Universidad de Sonora

División de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemáticas

Actividades didácticas dirigidas a profesores de matemáticas de secundaria diseñadas con la metodología ACODESA

Tesis que presenta

María Antonieta Rodríguez Ibarra

Para obtener el grado de

Maestría en Ciencias
con especialidad en Matemática Educativa

Director de Tesis
Dr. José Luis Soto Munguía

Hermosillo, Sonora, México — Enero 2012

Índice

Introducción

El Programa de Maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, adscrito a la División de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Sonora, fue creado como respuesta a la problemática de la enseñanza de las matemáticas en la región y desde sus inicios en 1990 ha sido sometido a diversos reestructuraciones curriculares, tanto para incorporar las mejoras sugeridas por su ejercicio, como para adecuarlo a los cambios que se producen en su ámbito de estudios.

El propósito de este programa académico es formar especialistas en Matemática Educativa, cuya práctica profesional como docentes sintetice una serie de competencias éticas, ideológicas, de conocimiento teórico y sentido práctico, para atender los problemas de la educación matemática escolar en los ámbitos de la investigación, el desarrollo docente y la proyección social de sus egresados. Por lo anterior se establece como objetivo general:

Formar especialistas capaces de elaborar, conducir y evaluar proyectos en dos modalidades:

- Investigación en Matemática Educativa y

- Desarrollo docente en matemáticas.[1]

Dentro de la modalidad de Desarrollo docente, se espera que el egresado tendrá la habilidad de diseñar y evaluar distintos tipos de propuestas didácticas, tales como: situaciones didácticas, actividades curriculares, de evaluación, de formación de profesores, de uso de recursos tecnológicos, entre otras. Lo anterior a través de las herramientas teóricas surgidas de diversas escuelas de pensamiento alrededor de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

La presente tesis ha sido realizada en la modalidad de Desarrollo Docente, en donde se presentan un cuerpo de actividades de aprendizaje que puedan servir como apoyo a los profesores en la enseñanza de la matemática en el nivel secundaria. Se busca que los docentes

[1] Tomado del documento oficial del plan de estudios de la Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa de la Universidad de Sonora. Disponible en: http://fractus.mat.uson.mx

tengan contacto con algunas concretizaciones de los postulados generales de la reforma de secundaria y se familiaricen con la aplicación de una metodología específica para el diseño, se trata de la metodología conocida como “Aprendizaje Colaborativo, Debate científico y Auto-reflexión” (ACODESA, por sus siglas en francés).

En el capítulo I se describe el contexto nacional e internacional en el que se han generado las recientes reformas curriculares. Se abordan las características de los nuevos planes de estudio de la Escuela Secundaria mexicana, particularmente la parte que se refiere a los cursos de matemáticas. Asociadas a estos cambios se han generado en nuestro país diversas evaluaciones estandarizadas cuyo propósito es diagnosticar el desempeño académico de estudiantes y profesores; tres evaluaciones diseñadas para el nivel Secundaria son analizadas aquí. En las dos primeras, dirigidas a estudiantes, se analiza exclusivamente la parte matemática, pero en la tercera, dirigida a profesores, solamente se dispone de datos generales.

En el capítulo II, se hace una revisión de otros trabajos de investigación o de desarrollo docente que abordan una problemática similar a la que se aborda en esta tesis, ya sea porque se trata de otras experiencias de diseños didácticos que atiendan las necesidades planteadas por el Plan y Programas de educación Secundaria en nuestro país, o bien porque se trata de experiencias generales de diseño de actividades didácticas pensadas para otros niveles.

En el capítulo III se presentan las consideraciones teóricas metodológicas tomadas como referencia para diseñar las actividades. Estas consideraciones están contenidas en la metodología ACODESA, por esta razón se describen las diferentes fases y etapas contempladas en ella.

En el capítulo IV se describen los objetivos generales y los específicos de este trabajo así como las características que tendrán los diseños didácticos. Además se presentan las hojas de trabajo correspondientes a cada una de las cuatro actividades diseñadas, así como los propósitos de las mismas. En las actividades se hacen explícitos los momentos en los cuales se trabajará con el software GeoGebra.

En el capítulo V se reportan los resultados obtenidos durante la observación de la puesta en escena de las actividades diseñadas. Dicha observación se llevó a cabo durante el desarrollo de un curso de formación dirigido a profesores de matemáticas del nivel que nos interesa.

El capítulo VI contiene las conclusiones del presente trabajo, tanto aquellas relacionadas con las actividades propiamente de diseño como las que se refieren al desempeño de los profesores al intentar realizar las tareas que contienen las actividades.

CAPÍTULO I

Marco de referencia

I.1 Introducción

Desde hace un poco más de dos décadas el mundo vive una verdadera revolución provocada por los avances vertiginosos de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (NTIC), por las innovaciones en biotecnología y recientemente por el auge de las nanotecnologías. Estos adelantos tecnológicos han modificado los mecanismos económicos, sociales y políticos a tal grado que algunos teóricos no dudan en afirmar que estamos frente a la Tercera Revolución Industrial. Estos cambios, sobre todo aquellos observados en las NTIC, han tenido un fuerte impacto en los sistemas educativos de todos los países, a tal grado que todos postulan ahora la intención de preparar a sus futuros ciudadanos para la "Sociedad del Conocimiento", habida cuenta que la revolución de las NTIC no llevan por sí mismas al acceso al conocimiento. La UNESCO (2005, p. 17) precisa así esta relación entre información y conocimiento: "La noción de sociedad de la información se basa en los progresos tecnológicos. En cambio, el concepto de sociedades del conocimiento comprende dimensiones sociales, éticas y políticas mucho más vastas". Este organismo (Ibid, p. 18) advierte además de los riesgos que encarna para una sociedad el apostarle todo al desarrollo de las NTIC:

> La importancia de la educación y del espíritu crítico pone de relieve que, en la tarea de construir auténticas sociedades del conocimiento, las nuevas posibilidades ofrecidas por Internet o los instrumentos multimedia no deben hacer que nos desinteresemos por otros instrumentos auténticos del conocimiento como la prensa, la radio, la televisión y, sobre todo, la escuela. Antes que los ordenadores y el acceso a Internet, la mayoría de las poblaciones del mundo necesitan los libros, los manuales escolares y los maestros de que carecen.

A nivel mundial se vive actualmente un gran movimiento de los sistemas educativos; que han emprendido, con su propia interpretación sobre esta "Tercera Revolución Industrial" y sobre la "Sociedad del Conocimiento", como parte de este movimiento han emprendido esfuerzos de diferente naturaleza que buscan mejorar las prácticas docentes en el aula: programas de evaluación del aprendizaje, programas de formación de competencias profesionales dirigidos a los maestros, diseño de nuevos planes y programas de estudio que incorporan el uso de NTIC, diseño de textos y materiales de apoyo, solamente por citar algunos.

Los cambios señalados están impactando los sistemas educativos en su conjunto, pero, un lugar muy importante, también a nivel internacional, ocupa la problemática existente alrededor de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En el caso de nuestro país esta problemática es reconocida, y al menos en el discurso se declaran acciones gubernamentales que buscan soluciones a los problemas identificados, como puede observarse en el siguiente párrafo tomado del documento que oficializó en el año 2006 la reforma de la educación Secundaria:

> "Estos esfuerzos privilegian, en mayor o menor medida, aspectos como la formación y actualización de profesores, el uso de la tecnología, los materiales *ad hoc* para apoyar el estudio, entre otros. Pese al trabajo realizado en la última década, la educación secundaria en México padece fuertes rezagos en lo que se refiere a la profesionalización de profesores, a la infraestructura y a la gestión y organización de las escuelas, aunque hay compromisos por parte del Estado para tratar de resolverlos." (SEP, 2006)

Para tener un diagnóstico claro sobre los "fuertes rezagos" a los que se refiere la cita anterior, se han propuesto diversas evaluaciones que se aplican tanto a docentes como alumnos en el país, las cuales han puesto en evidencia toda una gama de deficiencias en el sistema educativo nacional. Si bien es cierto que algunas de esas evaluaciones han sido ampliamente difundidas, se ha dado poca importancia a la problemática que las rodea y al análisis de las causas que están provocando las deficiencias identificadas. Están pendientes todavía las respuestas a preguntas como: ¿cuáles son los aspectos que se evalúan?, ¿son conocimientos, habilidades, actitudes, competencias?, ¿cómo se diseñan dichas evaluaciones?, ¿cómo podemos utilizarlas para mejorar el sistema educativo nacional?, ¿qué acciones podemos tomar, como integrantes del sistema educativo nacional para su estudio?

I.2 Planes de Estudio para la Escuela Secundaria

Con el propósito de no quedar rezagado del movimiento de cambios curriculares que se están dando en el resto de las naciones, el sistema educativo mexicano ha iniciado, a mediados de la década pasada, un cambio gradual de los planes y programas de estudio de todos los niveles preuniversitarios. Entre estos cambios destacan los aprobados en el año 2006 para la Escuela Secundaria. Como consecuencia de estos cambios los planes y programas de estudio para los cursos de matemáticas han sido reformulados. Aunque no se observan cambios radicales con respectos a los programas elaborados en 1993, debe destacarse la reagrupación de los contenidos en tres ejes temáticos denominados *Sentido numérico y Pensamiento algebraico,* *Forma Espacio y Medida y Manejo de la Información.* Otro cambio notorio es la introducción del enfoque por competencias que en el 2006 ya se había adoptado en varios otros países del mundo.

La reforma mencionada no llego acompañada de un programa nacional que actualizara a los profesores sobre los cambios contenidos en ella. Además, no se produjo ningún material nuevo que sirviera de apoyo al trabajo del profesor de matemáticas, excepto los *Planes de Clase* que la Secretaría puso a disposición de los maestros y que no fueron diseñados con el debido cuidado. El resto de los materiales de apoyo recomendados en los documentos oficiales ya existían antes que la reforma fuera aprobada, y en el caso de Matemáticas se reducen a la siguiente lista:

- Fichero de actividades didácticas. Primera edición 1999, última reimpresión 2004.
- Libro para el maestro. Primera edición 1994, segunda edición 2001, última reimpresión 2004.
- Geometría dinámica. Enseñanza de las matemáticas con tecnología. Año 2000.
- Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo. Año 2000.

Para promover los aprendizajes deseados en los estudiantes mencionados en la reforma, se requiere evidentemente de profesores con un nuevo perfil y aunque los documentos oficiales de la reforma eluden la definición de éste, sí reconocen que los docentes en servicio podrían constituir un obstáculo para los cambios propuestos.

Los diseñadores de los programas de estudio, dicen, sobre los profesores

> Seguramente el planteamiento de ayudar a los alumnos a estudiar matemáticas con base en actividades de estudio cuidadosamente seleccionadas resultará extraño para muchos maestros compenetrados con la idea de que su papel es enseñar, en el sentido de transmitir información. (SEP, 2006).

Todavía no terminaba de asentarse la reforma del año 2006 cuando ya la SEP había formulado una nueva, que fue aprobada en agosto de 2011 y cuyo propósito principal es formalizar la integración curricular de los niveles Primaria y Secundaria. Se trata de nueva cuenta de una reforma que no presenta cambios de fondo, pero introduce otro nuevo concepto en la currícula de Secundaria, se trata del concepto de *Estándar Curricular*, novedoso para el sistema educativo mexicano pero introducido en otros países desde hace más de 20 años. La Tabla 5 muestra los elementos básicos de la reforma del 2006, para el área de Matemáticas comparados con los cambios propuestos a esos elementos en la reforma del 2011:

	2006	2011
Enfoque didáctico	Llevar a las aulas actividades de estudio que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados.	Utilizar secuencias de situaciones problemáticas que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados.

Las secuencias de las situaciones problemáticas es algo novedoso que aparece en el enfoque didáctico de la reforma de 2011. El documento oficial no solamente enfatiza esta idea sino que incluye secuencias ya diseñadas, lo cual era un faltante en la reforma del 2006. Estas secuencias aparecen al final de la Guía del Maestro 2011.

	2006	2011
Propósitos de la matemática de la escuela secundaria	Utilicen el lenguaje algebraico para generalizar propiedades aritméticas y geométricas. Resuelvan problemas mediante la formulación de ecuaciones de distintos tipos. Expresen algebraicamente reglas de correspondencia entre conjuntos de cantidades que guardan una relación funcional Resuelvan problemas que requieren el análisis, la organización, la representación y la interpretación de datos provenientes de diversas fuentes. Resuelvan problemas que implican realizar cálculos con diferentes magnitudes. Utilicen las propiedades geométricas para realizar trazos, para establecer su viabilidad o para efectuar cálculos geométricos. Identifiquen y evalúen experimentos aleatorios con base en la medida de la probabilidad.	Utilicen el cálculo mental, la estimación de resultados o las operaciones escritas con números enteros, fraccionarios o decimales, para resolver problemas aditivos y multiplicativos. Modelen y resuelvan problemas que impliquen el uso de ecuaciones hasta de segundo grado, de funciones lineales o de expresiones generales que definen patrones. Justifiquen las propiedades de rectas, segmentos, ángulos, triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares e irregulares, círculo, prismas, pirámides, cono, cilindro y esfera. Utilicen el teorema de Pitágoras, los criterios de congruencia y semejanza, las razones trigonométricas y el teorema de Tales, al resolver problemas. Justifiquen y usen las fórmulas para calcular perímetros, áreas y volúmenes de diferentes figuras y cuerpos, y expresen e interpreten medidas con distintos tipos de unidad. Emprendan procesos de búsqueda, organización, análisis e interpretación de datos contenidos en tablas o gráficas de

	Utilicen de manera eficiente diversas técnicas aritméticas, algebraicas o geométricas, con o sin el apoyo de tecnología, al resolver problemas.	diferentes tipos, para comunicar información que responda a preguntas planteadas por ellos mismos u otros.

	2006	2011
Estándares curriculares de la matemática de la escuela secundaria		Para el eje temático *Sentido numérico y Pensamiento Algebraico:* Resuelve problemas que implican convertir números fraccionarios a decimales y viceversa. Resuelve problemas que implican calcular el mínimo común múltiplo o el máximo común divisor. Resuelve problemas aditivos que impliquen efectuar cálculos con expresiones algebraicas. Resuelve problemas multiplicativos con expresiones algebraicas a excepción de la división entre polinomios. Resuelve problemas que implican expresar y utilizar la regla general lineal o cuadrática de una sucesión. Resuelve problemas que involucran el uso de ecuaciones lineales o cuadráticas. Para el eje *Manejo de la información* Resuelve problemas vinculados a la proporcionalidad directa, inversa o múltiple, como porcentajes, escalas, interés simple o compuesto. Expresa algebraicamente una relación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades. Calcula la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes. Lee y representa información en diferentes tipos de gráficas; calcula y explica el significado del rango y la desviación media. Para el eje temático *Forma Espacio y Medida* Resuelve problemas vinculados a la proporcionalidad directa, inversa o múltiple, como porcentajes, escalas,

		interés simple o compuesto. Expresa algebraicamente una relación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades. Calcula la probabilidad de eventos complementarios, mutuamente excluyentes e independientes. Lee y representa información en diferentes tipos de gráficas; calcula y explica el significado del rango y la desviación media.

