema	• Selección de una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. • Propuesta de situaciones de generación de problemas (problematización).
Lenguaje	• Uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico...), traducciones y conversiones entre los mismos. • Nivel del lenguaje adecuado a quienes se dirige. • Propuesta de situaciones de expresión e interpretación.
Elementos regulativos (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	• Definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen. • Presentación de los enunciados y procedimientos fundamentales del tema según el significado de referencia y el nivel educativo. • Propuesta de situaciones para la generación y negociación de las reglas.

Argumentos	• Adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen. • Se promueven momentos de validación.
Relaciones (conexiones, significados)	• Relación y articulación significativa de los objetos matemáticos puestos en juego (situaciones, lenguaje, reglas, argumentos) y las distintas configuraciones en que se organizan.

Tabla 2.2 Componentes y descriptores de la idoneidad epistémica.

- Idoneidad cognitiva. Se refiere al grado en que los significados pretendidos (o implementados) estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos(o implementados).

Componentes	Descriptores
Conocimientos previos	• Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio). • Los significados pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	• Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.
Aprendizaje	• Los diversos modos de evaluación muestran la apropiación de los conocimientos / competencias pretendidas (o implementadas).

Tabla 2.3 Componentes y descriptores de la idoneidad cognitiva.

- Idoneidad interaccional. Un proceso de enseñanza y de aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos y por otra parte, permita resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.

Componentes	Descriptores
Interacción docente-discente	• El profesor hace una presentación adecuada del tema • Se reconocen y resuelven los conflictos de significado de los alumnos (se interpretan correctamente los silencios de los alumnos, sus expresiones faciales, sus preguntas, se hace un

	juego de preguntas y respuestas adecuado, etc.) • Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento • Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. • Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase y no la exclusión.
Interacción entre discentes	• Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes. • Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.
Autonomía	• Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación y validación).
Evaluación formativa	• Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos

Tabla 2.4 Componentes y descriptores de la idoneidad interaccional.

- Idoneidad mediacional. Se refiere al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Componentes	Descriptores
Recursos materiales	• Uso de materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al significado pretendido. • Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	• El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida. • El horario del curso es apropiado. • El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido.
Tiempo	• Adecuación de los significados pretendidos (o implementados) al tiempo. • Inversión del tiempo en los contenidos más importantes o nucleares del tema. • Inversión del tiempo en los contenidos que presentan más

	dificultad de comprensión.

Tabla 2.5 Componentes y descriptores de la idoneidad mediacional.

- Idoneidad emocional. Se refiere al grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad emocional está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.

Componentes	Descriptores
Intereses y necesidades	• Selección de tareas de interés para los alumnos. • Planteamiento de situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.
Actitudes	• Promoción de la implicación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. • Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Emociones	• Promoción de la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas. • Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

Tabla 2.6 Componentes y descriptores de la idoneidad emocional.

- Idoneidad ecológica. Se refiere al grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

Componentes	Descriptores
Adaptación al currículo	• Los significados, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.
Apertura hacia la innovación didáctica	• Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva. • Integración de nuevas tecnologías en el proyecto educativo.
Adaptación socio-profesional y cultural	• Los significados contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes.

Conexiones intra e interdisciplinares	• Los significados se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares.

Tabla 2.7 Componentes y descriptores de la idoneidad ecológica.

2.2 Desarrollo de la investigación y metodología

Los elementos metodológicos describen los procedimientos encaminados a la obtención de respuestas sobre los objetivos específicos planteados en el capítulo anterior y, de esta manera, formular conclusiones relativas al objetivo general de este trabajo.

El enfoque de la investigación cualitativa Rodríguez, Gil y García (1996) lo describen con los siguientes aspectos:

- Estudia la realidad en su contexto natural.
- Obtiene interpretaciones de fenómenos de acuerdo con los significados que tienen para las personas indicadas.
- Recolecta material para describir la rutina, las situaciones problémicas y los significados en la vida de las personas.

Consideramos que este trabajo cumple con estos aspectos, es por ello que clasificamos este trabajo como una investigación de corte cualitativo.

Los resultados obtenidos en la investigación proceden de una serie de acciones llevadas a cabo. Primeramente se hizo una observación no participativa del proceso de estudio que llevaron a cabo los estudiantes propensos a ser evaluados y, después, con la ayuda del profesor encargado del curso se hizo una selección de alumnos, lo que sitúa a esta investigación en la modalidad de estudio de casos.

Por otro lado, para la recolección de datos se consideraron dos instrumentos: un examen escrito y una entrevista personal.

Los aspectos anteriormente mencionados se retoman en las siguientes líneas de manera puntual. El desarrollo de la investigación está agrupado en tres secciones. El diseño, la implementación y el análisis del instrumento de evaluación son los aspectos que constituyen la primera, segunda y tercera sección, respectivamente, las cuales se describen a continuación.

2.2.1 Diseño del instrumento de evaluación

Las etapas en el diseño del instrumento que nos permitió evaluar las competencias matemáticas se describen a continuación.

1. Revisión bibliográfica.

Se realizó una revisión bibliográfica en la que se incluyeron varios aspectos con el fin de plantear un ambiente cercano a la investigación sobre el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes del bachillerato y a su vez justificarla. El primer aspecto es sobre el impacto del término competencia en la educación y, además, la inclusión de este término en el modelo educativo presente en la Reforma Integral de la Educación Media Superior.

Se revisaron resultados relacionados con competencias matemáticas en tres rubros: el primero es sobre los resultados de las evaluaciones oficiales (ENLACE, PISA) que se aplican a estudiantes en determinado nivel educativo, en el segundo aspecto revisamos el conocimiento que tienen los profesores del nivel medio superior sobre el modelo educativo basado en competencias y, por último, se hizo una revisión sobre los modelos propuestos para la evaluación de competencias.

Otro material revisado durante esta etapa fue el relacionado con la identificación de diferentes teorías de Matemática Educativa, esto con el propósito de seleccionar el marco teórico.

2. Análisis del libro de texto y las prácticas profesionales realizadas por el docente en el salón de clases

Al realizar el análisis sobre las competencias matemáticas que se promueven con la realización de las actividades didácticas presentes en el libro de texto y, el análisis sobre las actividades realizadas por el profesor en el aula no sólo estamos alcanzando los primeros dos objetivos específicos. Estos análisis forman parte importante en el diseño del instrumento de evaluación.

El análisis sobre las dos principales guías de los estudiantes en un proceso de estudio: el libro de texto y las interacciones con el docente, nos proporcionan una visión global de las situaciones problema que los alumnos pueden resolver.

Para determinar el nivel de promoción de las competencias matemáticas en el libro seguimos el método propuesto por Rubio (2012) para la evaluación analítica, a posteriori y global de competencias matemáticas, el cual describiremos con más detalle en la sección *Análisis de las respuestas otorgadas por estudiantes al instrumento de evaluación* que se presenta más adelante.

Para las clases del curso de Matemáticas Aplicadas (Cálculo Integral) la planeación de la observación era durante todo el semestre. Sin embargo, por cuestiones institucionales el profesor encargado del curso dedicó mayor tiempo al estudio de reactivos de la evaluación ENLACE, de esta manera el tiempo de estudio de conceptos del Cálculo Integral sobrepasa por poco un mes.

Para la valoración del proceso de estudio de los estudiantes utilizamos los criterios de idoneidad didáctica planteados en el Enfoque Ontosemiótico.

3. Diseño del instrumento de evaluación.

El propósito del instrumento de evaluación es determinar el nivel de desarrollo de competencias matemáticas que tiene el estudiante al que se le aplique, pensando en ello se plantearon situaciones problema en los niveles de reproducción, conexión y reflexión.

Estamos de acuerdo con Meavilla (s/f) quien menciona que las competencias matemáticas son muy generales, por lo tanto son difíciles de evaluar. Por lo que recomienda que se adapten a cursos concretos y a bloques de contenidos específicos. Siguiendo esta recomendación, hacemos uso del objeto matemático *integral definida,* es decir, en el análisis del libro fijamos la atención en las secciones que aborden este objeto matemático y el cuestionario atiende problemas de *la integral.*

La evaluación escrita consta de nueve situaciones problema en las que se involucró la integral definida en su solución. Para la clasificación de estas situaciones problema fue de gran ayuda el análisis de los componentes principales del proceso de estudio descrito en el punto anterior, ya que nos permitió conocer cuáles fueron las situaciones problema abordabas en clase, siendo este tipo de situaciones problema las que constituyeron el nivel de reproducción.

El nivel de conexión lo constituyeron las situaciones problema que involucran la integral definida en su solución, pero el contexto en el que se desarrollan es distinto al abordado en clase, el contexto es familiar o casi familiar para los estudiantes. Para el nivel de reflexión se incluyó una situación problema que además de generar la necesitad del uso de la integral definida, se tuviera que recurrir a otros objetos matemáticos.

4. Pilotaje de prueba.

Se puso a prueba el instrumento de evaluación con un grupo de Cálculo Integral de segundo semestre de la Licenciatura en Física, que no estaba a cargo de la investigadora, con el objetivo de identificar las limitaciones o errores en su diseño y tener la oportunidad de modificarlas para su aplicación a los estudiantes del bachillerato.

5. Incorporación de cambios al instrumento de evaluación.

El pilotaje de prueba sugirió ligeras modificaciones de redacción al instrumento de diagnóstico, las cuales fueron incorporadas para la implementación definitiva del instrumento.

2.2.2 Implementación del instrumento de evaluación

1. Aplicación del instrumento de evaluación.

Fue el profesor encargado del aula el que sugirió a los estudiantes a los que se les aplicaría la evaluación, detectando a los estudiantes con más actitudes propositivas en las clases, es decir, los estudiantes que participaban en clase y pasaban al pizarrón a resolver las situaciones problema y, lo hacían de manera correcta. Confiamos en esta selección ya que el mismo profesor era el tutor del grupo y tenía más contacto con los estudiantes.

La evaluación se aplicó a 8 estudiantes del sexto semestre en el Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios (CBTIS) 206, los estudiantes pertenecen al grupo VI K con especialidad en administración donde tomaban clases 46 estudiantes.

2. Toma de datos.

Con el fin de obtener mayor información de los estudiantes una vez que se aplicó la evaluación escrita, se entrevistó a los estudiantes de manera individual. En la entrevista se incluyeron cuestiones para clarificar la metodología usada por los estudiantes o para ver si con algunas pistas los estudiantes implementaban procedimientos para resolver los problemas.

2.2.3 Análisis de las respuestas otorgadas por estudiantes al instrumento de evaluación

Para evaluar las competencias matemáticas en los estudiantes del bachillerato definidas en la reforma utilizamos los primero trespasos del siguiente modelo:

1. "Resolver el problema, obteniendo un protocolo de la solución del problema.
2. Hacer un análisis del problema destacando algunas acciones, objetos y procesos, considerando las herramientas propuestas por el EOS.
3. Para cada una de las ocho competencias decidir, a partir del análisis realizado en el punto 2, si la competencia es de reproducción, conexión y reflexión.
4. Asignar el problema a uno de los tres grupos, según el nivel que hayamos asignado a las diferentes competencias.
5. Retroalimentar al alumno." (Rubio 2012, p. 164)

En este modelo se evalúan las competencias matemáticas definidas en PISA y nosotros estamos interesados en evaluar las competencias matemáticas propuestas en la RIEMS; para poder usar el modelo realizamos la siguiente correspondencia entre las competencias propuestas en PISA y en la RIEMS.

Competencias matemáticas definidas en PISA	Competencias matemáticas definidas en la RIEMS
Modelar	Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
Plantear y resolver problemas	Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.
Comunicar	Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
Argumentar	Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales,

	mediante el lenguaje verbal y matemático.
Pensar y razonar	Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
	Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
Representar	Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea.
Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones	Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Tabla 2.8 Correspondencia entre competencias matemáticas en PISA y en la RIEMS.

Después hacer esta correspondencia entre las competencias matemáticas podemos asignar a las competencias matemáticas definidas en la RIEMS los descriptores de las competencias matemáticas definidas en PISA propuestos en un documento difundido por el Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (2004) en nuestro análisis de competencias matemáticas.

Competencias matemáticas	Nivel	Descriptores
Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales	Reproducción	Reconocer, recopilar, activar y aprovechar modelos familiares bien estructurados; pasar sucesivamente de los diferentes modelos (y sus resultados) a la realidad y viceversa para lograr una interpretación; comunicar de manera elemental los resultados del modelo.
	Conexión	Estructurar el campo o situación del que hay que realizar el modelo; traducir la realidad a estructuras matemáticas en contextos que no son demasiado complejos pero que son diferentes a los que están acostumbrados los estudiantes. Comporta también saber interpretar alternando los modelos (y de sus resultados) y la realidad, y comunicar los resultados del modelo.

	Reflexión	Estructurar el campo o situación del que hay que realizar el modelo, traducir la realidad a estructuras matemáticas en contextos complejos o muy diferentes a los que están acostumbrados los estudiantes y pasar alternando de los diferentes modelos (y sus resultados) a la realidad, incluyendo aquí aspectos de la comunicación de los resultados del modelo: recopilar información y datos, supervisar el proceso de construcción de modelos y validar el modelo resultante. Conlleva también reflexionar analizando, realizando críticas y llevando a cabo una comunicación más compleja sobre los modelos y su construcción.
Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.	Reproducción	Exponer y formular problemas reconociendo y reproduciendo problemas ya practicados puros y aplicados de manera cerrada; resolver problemas utilizando enfoques y procedimientos estándar, normalmente de una única manera.
	Conexión	Plantear y formular problemas más allá de la reproducción de los problemas ya practicados de forma cerrada; resolver tales problemas mediante la utilización de procedimientos y aplicaciones estándar pero también de procedimientos de resolución de problemas más independientes que implican establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas y distintas formas de representación y comunicación (esquemas, tablas, gráficos, palabras e ilustraciones).
	Reflexión	Exponer y formular problemas mucho más allá de la reproducción de los problemas ya practicados de forma cerrada; resolver tales problemas mediante la utilización de procedimientos y aplicaciones estándar pero también de procedimientos de resolución de problemas más originales que implican establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas y formas de representación y comunicación (esquemas, tablas, gráficos, palabras e ilustraciones). También conlleva

		reflexionar sobre las estrategias y las soluciones.
Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	Reproducción	Comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera.
	Conexión	Comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas que engloban desde cómo reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares o cómo explicar los cálculos y sus resultados (normalmente de más de una manera) hasta explicar asuntos que implican relaciones. También comporta entender las afirmaciones orales o escritas de terceros sobre este tipo de asuntos.
	Reflexión	Comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas que engloban desde cómo reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares o explicar cálculos y resultados (normalmente de más de una manera) a explicar asuntos que implican relaciones complejas, entre ellas relaciones lógicas. También comporta entender las afirmaciones orales o escritas de terceros sobre este tipo de asuntos.
Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.	Reproducción	Seguir y justificar los procesos cuantitativos estándar, entre ellos los procesos de cálculo, los enunciados y los resultados.
	Conexión	Razonar matemáticamente de manera simple sin distinguir entre pruebas y formas más amplias de argumentación y razonamiento; seguir y evaluar el encadenamiento de los argumentos matemáticos de diferentes tipos; tener sentido de la heurística (¿qué puede o no puede pasar y por qué?, ¿qué sabemos y qué queremos obtener?).

	Reflexión	Razonar matemáticamente de manera sencilla, distinguiendo entre pruebas y formas más amplias de argumentación y razonamiento; seguir, evaluar y elaborar encadenamientos de argumentos matemáticos de diferentes tipos; emplear la heurística (¿qué puede o no puede pasar y por qué?, ¿qué sabemos y qué queremos obtener?, ¿cuáles son las propiedades esenciales?, ¿cómo están relacionados los diferentes objetos?).
Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	Reproducción	Formular las preguntas más simples (¿cuántos...?, ¿cuánto es...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (tantos, tanto); distinguir entre definiciones y afirmaciones.
	Conexión	Formular preguntas (¿cómo hallamos...?, ¿qué tratamiento matemático damos...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (plasmadas mediante tablas, gráficos, álgebra, cifras, etc.); distinguir entre definiciones y afirmaciones y entre distintos tipos de éstas.
	Reflexión	Formular preguntas (¿cómo hallamos...?, ¿qué tratamiento matemático damos...?, ¿cuáles son los aspectos esenciales del problema o situación...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (plasmadas mediante tablas, gráficos, álgebra, cifras, especificación de los puntos clave, etc.); distinguir entre definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis y afirmaciones sobre casos especiales y articular de modo activo o reflexionar sobre estas distinciones
Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea.	Reproducción	Descodificar, codificar e interpretar representaciones de objetos matemáticos previamente conocidos de un modo estándar que ya ha sido practicado. El paso de una representación a otra sólo se exige cuando ese paso mismo es una parte establecida de la representación.
	Conexión	Descodificar, codificar e interpretar formas de representación más o menos familiares de los

		objetos matemáticos; seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos, y traducir y diferenciar entre diferentes formas de representación.
	Reflexión	Descodificar, codificar e interpretar formas de representación más o menos familiares de los objetos matemáticos; seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos y traducir y diferenciar entre ellas. También conlleva combinar representaciones de manera creativa e inventar nuevas.
Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.	Reproducción	Comprender y emplear conceptos matemáticos en el mismo contexto en el que se introdujeron por primera vez o en el que se han practicado subsiguientemente.
	Conexión	Comprender y emplear conceptos matemáticos en contextos que difieren ligeramente de aquellos en los que se introdujeron por primera vez o en los que se han practicado después.
	Reflexión	Comprender y emplear conceptos matemáticos en contextos nuevos o complejos; comprender y tratar la amplitud y los límites de los conceptos matemáticos dados y generalizar los resultados.
Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	Reproducción	Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario que ya se ha practicado en situaciones y contextos sobradamente conocidos; manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos rutinarios.
	Conexión	Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico básico en situaciones y contextos menos conocidos y manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver

		ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos familiares.
	Reflexión	Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico ya practicado en situaciones y contextos desconocidos y manejar afirmaciones y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos. También conlleva la habilidad de saber tratar con expresiones y afirmaciones complejas y con lenguaje simbólico o formal inusual, y realizar traducciones entre este lenguaje y el lenguaje natural.

Tabla 2.9 Competencias matemáticas y descriptores.

CAPÍTULO III

Análisis del libro de texto y de las prácticas profesionales

El curso de Matemáticas Aplicadas para el Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios es obligatorio y, su propósito según el plan de estudios para el bachillerato tecnológico considera "que el estudiante analice e interprete las relaciones entre dos variables de problemas de tipo social o natural, y los resuelva aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo" (Matemáticas 2009, p. 15).

Para este curso, en el CBTIS 206 el *Proyecto: Para elaborar el libro de texto de la asignatura de matemáticas para el sexto semestre: Matemáticas Aplicada (Cálculo Integral)* fungió como libro de texto para los estudiantes del sexto semestre con especialidad en administración (6 K) en el ciclo escolar febrero-agosto 2012.

La parte del Teorema Fundamental del Cálculo definida en este libro y a la que nos referimos al mencionar este teorema es la siguiente. Si la función $f(x)$ tiene una gráfica sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ entonces $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$, donde $G(x)$ es cualquier antiderivada de $f(x)$ sobre $[a, b]$.

En este capítulo mostramos los análisis realizados para determinar en las actividadespresentes en este libro y para determinar la correspondencia entre las prácticas profesionales del docente con los aspectos que señala la reforma sobre su papel en un proceso de enseñanza.

3.1 Análisis del libro de texto

El libro de texto se divide en tres unidades: en la primera unidad se aborda la integral definida, en ella aparecen fundamentalmentesituaciones problema de cálculo de áreas, aproximaciones al área comprendida entre la gráfica de una función y el eje x en un intervalo [a, b] y, la aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo para calcular esta área.

En la segunda unidad, Integral indefinida, se abordan las técnicas de integración: el método de sustitución, el método de integración por partes, el método para integrar funciones racionales, el método para resolver integrales trigonométricas y el método para resolver integrales a través de sustitución trigonométrica. Por último, en la tercera unidad se establecen conexiones entre el cálculo integral y algunas ciencias, entre ellas Física, Geometría y Economía a través del planteamiento de problemas.

Como primera etapa del análisis del libro determinamos el grado de promoción de las competencias disciplinares en el área de Matemáticas utilizando el modelo presente en Rubio (2012). Para ello, se realizó la identificación de las prácticas matemáticas, objetos matemáticos y los procesos matemáticos intervinientes en cada situación problema presente en cada unidad. Esta identificación la mostramos en el anexo A.

Después de la identificación de prácticas matemáticas, objetos matemáticos y procesos matemáticos, se decidió si las competencias disciplinares en Matemáticas presentes en la Reforma Integral de la Educación Media Superior son promovidas por las situaciones problema de cada unidad. Para determinar si la competencia está presente, y el nivel en el que lo hace, identificamos el descriptor relacionado a cada competencia que se interpreta de los elementos identificados (relación establecida en la tabla 2.9).

Es importante mencionar que aún que el análisis consiste en identificar si en las situaciones problema de cada unidad se promueven las competencias matemáticas estamos consientes que el desarrollo de estas competencias toma más tiempo, es decir, no es garantía resolver una situación problema en que se promueva tal competencia para que el estudiante la desarrolle.

La segunda etapa del análisis del libro consistió en su valoración como material educativo, para esta valoración hicimos uso de los criterios parciales de la idoneidad didáctica planteados en el EOS.

A continuación mostramos el análisis que se hizo de la unidad uno, primeramente presentamos un esquema de las situaciones problema que se abordan y después se declara cuál competencia es promovida por estas situaciones y el nivel en que lo hacen.

En cada una de las secciones que dividen la primera unidad se presentan una serie de ejercicios y ejemplos que concluyen en una actividad disciplinar. En la siguiente tabla se resumen las situaciones problema presentes.

Situaciones problema - Calcular la distancia recorrida, con velocidad constante, en un intervalo de tiempo determinado. - Realizar una aproximación de la distancia recorrida, con velocidad variable, en un intervalo de tiempo determinado.	Actividad disciplinar - Realizar una aproximación de la cantidad de latas recicladas en un intervalo de tiempo determinado.
Situaciones problema - Explicar el significado de área de una figura geométrica y calcularla. - Argumentar las fórmulas para el cálculo de áreas de figuras geométricas: rectángulo, triángulo, trapecio.	Actividad disciplinar - Realizar una representación a escala de una casa y una cancha de basquetbol. - Calcular su área.
Situaciones problema - Calcular el área bajo la gráfica de la función (rectas).	Actividad disciplinar - Realizar una aproximación de la

- Realizar una aproximación del área bajo la gráfica de la función en un intervalo determinado.	cantidad de latas recicladas en un intervalo de tiempo determinado y de la distancia recorrida por un barco en un intervalo de tiempo determinado, usa computadora.
Situaciones problema - Utilizar la notación sigma para escribir sumas. - Calcular las sumatorias.	Actividad disciplinar - Utilizar la notación sigma para escribir y calcular sumas.
Situaciones problema - Realizar una aproximación del área bajo la gráfica de la función en un intervalo determinado. - Calcular el área bajo la gráfica de la función en un intervalo determinado.	Actividad disciplinar - Calcular la distancia recorrida por un barco en un intervalo de tiempo determinado.
Situaciones problema - Usar límites para determinar la fórmula para calcular el área bajo la gráfica de la función $f(x) = x^2 y f(x) = x^3$ en un intervalo determinado. - Calcular el área bajo la gráfica de las funciones $f(x) = x^2 y f(x) = x^3$ en diferentes intervalos. - Argumentar la fórmula para calcular el área bajo las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 y f(x) = x^3$ en un intervalo [a, b].	Actividad disciplinar - Calcular la cantidad de celulares vendidos en EUA en un intervalo de tiempo determinado.
Situaciones problema - Calcular el área bajo la gráfica de funciones (rectas) en un intervalo [0, t]. - Relacionar, mediante la derivada, a la integral de una función con la función *integrando.* - Calcular antiderivadas.	Actividad disciplinar - Calcular la cantidad de varones con edad entre los 60 y 65 años que viven en México en determinado intervalo de tiempo.
Situaciones problema	Actividad disciplinar

- Calcular el área bajo la gráfica de la función en un intervalo determinado. - Calcular el área entre las gráficas de funciones.	- Calcular la distancia recorrida por un barco en un intervalo de tiempo determinado. - Explicar y valorar los métodos para calcular el área bajo la gráfica de las funciones.

Tabla 3.1 Situaciones problema presentes en la unidad 1.

Enseguida, evaluaremos la participación que tienen las competencias disciplinares establecidas en la Reforma Integral de la Educación Media Superior en el libro. Para ello, usaremos el análisis realizado a las situaciones problema presentes en la unidad y nos fijaremos en la intervención de los descriptores de cada competencia.

- Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales

Para introducir el tema *la integral de una función* se aprovecha la familiaridad que tienen los estudiantes con el cálculo de áreas. Así, cuando el área es imposible de calcular con los métodos conocidos hasta el momento, se recurre a realizar aproximaciones. Se introducen las sumatorias para establecer la relación entre el límite de la sumatoria (la integral) y el área bajo la gráfica de una función en un intervalo [a, b]. Este tratamiento se realiza en los ejercicios y ejemplos por lo que decimos que promueve en el alumno el descriptor de "reconocer, recopilar, activar y aprovechar modelos familiares bien estructurados; pasar sucesivamente de los diferentes modelos (y sus resultados) a la realidad y viceversa para lograr una interpretación; comunicar de manera elemental los resultados del modelo"; el descriptor nos indica que la promoción de esta competencia con estas situaciones problema corresponde al nivel de reproducción.

Por otro lado, las situaciones problema presentes en las actividades disciplinares no las podemos incluir en el grupo de reproducción ya que cuentan con pequeñas variantes que las hacen más complejas, el contexto en el que se desarrollan es distinto y por ello se deben establecer otras relaciones antes del usar la integral definida para resolverla. En estas situaciones encontramos que se promueve el descriptor "estructurar el campo o situación del que hay que realizar el modelo; traducir la «realidad» a estructuras matemáticas en contextos que no son demasiado complejos pero que son diferentes a los que están acostumbrados los estudiantes. Comporta también saber interpretar alternando los modelos (y de sus resultados) y la realidad), y sabiendo también comunicar los resultados del modelo", el descriptor nos indica que la promoción de esta competencia con estas situaciones problema corresponde al nivel de conexión.

Por todo lo mencionado anteriormente, decimos que las situaciones problema presentes en la unidad uno sí promueven esta competencia en el nivel de reproducción y, aún más, lo hacen en el nivel de conexión.

- Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques

En la unidad uno la principal relación que se establece es la existente entre el área comprendida entre la gráfica de una función y el eje x en un intervalo [a, b] y la integral definida, por lo que se pide al estudiante en repetidas ocasiones resolver este tipo de situaciones problema; por eso decimos que el descriptor que nos indica que la promoción de esta competencia al nivel de reproducción “exponer y formular problemas reconociendo y reproduciendo problemas ya practicados puros y aplicados de manera cerrada; resolver problemas utilizando enfoques y procedimientos estándar, normalmente de una única manera” es promovido.

Además de este descriptor aseguramos existen otros que nos indican que la promoción de esta competencia con las situaciones problema es al nivel de conexión. En las situaciones problema abordadas en las actividades disciplinares encontramos el descriptor “plantear y formular problemas más allá de la reproducción de los problemas ya practicados de forma cerrada; resolver tales problemas mediante la utilización de procedimientos y aplicaciones estándar pero también de procedimientos de resolución de problemas más independientes que implican establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas y distintas formas de representación y comunicación (esquemas, tablas, gráficos, palabras e ilustraciones)”. El indicador para afirmar que se encontró este descriptor es el análisis realizado a los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la resolución de las situaciones problema, por ejemplo, el alumno aproxima la distancia recorrida por un barco en un intervalo de tiempo utilizando el método de exhaución a lápiz y papel o en otra ocasión usando computadora, también calcula esta distancia determinando el límite de la sumatoria y en otro momento lo calcula aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo.

De lo anteriormente mencionado concluimos que esta competencia sí se promueve en la unidad uno en el nivel de reproducción y, además, en el nivel de conexión.

- Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales

Además de promoverse esta competencia en el nivel de reproducción, aseguramos se promueve en el nivel de conexión. Encontramos que en las situaciones problema se promueve el descriptor “comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas que engloban desde cómo reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares o cómo explicar los cálculos y sus resultados (normalmente de más de una manera) hasta explicar asuntos que implican relaciones. También comporta entender las afirmaciones orales o escritas de terceros sobre este tipo de asuntos”; el indicador para afirmar que se encontró este descriptor es el análisis de procesos matemáticos, pues en las situaciones problema presentes en la unidad uno se encontraron varios procesos de enunciación, argumentación y comunicación.

- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático

Decimos que esta competencia sí se promueve en la unidad uno en el nivel de reproducción y, además, lo hace en el nivel de conexión. A parte de pedir al estudiante se comprueben los resultados de integrales derivándolos y comparándolos con la función *integrando* o usen el programa graph para comprobar el área bajo la grafica de una función en determinado intervalo (nivel de reproducción), encontramos que en las situaciones problema se promueve el descriptor "razonar matemáticamente de manera simple sin distinguir entre pruebas y formas más amplias de argumentación y razonamiento; seguir y evaluar el encadenamiento de los argumentos matemáticos de diferentes tipos; tener sentido de la heurística (p. ej., « ¿qué puede o no puede pasar y por qué?», « ¿qué sabemos y qué queremos obtener?»)"; el indicador para afirmar que se encontró este descriptor es el análisis realizado a los argumentos (objetos matemáticos) involucrados en la resolución de las situaciones; a los estudiantes se les pide expliquen por qué la fórmula del rectángulo es $A=bh$, de manera similar para el paralelogramo, el triángulo y el trapecio, también se pide explique por qué si a y b son dos números cualesquiera positivos y $a<b$, el área bajo la curva $f(x)=x^3$ de $x=a$ hasta $x=b$ está determinada por la fórmula $\int_a^b x^3dx=\frac{1}{4}b^4-\frac{1}{4}a^4$; sin ser estas explicaciones rigurosas o formales.

- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento

Decimos que esta competencia sí se promueve en la unidad uno en el nivel de reproducción y, además, en el nivel de conexión. En las situaciones problema presentes en las actividades disciplinares encontramos el descriptor "formular preguntas (¿cómo hallamos...?, ¿qué tratamiento matemático damos...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (plasmadas mediante tablas, gráficos, álgebra, cifras, etc.); distinguir entre definiciones y afirmaciones y entre distintos tipos de éstas", el descriptor nos indica que la promoción de esta competencia con estas situaciones problema corresponde al nivel de conexión. El indicador para afirmar que se encontró este descriptor es el análisis de los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en las situaciones problema, con base en dicho análisis mencionamos algunos procedimientos: el Teorema Fundamental del Cálculo se requiere para calcular la distancia recorrida por un barco en un intervalo de tiempo determinado, calcular la cantidad de celulares vendidos en Estados Unidos en un intervalo de tiempo determinado; el cual es practicado frecuentemente por los estudiantes pero en esta caso el contexto en el que se hace es distinto.

- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea

Decimos que esta competencia sí se promueve en la unidad uno pero sólo se hace en el nivel de reproducción. En el análisis realizado a los elementos lingüísticos (objetos matemáticos) involucrados en la resolución de las situaciones problema aparece el uso de varios elementos: gráfico, numérico, algebraico, natural; sin embargo, éstos son propuestos en las situaciones, es decir, no es el alumno el que recurre a ellos para resolver el problema. Por eso decimos que en las situaciones problema encontramos el descriptor "descodificar, codificar e interpretar representaciones de objetos matemáticos previamente conocidos de un modo estándar que ya ha sido practicado. El paso de una representación a otra sólo se exige cuando ese paso mismo es una parte establecida de la representación"; descriptor que caracteriza a las situaciones problema en el nivel de reproducción.

- Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia

En las situaciones problema presentes en las actividades disciplinares se promueve el descriptor "emplear conceptos matemáticos en contextos que difieren ligeramente de aquellos en los que se introdujeron por primera vez o en los que se han practicado después", el descriptor nos indica que la promoción de esta competencia con estas situaciones problema corresponde al nivel de conexión. El indicador para afirmar que se encontró este descriptor es que los conceptos-definiciones que se usan para resolver los problemas del cálculo del área comprendida en la gráfica de una función y el eje x en un intervalo [a, b] como: la integral definida, el Teorema Fundamental del Cálculo y la antiderivada de una función intervienen en la resolución de algunas actividades disciplinares.

Por lo anterior decimos que esta competencia sí se promueve en la unidad uno en el nivel de reproducción y, además, en el nivel de conexión.

- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos

Decimos que esta competencia sí se promueve en la unidad uno y, además del nivel de reproducción, se promueve en el nivel de conexión. En las situaciones problema presentes en las actividades disciplinares encontramos el descriptor "descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico básico en situaciones y contextos menos conocidos y manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos familiares"; el indicador que usamos para afirmar que se encontró este descriptor es el análisis de conceptos y procedimientos (objetos matemáticos) utilizados en la resolución de las situaciones, en las actividades disciplinares se encuentran situaciones en contexto poco familiar para los estudiantes interviniendo en ellas diferentes elementos lingüísticos.

Es importante señalar que el nivel de conexión en las competencias se alcanza por las actividades disciplinares, los ejercicios y ejemplos presentes en la unidad se dedican a reproducir la técnica con la que el autor resuelve las situaciones problema. En cambio, en las situaciones problema presentes en las actividades disciplinares el contexto es distinto, lo que permite al estudiante establecer relaciones entre la integral definida y otras ciencias.

A continuación mostramos el análisis que se hizo de la unidad dos. Primeramente presentamos un esquema de las situaciones problema que se abordan y después se declara cuál competencia es promovida por estas situaciones y el nivel en que lo hacen.

En cada una de las secciones que dividen la segunda unidad se presentan una serie de ejercicios y ejemplos que concluyen en una actividad disciplinar, en la siguiente tabla se resumen las situaciones problema presentes.

Situaciones problema	Actividad disciplinar
- Calcular antiderivadas y generalizar el resultado para funciones del mismo tipo - Calcular integrales indefinidas y comprobar el resultado usando la derivada - Calcular la función primitiva que pasa por un punto p determinado - Calcular el intervalo de tiempo en el que la piedra sube, la velocidad con la que choca con el suelo y el tiempo en que lo hace sabiendo que fue lanzada con una velocidad v_0 y a una altura y_0 determinados	- Calcular la velocidad con la que cae una piedra y la altura del edificio de la que se dejo caer sabiendo que se lanzó de lo más alto del edificio y tardó un tiempo t_0 en chocar el suelo - Calcular el área comprendida entre dos parábolas y el eje x que se debe adornar con mosaico en una iglesia
Situaciones problema	**Actividad disciplinar**
- Resolver integrales indefinidas usando los métodos: sustitución, por partes, fracciones parciales, trigonométricas, sustitución trigonométrica	- Resolver integrales indefinidas usando los métodos: sustitución, por partes y fracciones parciales

Tabla 3.2 Situaciones problema presentes en la unidad 2.

Enseguida, evaluaremos la participación que tienen las competencias disciplinares establecidas en la Reforma Integral de la Educación Media Superior en el libro. Para ello, usaremos el análisis realizado a las situaciones problema presentes en la unidad dos y nos fijaremos en la intervención de los descriptores de cada competencia.

- Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales

Decimos que esta competencia sí se promueve en la unidad dos pero sólo se hace en el nivel de reproducción. En las situaciones problema se promueve el descriptor “reconocer, recopilar, activar y aprovechar modelos familiares bien estructurados; pasar sucesivamente de los diferentes modelos (y sus resultados) a la realidad y viceversa para lograr una interpretación; comunicar de manera elemental los resultados del modelo”. El indicador para afirmar que se encontró este descriptor es el análisis realizado a las situaciones problema (objetos matemáticos), en estas situaciones la tarea para el alumno consiste en ejercitar las técnicas o métodos que en ejemplos anteriores se han abordado, por ejemplo se resuelven integrales indefinidas utilizando distintos métodos dejando al estudiante la resolución de una lista de integrales.

- Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques

Decimos que esta competencia sí se promueve en la unidad dos pero sólo se hace en el nivel de reproducción. En el análisis de procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la resolución de las situaciones problema presentes en esta unidad, encontramos que los estudiantes se encargan solamente de reproducir estrategias de solución por lo que decimos que el descriptor encontrado en estas situaciones es "exponer y formular problemas reconociendo y reproduciendo problemas ya practicados puros y aplicados de manera cerrada; resolver problemas utilizando enfoques y procedimientos estándar, normalmente de una única manera"; descriptor que caracteriza a las situaciones problema en el nivel de reproducción.

- Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales

Decimos que esta competencia sí se promueve en la unidad dos pero sólo se hace en el nivel de reproducción. Encontramos que en las situaciones problema se promueve el descriptor "comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera"; el indicador para afirmar que se encontró este descriptor es el análisis de procesos matemáticos involucrados en la resolución de las situaciones problema, en estas situaciones se encontraron varios procesos de argumentación y comunicación pero los argumentos que se solicitan son el uso del objeto matemático la derivada de una función para verificar resultados.

- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático

Decimos que esta competencia sí se promueve en la unidad dos pero sólo se hace en el nivel de reproducción; encontramos que en las situaciones problema se promueve el descriptor "seguir y justificar los procesos cuantitativos estándar, entre ellos los procesos de cálculo, los enunciados y los resultados"; el indicador par afirmar que se encontró este descriptor es el análisis realizado a los argumentos (objetos matemáticos) involucrados en la resolución de las situaciones problema, por ejemplo a los estudiantes se les pide validar la resolución de integrales indefinidas utilizando la derivada.

- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento

Decimos que esta competencia sí se promueve en la unidad dos pero sólo se hace en el nivel de reproducción; en las situaciones problema encontramos el descriptor "formular las preguntas más simples (¿cuántos...?, ¿cuánto es...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (tantos, tanto)"; el indicador para afirmar que se encontró este descriptor es el análisis de los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de las situaciones problema, la tarea de los estudiantes consiste en ejercitar las técnicas o métodos que en ejemplos anteriores se han abordado.

- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea

Decimos que esta competencia sí se promueve en la unidad uno pero sólo se hace en el nivel de reproducción. En el análisis realizado a los elementos lingüísticos (objetos matemáticos) involucrados en la resolución de las situaciones problema aparece el uso de varios elementos: gráfico, algebraico, natural; sin embargo, éstos son propuestos en las situaciones, es decir, no es el alumno el que recurre a ellos para resolver el problema. Por eso decimos que en las situaciones problema encontramos el descriptor “descodificar, codificar e interpretar representaciones de objetos matemáticos previamente conocidos de un modo estándar que ya ha sido practicado”; el cual caracteriza a las situaciones problema en el nivel de reproducción.

- Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia

Decimos que esta competencia sí se promueve en la unidad dos pero sólo se hace en el nivel de reproducción; en las situaciones problema encontramos el descriptor “comprender y emplear conceptos matemáticos en el mismo contexto en el que se introdujeron por primera vez o en el que se han practicado subsiguientemente”; el indicador para afirmar que se encontró este descriptor es el análisis de los conceptos-definiciones (objetos matemáticos) involucrados en la solución de las situaciones problema, la tarea de los estudiantes consiste en ejercitar las técnicas o métodos que en ejemplos anteriores se han abordado.

- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos

Decimos que esta competencia sí se promueve en la unidad dos pero sólo se hace en el nivel de reproducción. En las situaciones problema encontramos el descriptor “descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario que ya se ha practicado en situaciones y contextos sobradamente conocidos; manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos rutinarios”; el indicador que usamos para afirmar que se encontró este descriptor es el análisis de los procedimientos (objetos matemáticos) utilizados en la resolución de las situaciones; el estudiante tiene la tarea de ejercitar las técnicas abordadas anteriormente.

A continuación mostramos el análisis que se hace de la unidad tres, primeramente presentamos un esquema de las situaciones problema que se aborda y, después, se declara cuál competencia es promovida por estas situaciones y el nivel en que lo hacen.

En cada una de las secciones que dividen la tercera unidad se presentan una serie de ejercicios y ejemplos que concluyen en una actividad disciplinar, en la siguiente tabla se resumen las situaciones problema presentes.

Situaciones problema - Calcular el volumen que se genera al rotar alrededor del eje x el área bajo las funciones: $F(x) = c$, $f(x) = \frac{1}{2}x, f(x) = x^2$	Actividad disciplinar - Calcular el volumen del cazo que se genera al rotar alrededor del eje x el área bajo la función $f(x) = \frac{1}{2} + x$ en el intervalo [0, 1] y, calcular la cantidad de material que re requiere para construir el yoyo que se genera al rotar la gráfica de la función $f(x) = 3 - 2x^2$ en el intervalo $\left[-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$
Situaciones problema - Calcular la fuerza y el trabajo realizado en el caso que la aceleración es constante - Calcular el trabajo que se requiere para lograr un estiramiento de un resorte - Calcular el trabajo que se requiere para bombear aceite en un tambo cilíndrico - Calcular la distancia que recorre un ciclista a determinada velocidad	Actividad disciplinar - Calcular la distancia en la que se abre un paracaídas y la velocidad en que lo hace - Calcular el trabajo requerido para bombear pintura de una cubeta cilíndrica
Situaciones problema - Calcular el gasto en mantenimiento de una empresa - Calcular el ingreso de una colecta - Calcular el número de habitantes de un poblado - Calcular el precio de la docena de huevos	Actividad disciplinar - Calcular la cantidad de leche que contienen los compartimientos de una cisterna

Tabla 3.3 Situaciones problema presentes en la unidad 3.

Enseguida, evaluaremos la participación que tienen las competencias disciplinares establecidas en la Reforma Integral de la Educación Media Superior en el libro. Para ello, usaremos el análisis realizado a las situaciones problema presentes en la unidad tres y nos fijaremos en la intervención de los descriptores de cada competencia.

- Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales

Decimos que esta competencia sí se promueve en la unidad tres y, además del nivel de reproducción, se hace en el nivel de conexión. En las situaciones problema se promueve el descriptor "estructurar el campo o situación del que hay que realizar el modelo; traducir la «realidad» a estructuras matemáticas en contextos que no son demasiado complejos pero que son diferentes a los que están acostumbrados los estudiantes. Comporta también saber interpretar alternando los modelos (y de sus resultados) y la realidad, y sabiendo también comunicar los resultados del modelo". El indicador para afirmar que se encontró este descriptor es el análisis realizado a las situaciones problema (objetos matemáticos), en estas situaciones se utiliza *la integral definida*para abordan aspectos de física, geometría y economía, por ejemplo calcular: el volumen de un sólido, la distancia recorrida, el gasto de una empresa.

- Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques

Además de promoverse esta competencia en el nivel de reproducción, decimos que esta competencia se promueve en la unidad tres en el nivel de conexión; en las situaciones problema encontramos el descriptor "plantear y formular problemas más allá de la reproducción de los problemas ya practicados de forma cerrada; resolver tales problemas mediante la utilización de procedimientos y aplicaciones estándar pero también de procedimientos de resolución de problemas más independientes que implican establecer conexiones entre y distintas áreas matemáticas distintas formas de representación y comunicación (esquemas, tablas, gráficos, palabras e ilustraciones)". El indicador para afirmar que se encontró este descriptor es el análisis realizado a los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la resolución de las situaciones problema. Por ejemplo, en la sub-sección *Aplicación de la integral en geometría* se le presentan al estudiante situaciones para calcular el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar sobre el eje x la región bajo la curva *f(x)* en un intervalo [a, b] y después se concluye "para una función *f(x)* continua en [a, b], el volumen del sólido de revolución generado al rotar el parea bajo la gráfica de *f(x)* alrededor del eje *x*, se obtiene resolviendo la siguiente integral: $V = \int_a^b \pi[f(x)]^2$dx"; en la actividad disciplinar de esa sección se pide al estudiante hallar el volumen que se genera al rotar la gráfica de la función $f(x) = 3 - 2x^2$ alrededor del eje x en $\left[-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$. La ranura donde estará la cuerda del yoyo es de ½ centímetro de ancho y el eje donde se enredará es de dos centímetros de diámetro. Claramente esta situación problema requiere consideraciones para su solución no sólo la aplicación de la integral.

- Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales

Decimos que esta competencia sí se promueve en la unidad tres y, además del nivel de reproducción, se promueven en el nivel de conexión. Encontramos que en las situaciones problema se promueve el descriptor "comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas que engloban desde cómo reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares o cómo explicar los cálculos y sus resultados (normalmente de más de una manera) hasta explicar asuntos que implican relaciones. También comporta entender las afirmaciones orales o escritas de terceros sobre este tipo de asuntos"; el indicador para afirmar que se encontró este descriptor es el análisis de procesos matemáticos, en las situaciones problema presentes en la unidad tres se encontraron varios procesos de enunciación, argumentación y comunicación.

- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático

Decimos que esta competencia sí se promueve en la unidad tres y, además del nivel de reproducción, se promueve en el nivel de conexión; aparte de pedir al estudiante se comprueben los resultados comparándolos con fórmulas estudiadas en un curso de geometría (nivel de reproducción), encontramos que en las situaciones problema se promueve el descriptor "razonar matemáticamente de manera simple sin distinguir entre pruebas y formas más amplias de argumentación y razonamiento; seguir y evaluar el encadenamiento de los argumentos matemáticos de diferentes tipos; tener sentido de la heurística (p. ej., « ¿qué puede o no puede pasar y por qué?», « ¿qué sabemos y qué queremos obtener?»)"; el indicador para afirmar que se encontró este descriptor es el análisis realizado a los argumentos (objetos matemáticos) involucrados en la resolución de las situaciones; por ejemplo, a los estudiantes se les pide expliquen porque en el cilindro generado por la rotación sobre el eje x de la función f(x)=c el radio de la base es c y su altura *b-a*, sin ser estas explicaciones rigurosas o formales.

- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento

Decimos que esta competencia sí se promueve en la unidad tres y, además, se promueve en el nivel de conexión, en las situaciones problema encontramos el descriptor "formular preguntas (« ¿cómo hallamos...? », « ¿qué tratamiento matemático damos...?») y comprender los consiguientes tipos de respuesta (plasmadas mediante tablas, gráficos, álgebra, cifras, etc.); distinguir entre definiciones y afirmaciones y entre distintos tipos de éstas"; el indicador para afirmar que se encontró este descriptor es el análisis de las situaciones problema (objetos matemáticos), aunque en las actividades disciplinares la temática sea similar a los ejemplos o ejercicios anteriores para resolverlas se necesitan procedimientos distintos.

- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea

Decimos que esta competencia sí se promueve en la unidad tres pero sólo se hace en el nivel de reproducción. En el análisis realizado a los elementos lingüísticos (objetos matemáticos) involucrados en la resolución de las situaciones problema aparece el uso de varios elementos: gráfico, algebraico, natural; sin embargo, éstos son propuestos en las situaciones, es decir, no es el alumno el que recurre a ellos para resolver el problema. Por eso decimos que en las situaciones problema encontramos el descriptor “descodificar, codificar e interpretar representaciones de objetos matemáticos previamente conocidos de un modo estándar que ya ha sido practicado. El paso de una representación a otra sólo se exige cuando ese paso mismo es una parte establecida de la representación”; el cual caracteriza a las situaciones problema en el nivel de reproducción.

- Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia

Decimos que esta competencia sí se promueve en la unidad tres y, además del nivel de reproducción, se promueve en el nivel de conexión, en las situaciones problema encontramos el descriptor “comprender y emplear conceptos matemáticos en contextos que difieren ligeramente de aquellos en los que se introdujeron por primera vez o en los que se han practicado después”; el indicador para afirmar que se encontró este descriptor es el análisis de las situaciones problema (objetos matemáticos), aunque en las actividades disciplinares la temática sea similar a los ejemplos o ejercicios anteriores para resolverlas se necesitan procedimientos distintos.

- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos

Decimos que esta competencia sí se promueve en la unidad tres y, además del nivel de reproducción, se promueve en el nivel de conexión. En las situaciones problema encontramos el descriptor “descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico básico en situaciones y contextos menos conocidos y manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos familiares”; el indicador que usamos para afirmar que se encontró este descriptor es el análisis de conceptos y procedimientos (objetos matemáticos) utilizados en la resolución de las situaciones, las situaciones problema son en contexto poco familiar para los estudiantes interviniendo en ellas diferentes elementos lingüísticos.