El concepto de estándar curricular aparece por primera en vez en la reforma del 2011 sin embargo no se profundiza en la explicación de que se trata y la idea pareciera responder a las recomendaciones de PISA.

	2006	2011
Competencias	• Planteamiento y resolución de problemas. • Comunicación • Argumentación • Manejo de técnicas	• Resolver problemas de manera autónoma. • Comunicar información matemática. • Validar procedimientos y resultados. • Manejar técnicas eficientemente.

Se trata esencialmente de las mismas competencias aunque la redacción fue compactada en el 2011.

De manera paralela a los cambios curriculares sufridos por el sistema educativo mexicano, este ha sido sometido a toda una gama de evaluaciones que pretenden diagnosticar sus diversos aspectos, por el interés del presente trabajo en la matemática de nivel Secundaria, en la siguiente sección se analizan algunas de estas evaluaciones.

I.3 Dos evaluaciones estandarizadas para estudiantes

I.3.1 El examen PISA

PISA es un estudio periódico y comparativo, promovido y organizado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), en el cual participan los países miembros y no miembros de la organización (asociados). Su propósito principal es determinar en qué medida los estudiantes de 15 años, que están por concluir o han concluido su educación obligatoria, han adquirido los conocimientos y habilidades relevantes para participar activa y plenamente en la sociedad moderna.

PISA se centra en la capacidad de los estudiantes para usar los conocimientos y habilidades y no en saber hasta qué punto dominan un plan de estudios o currículo escolar. Por ello, no mide qué tanto pueden reproducir lo que han aprendido, sino que indaga lo que en PISA se denomina competencia (*literacy*); es decir, la capacidad de extrapolar lo que se ha aprendido a lo largo de la vida y su aplicación en situaciones del mundo real, así como la capacidad de analizar, razonar y comunicar con eficacia al plantear, interpretar y resolver problemas en una amplia variedad de situaciones.

La información derivada de PISA permite identificar el nivel de competencia de los estudiantes, en comparación con los de otros países participantes. Ayuda a identificar fortalezas y debilidades del sistema educativo nacional y, sobre todo, permite detectar qué factores se asocian con el éxito educativo.

PISA es un estudio de evaluación riguroso, estandarizado y con elevados controles de calidad en todas sus etapas, lo que asegura su validez y confiabilidad.

En términos generales PISA se caracteriza por:

• Usar un concepto innovador de competencia (*literacy*).

• Dar importancia al aprendizaje a lo largo de la vida.

• Manejar ciclos definidos, lo que permite el monitoreo del progreso educativo.

• Contar con una amplia cobertura geográfica.

• Orientarse hacia la política educativa de cada país.

Una ventaja importante de PISA es la periodicidad de su aplicación. El estudio está organizado para ser aplicado cada tres años y en cada ciclo se enfatiza un área o dominio diferente. En el año 2000 el énfasis fue Lectura, en 2003 Matemáticas, en 2006 Ciencias y en 2009 de nuevo Lectura.

Aunque el énfasis de PISA ha variado en cada una de sus aplicaciones, se han conservado en general los criterios que permiten clasificar los niveles de desempeño de los alumnos evaluados. Estos niveles dependen de las tareas que puedan ejecutarse en el examen. La Tabla 1 muestra las tareas que corresponden a cada nivel del área de matemáticas.

Niveles	Tareas
Nivel 6	Los estudiantes que alcanzan este nivel saben formar conceptos, generalizar y utilizar información basada en investigaciones y modelos de situaciones de problemas complejos. Pueden relacionar diferentes fuentes de información y representaciones, y traducirlas de una manera flexible. Poseen un pensamiento y razonamiento matemático avanzado. Pueden aplicar su entendimiento y comprensión, así como su dominio de las operaciones y relaciones matemáticas formales y simbólicas, y desarrollar nuevos enfoques y estrategias para abordar situaciones nuevas. Pueden formular y comunicar con exactitud sus acciones y reflexiones relativas a sus hallazgos, argumentos y a su adecuación a las situaciones originales.
Nivel 5	Los estudiantes saben desarrollar modelos y trabajar con ellos en situaciones complejas, identificando las condicionantes y especificando los supuestos. Pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas para abordar problemas complejos relativos a estos modelos. Pueden trabajar de manera estratégica al usar habilidades de pensamiento y razonamiento bien desarrolladas; así como representaciones adecuadamente relacionadas, caracterizaciones simbólicas y formales, e intuiciones relativas a estas situaciones. Pueden reflexionar sobre sus acciones y formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.
Nivel 4	Los estudiantes son capaces de trabajar con eficacia con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden conllevar condicionantes o exigir la formulación de supuestos. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluyendo las simbólicas, asociándolas directamente a situaciones del mundo real. Saben usar habilidades bien desarrolladas y razonar con flexibilidad y con cierta perspicacia en estos contextos. Pueden elaborar y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones y acciones.
Nivel 3	Los estudiantes saben ejecutar procedimientos descritos con claridad, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. Pueden seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas sencillos. Saben interpretar y usar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas. Pueden elaborar escritos breves exponiendo sus interpretaciones, resultados y razonamientos.
Nivel 2	Los estudiantes pueden interpretar y reconocer situaciones en contextos que sólo requieren una inferencia directa. Saben extraer información relevante de una sola fuente y hacer uso de un único modelo de representación. Pueden utilizar algoritmos, fórmulas, convenciones o procedimientos elementales. Son

	capaces de efectuar razonamientos directos e interpretaciones literales de los resultados.
Nivel 1	Los estudiantes saben responder a preguntas relacionadas con contextos familiares, en los que está presente toda la información relevante y las preguntas están claramente definidas. Son capaces de identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios siguiendo instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados.

Tabla 1: Tareas correspondientes a cada uno de los niveles expuesto por PISA

Desde mucho antes que la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) diseñara y promoviera el examen Pisa, la secundaria mexicana ya daba particular importancia a los cursos de Español, Matemáticas y Ciencias (Física, Química y Biología). En las últimas cuatro reformas curriculares (1974, 1993, 2006 y 2011) a estas áreas se les ha asignado una carga horaria superior al 40% del tiempo total dedicado a la docencia frente al grupo en este nivel educativo. A pesar de ello, nuestros estudiantes han mostrado en las distintas aplicaciones del examen Pisa, un desempeño que nos coloca entre los países con resultados más bajos. Por ejemplo, en el último examen que se aplicó en el año 2009 ocupamos en matemáticas el lugar 50, entre un total de 65 países evaluados y nuestros estudiantes obtuvieron 419 puntos en promedio, muy por debajo de los 496 obtenidos por los países miembros de la OCDE como promedio. En esta misma edición de Pisa, los estudiantes sonorenses ocuparon el lugar 23 entre los 32 estados de la república, al haber obtenido 410 puntos en promedio, 9 puntos todavía por debajo del promedio nacional.

Desde la primera aplicación del examen Pisa en el año 2000, el número de países evaluados por la OCDE ha ido en aumento y sus resultados son tomados cada vez con mayor seriedad por los países participantes. En México la importancia de esta evaluación se reconoce, por primera vez de manera explícita, en el nuevo plan de estudios aprobado este año para el nivel de educación básica (SEP, 2011, p. 85):

> El Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos de la OCDE (PISA, por sus siglas en inglés) es un marco de referencia internacional que permite conocer el nivel de desempeño de los alumnos que concluyen la Educación Básica, y evalúa algunos de los conocimientos y habilidades necesarios que deben tener para desempeñarse de forma competente en la sociedad del conocimiento. La prueba PISA se ha convertido en un consenso mundial educativo que perfila las sociedades contemporáneas a partir de tres campos de desarrollo en la persona: la lectura como habilidad superior, el pensamiento abstracto como base del pensamiento complejo, y el conocimiento objetivo del entorno como sustento de la interpretación de la realidad científica y social.

Los “conocimientos y habilidades” a los que se refiere la cita anterior tienen que ver con la adquisición de las competencias indispensables para la vida.

Por ejemplo, el nivel 2 representa el mínimo necesario para la vida en la sociedad actual, y alcanzar los niveles 5 y 6 significa que un alumno está preparado para realizar actividades con un mayor grado de dificultad y un desarrollo cognitivo más complejo.

Los resultados de PISA muestran que el sistema educativo mexicano debe enfrentar dos retos importantes: Por una parte, México tiene una proporción elevada de alumnos por debajo del Nivel 2 (alrededor del 50%), lo que implica que muchos jóvenes no están siendo preparados para una vida fructífera en la sociedad actual. Por otra, nuestro país tiene muy pocos estudiantes en los niveles más altos (menos de 1% en los niveles 5 y 6), lo que significa que los alumnos de mejores resultados no están desarrollando las competencias requeridas.

> El director del INEE Felipe Martínez Rizo mencionó respecto a lo anterior: “en México muchas veces no se logran esos propósitos, pues la sobrecarga de contenidos curriculares, junto con las fallas en la formación de los maestros, hacen que éstos privilegien el manejo superficial de contenidos y no el dominio de habilidades complejas. Por ello una buena enseñanza de las ciencias sigue siendo una asignatura pendiente para el sistema educativo mexicano y muestra la necesidad de enfoques pedagógicos que trabajen en profundidad contenidos clave y rechacen el enciclopedismo.”

I.3.2 El examen ENLACE

ENLACE se aplica en todas las escuelas de Educación Básica del país, tanto públicas como privadas, para obtener información diagnóstica del nivel de logro académico que los alumnos han adquirido en temas y contenidos vinculados con los planes y programas de estudio vigentes. En Educación Básica, ENLACE evalúa los conocimientos y las habilidades de los estudiantes en las asignaturas de Matemáticas y Español. Además, para lograr una evaluación integral, a partir de 2008 en cada aplicación también se incluye una tercera asignatura que se va rotando cada año, de acuerdo a la siguiente programación: Ciencias (2008), Formación cívica y ética (2009), Historia (2010) y Geografía (2011).

El propósito es generar una sola escala de carácter nacional que proporcione información comparable de los conocimientos y habilidades que tienen los estudiantes en los temas evaluados, que permita:

1. Estimular la participación de los padres de familia así como de los jóvenes, en la tarea educativa.
2. Proporcionar elementos para facilitar la planeación de la enseñanza en el aula.
3. Atender requerimientos específicos de capacitación a docentes y directivos. Sustentar procesos efectivos y pertinentes de planeación educativa y políticas públicas.
4. Atender criterios de transparencia y rendición de cuentas.

Los resultados de ENLACE a partir de 2010 incorporan el grado de marginación por localidad conforme a los índices que elabora el Consejo Nacional de Población (CONAPO) de manera que una escuela pueda compararse de manera más equitativa y justa, con aquellas ubicadas en comunidades con niveles socioeconómicos similares.

Características de la prueba

1. Es una prueba objetiva y estandarizada, de aplicación masiva y controlada.
2. Emplea una metodología de calificación precisa, que proporciona referencias de comparación nacional.
3. Ofrece un diagnóstico de los estudiantes a nivel individual.
4. Es una prueba centrada en el conocimiento; evalúa el resultado del trabajo escolar contenido en los planes y programas oficiales.
5. La prueba consta de un cuadernillo de preguntas y de una hoja de respuestas.
6. Está conformada por reactivos de opción múltiple, -en Matemáticas, en 2011, 56 reactivos en primer grado, 58 en segundo y 60 para tercer grado. Su aplicación se realiza en 8 sesiones de 45 minutos cada día, durante dos días.
7. Cada reactivo sólo puede tener una respuesta correcta.
8. Identifica debilidades y fortalezas.
9. Explora una amplia variedad de aprendizajes indicados en los programas de estudio.
10. ENLACE 2011 incluye las asignaturas de Español, Matemáticas y Geografía para los tres grados de secundaria.
11. Los resultados de la prueba ENLACE 2011 de secundaria son comparables con los resultados de la aplicación en 2009 y 2010 (excepto la asignatura de Geografía). Estos

resultados no son comparables con 2006, 2007 y 2008 porque el examen cambió de perfil.

La habilidad matemática se evalúa con relación a:

Cuatro contenidos matemáticos

1. Cantidad
2. Espacio y forma
3. Cambios y relaciones
4. Matemáticas Básicas

Tres grupos de procesos cognitivos

1. Reproducción
2. Conexión
3. Reflexión

En Matemáticas ENLACE no evalúa:

Creación de unidades arbitrarias de medida

Uso de instrumentos de geometría

Creación y exploración de objetos tridimensionales

En la Tabla 2 se presentan los resultados nacionales para la educación secundaria, obtenidos en esta prueba del año 2006 al 2011 en la asignatura de matemáticas.

	2006	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**
Insuficiente: Necesita adquirir los conocimientos y desarrollarlas habilidades.	61.1%	57.1%	55.1%	54.5%	52.6%	53.3%
Elemental: Requiere fortalecer la mayoría de los conocimientos y desarrollar las habilidades	34.7%	37.3%	35.7%	35.5%	34.7%	30.9%
Bueno: Muestra un nivel de dominio adecuado de los conocimientos y posee las habilidades	3.8%	5.1%	8.3%	9.1%	10.5%	11.7%
Excelente: Posee un alto nivel de dominio de los conocimientos y las habilidades	0.4%	0.5%	0.9%	1.0%	2.2%	4.1%

Tabla 2. Resultados nacionales 2006-2011 por nivel de desempeño en la prueba ENLACE para matemáticas en secundaria.

La Tabla 2 revela las enormes deficiencias en el desempeño de los estudiantes y el magro movimiento que registran cada uno de los niveles fijados por ENLACE. Es importante señalar que los datos exhibidos deben ser tomados con reservas, en virtud de las serias deficiencias en el diseño de los reactivos que integran este instrumento y de algunas irregularidades detectadas durante su aplicación.

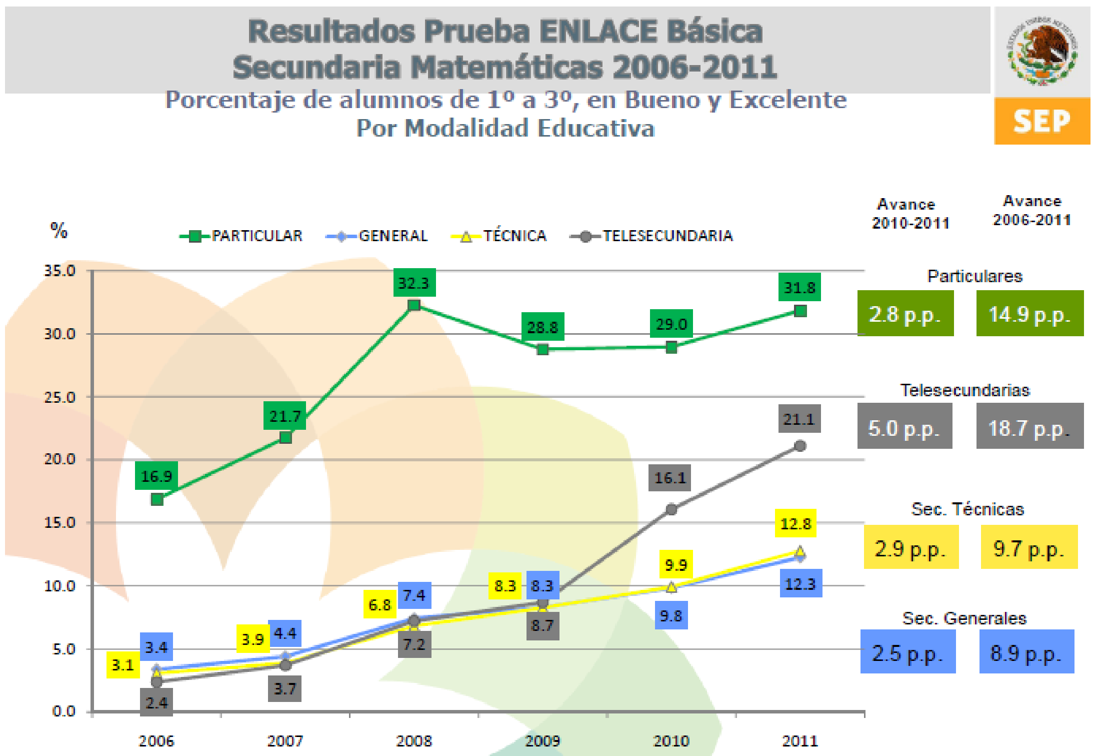


Tabla 3. Porcentaje de alumnos con nivel Bueno y Excelente entre el año 2006 y 2011.[2]

La Tabla 3 revela una gran diferencia entre los estudiantes que asisten a escuelas públicas y privadas. Por otra parte muestra también una ligera tendencia al aumento del porcentaje de estudiantes de nivel Bueno y Excelente, aunque esta tendencia pudiera no deberse exclusivamente a lo mejora del desempeño, porque pueden estar pesando en el mejoramiento de estos puntajes tanto la experiencia acumulada en la aplicación del examen, como el entrenamiento para la prueba que algunas escuelas han empezado a instrumentar.

I.4 Examen Nacional de Conocimientos y Habilidades Docentes

[2] Datos http://www.enlace.sep.gob.mx/content/gr/docs/2011/ENLACE2011_versionFinalSEP.pdf Consultado el 20 de diciembre de 2011

Este examen se aplica a todos los profesores del nivel básico que aspiran a una plaza docente entre las vacantes ofrecidas por la Secretaria de Educación Pública. Los resultados recientes obtenidos por los aspirantes son bastante precarios, aunque los datos publicados por la Secretaría no distinguen los niveles de Preescolar, Primaria y Secundaria; la Tabla 4 proporciona una idea global sobre los bajos porcentajes obtenidos por los aspirantes.

CONVOCATORIA NACIONAL PARA EL OTORGAMIENTO DE PLAZAS DOCENTES

Comparativo de resultados 2010-2011 y 2011-2012 por rangos en porcentaje de aciertos

Porcentaje de aspirantes en el CNPD en diez rangos, según sus resultados en el ENCHD 2010 - 2011 en porcentaje de aciertos.

Rangos en % de aciertos con base en 80 reactivos		porcentaje aspirantes	Porcentaje acumulado
1	93.75 a 87.6	0.03	0.03
2	[87.5 , 81.26)	0.60	0.64
3	[81.25 , 75.1)	2.93	3.57
4	[75 , 68.76)	8.02	11.59
5	[68.75 , 62.6)	13.95	25.54
6	[62.5 , 56.26)	18.32	43.86
7	[56.25 , 50.1)	19.05	62.91
8	[50 , 43.76)	16.61	79.52
9	[43.75 , 37.6)	12.27	91.79
10	[37.5 , 31.25]	8.21	100.00
Promedio % de aciertos:		**54.91**	

Porcentaje de aspirantes en el CNPD en diez rangos, según sus resultados en el ENCHD 2011 - 2012 en porcentaje de aciertos.

Rangos en % de aciertos con base en 80 reactivos		porcentaje aspirantes	Porcentaje acumulado
1	96.25 a 87.6	0.10	0.10
2	[87.5 , 81.26)	1.04	1.14
3	[81.25 , 75.1)	4.19	5.33
4	[75 , 68.76)	9.68	15.01
5	[68.75 , 62.6)	15.50	30.51
6	[62.5 , 56.26)	18.83	49.34
7	[56.25 , 50.1)	18.50	67.84
8	[50 , 43.76)	15.21	83.05
9	[43.75 , 37.6)	10.45	93.50
10	[37.5 , 31.25]	6.50	100.00
Promedio de aciertos		**55.9**	

NOTA: Las tablas integran a los participantes en 10 grupos, de acuerdo a sus resultados expresados en porcentajes de aciertos (con base en 80 reactivos)
Los rangos no equivalen a una calificación, sino a agrupaciones en deciles. Las más de 21 mil plazas consignadas en los Anexos Técnicos serán otorgadas, a los aspirantes que hayan obtenido los mejores resultados y que, por lo general, se ubican dentro de los primeros cinco rangos-del 96.25% al 62.6% de aciertos-, en donde se concentra el 30.51% de los concursantes.

Tabla 4: Comparativo de resultados 2010-2011 y 2011-2012 por rangos en porcentajes de aciertos[3]

Como conclusión de lo anterior podemos mencionar que, las dos evaluaciones dirigidas a los estudiantes dejan en evidencia que la Escuela Secundaria no está logrando los propósitos fijados ni está preparando a los estudiantes para ejercer una ciudadanía plena. El trabajo que desempeñan los profesores en las aulas de clase es seguramente un factor que incide en los

[3]Datos:http://concursonacionalalianza.sep.gob.mx/CONAPD11/docs/resultados/Rango_aciertosVS.pdf, consultados el 20 de diciembre de 2011.

bajos rendimientos mostrados por los alumnos, aunque es indiscutible que las causas son multifactoriales y difíciles de establecer con claridad.

CAPÍTULO II

Antecedentes

A continuación se hace una descripción de algunas investigaciones o trabajos de desarrollo docente que pueden tomarse como antecedentes del trabajo que aquí se presenta.

II.1 Programas de formación de la Universidad de Sonora.

El grupo de Matemática Educativa del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora cuenta con una gran tradición en el diseño y promoción de programas de formación, profesionalización y actualización de profesores de matemáticas de todos los niveles educativos. Presentaremos aquí sólo los más recientes que se refieren al nivel Secundaria y que resultan los antecedentes más inmediatos de la presente tesis.

II.1.1 Cursos nacionales

La Universidad de Sonora, en colaboración con la Sociedad Matemática Mexicana y a través de la Dirección General de Formación Continua de Maestros en Servicio de la Secretaría de Educación Pública, ofreció entre los años 2009 y 2010 un paquete de tres cursos dirigidos a profesores de Secundaria en servicio, bajo los títulos de *"Las Matemáticas y su Enseñanza en la Escuela Secundaria I, II y III"* con una duración de 150 horas. Los cursos fueron impartidos por profesores de la Universidad de Sonora a los grupos de maestros de todo el país que tuvieron bajo su responsabilidad la reproducción de estos cursos en cada uno de los estados de la república.

Cada curso aborda un eje temático, el curso I se refiere a *Sentido numérico y pensamiento algebraico*, el curso II a *Forma espacio y medida* y el curso III a *Manejo de la información,* cada uno de ellos con el propósito de "apoyar al personal docente de secundaria en el desarrollo de las competencias profesionales que lo hagan más eficaz para propiciar y conducir el proceso de aprendizaje de sus alumnos durante el estudio de los contenidos matemáticos" (Del Castillo, Villalba y Castro, 2010) correspondiente a cada eje.

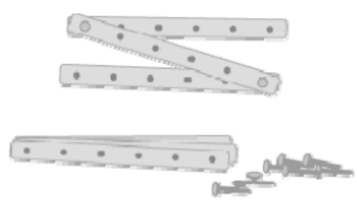
En estos cursos se proponen a los profesores algunas actividades diseñadas a partir de una situación problemática, pero otras están integradas por una serie de tareas que pretenden explorar algunos conceptos básicos del eje temático correspondiente. Las situaciones problemáticas del primer caso son como la siguiente (Villalba, Del Castillo y Armenta, 2009, p. 5):

> El borrego Erick está al final de una fila de borregos esperando para ser trasquilado. Hay 50 borregos delante de él. Pero como es un borrego impaciente, cada vez que se toma un borrego del frente para trasquilarlo, Erick se escabulle de la línea dos lugares hacia delante, salvo cuando queda un sólo borrego delante de él. En ese caso él se escabulle sólo un lugar hacia delante y queda al frente de la fila. ¿Cuántos borregos serán trasquilados antes que Erick? Intente dar una respuesta mentalmente.

Evidentemente se trata de una situación no ligada directamente a la vida real cuya importancia tiene que ver principalmente con la promoción del pensamiento algebraico donde lo importante son las relaciones internas entre las variables del problema. La secuencia de tareas que conducen a la solución del problema no requiere del uso de tecnología.

Las actividades que pretenden explorar conceptos matemáticos pueden ilustrarse con el siguiente ejemplo (Del Castillo, Villalba y Castro, 2010, pp. 5-6):

> Utilice las tiras acoplables que le serán entregadas por el instructor para tratar de construir triángulos con las medidas indicadas en la tabla de abajo y llene los recuadros en blanco. Si puede construir el triángulo, trate de cambiar su forma sin cambiar la longitud de sus lados para llenar la quinta columna. En los renglones de abajo, experimente con longitudes seleccionadas por usted mismo.



Lado A (Unidades)	Lado B (Unidades)	Lado C (Unidades)	¿Se puede construir el triángulo (Si/No)?	¿Se puede deformar el triángulo (Si/No)?
8	8	8		
8	7	4		
5	4	2		
7	3	4		
6	3	2		

Esta actividad tiene como propósito la identificación de las medidas de los segmentos que permiten construir un triángulo (desigualdad del triángulo). Como puede desprenderse del enunciado de la actividad, las primeras tareas usan material manipulable y en la parte final de la actividad se requiere usar un software de geometría dinámica.

Es notorio en los ejemplos citados que la restricción a uno de los ejes temáticos ha resultado una limitante para que las actividades tengan características más integradoras.

II.1.2 Diplomado: Prácticas Docentes en las Matemáticas de Secundaria

La Universidad de Sonora bajo convenio de colaboración con la Secretaría de Educación y Cultura del Estado de Sonora ofreció en el 2011 un Diplomado dirigido a profesores del Estado de Sonora. El Diplomado fue impartido por profesores de la Universidad de Sonora con una duración de 150 horas.

El Diplomado tuvo como principal objetivo el "Apoyar al personal docente de la escuela secundaria en la comprensión y desarrollo de las competencias profesionales que lo hagan más eficaz para conducir el proceso de aprendizaje de las matemáticas de sus alumnos" (Ibarra *et al*, p. 2)

El Diplomado estuvo constituido por tres módulos; en el primero de ellos *Evaluaciones del aprendizaje de las matemáticas y su relación con la práctica docente* se discutieron los principales instrumentos de evaluación regional, nacional e internacional aplicados a estudiantes. En el segundo módulo *Desarrollo de la actividad docente: el programa de matemáticas, los planes de clase, los libros de texto y otros materiales didácticos*, se reflexionó acerca de las estrategias de enseñanza de los profesores y se analizaron los principales documentos de apoyo con los que los docentes cuentan. En el tercer módulo *Actividades e integración del conocimiento* se resolvieron algunas actividades didácticas con el propósito de contribuir a elevar el nivel de los participantes en el dominio de algunos contenidos matemáticos de la escuela secundaria, así como de su conocimiento y desarrollo de habilidades para la implementación de las estrategias didácticas propuestas en los planes y programas de estudio.

Las actividades propuestas permiten a los profesores, entre otros aspectos, reflexionar sobre las posibilidades de usar diversos procesos o elementos de la vida cotidiana en las clases de matemáticas, de plantear situaciones que involucren la necesidad de integrar contenidos matemáticos de los tres ejes temáticos de las matemáticas de la escuela secundaria y, adicionalmente, de temas que son también objeto de análisis en otros cursos o asignaturas. Ejemplos de estas situaciones se presentan a continuación; la primera es un fragmento de la actividad Crecimiento poblacional del Estado de Sonora y la segunda El ISR en venta de bienes inmuebles, ambas actividades incorporan el uso de tecnología (Ibarra *et al*, pp. 156-186)

2. Interpretar información de textos

El documento Diagnóstico Sociodemográfico del Estado de Sonora[1], menciona que:

"A lo largo del siglo XX, Sonora, al igual que el resto del país sufre una importante transformación demográfica. En esos cien años, el crecimiento, estructura y composición de la población de esta entidad transitó por varias etapas:

- A principios de este siglo y hasta 1940-1950 el crecimiento anual de la población era menor al 2 por ciento, con este ritmo tan bajo de crecimiento se necesitaban cuatro décadas para que la población se duplicara;

- Después de 1950 el ritmo de crecimiento demográfico se acelera a tal grado que en sólo dos décadas se duplica la cantidad de habitantes. Esto es, de 1950 a 1970 el crecimiento demográfico anual es de 4 por ciento;…"

Tomando en cuenta esta información, responde individualmente lo siguiente:

a) ¿Consideras correcta la afirmación de que con un crecimiento anual del dos por ciento, en cuatro décadas se duplica la población? Argumenta tu respuesta.

b) ¿Cuál es el crecimiento poblacional anual en el que se basa la siguiente afirmación?: "con este ritmo tan bajo de crecimiento se necesitaban cuatro décadas para que la población se duplicara". Argumenta tu respuesta.

A. Tarifa aplicable a pagos provisionales

Tarifa para el cálculo de los pagos provisionales que se deban efectuar durante 2011, tratándose de enajenación de inmuebles a que se refiere la regla I.3.14.4. de la Resolución Miscelánea Fiscal para 2010.

Límite inferior $	Límite superior $	Cuota fija $	Por ciento para aplicarse sobre el excedente del límite inferior %
0.01	5,952.84	0.00	1.92
5,952.85	50,524.92	114.24	6.40
50,524.93	88,793.04	2,966.76	10.88
88,793.05	103,218.00	7,130.88	16.00
103,218.01	123,580.20	9,438.60	17.92
123,580.21	249,243.48	13,087.44	21.36
249,243.49	392,841.96	39,929.04	23.52
392,841.97	En adelante	73,703.40	30.00

a) ¿Sabías que existe este tabulador para el pago del impuesto sobre la renta (ISR) en la compra – venta de bienes inmuebles?

b) ¿Cuál es la cantidad sobre la que se calcula el ISR?