En la siguiente tabla mostramos un resumen del nivel en que se promueven las competencias disciplinares en el área de Matemáticas en cada unidad del libro de texto. En caso de que cierta competencia esté presente indicaremos el nivel en que lo hace de la siguiente manera: nivel de reproducción=1, nivel de conexión=2 y nivel de reflexión=3.

Competencias	Unidad 1	Unidad 2	Unidad 3
C1	2	1	2
C2	2	1	2
C3	2	1	2

C4	2	1	2
C5	2	1	2
C6	1	1	1
C7	2	1	2
C8	2	1	2

Tabla 3.4 Competencias matemáticas promovidas en cada unidad del libro.

Idoneidad didáctica

Para realizar la valoración de la idoneidad didáctica, en el EOS se introduce seis criterios parciales de idoneidad atendiendo a las siguientes dimensiones que caracterizan y condicionan los procesos de enseñanza y de aprendizaje: epistémica, cognitiva, mediacional, emocional, interaccional y ecológica.

En esta sección donde sólo se hace referencia al libro valoramos la idoneidad epistémica y cognitiva dejando los demás criterios parciales para la sección en la que analice las actividades en el aula.

3.1.1 Idoneidad epistémica

Este criterio se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia. Como componentes de esta idoneidad se encuentran los seis objetos matemáticos primarios: situaciones-problemas, elementos lingüísticos, conceptos-definiciones, proposiciones, procedimientos, argumentos.

Relacionado con las situaciones-problemas tenemos dos descriptores y los abordamos a continuación.

1.- ¿Son las situaciones una muestra representativa y articulada que permiten la contextualización y ejercitación de los conocimientos que se pretende construir y su aplicación a situaciones relacionadas?

En el programa de estudios para el bachillerato tecnológico, Matemáticas (2009), se muestra la estructura de contenidos conceptuales para cada curso de Matemáticas que ofrecen en los seis semestres. En nuestro caso, el curso de interés es Matemáticas Aplicadas y los objetos matemáticos que se solicitan abordar se representan en la siguiente figura.

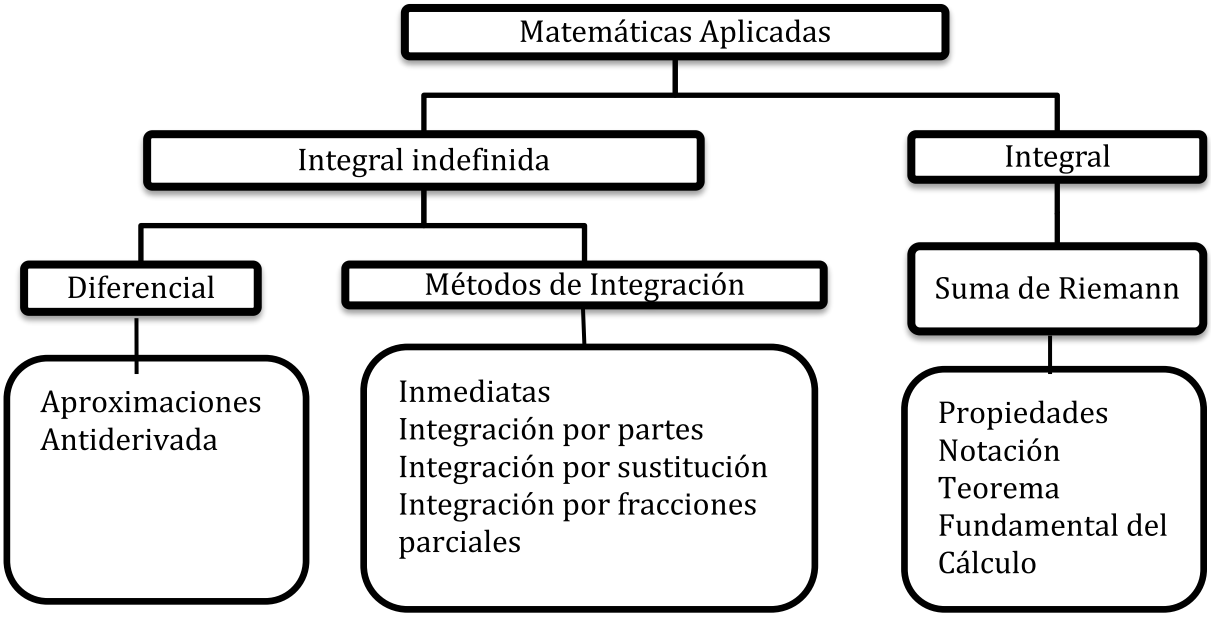


Figura 2. Contenido conceptual del curso de Matemáticas Aplicadas (Matemáticas 2009, p. 29)

Además, las aplicaciones que presenta el programa de estudio son: formulación de modelos, áreas bajo la curva, volúmenes de sólidos en revolución, longitud de curva, superficies de sólidos en revolución, trabajo, presión, centros de gravedad, entre otras; la mayoría de estas aplicaciones se abordan en el libro. En el libro de texto se pretende establecer relaciones entre la integral definida y otras Ciencias como: Física, Geometría, Economía al presentar situaciones problema que se resuelvan utilizando la integral definida e involucren conceptos propios de cada ciencia (área, volumen de sólidos de revolución, trabajo, distancia, gastos, ingresos).

De lo anterior concluimos que las situaciones problema presentes en el libro de texto son una muestra representativa que permite la contextualización. Con relación a la ejercitación de los conocimientos que se desean construir, consideramos que los métodos de integración y la relación entre la integral definida y el área comprendida entre la gráfica de una función y el eje *x* en un intervalo *[a, b]* son los conceptos que tienen más importancia ya que se les dedica una unidad completa a cada objeto matemático. Sin embargo, las situaciones problema en las que se abordan la mayoría de las aplicaciones presentes en el programa de estudios están presentes en la tercera unidad y consideramos que es poca su ejercitación, por ejemplo, para abordar las aplicaciones de la integral en la Física sólo se plantean 9 situaciones problema donde se incluyen las que abordan los conceptos de trabajo y distancia.

Debido a la ubicación que tienen en el libro las situaciones problema donde se aborda la mayoría de las aplicaciones de la integral definida y la poca participación que tienen, no consideramos que los estudiantes puedan aplicar la integral definida en la solución de situaciones problema reales o formales a menos que sea para solucionar situaciones similares a las abordadas en las unidades 1 y 2.

2.- ¿Se proponen situaciones donde los estudiantes tengan la oportunidad de plantear problemas, reformularlos y/o de problematizarse?

Consideramos que las situaciones problemas presentes en el libro sí son familiares para los estudiantes y, además, les proporcionan la oportunidad de problematizarse ya que para introducir la integral definida se toma un problema conocido para ellos, el cálculo de áreas, transformándolo en el cálculo del área comprendida entre la gráfica de una función *f(x)* y el eje *x* en un intervalo *[a, b].* Problematizando de esta manera al estudiante y dándole conciencia de que las herramientas conocidas hasta el momento no son suficientes para resolver esta tipo de problemas.

Un significado de la integral de una función promovido en el libro, aprovechando el estudio de derivadas en un curso anterior al de Matemáticas aplicadas, es el de una antiderivada; de esta manera se estudia el Teorema Fundamental del Cálculo y su uso en la resolución de problemas de cálculo de áreas. Además del significado que se le da a la integral definida en el cálculo de áreas, en el libro se promueven otros que se relacionan con conceptos de Física, Geometría y Economía; sin embargo las situaciones que promueven estos significados son pocas y, debido a ello, consideramos que no proporcionan a los estudiantes la oportunidad de plantear situaciones problemas o reformularlas a menos que sean similares a las abordadas en las unidades 1.

Relacionado con los elementos lingüísticos tenemos tres descriptores y los abordamos a continuación.

1.- ¿Se hace uso de diferentes formas de lenguaje (verbal, gráfico, analítico, numérico) y se establecen traducciones y conversiones entre las mismas?

En el análisis de los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en las situaciones problema presentes en el libro de texto ubicamos el uso de los lenguajes: natural, algebraico, gráfico y numérico, en las tres unidades que dividen al libro de texto; por ello concluimos que las situaciones problema promueven el uso de diferentes formas de lenguaje. La redacción de las situaciones problemas normalmente se presenta en los lenguajes natural y algebraico, el uso del lenguaje algebraico y el gráfico son usados en la representación de figuras geométricas, funciones, sumatorias y gráfica de funciones y, el lenguaje numérico es usado para la presentación de datos y para dar un valor numérico como respuesta a las situaciones problema.

El uso de diferentes lenguajes en la solución de la situación problema está planteado como un método, por ejemplo: en el caso del cálculo del área comprendida entre la gráfica de una función y el eje *x* en un intervalo *[a, b]*, se grafica la función, se identifica el área a calcular y luego se utiliza el Teorema Fundamental del Cálculo para encontrar el valor numérico. Además, en el uso de diferentes lenguajes no se destacan los beneficios y las limitantes de cada lenguaje.

Por lo mencionado anteriormente consideramos que las conversiones entre los lenguaje no son promovidas en las situaciones problema.

El uso de diferentes formas de lenguaje es un aspecto importante para el modelo educativo basado en competencias, pues este aspecto aparece en la lista de competencias deseables en el estudiante de bachillerato; es decir, dentro del perfil de egresado del bachillerato encontramos la competencia: interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

2.- ¿El nivel del lenguaje es adecuado a quienes se dirige?

El libro de texto es un material de apoyo para estudiantes del sexto semestre de bachillerato, quienes en el cuarto semestre cursaron la materia de cálculo donde estudiaron: pre-cálculo, funciones, límites y derivadas, objetos matemáticos utilizados en las situaciones problemas que se les presenta en el estudio de la integral y, además, los lenguajes que se utilizan en estas situaciones también son abordados en cursos anteriores; por lo que consideramos que el lenguaje utilizado es adecuando para estos estudiantes.

3.- ¿Se proponen situaciones de expresión e interpretación en las actividades didácticas?

Consideramos que se promueve la expresión e interpretación por parte de los estudiantes, ya que para resolver los problemas se pide que se discuta en equipo. Además, cada situación problema se presentan preguntas guía que intentan que el estudiante compare, explique y relacione resultados.

El hecho de que en el estudiante se promueva la expresión e interpretación se considera dentro del modelo educativo basando en competencias como un aspecto importante, evidencia de ello se muestra en el perfil del egresado del bachillerato, que le alumno proponga explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales es una competencia matemática deseable.

Relacionado con los conceptos-definiciones, proposiciones y procedimientos tenemos tres descriptores y los abordamos a continuación.

1.- ¿Las definiciones, procedimientos y proposiciones están clara y correctamente enunciados, y adaptados al nivel educativo al que se dirigen?
2.-¿Se presentan las definiciones, procedimientos y proposiciones fundamentales del tema según el significado de referencia y el nivel educativo al que se dirigen?

Los conceptos-definiciones, proposiciones y procedimientos presentes en las situaciones problemas son conocidos por los estudiantes o abordados en estas lecciones, por esto consideramos que la presentación de estos objetos matemáticos primarios es adecuada para este nivel educativo.

Anteriormente se ha mencionado la buena adaptación que se hace en el libro de texto con relación a los significados que se desean promover y los requisitos presentes en el programa de estudios para el bachillerato, Matemáticos (2009), en relación al curso de Matemáticas Aplicadas. De esta manera, los problemas presentes en el libro son una representación adecuada de la línea marcada en el plan de estudio.

3. -¿Se proponen situaciones para la generación y negociación de los elementos regulativos (o sea las definiciones, proposiciones y los procedimientos)?

Las situaciones problema presentes en el libro están encaminadas a la construcción de definiciones, proposiciones y procedimientos tales como: la integral de una función, la integral definida, el Teorema Fundamental del Cálculo y métodos de integración a través de la resolución de problemas que tienen que ver con la enseñanza de la integral.

Relacionado con los argumentos tenemos dos descriptores y los abordamos a continuación.

1.- ¿Son adecuadas las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen?
2.-¿Se promueven momentos de validación?

Se promueve en los estudiantes la argumentación pues se les pide que expliquen sus respuestas, esperando que utilicen en sus argumentos relaciones encontradas o conocimientos previos. Además, la validación de resultados está siempre presente en las situaciones problema, por ejemplo se pide a los estudiantes verificar el resultado de una integral indefinida utilizando el programa Graph o derivando el resultado y comparándolo con la función integrando.

La argumentación por parte de los estudiantes es otro de los aspectos importantes dentro de la educación basada en competencias, que el estudiante sea capaz de argumentar la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático es una de las competencias dentro del perfil del egresado del bachillerato.

De los comentarios realizados en las cuestiones anteriores acerca de las componentes que intervienen en la idoneidad epistémica concluimos que entre los niveles: alto, medio alto, medio, medio bajo y bajo; esta idoneidad posee el nivel medio alto; los aspectos a considerar son: la ejercitación de algunas situaciones problema, las situaciones problema no proporciona la oportunidad de plantear situaciones problemas o reformularlas a menos que sean similares a las abordadas en las unidades 1, la conversión entre las diferentes formas de lenguaje no se promueve.

3.1.2 Idoneidad cognitiva

Este criterio se refiere al grado en que los significados pretendidos o implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los estudiantes, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos o implementados. Como componentes de esta idoneidad se encuentran: conocimientos previos, adaptaciones curriculares a las diferencias individuales y aprendizaje.

Relacionado con los conocimientos previos tenemos dos descriptores y los abordamos a continuación.

1.-¿Los estudiantes tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio?
2.-¿Los significados pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes?

Entre los objetos matemáticos intervinientes en la motivación para el estudio de la integral definida, refiriéndose al libro de texto, encontramos: área, función, límite, derivada; conceptos que han sido abordados por los estudiantes en cursos anteriores o al menos están presentes en el programa de estudios como parte del curso de Cálculo; a pesar de ello, al momento de utilizar la derivada de una función como herramienta para verificar el resultado de la integral indefinida los estudiantes presentan dificultades.

Por otro lado, el libro de texto contiene objetos matemáticos con los que los estudiantes no han tenido contacto en las aulas como: notación y cálculo de sumatorias, pero estos objetos son considerados para su estudio antes de involucrarlos con la integral definida.

Consideramos que no todos los significados respecto a la integral definida promovidos en el libro de texto se pueden alcanzar ya sea por la ubicación que tiene en el libro y/o el tratamiento. El significado de la integral definida como el área comprendida entre la gráfica de una función y el eje x en un intervalo $[a, b]$ donde la función es positiva es el más practicado, quedando rezagados el caso en que la función tenga parte negativa en el intervalo $[a, b]$ y el área comprendida entre las gráficas de dos o más funciones.

Además, para los significados de la integral definida como: el volumen de un sólido de revolución, el trabajo realizado, la distancia recorrida, el gasto y el ingreso; consideramos que es poco el tratamiento y su ubicación (unidad 3) no les permite ser abordados en clase.
Relacionado con las adaptaciones curriculares a las diferencias individuales tenemos un descriptor y lo abordamos a continuación.

1.- ¿Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo?

Las situaciones problema presentes en cada unidad tienen ideas similares y de esta manera se favorece la ejercitación y refuerzo de los significados por parte de los estudiantes. Las situaciones problema que consideramos permiten la ampliación de significados para la integral definida son las presentes en las actividades disciplinares (ubicadas al final de cada sub-sección) ya en algunos casos el contexto en el que se desarrollan es distinto al practicado en la unidad.

Relacionado con los aprendizajes tenemos un descriptor y lo abordamos a continuación

1.- ¿Los diversos modos de evaluación muestran la apropiación de los conocimientos o competencias pretendidos o implementados?

A pesar de que este descriptor queda fuera de nuestro análisis debido a que esta sección sólo comprende el análisis del libro, mencionamos un poco de la evaluación que se aplicó a los estudiantes para evaluar el desarrollo de competencias matemáticas. La evaluación indica un nivel de desarrollo de competencias disciplinares en el área de Matemáticas pobre, ya que,la mayoría de los estudiantes evaluados sólo desarrollan competencias matemáticas en el nivel de reproducción. Además, la evaluación revela que las situaciones problema que los estudiantes resuelven correctamente son las del cálculo del área comprendida entre la gráfica de una función y el eje *x* en un intervalo *[a, b]* donde la función es positiva.

De los comentarios realizados en las cuestiones anteriores acerca de las componentes que intervienen en la idoneidad cognitiva concluimos que entre los niveles: alto, medio alto, medio, medio bajo y bajo; esta idoneidad posee el nivel medio. Los aspectos a considerar son: la ubicación y tratamiento de la mayoría de los significados promovidos para la integral definida en el libro presentes en el programa de estudios, los conflictos semióticos mostrados por los estudiantes respecto a la derivada de una función.

Esta parte concluye en análisis del libro de texto y a continuación iniciamos el análisis de las clases donde se aborda el concepto de *integral de una función*. Para este análisis se solicitó el apoyo del CBTIS 206 para asistir a observar el desarrollo del curso de Matemáticas Aplicadas.

3.2 Análisis de las prácticas profesionales

El grupo seleccionado para realizar este análisis fue el sexto semestre con especialidad en administración del turno matutino, 6k, el único interés por este grupo es que el profesor encargado del curso utiliza el libro analizado anteriormente como guía principal durante las clases.

El número de horas a la semana dedicadas al curso de Matemáticas Aplicadas son cinco, el profesor las distribuye en cuatro horas para el estudio de los conceptos presentes en el libro de texto y una para el estudio de cuestiones que se abordan en las evaluaciones ENLACE, esto último debido a que la institución tiene interés en que sus estudiantes obtengan buena calificación en esta evaluación. Al acercarse la aplicación de la evaluación nacional, y hasta que ésta concluye, el profesor cambia la distribución de las horas del curso usándolas sólo para estudiar los tópicos de esta evaluación.

La dinámica de trabajo en clase consiste en solucionar las situaciones problema que plantea el libro en equipo y, después, algún equipo comparte los procedimientos y resultados con el resto del grupo al resolver la situación problema en el pizarrón. Cabe mencionar que la minoría del grupo es la que resuelve las situaciones problema y las comparte con el resto del grupo.

Con la dinámica seleccionada por el profesor para el desarrollo de las clases, podemos intuir que sí comprende, y además sigue, el papel que se solicita de él.La reforma solicita a los docentes desempeñen un papel distinto al que solía efectuar (dictando cátedra), ahora se les solicita convertirse en facilitadores en el proceso de estudio, ser una guía para sus estudiantes.

> “Los profesores deberán contar con los conocimientos, habilidades y actitudes que les permiten diseñar clases participativas, en las que se fomente el aprendizaje colaborativo, la resolución de problemas y el trabajo en torno a proyectos” (Reforma Integral de la Educación Media Superior 2008, p. 86).

En la siguiente tabla mostramos el perfil del docente de bachillerato que demanda la Reforma Integral de la Educación Media Superior.

Organiza su formación continua a lo largo de su trayectoria profesional.	Reflexiona e investiga sobre la enseñanza y sus propios procesos de construcción del conocimiento. Incorpora nuevos conocimientos y experiencias al acervo con el que cuenta y los traduce en estrategias de enseñanza y de aprendizaje. Se evalúa para mejorar su proceso de construcción del conocimiento y adquisición de competencias, y cuenta con una disposición favorable para la evaluación docente y de pares. Aprende de las experiencias de otros docentes y participa en la conformación y mejoramiento de su comunidad académica. Se mantiene actualizado en el uso de la tecnología de la información y la comunicación. Se actualiza en el uso de una segunda lengua
Domina y estructura los saberes para facilitar experiencias de aprendizaje significativo.	Argumenta la naturaleza, los métodos y la consistencia lógica de los saberes que imparte. Explicita la relación de distintos saberes disciplinares con su práctica docente y los procesos de aprendizaje de los estudiantes. Valora y explicita los vínculos entre los conocimientos previamente adquiridos por los estudiantes, los que se desarrollan en su curso y aquellos otros que conforman un plan de estudios.
Planifica los procesos de enseñanza y de aprendizaje	Identifica los conocimientos previos y necesidades de formación de los estudiantes, y desarrolla estrategias para avanzar a partir de ellas. Diseña planes de trabajo basados en proyectos e

atendiendo al enfoque por competencias, y los ubica en contextos disciplinares, curriculares, y sociales amplios	investigaciones disciplinarios e interdisciplinarios orientados al desarrollo de competencias. Diseña y utiliza en el salón de clases materiales apropiados para el desarrollo de competencias. Contextualiza los contenidos de un plan de estudios en la vida cotidiana de los estudiantes y la realidad social de la comunidad a la que pertenece.
Lleva a la práctica procesos de enseñanza y de aprendizaje de manera efectiva, creativa e innovadora a su contexto institucional.	Comunica ideas y conceptos con claridad en los diferentes ambientes de aprendizaje y ofrece ejemplos pertinentes a la vida de los estudiantes. Aplica estrategias de aprendizaje y soluciones creativas ante contingencias, teniendo en cuenta las características de su contexto institucional, y utilizando los recursos y materiales disponibles de manera adecuada. Promueve el desarrollo de los estudiantes mediante el aprendizaje, en el marco de sus aspiraciones, necesidades y posibilidades como individuos, y en relación a sus circunstancias socioculturales. Provee de bibliografía relevante y orienta a los estudiantes en la consulta de fuentes para la investigación. Utiliza la tecnología de la información y la comunicación con una ampliación didáctica y estratégica en distintos ambientes de aprendizaje.
Evalúa los procesos de enseñanza y de aprendizaje con un enfoque formativo	Establece criterios y métodos de evaluación del aprendizaje con base en el enfoque de competencias, y los comunica de manera clara a los estudiantes. Da seguimiento al proceso de aprendizaje y al desarrollo académico de los estudiantes. Comunica sus observaciones a los estudiantes de manera constructiva y consistente, y sugiere alternativas para su superación. Fomenta la autoevaluación y co-evaluación entre pares académicos y entre los estudiantes para afianzar los procesos de enseñanza y de aprendizaje.
Construye	Favorece entre los estudiantes el autoconocimiento y la

ambientes para el aprendizaje autónomo y colaborativo.	valoración de sí mismos. Favorece entre los estudiantes el deseo de aprender y les proporciona oportunidades y herramientas para avanzar en sus procesos de construcción del conocimiento. Promueve el pensamiento crítico, reflexivo y creativo, a partir de los contenidos educativos establecidos, situaciones de actualidad e inquietudes de los estudiantes. Motiva a los estudiantes en lo individual y en grupo, y produce expectativas de superación y desarrollo. Fomenta el gusto por la lectura y por la expresión oral, escrita ó artística. Propicia la utilización de la tecnología de la información y la comunicación por parte de los estudiantes para obtener, procesar e interpretar información, así como para expresar ideas.
Contribuye a la generación de un ambiente que facilite el desarrollo sano e integral de los estudiantes	Practica y promueve el respeto a la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales entre sus colegas y entre los estudiantes. Favorece el diálogo como mecanismo para la resolución de conflictos personales e interpersonales entre los estudiantes y, en su caso, los analiza para que reciban una atención adecuada. Estimula la participación de los estudiantes en la definición de normas de trabajo y convivencia, y las hace cumplir. Promueve el interés y la participación de los estudiantes con una conciencia cívica, ética y ecológica en la vida de su escuela, comunidad, región, México y el mundo. Alienta que los estudiantes expresen opiniones personales, en un marco de respeto, y las toma en cuenta. Contribuye a que la escuela reúna y preserve condiciones físicas e higiénicas satisfactorias. Fomenta estilos de vida saludables y opciones para el desarrollo humano, como el deporte, el arte y diversas actividades complementarias entre los estudiantes. Facilita la integración armónica de los estudiantes al entorno

	escolar y favorece el desarrollo de un sentido de pertenencia.
Participa en los proyectos de mejora continua de su escuela y apoya la gestión institucional.	Colabora en la construcción de un proyecto de formación integral dirigido a los estudiante en forma colegiada con otros docentes y los directivos de la escuela, así como con el personal de apoyo técnico pedagógico. Detecta y contribuye a la solución de los problemas de la escuela mediante el esfuerzo común con otros docentes, directivos y miembros de la comunidad. Promueve y colabora con su comunidad educativa en proyectos de participación social. Crea y participa en comunidades de aprendizaje para mejorar su práctica educativa.

Tabla 3.5 Perfil del docente. Secretaria de Educación Pública (2008).

Consideramos que el profesor encargado del grupo cumple con la mayoría de las demandas de la reforma, los aspectos que consideramos están presentes en una proporción menor los retomamos en la segunda parte de la valoración del proceso de estudio, esto es, en la valoración de las clases impartidas en el curso.

Para la valoración del libro de texto como material educativo se ha usado la idoneidad cognitiva y la idoneidad epistémica. Para el análisis de las clases impartidas en el curso, se hace una valoración del proceso de estudio; para ello, usamos los criterios parciales de idoneidad: interaccional, mediacional, emocional, y ecológica. A continuación mostramos este análisis.

3.2.1 Idoneidad interaccional

Este criterio se refiere al grado en que las interacciones en el aula permiten identificar y resolver los conflictos de significado y, además, favorecen el aprendizaje autónomo. Como componentes de esta idoneidad se encuentran: interacción docente-discente, interacciones entre discentes, autonomía y evaluación formativa.

Relacionado con las interacciones docente-discente tenemos cinco descriptores y los abordamos a continuación.

1. ¿El profesor hace una presentación adecuada del tema?

Debido a la dinámica que se sigue en clases (solucionar las situaciones problema en equipos y compartir resultados con el resto del grupo en el pizarrón) la participación que tiene el profesor encargado del curso es poca. Sin embargo, podemos afirmar que el profesor conoce el concepto de integral definida, la relación que tiene ésta con el área comprendida entre la gráfica de una función y el eje x en un intervalo $[a, b]$ (situaciones que motivan la introducción de la integral) y los elementos necesarios para la introducción de este concepto.

La explicación del tema es clara por parte del profesor y hace referencia a los elementos que intervienen en cada situación problema.

2. ¿Se reconocen y resuelven los conflictos de significado de los estudiantes (se interpretan correctamente los silencios de los estudiantes, sus expresiones faciales, sus preguntas, se hace un juego de preguntas y respuestas adecuado)?

3. ¿Se busca llegar a consensos con base en mejor argumento?

En algunas ocasiones los procedimientos y/o resultados presentados en el pizarrón por los estudiantes para la solución de alguna situación problema son incorrectos, el profesor promueve en los estudiantes la identificación de los errores y la resolución de la situación problema; si los estudiantes no son capaces de resolver la situación es el profesor el que la resuelve.

El profesor busca llegar a consensos con base en el mejor argumento, por ejemplo, se solicita al estudiante determinar la antiderivada de la función $f^{\prime}(x) = 4x$ y el profesor reúne las respuestas de los estudiantes para elegir la que es correcta derivándolas todas.

4. ¿Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los estudiantes?

5. ¿Se facilita la inclusión de los estudiantes en la dinámica de la clase y se evita la exclusión?

Anteriormente mencionamos que el trabajo en equipo es la dinámica que se sigue en la clase para solucionar las situaciones problema, lo cual consideramos positivo en el sentido de propiciar el diálogo entre estudiantes, la reflexión ante diferentes procedimientos encaminados a la solución de problemas, entre otros; lo que consideramos negativo de la dinámica seguida en clase es que siempre son los mismo estudiantes los que se agrupan y esto promueve el establecimiento de otro tipo de relaciones entre los estudiantes dejando la resolución de la situación problema en segundo plano. Además, los equipos que resuelven las situaciones problema en el pizarrón son siempre los mismos, de esta manera el profesor desatiende a los que no muestran interés en el tema o se quedan rezagados.

Por los comentarios anteriores afirmamos que no se facilita la inclusión de los estudiantes en la dinámica de la clase.
Relacionado con la interacción entre discentes tenemos dos descriptores y los abordamos a continuación.

1. ¿Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes?

2. ¿Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión?

La dinámica seguida en clase para resolver las situaciones problema consideramos favorece el diálogo entre los estudiantes y, por parte de los estudiantes, no se observaron actitudes de exclusión entre ellos.

Relacionado con la autonomía tenemos como descriptor el siguiente.

1. ¿Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación y validación)?

La responsabilidad de resolver las situaciones problema presentes en el libro de texto es de los estudiantes, el profesor sólo interviene en si los estudiantes tiene dudas o el procedimiento seguido es incorrecto.

De los comentarios realizados en las cuestiones anteriores acerca de las componentes que intervienen en la idoneidad interaccional concluimos que entre los niveles: alto, medio alto, medio, medio bajo y bajo; esta idoneidad posee el nivel medio alto. Los aspectos a considerar están relacionados con la inclusión de los estudiantes que muestran desinterés en el tema o los que quedan rezagados.

3.2.2 Idoneidad mediacional

Este criterio se refiere al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarias para el desarrollo de los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Como componentes de esta idoneidad se encuentran: recursos materiales, números de estudiantes, horarios y condiciones del aula y, tiempo.

Relacionado con los recursos materiales tenemos dos descriptores y los abordamos a continuación.

1. ¿Se propone el uso de materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones, adaptadas al significado pretendido?
2. ¿Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones, modelos concretos y visualizaciones?

Durante las clases observadas no se recurrió a manipulables o recursos informáticos a pesar que en algunas situaciones problema se solicita a los estudiantes validar resultados utilizando el programa computacional Graph.

Por otro lado, el concepto de integral definida se construye usando situaciones problema de cálculo del área comprendida entre la gráfica de una función y el eje *x* en un intervalo *[a, b]* pero algunas propiedades de este concepto matemático el autor las brinda, por ejemplo, *si a ≤ b ≤ c, entonces* $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$; justificándola con el principio intuitivo de que el área de toda la región es igual a la suma de las áreas de sus partes, siempre y cuando las partes no se superpongan.

Relacionado con el número de estudiantes, horario y condiciones del aula tenemos tres descriptores y los abordamos a continuación.

1. ¿El número y la distribución de los estudiantes permiten llevar a cabo la enseñanza pretendida?
2. ¿El horario del curso es apropiado?
3. ¿El aula y la distribución de los estudiantes es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido?

En el grupo donde se observaron las clases había 46 estudiantes lo que consideramos normal respecto a los otros salones e instituciones, la distribución de los estudiantes en el aula es clásica (en filas viendo al pizarrón); consideramos que estas condiciones no permiten llevar a cabo la enseñanza pretendida porque es imposible para el docente prestar la atención necesaria a cada estudiante.

Las clases de Matemáticas Aplicadas para el grupo seleccionado son a la primera hora, aspecto que consideramos es positivo y negativo; la parte positiva es que inician con este curso y no llegan cargados de otra información pero la parte negativa es que los retardos son frecuentes.

Respecto al aula consideramos presenta buenas condiciones para el proceso de estudio en tanto la amplitud es adecuada, cuenta con aire acondicionado.

Relacionado con el tiempo de enseñanza colectiva/tutorización y tiempo de aprendizaje se tienen los siguientes descriptores.

1. ¿La adecuación de los significados pretendidos (o implementados) al tiempo es buena?
2. ¿La inversión del tiempo en los contenidos más importantes o nucleares del tema es buena?
3. ¿La inversión del tiempo en los contenidos que presentan más dificultad de comprensión es buena?

Consideramos que el tiempo invertido en el estudio de los tópicos de la evaluación ENLACE deja poco tiempo para el estudio de los significados pretendidos. En el tiempo dedicado para el estudio de los temas involucrados con el curso de Matemáticas Aplicadas, el profesor se enfoca en establecer la relación entre la integral definida y el área entre la gráfica de una función y el eje x en un intervalo $[a, b]$ y, además, el uso del Teorema Fundamental del Cálculo para calcular esta área.

La distribución del tiempo fue marcada por el ritmo en el que los estudiantes resolvían las situaciones problema, es decir, una vez que el estudiante aborda el Teorema Fundamental del Cálculo en la resolución del cálculo del área comprendida entre la gráfica de una función y el eje x en un intervalo $[a, b]$, se solucionan todas las situaciones problema presentes en el libro de texto.

De los comentarios realizados en las cuestiones anteriores acerca de las componentes que intervienen en la idoneidad mediacional concluimos que entre los niveles: alto, medio alto, medio, medio bajo y bajo; esta idoneidad posee el nivel medio. Los aspectos a considerar son los siguientes: la falta de uso de materiales manipulativos e informáticos, la dedicación de la mayoría del tiempo en el aula para el estudio de tópicos que no están relacionados con el curso.

3.2.3 Idoneidad emocional

Este criterio se refiere al grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes. Como componentes de esta idoneidad se encuentran: intereses y necesidades, actitudes y emociones.

Relacionado con los intereses y necesidades tenemos dos descriptores y los abordamos a continuación.

1. ¿Se cuenta con una selección de tareas de interés para los alumnos?

2. ¿Se proponen situaciones que permiten valorar la utilidad de las Matemáticas en la vida cotidiana y profesional?

Las situaciones problema que se alcanzaron a abordar en clase durante el tiempo de observación son las relacionadas al cálculo del área comprendida entre la gráfica de una función y el eje *x* en un intervalo *[a, b]* y el área comprendida entre la gráfica de dos o más funciones, dada la familiaridad que tiene el estudiante con el cálculo de áreas consideramos que las situaciones problema son de interés para los estudiantes. Sin embargo, las situaciones problema en contexto extra-matemático, donde se permite valorar la utilidad de las Matemáticas, están ubicadas en la tercera unidad del libro, la cual no alcanzo a abordarse en clases.

Relacionado con las actitudes tenemos los siguientes descriptores.

1. ¿Se promueve la implicación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad?

2. ¿Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quien lo dice?

La implicación de los estudiantes en las actividades es promovida en menor medida ya que el profesor aún estando consiente de quiénes son los estudiantes que trabajan poco no tiene un trato distinto con ellos, las valores como la responsabilidad y la perseverancia siempre están presentes en el discurso del profesor para motivar la participación por parte de los estudiantes.
La atención del profesor para todos los estudiantes es igual, atiende las dudas y los comentarios de todos los estudiantes.

Relacionado con las emociones tenemos los descriptores siguientes.

1. ¿Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las Matemáticas?

2. ¿Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las Matemáticas?

El profesor resalta la utilidad de las Matemáticas e invita a los estudiantes a realizar investigaciones más profundas de los objetos matemáticos abordados en clase. Relacionado con la precisión de las Matemáticas el profesor sí la resalta, por ejemplo, los estudiantes cuestionan si en lugar de fracciones podrían trabajar con decimales y el profesor se encarga de explicar que el resultado sería una aproximación.

De los comentarios realizados en las cuestiones anteriores acerca de las componentes que intervienen en la idoneidad emocional concluimos que entre los niveles: alto, medio alto, medio, medio bajo y bajo; esta idoneidad posee el nivel medio. Los aspectos a considerar son los siguientes: en clase no se alcanzan a abordar las situaciones problema que permiten valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional, el profesor no promociona la implicación en las actividades por parte de los estudiantes con poco interés en el tema.

3.2.4 Idoneidad ecológica

Este criterio se refiere al grado de adaptación curricular, socio-profesional y conexiones intra-disciplinares e inter-disciplinares. Como componentes de esta idoneidad se encuentran: adaptación al currículo, apertura hacia la innovación didáctica, adaptación socio-profesional y cultural, conexiones intra e interdisciplinares.

Relacionado con la adaptación al currículo se tiene el siguiente descriptor.

1. ¿Los significados, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares?

La implementación de los significados se corresponde con las directrices curriculares sólo durante el tiempo que se abordan los tópicos presentes en el libro de texto, ya que, anteriormente mencionamos que en el programa de estudios para el bachillerato tecnológico, Matemáticas (2009), se muestran los aspectos que se demandan abordar y se separan en dos conceptos, la integral indefinida y la integral, el primer concepto abarca los métodos de integración (inmediatas, por partes, por sustitución y por fracciones parciales) y, el diferencial (aproximaciones y antiderivadas); en el segundo concepto se toma en cuenta la suma de Riemann (propiedades, notación y el Teorema Fundamental del Cálculo); conceptos que son abordados en las situaciones problema presentes en el libro de texto.

Relacionado con la apertura hacia la innovación didáctica se tiene los siguientes descriptores.

1. ¿Se promueve la innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva?

2. ¿Se promueve la integración de nuevas tecnologías en el proyecto educativo?

Durante el proceso de estudio no se promovió la integración de nuevas tecnologías, fue poco frecuente que se demandara al uso de algún programa computacional y, si esto sucedía, era sólo para comprobar resultados. Las calculadoras eran usadas para facilitar cálculos.

Son algunos los autores involucrados en el uso de tecnología en la educación con diferentes posturas, particularmente, Pea (1985) concibe dos ideas sobre la incorporación de tecnología en el proceso de enseñanza:

- La idea del uso de tecnología como amplificador cognitivo, esto es, la posibilidad que nos ofrece los recursos tecnológicos para realizar las tareas de manera más rápida y con mayor precisión.
- La idea del uso de tecnología como reorganizador cognitivo, esto es, la posibilidad que ofrecen los recursos tecnológicos para proporcionar cambios cognitivos, considerándolos como instrumentos reestructuradores del funcionamiento cognitivo de los estudiantes.

Tomando en consideración esta diferenciación que se hace sobre el uso de recursos tecnológicos en ambientes educativos concluimos que en el proceso de estudio analizado sólo se utiliza la tecnología como un amplificador cognitivo.

Relacionado con la adaptación socio-profesional y cultural se tiene el siguiente descriptor.

1. ¿Los significados contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes?

Consideramos que los significados implementados sí contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes, ya que, en la mayoría de las carreras universitarias se tienen como curso obligatorio el Cálculo Integral.

Relacionado con las conexiones intra e interdisciplinares se tiene el siguiente descriptor

1. ¿Los significados se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares?

Los significados implementados (durante la observación de clases) para la integral definida sólo se relacionan con contenidos intra-disciplinares, es decir, sólo se relaciona la integral definida con el área comprendida entre la gráfica de una función y el eje *x* en un intervalo *[a, b]* y, con el área comprendida entre la gráfica de dos o más funciones.

Se ha mencionado anteriormente que en el libro de texto sí aparecen otras relaciones con contenidos interdisciplinares pero no se alcanzan a abordar en clase.

De los comentarios realizados en las cuestiones anteriores acerca de las componentes que intervienen en la idoneidad ecológica concluimos que entre los niveles: alto, medio alto, medio, medio bajo y bajo; esta idoneidad posee el nivel medio. Los aspectos a considerar son los siguientes: en clase no se alcanzan a abordar las situaciones problema con contexto interdisciplinar, no se promueve la integración de nuevas tecnologías en el proyecto educativo.

En la siguiente tabla mostramos en resumen la valoración del proceso de estudio, los criterios de idoneidad epistémica y cognitiva se utilizan para valorar al libro de texto y, los criterios de idoneidad interaccional, mediacional, emocional y ecológica se utilizan para valorar las clases impartidas en el curso de Matemáticas Aplicadas.

Criterio parcial de Idoneidad	Nivel
Epistémica	Medio alto
Cognitiva	Medio
Interaccional	Medio alto
Mediacional	Medio
Emocional	Medio
Ecológica	Medio

Tabla 3.6 Nivel de los criterios de Idoneidad didáctica.

CAPÍTULO IV

Análisis de las respuestas de los estudiantes

4.1 Resultados generales de la evaluación

La evaluación se aplicó a 8 estudiantes del sexto semestre en el Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios (CBTIS) 206, los estudiantes pertenecen al grupo VI K con especialidad en administración donde toman clases 46 estudiantes. Para seleccionar a los estudiantes se detectaron aquellos que participaban en clase y pasaban al pizarrón a resolverlas situaciones problema y, lo hacían de manera correcta.

La evaluación consta de dos partes, por un lado se tiene la evaluación escrita y por otro la entrevista personal. La evaluación escrita consta de 9 situaciones problema en la que se involucra la integral definida en su solución, clasificadas según el grado de complejidad. El nivel de reproducción lo constituyen las situaciones problema que fueron abordadas en clase, estas son: el cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b], el cálculo del área comprendida entre las gráficas de dos funciones.

El nivel de conexión lo constituyen las situaciones problema que involucran la integral definida en su solución pero el contexto en el que se desarrollan es distinto al abordado en clase, estas son: el cálculo de la capacidad de un tanque, el cálculo de la distancia recorrida por un objeto, el cálculo de las ganancias de una empresa y el aumento de peso de un cerdo en determinado intervalo de tiempo. Para el nivel de reflexión se incluyó solamente una situación problema que aparte de generar la necesidad del uso de la integral definida, se tenga que recurrir a otros objetos matemáticos como la derivada de una función. La evaluación completa se puede ver en el anexo B.

Para la elaboración del guión de la entrevista se revisaron los procedimientos que siguieron los estudiantes para darle solución a las situaciones problema, el fin de esta entrevista era tener más información para evaluar a los estudiantes. Se incluyeron cuestiones para clarificar la metodología usada por los estudiantes o para ver si con algunas pistas los estudiantes cambiaban de metodología.

Después de aplicar la evaluación (escrita y la entrevista) a los ocho estudiantes se tomaron en consideración siete de ellos, ya que un estudiante no resolvió las situaciones problema y, en la entrevista, mencionó que para calcular el área comprendida entre la gráfica de una función y el eje x en un intervalo [a, b] en clase se utiliza la integral definida pero no podía resolver las integrales.

De los estudiantes que se tomaron en consideración, entre las situaciones problema mencionadas anteriormente, la mayoría resolvió las que piden calcular el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b] pero sólo en el caso que la función sea positiva en el intervalo determinado, ya que ninguno de los estudiantes resolvió la situación de este tipo que presenta una función con parte negativa; relacionado al cálculo del área comprendida entre las gráficas de dos funciones sólo un estudiante la resolvió.

En relación las situaciones problema que involucran a la integral definida de una manera no usual o las que no se abordaron en clase, sólo dos estudiantes pudieron resolver alguna situación problema que no fuera de mera rutina, pero que aún incluían escenarios familiares o casi familiares; las situaciones problema en las que se establecieron relaciones con la integral definida son: el cálculo de la capacidad de un tanque y el cálculo del aumento de peso de un cerdo, conociendo la función velocidad de flujo y el tiempo que tarda en derramarse el tanque y, la función aumento de peso, respectivamente.

En seguida, se muestra una tabla con las cantidades de estudiantes que resolvieron cada situación problema.

Situación problema	Cantidad de estudiante que la resolvieron de manera correctamente
Calcular el área comprendida entre la gráfica de una función (positiva) y el eje x en un intervalo [a, b]	5
Calcular el área comprendida entre la gráfica de una función (con parte negativa) y el eje x en un intervalo [a, b]	0
Calcular la capacidad de un tanque conociendo la función velocidad de flujo y el tiempo que tarda en derramarse	2
Calcular el aumento de peso de un cerdo entre los días 40 y 100 conociendo la función aumento de peso	2
Calcular el área comprendida entre las gráfica de dos funciones	1
Calcular $\int_1^3 (4x^3 - 2x^2 + 1)dx$	3

Tabla 4.1 Cantidad de estudiantes que resuelve correctamente las situaciones problema.

Los lenguajes (objetos matemáticos) a los que recurrieron mayormente los estudiantes son el algebraico y el numérico. La mayoría de los estudiantes utilizaron el lenguaje gráfico solamente en el caso que sea solicitado en la situación problema (no todos de manera correcta), sólo un estudiante recurrió a la gráfica de una función para poder resolver la situación problema y, esto, debido a que la necesitaba para decidir con qué figura geométrica iba a aproximar el área comprendida entre la gráfica de una función y el eje *x* en un intervalo *[a, b].*

En una situación problema se solicitó al estudiante resolver una integral definida cuya función integrando es una función polinomial y, además, plantear dos situaciones problema que se resolvieran utilizando esta integral. A pesar de que3 de los estudiantes resolvió la integral, ninguno pudo plantear las dos situaciones problema, un estudiante planteó una poniendo de manifiesto la relación que posee entre la integral definida y el cálculo del área comprendida entre la gráfica de una función y el eje *x* en un intervalo *[a, b].*

De las situaciones problema que los estudiantes resolvieron de manera incorrecta se detectaron los conflictos semióticos que tienen relación con el cálculo integral y los que están involucrados con objetos matemáticos abordados anteriormente. A continuación mostramos una tabla con la cantidad de estudiantes que presentaron los conflictos semióticos relacionados al cálculo integral.

Conflictos semióticos en cálculo integral	
Tipo	Cantidad de estudiantes que lo presentan
No relaciona la integral definida con el cálculo de la distancia recorrida	3
La integral definida proporciona el área, sin considerar si la función es positiva o negativa en el intervalo de interés	6
No relaciona la integral definida con el cálculo de las ganancias	5
No relaciona la integral definida con el cálculo de la capacidad de un tanque	2
La antiderivada de una constante es la misma constante	2
No relaciona la integral definida con el cálculo del aumento de peso	3
Calcula la derivada en vez de la antiderivada de la función integrando	2

Tabla 4.2 Cantidad de estudiantes que presentan estos conflictos semióticos.

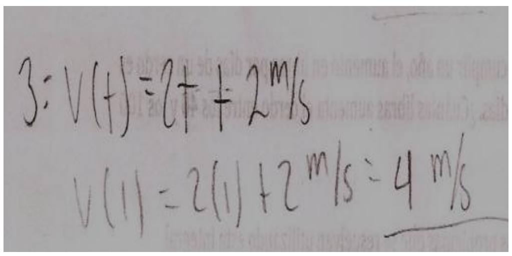
4.2 Análisis de la respuesta a una situación problema

Enseguida mostramos un ejemplo del análisis realizado a las situaciones problema, mostramos las prácticas matemáticas, los objetos y los procesos matemáticos identificados en la respuesta del estudiante. Usando estos elementos, seleccionamos un descriptor para asignarle el nivel de desarrollo a cada competencia matemática.

Problema. Un objeto se mueve con una velocidad $v(t) = 2t + 2\, m/s$. Calcula la distancia que recorre en 1 minuto.

Prácticas matemáticas

El estudiante realiza la lectura de la situación problema y produce de un texto como respuesta, siendo éste incorrecto (imagen 1). Durante la entrevista se le informa que cuando la velocidad es constante la distancia recorrida se puede calcular multiplicando la velocidad por el tiempo, por lo que, si graficamos la velocidad contra el tiempo calcular la distancia recorrida sería igual a calcular el área del rectángulo cuya base es el tiempo y la altura el valor de la velocidad. El estudiante contesta que en nuestro caso la velocidad no es constante, que para calcular la distancia recorrida se calcula el área bajo la curva y que para ello utiliza la integral, después la calculó sin mostrar el valor numérico debido a la falta de calculadora (imagen 2).



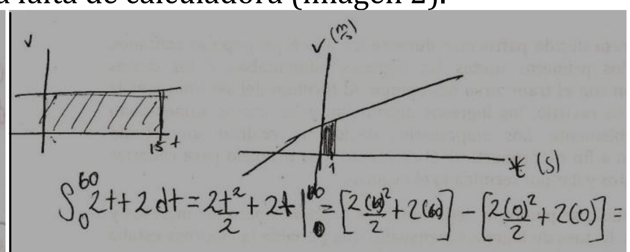


Imagen 1. Respuesta del estudiante   Imagen 2. Respuesta del estudiante (entrevista)

Situación problema: Ver problema.

Lenguajes

- Algebraico: usado para representar y calcular la integral definida.
- Las gráficas fueron proporcionadas por el entrevistador.

Conceptos-Definiciones

Integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo.

Proposiciones

- El área comprendida entre la gráfica de la función $v(t) = 2t + 2$ y el eje x de x=0 a x=60 se calcular resolviendo $\int_0^{60}(2t-2)dt$.
- $\int_0^{60}(2t-2)dt = \frac{2t^2}{2} - 2t]_0^{60}$.
- Teorema Fundamental del Cálculo.

Procedimientos

- Relacionar la integral definida con el cálculo de áreas.
- Utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema.

Argumentos

De manera implícita el estudiante argumenta el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo [0, 60] calculando $\int_0^{60}(2t-2)dt$.

Procesos matemáticos

- Proceso de significación de la integral definida como el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b].
- Proceso de algoritmización en el cálculo de la integral definida.

• Proceso de comunicación en el sentido que el alumno entiende la situación problema y produce un texto que le da respuesta. • Proceso de argumentación en tanto se usa la integral definida para calcular el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo [a, b].

Tabla 4.3 Identificación de prácticas, objetos y procesos matemáticos en una situación problema.