- ¿Por qué se toma en cuenta el costo actualizado del bien a enajenar?
- ¿Por qué consideras que debe deducirse el costo de compra anterior actualizado?

c) ¿Qué indica en la tabla la cuota fija?

Dos de las actividades didácticas diseñadas para este trabajo de tesis: IMC y la media aritmética de dos números han sido incluidas en este Diplomado por satisfacer las características descritas para el módulo 3.

II.2 Especialización de Alto Nivel para la Profesionalización Docente en las Matemáticas de Secundaria.

Este programa fue ofrecido por el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav) en coordinación con la Secretaría de Educación Pública y estuvo dirigido a profesores de secundaria en servicio. Lo que se denomina *primera iteración* del programa se ofreció en julio de 2010, tuvo una duración de 80 horas aproximadamente y en el diseño y conducción participaron Profesores y estudiantes del Cinvestav. Uno de los propósitos generales de este programa es:

> Que las y los profesores participantes reconozcan, profundicen y compartan conocimientos y prácticas relativos a la Matemática y las Ciencias en el ámbito educativo, a fin de favorecer decisiones relativas al diseño, elaboración y análisis de secuencias de aprendizaje para la clase de matemáticas y su relación con otras disciplinas, así como con la vida cotidiana del estudiante. Todo ello de acuerdo a los objetivos de la RES y al desarrollo de competencias.

Aunque no queda claro en el objetivo general citado, si los participantes se involucrarán en el diseño de situaciones didácticas, los dos últimos objetivos específicos establecen que se trata de:

- Aplicar una Situación Didáctica, de manera que los participantes puedan vivir la experiencia.
- Diseño de una Situación Didáctica por los participantes.

En virtud de no contar con información sobre la existencia de materiales escritos de estudio donde se muestren actividades didácticas diseñadas, se muestra aquí una de las situaciones problemáticas planteadas y que pudieran servir de base para el diseño de una situación didáctica.

> El desarrollo de las siguientes actividades habrá de acompañarse de un reporte escrito, hemos considerado que en esta ocasión prescindiremos del uso de la calculadora a fin de restringirnos al uso de la regla y el compás.
>
> Actividad 4.2

> Recuerde que si se inscribe un triángulo en una semicircunferencia y uno de sus lados coincide con el diámetro, como se muestra en la figura siguiente, se tendrá que dicho triángulo es un triángulo rectángulo. Elabore argumentos para convencerse de que dicho triángulo es rectángulo.

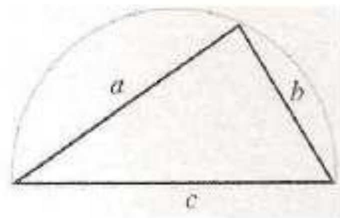


Figura 4.1. Triángulo rectángulo inscrito en una semicircunferencia.

El Programa incluye un período de atención en línea de tres meses más, pero no se cuenta con información sobre las actividades desarrolladas en este período y los avances que pudieron lograrse en el diseño.

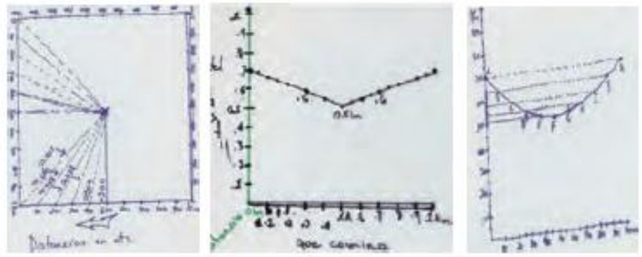
II.3 Diseños con ACODESA.

Interesado en la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con el uso de tecnología Fernando Hitt ha diseñado "secuencias de aprendizaje que implican la adquisición de conocimientos que pueden ser retenidos por los estudiantes a largo plazo" (Hitt, 2009). Estas secuencias han sido dirigidas tanto a profesores como a estudiantes de diferentes niveles educativos, las cuales tienen características comunes: parten de una situación problemática, provoca el uso de diferentes representaciones, utiliza materiales manipulables como paso previo al uso de la tecnología.

Las actividades tienen sustentos teóricos en la teoría de campos conceptuales de Vergnaud la cual menciona que un concepto adquiere sentido para el sujeto a través de situaciones y problemas. El campo conceptual está constituido por problemas que permiten el desarrollo de un concepto, operaciones que son necesarias de utilizar para la resolución de esos problemas, dentro de un sistema matemático (Hitt, 2009). A continuación se presenta un ejemplo de una situación que se ha trabajado con estudiantes de secundaria:

> Un excursionista comienza un paseo alrededor de un parque (en forma de cuadrado). Él sigue el camino que le permite por lo tanto regresar al punto de partida. Al seguir este camino, un gran mástil con una bandera se encuentra situado en el centro del parque. Traza un camino y coloca el puesto de socorro en el lugar de tu elección de acuerdo al enunciado

Para resolver esta actividad los estudiantes se familiarizan con el problema y se generan representaciones gráficas como las siguientes



II.4 Contribuciones de Abraham Arcavi.

En el diseño de actividades didácticas, sus trabajos de investigación y desarrollo docente lo han convertido en una referencia obligada, tanto por los diseños que ha desarrollado como por sus esfuerzos por clarificar la problemática que envuelve las actividades de diseño propiamente dichas. Se muestran aquí algunas situaciones problemáticas planteadas así como la problemática que pretende ilustrar con ellas.

Dificultades y retos del diseño de actividades.

Situaciones de la vida real.

Es una recomendación muy aceptada que las situaciones que sirvan de base al diseño de una actividad parta de una situación problemática, de preferencia conectada con la vida real, sin embargo pareciera que estas situaciones no son fáciles de encontrar. Arcavi sostiene que no se ha dedicado suficiente tiempo a buscar estas situaciones, pero que podrían ser más abundantes de lo que parecen. Un ejemplo que ilustra la existencia de diversas situaciones matematizables es ilustrado con el problema siguiente:

> ¿Por qué es peligroso un diseño como el que muestra el dibujo, para un columpio?, ¿qué debería corregirse en el diseño para que no resulte peligroso?

El uso de tecnología

Es deseable que el diseño de actividades contemple el uso de recursos tecnológicos, pero si se desea que la tecnología genere aprendizajes significativos no puede pensarse esta herramienta para proponer viejos enfoques disfrazados de nuevos. En un fragmento de una de sus actividades diseñadas con tecnología, puede verse qué significa el uso provechoso de esta herramienta. La Figura 7 muestra el intento por graficar la función área de un triángulo, usando un software de geometría dinámica para hacer variar el lado AC del triángulo y tomando su longitud como la variable independiente para graficar la función área del triángulo.

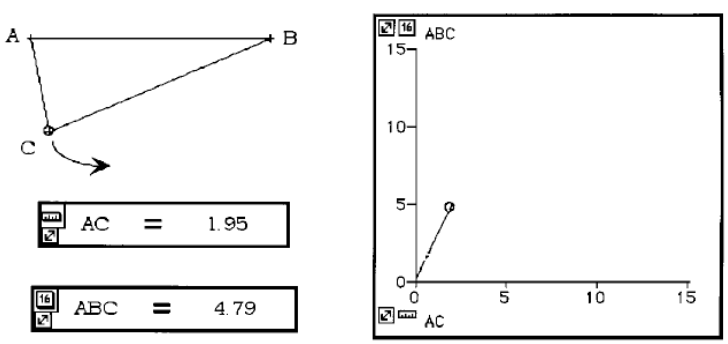


Figura 7. Imagen incipiente de la primera gráfica

El intento por construir la gráfica se hace una vez que los estudiantes han intentado predecir la forma que tomará la gráfica. La actividad en este momento no involucra todavía, ni se requiere para hacer la gráfica, la búsqueda de la expresión algebraica de la función área.

Actividades integradoras.

Las actividades integradoras pueden ayudar a un estudiante a desarrollar un conocimiento matemático flexible, aplicable y más completo, pero su diseño conduce de inmediato a la pregunta: ¿qué deben integrar estas actividades? Las respuestas a esta pregunta son diversas.

El diseño podría intentar simplemente integrar conceptos de distintas ramas de la matemática, como sería el caso de la actividad que se desprende de la situación siguiente:

> El gráfico Cartesiano de las funciones $y = ax + 1$ es una recta que forma un triángulo con los ejes coordenados. Lanzamos un dado común y sustituimos *a* con el valor obtenido (1, 2, 3, 4, 5, ó 6).
>
> • ¿Para qué valor de *a* el triángulo formado es isósceles?
>
> • ¿Para qué valor de *a* se obtiene el triángulo de menor área?
>
> • ¿Cuál es la probabilidad de que el área del triángulo formado sea menor que $\frac{1}{6}$?
>
> • ¿Cuál es la probabilidad de que el área del triángulo formado sea mayor que $\frac{1}{2}$?

Con esta situación problemática se trata de confrontar al estudiante con sus propias concepciones acerca de la resolución de problemas, en particular con aquella muy arraigada en algunos estudiantes, de que resolver un problema consiste simplemente en aplicar una fórmula del tema que se está abordando en clase. Responder a esta situación exige la combinación de conceptos geométricos, algebraicos y estocásticos.

O bien la situación problemática podría intentar integrar el conocimiento conceptual con el procedimental y entonces podrían proponerse situaciones como la siguiente:

Resolver la ecuación:

$$\frac{2x+3}{4x+6} = 2,$$

que pondría de inmediato al estudiante ante dos posibles estrategias, por un lado la aplicación mecánica de las reglas del álgebra a fin de obtener una solución o bien lo haría detenerse a realizar una lectura significativa de los símbolos que podría llevarlo a la conclusión de que el término de la izquierda es igual a $\frac{1}{2}$ para toda *x* y por lo tanto la ecuación no tiene solución. Pero la manipulación algebraica conduce a que la solución es $-\frac{3}{2}$, que por supuesto es una solución falsa. La posibilidad de salir de esta aparente contradicción obligaría al estudiante a usar y tratar de integrar conocimientos tanto conceptuales como procedimentales.

CAPÍTULO III

Consideraciones Teórico-Metodológicas

III.1 Metodología ACODESA

(Aprendizaje en colaboración, debate científico y auto-reflexión)

La metodología ACODESA integra varias situaciones problemas interrelacionadas unas con otras. Ella toma en consideración el trabajo individual, trabajo en equipo, debate en el aula y auto-reflexión. Es una adaptación a un acercamiento sociocultural del aprendizaje de las matemáticas (Hitt, Gonzales-Martin et Morasse)

En la metodología ACODESA, la manipulación de materiales y trabajo con papel y lápiz es sumamente importante como paso previo al uso de tecnología. Esta metodología tiene sustentos teóricos en la teoría de campos conceptuales de Vergnaud.

Para Vergnaud, el conocimiento está organizado en campos conceptuales cuyo dominio ocurre a lo largo de la experiencia, madurez y aprendizaje. Se establece la importancia de la conceptualización y de los esquemas correspondientes. Un concepto adquiere sentido a través de situaciones y problemas.

En primer lugar, Vergnaud establece la importancia de la conceptualización y de los esquemas correspondientes. Para él, un concepto adquiere sentido para el sujeto a través de situaciones y problemas, no reduciéndolo simplemente a una definición. Por otra parte, establece que el conocimiento racional es necesariamente operatorio.

En cuanto a las situaciones, distingue dos tipos:

1. Aquellas para las que el sujeto dispone de competencias necesarias para el tratamiento relativamente inmediato de la situación.
2. Aquellas para las que el sujeto no tiene todas las competencias necesarias.

En las actividades que aquí se proponen se promueven situaciones del segundo tipo.

A continuación se dará un pequeño resumen de las características de la metodología ACODESA. Es importante señalar que en esta metodología, el profesor no dictamina sobre lo realizado por los alumnos en las primeras etapas, salvo al final en el proceso de institucionalización. En las tres primeras fases el profesor es un guía y es deber de los estudiantes argumentar y validar sus producciones. Estas características de ACODESA la convierten en una metodología apropiada para el diseño de actividades didácticas con las características que en este trabajo se están considerando.

Cada una de las fases puede resumirse de la siguiente manera:

1. Trabajo individual (producción de representaciones para comprender la situación del problema)

El trabajo individual es un primer encuentro del estudiante con la situación problema, se espera que un análisis a conciencia provoque en el estudiante representaciones mentales de manera espontánea y pueda materializarlas a través de un esquema, un dibujo, etc. Siendo este momento clave para encender la actividad cognitiva del estudiante.

2. Trabajo en equipo sobre una misma situación. Proceso de discusión y validación (Refinamiento de las presentaciones)

Que el estudiante discuta con sus compañeros de equipo es rico para la refinación y posible reducción de posibles estrategias de solución de la situación y poder establecer una visión común en el equipo del fenómeno.

3. Debate (que puede convertirse en un debate científico). Proceso de discusión y validación (refinamiento de representaciones)

Con el objetivo de reducir esa gama de posibilidades que hayan surgido en las fases anteriores y así refinar las representaciones que en un primer encuentro con la situación se hayan producido con el estudiante.

4. Regreso sobre la situación (trabajo individual: reconstrucción y auto-reflexión)

En esta fase el estudiante reflexiona sobre lo construido en las fases anteriores, se espera que esa refinación de representaciones lo encamine a la solución de la situación.

5. Institucionalización. Proceso de institucionalización y utilización de representaciones institucionales

El profesor recauda las representaciones funcionales que surgieron durante el desarrollo de la actividad y en conjunto con sus alumnos llegan a un común acuerdo para así después de un proceso de socialización de las ideas se vayan encaminando de las representaciones funcionales hacia las representaciones institucionales.

Hitt (2010) define así las representaciones institucionales y las representaciones funcionales:

> *Representación institucional: es una representación que es reconocida y aceptada por la comunidad en el contexto educativo. En nuestro caso, las representaciones institucionales son aquellas que se encuentran en los libros, las que utilizan los profesores de matemáticas, las que encontramos en las pantallas de las computadoras y calculadoras.*
>
> *Representación funcional (espontánea). Frente a una tarea matemática (problema o situación problema), los estudiantes intentan comprenderla; si la tarea no está directamente relacionada con una actividad que ponga en marcha un pensamiento convergente(el recuerdo de un algoritmo conocido por los alumnos), los estudiantes en un proceso de pensamiento divergente(es decir que no existiendo un camino directo, la tarea los obliga a la búsqueda de alternativas, esa búsqueda puede estar ligada a intentos por entender la tarea), los lleva a la producción de representaciones mentales que al expresarlas sobre papel u otro medio, sirven como medio de comprensión y discusión con sus compañeros, para mejor comprender la tarea y al mismo tiempo, se crea un campo de posibilidades que podrían encaminar a los interesados hacia la solución de la tarea.*

Otros aspectos importantes que Hitt marca son las diferencias entre un ejercicio, un problema y una situación problema, tal y como se señala a continuación:

<u>Ejercicio:</u> si en la lectura de un enunciado matemático recordamos de inmediato un algoritmo a seguir para la solución.

<u>Problema:</u> si en la lectura del enunciado no recordamos algún algoritmo inmediato a seguir, y la situación nos obliga a producir representaciones espontáneas que nos permitan ligar aspectos matemáticos no en forma directa sino a través de articulaciones entre representaciones y procesos de tratamiento al interior de los registros intervinientes.

<u>Situación problema:</u> la situación debe ser simple, fácil de entender (ello no implica que sea fácil de resolver), debe provocar la reflexión y por tanto no puede ser un ejercicio. La matemática a utilizarse no necesariamente debe ser explicitada en el enunciado.

III. 2 Las contribuciones de Abraham Arcavi al diseño de actividades

Los trabajos de Matemática Educativa que abordan la problemática concreta del diseño de actividades didácticas no son muy abundantes. Daría la impresión de que los marcos teóricos generales son suficientes por sí mismos para lograr aterrizajes de estas teorías en el diseño de actividades que las pongan en práctica. En la elaboración de las actividades presentadas aquí, se han tomado en cuenta dos recomendaciones concretas hechas por Abraham Arcavi (2006) y

Carlos E. Vasco (2006). Estas recomendaciones se refieren a dos aspectos distintos del diseño y provienen de sus propias experiencias como investigadores y docentes:

1. Es deseable que las actividades tengan un carácter integrador si se pretende desarrollar en los estudiantes un “conocimiento flexible, ágil, competente y aplicable…” (Arcavi, 2006). Esta integración no es solamente contraria a la enseñanza monotemática, tan difundida en la enseñanza tradicional, sino que comprende la integración en un sentido más general, se trata de articular en las actividades diseñadas para el aprendizaje de la matemática distintos tipos de conocimientos tanto conceptuales (saber qué) como procedimentales (saber cómo), distintos temas matemáticos aunque no pertenezcan a la misma rama y de ser posible temas no matemáticos.
2. Para la creación de situaciones de aprendizaje significativo es conveniente partir de situaciones problemáticas seleccionadas apropiadamente y si es necesario diseñar nuevos problemas, los buenos diseños “generan contextos accesibles a los intereses y a las capacidades intelectuales de los estudiantes y, por tanto, les permiten buscar y definir interpretaciones, modelos y problemas, formular estrategias de solución y usar productivamente materiales manipulativos, representativos y tecnológicos.” (Vasco, 2006, p. 72)

CAPÍTULO IV

La propuesta

IV.1 Objetivos

Por lo mencionado anteriormente y de acuerdo al Plan y programas de educación secundaria, el enfoque de enseñanza propuesto privilegia la resolución de problemas como la fuente principal de conocimiento matemático. Es por esta razón que las actividades diseñadas tienen como punto de partida la resolución de problemas que movilicen los saberes del profesor. Con los siguientes objetivos:

Objetivo general del proyecto de tesis:

Proponer un cuerpo de actividades de aprendizaje que puedan servir como apoyo y punto de referencia para el diseño a los profesores de matemáticas en el nivel secundaria.

Objetivos específicos:

1. Diseñar un conjunto de actividades didácticas que ilustren el enfoque de la última reforma curricular de la escuela secundaria, dirigidas a profesores de este nivel.
2. Aplicar una metodología para el diseño de actividades didácticas para la matemática de nivel secundaria.
3. Poner en escena las actividades con un grupo de profesores de secundaria.

El presente trabajo surge de la necesidad de acompañar la reforma con propuestas didácticas concretas, que atiendan los postulados generales que la sustentan. Los diseños didácticos aquí presentados tienen las características siguientes:

1. Están centradas en el aprendizaje, lo cual se traduce en asignar al profesor el papel de conductor de su clase, más que de expositor.
2. *Integrarán* diferentes conceptos matemáticos, diversos tipos de conocimiento matemático y de ser posible conceptos de otras disciplinas
3. Incorporan el uso de tecnología tal como Geogebra.
4. Promoverán las competencias matemáticas planteadas para este nivel.

IV.2 El uso de la tecnología

Actualmente con las nuevas reformas educativas y las nuevas tecnologías a nuestro alcance, se tiene la posibilidad de utilizar calculadoras, centros de cómputo, software matemático e internet para el aprendizaje de las matemáticas.

Aprovechando esos recursos, se utilizará un software de geometría dinámica como lo es Geogebra, con él se tiene la posibilidad de estudiar a las construcciones ya no solamente de una manera estática sino con dinamismo. A través de la manipulación en el software se promueve mejorar la concepción de objetos matemáticos.

El software de geometría dinámica Geogebra, resulta ser clave para generar procesos mentales que van mucho más allá de la simple memorización y pues en realidad contribuyen al desarrollo del pensamiento lógico matemático.

Algunas de las características del software de geometría dinámica son:

1. La capacidad de arrastre (dragging) de las figuras construidas, la cual permite la búsqueda de cantidades que varían y las que permanecen constantes en una deformación.
2. La animación de figuras.
3. La traza, huella que deja una figura geométrica cuando se le arrastra, permitiendo visualizar y descubrir lugares geométricos.
4. Geogebra ofrece la oportunidad de mostrar en pantalla, diferentes registros: gráfico, analítico y tabular.

Algunas de las características didácticas del software de geometría dinámica son:

1. El modo dragging enriquece las representaciones y permite explorar los resultados geométricos.
2. Facilita la interacción alumno-computadora (construcciones son manipulables directamente en pantalla).
3. Estimula la formulación y validación de conjeturas.

Además, este tipo de tecnología tiene la ventaja de estar dentro de los considerados software libres, es decir se puede instalar en una computadora sin costo, lo cual da la posibilidad de su implementación.

El uso de herramientas tecnológicas, tiene un papel importante en la reforma educativa. Como parte del perfil de egreso de la educación básica, el estudiante:

> "Emplea la argumentación y el razonamiento al analizar situaciones, identificar problemas, formular preguntas, emitir juicios y proponer diversas soluciones.
>
> Selecciona, analiza, evalúa y comparte información proveniente de diversas fuentes y aprovecha los recursos tecnológicos a su alcance para profundizar y ampliar sus aprendizajes de manera permanente". (SEP, 2006, p. 9)

De aquí, la importancia de que los profesores incorporen el uso de diversos recursos tecnológicos. Desafortunadamente, como ya se hacía explícito anteriormente, las sugerencias y orientaciones con relación al uso de la tecnología que se incluyen en los lineamientos referencian material elaborado antes de la reforma por lo cual, no necesariamente son consistentes con lo que se estipula.

IV.3 Visión integradora

Un asunto importante en la educación secundaria, es la vinculación de los contenidos ya sea del mismo eje, entre ejes distintos o incluso con otras asignaturas puesto que la tendencia generalizada en la enseñanza ha sido la fragmentación o la adquisición del conocimiento en pequeñas dosis, lo que deja a los alumnos sin posibilidades de establecer conexiones o de ampliar los alcances de un mismo concepto. En estos programas de secundaria vigentes, la vinculación se favorece mediante la organización de bloques temáticos que incluyen contenidos de los tres ejes: sentido numérico y pensamiento algebraico, forma espacio y medida y manejo de la información.

> "El agrupamiento de los contenidos en ejes temáticos, tanto en México como en otros países, es más reciente y se debe a tres propósitos relevantes: uno hace énfasis en los aspectos que interesa estudiar y aprender; otro consiste en establecer vínculos entre contenidos de las diferentes ramas de las matemáticas, y uno más se relaciona con la posibilidad de establecer líneas de estudio, que en algunos casos se inician en el nivel preescolar y culminan en la educación secundaria. Estos mismos propósitos explican la organización de los contenidos de los programas de estudio de Matemáticas 2006, en tres ejes temáticos." (SEP 2006)

Aunque la responsabilidad principal de los profesores de matemáticas es que los alumnos aprendan esta disciplina, el aprendizaje será más significativo en la medida en que se vincule con otras áreas. Es por esto, que las actividades aquí presentadas serán llamadas "integradoras" en donde se incluirán temas de los diferentes ejes.

De acuerdo a la definición de la palabra "integración" del Diccionario de la Lengua Española (vigésima segunda edición, 2001), podemos distinguir cuatro aspectos de este concepto:

- "Dicho de las partes: Constituir un todo."
- "Completar un todo con las partes que faltaban."
- "Hacer que alguien o algo pase a formar parte de un todo."
- "Aunar, fusionar dos o más conceptos, corrientes, etc., divergentes entre sí, en una sola que las sintetice."

En lo que se refiere a integración de conocimientos, se puede decir que estos cuatro aspectos complementarios serían una versión breve de lo que se estará entendiendo por *integración.*

En una visión integradora, se promueve un razonamiento flexible y ágil. Que los estudiantes estén en condiciones de resolver un determinado problema sin necesidad de que se les especifique el tema que se está abordando o bien, el contenido matemático que se debe de utilizar para su resolución. Arcavi (2006) menciona lo siguiente

> "…los alumnos "saben" cómo abordar un problema (y en general abordar un problema es casi sinónimo de escoger qué fórmulas aplicar), en base al capítulo del libro en el que aparece el problema. En estos casos, la contigüidad problema-fórmula suele ser una importante característica, si no el pilar, del proceso de enseñanza y aprendizaje de matemáticas. A veces, este fenómeno es tan marcado al punto de que es práctica común que en un examen que abarca varios tópicos, cada problema debe estar precedido por un título que especifique su tema, como una sugerencia implícita sobre los procedimientos a aplicar. Esta práctica difícilmente pueda apoyar el desarrollo de un conocimiento flexible y ágil al que todos aspiramos, sin embargo es mucho más frecuente de lo que nos imaginamos, y quizá, a veces, nosotros mismos la estimulemos inconscientemente."

La integración que se está buscando no consiste en conexiones forzadas en donde sólo se mezclen los contenidos; una integración superficial donde no se alcancen a desarrollar las competencias deseadas y sólo se trate de una mala organización de los contenidos. El abordar situaciones en donde se involucren varios conceptos ayuda a ampliar y enriquecer el significado de esos conceptos matemáticos así como la vinculación de la matemática en contextos de la vida diaria ya que los estudiantes pueden establecer relaciones con situaciones que ellos hayan experimentado.

Castaño (2006) también menciona la importancia de una educación integradora "la enseñanza integrada de diferentes sistemas conceptuales pertenecientes a los diferentes sistemas matemáticos, es una necesidad y una posibilidad derivada de tres consideraciones complementarias formuladas desde el conocimiento matemático, de la psicología y de la pedagogía :

• del carácter integrado del cuerpo de conocimientos de la (o las) matemática, (s)

• de las demandas cognitivas comunes que hace a los sujetos que aprenden la compresión de diferentes sistemas conceptuales de los distintos subcampos de lo matemático

• del proceso de construcción de los sistemas conceptuales por parte de los estudiantes"

IV.4 Presentación de las actividades

A continuación se muestran las hojas de trabajo correspondientes a cada una de las actividades diseñadas

IV.4.1 La pista

Esta actividad plantea una situación problemática en un contexto no matemático. Consiste en identificar los patrones presentes en los cálculos que resuelven la situación, usar los patrones para predecir resultados y por último generalizar e institucionalizar los procedimientos. Se apoya en material manipulable diseñado para modelar la situación planteada e incorpora el uso de GeoGebra como herramienta para facilitar la identificación de patrones.

En la Figura 1 se muestra un plano con las medidas oficiales en metros que debe tener una pista de atletismo para carreras de 400 metros planos. La pista tiene 8 carriles numerados del 1 al 8, llamaremos aquí Corredor 1 al atleta que corre por el Carril 1, Corredor 2 al que corre por el Carril 2 y así sucesivamente.

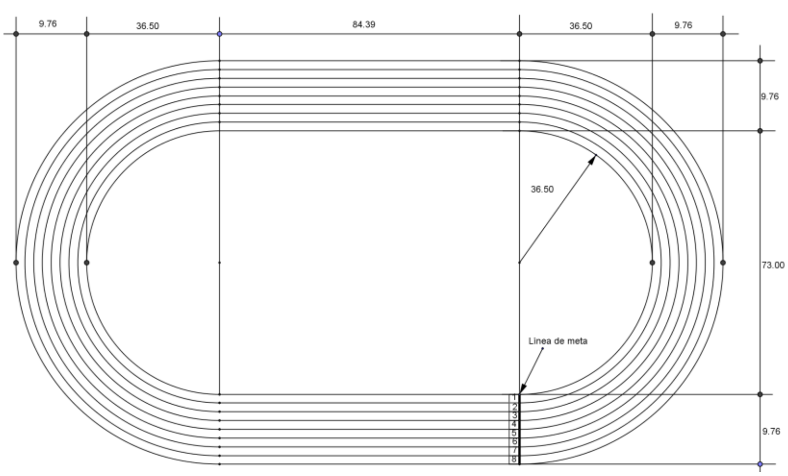


Figura 1

1. Usa la calculadora para obtener el perímetro interior de la pista.

2. Si cada competidor corre a 30 cm de distancia de la línea interior de su carril, ¿qué distancia recorrerá el Corredor 1, si la línea de meta es su línea de salida y de llegada?

3. Como el ancho de cada carril tiene una medida oficial de 1.22 m., ésa será la distancia que separará a los Corredores 1 y 2. Calcula la distancia que recorrerá el Corredor 2, si parte de la línea de meta y su línea de llegada es también la línea de meta.

4. En la Figura 2 pueden verse los detalles de la pista, cercanos a la línea de meta, Si la línea de salida del Corredor 1 es la línea de meta, ¿dónde deberá ubicarse la línea de salida del Corredor 2 para que los Corredores 1 y 2 recorran la misma distancia para llegar a la meta?

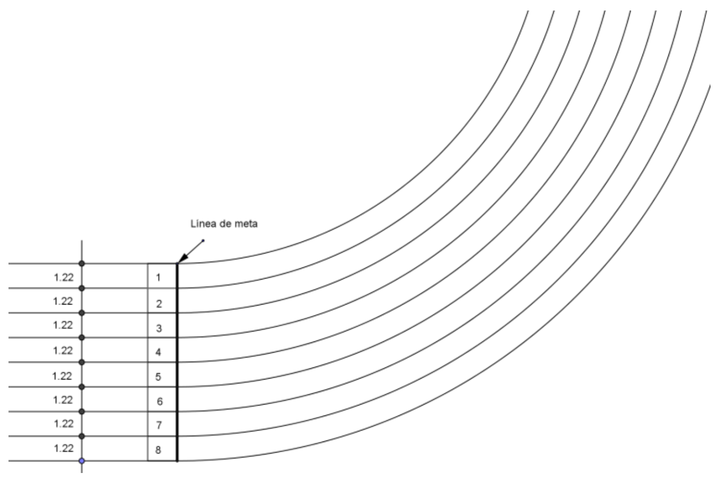


Figura 2

5. Establecida la línea de salida del Corredor 2, calcula ahora la distancia que tendría que recorrer el Corredor 3 para llegar a la meta, si la línea de salida de ambos corredores fuera la misma. Utiliza este cálculo para ubicar la línea de salida del Corredor 3 en la Figura 2, si queremos que la carrera sea justa.