C1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales. De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "reconocer, recopilar, activar y aprovechar modelos familiares bien estructurados; pasar sucesivamente de los diferentes modelos (y sus resultados) a la realidad y viceversa para lograr una interpretación", el cual sitúa al estudiante con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es la estrecha relación que tiene la situación problema con las ha resuelto el estudiante en clase, puesto que, el estudiante ha resuelto el problema una vez que se redujo al cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b].

C2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques. De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "exponer y formular problemas reconociendo y reproduciendo problemas ya practicados puros y aplicados de manera cerrada; resolver problemas utilizando enfoques y procedimientos estándar, normalmente de una única manera", el cual sitúa al estudiante con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante está presente este descriptor es el análisis de procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Una vez que el problema fue reducido al cálculo del área bajo la curva el estudiante recurre al Teorema Fundamental del Cálculo para resolverlo, procedimientos utilizados en clase.

C3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera", el cual sitúa al estudiante con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los procesos matemáticos involucrados en la solución de la situación problema. En dicho análisis encontramos el proceso de comunicación en el siguiente sentido: el estudiante entiende la situación problema y utiliza el Teorema Fundamental del Cálculo para darle respuesta.

C4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático. Consideramos que dicha competencia no se muestra en la respuesta del alumno. Aunque se podría justificar con la elección de la integral definida para resolver el problema el descriptor "seguir y justificar los procesos cuantitativos estándar, entre ellos los procesos de cálculo, los enunciados y los resultados", pero de todos modos nos inclinamos por la primera opción.

C5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento. De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "formular las preguntas más simples (¿cuántos...?, ¿cuánto es...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (tantos, tanto)", el cual sitúa al estudiante con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante está presente este descriptor es el análisis de los conceptos-definiciones (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite mencionar cuáles son estos conceptos-definiciones: integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo, los cuales han estado presentes en los problemas resueltos en clase, el cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b], mismo tipo de situación a la que fue reducida la situación problema.

C6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea. De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "descodificar, codificar e interpretar representaciones de objetos matemáticos previamente conocidos de un modo estándar que ya ha sido practicado. El paso de una representación a otra sólo se exige cuando ese paso mismo es una parte establecida de la representación", el cual sitúa al estudiante con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el hecho de que una vez reducido el problema al cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b] el estudiante ha podido resolverlo.

C7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia. De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "comprender y emplear conceptos matemáticos en el mismo contexto en el que se introdujeron por primera vez o en el que se han practicado subsiguientemente", el cual sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los conceptos-definiciones (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos conceptos-definiciones: integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo; una vez que el problema fue reducido al cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b].

C8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos. De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor "descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario que ya se ha practicado en situaciones y contextos sobradamente conocidos; manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos rutinarios", el cual sitúa al estudiante con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos lenguajes: algebraico y numérico, todo esto una vez que el problema fue reducido al cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x.

4.3 Resultados personales de la evaluación

En esta sección mostramos características generales de la evaluación de cada estudiante, si se desea ver el análisis completo de cada situación problema a la que se enfrentó a cada estudiante mostramos esta información en el anexo C.

Enseguida mostramos un análisis de cada estudiante donde se presenta, para cada uno, una tabla en la que se muestra la relación entre las situaciones problema y las competencias desarrolladas. En caso de que cierta competencia esté presente indicamos el nivel en que lo hace de la siguiente manera: nivel de reproducción=1, nivel de conexión=2 y nivel de reflexión=3, en caso de no inferirse alguna competencia de la respuesta del alumno se señala en el recuadro con una línea horizontal (-), esto se debe a que el estudiante no resolvió la situación problema o utilizó procedimientos erróneos, en tal caso más adelante indicamos los conflictos semióticos que se detectaron.

Alumno 1

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
Problema 1	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 2	2	2	1	-	2	2	2	2
Problema 3	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 4	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 5	2	2	1	-	2	2	2	2
Problema 6	1	1	1	-	1	1	1	1
Problema 7	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 8	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 9	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabla 4.4 Competencias matemáticas desarrolladas por el alumno 1.

De las respuestas del estudiante concluimos que relaciona la integral definida con el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y el eje x en el intervalo [a, b]. Sin embargo, este tipo de situaciones problema el estudiante no las resolvió de manera correcta en su evaluación (examen o entrevista) por diferentes motivos: no concibió a la función $f(x) = \mathrm{e}^{x}$

como tal, utilizó la integral definida para calcular el área solicitada, sin considerar si la función es positiva o negativa en el intervalo de interés.

Además de la relación mencionada anteriormente el estudiante estableció otras relaciones, en el problema 2 establece una relación entre la integral definida y cálculo de volúmenes; en el problema 5 la relaciona con el aumento de peso de un cerdo.

El estudiante utilizó de manera correcta el Teorema Fundamental del Cálculo en tanto determinó las antiderivadas de las funciones integrando adecuadamente, evalúo los límites de integración y produjo un resultado numérico, este resultado numérico no es correcto en todos los casos.

Con base en la información que nos otorga la tabla y los comentarios anteriores agruparemos las competencias matemáticas en los niveles en que se desarrollaron.

Competencias matemáticas	Nivel de desarrollo
C1,C2,C5,C6,C7,C8	Conexión
C1, C2, C3, C5, C6, C7, C8	Reproducción
C4	-

Tabla 4.5 Nivel de desarrollo de competencias matemáticas del alumno 1.

De las situaciones problema que el estudiante resolvió incorrectamente o no resolvió enlistamos los conflictos semióticos que se detectaron. Por una parte los que tienen relación con el cálculo integral y, por otra parte, los que están involucrados con objetos matemáticos abordados anteriormente.

Conflictos semióticos en cálculo integral:

- No relaciona la integral definida con el cálculo de la distancia recorrida.
- La integral definida nos proporciona el área, sin considerar si la función es positiva o negativa en el intervalo de interés.
- Si la función tiene parte negativa en un intervalo dentro del intervalo [a, b], donde se desea conocer el área, la antiderivada de la función se debe multiplicar por -1 para que el resultado represente el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en [a, b].
- No relaciona la integral definida con la ganancia de la empresa.

Conflictos semióticos en otras áreas:

- Desconocer a$f(x) = e^x$como una función.
- No identifica que las unidades de la velocidad son metros por segundo y se le pide calcular la distancia en minutos, es decir, no realiza la conversión de unidades.
- Aplica la fórmula $d = vt$ sin tener en cuenta que es válida sólo cuando la velocidad es constante.

- No hace operativa la implicación $si x = 0 \rightarrow p(x) = 0$.
- No puede calcular la derivada de la función $p(x) = ax^2 + bx + c$.
- Confusión entre la ganancia negativa y la ganancia nula.

Alumno 2

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
Problema 1	1	1	1	-	-	1	1	1
Problema 2	1	1	1	-	1	1	1	1
Problema 3	1	1	1	-	1	1	1	1
Problema 4	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 5	2	2	1	-	2	2	2	2
Problema 6	1	1	1	-	1	1	1	1
Problema 7	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 8	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 9	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabla 4.6 Competencias matemáticas desarrolladas por el alumno 2.

El estudiante resolvió las situaciones problema en las que se solicitó calcular el área comprendida entre la gráfica de la función *f(x)* y el eje x en un intervalo [a, b] sólo en el caso que la función era positiva en el intervalo determinado. En clase, aparte de resolver este tipo de situaciones, el estudiante abordó situaciones en las que la función integrando tenía parte negativa y, éstas, en el examen no fue capaz de resolverlas.

El análisis realizado al problema 5 sugiere el nivel de conexión para las competencias matemáticas exceptuando la competencia 4. Sin embargo, creemos que hay una tendencia por parte del estudiante a elegir la integral definida como herramienta para resolver la situación problema debido a que es esta herramienta con la que ha solucionado los problemas anteriores.

Con base en la información que nos otorga la tabla y los comentarios anteriores agruparemos las competencias matemáticas en los niveles en que se desarrollaron.

Competencias matemáticas	Nivel de desarrollo
C1,C2,C3,C5,C6,C7,C8	Reproducción
C4	-

Tabla 4.7 Nivel de desarrollo de competencias matemáticas del alumno 2.

De las situaciones problema que el estudianteresolvió incorrectamente o no resolvió enlistamos los conflictos semióticos que se detectaron, por una parte los que tienen relación con el cálculo integral y por otra parte los que están involucrados con objetos matemáticos abordados anteriormente.

Conflictos semióticos en cálculo integral:

- La integral definida nos proporciona el área, sin considerar si la función es positiva o negativa en el intervalo de interés.
- No relaciona la integral definida con la ganancia de la empresa.

Conflictos semióticos en otras áreas:

- No hay relación entre la derivada de una función y el valor de la pendiente de la recta tangente de la función.
- En la condición *p (0)=0*, no establece la implicación $si x = 0 \rightarrow p(x) = 0$.

Alumno 3

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
Problema 1	1	1	1	-	1	1	1	1
Problema 2	2	2	1	-	2	2	2	2
Problema 3	1	1	1	-	1	1	1	1
Problema 4	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 5	2	2	1	-	2	2	2	2
Problema 6	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 7	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 8	-	-	-	-	-	-	-	-

Problema 9	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabla 4.8 Competencias matemáticas desarrolladas por el alumno 3.

El estudiante resolvió las situaciones problema en las que se solicitó calcular el área comprendida entre la gráfica de la función *f(x)* y el eje x en un intervalo [a, b] sólo en el caso que la función era positiva en el intervalo determinado. En clase, aparte de resolver este tipo de situaciones, el estudianteabordó situaciones en las que la función integrando tiene parte negativa y, éstas, en el examen no fue capaz de resolverlas.

Respecto al cálculo del área comprendida entre las gráficas de dos funciones, el estudiante conoce un método adecuado para resolver este tipo de situaciones, calcular el área comprendida entre las gráficas de las funciones por separado y calcular la diferencia entre los resultados; sin embargo, en la situación problema presente en la examen una de las funciones tiene parte negativa y el estudiante no consideró esta característica por lo que el resultado es incorrecto.

Además de la relación establecida en clase entre la integral definida y el cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b], el estudiante estableció otras relaciones, en el problema 2 estableció una relación entre la integral definida y cálculo de volúmenes; en el problema 5 la relacionó con el aumento de peso de un cerdo.

Con base en la información que nos otorga la tabla y los comentarios anteriores agruparemos las competencias matemáticas en los niveles en que se desarrollaron.

Competencias matemáticas	Nivel de desarrollo
C1,C2,C5,C6,C7,C8	Conexión
C1, C2, C3, C5, C6, C7, C8	Reproducción
C4	-

Tabla 4.9 Nivel de desarrollo de competencias matemáticas del alumno 3.

De las situaciones problema que el estudiante resolvió incorrectamente o no resolvió enlistamos los conflictos semióticos que se detectaron, por una parte los que tienen relación con el cálculo integral y, por otra parte, los que están involucrados con objetos matemáticos abordados anteriormente.

Conflictos semióticos en cálculo integral:

- La integral definida nos proporciona el área, sin considerar si la función es positiva o negativa en el intervalo de interés.
- La antiderivada de una constante es la misma constante.

Conflictos semióticos en otras áreas:

- No relaciona la derivada de una función con el valor de la pendiente de la recta tangente.

Alumno 4

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
Problema 1	1	1	1	-	1	1	1	1
Problema 2	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 3	1	1	1	-	1	1	1	1
Problema 4	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 5	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 6	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 7	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 8	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 9	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabla 4.10 Competencias matemáticas desarrolladas por el alumno 4.

El estudiante resolvió las situaciones problema en las que se solicitó calcular el área comprendida entre la gráfica de la función *f(x)* y el eje x en un intervalo [a, b] sólo en el caso que la función era positiva en el intervalo determinado. En clase, aparte de resolver este tipo de situaciones, el estudiante abordó situaciones en las que la función integrando tenía parte negativa y, éstas, en el examen no fue capaz de resolverlas.

El estudiante empleó un método adecuado para calcular el área comprendida entre la gráfica de dos funciones, sin embargo, debido a que una de las gráficas tenía parte negativa en el intervalo de interés el estudiante no proporcionó un resultado correcto.

El estudiante no estableció nuevas relaciones de la integral definida, es decir, en clase establecen la relación que tiene como el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b] y, es sólo ésta la que se refleja en la evaluación.

Con base en la información que nos otorga la tabla y los comentarios anteriores agruparemos las competencias matemáticas en los niveles en que se desarrollaron.

Competencias matemáticas	Nivel de desarrollo
C1,C2,C3,C5,C6,C7,C8	Reproducción
C4	-

Tabla 4.11 Nivel de desarrollo de competencias matemáticas del alumno 4.

De las situaciones problema que el estudianteresolvió incorrectamente o no resolvió enlistamos los conflictos semióticos que se detectaron, por una parte los que tienen relación conel cálculo integral y, por otra parte, los que están involucrados con objetos matemáticos abordados anteriormente.

Conflictos semióticos en cálculo integral:

- No relaciona la integral definida con el cálculo del volumen del tanque.
- La integral definida proporciona el área, sin considerar si la función es positiva o negativa en el intervalo de interés.
- La antiderivada de una constante es la misma constante.
- No relaciona la integral definida con el cálculo de aumento de peso.
- No relaciona la integral definida con el cálculo de la ganancia de la empresa.

Conflictos semióticos en otras áreas:

- No relaciona la derivada de una función con el valor de la pendiente de la recta tangente.
- No soluciona el sistema de ecuaciones 2x2.

Alumno 5

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
Problema 1	1	1	1	-	1	1	1	1
Problema 2	1	1	1	-	1	1	1	1
Problema 3	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 4	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 5	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 6	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 7	-	-	-	-	-	-	-	-

Problema 8	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 9	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabla 4.12 Competencias matemáticas desarrolladas por el alumno 5.

El estudiante resolvió las situaciones problema en las que se solicitó calcular el área comprendida entre la gráfica de la función *f(x)* y el eje x en un intervalo [a, b] sólo en el caso que la función era positiva en el intervalo determinado. En clase, aparte de resolver este tipo de situaciones, el estudiante ha abordado situaciones en las que la función integrando tenía parte negativa y, éstas, en el examen no fue capaz de resolverlas.

El estudiante para calcular el área comprendida entre las gráficas de dos funciones aplica un método incorrecto, calcula el área comprendida entre la gráfica de las funciones y el eje x en un intervalo [a, b] por separado y los resultados los suma; en clase no se resolvieron situaciones de este tipo pero antes de la evaluación escrita al estudiantes se le encargó la resolución de situaciones problema similares presentes en el libro de texto.

El estudiante no establece nuevas relaciones de la integral definida, es decir, en clase establecen la relación que tiene como el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b] y, es sólo ésta la que se refleja en la evaluación.

Con base en la información que nos otorga la tabla y los comentarios anteriores agruparemos las competencias matemáticas en los niveles en que se desarrollaron.

Competencias matemáticas	Nivel de desarrollo
C1,C2,C3,C5,C6,C7,C8	Reproducción
C4	-

Tabla 4.13 Nivel de desarrollo de competencias matemáticas del alumno 5.

De las situaciones problema que el estudiante resolvió incorrectamente o no resolvió enlistamos los conflictos semióticos que se detectaron, por una parte los que tienen relación con el cálculo integral y, por otra parte, los que están involucrados con objetos matemáticos abordados anteriormente.

Conflictos semióticos en cálculo integral:

- No relaciona la integral definida con el cálculo de la distancia recorrida.
- La integral definida nos proporciona el área, sin considerar si la función es positiva o negativa en el intervalo de interés.
- El estudiante no relaciona el aumento de peso en un intervalo de tiempo con la integral definida.
- Utiliza la derivada enlugar de antiderivar la función integrando.

- Para calcular el área comprendida entre la gráfica de dos funciones se calcula el área comprendida entre la gráfica de las funciones y el eje x en un intervalo [a, b] por separado y los resultados se suman.
- No relaciona la integral definida con la ganancia de la empresa.

Alumno 6

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
Problema 1	1	1	1	-	1	1	1	1
Problema 2	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 3	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 4	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 5	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 6	1	1	1	-	1	1	1	1
Problema 7	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 8	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 9	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabla 4.14 Competencias matemáticas desarrolladas por el alumno 6.

El estudiante resolvió situaciones problema en las que se solicitó calcular el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y el eje x en el intervalo [a, b] sólo en el caso que la función era positiva en el intervalo determinado. En clase, aparte de resolver este tipo de situaciones, el estudiante ha abordado situaciones en las que la función integrando tenía parte negativa y, éstas, en el examen no fue capaz de resolverlas.

De las situaciones problema en las que se solicita calcular el área comprendida entre las gráficas de dos funciones el estudiante empleó un método para resolverlas, calcular por separado las áreas comprendidas entre la gráfica de cada función y el eje x en el intervalo determinado y calcular la diferencia entre los resultados. Sin embargo, en el examen el estudiante no contestó correctamente este tipo de situaciones problema porque no proporcionó las antiderivadas correctamente y los límites de integración eran incorrectos. Además, una de las funciones tenía parte negativa, condición que fue inadvertida por el estudiante.

Con base en la información que nos otorga la tabla y los comentarios anteriores agruparemos las competencias matemáticas en los niveles en que se desarrollaron.

Competencias matemáticas	Nivel de desarrollo
C1,C2, C3,C5,C6,C7,C8	Reproducción
C4	-

Tabla 4.15 Nivel de desarrollo de competencias matemáticas del alumno 6.

De las situaciones problema que el estudianteresolvió incorrectamente o no resolvió enlistamos los conflictos semióticos que se detectaron, por una parte los que tienen relación con el cálculo integral y, por otra parte, los que están involucrados con objetos matemáticos abordados anteriormente.

Conflictos semióticos en cálculo integral:

- No relaciona la integral definida con el cálculo de volúmenes.
- No relaciona la integral definida con el cálculo de la distancia recorrida.
- La integral definida nos proporciona el área, sin considerar si la función es positiva o negativa en el intervalo de interés.
- No relaciona el aumento de peso en un intervalo de tiempo con la integral definida.
- $\int x^2 dx = 2x$.
- No relaciona la integral definida con la ganancia de la empresa.

Conflictos semióticos en otras áreas:

- No realiza la conversión de unidades.

Alumno 7

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
Problema 1	1	-	1	-	1	1	-	-
Problema 2	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 3	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 4	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 5	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 6	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 7	-	-	-	-	-	-	-	-

Problema 8	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 9	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabla 4.16 Competencias matemáticas desarrolladas por el alumno 7.

El estudiante relacionó el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b] con la integral definida, sin embargo, no pudo calcularla. Cuando se le pidió solucionar este tipo de situaciones problema el estudiante realizó la gráfica de la función, tabulando valores y ubicando los puntos en el plano cartesiano, detectó el área que se le pide calcular y la calculó utilizando el área de figuras geométricas familiares; de esta manera el estudiante proporcionó una aproximación del área solicitada. Este procedimiento fue parte de las actividades que se planteaban en clase cuando se resolvían situaciones problema de cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo determinado.

Con base en la información que nos otorga la tabla y los comentarios anteriores agruparemos las competencias matemáticas en los niveles en que se desarrollaron.

Competencias matemáticas	Nivel de desarrollo
C1,C3,C5,C6,C8	Reproducción
C2, C4, C7	-

Tabla 4.17 Nivel de desarrollo de competencias matemáticas del alumno 7.

De las situaciones problema que el estudiante resolvió incorrectamente enlistamos los conflictos semióticos que se detectaron, por una parte los que tienen relación con el cálculo integral y por otra parte los que están involucrados con objetos matemáticos abordados anteriormente.

Conflictos semióticos en cálculo integral:

- El estudiante no puede calcular integrales definidas.

Conflictos semióticos en otras áreas:

- El área comprendida entre una función negativa y el eje x en el intervalo [a, b] es negativa.

Conclusiones

En esta sección retomamos los objetivos planteados en el capítulo 1 y otorgamos información sobre el grado de consecución de los mismos, además, presentamos líneas de trabajo abiertas.

El Enfoque Ontosemiótico nos proporcionó elementos suficientes para desarrollar y alcanzar los objetivos específicos y, de esta manera, obtener el objetivo general de este trabajo.

1. Conclusiones relacionadas con el primer objetivo

Determinar si el libro de texto promueve el desarrollo de las competencias matemáticas establecidas en la Reforma Integral de la Educación Media Superior.

El autor del Proyecto: Para elaborar el libro de texto de la asignatura de matemáticas para el sexto semestre: Matemáticas Aplicadas (Cálculo Integral) declara en cada unidad del libro las acciones que debe realizar el estudiante, los objetos que aprenderá al llevar a cabo estas acciones y, por último, menciona las competencias disciplinares en el área de Matemáticas que desarrollará. Sin embargo nosotros hacemos otro análisis para determinar las competencias matemáticas que el estudiante podría desarrollar al abordar las situaciones problema de cada unidad.

Para este análisis seguimos el modelo para evaluar competencias presentado por Rubio (2012). Antes de aplicar este modelo se realizaron esquemas generales, en cada unidad, sobre las situaciones problema (mostradas en el capítulo 3).

Como resultados de este análisis en el capítulo 3 mostramos la siguiente tabla. En caso de que cierta competencia esté presente en las situaciones problemas de la unidad indicaremos el nivel en que lo hace de la siguiente manera: nivel de reproducción=1, nivel de conexión=2 y nivel de reflexión=3.

Competencias	Unidad 1	Unidad 2	Unidad 3
C1	2	1	2
C2	2	1	2
C3	2	1	2
C4	2	1	2
C5	2	1	2

C6	1	1	1
C7	2	1	2
C8	2	1	2

C1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.

C2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.

C3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

C4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.

C5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

C6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea.

C7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.

C8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

La información mostrada en la tabla anterior da respuesta al primer objetivo específico. Por otro lado, el término idoneidad didáctica también se involucró en el análisis del libro de texto, en este análisis se tomaron en consideración los criterios parciales de la idoneidad: epistémica y cognitiva; los resultados obtenidos en este análisis se muestran en el siguiente tabla.

Criterio parcial de idoneidad	Valoración	Aciertos	Consideraciones
Epistémico	Medio Alto	Las situaciones problema permiten la contextualización de los conocimientos que se desean construir.	Poca ejercitación de las aplicaciones de la integral definida debido a su ubicación en el libro. No se promueve la

		El lenguaje, las explicaciones y comprobaciones son adecuados para el nivel al que se dirigen. Los momentos de validación son promovidos. Se presentan definiciones, proposiciones y procedimientos según el significado de referencia.	conversión entre diferentes representaciones de conceptos matemáticos. Las situaciones problema no proporciona la oportunidad de plantear situaciones problemas en contexto extra matemático a menos que sean del tipo de cálculo de áreas.
Cognitivo	Medio	Los significados pretendidos tienen una dificultad manejable. Se incluyen actividades de ampliación y refuerzo.	A causa de la ubicación y el tratamiento de la mayoría de los significados promovidos para la integral definida en el libro presentes en el programa de estudios, éstos no se alcanzan a abordar. Los estudiantes muestran conflictos semióticos mostrados respecto a la derivada de una función.

2. Conclusiones relacionadas con el segundo Objetivo

Determinar si las prácticas profesionalesdel docente en el salón de clases y las actividades consecuentemente desarrollada por los alumnos, se corresponden con lo establecido en la Reforma.

Las actividades promovidas en clase se corresponden de buena manera con lo establecido en el libro de texto ya que la dinámica de clase consiste, generalmente, en la solución de las situaciones problema presentes en él, discutiendo las ideas en equipo para después que alguno compartiera los procedimientos y resultados con el resto del grupo al resolver la situación problema en el pizarrón. Cabe mencionar que la minoría del grupo es la que resuelve las situaciones problema y las comparte con el resto del grupo.

Consideramos que el papel que sigue el profesor encargado del curso cumple los requerimientos de la reforma, algunos aspectos son efectuados en menor medida; estos aspectos los mencionamos en la tabla que esta a continuación.

Utilizamos los criterios parciales de idoneidad didáctica: mediacional, emocional, interaccional y ecológica para valorar las actividades en el aula. Los resultados los mostramos en la siguiente tabla.

Criterio parcial de idoneidad	Valoración	Aciertos	Consideraciones
Mediacional	Medio	El horario y las condiciones del aula favorecen son apropiados para el proceso de instrucción.	Falta de uso de materiales manipulativos e informáticos. La dedicación de tiempo en el aula para el estudio de tópicos que no están relacionados con el curso (estudio de reactivo de ENLACE) es mayoría. La gran población de estudiantes no es adecuada para llevar a cabo el proceso de enseñanza.
Emocional	Medio	Se promueve la perseverancia y responsabilidad. Se promueve la autoestima evitando el rechazo a las Matemáticas.	En clase no se alcanzan a abordar las situaciones problema que permiten valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional. El profesor no promociona la implicación en las actividades por parte de los estudiantes con poco interés en el tema.
Interaccional	Medio alto	Deja el papel activo en la solución de problemas a los estudiantes. Busca llegar a consensos con base en el mejor argumento. Se reconocen y resuelven conflictos de significado en los estudiantes.	Falta promover más la inclusión de los estudiantes que muestran desinterés en el tema o los que quedan rezagados.
Ecológica	Medio		En clase no se alcanzan a abordar las situaciones problema con contexto

			interdisciplinar. No se promueve la integración de nuevas tecnologías en el proyecto educativo.

3. Conclusiones relacionadas con el tercer objetivo

Determinar cuáles de las competencias matemáticas definidas en la Reforma Integral de la Educación Media Superior desarrollan efectivamente los estudiantes.

Consideramos que una evaluación a posteriori es más conveniente que una a priori, para el caso en que un profesor tenga que evaluar a sus estudiantes, ya que además de saber el nivel de desarrollo de las competencias matemáticas, obtenemos información relevante sobre: las fallas y los errores que presentan los estudiantes en sus aprendizajes y ofrece sugerencias relevantes y específicas sobre las competencias que puede desarrollar.

Por los comentarios realizados en el párrafo anterior, para evaluar las competencias matemáticas en los estudiantes de bachillerato definidas en la Reforma Integral de la Educación Media Superior empleamos el modelo presentado por Rubio (2012). Sin embargo, en este modelo se evalúan competencias matemáticas definidas en PISA y nosotros estamos interesados en evaluar las competencias matemáticas definidas en dicha reforma por lo que realizamos una correspondencia entre las competencias definidas por PISA y por la RIEMS.

Una vez realizada esta correspondencia, consideramos que el modelo de Rubio (2012) sí se puede implementar en la evaluación de las competencias de la RIEMS. Los resultados obtenidos en la implementación de este modelo los mostramos en la tabla siguiente.

	Competencia	Nivel de desarrollo
Alumno 1	C1, C2, C3, C5, C6, C7, C8	Reproducción
	C1, C2, C5, C6, C7, C8	Conexión
Alumno 2	C1, C2, C3, C5, C6, C7, C8	Reproducción
Alumno 3	C1, C2, C3, C5, C6, C7, C8	Reproducción

	C1, C2, C5, C6, C7, C8	Conexión
Alumno 4	C1, C2, C3, C5, C6, C7, C8	Reproducción
Alumno 5	C1, C2, C3, C5, C6, C7, C8	Reproducción
Alumno 6	C1, C2, C3, C5, C6, C7, C8	Reproducción
Alumno 7	C1, C3, C5, C6, C8	Reproducción

C1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.

C2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.

C3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

C4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático.

C5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

C6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea.

C7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.

C8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Con la información mostrada en la tabla anterior damos respuesta al objetivo específico número tres. Con la obtención de los tres objetivos específico hemos obtenido el objetivo general.

Como continuación de este trabajo presentamos los siguientes aspectos:

- Para la evaluación del desarrollo de competencias matemáticas hemos empleado los primero cuatro pasos del modelo de Rubio (2012) dejando de lado el punto 5, el cual se refiere a la retroalimentación del alumno. Una línea de trabajo abierta trata sobre la incorporación de este último paso, es decir, una vez identificados los errores y fallas de los estudiantes la tarea consiste en diseñar actividades didácticas que subsanen estos errores.
- Tomar en consideración los aspectos señalados en la evaluación del proceso de estudio para diseñar actividades didácticas que propicien el desarrollo de las competencias matemáticas definidas en la Reforma Integral de la Educación Media Superior.

Referencias bibliográficas

CONADEU, ANUIES (2008). *Competencias disciplinares básicas del Sistema Nacional de Bachillerato*. México.

De la Cruz Gabriela (2011). *Diagnóstico del proceso de evaluación de los aprendizajes esperados en un modelo basado en Competencias en Educación Primaria una exploración desde el profesorado.* Tesis de Maestría no publicada, Secretaría de Educación y Cultura. Hermosillo, México.

Godino J. D., BataneroC. (1994). Significado Institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14* (3), 325-355.

Godino J. D. (2002). *Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática.* Recuperado al 11 de noviembre del 2012 de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/04_enfoque_ontosemiotico.pdf

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, 27(2),* 221-252.

Godino J. D., Contreras A., Font V. (2006). *Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática*. Recuperado al 11 de noviembre del 2012 de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/analisis_procesos_instruccion.pdf

Godino J. D., Bencomo D., Font V. y Wilhelmi M. R. (2007). *Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.* Recuperado al 11 de noviembre del 2012 de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/pauta_valoracion_idoneidad_5enero07.pdf

Godino J. D., Batanero C., Font V. (2008).*Un Marco Teórico Integrativo para la Educación Matemática. El Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS*). Recuperado al 11 de noviembre del 2012 de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/poster_EOS_19diciembre08.pdf

Godino J. D., Batanero C. y Font V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.* Recuperado al 11 de noviembre del 2012 de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (INECSE) (2004) *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas.* Madrid: MEC.

López Carmen (2011). *Evaluación y propuesta para la mejora de la implementación de la Reforma Integral de Educación Media Superior en el Colegio de Bachilleres del Estado* *de Sonora, a partir de la Percepción de los Docentes.* Tesis de Maestría no publicada, Secretaría de Educación y Cultura. Hermosillo, México.

Matemáticas (2009). Secretaría de Educación Pública. Recuperado al 11 de noviembre del 2012 dehttp://cosdac.sems.gob.mx/programas.php

Meavilla V. (s/f). *Cómo evaluar competencias (matemáticas) de nuestros alumnos de ESO.* Recuperado al 11 de noviembre del 2012 de http://edumat.uab.es/ipdmc/cap/PRESENTACOMPETENCIASMAT.pdf

Mulder, Martin, Weigel, Tanja y Collins, Kate (2007). "The concept of competence in the development of vocational education and training in selected EU member status: a critical analysis", *Journal ofVocational Education & Training, 59* (*1),* 67-88.Traducción de Elisabet Cortés Harlet. Revisión Técnica: Fidel Grand. Recuperado al 20 de noviembre del 2012 dehttp://www.ugr.es/~recfpro/rev123ART6.pdf

Orduño H. (2012). *Proyecto para elaborar el libro de texto de la asignatura de matemáticas para el sexto semestre: Matemática aplicada (Cálculo integral).* (Inédito)

Pea, R. (1985).Beyond amplification: using the computer to reorganize mental functioning, *Educational Psychologis*t, 20. (4): 167-182.

Reforma Integral de Educación Media Superior (2008).*La creación de un Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad.* México: SEP.

Resultados de las pruebas PISA 2009 en México. Habilidades para la vida en estudiantes de 15 años (2010). Recuperado al 11 de noviembre del 2012 de http://www.inee.edu.mx/archivosbuscador/2009/05/INEE-200905288-pisa2009-09.pdf

Rico L. (2004). *Evaluación de competencias matemáticas. Proyecto PISA/OCDE 2003.* Recuperado al 11 de noviembre del 2012 de http://funes.uniandes.edu.co/1351/1/Rico2004Evaluacion_SEIEM_89.pdf

Rodríguez G., Gil J., García E (1996). *Metodología de la Investigación Cualitativa*. Recuperado al 10 de diciembre del 2012 de http://metodosdeinvestigacioninterdisciplinaria.bligoo.com.co/media/users/10/528344/files/53953/INVESTIGACION_CUALITATIVA_Rodriguez_et_al.pdf

Rodríguez T., Nelson, Feliú S., Pedro (1996). *Curso Básico de Psicometría.* Recuperado al 11 de noviembre del 2012 de http://www.ilo.org/public/spanish/region/ampro/cinterfor/temas/complab/doc/otros/sel_efe/bib.htm.

Rubio N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos.* Tesis de Doctorado no publicada, Universitat de Barcelona. España.

Secretaría de Educación Pública (2008). *Reforma Integral de la Educación Media Superior*. Recuperado al 11 de noviembre de 2012 de http://www.reforma-iems.sems.gob.mx

Secretaría de Educación Pública (2009). *Reforma Integral de la Educación Básica.* Recuperado al 11 de noviembre del 2012 dehttp://basica.sep.gob.mx/reformaintegral/sitio/index.php?act=rieb

Secretaría de Educación Pública (2011). *Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares.* Recuperado al 11 de noviembre del 2012 de http://enlace.sep.gob.mx/

Serna G. (2007). Programas educativos basados en competencias y su compromiso con el desarrollo humano.*Revista Didac* 49(1), 16-22.

ANEXO A

Análisis de libro de texto

Del análisis realizado a las situaciones problema presentes en la unidad uno mencionamos las prácticas matemáticas, los objetos matemáticos y los procesos puestos en juego en dichas situaciones.

Prácticas matemáticas

El autor da por hecho que el estudiante para solucionar el problema sabe • Dibujar e identificar figuras geométricas: triángulos, cuadrados, círculos, rectángulo, trapecio; argumentar las fórmulas para calcular su área • Estimar, calcular y comparar áreas • Evaluar valores del dominio en una función dada • Graficar una función dada • Calcular distancias • Calcular puntos de intersección de dos funciones (rectas) • Dividir intervalos en subintervalos de igual longitud • Representar una suma mediante una sumatoria y calcularla • Calcular límites • Aproximar y calcular el área bajo la gráfica de una función • Reglas básicas de derivación • Encontrar antiderivadas y aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo

Objetos matemáticos

Situaciones problema Encontramos situaciones de contexto extra-matemático: • Calcular la distancia recorrida en un intervalo de tiempo determinado • Calcular la cantidad de latas recicladas en un intervalo de tiempo determinado • Calcular la cantidad de teléfonos celulares que se venden en EUA en determinado tiempo • Calcular la cantidad de varones con edad entre los 60 y 65 años que viven en México en determinado intervalo de tiempo Encontramos situaciones de contexto intra-matemático: • Calcular áreas de figuras geométricas • Representar y calcular de sumas utilizando sumatorias • Calcular el área bajo la gráfica de una función en un intervalo determinado

- Calcular el área entre funciones

Elementos lingüísticos

- Natural: presente en la redacción de la situación problema
- Algebraico: presente en la redacción de la situación problema, en la presentación de fórmulas, en el cálculo de límites, derivadas e integrales
- Tabular: usado para presentar datos
- Gráfico: usado para representar funciones, figuras geométricas

Conceptos-definiciones

- Plano cartesiano, eje vertical, eje horizontal, intervalos, subintervalos
- Número natural, número entero, número racional, número irracional
- Distancia, velocidad, tiempo, movimiento
- Área, volumen, base, altura, cuadrado, rectángulo, triángulo, trapecio, paralelogramo, círculo
- Función, gráfica de una función, función constante, recta, intersección de funciones.
- Sumatoria
- Exponenciación, radicación

Proposiciones

- La distancia se determina multiplicando la velocidad promedio por el tiempo mediante la fórmula física $d = vt$.
- El área de un rectángulo de base *b* y de altura *h* es *A=bh*.
- El área de un paralelogramo de base *b* y de altura *h* es *A=bh*.
- El área de un trapecio de base mayor *b*, base menor *a* y altura *h* es $A = \frac{1}{2}(b + a)h$.
- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
- El área bajo la gráfica de la función corresponde a la distancia recorrida por el barco en un intervalo de tiempo determinado
- El área bajo la gráfica de la función corresponde a la cantidad de hombres entre 60 y 65 años en México en determinado intervalo de tiempo

Procedimientos

- Calcular de áreas de figuras geométricas: rectángulos, triángulos, círculos, cuadrados, trapecios, paralelogramos.
- Comparar y estimar áreas.
- Determinar la o las figuras que se forma bajo la gráfica de una función.
- Dividir un intervalo [a, b] en subintervalos iguales.

• Calcular de raíces de números naturales. • Calcular de sumas y diferencias de números naturales. • Calcular de sumatorias • Representar sumas dadas en sumatorias • Calcular el límite de la sumatoria • Calcular la integral definida • Determinar la antiderivada de funciones dadas • Obtener una función que represente los datos presentes en la tabla • Aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo
Argumentos • Se pide a los estudiantes que expliquen por qué la fórmula del rectángulo es *A=bh.* El mismo caso para el paralelogramo, el triángulo y el trapecio • El resultado de la integral se comprueba derivándolo y comparándolo con la función integrando • El área bajo la gráfica de una función se comprueba con el programa graph • Se pide a los estudiantes que expliquen por qué si a y b son dos número cualesquiera positivos y $a<b$, el área bajo la curva $f(x) = x^3$ de $x=a$ hasta $x=b$ está determinada por la fórmula $\int_a^b x^3 dx = \frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{4}a^4$

Procesos matemáticos

En seguida se mencionan los procesos matemáticos que realiza el autor al proponer esta actividad y los que promueve en el estudiante al resolverla.

Autor • Proceso de representación al momento de graficar funciones dadas • Proceso de algoritmización al calcular la integral de funciones • Proceso de comunicación al explicar la relación entre el área bajo la curva, el límite de la sumatoria de n rectángulos que circunscriben el área bajo la curva cuando n tiende a infinito y la integral • Proceso de institucionalización “el Teorema Fundamental del Cálculo. Si la función *f(x)* tiene una gráfica sobre el intervalo [a, b], entonces: $\int_a^b f(x)dx = G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$, donde *G(x)* es cualquier antiderivada de *f(x)* sobre [a, b]. Es decir, *G(x)* es una función cuya derivada es *f(x)*” • Proceso institucionalización “si conociendo la derivada se trata de obtener la función que dio origen a esta derivada, en este proceso estaremos hablando de antiderivadas, llamadas también funciones primitivas” • Proceso de institucionalización “La integral nos da el parea entre la gráfica y el eje x a lo largo de un intervalo asignando signo positivo a las áreas arriba del eje x y signo negativo a las áreas debajo del eje x”

Estudiante

- Proceso enunciación al expresar la relación existente entre la integral y la función integrando
- Proceso de particularización cuando usa las reglas básicas de derivación
  Si $f(x) = ax^n$, c ∈ R y n ∈ N, entonces $f^{\prime}(x) = anx^{n-1}$
  Si $f(x) = u(x) + v(x)$, entonces $f^{\prime}(x) = u^{\prime}(x) + v^{\prime}(x)$
  Si $f(x) = c, c \in R$, entonces $f^{\prime}(x) = 0$
- Proceso de significación
- Proceso algoritmización al calcular integrales y derivadas de funciones dadas
- Proceso argumentación al explicar las áreas negativas
- Proceso de generalización al generalizar el valor de integrales del mismo tipo

Del análisis realizado a las situaciones problema presentes en la unidad dos mencionamos las prácticas matemáticas, los objetos matemáticos y los procesos puestos en juego en dichas situaciones.

Prácticas matemáticas

El autor da por hecho que el estudiante para solucionar el problema sabe

- Evaluar funciones
- Gráficas de funciones de polinomios
- Realizar despejes
- Determinar las raíces en una función cuadrática
- Determinar expresiones algebraicas de funciones de grado dos cuando se le indica la altura máxima y la distancia entre sus raíces
- Reglas básicas de derivación
- Reglas básicas de antiderivación
- Calcular el área entre funciones usando la integral definida
- Métodos de integración: sustitución, por partes, fracciones parciales, integrales trigonométricas, de sustitución trigonométrica

Objetos matemáticos

Situaciones problema

Encontramos situaciones de contexto extra-matemático:

- Calcular el intervalo de tiempo en el que una piedra sube, la velocidad con la que choca con el suelo y el tiempo en que lo hace al ser lanzada hacia arriba
- Calcular la altura de un edificio
- Determinar el área que hay que adornar con mosaico en una iglesia

Encontramos situaciones de contexto intra-matemático:

- Resolver integrales indefinidas

Elementos lingüísticos

- Natural: presente en la redacción de las situaciones problemas.
- Algebraico: usado para representar y calcular integrales indefinidas
- Gráfico: usado para representar las funciones

Conceptos-definiciones

- Número, negativo, número racional, número positivo
- Función, función trigonométrica, función de polinomios, gráfica de función, parábola,
- Derivada, recta tangente, pendiente, punto máximo,
- Antiderivada, integral indefinida, integral definida, constante de integración

Proposiciones

- $\int kdx = kx + c$
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
- $\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- $\int kf(x)dx = k\int f(x)$
- La derivada de una función es el valor de la pendiente de la recta tangente en cada punto *x*
- En un punto máximo el valor de la recta tangente a la función es cero
- La función aceleración es la derivada de la función velocidad
- La función velocidad es la derivada de la función posición
- La derivada de la integral de *f(x)* es igual a *f(x)*

Procedimientos

- Calcular la integral indefinida de funciones y generalizar el resultado para funciones del mismo tipo
- Aplicación de reglas básicas de integración para calcular integrales indefinidas
- Aplicación de técnicas de integración para calcular integrales indefinidas
- Aplicación de reglas básicas de derivación para verificar el cálculo de integrales indefinidas.

Argumentos

- Se recurre a los principios de inducción matemática para generalizar resultados, es decir, al alumno se le presentan unos casos, él resuelve otros y a partir de ellos generaliza
- Para verificar el resultado de las integrales indefinidas lo alumnos: utiliza la

derivada, la gráfica de la función

Procesos matemáticos

En seguida se mencionan los procesos matemáticos que realiza el autor al proponer esta actividad y los que promueve en el estudiante al resolverla.

<table>
<tr><td>Autor
Proceso algoritmización al calcular integrales y derivadas de funciones dadas.
Proceso de particularización al momento de usar las reglas básicas de integración y derivación
Proceso de significación de integral indefinida
Proceso de representación de las funciones
Proceso de comunicación</td></tr>
<tr><td>Estudiante
Proceso de significación de la integral indefinida
Proceso algoritmización al calcular integrales indefinidas
Proceso de generalización al generalizar el valor de integrales del mismo tipo
Proceso de argumentación al comprobar el resultado de la integral indefinida
Proceso de representación al graficar funciones
Proceso de comunicación
Proceso de particularización al momento de usar métodos de integración</td></tr>
</table>

Del análisis realizado a las situaciones problema presentes en la unidad tres mencionamos las prácticas matemáticas, los objetos matemáticos y los procesos puestos en juego en dichas situaciones.

Prácticas matemáticas

<table>
<tr><td>El autor da por hecho que el estudiante para solucionar el problema sabe
Evaluar funciones
Funciones trigonométricas
Propiedades de triángulos
La fórmula para calcular el volumen: de un cilindro y de un cono
Aplicar la Ley de Hooke, la fuerza f(x) para extender o comprimir un resorte en x unidades a partir de su estado natural, está dada por la función f(x)=kx, donde k es una constante de elasticidad
Aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo</td></tr>
</table>

Objetos matemáticos

Situaciones problema Encontramos situaciones de contexto extra-matemático: • Calcular el trabajo realizado para estirar un resorte • Calcular la distancia recorrida por un ciclista • Calcular los gastos de una empresa • Calcular la cantidad de habitantes en un poblado Encontramos situaciones de contexto intra-matemático: • Calcular el volumen que se genera al rotar alrededor del eje x el área bajo las funciones : $F(x) = c, f(x) = \frac{1}{2}x, f(x) = x^2$
Elementos lingüísticos • Natural: presente en la redacción de las situaciones problemas • Gráfico: usado para representar la situación problema, las funciones y los sólidos generados al rotar alrededor del eje el área bajo estas funciones • Algebraico: usado para representar la integral definida, sumatorias y límites
Conceptos-definiciones • Trapecio, triángulo, rectángulo, elipse, área, volumen, cilindro, cono, radio, altura, diámetro, eje mayor, eje menor • Función, función constante, intervalo cerrado, gráfica de la función, límite de la sumatoria • Integral definida, área bajo la gráfica de la función, Teorema Fundamental del Cálculo
Proposiciones • Al girar alrededor del eje x la región bajo la curva en [a,b] de *f(x)=C* se obtiene un cilindro • Al girar alrededor del eje x la región bajo la curva en [0,b] de $f(x) = \frac{1}{2}x$se obtiene un cono • Para una función continua en [a, b], el volumen del sólido de revolución generado al rotar el área bajo la gráfica de una función alrededor del eje x, se obtiene al resolver la integral: $V = \int_a^b \pi f(x)^2$dx
Procedimientos

• Agotar el área bajo la gráfica de la función fuerza con un número infinito de rectángulos circunscritos • Aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo para calcular: el volumen del sólido que se obtiene al girar la región bajo la función *f(x)* en un intervalo [a,b], la distancia en la que se abre un paracaídas y la velocidad en que lo hace, el trabajo requerido para bombear pintura de una cubeta cilíndrica • Calcular el trabajo realizado utilizando la fórmula para calcular el área de un triángulo y utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo
Argumentos Se pide a los estudiantes: • Expliquen porque el radio de la base del cilindro es c y su altura *b-a* • Expliquen porque el radio del cono es $\frac{1}{2}b$ y su altura *b* • Verifiquen si el resultado de la integral equivale a la fórmula para calcular el volumen de los sólidos generados al rotar sobre el eje x las funciones $f(x) = c$, $f(x) = \frac{1}{2}x$

Procesos matemáticos

En seguida se mencionan los procesos matemáticos que realiza el autor al proponer esta actividad y los que promueve en el estudiante al resolverla.

Autor • Proceso de significación de la integral como: el trabajo realizado, el volumen de un sólido • Proceso de comunicación • Proceso de representación al presentar las gráficas de las funciones • Proceso de idealización • Proceso de institucionalización al decir "para una función *f(x)* continua en [a, b], el volumen del sólido de revolución generado al rotar el parea bajo la gráfica de *f(x)* alrededor del eje *x*, se obtiene resolviendo la siguiente integral: $V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 \mathrm{dx}$"
Estudiante • Proceso de idealización • Proceso de significación de los triángulos con ángulo de 45 grados, de la integral como: un volumen, una fuerza aplicada, el trabajo realizado, la distancia recorrida, el gasto de una empresa, el ingreso, el precio y la cantidad de habitantes en un pablado • Proceso algoritmización al calcular área y volumen, al calcular la integral

definida

- Proceso de argumentación al explicar porque el radio de la base del cilindro es C y su altura *b-a*
- Proceso de comunicación
- Proceso de enunciación
- Proceso de representación al graficar funciones

ANEXO B

Evaluación

Problemas de cálculo integral

Nombre____

1.- Calcular el área comprendida entre gráfica de la función $f(x) = e^x + 2x$ y el eje x de x=1 a x=3

2.- En un tanque vacío se suministra un flujo de agua a una velocidad

$$v(t) = 30t - t^2, \text{ donde} t \text{ está medido en minutos}$$

Si sabemos que a los 20 minutos el tanque se empieza a derramar, calcular cuál es la capacidad en litros del tanque

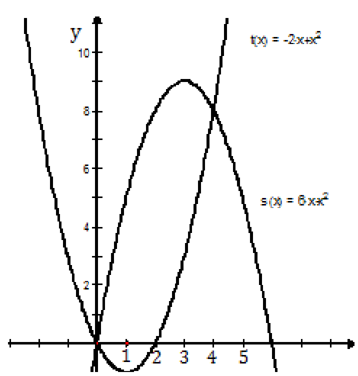
3.- Un objeto se mueve con una velocidad $v(t) = 2t + 2\, m/s$. Calcula la distancia que recorre en 1 minuto

4.- Calcular el área comprendida entre la gráfica de la función $x^2 - 4$ el eje x y las rectas x=0, x=4

5.- A partir de los 40 días de nacido y hasta cumplir un año, el aumento en libras por días de un cerdo es f(x)=0.002x+0.4, donde x indica la edad en días. ¿Cuántas libras aumenta el cerdo entre los 40 y los 100 días de nacido?

6.- Calcula $\int_1^3 (4x^3 - 2x^2 + 1)dx$ y plantea dos problemas que se resuelvan utilizando esta integral

7.- Calcular el área comprendida entre las gráficas de las funciones f(x)= $6x - x^2$ y g(x)= $-2x + x^2$. Enseguida se muestran sus gráficas



8.- Determinar un polinomio de la forma $p(x) = ax^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}$ sabiendo que verifica las tres condiciones siguientes

- P(0)=0
- Tiene un máximo en x=1
- El área bajo la gráfica de la función p(x) desde x=0 hasta x=2 es 20/3

9.- Para calcular las ganancias de una empresa se deben considerar dos factores fundamentales: los ingresos y los costos. Los ingresos representan el dinero total que entra en la empresa, mientras que los costos representan el total de dinero que sale de la misma. De modo que, si por un lado entra dinero y por otro sale, la diferencia de lo que entra menos lo que sale son las ganancias.

Así:
G =I −C,
Donde:
G: ganancias
I: ingresos
C: costos

Una empresa decide patrocinar durante un año a un popular cantante. Durante los primeros meses los ingresos aumentaban y los costos disminuían con el transcurso del tiempo. Al término del séptimo mes la situación se revirtió: los ingresos disminuían y los costos aumentaban considerablemente. Los empresarios decidieron realizar un estudio económico a fin de pronosticar el momento más propicio para cancelar los contratos y dar por terminado el negocio.

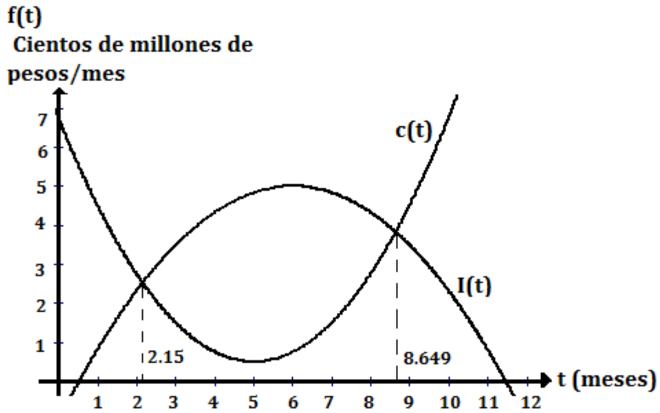
Con el estudio se pudieron determinar las funciones para los ingresos y los costos. La tasa de ingresos mensuales que percibía la empresa estaba representada por la función:

$$I(t) = -\frac{1}{6}(t-6)^2 + 5 \text{cientos de millones de pesos/mes;}$$

Mientras que la tasa de costos mensuales estaba representada por la función:

$$C(t) = \frac{1}{4}(t-5)^2 + 0.5 \text{cientos de millones de pesos/mes}$$

En la siguiente gráfica se representan las funciones de ingresos y costos.



Responde lo siguiente:

a) Observa la gráfica y explica ¿qué sucede con las ganancias de la empresa los primeros 2 meses?, ¿qué sucede con las ganancias de la empresa del segundo al octavo mes?, ¿qué sucede con las ganancias de la empresa del noveno mes en adelante? Justifica tus respuestas
b) Calcular las ganancias de la empresa en los primeros cuatro meses.
c) El resultado que obtuviste ¿es el que esperabas?, ¿qué significa para la empresa el resultado?
d) Calcula las ganancias de la empresa durante los 12 meses que dura el contrato
e) ¿Cuál es el intervalo de tiempo, empezando en cero, para el cual la empresa tiene mayor ganancia? Justifica tu respuesta
f) Si fueras el dueño de la empresa ¿cuánto tiempo patrocinarías al cantante? Justifica tu respuesta
g) Realiza un bosquejo de la gráfica de la ganancia y utilízala para explicar el comportamiento de la ganancia
h) Diseña un modelo que te permita calcular la ganancia de la empresa en cualquier intervalo de tiempo, justifica tu respuesta

ANEXO C

Análisis de evaluaciones

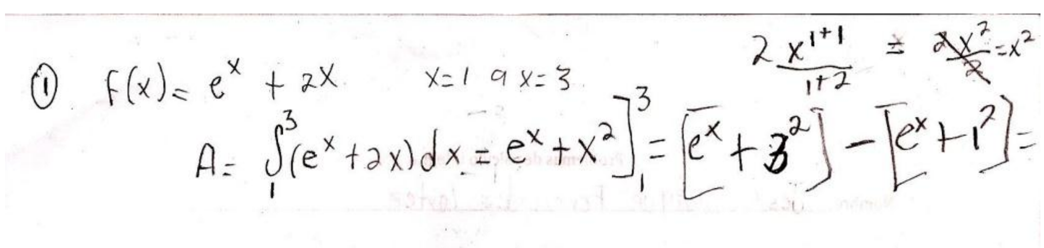
Alumno 1

Enseguida, evaluamos el desarrollo que tiene el alumno 1 de las competencias disciplinares establecidas en la Reforma Integral de la Educación Media Superior (2008). Para ello, identificamos las prácticas matemáticas, los objetos matemáticos primarios y los procesos matemáticos presentes en la respuesta que el alumno da a cada problema. Para determinar si la competencia está presente y el nivel en el que lo hace primeramente identificamos la capacidad relacionada a cada competencia que se interpreta de la respuesta del estudiante.

Problema 1

Prácticas matemáticas

Las prácticas matemáticas más notorias que realiza el estudiante son la lectura de la situación problema y la producción de una serie de procedimientos para darle respuesta, quedando ésta trunca. El estudiante para calcular el área solicitada en la situación problema plantea una integral definida y encuentra la antiderivada de manera correcta pero no puede darle solución a la situación ya que desconoce a la función $f(x) = e^x$como tal. Durante el examen el estudiante cuestiona:e^x *es una constante.*



① $f(x) = e^x + 2x \quad x=1 \text{ a } x=3$

$\frac{2x^{1+1}}{1+2} \doteq \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} = x^2$

$A = \int_1^3 (e^x + 2x)\,dx = e^x + x^2\Big]_1^3 = \left[e^x + 3^2\right] - \left[e^x + 1^2\right] =$

Imagen 1.1 Respuesta del estudiante 1 al problema 1

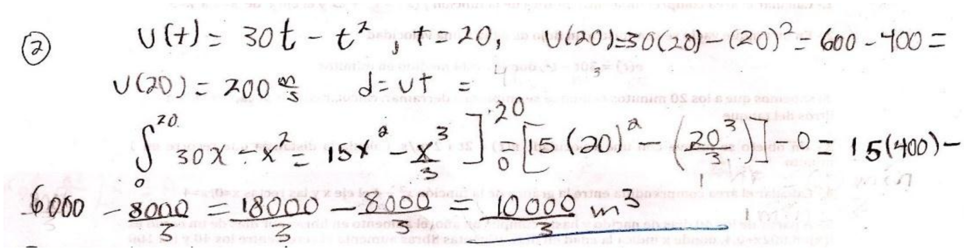
Conflicto semiótico

- Desconocer que e^x es una función

Problema 2

Prácticas matemáticas

Las prácticas matemáticas más notorias que realiza el estudiante son la lectura de la situación problema y la producción de una serie de procedimientos encaminados a darle respuesta. En un primer intento por resolver el problema el estudiante evalúa en la función velocidad de flujo, después elige la integral definida como la herramienta para solucionar el problema; el estudiante determina de manera correcta la antiderivada y evalúa los límites de integración de manera correcta, solucionando así la situación problema.



(2) $v(t) = 30t - t^2$, $t = 20$, $v(20) = 30(20) - (20)^2 = 600 - 400 =$

$v(20) = 200 \frac{m}{s}$ $d = vt =$

$\int_0^{20} 30x - x^2 = 15x^2 - \frac{x^3}{3} \Big]_0^{20} = \left[15(20)^2 - \left(\frac{20^3}{3}\right)\right] - 0 = 15(400) -$

$6000 - \frac{8000}{3} = \frac{18000}{3} - \frac{8000}{3} = \frac{10000}{3} m^3$

Imagen 1.2 Respuesta del estudiante 1 al problema 2

Situación problema

Ver problema 2.

Lenguajes

- Algebraico: usado en la representación y cálculo de la integral definida.
- Numérico: usado para dar respuesta a la situación problema.

Conceptos-Definiciones

Integral definida, antiderivada, función velocidad de flujo, Teorema Fundamental del Cálculo.

Proposiciones

- El volumen de un tanque cuya velocidad de flujo se representa con la función $v(t) = 30t - t^2$, a los 20 minutos, se calcula resolviendo $\int_0^{20} (30t - t^2)\, dt$.
- $\int_0^{20} (30t - t^2)\, dt = 15x^2 - \frac{x^3}{3}]_0^{20}$.
- Teorema Fundamental del Cálculo.

Procedimientos

- Relacionar la integral definida con el cálculo de volúmenes.
- Utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema.

Argumentos

De manera implícita el estudiante argumenta la capacidad del tanque calculando $\int_0^{20} (30t - t^2)\, dt$.

Procesos matemáticos

- Proceso de significación de la integral definida como el volumen de un tanque.

- Proceso de algoritmización al resolver la integral definida.
- Proceso de argumentación en tanto se usa la integral definida para calcular la capacidad del tanque.
- Proceso de comunicación en el sentido que el alumno entiende la situación problema y produce un texto que le da respuesta.

C1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “estructurar el campo o situación del que hay que realizar el modelo; traducir la «realidad» a estructuras matemáticas en contextos que no son demasiado complejos pero que son diferentes a los que están acostumbrados los estudiantes. Comporta también saber interpretar alternando los modelos (y de sus resultados) y la realidad, y sabiendo también comunicar los resultados del modelo”, descriptor que sitúa al estudiante con esta competencia en el nivel de conexión. El indicador para afirmar que este descriptor está presente en la respuesta del estudiante es el conocimiento de las situaciones problema que ha resulto el estudiante usando la integral definida. En clase se promueve el uso de la integral definida en el cálculo de áreas y en este caso se pide determinar la capacidad de un tanque conociendo el tiempo en el que se empieza a derramar y la función velocidad de flujo.

C2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “plantear y formular problemas más allá de la reproducción de los problemas ya practicados de forma cerrada; resolver tales problemas mediante la utilización de procedimientos y aplicaciones estándar pero también de procedimientos de resolución de problemas más independientes que implican establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas y distintas formas de representación y comunicación (esquemas, tablas, gráficos, palabras e ilustraciones)”, descriptor que sitúa al estudiante con esta competencia en el nivel de conexión. El indicador para asegurar que este descriptor está presente en la respuesta del estudiante es el análisis realizado a los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos procedimientos: aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema y relacionar la integral definida con el cálculo de la capacidad de un tanque conociendo la función velocidad de flujo y el tiempo en que se empieza a derramar el agua, relación que no fue abordada en clases.

C3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera", descriptor que sitúa al estudiante con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los procesos matemáticos involucrados en la solución de la situación problema. En dicho análisis encontramos el proceso de comunicación, el estudiante entiende la situación problema, establece la relación entre la integral definida y el cálculo de la capacidad de un tanque, en tanto elige esta herramienta para resolver el problema.

C4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático

Consideramos que dicha competencia no se muestra en la respuesta del alumno, aunque se podría justificar con la elección de la integral definida para resolver el problema las capacidades "seguir y justificar los procesos cuantitativos estándar, entre ellos los procesos de cálculo, los enunciados y los resultados", pero de todos modos nos inclinamos por la primera opción.

C5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "formular preguntas (¿cómo hallamos...?, ¿qué tratamiento matemático damos...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (plasmadas mediante tablas, gráficos, álgebra, cifras, etc.)", descriptor que sitúa al estudiante con esta competencia en el nivel de conexión. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante está presente este descriptor es el análisis de los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite mencionar cuáles son estos procedimientos: relacionar la integral definida con el cálculo de volúmenes y utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema.

C6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "descodificar, codificar e interpretar formas de representación más o menos familiares de los objetos matemáticos; seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos, y traducir y diferenciar entre diferentes formas de representación", descriptor que sitúa al estudiante con esta competencia en el nivel de conexión. El indicador para afirmar que este descriptor está presente en la respuesta del estudiante es el conocimiento de las situaciones problema que ha resulto el estudiante usando la integral definida y el análisis realizado a los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos objetos matemáticos: numérico y algebraico, los cuales han estado presentes en las actividades resueltas en clase pero el contexto en este caso es distinto, al estudiante se le pide calcular la capacidad de un tanque conociendo la función velocidad de flujo y el tiempo en el que se empieza a derramar el agua.

C7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "comprende y emplear conceptos matemáticos en contextos que difieren ligeramente de aquellos en los que se introdujeron por primera vez o en los que se han practicado después", descriptor que sitúa al estudiante con esta competencia en el nivel de conexión. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante está presente este descriptor es el análisis de los conceptos-definiciones (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema y la poca familiaridad que tiene los estudiantes con este tipo de situaciones problema. Dicho análisis nos permite mencionar cuáles son estos conceptos-definiciones: integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo; los cuales han estado presentes en las actividades resueltas en clase, sin embargo, en este caso el contexto es distinto.

C8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico básico en situaciones y contextos menos conocidos y manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos familiares", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de conexión. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos lenguajes: algebraico y numérico, objetos que son familiares para los estudiantes ya que fueron abordados en clases; sin embargo, el contexto en el que fueron abordadas es distinto al de la situación problema que se pide resolver al estudiante.

Problema 3

Prácticas matemáticas

El estudiante reconoce la fórmula $d = vt$ y la aplica para calcular la distancia que recorre un objeto en un minuto sabiendo que su velocidad es $v(t) = 2t + 2\, m/s$. Primeramente el estudiante evalúa el uno en la función velocidad, de esta manera obtiene la velocidad en un minuto; el resultado lo multiplica por uno (el tiempo transcurrido). Procedimientos no válidos para resolver la situación problema.

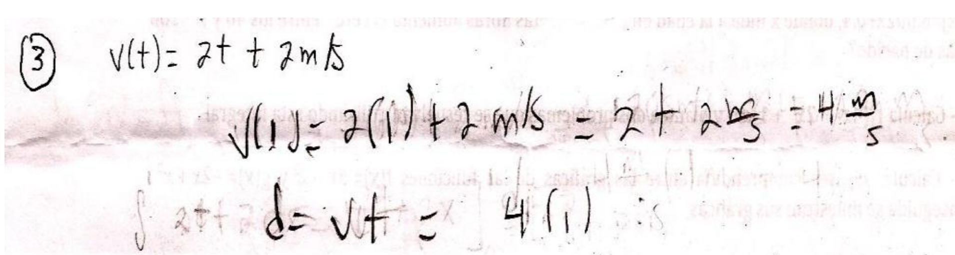


Imagen 1.3 Respuesta del estudiante 1 al problema 3
Conflictos semióticos • No identifica que las unidades de la velocidad son metros por segundo y se le pide calcular la distancia en minutos, es decir, no realiza la conversión de unidades. • Aplica la fórmula $d = vt$ sin tener en cuenta que es válida sólo cuando la velocidad es constante. • No relaciona la integral definida con el cálculo de la distancia recorrida.

Problema 4

Prácticas matemáticas

En el primer intento que realiza el estudiante por solucionar la situación problema primeramente calcula los límites de integración, puntos que él denomina *puntos de intersección,* estos puntos los calcula igualando la función a cero y a cuatro; después platea que el área por calcular es igual a la diferencia entre las integrales definidas de las funciones $f(x) = 4\ y g(x) = x^2 - 4$ desde $x = -\sqrt{8}$ hasta $x = \sqrt{8}$; el estudiante resuelve estas integrales y presenta el resultado. Procedimientos no válidos para darle solución a la situación problema.

Durante la entrevista se le pide al estudiante un bosquejo de la gráfica de la función y se le hacen ver los puntos donde cruza al eje x a lo que el estudiante comenta: *calculé mal los puntos de intersección,* después se le pide resolver la situación problema y el estudiante elige la integral definida como herramienta para hacerlo. El estudiante no reflexiona acerca del comportamiento de la función en el intervalo donde se pide calcular el área.

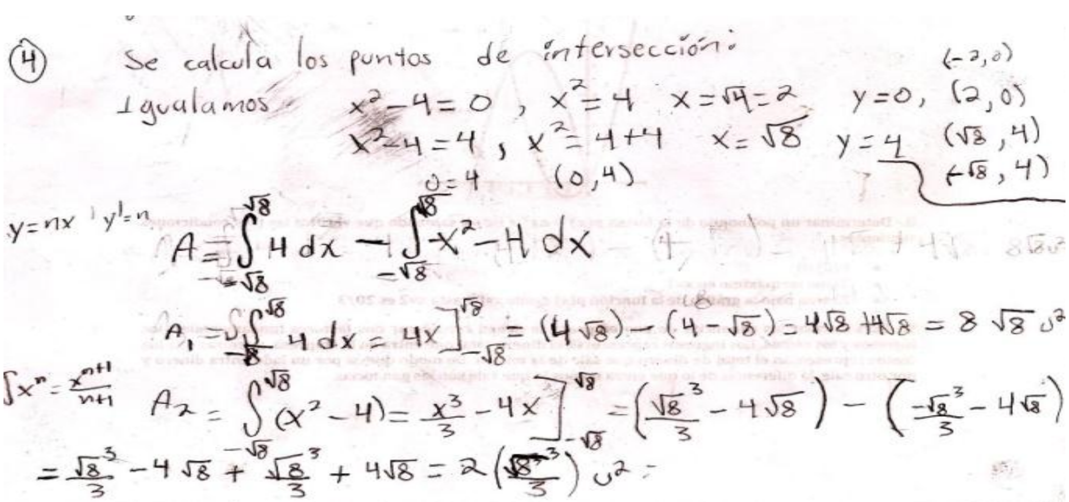

(4) Se calcula los puntos de intersección: (-2,0)
Igualamos $x^2-4=0$, $x^2=4$ $x=\sqrt{4}=2$ $y=0$, (2,0)
$x^2-4=4$, $x^2=4+4$ $x=\sqrt{8}$ $y=4$ $(\sqrt{8},4)$
$0=4$ (0,4) $(-\sqrt{8},4)$
$y=nx$ $y'=n$
$A=\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} 4\,dx - \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} x^2-4\,dx$
$A_1=\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} 4\,dx = 4x\Big]_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} = (4\sqrt{8})-(4\cdot-\sqrt{8}) = 4\sqrt{8}+4\sqrt{8} = 8\sqrt{8}\ u^2$
$\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ $A_2=\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}}(x^2-4) = \frac{x^3}{3}-4x\Big]_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} = \left(\frac{\sqrt{8}^3}{3}-4\sqrt{8}\right)-\left(\frac{-\sqrt{8}^3}{3}-4\sqrt{8}\right)$
$=\frac{\sqrt{8}^3}{3}-4\sqrt{8}+\frac{\sqrt{8}^3}{3}+4\sqrt{8} = 2\left(\frac{\sqrt{8}^3}{3}\right)u^2$

Imagen 1.4 Respuesta del estudiante 1 al problema 4

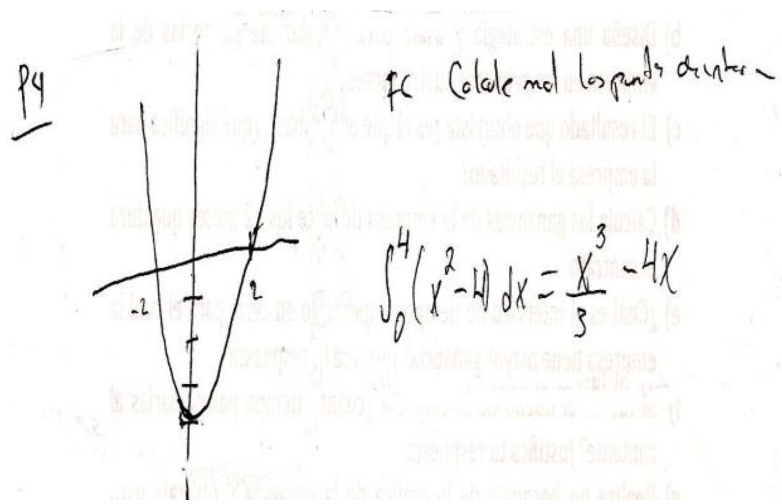


Imagen 1.4.1 Respuesta del estudiante 1 al problema 4 (entrevista)

Conflictos semióticos

- La integral definida nos proporciona el área.

Problema 5

Prácticas matemáticas

Las prácticas matemáticas más notorias que realiza el estudiante son la lectura de la situación problema y la producción de un texto como respuesta. Para resolver la situación problema el estudiante utiliza la integral definida como herramienta, determina de manera correcta la antiderivada; al momento de evaluar los límites de integración el estudiante transcribe mal la antiderivada lo que ocasiona que el resultado sea incorrecto.

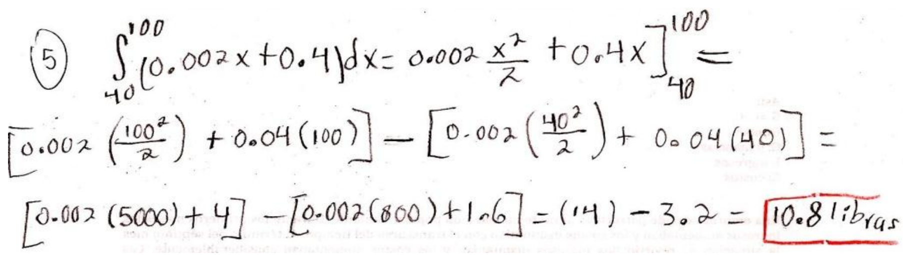


Imagen 1.5 Respuesta del estudiante 1 al problema 5

Situación problema

Ver problema 5

Lenguajes

- Algebraico: usado para representar y calcular la integral definida.
- Numérico: usado para dar el resultado de la integral.

Conceptos-Definiciones

Integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo.

Proposiciones

- Si la función aumento de peso es $f(x) = 0.002x + 0.4$ entonces el aumento de peso que tiene el cerdo entre los días 40 y 100 se calcula resolviendo $\int_{40}^{100}(0.002x + 0.4)dx$.
- $\int_{40}^{100}(0.002x + 0.4)dx = \frac{0.002x^2}{2} + 0.4x]_{40}^{100}$.
- Teorema Fundamental del Cálculo.

Procedimientos

- Relacionar la integral definida con el cálculo del aumento de peso de un cerdo en un intervalo de tiempo.
- Aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema.

Argumentos

De manera implícita el estudiante argumenta el aumento de peso del cerdo entre los días 40 y 100 calculando $\int_{40}^{100}(0.002x + 0.4)dx$.

Procesos matemáticos

- Proceso de significación de la integral definida como el aumento de peso de un cerdo entre los días 40 y 100.
- Proceso de algoritmización al resolver la integral definida.
- Proceso de argumentación en tanto se usa la integral definida para calcular el aumento del peso del cerdo en el intervalo [40, 100].
- Proceso de comunicación en el sentido que el alumno entiende la situación problema y produce un texto que le da respuesta.

C1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "estructurar el campo o situación del que hay que realizar el modelo; traducir la «realidad» a estructuras matemáticas en contextos que no son demasiado complejos pero que son diferentes a los que están acostumbrados los estudiantes. Comporta también saber interpretar alternando los modelos (y de sus resultados) y la realidad, y sabiendo también comunicar los resultados del modelo”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de conexión. El indicador para afirmar que este descriptor está presente en la respuesta del estudiante es el conocimiento de las situaciones problema que ha resulto el estudiante usando la integral definida. En clase se promueve el uso de la integral definida en el cálculo de áreas y en este caso se pide calcular el aumento de peso de un cerdo entre los días 40 y 100.

C2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “plantear y formular problemas más allá de la reproducción de los problemas ya practicados de forma cerrada; resolver tales problemas mediante la utilización de procedimientos y aplicaciones estándar pero también de procedimientos de resolución de problemas más independientes que implican establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas y distintas formas de representación y comunicación (esquemas, tablas, gráficos, palabras e ilustraciones)”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de conexión. El indicador para asegurar que este descriptor está presente en la respuesta del estudiante es el análisis realizado a los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos procedimientos: aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema y relacionar la integral definida con el cálculo del aumento de peso de un cerdo en el intervalo [40, 100], relación que no fue abordada en clases.

C3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los procesos matemáticos involucrados en la solución de la situación problema. En dicho análisis encontramos el proceso de comunicación, el estudiante entiende la situación problema, establece la relación entre la integral definida y el cálculo del aumento de peso de un cerdo en el intervalo [40, 100], en tanto elige esta herramienta para resolver el problema.

C4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático

Consideramos que dicha competencia no se muestra en la respuesta del alumno, aunque se podría justificar con la elección de la integral definida para resolver el problema las capacidades “seguir y justificar los procesos cuantitativos estándar, entre ellos los procesos de cálculo, los enunciados y los resultados”, pero de todos modos nos inclinamos por la primera opción.

C5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "formular preguntas (¿cómo hallamos...?, ¿qué tratamiento matemático damos...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (plasmadas mediante tablas, gráficos, álgebra, cifras, etc.)", descriptor que sitúa al estudiante con esta competencia en el nivel de conexión. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante está presente este descriptor es el análisis de los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite mencionar cuáles son estos procedimientos: relacionar la integral definida con el cálculo del aumento de peso de un cerdo en un intervalo de tiempo y utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema.

C6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "descodificar, codificar e interpretar formas de representación más o menos familiares de los objetos matemáticos; seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos, y traducir y diferenciar entre diferentes formas de representación", descriptor que sitúa al estudiante con esta competencia en el nivel de conexión. El indicador para afirmar que este descriptor está presente en la respuesta del estudiante es el conocimiento de las situaciones problema que ha resulto el estudiante usando la integral definida y el análisis realizado a los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos objetos matemáticos: numérico y algebraico, los cuales han estado presentes en las actividades resueltas en clase pero el contexto en este caso es distinto; al estudiante se le pide calcular el aumento de peso de un cerdo entre los días 40 y 100 conociendo la función con la que aumenta el peso casa día.

C7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "comprende y emplear conceptos matemáticos en contextos que difieren ligeramente de aquellos en los que se introdujeron por primera vez o en los que se han practicado después", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de conexión. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante está presente este descriptor es el análisis de los conceptos-definiciones (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema y la poca familiaridad que tiene los estudiantes con este tipo de situaciones problema. Dicho análisis nos permite mencionar cuáles son estos conceptos-definiciones: integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo; los cuales han estado presentes en las actividades resueltas en clase, sin embargo, en este caso el contexto es distinto.

C8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico básico en situaciones y contextos menos conocidos y manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos familiares”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de conexión. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos lenguajes: algebraico y numérico, objetos que son familiares para los estudiantes ya que fueron abordados en clases; sin embargo, el contexto en el que fueron abordadas es distinto al de la situación problema que se pide resolver al estudiante.

Problema 6

Prácticas matemáticas

Las prácticas matemáticas más notorias que realiza el estudiante son la lectura de la situación problema y la producción de un texto como respuesta. El estudiante realiza de manera correcta la determinación de la antiderivada y la evaluación en los límites de integración, lo que produce que la respuesta del estudiante sea incorrecta es que el estudiante se equivoca en la resta de fracciones.

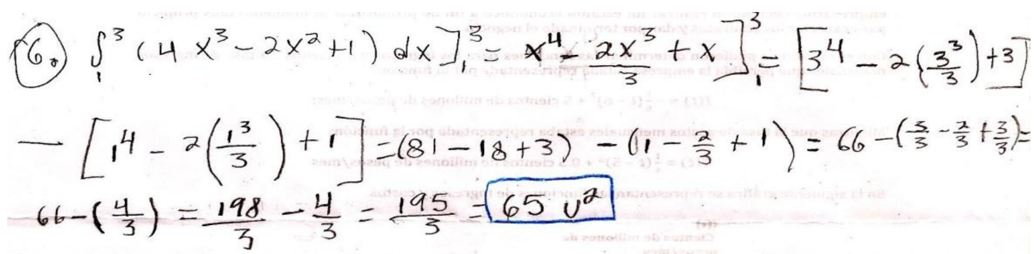


Imagen 1.6 Respuesta del estudiante 1 al problema 6

Situación problema

Ver problema 6.

Lenguajes

- Algebraico: usado para representar y calcular la integral definida.
- Numérico: usado para dar respuesta a la situación problema.

Conceptos-Definiciones

Integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo.

Proposiciones

- $\int_1^3 (4x^3 - 2x^2 + 1)dx = x^4 - \frac{2x^3}{3} + x]_1^3.$

• Teorema Fundamental del Cálculo. **Procedimientos** • Aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema. **Argumentos**
Procesos matemáticos • Proceso de significación de la integral definida como un número. • Proceso de algoritmización al resolver la integral definida. • Proceso de comunicación en el sentido que el alumno entiende la situación problema y produce un texto que le da respuesta.

C1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "reconocer, recopilar, activar y aprovechar modelos familiares bien estructurados; comunicar de manera elemental los resultados del modelo", descriptor que sitúa al estudiante con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el conocimiento de las situaciones problema que ha resuelto anteriormente el estudiante, en clase se ha enfrentado al problema de resolver una integral definida como parte del procedimiento para calcular el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b].

C2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques

De la respuesta del estudiante se interpreta al descriptor: "exponer y formular problemas reconociendo y reproduciendo problemas ya practicados puros y aplicados de manera cerrada; resolver problemas utilizando enfoques y procedimientos estándar, normalmente de una única manera", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis realizado a los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos procedimientos: utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema; el cual fue practicado en clase mientras se resolvían problemas de cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función y en eje x en un intervalo [a, b].

C3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los procesos matemáticos involucrados en la solución de la situación problema. En dicho análisis encontramos el proceso de comunicación, el estudiante entiende la situación problema y utiliza el Teorema Fundamental del Cálculo para dar respuesta. El estudiante se equivoca al momento de dar el valor numérico pero para nosotros hay otras acciones que sobresalen.

C4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático

En la respuesta del estudiante no se interpreta esta competencia.

C5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "formular las preguntas más simples (¿cuántos...?, ¿cuánto es...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (tantos, tanto)", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante está presente este descriptor es el análisis de los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite mencionar cuáles son estos procedimientos: utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema.

C6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "descodificar, codificar e interpretar representaciones de objetos matemáticos previamente conocidos de un modo estándar que ya ha sido practicado. El paso de una representación a otra sólo se exige cuando ese paso mismo es una parte establecida de la representación", descriptor que sitúa al estudiante con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es la estrecha relación que tiene la situación problema con las que ha resuelto el estudiante anteriormente y el análisis realizado a los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos lenguajes: algebraico y numérico, los cuales han estado presentes en las actividades resueltas en clase.

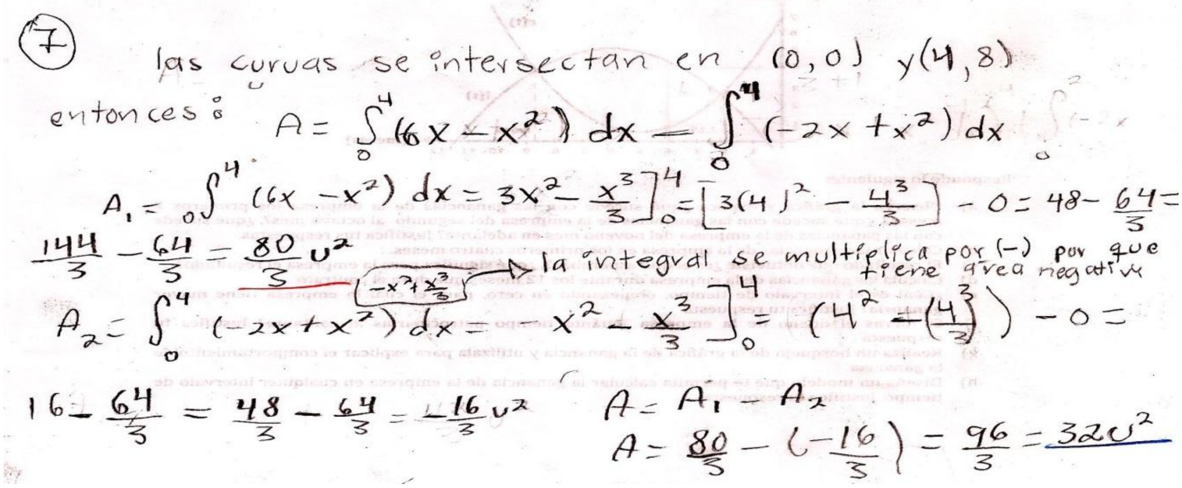
C7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "comprender y emplear conceptos matemáticos en el mismo contexto en el que se introdujeron por primera vez o en el que se han practicado subsiguientemente", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los conceptos-definiciones (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos conceptos-definiciones: integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo; mismos que fueron abordados en clases.

C8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor "descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario que ya se ha practicado en situaciones y contextos sobradamente conocidos; manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos rutinarios", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. En dicho análisis encontramos que los lenguajes utilizados fueron el algebraico y el numérico, mismos que fue practicado en clase para resolver este tipo de situaciones problema.

Problema 7
Prácticas matemáticas El estudiante plantea el área por calcular como la diferencia entre el área comprendida entre la gráfica de la función *f(x)* y el eje x en el intervalo [0, 4] y el área comprendida entre la gráfica de la función *g(x)* y el eje x en el intervalo [0, 4], procedimiento no adecuado para resolver esta situación problema debido a que la función *g(x)* en el intervalo determinado tiene parte negativa. El estudiante denomina A_1 al área comprendida entre la gráfica de la función *f(x)* y el eje x en el intervalo [0, 4] y calcula esta área utilizando la integral definida; el estudiante determina correctamente la antiderivada y evalúa los límites de integración de manera adecuada. El estudiante denomina A_2 al área comprendida entre la gráfica de la función *g(x)* y el eje x en el intervalo [0, 4] y calcula esta área utilizando la integral definida; el estudiante determina correctamente la antiderivada pero explica que debido a que la función posee parte negativa se debe multiplicar por (-), procedimiento incorrecto para el cálculo de A_2; procedimiento que genera un resultado erróneo en la respuesta del estudiante.



(7) las curvas se intersectan en (0,0) y (4,8)

entonces: $A=\int_0^4 (6x-x^2)\,dx - \int_0^4 (-2x+x^2)\,dx$

$A_1=\int_0^4 (6x-x^2)\,dx = 3x^2-\frac{x^3}{3}\Big]_0^4 = \left[3(4)^2-\frac{4^3}{3}\right]-0 = 48-\frac{64}{3} = \frac{144}{3}-\frac{64}{3} = \frac{80}{3}u^2$

$\boxed{-x^2+\frac{x^3}{3}}$ → la integral se multiplica por (−) por que tiene área negativa

$A_2=\int_0^4 (-2x+x^2)\,dx = -x^2-\frac{x^3}{3}\Big]_0^4 = \left(4^2-\left(\frac{4^3}{3}\right)\right)-0 = 16-\frac{64}{3} = \frac{48}{3}-\frac{64}{3} = -\frac{16}{3}u^2$

$A=A_1-A_2$

$A=\frac{80}{3}-\left(-\frac{16}{3}\right)=\frac{96}{3}=32u^2$

Imagen 1.7 Respuesta del estudiante 1 al problema 7

Conflictos semióticos

- Si la función tiene parte negativa en un intervalo dentro del intervalo [a, b], donde se desea conocer el área, la antiderivada de la función se debe multiplicar por -1 para que el resultado represente el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en [a, b].

Problema 8

Prácticas matemáticas

Las prácticas matemáticas más notorias que realiza el estudiante son la lectura de la situación problema y la producción de un texto como respuesta, siendo esta incorrecta. El estudiante proporciona una función polinomial que cumple solamente con una de las tres condiciones establecidas en la situación problema. De esta manera el estudiante relaciona la integral definida con el área comprendida entre la gráfica de una función y el eje x en un intervalo [a, b].

Durante la entrevista el estudiante exterioriza la implicación: $si x = 0 \rightarrow p(x) = 0$ pero no es capaz de hacerla operativa. Después de que el entrevistador le presentó la representación gráfica de la función y el comportamiento de las rectas pendiente de la función, el estudiante menciona: *la pendiente de la recta tangente de la función en el punto máximo es cero.* Además, se le cuestionó acerca de la relación que poseen la derivada de la función y el valor de la recta tangente, a pesar que el estudiante establece la relación entre la derivada de la función y el valor de la recta tangente de la función no es capaz de obtener la derivada de la función $p(x)$.

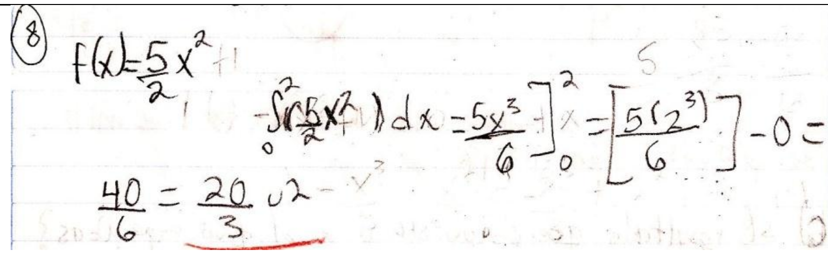


Imagen 1.8 Respuesta del estudiante 1 al problema 8

Conflictos semióticos

- No hace operativa la implicación $si x = 0 \rightarrow p(x) = 0$.
- No puede calcular la derivada de la función $p(x) = ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$.

Problema 9

Prácticas matemáticas

Primeramente se pide al estudiante explicar que sucede con la ganancia de la empresa en intervalos de tiempo determinados, a lo que el estudiante responde: *¿Qué sucede con las ganancias de la empresa los primeros dos meses? Está en ceros porque se intersectan en x=2.15. ¿Qué sucede con las ganancias del segundo al octavo mes? Aumentan, ya que los ingresos aumentan y los costos disminuyen (G=I-C). ¿Qué sucede con las ganancias de la empresa del noveno mes en adelante? Disminuyen, ya que los ingresos disminuyen y los costos aumentan (G=I-C).* De su respuesta se interpreta que el estudiante relaciona correctamente el comportamiento de la ganancia con relación al comportamiento de las funciones costos e ingresos, sin embargo, el estudiante confunde las ganancias negativas y la ganancia nula.

En los incisos b y d se pide al estudiante calcular las ganancias de la empresa los primeros 4 meses y los primero 12 meses, respectivamente. El estudiante responde incorrectamente estas cuestiones calculando de manera puntual las ganancias en los meses 4 y 12, este cálculo lo realiza evaluando (x=4 y x=12) en las funciones ingresos y costos y, calculando la diferencia (ver imagen 1.9); procedimiento que no es el adecuado para resolver la situación problema.

El estudiante presenta un bosquejo de la gráfica de la función ganancia (inciso g) bajo la premisa que al término del mes 7 las ganancias disminuyen y que en el mes 0 y 12 las ganancias son cero, información que no es correcta, lo que conlleva a un bosquejo erróneo (ver imagen 1.9.1).

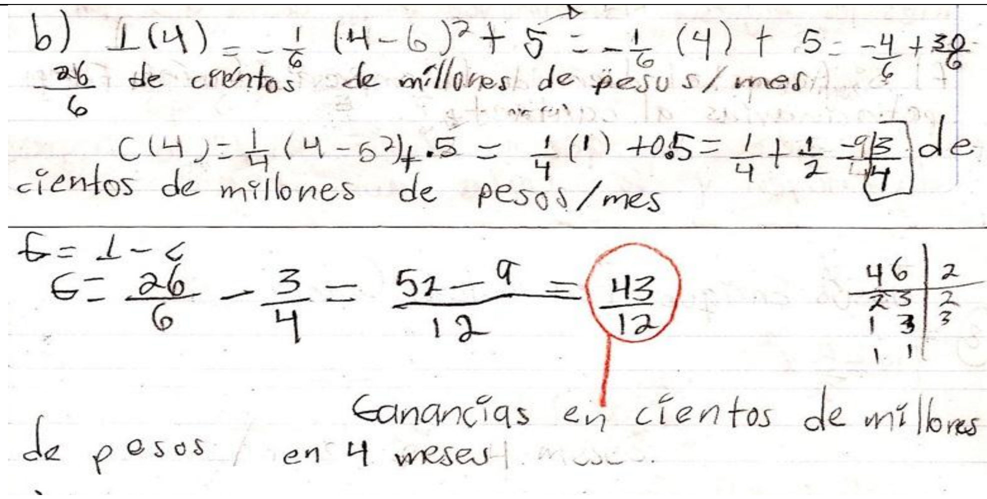


Imagen 1.9 Respuesta del estudiante 1 al problema 9 inciso b

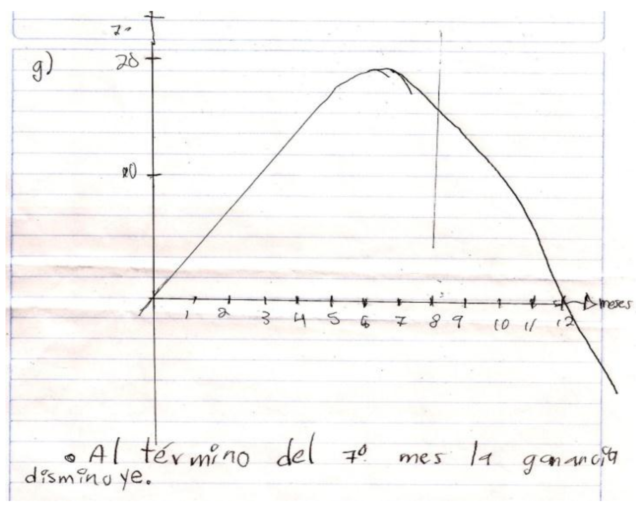


Imagen 1.9.1 Respuesta del estudiante 1 al problema 9 inciso g

Conflictos semióticos

- Confusión entre la ganancia negativa y la ganancia nula.
- No relaciona la integral definida con la ganancia de la empresa.

En la siguiente tabla se presenta la relación entre las situaciones problema y las competencias desarrolladas. En caso de que cierta competencia esté presente indicaremos el nivel en que lo hace de la siguiente manera: nivel de reproducción=1, nivel de conexión=2 y nivel de reflexión=3, en caso de no inferirse alguna competencia de la respuesta del alumno se señala en el recuadro con una línea horizontal (-), esto se debe a que el estudiante no resolvió la situación problema o utilizó procedimientos erróneos, en tal caso más adelante indicaremos los conflictos semióticos que se detectaron.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
Problema 1	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 2	2	2	1	-	2	2	2	2
Problema 3	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 4	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 5	2	2	1	-	2	2	2	2
Problema 6	1	1	1	-	1	1	1	1
Problema 7	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 8	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 9	-	-	-	-	-	-	-	-

De las respuestas del estudiante concluimos que relaciona la integral definida con el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y el eje x en el intervalo [a, b], situaciones problema consideradas de reproducción ya que fueron abordadas en clase. Sin embargo, este tipo de situaciones problema el estudiante no las resuelve de manera correcta en su evaluación (examen o entrevista) por diferentes motivos: no concibe a la función $f(x) = \mathrm{e}^{x}$ como tal, piensa que la integral definida proporciona el área.

Además de la relación mencionada anteriormente el estudiante establece otras relaciones, en el problema 2 establece una relación entre la integral definida y cálculo de volúmenes; en el problema 5 la relaciona con el aumento de peso de un cerdo. De esta manera podemos decir que el estudiante resuelve situaciones problema que no son ya de mera rutina, pero que aún incluyen escenarios familiares o casi familiares.

El estudiante utiliza de manera correcta el Teorema Fundamental del Cálculo en tanto determina las antiderivadas de las funciones integrando adecuadamente, evalúa los límites de integración y produce un resultado numérico, éste no es correcto en todos los casos.

Con base en la información que nos otorga la tabla y los comentarios anteriores agruparemos las competencias matemáticas en los niveles en que se desarrollaron.

Competencias matemáticas	Nivel de desarrollo
C1,C2,C5,C6,C7,C8	Conexión
C1, C2, C3, C5, C6, C7, C8	Reproducción

C4	-

De las situaciones problema que el estudiante ha resuelto incorrectamente enlistamos los conflictos semióticos que se detectaron, por una parte los que tienen relación con el cálculo integral y por otra parte los que están involucrados con temáticas abordadas anteriormente.

Conflictos semióticos en cálculo integral:

- No relaciona la integral definida con el cálculo de la distancia recorrida.
- La integral definida nos proporciona el área.
- Si la función tiene parte negativa en un intervalo dentro del intervalo [a, b], donde se desea conocer el área, la antiderivada de la función se debe multiplicar por -1 para que el resultado represente el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en [a, b].
- No relaciona la integral definida con la ganancia de la empresa.

Conflictos semióticos en otras áreas:

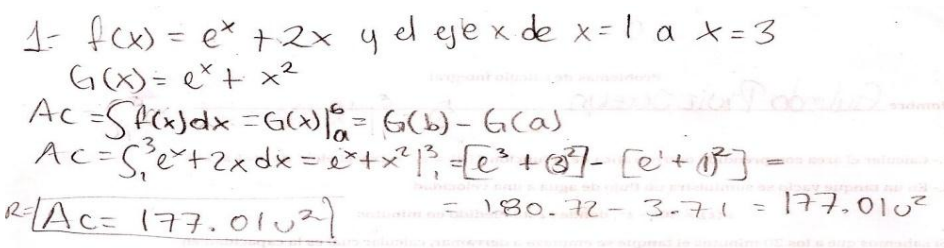
- Desconocer que e^x es una función
- No identifica que las unidades de la velocidad son metros por segundo y se le pide calcular la distancia en minutos, es decir, no realiza la conversión de unidades.
- Aplica la fórmula $d = vt$ sin tener en cuenta que es válida sólo cuando la velocidad es constante.
- No hace operativa la implicación $si x = 0 \rightarrow p(x) = 0$.
- No puede calcular la derivada de la función $p(x) = ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$.
- Confusión entre la ganancia negativa y la ganancia nula.

Alumno 2

Enseguida, evaluamos el desarrollo que tiene el alumno 2 de las competencias disciplinares establecidas en la Reforma Integral de la Educación Media Superior (2008). Para ello, identificamos las prácticas matemáticas, los objetos matemáticos primarios y los procesos matemáticos presentes en la respuesta que el alumno da a cada problema. Para determinar si la competencia está presente y el nivel en el que lo hace primeramente identificamos la capacidad relacionada a cada competencia que se interpreta de la respuesta del estudiante.

Problema 1
Prácticas matemáticas Las prácticas matemáticas más notorias que realiza el estudiante son la lectura de la situación problema y la producción de una serie de procedimientos para darle respuesta, sin ser ésta correcta. El estudiante calcula el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = e^x + 2x$, el eje *x*, la recta *x=1* y la recta *x=3* utilizando la

integral definida, determina de manera correcta la antiderivada de la función y evalúa en los límites de integración. Se equivoca en el cálculo numérico, realiza el producto



de $e^3 \cdot 3^2$ en lugar de sumarlos.

Imagen 2.1 Respuesta del estudiante 2 al problema 1

Situación problema

Ver problema 1.

Lenguajes

- Algebraico: usado para representar la función, la antiderivada, la integral definida.
- Numérico: usado para dar un valor al área.

Conceptos-Definiciones

Función, límites de integración, integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo.

Proposiciones

- El área comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = e^x + 2x$ y el eje x de x=1 a x=3 se calcular resolviendo $\int_1^3 (e^x + 2x)dx$.
- $\int_1^3 (e^x + 2x)\, dx = e^x + x^2]_1^3$.
- Teorema Fundamental del Cálculo.

Procedimientos

- Relacionar la integral definida con el cálculo de áreas.
- Utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema.

Argumentos

De manera implícita el estudiante argumenta el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo [1, 3] calculando $\int_1^3 (e^x + 2x)dx$.

Procesos matemáticos

- Proceso de comunicación en el sentido que el alumno entiende la situación problema y produce un texto que le da respuesta.
- Proceso de significación de la integral definida como el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo [a, b].
- Proceso de algoritmización en el cálculo de la integral definida.
- Proceso de argumentación en tanto se usa la integral definida para calcular el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo [a, b].

C1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "reconocer, recopilar, activar y aprovechar modelos familiares bien estructurados; pasar sucesivamente de los diferentes modelos (y sus resultados) a la realidad y viceversa para lograr una interpretación; comunicar de manera elemental los resultados del modelo", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es la estrecha relación que tiene la situación problema con las ha resuelto el estudiante anteriormente, la integral definida es abordada en clase con problemas de cálculo de áreas.