6. Utiliza los cálculos realizados hasta ahora, para ubicar en la Figura 2 las líneas de salida del resto de los corredores.

Aunque es inusual que las pistas de atletismo tengan forma circular, recurriremos a esta forma para obtener una versión simplificada del problema. Consideremos en esta versión circular, una pista que cuenta solamente con cuatro carriles. En el modelo de cartulina que entregará el profesor a cada equipo, las medidas están representadas en metros y supondremos que los competidores corren pegados a la línea interior de su respectivo carril.

7. Desmonten los círculos de cartulina entregados a cada equipo, para que cada integrante calcule el perímetro del círculo interior del carril que le haya tocado. Este círculo interior representa ahora la trayectoria seguida por cada corredor.

a) Con los datos obtenidos por cada integrante, el equipo llenará la Tabla 1.

Corredor	Perímetro del círculo interior del carril
1	
2	
3	
4	

Tabla 1

b) Luego entre todo el equipo se harán los cálculos para llenar la Tabla 2. Para hacer estos cálculos recuerda que el Corredor 1 tendrá a la línea de meta como línea de salida y de llegada.

Corredor	Distancia entre la línea de meta y la línea de salida, si la carrera es justa
1	0
2	
3	
4	

Tabla 2

c) Calcula en tu equipo las distancias que hay entre las líneas de salida de dos corredores consecutivos y llena con estos datos la Tabla 3.

Corredores	Distancias entre las líneas de salida

consecutivos	
1 y 2	
2 y 3	
3 y 4	

Tabla 3

Ensambla de nuevo el modelo de cartulina y rota los carriles hasta representar las líneas de salida según los datos de la Tabla 3.

8. Muestra tu modelo de cartulina a los demás equipos a fin de comparar visualmente las distancias entre las líneas de salida representadas en los diferentes modelos. Coteja las conclusiones obtenidas con los resultados registrados por los diferentes equipos en la Tabla 3.

9. Discute con el resto de tu grupo a qué se deben las similitudes encontradas en la Tabla 3, a pesar de que provienen de modelos distintos. Formula una conjetura que explique estas similitudes.

10. Abre el archivo pista.ggb, en el que se han trazado dos círculos concéntricos como se ven en la Figura 3.

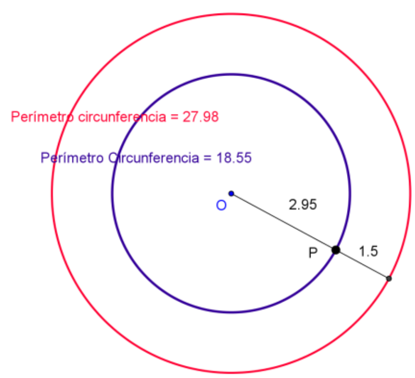


Figura 3

a) Calcula la diferencia entre los perímetros de las dos circunferencias mostradas en el archivo pista.ggb.

b) "Arrastra" el punto P para obtener un nuevo radio del círculo interior. Calcula las diferencias entre los perímetros de los nuevos círculos.

c) ¿Los resultados obtenidos con GeoGebra, confirman o refutan tu conjetura?

11. Si atamos una cuerda alrededor del ecuador terrestre. Luego añadimos un trozo de diez metros de largo y tiramos de la cuerda de una manera uniforme para que la distancia entre la superficie de la Tierra y la cuerda sea la misma en todas partes. ¿La cuerda quedará suficientemente levantada como para que un gato pueda pasar por debajo de ella?

12. Si tenemos dos círculos concéntricos, uno de radio r y otro de radio 5 unidades más grande. Explica por qué la diferencia de sus perímetros no depende de r.

IV.4.2 Cuadriláteros

Con el material que se te ha proporcionado, marca las cuatro bisectrices internas de la figura mediante dobleces en el papel.

1. ¿Qué figura forman las bisectrices al intersecarse?

2. Compara con los demás integrantes de tu equipo los resultados obtenidos, ¿dependen estos resultados de las dimensiones de la figura original? Escriban una conclusión en el equipo e intenten justificarla.

3. Auxiliándose de una de las hojas con dobleces, un representante de cada equipo expondrá al resto del grupo las conclusiones obtenidas, mismas que se usarán para llenar la siguiente tabla.

Figura	Figura formada con las bisectrices internas
Rectángulo	
Trapecio isósceles	
Paralelogramo	
Cuadrilátero inscrito	

Tabla 1

4. Abran el archivo cuadriláteros1.ggb, en pantalla verán una construcción que puede mostrar todos los cuadriláteros presentes en esta actividad. En cada caso las dimensiones del cuadrilátero pueden modificarse "arrastrando" los puntos señalados en la figura.

   Al modificar las dimensiones puede verse que unos cuadriláteros son casos particulares de otros; por ejemplo, un rectángulo puede transformarse en un cuadrado, lo cual significa que el cuadrado es un caso particular de rectángulo (ver primer renglón de la tabla). Modifica con GeoGebra los cuadriláteros que pueden desplegarse en pantalla y completa la siguiente tabla.

Figura	Casos particulares				
Rectángulo	Trapecio isósceles	~~Cuadrado~~	Cometa	Paralelogramo	Cuadrilátero inscrito
Trapecio isósceles	Rectángulo	Cuadrado	Cometa	Paralelogramo	Cuadrilátero inscrito
Cuadrado	Rectángulo	Trapecio isósceles	Cometa	Paralelogramo	Cuadrilátero inscrito
Cometa	Rectángulo	Cuadrado	Trapecio isósceles	Paralelogramo	Cuadrilátero inscrito
Paralelogramo	Rectángulo	Cuadrado	Cometa	Trapecio isósceles	Cuadrilátero inscrito
Cuadrilátero inscrito	Rectángulo	Cuadrado	Cometa	Paralelogramo	Trapecio isósceles

5. Basándose en la tabla anterior cada equipo escribirá tres proposiciones como las siguientes:

Todo cuadrado es un cometa

Algunos cometas son cuadrados

Escritas las tres proposiciones cada equipo determinará cuáles son ciertas y cuáles son falsas.

6. Abran el archivo cuadriláteros2.ggb en pantalla podrán ver los diferentes cuadriláteros trazados en las hojas para doblar. "Arrastra" los puntos señalados, y observa de nuevo las figuras formadas por las bisectrices. Confirma o corrige tus conclusiones en la siguiente tabla.

Figura	Figura formada con las bisectrices internas
Rectángulo	
Trapecio isósceles	
Paralelogramo	
Cuadrilátero inscrito	

7. Por cada renglón de la tabla, enuncien un teorema, por ejemplo:

Las bisectrices internas de un rectángulo forman …

8. ¿Algunos teoremas son casos particulares de otros?, explica cuáles y por qué

9. ¿Qué conclusiones puedes obtener de esta actividad sobre el carácter de las definiciones en geometría?

IV.4.3 La media aritmética de dos números

La presente actividad inicia con el planteamiento de una situación problemática, formulada a partir de una gráfica de barras proporcionada por el INEGI, en la cual están representados los datos arrojados por los censos de población realizados en nuestro país en los últimos cincuenta años. Para resolver la situación se requiere usar una interpretación geométrica de la media aritmética de dos números. Posteriormente se usan materiales manipulables para buscar la relación geométrica entre dos cantidades y su media aritmética. Finalmente se usa el software GeoGebra para estudiar las relaciones que se conservan invariantes en las figuras construidas con el material manipulable e intentar expresar algebraicamente la media aritmética de dos cantidades arbitrarias.

La actividad se desarrolla a lo largo de cuatro momentos:

i) En el primero se pretende se familiaricen con la información proporcionada por el INEGI sobre los censos realizados entre los años 1950 y 2010 y la analicen críticamente.

ii) En el segundo se discute una situación problemática y se intenta resolverla. Aunque la situación podría ser resuelta, éste no es el propósito principal en este momento, sino la identificación de los elementos matemáticos que permitirían resolverla.

iii) En el tercero, el propósito es identificar en los materiales manipulables la relación entre dos cantidades representadas geométricamente y la medida del segmento que representa la media aritmética de esas cantidades. Se trata además de obtener una explicación geométrica de esta relación.

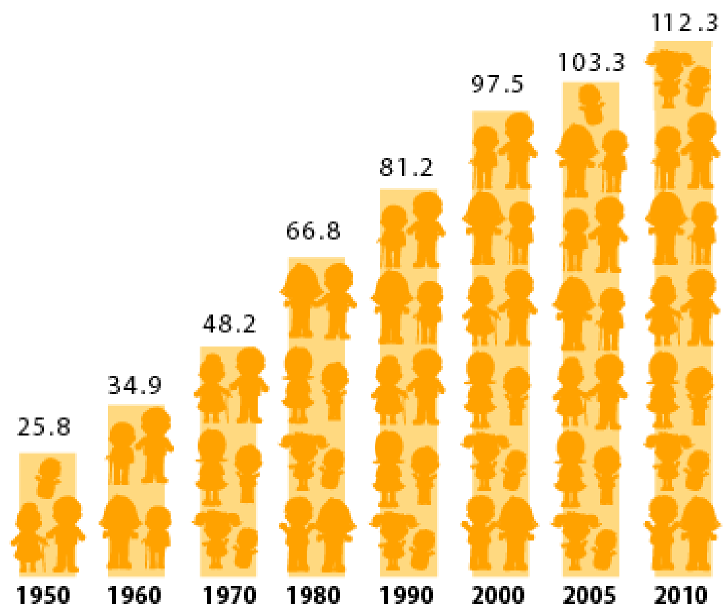
iv) En el cuarto, se recurre a una representación dinámica de la situación, con el propósito de generalizar las conclusiones extraídas de los casos concretos analizados con el material manipulable.

1. Crecimiento de la población en México entre 1950 y 2010

En una de las páginas web del INEGI (http://cuentame.inegi.org.mx/), bajo el título: ¿Cuánto aumentó la población?, aparece la información que se muestra en la Figura 1.

Durante los últimos 60 años, la población en México ha crecido cinco veces. En 1950 había 25.8 millones de personas, en 2010 hay 112.3 millones.

Población total 1950 – 2010



FUENTE: INEGI. Estadísticas Sociodemográficas. Población total según sexo 1950 a 2005.

INEGI. Censo de Población y Vivienda 2010.

De 2005 a 2010, la población se incrementó en 9 millones de habitantes, lo que representa un crecimiento por año de 1 por ciento.

Figura 1

Discute en tu equipo las dos preguntas siguientes y redacta de manera individual tus respuestas.

a) La primera información dada en la Figura 1, dice: "Durante los últimos 60 años, la población en México ha crecido cinco veces. En 1950 había 25.8 millones de personas, en 2010 hay 112.3 millones." ¿Qué tan precisa te parece esta información? Justifica tu respuesta.

b) En la Figura 1, también dice: “De 2005 a 2010, la población se incrementó en 9 millones de habitantes, lo que representa un crecimiento por año de 1 por ciento.” ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica tu respuesta.

2. Algunos datos que no están en la Figura 1

Supongamos ahora que nos interesa saber cuántos habitantes tenía nuestro país en 1995, éste es un dato que no se muestra en la Figura 1. Para obtener una estimación de esta cantidad podríamos recurrir a la Figura 2, en la que se presenta una versión ampliada de la gráfica de la Figura 1, en esta versión se ha supuesto que la población ha crecido linealmente entre los años 1990 y 2000.

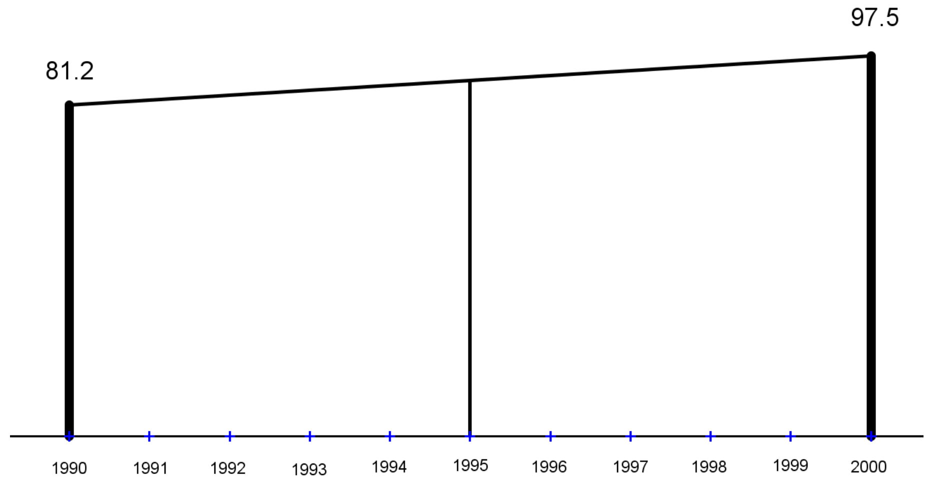


Figura 2

a) ¿Cómo está representada en la Figura 2 la cantidad que pretendemos estimar?

b) Usa la Figura 2 para calcular la cantidad que a tu juicio es una estimación de la población que tenía nuestro país en 1995.

c) Investiga la cantidad que arrojó el conteo de población realizado por el INEGI en 1995 y compáralo con la estimación obtenida. ¿A qué consideras que se debe la diferencia?

d) Si quieres estimar cuántos habitantes tenía México en 1997, ¿cómo representarías esta cantidad en la Figura 2? Explica tu respuesta.

e) ¿Puedes hacer una estimación de la cantidad de habitantes que tenía nuestro país en 1997? Justifica tu respuesta.

3. Recortando un trapecio

El instructor te entregará una cartulina como la mostrada en la Figura 3, en la que M es el punto medio de AB.

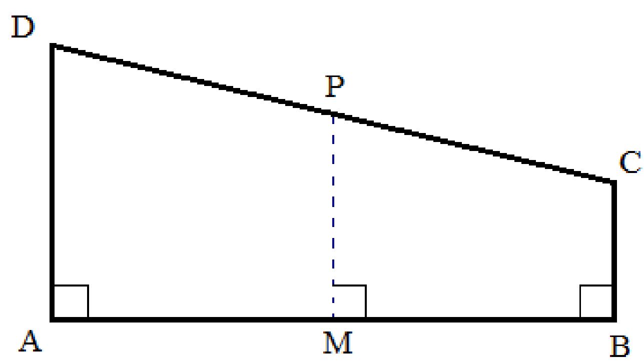


Figura 3

a) Mide los segmentos AD y BC y anota las medidas sobre la cartulina. Recorta la cartulina por la línea punteada y reacomoda las dos piezas para formar un rectángulo. Justifica por qué la figura obtenida es un rectángulo.

b) ¿Cuánto mide el segmento MP?

____

c) En equipo, comparen las medidas de MP obtenidas y acuerden una justificación de los resultados

____

____

____

4. Deformando el trapecio

Abra el archivo MP.fig, en pantalla verán un trapecio como el mostrado en la Figura 4, en la que el punto B puede "arrastrarse" hacia la derecha y hacia la izquierda, mientras que los puntos B y D pueden "arrastrarse hacia arriba y hacia abajo"

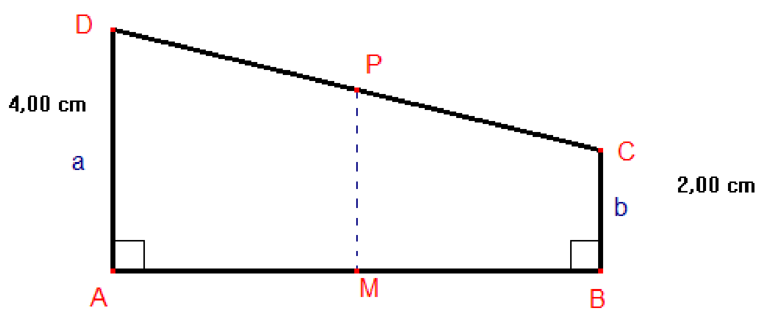


Figura 4

a) ¿Por qué la medida de MP no cambia cuando "arrastramos" B?

____

____

____

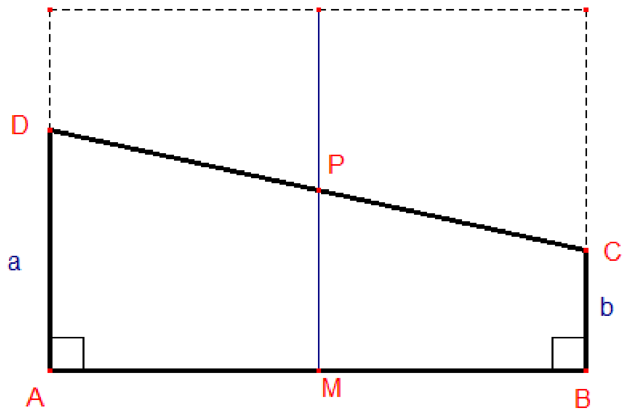
b) “Arrastren” los puntos B y D hasta que AD y BC midan lo que indica la tabla. Analicen cada caso y escriban los datos que faltan en la tabla.

	AD	BC	MP
Caso 1	6	2	
Caso 2	7	4	
Caso 3	2.5	4.5	
Caso 4			

c) ¿Qué relación existe entre las medidas AD y BC con la medida del segmento MP?

d) Propongan un procedimiento aplicable a figuras como las que se han visto y que permita calcular la medida de MP, si se conocen las medidas de AD y BC

e) Usa la figura siguiente para expresar la medida de MP en términos de a y b



Respuesta:

f) Argumenta por qué, al multiplicar por 2 la expresión encontrada para MP, se obtiene a+b

Respuesta:

g) Dados dos números *a* y *b*, investiga el nombre que recibe el número $\frac{a+b}{2}$ y describe dos de sus posibles aplicaciones (distintas a la discutida en la presente actividad)

h) Si *a* y *b* son números distintos y *a* es más grande que *b*, ordena los números *a*, *b*, y $\frac{a+b}{2}$ del mayor al menor. Para responder puedes apoyarte en la Figura 5.

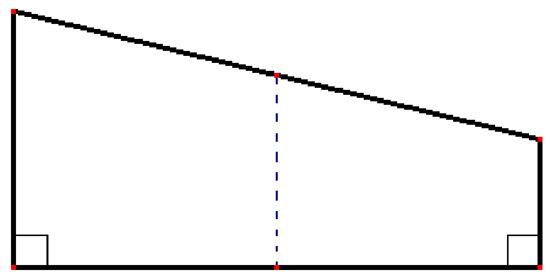


Figura 5

IV.4.4 IMC

La presente actividad inicia proporcionando algunos datos sobre el agravamiento que ha tenido el problema de la obesidad, dentro y fuera de nuestro país en los últimos años. Luego se analiza la expresión algebraica utilizada para calcular el Índice de Masa Corporal (IMC) de un individuo. Posteriormente se estudia la relación funcional determinada por cada valor fijo del IMC y con la ayuda de GeoGebra, la interpretación gráfica de ésta se utiliza para clasificar el IMC de una persona dependiendo de su peso y su estatura. Finalmente se estudian los efectos sobre la gráfica de la función $y = ax^2$ que produce la variación del parámetro *a*, tomando como punto de partida los casos particulares de esta función que surgen de manera natural al estudiar el IMC.

La actividad se desarrolla a lo largo de cuatro momentos:

i) En el primero se aportan datos con el propósito de dimensionar la gravedad del problema representado por la obesidad en nuestros tiempos. Se pretende que los participantes valoren la importancia que ha tenido el indicador denominado IMC para el estudio y prevención de la obesidad. Se pretende además que se familiaricen con la expresión funcional que define a este indicador.

ii) En el segundo se pretende analizar la expresión algebraica del IMC desde el punto de vista variacional y resaltar las diferencias que resultan al cambiar el punto de vista con el que se analiza esta expresión; específicamente las diferencias que surgen cuando en lugar de ver el IMC como una fórmula de cálculo, se piensa como una relación funcional.

iii) En el tercero las actividades están centradas en las representaciones gráficas que se generan al tomar valores particulares del IMC. Se pretende que estas representaciones gráficas sean utilizadas para registrar e interpretar la evolución del IMC de un paciente.

iv) En el cuarto se estudian las relaciones funcionales usadas a lo largo de la actividad, pero ahora como objetos matemáticos. El propósito específico aquí es la identificación de los efectos gráficos producidos por la variación del parámetro a sobre la gráfica de la función.

El Índice de Masa Corporal

En septiembre de 2010 la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) publicó el estudio titulado "La Obesidad y la Economía de la Prevención". Algunas cifras reportadas en este estudio revelan que la obesidad se ha convertido en un grave problema, tanto de salud como económico, para los países miembros de la OCDE, entre los cuales se cuenta el nuestro.

Para darnos una idea de cómo ha evolucionado este problema, la OCDE señala que hasta 1980 la obesidad todavía no representaba un problema serio, porque de cada 10 personas en el mundo, menos de una era obesa; pero de entonces a la fecha las tasas se han duplicado o triplicado en muchos países y en casi la mitad de los países de la OCDE una de cada dos personas es ahora considerada con sobrepeso u obesa. Si las tendencias recientes continúan, las proyecciones sugieren que de cada tres personas, más de dos tendrán sobrepeso u obesidad en algunos países de la OCDE en los próximos 10 años.

Los problemas de salud derivados de la obesidad están a la vista, baste decir que las personas severamente obesas mueren entre 8 y 10 años antes que las de peso normal y que por cada 15 kilogramos de peso extras el riesgo de muerte temprana aumenta aproximadamente el 30%.

La mejor manera de atacar este problema según la OCDE, es poner en práctica estrategias de prevención integral, que según estima, en nuestro país tendrían un costo de 12 USD per cápita. Este costo pudiera parecer muy alto pero a cambio, México podría evitar 55 000 muertes al año provocadas por enfermedades crónicas derivadas de la obesidad.

A medida que el problema de la obesidad se ha venido agravando, se han buscado indicadores que permitan detectar en qué momento una persona ya no tiene un peso normal. Uno de los indicadores más utilizados es el que se conoce como Índice de Masa Corporal (IMC), cuyo cálculo se basa en una comparación entre el peso (P) de un individuo, medido en kilogramos y el cuadrado de su estatura (E), medida en metros. Este cálculo se resume en la expresión:

$$IMC = \frac{P}{E^2}$$

Dependiendo de cómo resulte nuestro IMC será nuestra clasificación como personas con bajo peso, normales, con sobrepeso u obesas. El criterio para hacer esa clasificación se prescribe en la Tabla 4.1:

IMC (índice de masa corporal)	La persona se clasifica como:
<18.5	Peso insuficiente
18.5 - 24.9	Normal
25-29.9	Con sobrepeso
>30	Obesa

Tabla 4.1

Con base en la expresión que define el IMC y observando la Tabla 4.1, responde en equipo las preguntas siguientes:

a) ¿Cuál es el IMC y cómo se clasifica a una persona que pesa 65 Kg y mide 1.70 m?

b) Si una persona tiene un IMC de 28 y mide 1.70 ¿Cuánto pesa?

c) Si una persona pesa 86 Kg y su IMC es de 25 ¿Cuánto mide?

d) ¿Cuál sería una descripción de la complexión de una persona cuyo IMC es 17?

e) ¿Cuál sería una descripción de la complexión de una persona cuyo IMC es 27?

El *IMC* de un individuo puede calcularse si se conoce su peso y su estatura, en este caso la expresión $IMC = \frac{p}{E^2}$ se está usando como una herramienta de cálculo. Pero si estuviéramos interesados en estudiar el *IMC* como una relación entre las variables *P* y *E*, entonces podemos tener una perspectiva completamente distinta de esta relación y sus aplicaciones podrían resultar más interesantes y complejas. Responde individualmente las preguntas siguientes y luego compara tus respuestas con los integrantes de tu equipo:

a) Completa la siguiente tabla para una persona cuyo IMC es de 18

Peso	Estatura	IMC
		18
		18
		18
		18
		18

b) Escribe algebraicamente el peso de una persona en función de su estatura, si se sabe que su IMC es 18.

c) Grafica en un plano cartesiano la relación encontrada antes, del peso contra la estatura.

Para ayudarle a un médico a registrar el IMC de sus pacientes, construiremos un dispositivo que le permita, a partir del peso y estatura del paciente, ubicarlo directamente en alguna de las categorías contempladas en la Tabla 4.1.

a) Abre el archivo de GeoGebra llamado índice.ggb. En pantalla verás una figura como la siguiente:

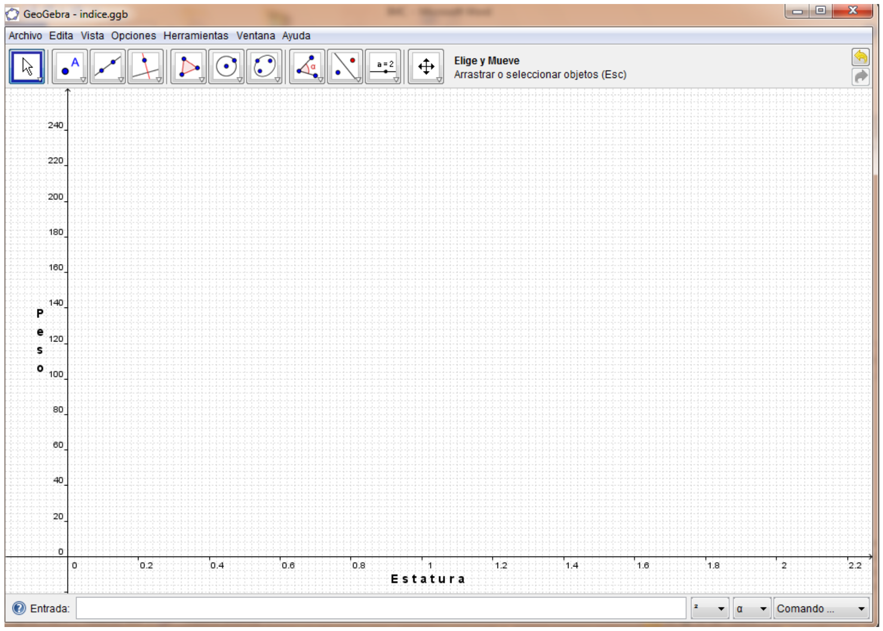


Figura 4.1

b) Grafica en este archivo la relación $y = 18.5x^2$, que corresponde a la relación $P = 18.5E^2$ que no puede graficarse en GeoGebra directamente porque este software no reconoce las variables P y E como variables válidas. Para graficar la relación $y = 18.5x^2$, escríbela en la ventana denominada "Entrada" que se muestra en la parte inferior del archivo y luego presiona la tecla "Enter".

c) Si el punto A de la gráfica, cuyas coordenadas son la estatura y el peso de una persona, representa su índice de masa corporal, "arrástrelo" arriba y debajo de la curva y luego conteste las preguntas siguientes:

- ¿Qué significa que el punto A pertenezca a la curva?

- ¿Qué significa que el punto A esté por debajo de la curva?

- ¿Qué significa que el punto A esté por arriba de la curva?

d) En el mismo archivo índice.ggb, grafica ahora las relaciones $y=25x^2$ y $y=30x^2$. Responde las preguntas siguientes, si lo consideras necesario "arrastra" el punto A para orientarte.

- ¿Qué significa que el punto A esté entre las gráficas de $y=18.5x^2$ y de $y=25x^2$?

- ¿Qué significa que el punto A esté entre las gráficas de $y=25x^2$ y de $y=30x^2$?

- ¿Qué significa que el punto A esté por encima de la curva $y=30x^2$?

e) Un médico registra en la gráfica de la Figura 4.2, el Índice de Masa Corporal de un adolescente, en cuatro consultas consecutivas. En esta gráfica A_1 corresponde a la primera consulta y A_4 a la última.

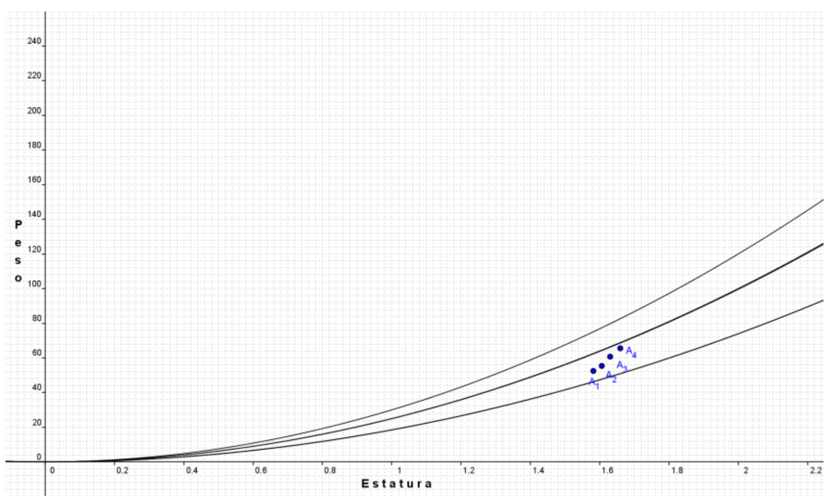


Figura 4.2

f) ¿Qué tipo de recomendaciones consideras que debe hacer el médico a partir de la gráfica?