C2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "exponer y formular problemas reconociendo y reproduciendo problemas ya practicados puros y aplicados de manera cerrada; resolver problemas utilizando enfoques y procedimientos estándar, normalmente de una única manera", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis realizado a los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos procedimientos: relacionar la integral definida con el cálculo de áreas, utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema; mismos que fueron practicados en clases.

C3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los procesos matemáticos involucrados en la solución de la situación problema. En dicho análisis encontramos el proceso de comunicación, el estudiante entiende la situación problema y utiliza el Teorema Fundamental del Cálculo para dar respuesta. El estudiante se equivoca al momento de dar el valor numérico pero para nosotros hay otras acciones que sobresalen.

C4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático

Consideramos que dicha competencia no se muestra en la respuesta del alumno, aunque se podría justificar con la elección de la integral definida para resolver el problema las capacidades "seguir y justificar los procesos cuantitativos estándar, entre ellos los procesos de cálculo, los enunciados y los resultados", pero de todos modos nos inclinamos por la primera opción.

C5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento

El estudiante utiliza la herramienta adecuada para resolver el problema, sin embargo, en su respuesta se interpreta la realización de un trabajo mecánico ya que el estudiante sabe que para calcular el área bajo la curva se utiliza la integral definida pero el resultado de sus cálculos no le hace reflexionar, por lo que decimos que el descriptor: "formular las preguntas más simples (¿cuántos...?, ¿cuánto es...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (tantos, tanto)" no está presente en la respuesta del estudiante.

C6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "descodificar, codificar e interpretar representaciones de objetos matemáticos previamente conocidos de un modo estándar que ya ha sido practicado. El paso de una representación a otra sólo se exige cuando ese paso mismo es una parte establecida de la representación", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es la estrecha relación que tiene la situación problema con las que ha resuelto el estudiante anteriormente, la integral definida es abordada en clase con problemas de cálculo de áreas y, además, en el análisis de lenguajes observamos que el estudiante para resolver el problema utiliza, mayormente, el lenguaje algebraico.

C7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "comprender y emplear conceptos matemáticos en el mismo contexto en el que se introdujeron por primera vez o en el que se han practicado subsiguientemente", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los conceptos-definiciones (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos conceptos-definiciones: integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo; mismos que fueron abordados en clases.

C8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor “descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario que ya se ha practicado en situaciones y contextos sobradamente conocidos; manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos rutinarios”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos lenguajes: algebraico y numérico, mismos que fueron practicados en clase para resolver este tipo de situaciones problema.

Problema 2

Prácticas matemáticas

Las prácticas matemáticas más notorias que realiza el estudiante son la lectura de la situación problema y la producción de un texto como respuesta, siendo ésta incorrecta. Durante la entrevista se le informa que cuando el flujo de agua es constante el volumen se puede calcular multiplicando la velocidad de flujo por el tiempo, por lo que, si graficamos la velocidad de flujo contra el tiempo calcular el volumen sería igual a calcular el área del rectángulo cuya base es el tiempo y la altura el valor de la velocidad de flujo (constante). El estudiante contesta que en nuestro caso la velocidad de flujo no es constante, que para calcular el volumen se calcula el área bajo la curva y que para ello utiliza la integral, después la calculó sin mostrar el valor numérico debido a la falta de calculadora.

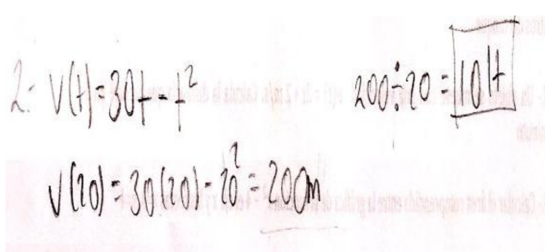


Imagen 2.2 Respuesta del estudiante 2 alproblema 2

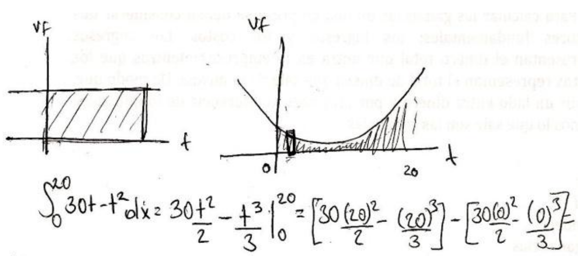


Imagen 2.2.1 Respuesta del estudiante 2 problema 2 (entrevista)

Situación problema

Ver problema 2.

Lenguajes

- Algebraico: usado para representar y calcular la integral definida.

Conceptos-Definiciones

Integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo.

Proposiciones

- El área comprendida entre la gráfica de la función $v(t) = 30t - t^2$ y el eje x de x=0 a x=20 se calcular resolviendo $\int_0^{20}(30t - t^2)dt$.
- $\int_0^{20}(30t - t^2)dt = \frac{30t^2}{2} - \frac{t^3}{3}]_0^{20}$.
- Teorema Fundamental del Cálculo.

Procedimientos

- Relacionar la integral definida con el cálculo de áreas.
- Utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema.

Argumentos

De manera implícita el estudiante argumenta el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo [0, 20] calculando $\int_0^{20}(30t - t^2)dt$.

Procesos matemáticos

- Proceso de significación de la integral definida como el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b].
- Proceso de algoritmización en el cálculo de la integral definida.
- Proceso de comunicación en el sentido que el alumno entiende la situación problema y produce un texto que le da respuesta.
- Proceso de argumentación en tanto se usa la integral definida para calcular el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo [a, b].

C1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "reconocer, recopilar, activar y aprovechar modelos familiares bien estructurados; pasar sucesivamente de los diferentes modelos (y sus resultados) a la realidad y viceversa para lograr una interpretación; comunicar de manera elemental los resultados del modelo", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El estudiante resuelve la situación problema después que se le presenta la analogía de determinar el volumen, para el caso en que la velocidad de flujo sea constante, calculando el área del rectángulo de base el tiempo y de altura el valor de la función velocidad de flujo; es decir, es el entrevistador el que establece la relación entre la integral definida y el cálculo del volumen. Por ello se asegura que el descriptor mencionado es el que se interpreta de la respuesta del alumno.

C2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "exponer y formular problemas reconociendo y reproduciendo problemas ya practicados puros y aplicados de manera cerrada; resolver problemas utilizando enfoques y procedimientos estándar, normalmente de una única manera", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante está presente este descriptor es el análisis de procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Una vez que el problema fue reducido al cálculo del área bajo la curva el estudiante utiliza el Teorema Fundamental del Cálculo para resolverlo, procedimientos utilizados en clase para calcular el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b].

C3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera", descriptor que sitúa al estudiante con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los procesos matemáticos involucrados en la solución de la situación problema. En dicho análisis encontramos el proceso de comunicación en el siguiente sentido, el estudiante entiende la situación problema y utiliza el Teorema Fundamental del Cálculo para dar respuesta.

C4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático

Consideramos que dicha competencia no se muestra en la respuesta del alumno, aunque se podría justificar con la elección de la integral definida para resolver el problema el descriptor "seguir y justificar los procesos cuantitativos estándar, entre ellos los procesos de cálculo, los enunciados y los resultados", pero de todos modos nos inclinamos por la primera opción.

C5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "formular las preguntas más simples (¿cuántos...?, ¿cuánto es...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (tantos, tanto)", descriptor que sitúa al estudiante con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante está presente este descriptor es el análisis de los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite mencionar cuáles son estos procedimientos: relacionar la integral definida con el cálculo de áreas y utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema.

C6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “descodificar, codificar e interpretar representaciones de objetos matemáticos previamente conocidos de un modo estándar que ya ha sido practicado. El paso de una representación a otra sólo se exige cuando ese paso mismo es una parte establecida de la representación”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el hecho de que una vez reducido el problema al cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo [0, 20] el estudiante ha podido resolverlo. Además, en el análisis de lenguajes observamos que el estudiante para resolver el problema utiliza mayormente el lenguaje algebraico, el cual fue abordado en clase.

C7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “comprender y emplear conceptos matemáticos en el mismo contexto en el que se introdujeron por primera vez o en el que se han practicado subsiguientemente”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los conceptos-definiciones (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos conceptos-definiciones: integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo; todo esto una vez que el problema fue reducido al cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b].

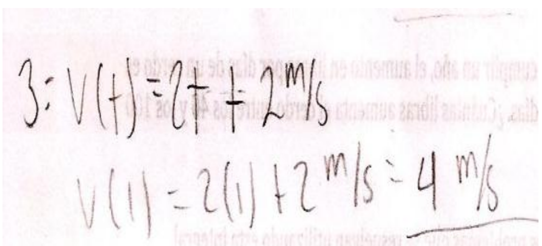
C8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor “descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario que ya se ha practicado en situaciones y contextos sobradamente conocidos; manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos rutinarios”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos lenguajes: algebraico y numérico, todo esto una vez que el problema fue reducido al cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b].

Problema 3

Prácticas matemáticas

La práctica que realiza el estudiante es la lectura de la situación problema y la producción de un texto como respuesta, siendo ésta incorrecta. Durante la entrevista se le informa que cuando la velocidad es constante la distancia recorrida se puede calcular multiplicando la velocidad por el tiempo, por lo que, si graficamos la velocidad contra el tiempo calcular la distancia recorrida sería igual a calcular el área del rectángulo cuya base es el tiempo y la altura el valor de la velocidad (constante). El estudiante contesta que en nuestro caso la velocidad no es constante, que para calcular la distancia recorrida se calcula el área bajo la curva y que para ello utiliza la integral, después la calculó sin mostrar el valor numérico debido a la falta de calculadora.



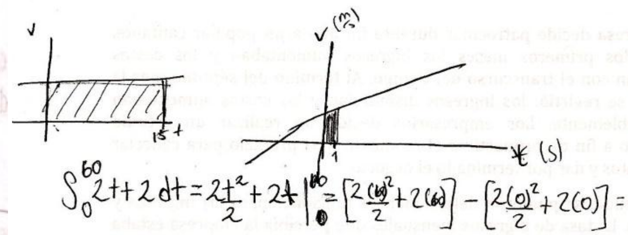


Imagen 2.3 Respuesta del estudiante 2 al problema 3

Imagen 2.3.1 Respuesta del estudiante 2 al problema 3 (entrevista)

Situación problema

Ver problema 3

Lenguajes

- Algebraico: usado para representar y calcular la integral definida.

Conceptos-Definiciones

Integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo.

Proposiciones

- El área comprendida entre la gráfica de la función $v(t) = 2t + 2$ y el eje x de x=0 a x=60 se calcular resolviendo $\int_0^{60}(2t-2)dt$.
- $\int_0^{60}(2t-2)dt = \frac{2t^2}{2} - 2t]_0^{60}$.
- Teorema Fundamental del Cálculo.

Procedimientos

- Relacionar la integral definida con el cálculo de áreas.
- Utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema.

Argumentos De manera implícita el estudiante argumenta el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo [0, 60] calculando $\int_0^{60}(2t-2)dt$.
Procesos matemáticos • Proceso de significación de la integral definida como el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b]. • Proceso de algoritmización en el cálculo de la integral definida. • Proceso de comunicación en el sentido que el alumno entiende la situación problema y produce un texto que le da respuesta. • Proceso de argumentación en tanto se usa la integral definida para calcular el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo [a, b].

C1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "reconocer, recopilar, activar y aprovechar modelos familiares bien estructurados; pasar sucesivamente de los diferentes modelos (y sus resultados) a la realidad y viceversa para lograr una interpretación; comunicar de manera elemental los resultados del modelo", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es la estrecha relación que tiene la situación problema con las ha resuelto el estudiante en clase, puesto que, el estudiante ha resuelto el problema una vez que se redujo al cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b].

C2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "exponer y formular problemas reconociendo y reproduciendo problemas ya practicados puros y aplicados de manera cerrada; resolver problemas utilizando enfoques y procedimientos estándar, normalmente de una única manera", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante está presente este descriptor es el análisis de procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Una vez que el problema fue reducido al cálculo del área bajo la curva el estudiante utiliza el Teorema Fundamental del Cálculo para resolverlo, procedimientos utilizados en clase para calcular el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b].

C3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los procesos matemáticos involucrados en la solución de la situación problema. En dicho análisis encontramos el proceso de comunicación en el siguiente sentido, el estudiante entiende la situación problema y utiliza el Teorema Fundamental del Cálculo para dar respuesta.

C4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático

Consideramos que dicha competencia no se muestra en la respuesta del alumno, aunque se podría justificar con la elección de la integral definida para resolver el problema el descriptor “seguir y justificar los procesos cuantitativos estándar, entre ellos los procesos de cálculo, los enunciados y los resultados”, pero de todos modos nos inclinamos por la primera opción.

C5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “formular las preguntas más simples (¿cuántos...?, ¿cuánto es...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (tantos, tanto)”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante está presente este descriptor es el análisis de los conceptos-definiciones (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite mencionar cuáles son estos conceptos-definiciones: integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo, los cuales han estado presentes en los problemas resueltos en clase, cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b], mismo tipo de situación a la que fue reducida la situación problema.

C6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “descodificar, codificar e interpretar representaciones de objetos matemáticos previamente conocidos de un modo estándar que ya ha sido practicado. El paso de una representación a otra sólo se exige cuando ese paso mismo es una parte establecida de la representación”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el hecho de que una vez reducido el problema al cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b] el estudiante ha podido resolverlo. Además, en el análisis de lenguajes observamos que el estudiante para resolver el problema utiliza mayormente el lenguaje algebraico, el cual fue abordado en clase.

C7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “comprender y emplear conceptos matemáticos en el mismo contexto en el que se introdujeron por primera vez o en el que se han practicado subsiguientemente”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los conceptos-definiciones (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos conceptos-definiciones: integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo; todo esto una vez que el problema fue reducido al cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b].

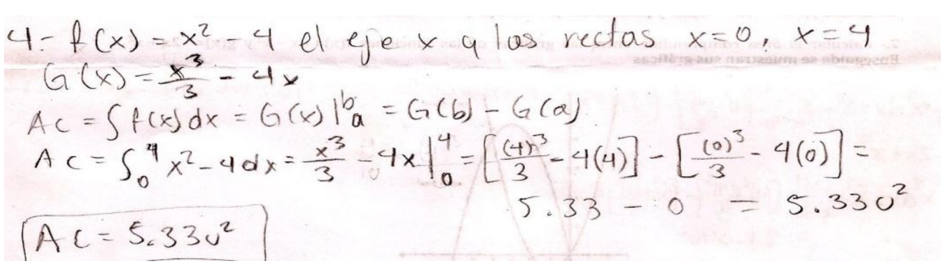
C8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor “descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario que ya se ha practicado en situaciones y contextos sobradamente conocidos; manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos rutinarios”, descriptor que sitúa a esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos lenguajes: algebraico y numérico, todo esto una vez que el problema fue reducido al cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b].

Problema 4

Prácticas matemáticas

El estudiante indica que el área solicitada en la situación problema se calcula resolviendo $\int_0^4 (x^2 - 4)\, dx$ sin tener en cuenta que en el intervalo [0, 4] la función tiene parte negativa, por lo que el resultado que obtiene es incorrecto. No obstante el estudiante calcula bien la antiderivada de la función y la evalúa de manera correcta en los límites de integración.


4- $f(x) = x^2 - 4$ el eje x y las rectas $x=0$, $x=4$

$G(x) = \frac{x^3}{3} - 4x$

$Ac = \int f(x)dx = G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a)$

$Ac = \int_0^4 x^2 - 4dx = \frac{x^3}{3} - 4x\Big|_0^4 = \left[\frac{(4)^3}{3} - 4(4)\right] - \left[\frac{(0)^3}{3} - 4(0)\right] =$

$5.33 - 0 = 5.33u^2$

$\boxed{Ac = 5.33u^2}$

Imagen 2.4 Respuesta del estudiante 2 al problema 4

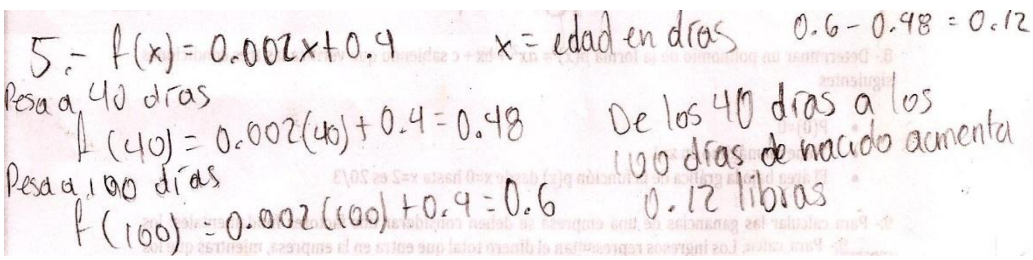
Conflicto semiótico

- La integral definida nos proporciona el área

Problema 5

Prácticas matemáticas

Las prácticas matemáticas que realiza el estudiante son la lectura de la situación problema y la producción de una serie de procedimientos para darle respuesta. Durante el examen el alumno calcula la diferencia que existe entre el peso en el día 40 y el peso en el día 100, siento este método incorrecto para solucionar el problema; durante la entrevista se le cuestionó acerca del método que seguiría si le pidieran calcular el aumento de peso que tuvo el cerdo en un día, en dos días y en 40 días, de donde el estudiante responde que el método que realizó en el examen era el que haría para calcular el aumento de peso en un día, que para calcular el aumento de peso en 40 días creía que si necesitaba la integral y después la calculó, sin mostrar el valor numérico debido a la falta de calculadora.



5.- $f(x) = 0.002x+0.4$ x = edad en días $0.6 - 0.48 = 0.12$

Pesa a 40 días

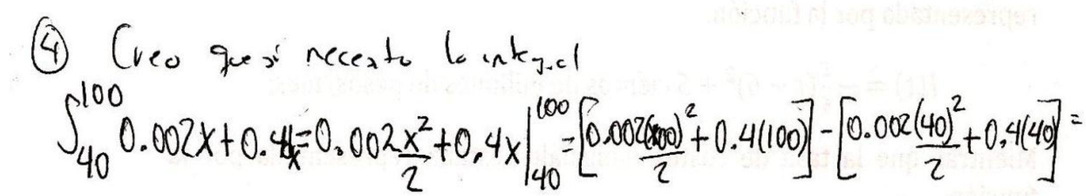
$f(40) = 0.002(40)+0.4 = 0.48$

De los 40 días a los 100 días de nacido aumenta 0.12 libras

Pesa a 100 días

$f(100) = 0.002(100)+0.4 = 0.6$

Imagen 2.5 Respuesta del estudiante 2 al problema 5



4 Creo que sí necesito la integral

$$\int_{40}^{100} 0.002x+0.4\,dx = 0.002\frac{x^2}{2}+0.4x\Big|_{40}^{100} = \left[0.002\frac{(100)^2}{2}+0.4(100)\right]-\left[0.002\frac{(40)^2}{2}+0.4(40)\right] =$$

Imagen 2.5.1 Respuesta del estudiante 2 al problema 5 (entrevista)

Situación problema

Ver problema 5

Lenguajes

- Algebraico: usado para representar y evaluar funciones, representar y calcular

la integral definida.
- Numérico: usado para evaluar funciones.
- Natural: usado para presentar la respuesta.

Conceptos-Definiciones

Función, variable, integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo.

Proposiciones

- Si la función aumento de peso es $f(x) = 0.002x + 0.4$ entonces el aumento de peso que tiene el cerdo entre los días 40 y 100 se calcula resolviendo $\int_{40}^{100}(0.002x + 0.4)dx$.
- $\int_{40}^{100}(0.002x + 0.4)dx = \frac{0.002x^2}{2} + 0.4x]_{40}^{100}$.
- Teorema Fundamental del Cálculo.

Procedimientos

- Relacionar la integral definida con el cálculo del aumento de peso de un cerdo en un intervalo de tiempo.
- Aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema.

Argumentos

De manera implícita el estudiante argumenta el aumento de peso del cerdo entre los días 40 y 100 calculando $\int_{40}^{100}(0.002x + 0.4)dx$.

Procesos matemáticos

- Proceso de comunicación en el sentido que el alumno entiende la situación problema y produce un texto que le da respuesta
- Proceso de significación de la integral definida como el aumento de peso.
- Proceso de algoritmización en el cálculo de la integral definida.
- Proceso de argumentación en tanto se usa la integral definida para calcular el aumento del peso del cerdo en el intervalo [40, 100].

C1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "estructurar el campo o situación del que hay que realizar el modelo; traducir la «realidad» a estructuras matemáticas en contextos que no son demasiado complejos pero que son diferentes a los que están acostumbrados los estudiantes. Comporta también saber interpretar alternando los modelos (y de sus resultados) y la realidad, y sabiendo también comunicar los resultados del modelo", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de conexión. El indicador para afirmar que este descriptor está presente en la respuesta del estudiante es el conocimiento de las situaciones problema que ha resulto el estudiante usando la integral definida. En clase se promueve el uso de la integral definida en el cálculo de áreas y en este caso se pide calcular el aumento de peso de un cerdo en un intervalo de tiempo determinado.

C2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "plantear y formular problemas más allá de la reproducción de los problemas ya practicados de forma cerrada; resolver tales problemas mediante la utilización de procedimientos y aplicaciones estándar pero también de procedimientos de resolución de problemas más independientes que implican establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas y distintas formas de representación y comunicación (esquemas, tablas, gráficos, palabras e ilustraciones)", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de conexión. El indicador para asegurar que este descriptor está presente en la respuesta del estudiante es el análisis realizado a los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos procedimientos: aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema y relacionar la integral definida con el cálculo del aumento de peso de un cerdo en un intervalo de tiempo, relación que no fue abordada en clases.

C3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera", descriptor que sitúa al estudiante con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los procesos matemáticos involucrados en la solución de la situación problema. En dicho análisis encontramos el proceso de comunicación, el estudiante entiende la situación problema, establece la relación entre la integral definida y el cálculo del aumento de peso, en tanto elige esta herramienta para resolver el problema.

C4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático

Consideramos que dicha competencia no se muestra en la respuesta del alumno, aunque se podría justificar con la elección de la integral definida para resolver el problema el descriptor "seguir y justificar los procesos cuantitativos estándar, entre ellos los procesos de cálculo, los enunciados y los resultados", pero de todos modos nos inclinamos por la primera opción.

C5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “formular preguntas (¿cómo hallamos...?, ¿qué tratamiento matemático damos...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (plasmadas mediante tablas, gráficos, álgebra, cifras, etc.)”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de conexión. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante está presente este descriptor es el análisis de procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite mencionar cuáles son estos procedimientos: relacionar la integral definida con el cálculo del aumento de peso de un cerdo en un intervalo de tiempo y utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema. Aun cuando en la primera respuesta del estudiante no aparecen estos objetos matemáticos, es el estudiante el que los incluye al responder las cuestiones acerca de los métodos para conocer el aumento de peso en un día y en 40 días.

C6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “descodificar, codificar e interpretar formas de representación más o menos familiares de los objetos matemáticos; seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos, y traducir y diferenciar entre diferentes formas de representación”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de conexión. El indicador para afirmar que este descriptor está presente en la respuesta del estudiante es el conocimiento de las situaciones problema que ha resulto el estudiante usando la integral definida y el análisis realizado a los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos objetos matemáticos: natural, numérico y algebraicos, los cuales han estado presentes en las actividades resueltas en clase pero el contexto en este caso es distinto; al estudiante se le pide calcular el aumento de peso de un cerdo en un intervalo de tiempo determinado.

C7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “comprende y emplear conceptos matemáticos en contextos que difieren ligeramente de aquellos en los que se introdujeron por primera vez o en los que se han practicado después”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de conexión. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante está presente este descriptor es el análisis de los conceptos-definiciones (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite mencionar cuáles son estos conceptos-definiciones: integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo. Aun cuando en la primera respuesta del estudiante no aparecen estos objetos matemáticos, es el estudiante el que los incluye al responder las cuestiones acerca de los métodos para conocer el aumento de peso en un día y en 40 días.

C8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico básico en situaciones y contextos menos conocidos y manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos familiares”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de conexión. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos lenguajes: natural, algebraico y numérico, objetos que son familiares para los estudiantes ya que fueron abordados en clases; sin embargo, el contexto en el que fueron abordadas es distinto al de la situación problema que se pide resolver al estudiante.

Problema 6

Prácticas matemáticas

La práctica que realiza el estudiante es la lectura de la situación problema y la producción de una respuesta. Para calcular la integral definida el estudiante utiliza el Teorema Fundamental del Cálculo de manera correcta, sin embargo, es en el cálculo numérico donde tiene el error.

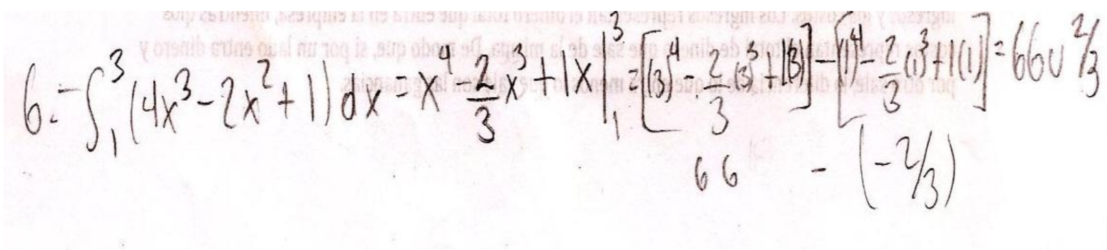


Imagen 2.6 Respuesta del estudiante 2 al problema 6

Situación problema

Ver problema 6

Lenguajes

- Algebraico: usado para representar y calcular la integral definida.

Conceptos-Definiciones

Integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo.

Proposiciones

- $\int_1^3 (4x^3 - 2x^2 + 1)dx = x^4 - \frac{2x^3}{3} + 1x]_1^3$.
- Teorema Fundamental del Cálculo.

Procedimientos

• Aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema. **Argumentos**
Procesos matemáticos • Proceso de comunicación en el sentido que el alumno entiende la situación problema y produce un texto que le da respuesta • Proceso de algoritmización en el cálculo de la integral definida.

C1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "reconocer, recopilar, activar y aprovechar modelos familiares bien estructurados; comunicar de manera elemental los resultados del modelo", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es que el estudiante se ha enfrentado anteriormente al problema de resolver una integral definida.

C2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "exponer y formular problemas reconociendo y reproduciendo problemas ya practicados puros y aplicados de manera cerrada; resolver problemas utilizando enfoques y procedimientos estándar, normalmente de una única manera", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis realizado a los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos procedimientos: utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema; lo cual fue practicado en clase mientras se resolvían problemas de cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función y en eje x en un intervalo [a, b].

C3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los procesos matemáticos involucrados en la solución de la situación problema. En dicho análisis encontramos el proceso de comunicación, el estudiante entiende la situación problema y utiliza el Teorema

Fundamental del Cálculo para dar respuesta. El estudiante se equivoca al momento de dar el valor numérico pero para nosotros hay otras acciones que sobresalen.

C4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático

En la respuesta del estudiante no se interpreta esta competencia.

C5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "formular las preguntas más simples (¿cuántos...?, ¿cuánto es...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (tantos, tanto)", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante está presente este descriptor es el análisis de los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite mencionar cuáles son estos procedimientos: utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema.

C6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "descodificar, codificar e interpretar representaciones de objetos matemáticos previamente conocidos de un modo estándar que ya ha sido practicado. El paso de una representación a otra sólo se exige cuando ese paso mismo es una parte establecida de la representación", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es la estrecha relación que tiene la situación problema con las que ha resuelto el estudiante anteriormente y el análisis realizado a los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos lenguajes: algebraico, el cual ha estado presentes en las actividades resueltas en clase.

C7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "comprender y emplear conceptos matemáticos en el mismo contexto en el que se introdujeron por primera vez o en el que se han practicado subsiguientemente", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los conceptos-definiciones (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos conceptos-definiciones: integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo; mismos que fueron abordados en clases.

C8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor “descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario que ya se ha practicado en situaciones y contextos sobradamente conocidos; manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos rutinarios”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestran estas capacidades es el análisis de los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. En dicho análisis encontramos que el lenguaje utilizado fue el algebraico, mismo que fue practicado en clase para resolver este tipo de situaciones problema.

Problema 7

Prácticas matemáticas

El estudiante conoce un procedimiento para calcular el área entre dos funciones, calculando el área comprendida entre las gráficas de las funciones y el eje x en el intervalo determinado por separado y, restar los resultados. El estudiante se equivoca en el cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función *f(x)* y el eje x en el intervalo [0, 4] al proporcionar una antiderivada incorrecta para la función *f(x)* y, se equivoca en el cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función *g(x)* al no considerar que la función tiene parte negativa en el intervalo [0, 4].

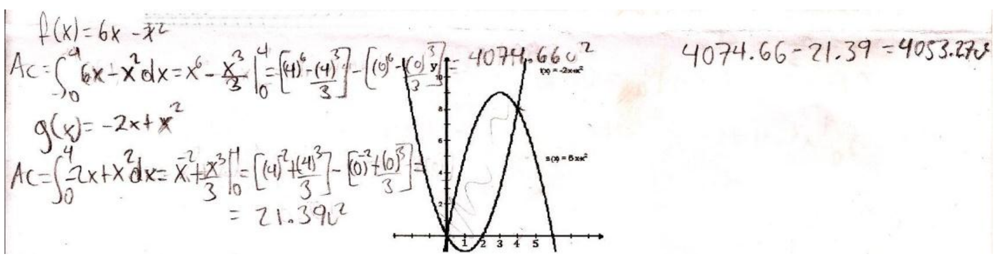


Imagen 2.7 Respuesta del estudiante 2 al problema 7

Conflicto semiótico

- La integral definida nos proporciona el área

Problema 8

Prácticas matemáticas

El estudiante no contestó esta situación problema, en la entrevista mencionó que no entiende lo que pide el problema. La condición *p (0)=0* no le otorga la información suficiente, sólo menciona que esta condición significa que el polinomio vale cero pero no puede expresar cuando sucede. Además, no relaciona el valor de la pendiente de la recta tangente con la derivada de la función.

Conflicto semiótico

- No relaciona la derivada de una función con el valor de la pendiente de la recta tangente.
- En la condición *p (0)=0* no establece la implicación: si *x=0 → p(x)=0*

Problema 9

Prácticas matemáticas

Primeramente se pide al estudiante explicar que sucede con la ganancia de la empresa en intervalos de tiempo determinados, a lo que la estudiante responde: *va aumentando las ganancias en los primeros 2 meses ya que los costos son más bajos que los ingresos pero ya para 8 meses bajan las ganancias por el aumento de los costos. Y para los 9 meses ya rebasaron los costos a los ingresos por lo que no hay ganancias*, de su respuesta se interpreta que el estudiante relaciona correctamente el comportamiento de la ganancia con relación al comportamiento de las funciones costos e ingresos.

En los incisos b y d se pide al estudiante calcular las ganancias de la empresa los primeros 4 meses y los primero 12 meses, respectivamente; el estudiante responde incorrectamente estas cuestiones, calculando de manera puntual las ganancias en los meses 4 y 12 al evaluar las funciones ingresos y costos y calculando la diferencia (ver imagen 2.8); procedimiento que no es el adecuado para resolver la situación problema.

En el inciso e se pide al estudiante determinar el intervalo de tiempo, empezando en cero, para el cual la empresa tiene más ganancia; el estudiante responde: *observando la gráfica en el mes 5 es cuando se ve el aumento de ganancias comprobándolo con la fórmula…* (Ver imagen 2.8.1), de esta respuesta se reafirma la idea puntual que posee el estudiante de la ganancia de la empresa.

Para realizar el bosquejo de la de la gráfica de la función ganancia (inciso g) el estudiante realiza una tabla de valores. Utiliza una columna para el tiempo (del mes 1 al 12), una para los ingresos, una para los costos y la última para las ganancias; después, localiza los puntos en el plano cartesiano y traza una curva para unirlos (ver imagen 2.8.2).

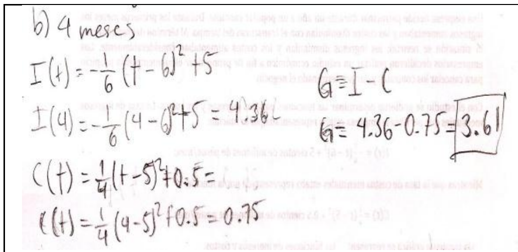


Imagen 2.8 Respuesta del estudiante 2 al problema 9 inciso b

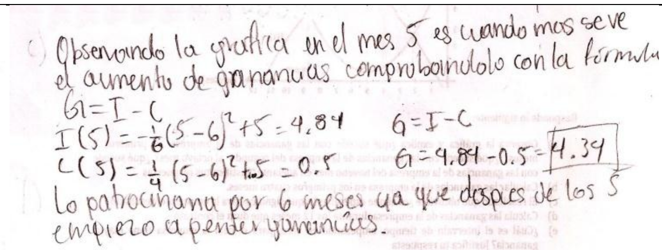


Imagen 2.8.1 Respuesta del estudiante 2 al problema 9 inciso e

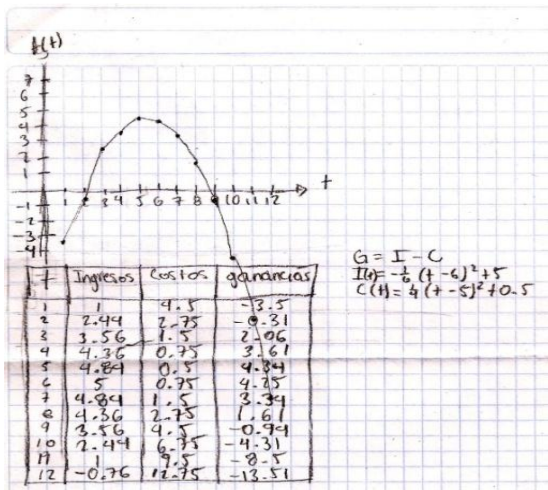


Imagen 2.8.2 Respuesta del estudiante al problema 9 inciso g

Conflicto semiótico

- No relaciona la integral definida con la ganancia de la empresa.

En la siguiente tabla se presenta la relación entre las situaciones problema y las competencias desarrolladas. En caso de que cierta competencia esté presente indicaremos el nivel en que lo hace de la siguiente manera: nivel de reproducción =1, nivel de conexión=2 y nivel de reflexión=3, en caso de no inferirse alguna competencia de la respuesta del alumno se señala en el recuadro con una línea horizontal (-), esto se debe a que el estudiante no resolvió la situación problema o utilizó procedimientos erróneos, en tal caso indicaremos los conflictos semióticos que se detectaron.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
Problema 1	1	1	1	-	-	1	1	1
Problema 2	1	1	1	-	1	1	1	1
Problema 3	1	1	1	-	1	1	1	1

Problema 4	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 5	2	2	1	-	2	2	2	2
Problema 6	1	1	1	-	1	1	1	1
Problema 7	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 8	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 9	-	-	-	-	-	-	-	-

El estudiante resuelve las situaciones problema en las que se solicita calcular el área comprendida entre la gráfica de la función *f(x)* y el eje x en un intervalo [a, b] sólo en el caso que la función sea positiva en el intervalo determinado. En clase, aparte de resolver este tipo de situaciones, el estudiante ha abordado situaciones en las que la función integrando tiene parte negativa y éstas en el examen no fue capaz de resolverlas.

El análisis realizado al problema 5 sugiere el nivel de conexión para las competencias matemáticas exceptuando la competencia 4. Sin embargo, creemos que hay una tendencia por parte del estudiante a elegir la integral definida como herramienta para resolver la situación problema debido a que es esta herramienta con la que ha solucionado los problemas anteriores.

Con base en la información que nos otorga la tabla y los comentarios anteriores agruparemos las competencias matemáticas en los niveles en que se desarrollaron.

Competencias matemáticas	Nivel de desarrollo
C1,C2,C3,C5,C6,C7,C8	Reproducción
C4	-

De las situaciones problema que el estudiante ha resuelto incorrectamente enlistamos los conflictos semióticos que se detectaron, por una parte los que tienen relación con el cálculo integral y por otra parte los que están involucrados con temáticas abordadas anteriormente.

Conflictos semióticos en cálculo integral:

- La integral definida nos proporciona el área.
- No relaciona la integral definida con la ganancia de la empresa.

Conflictos semióticos en otras áreas:

- No hay relación entre la derivada de una función y el valor de la pendiente de la recta tangente de la función.
- En la condición *p (0)=0*, no establece la implicación $si\ x = 0 \rightarrow p(x) = 0$.

Alumno 3

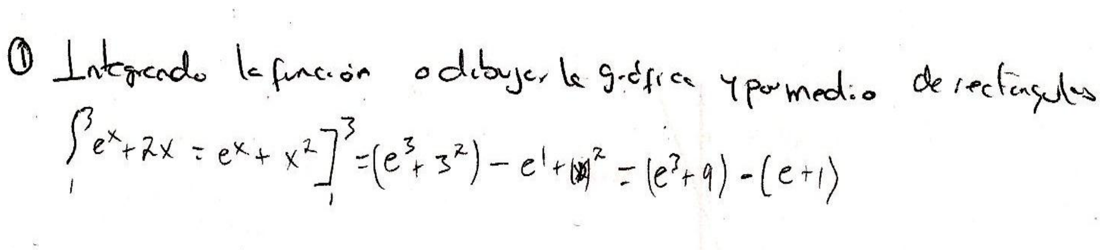
Enseguida, evaluamos el desarrollo que tiene el alumno 3 de las competencias disciplinares establecidas en la Reforma Integral de la Educación Media Superior (2008). Para ello, identificamos las prácticas matemáticas, los objetos matemáticos primarios y los procesos matemáticos presentes en la respuesta que el alumno da a cada problema. Para determinar si la competencia está presente y el nivel en el que lo hace primeramente identificamos la capacidad relacionada a cada competencia que se interpreta de la respuesta del estudiante.

Problema 1

Prácticas matemáticas

En el examen el estudiante indica que no sabe cómo se resuelve para $f(x) = e^x$, es decir, el estudiante no conoce cuál es la antiderivada de esta función. En la entrevista se le cuestiona acerca de los métodos practicado en clase para calcular el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b], a lo que es estudiante respondió: *integrando la función o dibujar la gráfica y por medio de rectángulos;* después se le proporciona la antiderivada de $f(x) = e^x$y se pide al estudiante solucionar la situación problema.

Las prácticas matemáticas más notorias que realiza el estudiante son la lectura de la situación problema y la producción de un texto como respuesta. Elige la integral definida para solucionar la situación problema, determina la antiderivada y evalúa de manera correcta en los límites de integración. No presenta un resultado numérico porque el estudiante al momento de la entrevista no contaba con una calculadora.


① Integrando la función o dibujar la gráfica y por medio de rectángulos

$$\int_1^3 e^x+2x = e^x+x^2\Big]_1^3 = (e^3+3^2) - e^1+(1)^2 = (e^3+9)-(e+1)$$

Imagen 3.1 Respuesta del estudiante 3 al problema 1 (entrevista)

Situación problema

Ver problema 1.

Lenguajes

- Algebraico: usando en la representación y cálculo de la integral definida.

Conceptos-Definiciones Integral definida, antiderivada, gráfica de la función, Teorema Fundamental del Cálculo. **Proposiciones** • El área comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = e^x + 2x$ y el eje x de x=1 a x=3 se calcular resolviendo $\int_1^3 (e^x + 2x)dx$. • $\int_1^3 (e^x + 2x)\, dx = e^x + x^2]_1^3$. • Teorema Fundamental del Cálculo. **Procedimientos** • Relacionar la integral definida con el cálculo de áreas. • Utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema. **Argumentos** De manera implícita el estudiante argumenta el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo [1, 3] calculando $\int_1^3 (e^x + 2x)dx$.
Procesos matemáticos • Proceso de comunicación en el sentido que el alumno entiende la situación problema y produce un texto que le da respuesta. • Proceso de significación de la integral definida como el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo [a, b]. • Proceso de algoritmización en el cálculo de la integral definida. • Proceso de argumentación en tanto se usa la integral definida para calcular el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo [a, b].

C1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “reconocer, recopilar, activar y aprovechar modelos familiares bien estructurados; comunicar de manera elemental los resultados del modelo”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el conocimiento de las situaciones problema que ha resuelto anteriormente el estudiante, en clase se ha enfrentado al problema de resolver una integral definida como parte del procedimiento para calcular el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b].

C2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "exponer y formular problemas reconociendo y reproduciendo problemas ya practicados puros y aplicados de manera cerrada; resolver problemas utilizando enfoques y procedimientos estándar, normalmente de una única manera", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis realizado a los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos procedimientos: relacionar la integral definida con el cálculo de áreas y utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema; los cuales fueron practicados en clase mientras se resolvían problemas de cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función y en eje x en un intervalo [a, b].

C3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los procesos matemáticos involucrados en la solución de la situación problema. En dicho análisis encontramos el proceso de comunicación, el estudiante entiende la situación problema y utiliza el Teorema Fundamental del Cálculo para dar respuesta.

C4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático

Consideramos que dicha competencia no se muestra en la respuesta del alumno, aunque se podría justificar con la elección de la integral definida para resolver el problema el descriptor "seguir y justificar los procesos cuantitativos estándar, entre ellos los procesos de cálculo, los enunciados y los resultados", pero de todos modos nos inclinamos por la primera opción.

C5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "formular las preguntas más simples (¿cuántos...?, ¿cuánto es...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (tantos, tanto)", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante está presente este descriptor es el análisis de los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite mencionar cuáles son estos procedimientos: relacionar la integral definida con el cálculo de áreas y utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema.

C6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “descodificar, codificar e interpretar representaciones de objetos matemáticos previamente conocidos de un modo estándar que ya ha sido practicado. El paso de una representación a otra sólo se exige cuando ese paso mismo es una parte establecida de la representación”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es la estrecha relación que tiene la situación problema con las que ha resuelto el estudiante anteriormente y el análisis realizado a los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir que el lenguaje algebraico fue el elegido por el estudiante para resolver la situación problema, el cual ha estado presente en las actividades resueltas en clase.

C7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “comprender y emplear conceptos matemáticos en el mismo contexto en el que se introdujeron por primera vez o en el que se han practicado subsiguientemente”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los conceptos-definiciones (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos conceptos-definiciones: integral definida, antiderivada, gráfica de la función, Teorema Fundamental del Cálculo; mismos que fueron abordados en clases.

C8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor “descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario que ya se ha practicado en situaciones y contextos sobradamente conocidos; manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos rutinarios”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. En dicho análisis encontramos que el lenguaje utilizado fue el algebraico, mismo que fue practicado en clase para resolver este tipo de situaciones problema.

Problema 2

Prácticas matemáticas

En el examen el estudiante indica que para calcular la capacidad del tanque se debe resolver $\int_0^{20} f(x)dx$, después evalúa los límites de integración en la función velocidad de flujo y así determina la capacidad del tanque (ver figura 3.2); procedimientos incorrectos para resolver la situación problema. Durante la entrevista se le cuestionó si la antiderivada proporcionada en el examen era correcta, el estudiante menciona que esa era la función que tenía que antiderivar; después se le pide al estudiante resolver la situación problema (ver figura 3.2.1).

Las prácticas matemáticas más notorias que realiza el estudiante son la lectura de la situación problema y la producción de un texto como respuesta. Para resolver el problema elige la integral definida como herramienta, determina la antiderivada y después evalúa en los límites de integración. El estudiante no da un valor numérico debido a que durante la entrevista no contaba con calculadora.

$$\int_0^{20} f(x)\,dx = 30t - t^2\Big]_0^{20} = (30(20)) - (20)^2) - (30(0) - 0^2) = 200 - 0 = \boxed{200\ lts}$$

Imagen 3.2 Respuesta del estudiante 3 al problema 2

$$30t \to 15t^2 \qquad t^2 \to \frac{t^3}{3}$$

$$\int_0^{20} 30t - t^2\,dx = 15t^2 - \frac{t^3}{3}\Big]_0^{20} = 15(20)^2 - \frac{20^3}{3} - \left(15(0)^2 - \frac{0^3}{3}\right) =$$

Imagen 3.2 Respuesta del estudiante 3 al problema 2 (entrevista)

Situación problema

Ver problema 2.

Lenguajes

- Algebraico: usado en la representación y cálculo de la integral definida.

Conceptos-Definiciones

Integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo.

Proposiciones

- El volumen de un tanque cuya velocidad de flujo se representa con la función

$v(t) = 30t - t^2$, a los 20 minutos, se calcula resolviendo $\int_0^{20}(30t - t^2)\,dt$. • $\int_0^{20}(30t - t^2)\,dt = 15x^2 - \frac{x^3}{3}]_0^{20}$. • Teorema Fundamental del Cálculo. **Procedimientos** • Relacionar la integral definida con el cálculo de volúmenes. • Utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema. **Argumentos** De manera implícita el estudiante argumenta la capacidad del tanque calculando $\int_0^{20}(30t - t^2)\,dt$.
Procesos matemáticos • Proceso de significación de la integral definida como el volumen de un tanque. • Proceso de algoritmización al resolver la integral definida. • Proceso de argumentación en tanto se usa la integral definida para calcular la capacidad del tanque. • Proceso de comunicación en el sentido que el alumno entiende la situación problema y produce un texto que le da respuesta.

C1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "estructurar el campo o situación del que hay que realizar el modelo; traducir la «realidad» a estructuras matemáticas en contextos que no son demasiado complejos pero que son diferentes a los que están acostumbrados los estudiantes. Comporta también saber interpretar alternando los modelos (y de sus resultados) y la realidad, y sabiendo también comunicar los resultados del modelo", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de conexión. El indicador para afirmar que este descriptor está presente en la respuesta del estudiante es el conocimiento de las situaciones problema que ha resulto el estudiante usando la integral definida. En clase se promueve el uso de la integral definida en el cálculo de áreas y en este caso se pide determinar la capacidad de un tanque conociendo el tiempo en el que se empieza a derramar y la función velocidad de flujo.

C2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "plantear y formular problemas más allá de la reproducción de los problemas ya practicados de forma cerrada; resolver tales problemas mediante la utilización de procedimientos y aplicaciones estándar pero también de procedimientos de resolución de problemas más independientes que implican establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas y distintas formas de representación y comunicación (esquemas, tablas, gráficos, palabras e ilustraciones)", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de conexión. El indicador para asegurar que este descriptor está presente en la respuesta del estudiante es el análisis realizado a los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos procedimientos: aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema y relacionar la integral definida con el cálculo de la capacidad de un tanque conociendo la función velocidad de flujo y el tiempo en que se empieza a derramar el agua, relación que no fue abordada en clases.

C3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los procesos matemáticos involucrados en la solución de la situación problema. En dicho análisis encontramos el proceso de comunicación, el estudiante entiende la situación problema, establece la relación entre la integral definida y el cálculo de la capacidad de un tanque, en tanto elige esta herramienta para resolver el problema.

C4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático

Consideramos que dicha competencia no se muestra en la respuesta del alumno, aunque se podría justificar con la elección de la integral definida para resolver el problema el descriptor "seguir y justificar los procesos cuantitativos estándar, entre ellos los procesos de cálculo, los enunciados y los resultados", pero de todos modos nos inclinamos por la primera opción.

C5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento

De la respuesta del estudiante se interpretan las capacidades: "formular preguntas (¿cómo hallamos...?, ¿qué tratamiento matemático damos...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (plasmadas mediante tablas, gráficos, álgebra, cifras, etc.)", capacidades que sitúa a esta competencia en el nivel de conexión. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante están presentes estas capacidades es el análisis de los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite mencionar cuáles son estos procedimientos: relacionar la integral definida con el cálculo de volúmenes y utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema.

C6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "descodificar, codificar e interpretar formas de representación más o menos familiares de los objetos matemáticos; seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos, y traducir y diferenciar entre diferentes formas de representación", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de conexión. El indicador para afirmar que este descriptor está presente en la respuesta del estudiante es el conocimiento de las situaciones problema que ha resuelto el estudiante usando la integral definida y el análisis realizado a los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir que el lenguaje algebraico es el que utiliza el estudiante, el cual ha estado presente en las actividades resueltas en clase pero el contexto en este caso es distinto, al estudiante se le pide calcular la capacidad de un tanque conociendo la función velocidad de flujo y el tiempo en el que se empieza a derramar el agua.

C7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "comprende y emplear conceptos matemáticos en contextos que difieren ligeramente de aquellos en los que se introdujeron por primera vez o en los que se han practicado después", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de conexión. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante está presente este descriptor es el análisis de los conceptos-definiciones (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema y la poca familiaridad que tiene los estudiantes con este tipo de situaciones problema. Dicho análisis nos permite mencionar cuáles son estos conceptos-definiciones: integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo; los cuales han estado presentes en las actividades resueltas en clase, sin embargo, en este caso el contexto es distinto.

C8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico básico en situaciones y contextos menos conocidos y manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos familiares", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de conexión. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir que el lenguaje utilizado por el estudiante fue el algebraico, el cual es familiar para los estudiantes ya que fueron abordados en clases; sin embargo, el contexto en el que fueron abordadas es distinto al de la situación problema que se pide resolver al estudiante.

Problema 3

Prácticas matemáticas

En el examen el estudiante para calcular la distancia que recorre un objeto sustituye t=60 en la función velocidad e indica que ese es el resultado, procedimiento incorrecto para resolver este tipo de situaciones problema (ver imagen 3.3). Durante la entrevista se le cuestiona al estudiante acerca de la fórmula para calcular la distancia a lo que responde: *d=v/t,* el entrevistador aclara que la distancia se calcula multiplicando la velocidad por el tiempo en caso que la velocidad sea constante; por lo que, si graficamos la velocidad contra el tiempo calcular la distancia recorrida sería igual a calcular el área del rectángulo cuya base es el tiempo y la altura el valor de la velocidad (constante), el estudiante contesta que en este caso la velocidad no es constante, que para calcular la distancia recorrida se calcula el área bajo la curva y que para ello utiliza la integral (ver imagen 3.3.1).

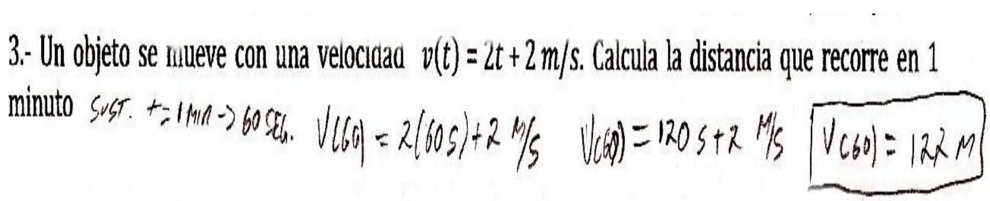


Imagen 3.3 Respuesta del estudiante 3 al problema 3

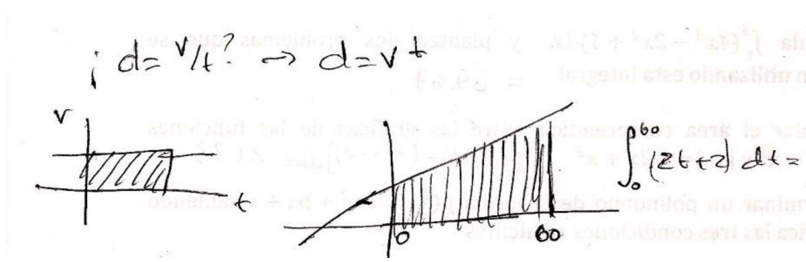


Imagen 3.3.1 Respuesta del estudiante 3 al problema 3 (entrevista)

Situación problema

Ver problema 3.

Lenguajes

- Algebraico: usado para representar y calcular la integral definida.

Conceptos-Definiciones

Integral definida.

Proposiciones

- El área comprendida entre la gráfica de la función $v(t) = 2t + 2$ y el eje x de

x=0 a x=60 se calcular resolviendo $\int_0^{60}(2t-2)dt$. **Procedimientos** • Relacionar la integral definida con el cálculo de áreas. **Argumentos** De manera implícita el estudiante argumenta el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo [0, 60] calculando $\int_0^{60}(2t-2)dt$.
Procesos matemáticos • Proceso de significación de la integral definida como el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b]. • Proceso de comunicación en el sentido que el alumno entiende la situación problema y produce un texto que le da respuesta. • Proceso de argumentación en tanto se usa la integral definida para calcular el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo [a, b].

C1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "reconocer, recopilar, activar y aprovechar modelos familiares bien estructurados; pasar sucesivamente de los diferentes modelos (y sus resultados) a la realidad y viceversa para lograr una interpretación; comunicar de manera elemental los resultados del modelo", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es la estrecha relación que tiene la situación problema con las ha resuelto el estudiante en clase, puesto que, el estudiante ha resuelto el problema una vez que se redujo al cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b].

C2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "exponer y formular problemas reconociendo y reproduciendo problemas ya practicados puros y aplicados de manera cerrada; resolver problemas utilizando enfoques y procedimientos estándar, normalmente de una única manera", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante está presente este descriptor es el análisis de procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Una vez que el problema fue reducido al cálculo del área bajo la curva el estudiante involucra la integral definida, es decir, relaciona la integral definida con el cálculo de áreas; no resuelve la integral definida por que el entrevistador considera que no es lo principal.

C3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los procesos matemáticos involucrados en la solución de la situación problema. En dicho análisis encontramos el proceso de comunicación en tanto el estudiante entiende la situación problema y produce un texto que le da respuesta.

C4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático

Consideramos que dicha competencia no se muestra en la respuesta del alumno, aunque se podría justificar con la elección de la integral definida para resolver el problema el descriptor “seguir y justificar los procesos cuantitativos estándar, entre ellos los procesos de cálculo, los enunciados y los resultados”, pero de todos modos nos inclinamos por la primera opción.

C5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “formular las preguntas más simples (¿cuántos...?, ¿cuánto es...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (tantos, tanto)”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante está presente este descriptor es el análisis de los conceptos-definiciones (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite mencionar cuáles son estos conceptos-definiciones: integral definida, la cual ha estado presente en los problemas resueltos en clase.

C6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “descodificar, codificar e interpretar representaciones de objetos matemáticos previamente conocidos de un modo estándar que ya ha sido practicado. El paso de una representación a otra sólo se exige cuando ese paso mismo es una parte establecida de la representación”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el hecho de que una vez reducido el problema al cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b] el estudiante ha planteado la integral para resolverlo. Además, en el análisis de lenguajes observamos que el estudiante para resolver el problema utiliza mayormente el lenguaje algebraico, el cual fue abordado en clase.

C7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “comprender y emplear conceptos matemáticos en el mismo contexto en el que se introdujeron por primera vez o en el que se han practicado subsiguientemente”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los conceptos-definiciones (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos conceptos-definiciones: integral definida, una vez que el problema fue reducido al cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b].

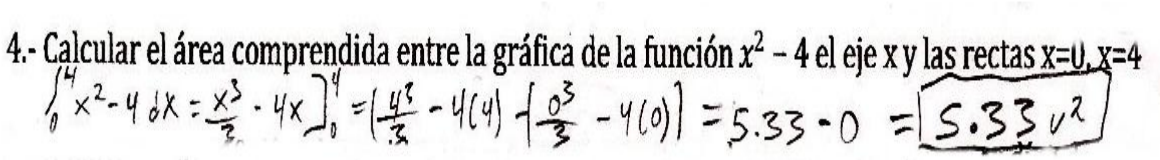
C8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor “descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario que ya se ha practicado en situaciones y contextos sobradamente conocidos; manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos rutinarios”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir que el estudiante utiliza el lenguaje algebraico mayormente.

Problema 4

Prácticas matemáticas

El estudiante indica que el área solicitada en la situación problema se calcula resolviendo $\int_0^4 (x^2 - 4)\,dx$ sin tener en cuenta que en el intervalo [0, 4] la función tiene parte negativa, por lo que el resultado que obtiene es incorrecto. No obstante el estudiante calcula bien la antiderivada de la función y la evalúa de manera correcta en los límites de integración.


4.- Calcular el área comprendida entre la gráfica de la función $x^2 - 4$ el eje x y las rectas x=0, x=4

$$\int_0^4 x^2 - 4\,dx = \frac{x^3}{3} - 4x \Big]_0^4 = \left[\frac{4^3}{3} - 4(4)\right] - \left[\frac{0^3}{3} - 4(0)\right] = 5.33 - 0 = \boxed{5.33\,u^2}$$

Imagen 3.4 Respuesta del estudiante 3 al problema 4

Conflicto semiótico

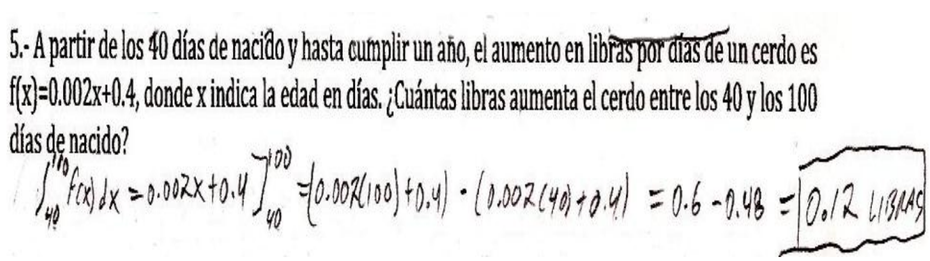
- La integral definida nos proporciona el área

Problema 5

Prácticas matemáticas

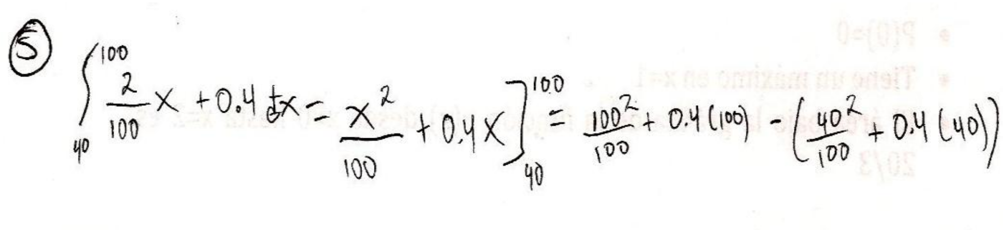
En el examen el estudiante indica que para calcular el aumento de peso de un cerdo entre los días 40 y 100 se debe resolver $\int_{40}^{100} f(x)dx$, después evalúa los límites de integración en la función aumento de peso y así determina el resultado (ver figura 3.5); procedimientos incorrectos para resolver la situación problema. Durante la entrevista se le cuestionó si la antiderivada proporcionada en el examen era correcta, el estudiante menciona que esa era la función que tenía que antiderivar; después se le pide al estudiante resolver la situación problema (ver figura 3.5.1).

Las prácticas matemáticas más notorias que realiza el estudiante son la lectura de la situación problema y la producción de un texto como respuesta. Para resolver el problema elige la integral definida como herramienta, determina la antiderivada y después evalúa en los límites de integración. El estudiante no da un valor numérico debido a que durante la entrevista no contaba con calculadora.


5.- A partir de los 40 días de nacido y hasta cumplir un año, el aumento en ~~libras por días de~~ un cerdo es f(x)=0.002x+0.4, donde x indica la edad en días. ¿Cuántas libras aumenta el cerdo entre los 40 y los 100 días de nacido?

$$\int_{40}^{100} f(x)dx = 0.002x+0.4\Big]_{40}^{100} = (0.002(100)+0.4) - (0.002(40)+0.4) = 0.6 - 0.48 = \boxed{0.12 \text{ LIBRAS}}$$

Imagen 3.5 Respuesta del estudiante 3 al problema 5


5

$$\int_{40}^{100} \frac{2}{100}x + 0.4\,dx = \frac{x^2}{100} + 0.4x\Big]_{40}^{100} = \frac{100^2}{100} + 0.4(100) - \left(\frac{40^2}{100} + 0.4(40)\right)$$

Imagen 3.5.1 Respuesta del estudiante 3 al problema 5 (entrevista)

Situación problema

Ver problema 5.

Lenguajes

- Algebraico: usado en la representación y cálculo de la integral definida.

Conceptos-Definiciones Integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo. **Proposiciones** • El aumento de peso de un cerdo entre los días 40 y 100 si la función aumento de peso es $f(x) = 0.002x + 0.4$, se calcula resolviendo $\int_{40}^{100}(0.002x + 0.4)\,dx$. • $\int_{40}^{100}\frac{2}{100}x + 0.4dx = \frac{x^2}{100} + 0.4x]_{40}^{100}$. • Teorema Fundamental del Cálculo. **Procedimientos** • Relacionar la integral definida con el cálculo de aumento de peso. • Utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema. **Argumentos** De manera implícita el estudiante argumenta el aumento de peso del cerdo entre los días 40 y 100 calculando $\int_{40}^{100}(0.002x + 0.4)\,dx$.
Procesos matemáticos • Proceso de significación de la integral definida como el aumento de peso. • Proceso de algoritmización al resolver la integral definida. • Proceso de argumentación en tanto se usa la integral definida para calcular la capacidad del tanque. • Proceso de comunicación en el sentido que el alumno entiende la situación problema y produce un texto que le da respuesta.

C1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "estructurar el campo o situación del que hay que realizar el modelo; traducir la «realidad» a estructuras matemáticas en contextos que no son demasiado complejos pero que son diferentes a los que están acostumbrados los estudiantes. Comporta también saber interpretar alternando los modelos (y de sus resultados) y la realidad, y sabiendo también comunicar los resultados del modelo", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de conexión. El indicador para afirmar que este descriptor está presente en la respuesta del estudiante es el conocimiento de las situaciones problema que ha resulto el estudiante usando la integral definida. En clase se promueve el uso de la integral definida en el cálculo de áreas y en este caso se pide determinar el aumento de peso de un cerdo entre los días 40 y 100 conociendo la función aumento de peso.

C2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "plantear y formular problemas más allá de la reproducción de los problemas ya practicados de forma cerrada; resolver tales problemas mediante la utilización de procedimientos y aplicaciones estándar pero también de procedimientos de resolución de problemas más independientes que implican establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas y distintas formas de representación y comunicación (esquemas, tablas, gráficos, palabras e ilustraciones)", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de conexión. El indicador para asegurar que este descriptor está presente en la respuesta del estudiante es el análisis realizado a los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos procedimientos: aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema y relacionar la integral definida con el cálculo del aumento de peso de un cerdo entre los días 40 y 100 conociendo la función aumento de peso, relación que no fue abordada en clases.

C3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los procesos matemáticos involucrados en la solución de la situación problema. En dicho análisis encontramos el proceso de comunicación, el estudiante entiende la situación problema, establece la relación entre la integral definida y el cálculo del aumento de peso, en tanto elige esta herramienta para resolver el problema.

C4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático

Consideramos que dicha competencia no se muestra en la respuesta del alumno, aunque se podría justificar con la elección de la integral definida para resolver el problema el descriptor "seguir y justificar los procesos cuantitativos estándar, entre ellos los procesos de cálculo, los enunciados y los resultados", pero de todos modos nos inclinamos por la primera opción.

C5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "formular preguntas (¿cómo hallamos...?, ¿qué tratamiento matemático damos...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (plasmadas mediante tablas, gráficos, álgebra, cifras, etc.)", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de conexión. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante está presente este descriptor es el análisis de los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite mencionar cuáles son estos procedimientos: relacionar la integral definida con el cálculo del aumento de peso y utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema.

C6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "descodificar, codificar e interpretar formas de representación más o menos familiares de los objetos matemáticos; seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos, y traducir y diferenciar entre diferentes formas de representación", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de conexión. El indicador para afirmar que este descriptor está presente en la respuesta del estudiante es el conocimiento de las situaciones problema que ha resuelto el estudiante usando la integral definida y el análisis realizado a los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir que el lenguaje algebraico es el que utiliza el estudiante, el cual ha estado presente en las actividades resueltas en clase pero el contexto en este caso es distinto, al estudiante se le pide calcular el aumento de peso de un cerdo entre los días 40 y 100 conociendo la función aumento de peso.

C7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "comprende y emplear conceptos matemáticos en contextos que difieren ligeramente de aquellos en los que se introdujeron por primera vez o en los que se han practicado después", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de conexión. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante está presente este descriptor es el análisis de los conceptos-definiciones (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema y la poca familiaridad que tiene los estudiantes con este tipo de situaciones problema. Dicho análisis nos permite mencionar cuáles son estos conceptos-definiciones: integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo; los cuales han estado presentes en las actividades resueltas en clase, sin embargo, en este caso el contexto es distinto.

C8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico básico en situaciones y contextos menos conocidos y manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos familiares", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de conexión. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir que el lenguaje utilizado por el estudiante fue el algebraico, el cual es familiar para los estudiantes ya que fueron abordados en clases; sin embargo, el contexto en el que fueron abordadas es distinto al de la situación problema que se pide resolver al estudiante.

Problema 6
Prácticas matemáticas El estudiante conoce el método para resolver una integral definida, primero proporciona una antiderivada, luego evalúa en los límites de integración y, por último, calcula la diferencia entre las evaluaciones. El estudiante se equivoca al calcular $\int_1^3 (4x^3 - 2x^2 + 1)dx$ ya que dice que la antiderivada de dx es 1. La relación que el estudiante posee entre la integral definida y el cálculo del área comprendida entre la gráfica de una función y el eje x en un intervalo [a, b] se muestra en la situación problema que plantea el estudiante en la que se utiliza la integral que resolvió.

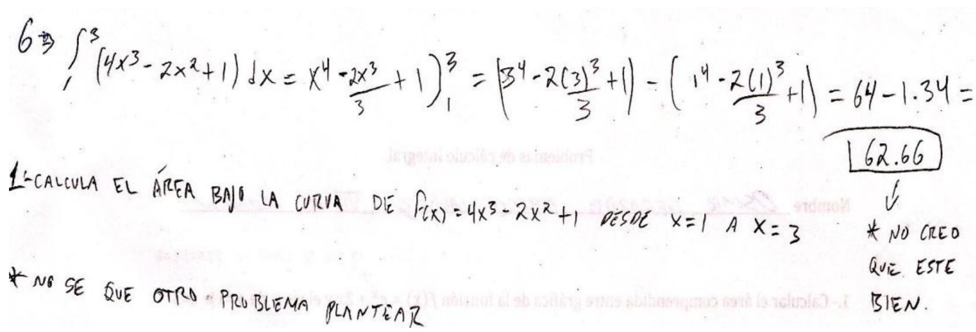


Imagen 3.6 Respuesta del estudiante 3 al problema 6

Conflicto semiótico
• La antiderivada de una constante es la misma constante.

Problema 7
Prácticas matemáticas En el examen el estudiante primeramente identifica los puntos en común de las gráficas de las funciones *f(x)* y *g(x),* indica que el área solicitad es la diferencia entre las funciones y realiza esta resta (de manera incorrecta); después calcula la integral de la diferencia de las funciones pero no propone una antiderivada sino valúa los límites de integración en la resta calculada (ver imagen 3.7). Durante la entrevista, el estudiante para resolver el problema calcula por separado las integrales de las funciones que comprenden el área solicitada y calcula la diferencia entre estos resultados. En el cálculo del área comprendida entre la gráfica

de la función *f(x)* y el eje x el estudiante obtiene un resultado correcto, proporciona una antiderivada correcta y evalúa correctamente en los límites de integración; por otro lado, en el cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función *g(x)* y el eje x el estudiante no considera que la función tiene parte negativa en el intervalo determinado, lo que ocasiona que el resultado sea incorrecto (ver imagen 3.7.1).

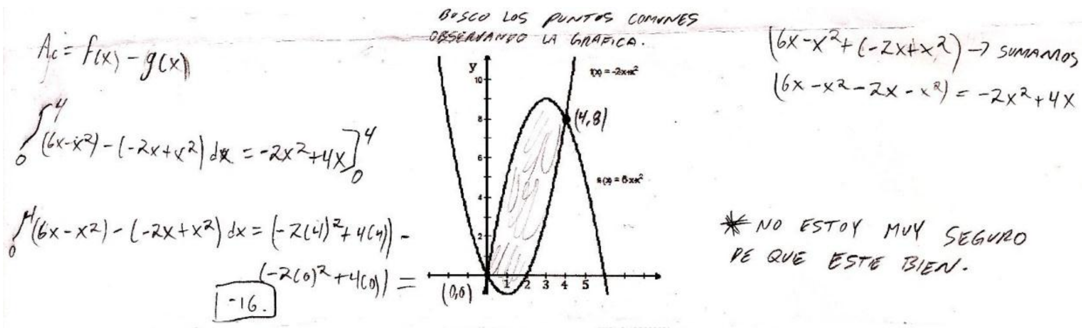


Imagen 3.7 Respuesta del estudiante 3 al problema 7

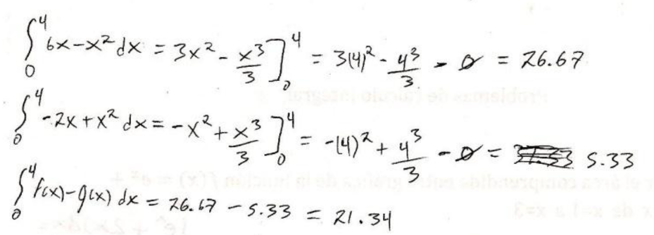


Imagen 3.7.1 Respuesta del estudiante 3 al problema 7 (entrevista)

Conflicto semiótico

- La integral nos proporciona el área.

Problema 8

Prácticas matemáticas

En el examen el estudiante menciona: *no recuerdo lo de los polinomios*, por lo que no resuelve la situación problema. Durante la entrevista se plantea al estudiante leer la situación problema y resolverla, primero se le cuestiona acerca del significado de la condición $p(0) = 0$; el estudiante menciona que el polinomio es cero cuando x=0 y se le pide realice la operación pero no deduce que c=0 (ver imagen 3.8).

Acerca de la segunda condición, tiene un máximo en x=1, el estudiante no relaciona el valor de la recta tangente con la derivada de una función; el entrevistador realiza un bosquejo del polinomio y da el significado de la segunda condición (la derivada del polinomio en x=1 es cero) (ver imagen 3.8.1).

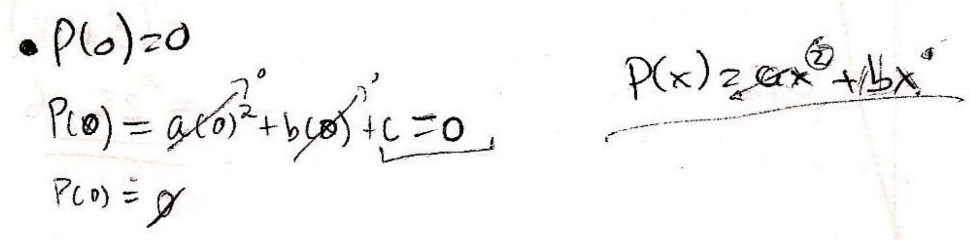


Imagen 3.8 Respuesta del estudiante 3 al problema 8, condición 1

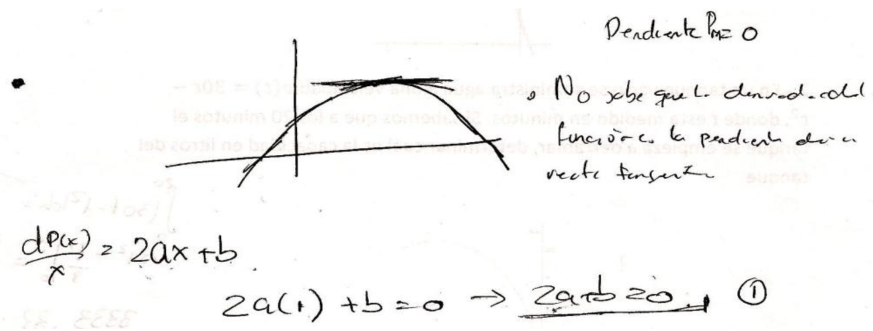


Imagen 3.8.1 Respuesta del estudiante 3 al problema 8, condición 2

Conflicto semiótico

- No relaciona la derivada de una función con el valor de la pendiente de la recta tangente.

Problema 9

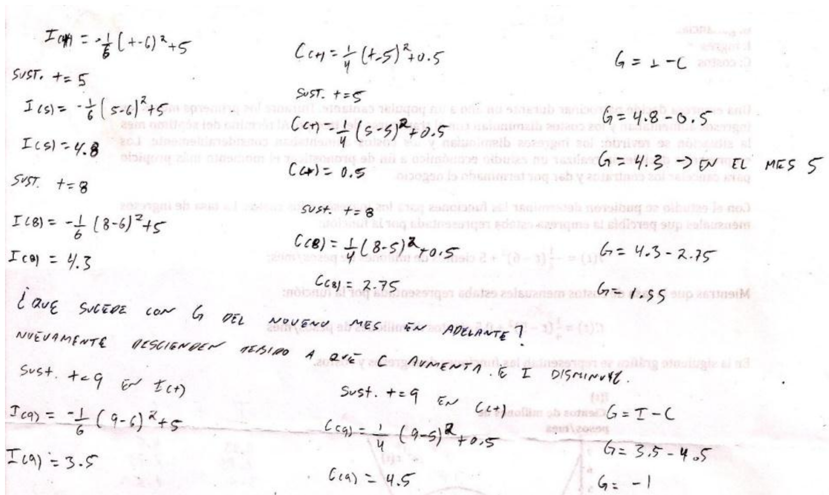
Prácticas matemáticas

Primeramente se pide al estudiante explicar que sucede con la ganancia de la empresa en intervalos de tiempo determinados, a lo que el estudiante responde: *¿Qué sucede con las ganancias los primeros 2 meses? No hay ganancias, ya que los costos son mayores que los ingresos. Sólo observando a gráfica se puede percibir, ya que la parábola de C desciende; mientras que la de I asciende. ¿Qué sucede con las ganancias del segundo al octavo mes? Aumentan, debido a que hay más ingresos que costos, podemos observar la gráfica, o utilizando las funciones y calculando un par de ejemplo. ¿Qué sucede con G del noveno es en adelante? Nuevamente desciende debido a que C aumenta e I disminuye.* De su respuesta se interpreta que el estudiante relaciona el comportamiento de la ganancia con relación al comportamiento de las funciones costos e ingresos, incluso, el estudiante justifica lo observado en la gráfica con cálculos en las ganancias puntuales de los meses 5 y 8 (ver imagen 3.9).

En los incisos b y d se pide al estudiante calcular las ganancias de la empresa los primeros 4 meses y los primero 12 meses, respectivamente. Para realizar el cálculo de la ganancia de la empresa los primeros 12 meses el estudiante menciona:

utilizamos el TFC para calcular I(t) y C(t) de x=0 a x=12 para después restarlos y obtener las ganancias, con esto se muestra la relación que establece el estudiante entre la integral definida con el cálculo de las ganancias de una empresa. En el cálculo de los ingresos al estudiante le pasa inadvertido que la función ingresos tiene parte negativa en el intervalo a calcular el área, además, la antiderivada que proporciona es la misma función; por lo que el resultado obtenido es incorrecto. En el cálculo de los costos el estudiante propone como antiderivada la misma función, por lo que el resultado también es incorrecto (ver imagen 3.9.1).

El estudiante realiza un bosquejo de la función ganancia basándose en el comportamiento que ha descrito anteriormente (ver imagen 3.9.2).



$I(t) = -\frac{1}{6}(t-6)^2+5$ $\quad C(t)=\frac{1}{4}(t-5)^2+0.5$ $\quad G = I - C$

SUST. $t=5$ $\quad I(5) = -\frac{1}{6}(5-6)^2+5$ $\quad I(5)=4.8$

SUST. $t=5$ $\quad C(t) = \frac{1}{4}(5-5)^2+0.5$ $\quad C(t) = 0.5$

$G = 4.8 - 0.5$ $\quad G = 4.3$ → EN EL MES 5

SUST. $t=8$ $\quad I(8) = -\frac{1}{6}(8-6)^2+5$ $\quad I(8) = 4.3$

SUST. $t=8$ $\quad C(8) = \frac{1}{4}(8-5)^2+0.5$ $\quad C(8) = 2.75$

$G = 4.3 - 2.75$ $\quad G = 1.55$

¿QUE SUCEDE CON G DEL NOVENO MES EN ADELANTE?

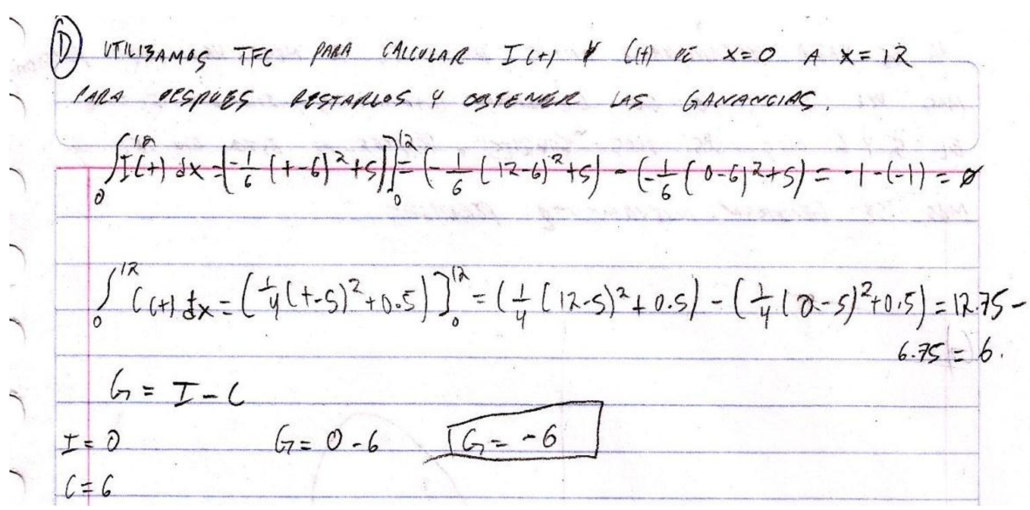
NUEVAMENTE DESCIENDEN DEBIDO A QUE C AUMENTA. E I DISMINUYE.

SUST. $t=9$ EN $I(t)$ $\quad I(9) = -\frac{1}{6}(9-6)^2+5$ $\quad I(9) = 3.5$

SUST. $t=9$ EN $C(t)$ $\quad C(9) = \frac{1}{4}(9-5)^2+0.5$ $\quad C(9) = 4.5$

$G = I - C$ $\quad G = 3.5 - 4.5$ $\quad G = -1$

Imagen 3.9 Respuesta del estudiante 3 al problema 9 inciso a



D) UTILIZAMOS TFC PARA CALCULAR I(t) Y C(t) DE X=0 A X=12 PARA DESPUES RESTARLOS Y OBTENER LAS GANANCIAS.

$$\int_0^{12} I(t)\,dx = \left[-\frac{1}{6}(t-6)^2+5\right]_0^{12} = \left(-\frac{1}{6}(12-6)^2+5\right) - \left(-\frac{1}{6}(0-6)^2+5\right) = -1-(-1) = 0$$

$$\int_0^{12} C(t)\,dx = \left(\frac{1}{4}(t-5)^2+0.5\right)\Big]_0^{12} = \left(\frac{1}{4}(12-5)^2+0.5\right) - \left(\frac{1}{4}(0-5)^2+0.5\right) = 12.75 - 6.75 = 6.$$

$G = I - C$

$I = 0$ $\quad G = 0 - 6$ $\quad \boxed{G = -6}$

$C = 6$

Imagen 3.9.1 Respuesta del estudiante 3 al problema 9 inciso d

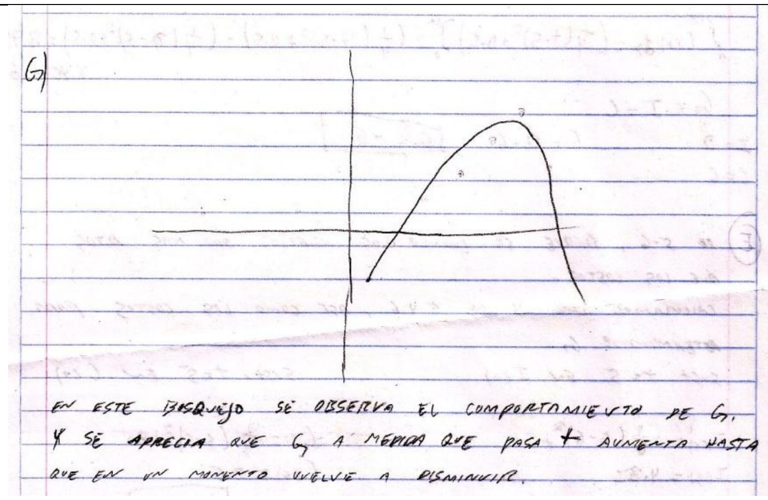


Imagen 3.9.2 Respuesta del estudiante 3 al problema 9 inciso g

Conflicto semiótico

- La integral proporciona el área.

En la siguiente tabla se presenta la relación entre las situaciones problema y las competencias desarrolladas. En caso de que cierta competencia esté presente indicaremos el nivel en que lo hace de la siguiente manera: nivel de reproducción=1, nivel de conexión=2 y nivel de reflexión=3, en caso de no inferirse alguna competencia de la respuesta del alumno se señala en el recuadro con una línea horizontal (-), esto se debe a que el estudiante no resolvió la situación problema o utilizó procedimientos erróneos, en tal caso más adelante indicaremos los conflictos semióticos que se detectaron.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
Problema 1	1	1	1	-	1	1	1	1
Problema 2	2	2	1	-	2	2	2	2
Problema 3	1	1	1	-	1	1	1	1
Problema 4	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 5	2	2	1	-	2	2	2	2
Problema 6	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 7	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 8	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 9	-	-	-	-	-	-	-	-

El estudiante resuelve las situaciones problema en las que se solicita calcular el área comprendida entre la gráfica de la función *f(x)* y el eje x en un intervalo [a, b] sólo en el caso que la función sea positiva en el intervalo determinado. En clase, aparte de resolver este tipo de situaciones, el estudiante ha abordado situaciones en las que la función integrando tiene parte negativa y éstas en el examen no fue capaz de resolverlas.

Respecto al cálculo del área comprendida entre las gráficas de dos funciones, el estudiante conoce un método adecuado para resolver este tipo de situaciones, calcular el área comprendida entre las gráficas de las funciones por separado y calcular la diferencia entre los resultados; sin embargo, en la situación problema presente en la examen una de las funciones tiene parte negativa y el estudiante no considera esta característica por lo que el resultado es incorrecto.

Además de la relación establecida en clase entre la integral definida y el cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b], el estudiante establece otras relaciones, en el problema 2 establece una relación entre la integral definida y cálculo de volúmenes; en el problema 5 la relaciona con el aumento de peso de un cerdo. De esta manera podemos decir que el estudiante resuelve situaciones problema que no son ya de mera rutina, pero que aún incluyen escenarios familiares o casi familiares.

Con base en la información que nos otorga la tabla y los comentarios anteriores agruparemos las competencias matemáticas en los niveles en que se desarrollaron.

Competencias matemáticas	Nivel de desarrollo
C1,C2,C5,C6,C7,C8	Conexión
C1, C2, C3, C5, C6, C7, C8	Reproducción
C4	-

De las situaciones problema que el estudiante ha resuelto incorrectamente enlistamos los conflictos semióticos que se detectaron, por una parte los que tienen relación con el cálculo integral y por otra parte los que están involucrados con temáticas abordadas anteriormente.

Conflictos semióticos en cálculo integral:

- La integral definida nos proporciona el área
- La antiderivada de una constante es la misma constante.

Conflictos semióticos en otras áreas:

- No relaciona la derivada de una función con el valor de la pendiente de la recta tangente.

Alumno 4

Enseguida, evaluamos el desarrollo que tiene el alumno 4 de las competencias disciplinares establecidas en la Reforma Integral de la Educación Media Superior (2008). Para ello, identificamos las prácticas matemáticas, los objetos matemáticos primarios y los procesos matemáticos presentes en la respuesta que el alumno da a cada problema. Para determinar si la competencia está presente y el nivel en el que lo hace primeramente identificamos la capacidad relacionada a cada competencia que se interpreta de la respuesta del estudiante.

Problema 1

Prácticas matemáticas

Las prácticas matemáticas más notorias que realiza el estudiante son la lectura de la situación problema y la producción de un texto para darle respuesta. El estudiante primeramente determina la antiderivada, después indica que el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo determinado se calcula resolviendo la integral definida $\int_1^3 e^x - 2x dx$. El resultado que obtiene el estudiante no es correcto ya que se equivoca al momento de transcribir la función de la que se pedía calcular el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x de x=1 hasta x=3.

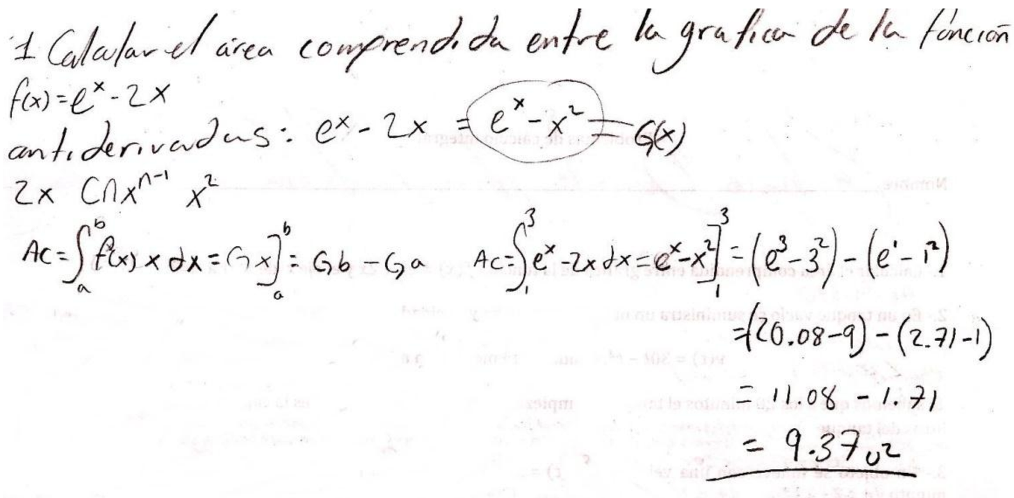


Imagen 4.1 Respuesta del estudiante 4 al problema 1

Situación problema

Ver problema 1.

Lenguajes

- Algebraico: usado en la representación y cálculo de la integral definida.
- Numérico: usado para darle respuesta a la situación problema.

Conceptos-Definiciones

Función, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo, integral definida, área, unidades cuadradas.

Proposiciones

- El área comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = e^x - 2x$ y el eje x de x=1 a x=3 se calcular resolviendo $\int_1^3 (e^x - 2x)dx$.
- $\int_1^3 (e^x - 2x)\,dx = e^x - x^2]_1^3$.
- Teorema Fundamental del Cálculo.

Procedimientos

- Relacionar la integral definida con el cálculo de áreas.
- Utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema.

Argumentos

De manera implícita el estudiante argumenta el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo [1, 3] calculando $\int_1^3 (e^x - 2x)dx$.

Procesos matemáticos

- Proceso de comunicación en el sentido que el alumno entiende la situación problema y produce un texto que le da respuesta
- Proceso de significación de la integral definida como el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x.
- Proceso de algoritmización en el cálculo de la integral definida.
- Proceso de argumentación en tanto se usa la integral definida para calcular el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo [a, b].

C1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “reconocer, recopilar, activar y aprovechar modelos familiares bien estructurados; pasar sucesivamente de los diferentes modelos (y sus resultados) a la realidad y viceversa para lograr una interpretación; comunicar de manera elemental los resultados del modelo”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es la estrecha relación que tiene la situación problema con las ha resuelto el estudiante anteriormente, la integral definida es abordada en clase con problemas de cálculo de áreas.

C2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “exponer y formular problemas reconociendo y reproduciendo problemas ya practicados puros y aplicados de manera cerrada; resolver problemas utilizando enfoques y procedimientos estándar, normalmente de una única manera”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis realizado a los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos procedimientos: relacionar la integral definida con el cálculo de áreas, utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema; mismos que fueron practicados en clases al resolver este tipo de situaciones problema.

El hecho que el estudiante no obtenga un resultado numérico correcto debido a que transcribe la función erróneamente, cambiándole el signo, no es de gran importancia ya que estamos interesados en el procedimiento que sigue el estudiante para resolver la situación problema.

C3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los procesos matemáticos involucrados en la solución de la situación problema. En dicho análisis encontramos el proceso de comunicación, el estudiante entiende la situación problema y utiliza el Teorema Fundamental del Cálculo para dar respuesta. El estudiante se equivoca al momento de dar el valor numérico pero para nosotros hay otras acciones que sobresalen.

C4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático

Consideramos que dicha competencia no se muestra en la respuesta del alumno, aunque se podría justificar con la elección de la integral definida para resolver el problema el descriptor “seguir y justificar los procesos cuantitativos estándar, entre ellos los procesos de cálculo, los enunciados y los resultados”, pero de todos modos nos inclinamos por la primera opción.

C5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “formular las preguntas más simples (¿cuántos...?, ¿cuánto es...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (tantos, tanto)”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante está presente este descriptor es el análisis de los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite mencionar cuáles son estos procedimientos: relacionar la integral definida con el cálculo de áreas y utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema, los cuales fueron practicados en clase al resolver este tipo de situaciones problema.

C6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "descodificar, codificar e interpretar representaciones de objetos matemáticos previamente conocidos de un modo estándar que ya ha sido practicado. El paso de una representación a otra sólo se exige cuando ese paso mismo es una parte establecida de la representación", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es la estrecha relación que tiene la situación problema con las que ha resuelto el estudiante anteriormente, la integral definida es abordada en clase con problemas de cálculo de áreas y, además, en el análisis de lenguajes observamos que el estudiante para resolver el problema utiliza, mayormente, el lenguaje algebraico.

C7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "comprender y emplear conceptos matemáticos en el mismo contexto en el que se introdujeron por primera vez o en el que se han practicado subsiguientemente", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los conceptos-definiciones (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos conceptos-definiciones: integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo; mismos que fueron abordados en clases al resolver este tipo de situaciones problema.

C8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor "descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario que ya se ha practicado en situaciones y contextos sobradamente conocidos; manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos rutinarios", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos lenguajes: algebraico y numérico, mismos que fueron practicados en clase para resolver este tipo de situaciones problema.

Problema 2
Prácticas matemáticas En el examen el estudiante menciona: *si sustituimos en la fórmula t=20 min entonces nos da un total de 200 que serían los litros que derrama entonces para que no sobre nada de agua:* $30t - t^2$*debe ser igual a cero*$30(30) - 30^2 = 0$*;* también menciona: $30(20) - 20^2 = \frac{200}{10} = 10$ *obviamente la capacidad es <200 lts* (ver imagen 4.1);claramente los razonamiento del estudiante no son correctos ya que para calcular la capacidad del tanque evalúa en la función velocidad de flujo. Durante la entrevista se le informa que cuando el flujo de agua es constante el volumen se puede calcular multiplicando la velocidad de flujo por el tiempo, por lo que, si graficamos la velocidad de flujo contra el tiempo calcular el volumen sería igual a calcular el área del rectángulo cuya base es el tiempo y la altura el valor de la velocidad de flujo (constante). El estudiante contesta que en nuestro caso la velocidad de flujo no es constante pero no establece la conexión entre el problema planteado y el cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función velocidad de flujo y el eje x en el intervalo [0, 20], para resolver la situación problema el estudiante sigue sustituyendo en la función velocidad de flujo t=20 y multiplicando por 20 (ver imagen 4.1.1).

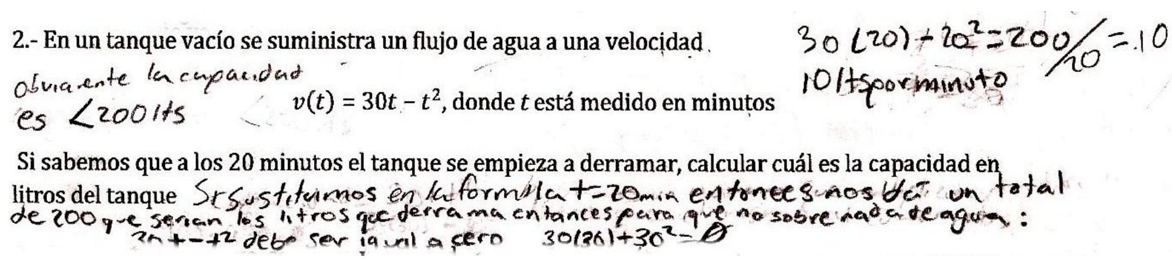


Imagen 4.1 Respuesta del estudiante 4 al problema 1

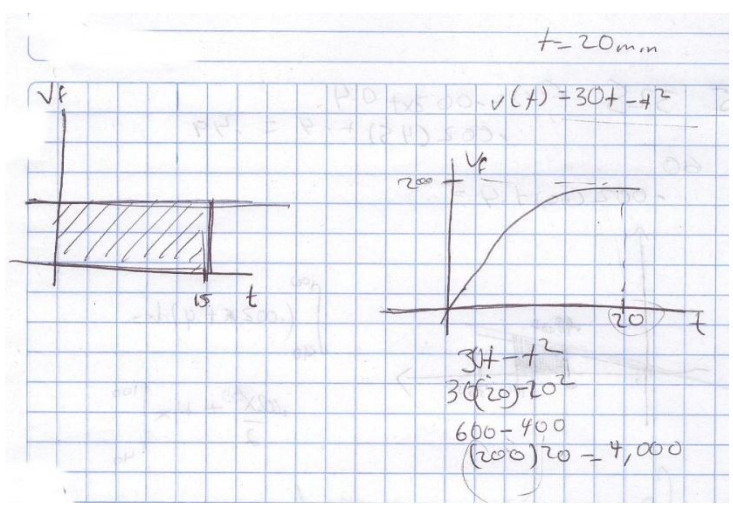


Imagen 4.1.1 Respuesta del estudiante 4 al problema 1 (entrevista)

Conflicto semiótico

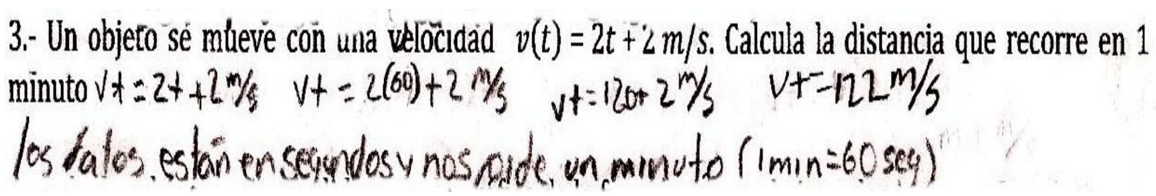
- No relaciona la integral definida con el cálculo del volumen del tanque.

Problema 3

Prácticas matemáticas

En el examen el estudiante evalúa t=60 en la función velocidad, aclarando*: los datos están en segundos y nos piden un minuto (1 min=60 seg),* en su respuesta nunca hace explícito que el resultado de evaluar en la función velocidad sea el resultado a la situación problema (ver imagen 4.3).

Durante la entrevista se pide al estudiante resuelva la situación problema, el estudiante sustituye en la función velocidad y menciona que la distancia se calcula multiplicando la velocidad por el tiempo intenta seguir ese método pero se da cuenta que las unidades no coinciden así que convierte en segundos los minutos, el entrevistador interrumpe al estudiante y le informa que cuando la velocidad es constante la distancia recorrida se puede calcular multiplicando la velocidad por el tiempo, por lo que, si graficamos la velocidad contra el tiempo calcular la distancia recorrida sería igual a calcular el área del rectángulo cuya base es el tiempo y la altura el valor de la velocidad (constante). El estudiante contesta que en nuestro caso la velocidad no es constante, que para calcular la distancia recorrida se calcula el área bajo la curva y, para ello, calculará el área del trapecio que se forma (ver imagen 4.3.1).


3.- Un objeto se mueve con una velocidad $v(t) = 2t + 2\ m/s$. Calcula la distancia que recorre en 1 minuto $Vt = 2t + 2\ m/s$ $\quad Vt = 2(60) + 2\ m/s$ $\quad Vt = 120 + 2\ m/s$ $\quad Vt = 122\ m/s$

los datos están en segundos y nos pide un minuto (1min=60 seg)

Imagen 4.3 Respuesta del estudiante 4 al problema 3

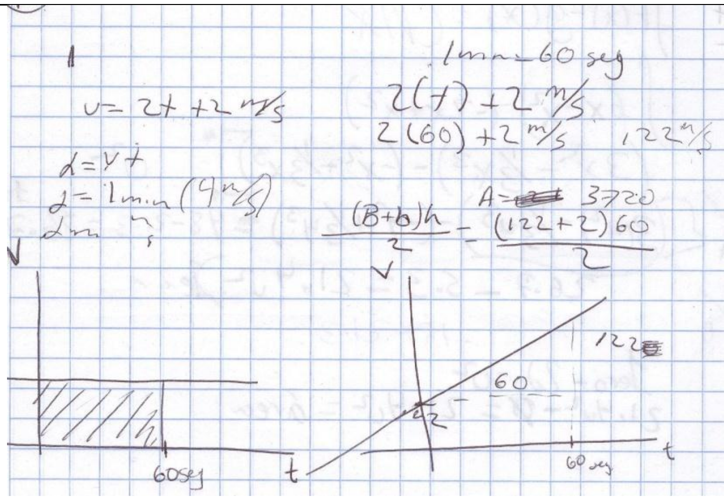


Imagen 4.3.1 Respuesta del estudiante 4 al problema 3 (entrevista)

Situación problema

Ver problema 2.

Lenguajes

- Algebraico: usado para representar las fórmulas para calcular: el área de un trapecio y la distancia recorrida.
- Numérico: usado para dar respuesta a la situación problema.

Conceptos-Definiciones

Área, base mayor, base menor, altura, trapecio, función.

Proposiciones

- El área comprendida entre la gráfica de la función $v(t) = 30t - t^2$ y el eje x de x=0 a x=60 se calcula obteniendo el área del trapecio que se forma al graficar la función y las rectas x=0 y x=60 en el plano cartesiano.

Procedimientos

- Identificar el trapecio que se forma al graficar la función y, las rectas x=0 y x=60 en el plano cartesiano.
- Evaluar x=0 y x=60 en la función velocidad para determinar la base menor y la base mayor del trapecio.
- Utilizar la fórmula $A = \frac{(B+b)h}{2}$.

Argumentos

De manera implícita el estudiante argumenta el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo [0, 60] calculando el área del trapecio que se forma

al graficar la función y las rectas x=0 y x=60 en el plano cartesiano.
Procesos matemáticos • Proceso de algoritmización en el cálculo de la integral definida. • Proceso de comunicación en el sentido que el alumno entiende la situación problema y produce un texto que le da respuesta. • Proceso de argumentación en tanto se usa la integral definida para calcular el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo [a, b]. • Proceso de idealización del trapecio que se forma al graficar la función y las rectas x=0 y x=60 en el plano cartesiano.

C1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "reconocer, recopilar, activar y aprovechar modelos familiares bien estructurados; comunicar de manera elemental los resultados del modelo", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el conocimiento de las situaciones problema que ha resuelto el estudiante. En clase, antes de calcular el área comprendida entre la gráfica de la función y en eje x en un intervalo [a, b] utilizando a integral definida, se pide al estudiante aproximar el área; los estudiante utilizan figuras geométricas conocidas (triángulo, rectángulo, trapecio) para realizar esta aproximación. En este caso el estudiante puede calcular exactamente el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x con este método ya que al graficar la función y las rectas (x=0 y x=60) en el plano cartesiano se forma un trapecio.

C2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "exponer y formular problemas reconociendo y reproduciendo problemas ya practicados puros y aplicados de manera cerrada; resolver problemas utilizando enfoques y procedimientos estándar, normalmente de una única manera", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis realizado a los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos procedimientos: identificar el trapecio que se forma al graficar la función y las rectas (x=0 y x=60) en el plano cartesiano, evaluar x=0 y x=60 en la función velocidad para determinar la base menor y la base mayor del trapecio y, utilizar la fórmula $A = \frac{(B+b)h}{2}$; los cuales forman parte de las situaciones que los estudiantes resuelven en clase ya que antes de calcular el área comprendida entre la gráfica de la función y en eje x en un intervalo [a, b] utilizando a integral definida, se pide al estudiante aproximar el área; los estudiante utilizan figuras geométricas conocidas (triángulo, rectángulo, trapecio) para realizar esta aproximación.

C3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los procesos matemáticos involucrados en la solución de la situación problema. En dicho análisis encontramos el proceso de comunicación en tanto el estudiante entiende la situación problema y produce un texto que le da respuesta.

C4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático

Consideramos que dicha competencia no se muestra en la respuesta del alumno, aunque se podría justificar con el cálculo del área del trapecio que se forma al graficar la función y las rectas x=0 y x=60 en el plano cartesiano el descriptor "seguir y justificar los procesos cuantitativos estándar, entre ellos los procesos de cálculo, los enunciados y los resultados", pero de todos modos nos inclinamos por la primera opción.

C5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "formular las preguntas más simples (¿cuántos...?, ¿cuánto es...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (tantos, tanto)", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante está presente este descriptor es el análisis de los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite mencionar cuáles son estos procedimientos: identificar el trapecio que se forma al graficar la función y las rectas (x=0 y x=60) en el plano cartesiano, evaluar x=0 y x=60 en la función velocidad para determinar la base menor y la base mayor del trapecio y, utilizar la fórmula $A = \frac{(B+b)h}{2}$ para resolver la situación problema.

C6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "descodificar, codificar e interpretar representaciones de objetos matemáticos previamente conocidos de un modo estándar que ya ha sido practicado. El paso de una representación a otra sólo se exige cuando ese paso mismo es una parte establecida de la representación", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es la estrecha relación que tiene la situación problema con las ha resuelto el estudiante anteriormente y el análisis realizado a los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos lenguajes: algebraico y numérico, los cuales han estado presentes en las actividades resueltas en clase.

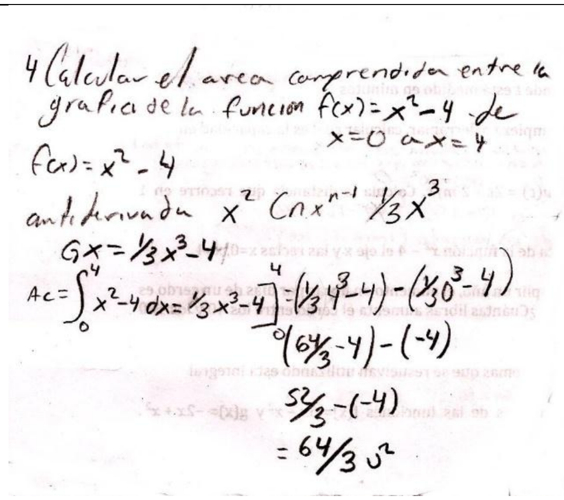
C7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "comprender y emplear conceptos matemáticos en el mismo contexto en el que se introdujeron por primera vez o en el que se han practicado subsiguientemente", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los conceptos-definiciones (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos conceptos-definiciones: área, base mayor, base menor, altura, trapecio, función; los cuales forman parte de los conceptos-definiciones que se abordaron en clase al resolver situaciones problema donde se pide calcular el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b].

C8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor "descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario que ya se ha practicado en situaciones y contextos sobradamente conocidos; manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos rutinarios", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. En dicho análisis encontramos que los lenguajes utilizados fueron el algebraico y el numérico, mismos que fue practicado en clase para resolver este tipo de situaciones problema.

Problema 4
Prácticas matemáticas El estudiante para solucionar la situación problema primeramente proporciona la antiderivada de la función *f(x)*, la cual no es correcta ya que dice que la antiderivada de *f(x)=4* es la misma función, después indica que el área que se le pide calcular la determina resolviendo la integral definida $\int_0^4 x^2 - 4\,dx$, procedimiento que no es correcto ya que la función f(x) en el intervalo [0, 4] tiene parte negativa, situación que pasa inadvertida por el estudiante.


4 Calcular el area comprendida entre la grafica de la funcion $f(x)=x^2-4$ de $x=0$ a $x=4$

$f(x)=x^2-4$

antiderivada x^2 Cnx^{n-1} $\frac{1}{3}x^3$

$Gx=\frac{1}{3}x^3-4$

$Ac=\int_0^4 x^2-4\,dx=\frac{1}{3}x^3-4\Big]_0^4=\left(\frac{1}{3}4^3-4\right)-\left(\frac{1}{3}0^3-4\right)$

$\left(\frac{64}{3}-4\right)-(-4)$

$\frac{52}{3}-(-4)$

$=\frac{64}{3}\,u^2$

Imagen 4.4 Respuesta del estudiante 4 al problema 4

Conflicto semiótico

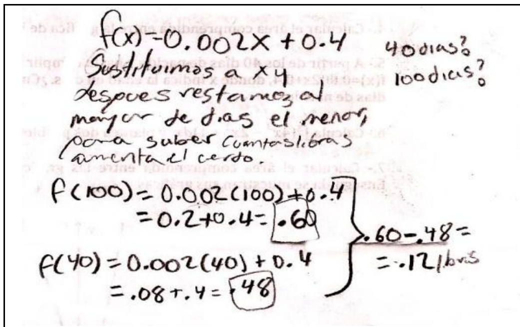
- La integral definida nos proporciona el área.
- La antiderivada de una constante es la misma constante.

Problema 5

Prácticas matemáticas

En el examen el estudiante sustituye x=40 y x=100 en la función aumento de peso y después calcular la diferencia entre los resultados de las sustituciones, así obtiene el aumento de peso del cerdo en el entre los días 40 y 100; procedimiento incorrecto para resolver la situación problema (ver imagen 4.5).

Durante la entrevista se le pidió leer y resolver la situación problema, el estudiante trato de sustituir distintos valores en la función aumento de peso (x=45, x=60), el entrevistador lo interrumpe y realiza la gráfica de la función aumento de peso, le menciona que para resolver la situación problema se debe calcular el comprendida entre la función y el eje x en el intervalo [40, 100], es decir, resolver $\int_{40}^{100}(0.002x+0.4)dx$. El estudiante sólo se encarga de proporcionar la antiderivada (ver imagen 4.5.1).



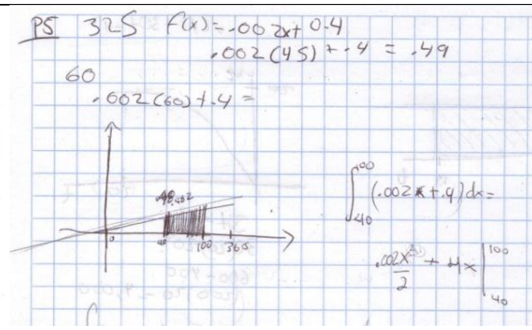


Imagen 4.5 Respuesta del estudiante 4 al problema 5

Imagen 4.5.1 Respuesta del estudiante 4 al problema 5 (entrevista)

Conflicto semiótico

- No relaciona la integral definida con el cálculo de aumento de peso.

Problema 6

Prácticas matemáticas

El estudiante para resolver la situación problema plantea la antiderivada de la función integrando, la antiderivada proporcionada por el estudiante no es correcta ya que dice que la antiderivada para dx es 1 (ver imagen 4.6).

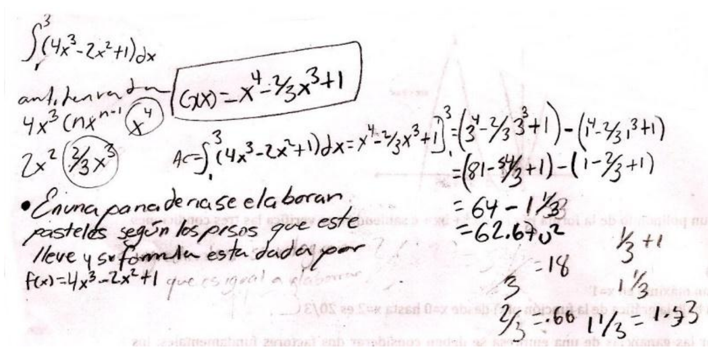


Imagen 4.6 Respuesta del estudiante 4 al problema 6

Conflicto semiótico

- La antiderivada de una constante es la misma constante.

Problema 7

Prácticas matemáticas

El estudiante conoce un método para calcular el área comprendida entre la gráfica de dos funciones, sin embargo, una de estas funciones tiene parte negativa en el intervalo de interés y el estudiante no consideró esta característica de la función.

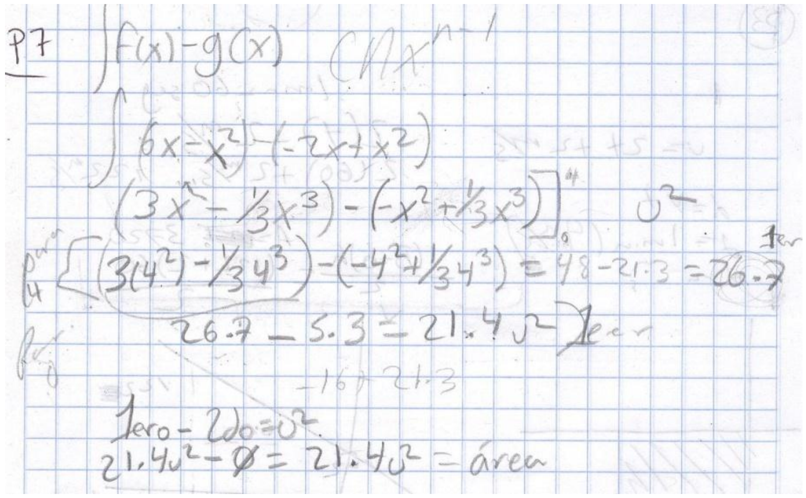


Imagen 4.7 Respuesta del estudiante 4 al problema 7

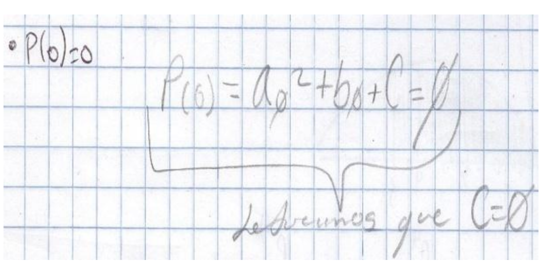
Problema 8

Prácticas matemáticas

Durante la entrevista se plantea al estudiante leer la situación problema y resolverla, primero se le cuestiona acerca del significado de la condición $p(0) = 0$; el estudiante menciona que el polinomio es cero cuando x=0 y se le pide realice la operación de donde deduce que c=0 (ver imagen 4.8).

Acerca de la segunda condición, tiene un máximo en x=1, el estudiante menciona: *nos dice que x no podrá ser mayor a 1*, razonamiento incorrecto por parte del estudiante; el entrevistador realiza un bosquejo del polinomio y da el significado de la segunda condición (la derivada del polinomio en x=1 es cero) (ver imagen 6.8.1).

Acerca de la tercer condición, el estudiante utiliza la integral definida para calcular el área comprendida entre la gráfica del polinomio y el eje x desde x=0 hasta x=2; pero no puede resolver el sistema de ecuaciones, donde interviene el investigador para resolverlo (ver imagen 4.8.2).



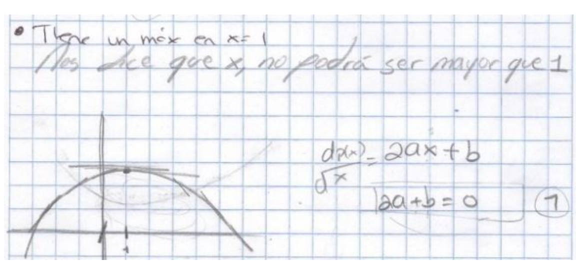


Imagen 4.8 Respuesta del estudiante 4 al   Imagen 4.8.1 Respuesta del estudiante 4 al

problema 8, condición 1 problema 8, condición 2

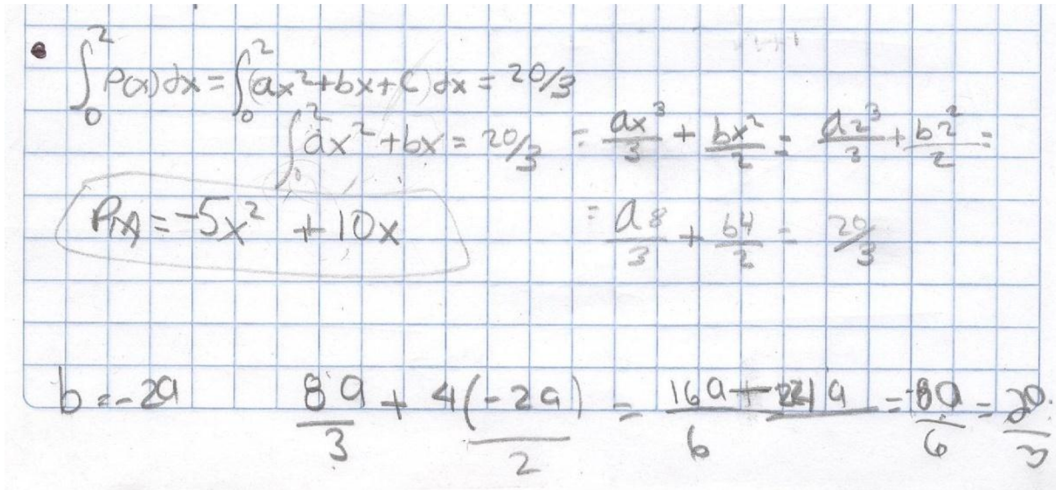


Imagen 4.8.2 Respuesta del estudiante 4 al problema 8, condición 3

Conflicto semiótico

- No relaciona la derivada de una función con el valor de la pendiente de la recta tangente.
- No soluciona el sistema de ecuaciones 2x2.

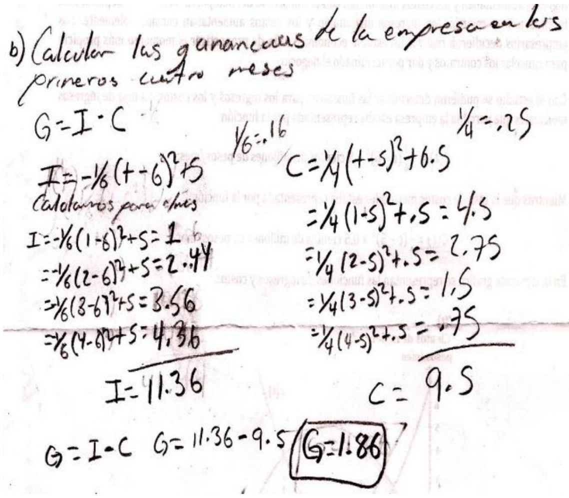
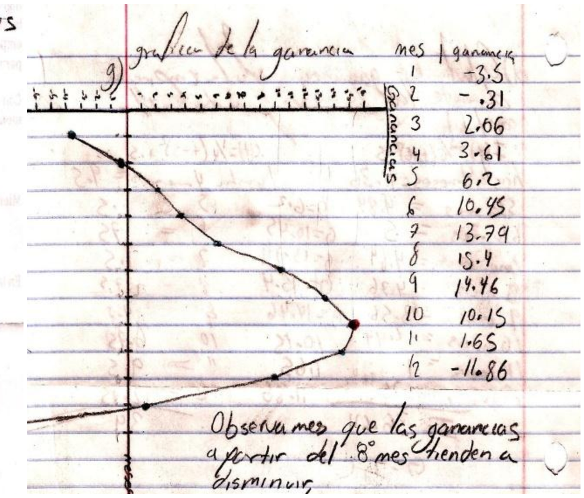
Problema 9

Prácticas matemáticas

Primeramente se pide al estudiante explicar que sucede con la ganancia de la empresa en intervalos de tiempo determinados, a lo que el estudiante responde: *¿Qué sucede con las ganancias de la empresa en los primeros dos meses? Aún no se tienen ganancias ya que los costos y los ingresos son exactamente iguales. ¿Qué sucede con las ganancias de la empresa del segundo al octavo mes? Los costos disminuyen y los ingresos aumentan por lo tanto las ganancias son elevadas.* De su respuesta se interpreta que el estudiante relaciona el comportamiento de la ganancia con relación al comportamiento de las funciones costos e ingresos.

En los incisos b y d se pide al estudiante calcular las ganancias de la empresa los primeros 4 meses y los primero 12 meses, respectivamente. Para calcular las ganancias de la empresa los primeros cuatro meses el estudiante calcula las ganancias de la empresa cada mes, es decir, evalúa en las funciones costos e ingresos los valores de cada mes x=1, x=2, x=3, x=4, suma el total de ingresos y costos, por último, calcula la diferencia entre los resultados de esta suma; procedimiento inadecuado para resolver la situación problema (ver imagen 4.9).

Para realizar el bosquejo de la función ganancia el estudiante realiza una tabla de

valores, en la primer columna utiliza el tiempo (12 meses) y en la segunda columna el valor de las ganancias, después ubica los puntos en el plano cartesiano y traza una curva para unirlos (ver imagen 4.9.1).
 Imagen 4.9 Respuesta del estudiante 4 al problema 9, inciso b  Imagen 4.9.1 Respuesta del estudiante 4 al problema 9, inciso g
Conflicto semiótico • No relaciona la integral definida con el cálculo de la ganancia de la empresa.

En la siguiente tabla se presenta la relación entre las situaciones problema y las competencias desarrolladas. En caso de que cierta competencia esté presente indicaremos el nivel en que lo hace de la siguiente manera: nivel de reproducción=1, nivel de conexión=2 y nivel de reflexión=3, en caso de no inferirse alguna competencia de la respuesta del alumno se señala en el recuadro con una línea horizontal (-), esto se debe a que el estudiante no resolvió la situación problema o utilizó procedimientos erróneos, en tal caso más adelante indicaremos los conflictos semióticos que se detectaron.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
Problema 1	1	1	1	-	1	1	1	1
Problema 2	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 3	1	1	1	-	1	1	1	1
Problema 4	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 5	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 6	-	-	-	-	-	-	-	-

Problema 7	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 8	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 9	-	-	-	-	-	-	-	-

El estudiante resuelve las situaciones problema en las que se solicita calcular el área comprendida entre la gráfica de la función *f(x)* y el eje x en un intervalo [a, b] sólo en el caso que la función sea positiva en el intervalo determinado. En clase, aparte de resolver este tipo de situaciones, el estudiante ha abordado situaciones en las que la función integrando tiene parte negativa y éstas en el examen no fue capaz de resolverlas.

El estudiante para calcular el área comprendida entre las gráficas de las funciones *f(x)* y *g(x)* utiliza la integral definida, calcular la integral de la diferencia de las funciones. El estudiante resuelve esta situación problema durante la entrevista lo que le permitió abordar en clase este tipo de situaciones.

El estudiante no establece nuevas relaciones de la integral definida, es decir, en clase establecen la relación que tiene como el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b] y, es sólo ésta la que se refleja en la evaluación.

Con base en la información que nos otorga la tabla y los comentarios anteriores agruparemos las competencias matemáticas en los niveles en que se desarrollaron. .

Competencias matemáticas	Nivel de desarrollo
C1,C2,C3,C5,C6,C7,C8	Reproducción
C4	-

De las situaciones problema que el estudiante ha resuelto incorrectamente enlistamos los conflictos semióticos que se detectaron, por una parte los que tienen relación con el cálculo integral y por otra parte los que están involucrados con temáticas abordadas anteriormente.

Conflictos semióticos en cálculo integral:

- No relaciona la integral definida con el cálculo del volumen del tanque.
- La integral definida proporciona el área.
- La antiderivada de una constante es la misma constante.
- No relaciona la integral definida con el cálculo de aumento de peso.
- No relaciona la integral definida con el cálculo de la ganancia de la empresa.

Conflictos semióticos en otras áreas:

- No relaciona la derivada de una función con el valor de la pendiente de la recta tangente.
- No soluciona el sistema de ecuaciones 2x2.

Alumno 5

Enseguida, evaluamos el desarrollo que tiene el alumno 5 de las competencias disciplinares establecidas en la Reforma Integral de la Educación Media Superior (2008). Para ello, identificamos las prácticas matemáticas, los objetos matemáticos primarios y los procesos matemáticos presentes en la respuesta que el alumno da a cada problema. Para determinar si la competencia está presente y el nivel en el que lo hace primeramente identificamos la capacidad relacionada a cada competencia que se interpreta de la respuesta del estudiante.

Problema 1

Prácticas matemáticas

Durante el examen el estudiante recurre al Teorema Fundamental del Cálculo para resolver la situación problema, plantea la integral definida y proporciona la antiderivada de manera correcta; se equivoca al momento de evaluar los límites de integración: por un lado, ignora a la función e^xya que no evalúa en esta función y, por otro, al momento de evaluar en la función x^2 realiza una multiplicación en vez de una exponenciación (ver imagen 5.1).

El procedimiento descrito anteriormente lo repite durante la entrevista con la variante de sólo comente uno de los errores, ignorar a la función e^x; el estudiante reconsidera el resultado y procede a resolver la integral definida de manera correcta (ver imagen 5.1.1).

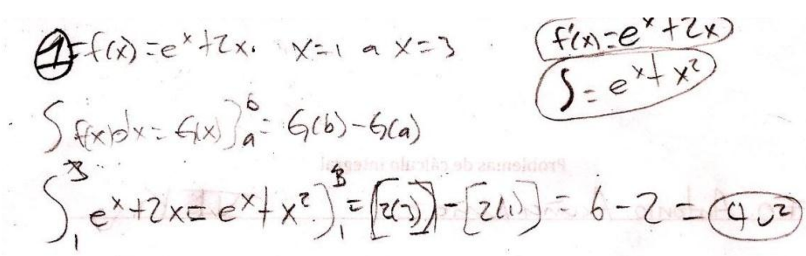
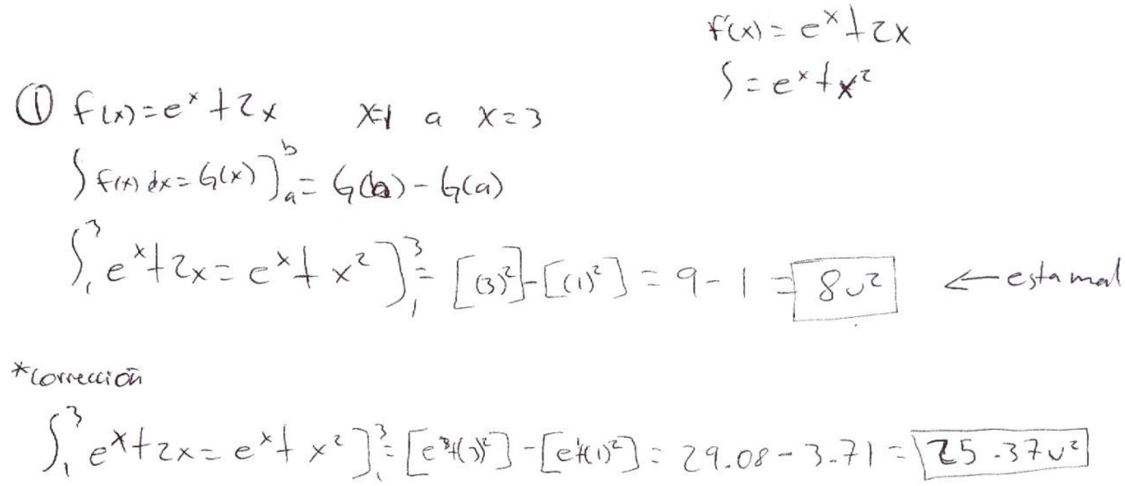


Imagen 5.1 Respuesta del estudiante 5 al problema 1



$f'(x) = e^x + 2x$

$\int = e^x + x^2$

① $f(x) = e^x + 2x \quad x=1$ a $x=3$

$\int f(x)\,dx = G(x)\Big]_a^b = G(b) - G(a)$

$\int_1^3 e^x + 2x = e^x + x^2\Big]_1^3 = [(3)^2] - [(1)^2] = 9 - 1 = \boxed{8u^2}$ ← esta mal

*Corrección

$\int_1^3 e^x + 2x = e^x + x^2\Big]_1^3 = [e^3 + (3)^2] - [e^1 + (1)^2] = 29.08 - 3.71 = \boxed{25.37u^2}$

Imagen 5.1.1 Respuesta del estudiante 5 al problema 1 (entrevista)

Situación problema

Ver problema 1.

Lenguajes

- Algebraico: usado para representar y calcular las integrales definidas.
- Numérico: usado para dar respuesta a la situaciones problema.

Conceptos-Definiciones

Integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo, unidades cuadradas.

Proposiciones

- El área comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = e^x + 2x$ y el eje x de x=1 a x=3 se calcular resolviendo $\int_1^3 (e^x + 2x)dx$.
- $\int_1^3 (e^x + 2x)\,dx = e^x + x^2]_1^3$.
- Teorema Fundamental del Cálculo.

Procedimientos

- Relacionar la integral definida con el cálculo de áreas.
- Utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema.

Argumentos

De manera implícita el estudiante argumenta el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo [1, 3] calculando $\int_1^3 (e^x + 2x)dx$.

Procesos matemáticos

- Proceso de comunicación en el sentido que el alumno entiende la situación problema y produce un texto que le da respuesta
- Proceso de significación de la integral definida como el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x.
- Proceso de algoritmización en el cálculo de la integral definida.
- Proceso de argumentación en tanto se usa la integral definida para calcular el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo [a, b].

C1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "reconocer, recopilar, activar y aprovechar modelos familiares bien estructurados; pasar sucesivamente de los diferentes modelos (y sus resultados) a la realidad y viceversa para lograr una interpretación; comunicar de manera elemental los resultados del modelo", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es la estrecha relación que tiene la situación problema con las ha resuelto el estudiante anteriormente, la integral definida es abordada en clase con problemas de cálculo de áreas.

C2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "exponer y formular problemas reconociendo y reproduciendo problemas ya practicados puros y aplicados de manera cerrada; resolver problemas utilizando enfoques y procedimientos estándar, normalmente de una única manera", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis realizado a los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos procedimientos: relacionar la integral definida con el cálculo de áreas, utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema; mismos que fueron practicados en clases.

C3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los procesos matemáticos involucrados en la solución de la situación problema. En dicho análisis encontramos el proceso de comunicación, el estudiante entiende la situación problema y utiliza el Teorema Fundamental del Cálculo para dar respuesta.

C4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático

Consideramos que dicha competencia no se muestra en la respuesta del alumno, aunque se podría justificar con la elección de la integral definida para resolver el problema el descriptor "seguir y justificar los procesos cuantitativos estándar, entre ellos los procesos de cálculo, los enunciados y los resultados", pero de todos modos nos inclinamos por la primera opción.

C5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "formular las preguntas más simples (¿cuántos...?, ¿cuánto es...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (tantos, tanto)", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante está presente este descriptor es el análisis de los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite mencionar cuáles son estos procedimientos: utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema.

C6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "descodificar, codificar e interpretar representaciones de objetos matemáticos previamente conocidos de un modo estándar que ya ha sido practicado. El paso de una representación a otra sólo se exige cuando ese paso mismo es una parte establecida de la representación", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es la estrecha relación que tiene la situación problema con las ha resuelto el estudiante anteriormente y el análisis realizado a los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos lenguajes: algebraico y numérico, los cuales han estado presentes en las actividades resueltas en clase.

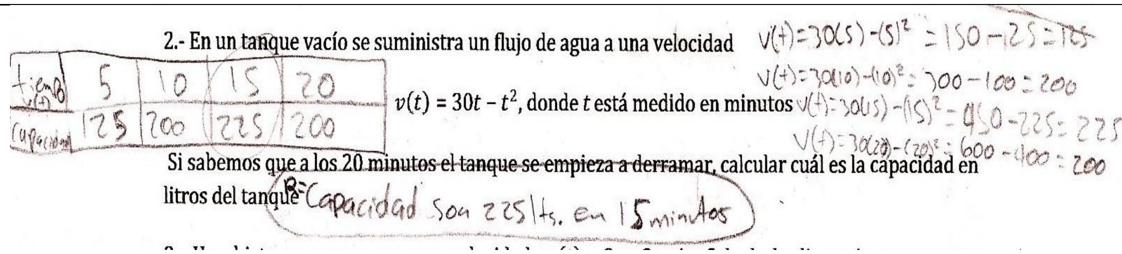
C7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "comprender y emplear conceptos matemáticos en el mismo contexto en el que se introdujeron por primera vez o en el que se han practicado subsiguientemente", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los conceptos-definiciones (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos conceptos-definiciones: integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo; mismos que fueron abordados en clases.

C8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor "descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario que ya se ha practicado en situaciones y contextos sobradamente conocidos; manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos rutinarios", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. En dicho análisis encontramos que los lenguajes utilizados fueron el algebraico y el numérico, mismos que fue practicado en clase para resolver este tipo de situaciones problema.

Problema 2
Prácticas matemáticas En el examen el estudiante realiza una tabla de valores, el primer renglón lo utiliza para el tiempo y el segundo para la capacidad, la cual fue calculada con un procedimiento erróneo. El método que sigue el estudiante para calcular la capacidad del taque es evaluar cientos valores de tiempo (t=5, t=10, t=15, t=20) en la función velocidad de flujo, de los resultados selecciona el más grande e indica que éste es la capacidad del tanque en litros (ver imagen 5.2). Durante la entrevista se le informa que cuando el flujo de agua es constante el volumen se puede calcular multiplicando la velocidad de flujo por el tiempo, por lo que, si graficamos la velocidad de flujo contra el tiempo calcular el volumen sería igual a calcular el área del rectángulo cuya base es el tiempo y la altura el valor de la velocidad de flujo (constante). Las prácticas matemáticas más notorias que realiza el estudiante son la lectura de la situación problema y la producción de un texto como respuesta. El estudiante contesta que en nuestro caso la velocidad de flujo no es constante, que para calcular el volumen se calcula el área bajo la curva y que para ello utiliza la integral. Lo primero que hace el estudiante es determinar la antiderivada de la función velocidad de flujo, obteniendo la correcta después de hacerle ver que la primera que proporciona no es correcta (imagen 5.2.1).


2.- En un tanque vacío se suministra un flujo de agua a una velocidad $v(t) = 30t - t^2$, donde t está medido en minutos

tiempo	5	10	15	20
capacidad	125	200	225	200

$v(t) = 30(5) - (5)^2 = 150 - 25 = 125$
$v(t) = 30(10) - (10)^2 = 300 - 100 = 200$
$v(t) = 30(15) - (15)^2 = 450 - 225 = 225$
$v(t) = 30(20) - (20)^2 = 600 - 400 = 200$

Si sabemos que a los 20 minutos el tanque se empieza a derramar, calcular cuál es la capacidad en litros del tanque

R= Capacidad son 225 lts. en 15 minutos

Imagen 5.2 Respuesta del estudiante 5 al problema 2

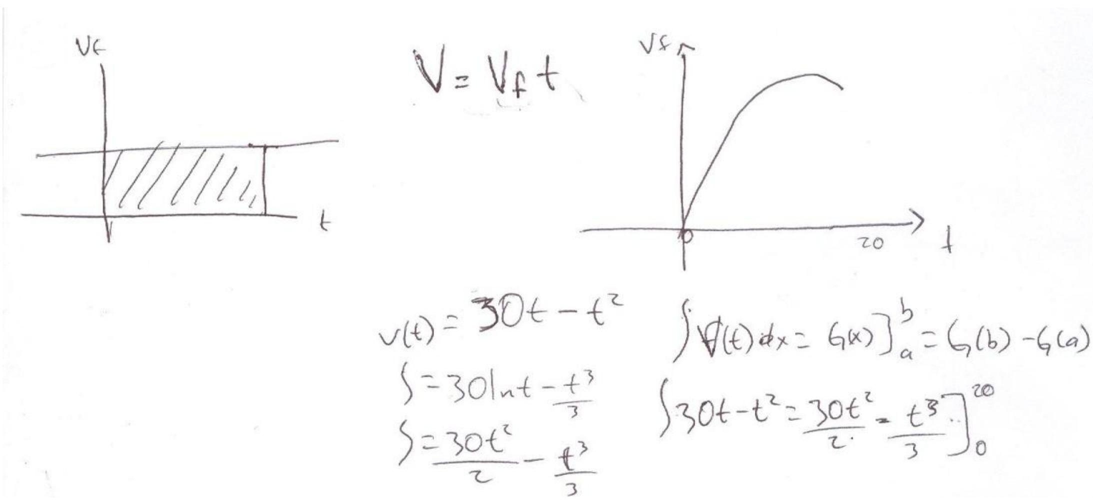


Imagen 5.2.1 Respuesta del estudiante 5 al problema 2 (entrevista)

Situación problema

Ver problema 2.

Lenguajes

- Algebraico: usado para representar y calcular la integral definida.

Conceptos-Definiciones

Integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo.

Proposiciones

- El área comprendida entre la gráfica de la función $v(t) = 30t - t^2$ y el eje x de x=0 a x=20 se calcular resolviendo $\int_0^{20}(30t - t^2)dt$.
- $\int_0^{20}(30t - t^2)dt = \frac{30t^2}{2} - \frac{t^3}{3}]_0^{20}$.
- Teorema Fundamental del Cálculo.

Procedimientos

- Relacionar la integral definida con el cálculo de áreas.
- Utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema.

Argumentos

De manera implícita el estudiante argumenta el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo [0, 20] calculando $\int_0^{20}(30t - t^2)dt$.

Procesos matemáticos

- Proceso de significación de la integral definida como el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b].
- Proceso de algoritmización en el cálculo de la integral definida.
- Proceso de comunicación en el sentido que el alumno entiende la situación problema y produce un texto que le da respuesta.
- Proceso de argumentación en tanto se usa la integral definida para calcular el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo [a, b].

C1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "reconocer, recopilar, activar y aprovechar modelos familiares bien estructurados; pasar sucesivamente de los diferentes modelos (y sus resultados) a la realidad y viceversa para lograr una interpretación; comunicar de manera elemental los resultados del modelo", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El estudiante resuelve la situación problema después que se le presenta la analogía de determinar el volumen, para el caso en que la velocidad de flujo sea constante, calculando el área del rectángulo de base el tiempo y de altura el valor de la función velocidad de flujo; es decir, es el entrevistador el que establece la relación entre la integral definida y el cálculo del volumen. Por ello se asegura que el descriptor mencionado es el que se interpreta de la respuesta del alumno.

C2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "exponer y formular problemas reconociendo y reproduciendo problemas ya practicados puros y aplicados de manera cerrada; resolver problemas utilizando enfoques y procedimientos estándar, normalmente de una única manera", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante está presente este descriptor es el análisis de procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Una vez que el problema fue reducido al cálculo del área bajo la curva el estudiante plantea la integral definida y, en este caso, no se pide al estudiante resolverla.

C3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los procesos matemáticos involucrados en la solución de la situación problema. En dicho análisis encontramos el proceso de comunicación en el siguiente sentido, el estudiante entiende la situación problema y puede plantear la herramienta para darle solución.

C4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático

Consideramos que dicha competencia no se muestra en la respuesta del alumno, aunque se podría justificar con la elección de la integral definida para resolver el problema el descriptor “seguir y justificar los procesos cuantitativos estándar, entre ellos los procesos de cálculo, los enunciados y los resultados”, pero de todos modos nos inclinamos por la primera opción.

C5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “formular las preguntas más simples (¿cuántos...?, ¿cuánto es...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (tantos, tanto)”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante está presente este descriptor es el análisis de los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite mencionar cuáles son estos procedimientos: relacionar la integral definida con el cálculo de áreas y utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema.

C6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “descodificar, codificar e interpretar representaciones de objetos matemáticos previamente conocidos de un modo estándar que ya ha sido practicado. El paso de una representación a otra sólo se exige cuando ese paso mismo es una parte establecida de la representación”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el hecho de que una vez reducido el problema al cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo [0, 20] el estudiante ha podido resolverlo. Además, en el análisis de lenguajes observamos que el estudiante para resolver el problema utiliza mayormente el lenguaje algebraico, el cual fue abordado en clase en la solución de este tipo de situaciones.

C7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "comprender y emplear conceptos matemáticos en el mismo contexto en el que se introdujeron por primera vez o en el que se han practicado subsiguientemente", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los conceptos-definiciones (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos conceptos-definiciones: integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo; todo esto una vez que el problema fue reducido al cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b].

C8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor "descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario que ya se ha practicado en situaciones y contextos sobradamente conocidos; manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos rutinarios", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir que el estudiante usa mayormente el lenguaje algebraico, esto una vez que el problema fue reducido al cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b].

Problema 3

Prácticas matemáticas

En el examen el estudiante realiza una tabla de valores, el primer renglón lo utiliza para el tiempo y el segundo para la velocidad. El estudiante evalúa cientos valores de tiempo (t=0.25, t=0.5, t=0.75, t=1) en la función velocidad e indica, sin hacer explícito el argumento, que la distancia recorrida en un minuto fue de 4 m/s (ver imagen 5.3). Procedimiento que es incorrecto para darle respuesta a la situación problema.

Además, el estudiante indica que el resultado es en metros por segundo pasándole inadvertido que la distancia se mide en unidades longitudinales.

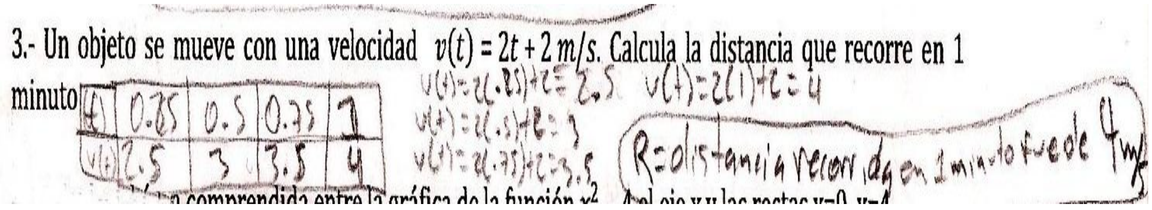


Imagen 5.3 Respuesta del estudiante 5 al problema 3

Conflicto semiótico

- No relaciona la integral definida con el cálculo de la distancia recorrida.

Problema 4

Prácticas matemáticas

El estudiante indica que el área solicitada en la situación problema se calcula resolviendo $\int_0^4 x^2 - 4$ sin tener en cuenta que en el intervalo [0, 4] la función tiene parte negativa, por lo que el resultado que obtiene es incorrecto. No obstante el estudiante calcula bien la antiderivada de la función y la evalúa de manera correcta en los límites de integración.

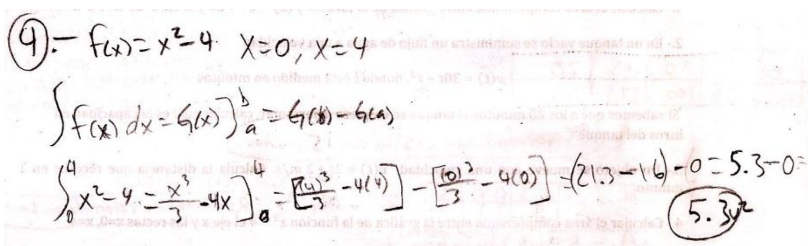


Imagen 5.4 Respuesta del estudiante 5 al problema 4

Conflicto semiótico

- La integral definida nos proporciona el área.

Problema 5

Prácticas matemáticas

El estudiante evalúa x=40 y x=100 en la función aumento de peso, calcula la diferencia entre los resultados y este resultado es el aumento de peso que tiene el cerdo entre los días 40 y 100. Procedimiento que es incorrecto para resolver la situación problema.

Además de calcular el aumento de peso del cerdo entre los días 40 y 100, el estudiante calcula el aumento de peso del cerdo entre los días 40 y 365; el método seguido para este cálculo es el mismo que se describió para calcular el aumento de peso en el intervalo [40, 100].

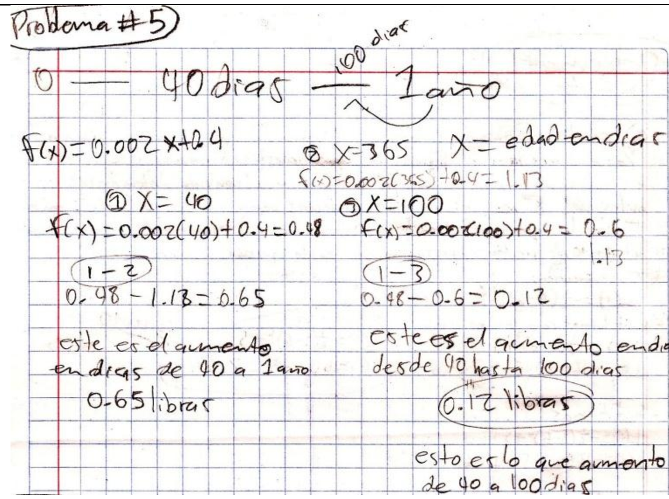


Imagen 5.5 Respuesta del estudiante 5 al problema 5

Conflicto semiótico

- El estudiante no relaciona el aumento de peso en un intervalo de tiempo con la integral definida.

Problema 6

Al estudiante se le pide resolver una integral definida cuya función integrando es una función polinomial, al momento de calcular esta integral el estudiante proporciona una antiderivada incorrecta lo que causa que el resultado también sea incorrecta. La antiderivada proporcionada por el estudiante es una mezcla de derivada y antiderivada de la función integrando.

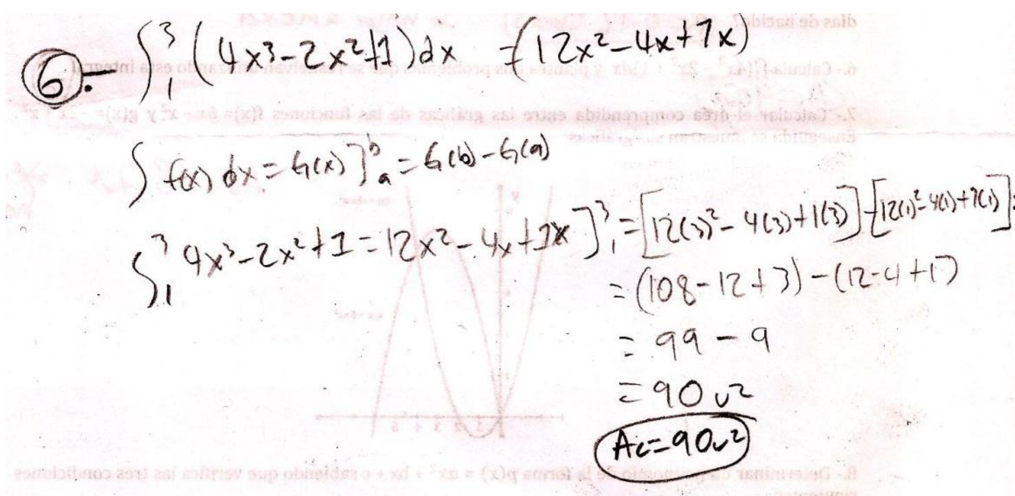


Imagen 5.6 Respuesta del estudiante 5 al problema 6

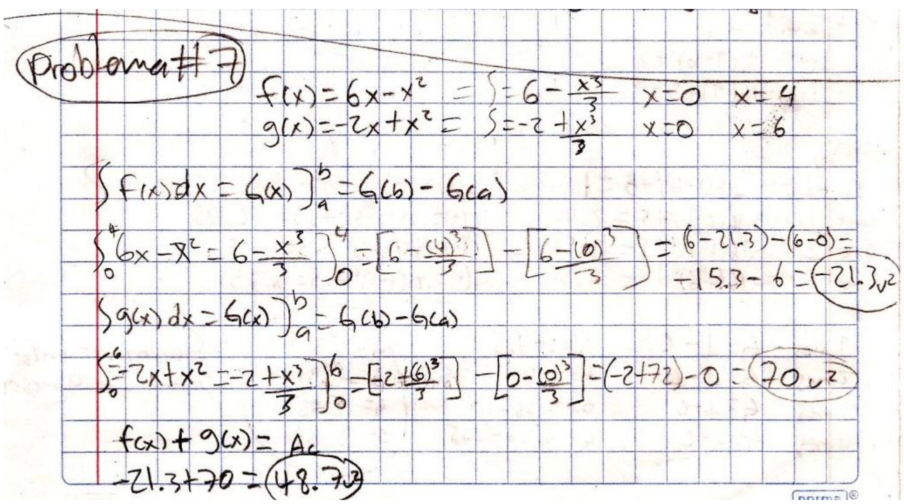
Conflicto semiótico

- Utiliza la derivada en vez de antiderivar la función integrando.

Problema 7

El estudiante para resolver el problema calcula por separado las integrales de las funciones que comprenden el área solicitada e indica que el área es la suma de los resultados de las integrales, procedimiento incorrecto para resolver la situación problema.

En el cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función *f(x)* y el eje x el estudiante no obtiene un resultado correcto debido a que proporciona una antiderivada para la función *f(x)* incorrecta, por otro lado, en el cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función *g(x)* y el eje x el estudiante se equivoca al proporcionar una antiderivada para la función *g(x)* incorrecta y los límites de integración son incorrectos. Las antiderivadas proporcionadas por el estudiante para ambas funciones son una mezcla entre la derivada y la antiderivada de la función integrando.



Problema #7

$f(x) = 6x - x^2 = \int 6 - \frac{x^3}{3}$ $x=0$ $x=4$

$g(x) = -2x + x^2 = \int -2 + \frac{x^3}{3}$ $x=0$ $x=6$

$\int f(x)dx = G(x)\Big]_a^b = G(b) - G(a)$

$\int_0^4 6x - x^2 = 6 - \frac{x^3}{3}\Big]_0^4 = \left[6 - \frac{(4)^3}{3}\right] - \left[6 - \frac{(0)^3}{3}\right] = (6-21.3)-(6-0) = -15.3 - 6 = -21.3u^2$

$\int g(x)dx = G(x)\Big]_a^b = G(b) - G(a)$

$\int_0^6 -2x + x^2 = -2 + \frac{x^3}{3}\Big]_0^6 = \left[-2 + \frac{(6)^3}{3}\right] - \left[0 - \frac{(0)^3}{3}\right] = (-2+72) - 0 = 70u^2$

$f(x) + g(x) = A_c$

$-21.3 + 70 = 48.7u^2$

Imagen 5.7 Respuesta del estudiante 5 al problema 7

Conflicto semiótico

- Utiliza la derivada en vez de antiderivar la función integrando.
- Para calcular el área comprendida entre la gráfica de dos funciones se calcula el área comprendida entre la gráfica de las funciones y el eje x en un intervalo [a, b] por separado y los resultados se suman.

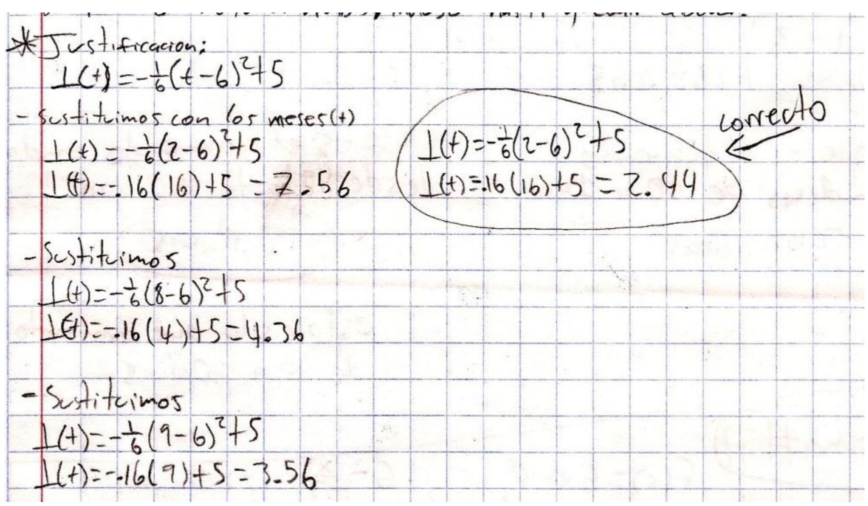
Problema 9

Prácticas matemáticas

Primeramente se pide al estudiante explicar que sucede con la ganancia de la empresa en intervalos de tiempo determinados, a lo que el estudiante responde: *en los primeros 2 meses las ganancias aumentan por la venta; y en el 2 mes hasta el 8 mes las ganancias son mayores incluso llega a un puntos máximo de ganancias, pero disminuye considerablemente antes del 8 mes el cual las ganancias bajan y el costo sube; en el 9 mes las ganancias tienden a bajar considerablemente hasta llegar al punto de no tener nada, incluso quedar a deber.* De su respuesta se interpreta que el estudiante relaciona el comportamiento de la ganancia con relación al comportamiento de las funciones costos e ingresos, incluso, el estudiante detecta el intervalo en el que está el máximo de ganancias; la justificación que emplea para describir las ganancias es la evaluación de algún mes dentro del intervalo donde se desea conocer el comportamiento de la ganancia en la función ingresos (ver imagen 5.8).

En los incisos b y d se pide al estudiante calcular las ganancias de la empresa los primeros 4 meses y los primero 12 meses, respectivamente. Para realizar este cálculo el estudiante calcula las ganancias de la empresa cada mes, es decir, evalúa en las funciones costos e ingresos los valores de cada mes x=1, x=2, x=3, x=4 (para calcular la ganancia de la empresa los primeros 4 meses) y calcula la diferencia entre los resultados de esta evaluación, procedimiento inadecuado para resolver la situación problema (ver imagen 5.8.1).

El bosquejo de la gráfica de la ganancia de la empresa (inciso g) es inconsistente con los valores de la ganancia para cada mes que calcula el estudiante como respuesta al inciso d. En el bosquejo que presenta el estudiante la ganancia no representa una función pues para al menos un valor de t (meses) se presentan dos valores de *g(t)* (ganancia en ese mes) (ver imagen 5.8.2.).


*Justificacion:
$I(t)=-\frac{1}{6}(t-6)^2+5$
- sustituimos con los meses(t)
$I(t)=-\frac{1}{6}(2-6)^2+5$
$I(t)=-.16(16)+5=7.56$

$I(t)=-\frac{1}{6}(2-6)^2+5$
$I(t)=.16(16)+5=2.44$
correcto

- Sustituimos
$I(t)=-\frac{1}{6}(8-6)^2+5$
$I(t)=-.16(4)+5=4.36$
- Sustituimos
$I(t)=-\frac{1}{6}(9-6)^2+5$
$I(t)=-.16(9)+5=3.56$

Imagen 5.8 Respuesta del estudiante 5 al problema 9 inciso a

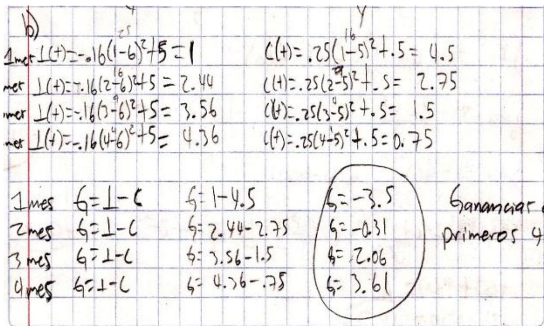


Imagen 5.8.1 Respuesta del estudiante 5 al problema 9 inciso b

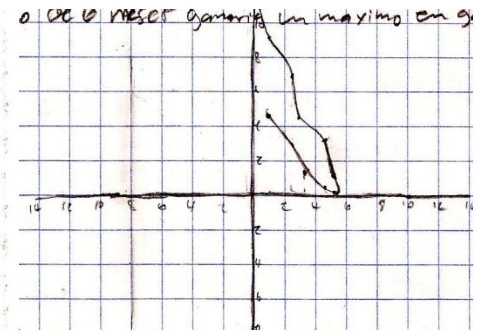


Imagen 5.8.2 Respuesta del estudiante 5 al problema 9 inciso g

Conflicto semiótico

- No relaciona la integral definida con la ganancia de la empresa.

En la siguiente tabla se presenta la relación entre las situaciones problema y las competencias desarrolladas. En caso de que cierta competencia esté presente indicaremos el nivel en que lo hace de la siguiente manera: nivel de reproducción =1, nivel de conexión=2 y nivel de reflexión=3, en caso de no inferirse alguna competencia de la respuesta del alumno se señala en el recuadro con una línea horizontal (-), esto se debe a que el estudiante no resolvió la situación problema o utilizó procedimientos erróneos, en tal caso indicaremos los conflictos semióticos que se detectaron.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
Problema 1	1	1	1	-	1	1	1	1
Problema 2	1	1	1	-	1	1	1	1
Problema 3	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 4	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 5	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 6	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 7	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 8	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 9	-	-	-	-	-	-	-	-

El estudiante resuelve las situaciones problema en las que se solicita calcular el área comprendida entre la gráfica de la función *f(x)* y el eje x en un intervalo [a, b] sólo en el caso que la función sea positiva en el intervalo determinado. En clase, aparte de resolver este tipo de situaciones, el estudiante ha abordado situaciones en las que la función integrando tiene parte negativa y éstas en el examen no fue capaz de resolverlas.

El estudiante para calcular el área comprendida entre las gráficas de dos funciones aplica un método incorrecto, calcula el área comprendida entre la gráfica de las funciones y el eje x en un intervalo [a, b] por separado y los resultados los suma; en clase no se resolvieron situaciones de este tipo pero antes de la evaluación escrita al estudiantes se le encargó la resolución de situaciones problema similares presentes en el libro de texto.

El estudiante no establece nuevas relaciones de la integral definida, es decir, en clase establecen la relación que tiene como el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b] y, es sólo ésta la que se refleja en la evaluación.

Con base en la información que nos otorga la tabla y los comentarios anteriores agruparemos las competencias matemáticas en los niveles en que se desarrollaron. .

Competencias matemáticas	Nivel de desarrollo
C1,C2,C3,C5,C6,C7,C8	Reproducción
C4	-

De las situaciones problema que el estudiante ha resuelto incorrectamente enlistamos los conflictos semióticos que se detectaron, por una parte los que tienen relación con el cálculo integral y por otra parte los que están involucrados con temáticas abordadas anteriormente.

Conflictos semióticos en cálculo integral:

- No relaciona la integral definida con el cálculo de la distancia recorrida.
- La integral definida nos proporciona el área.
- El estudiante no relaciona el aumento de peso en un intervalo de tiempo con la integral definida.
- Utiliza la derivada en vez de antiderivar la función integrando.
- Para calcular el área comprendida entre la gráfica de dos funciones se calcula el área comprendida entre la gráfica de las funciones y el eje x en un intervalo [a, b] por separado y los resultados se suman.
- No relaciona la integral definida con la ganancia de la empresa.

Alumno 6

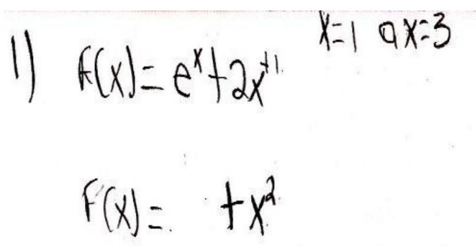
Enseguida, evaluamos el desarrollo que tiene el alumno 6 de las competencias disciplinares establecidas en la Reforma Integral de la Educación Media Superior (2008). Para ello, identificamos las prácticas matemáticas, los objetos matemáticos primarios y los procesos matemáticos presentes en la respuesta que el alumno da a cada problema. Para determinar si la competencia está presente y el nivel en el que lo hace primeramente identificamos la capacidad relacionada a cada competencia que se interpreta de la respuesta del estudiante.

Problema 1

Prácticas matemáticas

En el examen el estudiante sabe que tenía que determinar la antiderivada de la función para poder calcular el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo solicitado, sin embargo, se enfrenta al conflicto de no conocer la antiderivada de la función $f(x) = e^x$. Durante la entrevista se le proporciona esta antiderivada y se le pide resuelva el problema.

Las prácticas matemáticas más notorias que realiza el estudiante son la lectura de la situación problema y la producción de un texto como respuesta. El estudiante calcula el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = e^x + 2x$, el eje x, la recta *x=1* y la recta *x=3* antiderivando y evaluando en x=1 y x=3; el resultado que proporciona no es correcto debido a un error en el cálculo numérico.



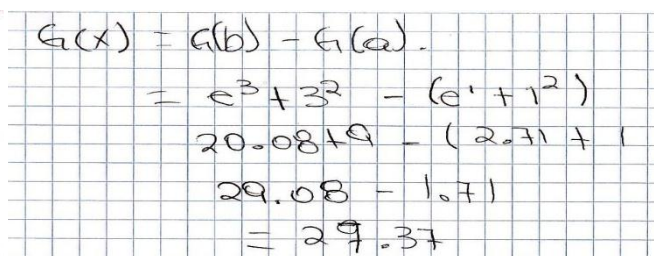


Imagen 6.1 Respuesta del estudiante 6 al problema 1 Imagen 6.1.1 Respuesta del estudiante 6 al problema 1(entrevista)

Situación problema

Ver problema 1.

Lenguajes

- Algebraico: usado para representar la función, la antiderivada, la integral definida.
- Numérico: usado para dar un valor al área.

Conceptos-Definiciones

Función, límites de integración, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo.

Proposiciones

- El área comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = e^x + 2x$ y el eje x de x=1 a x=3 se calcular resolviendo $\int_1^3 (e^x + 2x)dx$.

• Teorema Fundamental del Cálculo. **Procedimientos** • Antiderivar la función. • Evaluar la antiderivada en los límites de integración. **Argumentos** De manera implícita el estudiante argumenta el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo [1, 3] calculando $\int_1^3 (e^x + 2x)dx$.
Procesos matemáticos • Proceso de comunicación en el sentido que el alumno entiende la situación problema y produce un texto que le da respuesta • Proceso de significación de la integral definida como el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x. • Proceso de algoritmización en el cálculo de la integral definida. • Proceso de argumentación en tanto se usa la integral definida para calcular el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo [a, b].

C1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "reconocer, recopilar, activar y aprovechar modelos familiares bien estructurados; pasar sucesivamente de los diferentes modelos (y sus resultados) a la realidad y viceversa para lograr una interpretación; comunicar de manera elemental los resultados del modelo", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es la estrecha relación que tiene la situación problema con las ha resuelto el estudiante anteriormente, la integral definida es abordada en clase con problemas de cálculo de áreas.

C2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "exponer y formular problemas reconociendo y reproduciendo problemas ya practicados puros y aplicados de manera cerrada; resolver problemas utilizando enfoques y procedimientos estándar, normalmente de una única manera", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis realizado a los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos procedimientos: antiderivar la función y evaluar la antiderivada en los límites de integración, procedimientos que tienen de trasfondo el uso del Teorema Fundamental del Cálculo en la resolución de este tipo de situaciones problema y mismo que fue practicado en clase.

C3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los procesos matemáticos involucrados en la solución de la situación problema. En dicho análisis encontramos el proceso de comunicación, el estudiante entiende la situación problema y utiliza el Teorema Fundamental del Cálculo para dar respuesta. El estudiante se equivoca al momento de dar el valor numérico pero para nosotros hay otras acciones que sobresalen.

C4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático

Consideramos que dicha competencia no se muestra en la respuesta del alumno, aunque se podría justificar con la elección de la integral definida para resolver el problema el descriptor "seguir y justificar los procesos cuantitativos estándar, entre ellos los procesos de cálculo, los enunciados y los resultados", pero de todos modos nos inclinamos por la primera opción.

C5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "formular las preguntas más simples (¿cuántos...?, ¿cuánto es...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (tantos, tanto)", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante está presente este descriptor es el análisis de los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite mencionar cuáles son estos procedimientos: antiderivar la función y evaluar la antiderivada en los límites de integración, procedimientos que tienen de trasfondo el uso del Teorema Fundamental del Cálculo en la resolución de este tipo de situaciones problema.

C6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "descodificar, codificar e interpretar representaciones de objetos matemáticos previamente conocidos de un modo estándar que ya ha sido practicado. El paso de una representación a otra sólo se exige cuando ese paso mismo es una parte establecida de la representación", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es la estrecha relación que tiene la situación problema con las que ha resuelto el estudiante anteriormente, la integral definida es abordada en clase con problemas de cálculo de áreas y, además, en el análisis de lenguajes observamos que el estudiante para resolver el problema utiliza, mayormente, el lenguaje algebraico.

C7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "comprender y emplear conceptos matemáticos en el mismo contexto en el que se introdujeron por primera vez o en el que se han practicado subsiguientemente", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los conceptos-definiciones (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos conceptos-definiciones: función, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo; mismos que fueron abordados en clases en clase para solucionar este tipo de situaciones problema.

C8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor "descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario que ya se ha practicado en situaciones y contextos sobradamente conocidos; manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos rutinarios", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos lenguajes: algebraico y numérico, mismo que fueron practicados en clase para resolver este tipo de situaciones problema.

Problema 2
Prácticas matemáticas El estudiante para resolver la situación problema evalúa t=20 (tiempo que tarda en derramarse el tanque) en la función velocidad de flujo, procedimientos incorrectos para solucionar la situación problema.

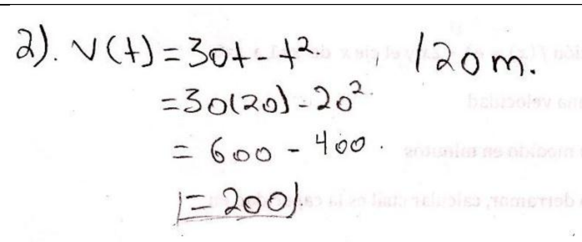


Imagen 6.2 Respuesta del estudiante 6 al problema 2

Conflicto semiótico

- No relaciona la integral definida con el cálculo de volúmenes.

Problema 3

Prácticas matemáticas

El estudiante evalúa x=1 en la función velocidad para calcular la distancia que recorre un objeto en un minuto. Procedimiento incorrecto para solucionar la situación problema.

El estudiante no realiza un cambio de unidades en el tiempo que le piden calcular la distancia recorrida debido a que la función velocidad está dada en metros por segundo. Además, tampoco es consciente de la incoherencia entre las unidades resultantes de la evaluación y las que debería tener el resultado, es decir, al momento de evaluar en la función velocidad el estudiante indica que el resultado es en metros por segundo pero le pasa inadvertido que la distancia se mide en unidades longitudinales.

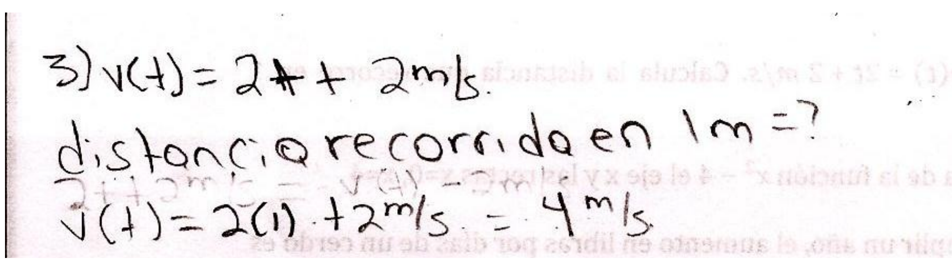


Imagen 6.3 Respuesta del estudiante 6 al problema 3

Conflicto semiótico

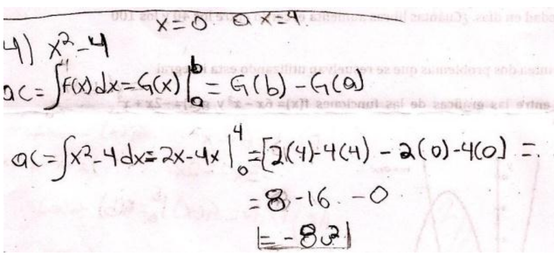
- No realiza la conversión de unidades.
- No relaciona la integral definida con el cálculo de la distancia recorrida.

Problema 4

Prácticas matemáticas

En el examen el estudiante indica que para calcular el área comprendida entrela gráfica de la función y el eje x en el intervalo determinadoutilizará el Teorema Fundamental del Cálculo. El estudiante relaciona el área solicitada con la integral definida pero al momento de antiderivar la función lo hace incorrectamente, indicando que la antiderivada de la función $f(x) = x^2 - 4$ es $F(x) = 2x - 4x$ (ver imagen 6.4).

Durante la entrevista se le cuestiona sobre si la antiderivada que proporciona en la respuesta al problema es correcta, el estudiante resuelve el problema proporcionando otra antiderivada y evaluando en los límites de integración (ver imagen 6.4.1); procedimientos que a pesar de estar correctos no son los indicados para responder de manera correcta a la situación problema ya que en el intervalo solicitado para calcular el área la función tiene parte negativa.



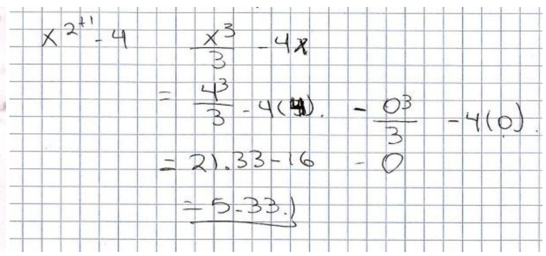


Imagen 6.4 Respuesta del estudiante 6 al problema 4

Imagen 6.4.1 Respuesta del estudiante 6 al problema 4 (entrevista)

Conflicto semiótico

- La integral definida nos proporciona el área.

Problema 5

Prácticas matemáticas

Para solucionar la situación problema el estudiante evalúa x=60, número de días en que se pide calcular el aumento de peso del cerdo, en la función aumento de peso; procedimiento incorrecto para resolver esta situación.

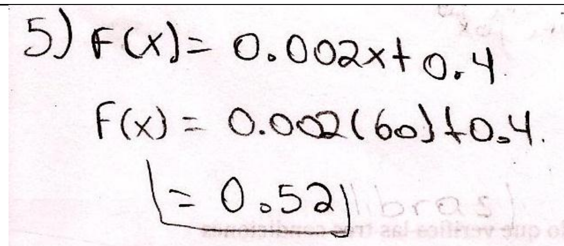


Imagen 6.5 Respuesta del estudiante 6 al problema 5

Conflicto semiótico

- El estudiante no relaciona el aumento de peso en un intervalo de tiempo con la integral definida.

Problema 6

Prácticas matemáticas

Las prácticas matemáticas más notorias que realiza el estudiante para son la lectura de la situación problema y la producción de un texto como respuesta. El estudiante proporciona un antiderivada para la función integrando correcta, evalúa en los límites de integración de manera adecuada sin embargo la ausencia de paréntesis para agrupar operaciones causa que el resultado numérico sea incorrecto.

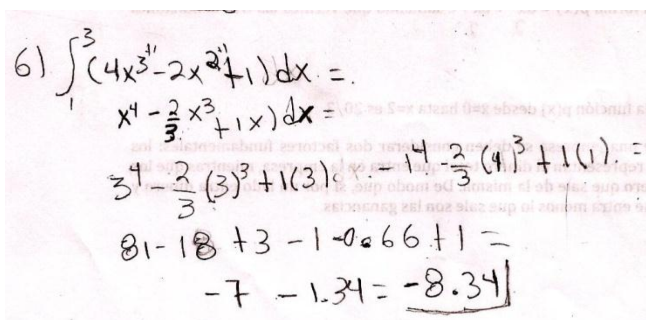


Imagen 6.6 Respuesta del estudiante 6 al problema 6

Situación problema

Ver problema 6.

Lenguajes

- Algebraico: usado para representar y calcular la integral definida.
- Numérico: usado para dar respuesta numérica a la situación problema.

Conceptos-Definiciones

Integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo. **Proposiciones** • $\int_1^3 (4x^3 - 2x^2 + 1)dx = x^4 - \frac{2x^3}{3} + 1x]_1^3.$ • Teorema Fundamental del Cálculo. **Procedimientos** • Aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema. **Argumentos**
• Proceso de significación de la integral definida como un número. • Proceso de algoritmización al resolver la integral definida. • Proceso de comunicación en el sentido que el alumno entiende la situación problema y produce un texto que le da respuesta.

C1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "reconocer, recopilar, activar y aprovechar modelos familiares bien estructurados; comunicar de manera elemental los resultados del modelo", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el conocimiento de las situaciones problema que ha resuelto anteriormente el estudiante, en clase se ha enfrentado al problema de resolver una integral definida como parte del procedimiento para calcular el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b].

C2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "exponer y formular problemas reconociendo y reproduciendo problemas ya practicados puros y aplicados de manera cerrada; resolver problemas utilizando enfoques y procedimientos estándar, normalmente de una única manera", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis realizado a los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos procedimientos: utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema; el cual fue practicado en clase mientras se resolvían problemas de cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función y en eje x en un intervalo [a, b].

C3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los procesos matemáticos involucrados en la solución de la situación problema. En dicho análisis encontramos el proceso de comunicación, el estudiante entiende la situación problema y utiliza el Teorema Fundamental del Cálculo para dar respuesta. El estudiante se equivoca al momento de dar el valor numérico pero para nosotros hay otras acciones que sobresalen.

C4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático

En la respuesta del estudiante no se interpreta esta competencia.

C5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "formular las preguntas más simples (¿cuántos...?, ¿cuánto es...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (tantos, tanto)", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para asegurar que en la respuesta del estudiante está presente este descriptor es el análisis de los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite mencionar cuáles son estos procedimientos: utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver el problema.

C6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "descodificar, codificar e interpretar representaciones de objetos matemáticos previamente conocidos de un modo estándar que ya ha sido practicado. El paso de una representación a otra sólo se exige cuando ese paso mismo es una parte establecida de la representación", descriptor que sitúa al estudiante con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es la estrecha relación que tiene la situación problema con las que ha resuelto el estudiante anteriormente y el análisis realizado a los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos lenguajes: algebraico y numérico, los cuales han estado presentes en las actividades resueltas en clase.

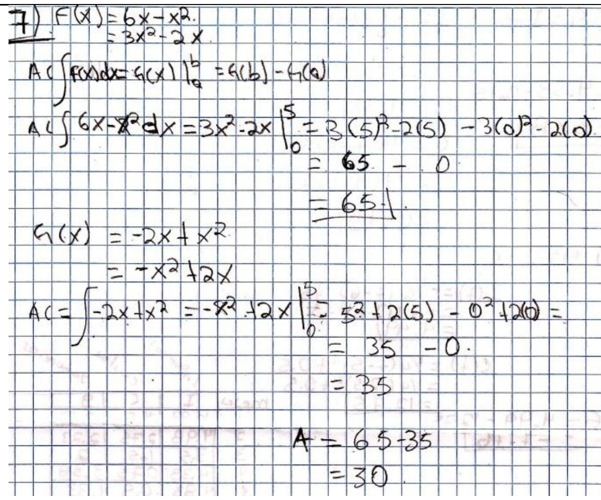
C7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “comprender y emplear conceptos matemáticos en el mismo contexto en el que se introdujeron por primera vez o en el que se han practicado subsiguientemente”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los conceptos-definiciones (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos conceptos-definiciones: integral definida, antiderivada, Teorema Fundamental del Cálculo; mismos que fueron abordados en clases.

C8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor “descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario que ya se ha practicado en situaciones y contextos sobradamente conocidos; manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos rutinarios”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante se muestra este descriptor es el análisis de los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. En dicho análisis encontramos que los lenguajes utilizados fueron el algebraico y el numérico, mismos que fue practicado en clase para resolver este tipo de situaciones problema.

Problema 7
Prácticas matemáticas El estudiante para resolver el problema calcula por separado las integrales de las funciones que comprenden el área solicitada, después indica que el área es la diferencia entre estas integrales. Los límites de integración los obtiene visualmente de la gráfica de las funciones pero éstos son incorrectos, en el cálculo de las integrales el estudiante proporciona antiderivadas incorrectas; debido a estos hechos el resultado numérico es incorrecto. Por otro lado, la función *g(x)* en el intervalo donde se solicita calcular el área tiene parte negativa y el estudiante no se hizo consciente de ello.



7) $F(x) = 6x - x^2$

$= 3x^2 - 2x$

$A (\int f(x)dx = G(x) \big|_a^b = G(b) - G(a)$

$A (\int 6x - x^2 dx = 3x^2 - 2x \big|_0^5 = 3(5)^2 - 2(5) - 3(0)^2 - 2(0)$

$= 65 - 0$

$= 65$

$G(x) = -2x + x^2$

$= -x^2 + 2x$

$A (= \int -2x + x^2 = -x^2 + 2x \big|_0^5 = 5^2 + 2(5) - 0^2 + 2(0) =$

$= 35 - 0$

$= 35$

$A = 65 - 35$

$= 30$

Imagen 6.7 Respuesta del estudiante 6 al problema 7

Conflicto semiótico

- La integral nos proporciona el área.
- $\int x^2 dx = 2x$.

Problema 9

Prácticas matemáticas

Primeramente se pide al estudiante explique el comportamiento de las ganancias de la empresa en intervalos de tiempo determinados, el estudiante evalúa en las funciones costos e ingresos un mes dentro del intervalo en el que se desea conocer este comportamiento y, según el resultado, decide si las ganancias aumentan o disminuyen. En la respuesta del estudiante no se observa que éste establezca una relación visual entre el comportamiento de la ganancia de la empresa con el comportamiento de las funciones costos e ingresos.

En los incisos b y d se pide al estudiante calcular las ganancias de la empresa los primeros 4 meses y los primero 12 meses, respectivamente. El estudiante responde incorrectamente estas cuestiones calculando de manera puntual las ganancias en los meses 4 y 12, este cálculo lo realiza evaluando (x=4 y x=12) en las funciones ingresos y costos y, calculando la diferencia (ver imagen 6.8); procedimiento que no es el adecuado para resolver la situación problema.

Para realizar el bosquejo de la de la gráfica de la función ganancia (inciso g) el estudiante realiza una tabla de valores. Utiliza una columna para el tiempo (del mes 1 al 12), una para los ingresos, una para los costos y la última para las ganancias; después, localiza los puntos en el plano cartesiano y traza una curva para unirlos (ver imagen 6.8.2).

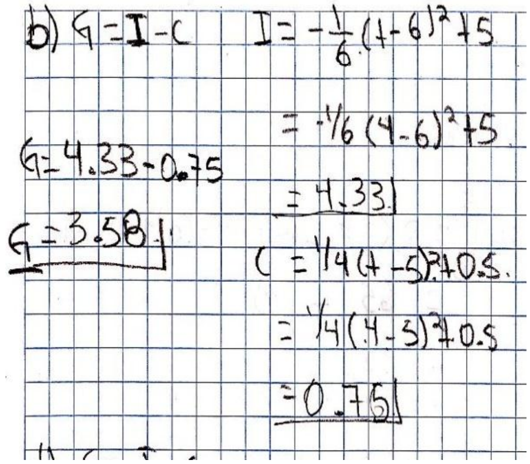


Imagen 6.8 Respuesta del estudiante 6 al problema 9 inciso b

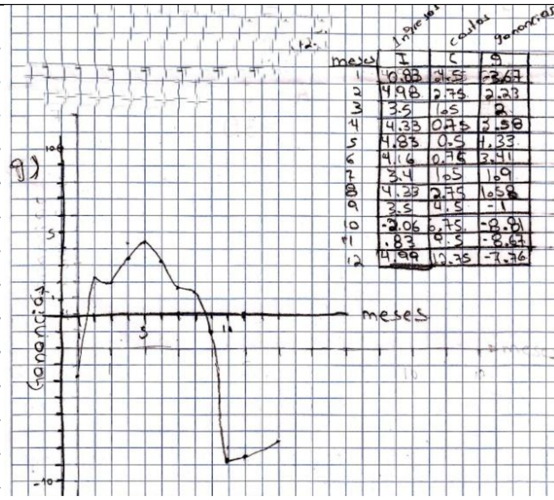


Imagen 6.8.1 Respuesta del estudiante 6 al problema 9 inciso g

Conflicto semiótico

- No relaciona la integral definida con la ganancia de la empresa.

En la siguiente tabla se presenta la relación entre las situaciones problema y las competencias desarrolladas. En caso de que cierta competencia esté presente indicaremos el nivel en que lo hace de la siguiente manera: nivel de reproducción=1, nivel de conexión=2 y nivel de reflexión=3, en caso de no inferirse alguna competencia de la respuesta del alumno se señala en el recuadro con una línea horizontal (-), esto se debe a que el estudiante no resolvió la situación problema o utilizó procedimientos erróneos, en tal caso más adelante indicaremos los conflictos semióticos que se detectaron.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
Problema 1	1	1	1	-	1	1	1	1
Problema 2	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 3	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 4	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 5	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 6	1	1	1	-	1	1	1	1
Problema 7	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 8	-	-	-	-	-	-	-	-

Problema 9	-	-	-	-	-	-	-	-

El estudiante resuelve situaciones problema en las que se solicita calcular el área comprendida entre la gráfica de la función $f(x)$ y el eje x en el intervalo [a, b], situaciones problema consideradas de reproducción ya que fueron abordadas en clase. Sin embargo, en clase también se abordaron situaciones de cálculo de áreas en las que la función tenía parte negativa y en el examen el estudiante no las resolvió correctamente.

De las situaciones problema en las que se solicita calcular el área comprendida entre las gráficas de dos funciones el estudiante conoce un método para resolverlas, calcular por separado las áreas comprendidas entre la gráfica de cada función y el eje x en el intervalo determinado y calcular la diferencia entre los resultados. Sin embargo, en el examen el estudiante no contestó correctamente este tipo de situaciones problema porque no proporcionó las antiderivadas correctamente, los límites de integración eran incorrectos y la función *g(x)* tiene parte negativa, condición que fue inadvertida por el estudiante.

De los comentarios anteriores podemos concluir que el estudiante reproduce los procedimientos estudiados en clase para el cálculo del área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b], limitándose a las funciones positivas en este intervalo.

Con base en la información que nos otorga la tabla y los comentarios anteriores agruparemos las competencias matemáticas en los niveles en que se desarrollaron.

Competencias matemáticas	Nivel de desarrollo
C1,C2, C3,C5,C6,C7,C8	Reproducción
C4	-

De las situaciones problema que el estudiante ha resuelto incorrectamente enlistamos los conflictos semióticos que se detectaron, por una parte los que tienen relación con el cálculo integral y por otra parte los que están involucrados con temáticas abordadas anteriormente.

Conflictos semióticos en cálculo integral:

- No relaciona la integral definida con el cálculo de volúmenes.
- No relaciona la integral definida con el cálculo de la distancia recorrida.
- La integral definida nos proporciona el área.
- No relaciona el aumento de peso en un intervalo de tiempo con la integral definida.
- $\int x^2 dx = 2x$.
- No relaciona la integral definida con la ganancia de la empresa.

Conflictos semióticos en otras áreas:

- No realiza la conversión de unidades.

Alumno 7

Enseguida, evaluamos el desarrollo que tiene el alumno 7 de las competencias disciplinares establecidas en la Reforma Integral de la Educación Media Superior (2008). Para ello, identificamos las prácticas matemáticas, los objetos matemáticos primarios y los procesos matemáticos presentes en la respuesta que el alumno da a cada problema. Para determinar si la competencia está presente y el nivel en el que lo hace primeramente identificamos la capacidad relacionada a cada competencia que se interpreta de la respuesta del estudiante.

Problema 1

Prácticas matemáticas

Las prácticas matemáticas más notorias realizadas por el estudiante son la lectura de la situación problema y la producción de un texto como respuesta. En el examen el estudiante realiza una tabla de valores para graficar la función, en ella detecta el área que hay que calcular; después aproxima el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en el intervalo [1, 3] partiendo el área en dos trapecios.

Durante la entrevista reconoce que el cálculo proporcionado en el examen es una aproximación y que para resolver este tipo de problemas en clase utilizan la integral pero ella no puede calcularlas.

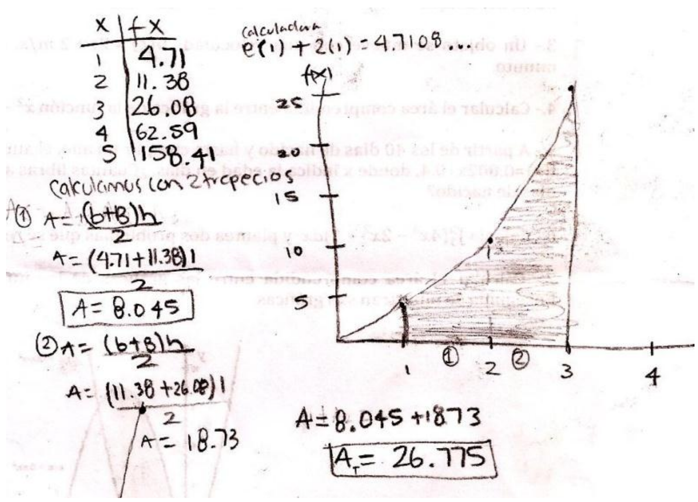


Imagen 7.1 Respuesta del estudiante 7 al problema 1

Situación problema

Ver problema 1.

Lenguajes

- Natural: usado para explicar algunos procedimientos.
- Gráfico: usado para representar la función.
- Algebraico: usado para presentar las fórmulas para calcular el área del trapecio.
- Numérico: usado para presentar la función y para dar el valor del área.

Conceptos-Definiciones

Función, gráfica de la función, área bajo la curva, trapecio.

Proposiciones

- El área total es igual a la suma de las áreas de su partición.
- El área de un trapecio se calcula con la fórmula $A = \frac{(B+b)h}{2}$.

Procedimientos

- Identificar el área que hay que calcular.
- Usar la fórmula para calcular el área de los trapecios en los que se dividió el área total.
- Sumar las áreas de los trapecios.

Argumentos

De manera implícita el estudiante argumenta que el área total es igual a la suma de las áreas de su partición.

Procesos matemáticos

- Proceso de comunicación en el sentido que el estudiante entiende la situación problema y produce un texto que le da respuesta.
- Proceso de algoritmización en el cálculo del área de los trapecios.
- Proceso de representación al momento de presentar la gráfica de la función.
- Proceso de idealización cuando identifica los trapecios en el área que hay que calcular.

C1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: "reconocer, recopilar, activar y aprovechar modelos familiares bien estructurados; pasar sucesivamente de los diferentes modelos (y sus resultados) a la realidad y viceversa para lograr una interpretación; comunicar de manera elemental los resultados del modelo"; descriptor que sitúa al estudiante con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante está presente este descriptor es la relación que tiene la situación problema con las que el estudiante ha resuelto en clase. La integral definida se abordó en clase calculando el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b], en estas situaciones problema también se pedía al estudiante dar una aproximación del área que se iba a calcular. Al no poder utilizar la integral definida para resolver la situación problema, el estudiante se limita a dar una aproximación.

C2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques

De la respuesta del estudiante no se interpreta el descriptor "exponer y formular problemas reconociendo y reproduciendo problemas ya practicados puros y aplicados de manera cerrada; resolver problemas utilizando enfoques y procedimientos estándar, normalmente de una única manera", descriptor mínimo, es decir, el descriptor ubicaría al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El estudiante se ha enfrentado anteriormente a este tipo de situaciones problema y aún cuando asocia la integral definida al área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b] no puede calcularla.

C3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor "comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que este descriptor está presente en la respuesta del estudiante es el análisis de los procesos matemáticos involucrados en la solución de la situación problema. En dicho análisis encontramos el proceso de comunicación, en tanto el estudiante entiende la situación problema y produce un texto que le da respuesta; además, durante la entrevista declara que la herramienta para solucionar el problema es la integral pero no sabe calcularla por lo que da una aproximación.

C4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático

No se interpreta esta competencia en la respuesta del estudiante.

C5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor "formular las preguntas más simples (¿cuántos...?, ¿cuánto es...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (tantos, tanto)", descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que en la respuesta del estudiante está presente este descriptor es el análisis de los procedimientos (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite mencionar cuáles son estos procedimientos: identificar el área que hay que calcular, usar la fórmula para calcular el área de los trapecios en los que se dividió el área total y **s**umar las áreas de los trapecios; procedimientos que le permitieron dar respuesta, de alguna manera, a la situación problema.

C6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “descodificar, codificar e interpretar representaciones de objetos matemáticos previamente conocidos de un modo estándar que ya ha sido practicado. El paso de una representación a otra sólo se exige cuando ese paso mismo es una parte establecida de la representación”, descriptor que sitúa a esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que este descriptor está presente en la respuesta del estudiante es la estrecha relación que tiene la situación problema con las ha resuelto el estudiante anteriormente y el análisis realizado a los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. Dicho análisis nos permite decir cuáles son estos lenguajes: algebraico, numérico, natural y gráfico, los cuales han estado presentes en las actividades resueltas en clase.

C7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia

De la respuesta del estudiante no se interpreta el descriptor “comprender y emplear conceptos matemáticos en el mismo contexto en el que se introdujeron por primera vez o en el que se han practicado subsiguientemente”, descriptor mínimo, es decir, el descriptor ubicaría al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El estudiante se ha enfrentado anteriormente a este tipo de situaciones problema y aún cuando asocia la integral definida al área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b] no puede calcularla.

C8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos

De la respuesta del estudiante se interpreta el descriptor: “descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario que ya se ha practicado en situaciones y contextos sobradamente conocidos; manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos rutinarios”, descriptor que sitúa al alumno con esta competencia en el nivel de reproducción. El indicador para afirmar que este descriptor está presente en la respuesta del estudiante es el análisis de los lenguajes (objetos matemáticos) involucrados en la solución de la situación problema. En dicho análisis encontramos que los lenguajes utilizados fueron: algebraico, numérico, gráfico y natural, mismos que fueron practicados en clase para resolver este tipo de situaciones problema.

Problema 2
Prácticas matemáticas En el examen el estudiante para calcular la capacidad del tanque evalúa x=20 (tiempo

que tarda en derramarse el tanque) en la función velocidad de flujo, procedimientos que son incorrectos para resolver la situación problema (ver imagen 7.2). Durante la entrevista se le cuestionó acerca del método que usaría para calcular la velocidad de flujo a los 20 minutos y el estudiante respondió que la sustitución que había realizado en el examen era para calcular esa velocidad.

El entrevistador le informa que cuando el flujo de agua es constante el volumen se puede calcular multiplicando la velocidad de flujo por el tiempo, por lo que, si graficamos la velocidad de flujo contra el tiempo calcular el volumen sería igual a calcular el área del rectángulo cuya base es el tiempo y la altura el valor de la velocidad de flujo (constante). El estudiante contesta que en nuestro caso la velocidad de flujo no es constante, que para calcular el volumen se calcula el área bajo la curva y que para ello utilizaría la integral pero no sabe calcularla.

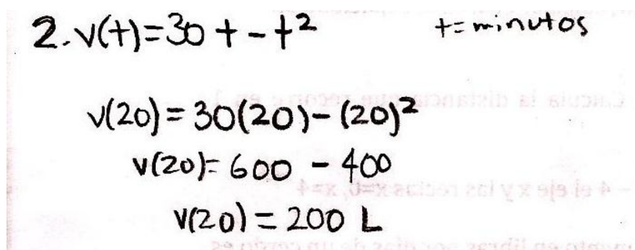


Imagen 7.2 Respuesta del estudiante 7 al problema 2

Conflicto semiótico

- El estudiante no puede calcular integrales definidas.

Problema 4

Prácticas matemáticas

El estudiante realiza una tabla de valores para graficar la función, en ella identifica el área que se le pide calcular. Para realizar este cálculo el estudiante parte el área en dos triángulos y procede a calcular su área por separado (ver imagen 7.3).

El estudiante cuando calcula el área del triángulo que esta por abajo del eje x indica que su altura es negativa (-4), procedimiento incorrecto para el cálculo de esta área, lo que causa que el resultado sea incorrecto. Durante la entrevista se le cuestionó acerca de la existencia de áreas negativas a lo que el estudiante respondió: *el área bajo el eje x es negativa.*

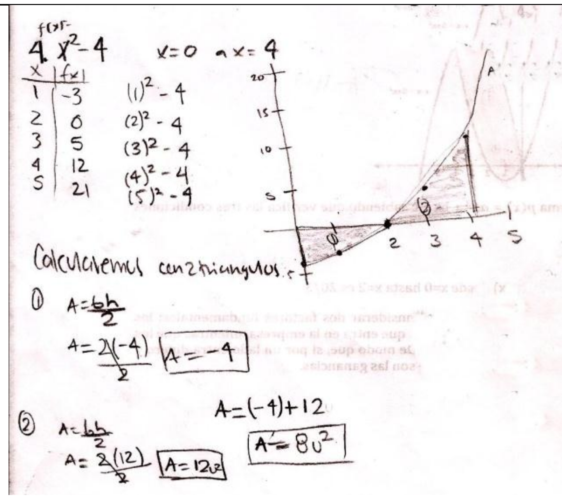


Imagen 7.3 Respuesta del estudiante 7 al problema 4

Conflictos semióticos

- El área bajo el eje x es negativa.

Problema 7

Prácticas matemáticas

El estudiante no conoce el método para calcular el área comprendida entre las gráficas de dos funciones por lo que realiza una aproximación. Parte el área que le piden calcular en figuras geométricas conocidas y calcula su área, el resultado será la suma de ellas (ver imagen 7.4). La parte del área que queda por debajo del eje x tiene área igual a -1 según el estudiante.

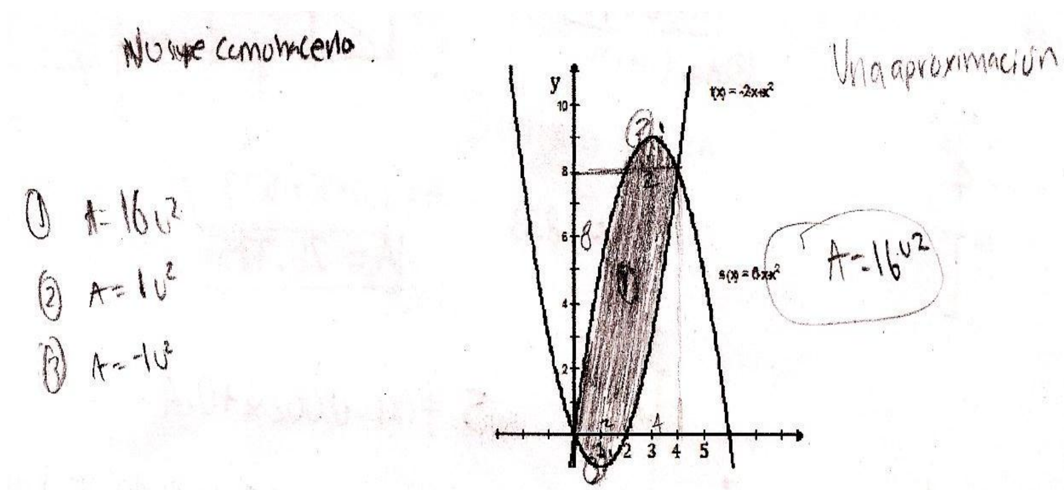


Imagen 7.4 Respuesta del estudiante 7 al problema 7

Conflictos semióticos
• El área bajo el eje x es negativa.

En la siguiente tabla se presenta la relación entre las situaciones problema y las competencias desarrolladas. En caso de que cierta competencia esté presente indicaremos el nivel en que lo hace de la siguiente manera: nivel de reproducción=1, nivel de conexión=2 y nivel de reflexión=3, en caso de no inferirse alguna competencia de la respuesta del alumno se señala en el recuadro con una línea horizontal (-), esto se debe a que el estudiante no resolvió la situación problema o utilizó procedimientos erróneos, en tal caso más adelante indicaremos los conflictos semióticos que se detectaron.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
Problema 1	1	-	1	-	1	1	-	-
Problema 2	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 3	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 4	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 5	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 6	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 7	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 8	-	-	-	-	-	-	-	-
Problema 9	-	-	-	-	-	-	-	-

El estudiante relaciona el área comprendida entre la gráfica de la función y el eje x en un intervalo [a, b] con la integral definida, sin embargo, no puede calcularla. Cuando se le pide solucionar este tipo de situaciones problema el estudiante realiza la gráfica de la función, tabulando valores y ubicando los puntos en el plano cartesiano, detecta el área que se le pide calcular y la secciona en áreas de figuras geométricas familiares; es de esta manera como da una aproximación del área solicitada.

Con base en la información que nos otorga la tabla y los comentarios anteriores agruparemos las competencias matemáticas en los niveles en que se desarrollaron.

Competencias matemáticas	Nivel de desarrollo
C1,C3,C5,C6,C8	Reproducción
C2, C4, C7	-

De las situaciones problema que el estudiante ha resuelto incorrectamente enlistamos los conflictos semióticos que se detectaron, por una parte los que tienen relación con el cálculo integral y por otra parte los que están involucrados con temáticas abordadas anteriormente.

Conflictos semióticos en cálculo integral:

- El estudiante no puede calcular integrales definidas.

Conflictos semióticos en otras áreas:

- El área bajo el eje x es negativa.