En virtud de que las relaciones graficadas hasta ahora son funcionales, en el resto de la actividad las llamaremos funciones. En la Figura 4.2, se muestran las gráficas de las funciones $y=18.5x^2$, $y=25x^2$ y $y=30x^2$, la única diferencia entre estas tres funciones es el coeficiente de la x^2, llamaremos a este coeficiente el *parámetro de la función.*

a) Al comparar dos de las funciones, por ejemplo $y=18.5x^2$ con $y=30x^2$, podemos tomar la función $y=18.5x^2$ como referencia para explicar el cambio que ha sufrido su gráfica cuando el parámetro 18.5 se hace crecer hasta 30. Observa la Figura 4.2 para explicar este cambio.

b) Si tenemos la función $y=\frac{1}{2}x^2$, podemos generar otra función haciendo crecer el parámetro desde $\frac{1}{2}$ hasta 5. Grafica en GeoGebra ambas funciones y explica el cambio que ha sufrido la gráfica de $y=\frac{1}{2}x^2$ al cambiar su parámetro.

c) Utiliza ahora la herramienta "deslizador"[4] para representar el parámetro *a* y graficar la función $y = ax^2$, configura el "deslizador" para que la *a* tome solamente valores positivos. "Arrastra" el punto del "deslizador" para hacer variar el parámetro *a* y luego contesta la pregunta: ¿qué efecto geométrico se observa en la gráfica de $y = ax^2$ cuando a crece o decrece?

[4] Para construir un "deslizador" en pantalla, activa la herramienta "deslizador" y luego fija el puntero del mouse en el lugar del plano cartesiano donde quieras colocar el deslizador, y luego haz un "clic" con el botón derecho del mouse. Automáticamente GeoGebra fijará el deslizador, asignara la letra *a* como número a "deslizar", luego abrirá un cuadro de diálogo donde podrás especificar el rango de variación de *a*. Este rango, podría ser seleccionado, por ejemplo, entre 0 y 20. Luego captura la expresión $y=ax^2$ en el cuadro denominado "Entrada" y que puede verse en la parte inferior de la pantalla, capturada la expresión oprime la tecla "Enter" y GeoGebra graficará la función solicitada.

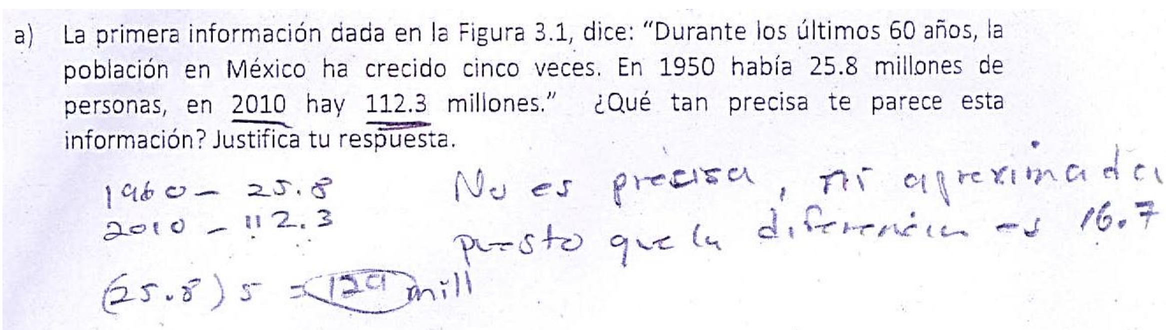
CAPÍTULO V

Puesta en escena de actividades.

V.1 Actividad sobre la media aritmética de dos números

La presente actividad se implementó en un grupo de 40 profesores de secundaria, a continuación se muestra un análisis de los resultados obtenidos en la puesta en escena de la actividad. Las cuatro integrantes que conforman el equipo observado, entregaron copia de las hojas de trabajo resueltas.

a) La primera información dada en la Figura 1, dice: "Durante los últimos 60 años, la población en México ha crecido cinco veces. En 1950 había 25.8 millones de personas, en 2010 hay 112.3 millones." ¿Qué tan precisa te parece esta información? Justifica tu respuesta.


a) La primera información dada en la Figura 3.1, dice: "Durante los últimos 60 años, la población en México ha crecido cinco veces. En 1950 había 25.8 millones de personas, en 2010 hay 112.3 millones." ¿Qué tan precisa te parece esta información? Justifica tu respuesta.

1960 – 25.8
2010 – 112.3
(25.8) 5 = 129 mill

No es precisa, ni aproximada puesto que la diferencia es 16.7

Para responder este inciso, se calculó la cantidad de habitantes que debería de haber si efectivamente la población hubiera crecido cinco veces en el período señalado, para compararla con la diferencia entre el número de habitantes que había en el año 2010 y los que había en 1950.

Aunque, como puede verse en la respuesta de la Figura, los cálculos aritméticos se hicieron correctamente, es notoria la dificultad para identificar los datos relevantes en la pregunta; así lo muestra la discusión que se dio en el equipo sobre la posibilidad de incluir en los cálculos la duración del período al que se refiere el crecimiento. Esta dificultad pareciera estar relacionada con la idea de que todos los datos que aparecen en el enunciado de un problema deben ser utilizados para resolverlo. Llama la atención que la propuesta de incluir el número 60 en los cálculos fuera descartada, principalmente porque no se encontró una manera de hacerlo.

Inicialmente la diferencia entre 129 millones y 112.3 millones no pareciera significativa para el equipo, que considera los 129 millones como un dato impreciso pero que resulta una buena aproximación. Es evidente que la discusión acerca de si el dato es una buena o mala aproximación carece por completo de referencias.

Aunque en la actividad no aparecía de manera explícita, el profesor encargado de conducir la actividad orientó la discusión grupal a refinar la información dada por el INEGI. Se llegó a la conclusión de que hubiera sido más preciso que el INEGI escribiera "la población en México ha crecido un poco más de cuatro veces.", porque el cuádruple de 25.8 está más cercano a 112.3 que el quíntuple, a pesar de ello, los miembros del equipo registraron esta conclusión con anotaciones como "tuvo un crecimiento por encima casi cuatro veces" o bien "tuvo un crecimiento por encima de cuatro veces", que son traducciones imprecisas del acuerdo grupal. Dejando en evidencia la dificultad que tienen para expresar sus ideas por escrito.

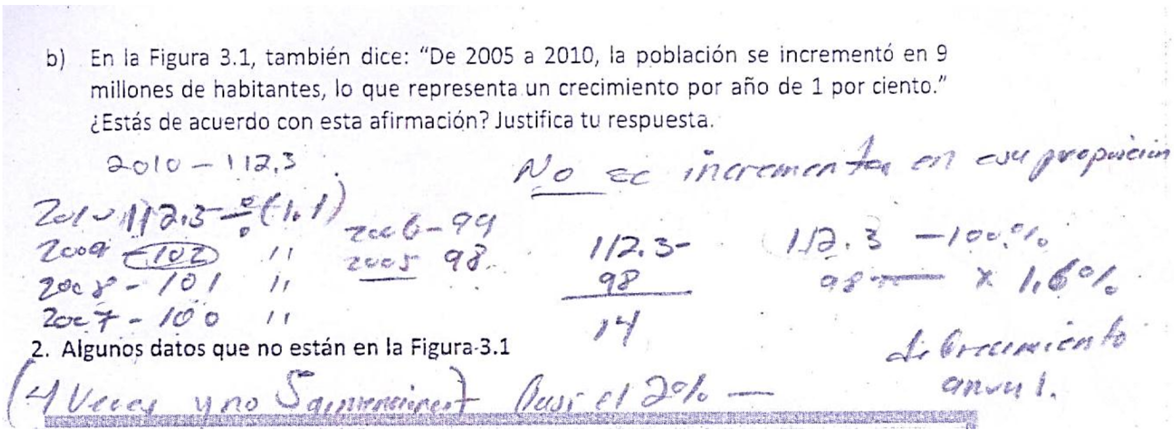
b) En la Figura 1, también dice: "De 2005 a 2010, la población se incrementó en 9 millones de habitantes, lo que representa un crecimiento por año de 1 por ciento." ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica tu respuesta.

Esta pregunta, causó mayor dificultad para entenderse que la anterior, las primeras ideas que surgieron fueron: ¿Qué significa un incremento del 1% anual? Para poder dar elementos de justificación se trabaja por parejas, una de ellas procedió de la siguiente manera: fue incrementando año por año el 1% para ver si se correspondía con la afirmación proporcionada por INEGI, sin embargo el primer error se presenta al escribir el 1% de manera decimal; se escribe como .1 que correspondería al 10%, como se observa en el fragmento de la hoja de trabajo, otro error se presenta en los cálculos de la población de los años 2008 al 2005 en donde a pesar de que se calcula el 10% no se hace de manera correcta.

La estrategia que se sigue es errónea, pero además inconsistente. A partir del 2009 lo que se hace es ir disminuyendo un millón. De haber dividido entre 1.01 sucesivamente hubiera llegado a que había 106.85 millones, lo cual es bastante impreciso, sin embargo la estrategia nunca se concreta. Es posible que el profesor haya tenido contacto con este tipo de procedimiento pero no lo recuerda con precisión.

Es muy difícil seguir el razonamiento del profesor, porque se ha perdido en los cálculos. Posiblemente haya multiplicado 98 x 1.06= 103.88, pensando en 2000 había 97.5 millones y esta tasa de crecimiento lo lleve al 2005.

Por último, la conclusión a la que se llega es que el incremento anual es del 1.6%, sin embargo en todos los cálculos que aparecen no se percibe de donde se obtuvo tal conclusión. La regla de tres que se propone está mal planteada.



b) En la Figura 3.1, también dice: "De 2005 a 2010, la población se incrementó en 9 millones de habitantes, lo que representa un crecimiento por año de 1 por ciento."
¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica tu respuesta.

2010 – 112.3
2009 – 102
2008 – 101
2007 – 100
2006 – 99
2005 – 98

No es incremento en esa proporción

112.3 – 98 = 14

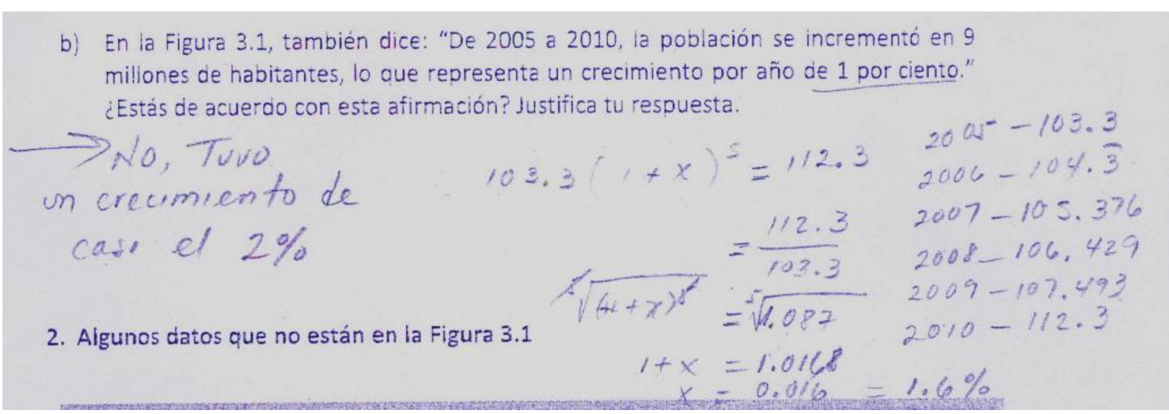
112.3 — 100%
98 — x 1.6%

de crecimiento anual.

2. Algunos datos que no están en la Figura 3.1

Por otra parte, la otra pareja procede de manera algebraica al considerar el método aritmético insuficiente para dar solución al cuestionamiento.

Para este equipo la pregunta no resultó una situación problemática, cuentan con un esquema para resolverlo y lo aplican sin dificultad.



b) En la Figura 3.1, también dice: "De 2005 a 2010, la población se incrementó en 9 millones de habitantes, lo que representa un crecimiento por año de 1 por ciento."
¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica tu respuesta.

No, tuvo un crecimiento de casi el 2%

$103.3(1+x)^5 = 112.3$

$= \frac{112.3}{103.3}$

$\sqrt[5]{(1+x)^5} = \sqrt[5]{1.087}$

$1+x = 1.0168$

$x = 0.016 = 1.6\%$

2005 – 103.3
2006 – 104.3
2007 – 105.376
2008 – 106.429
2009 – 107.493
2010 – 112.3

2. Algunos datos que no están en la Figura 3.1

A pesar de que se estaba trabajando en equipo se puede percibir lo diferente que son estas dos respuestas, lo cual refleja el poco intercambio que hubo entre la pareja que respondió bien y la pareja que respondió mal.

Pregunta 2:

Supongamos ahora que nos interesa saber cuántos habitantes tenía nuestro país en 1995, éste es un dato que no se muestra en la Figura 1. Para obtener una estimación de esta cantidad podríamos recurrir a la Figura 2, en la que se presenta una versión ampliada de la gráfica de la Figura 1, en esta versión se ha supuesto que la población ha crecido linealmente entre los años 1990 y 2000.

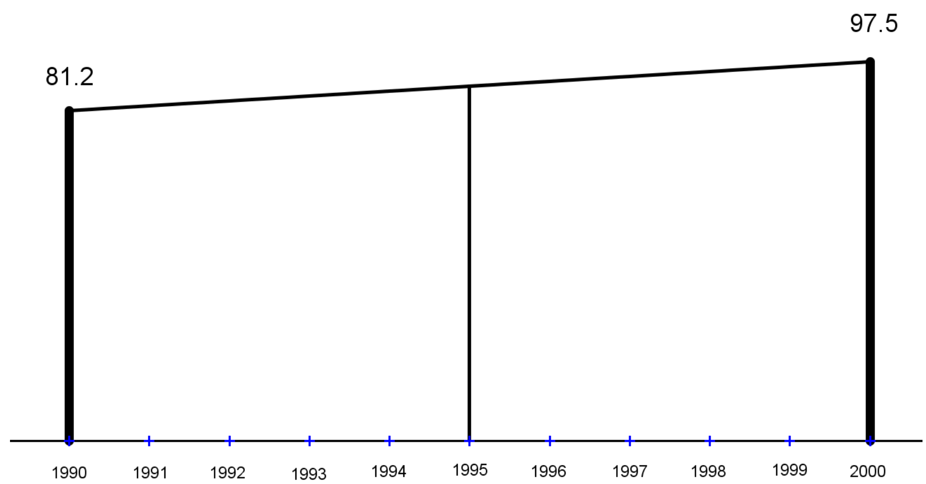


Figura 2

a) ¿Cómo está representada en la Figura 2 la cantidad que pretendemos estimar?

Las respuestas del equipo reflejan lo inusual que les resultó la pregunta, las respuestas iniciales son: "como una media" o como "la mediana" porque queda exactamente en medio de todos los datos. Aunque en esta pregunta no era necesario hacer el cálculo, los profesores lo realizan procediendo de la siguiente manera: calculan la diferencia entre el año 2000 y el 1990 y la dividen entre diez, para determinar lo que denominan "el porcentaje de crecimiento anual o factor de crecimiento".

El hecho de que se haya incluido el cálculo en esta pregunta denota que no se lee con detenimiento el cuestionamiento ni lo que se está pidiendo, errores como éste se cometen en repetidas ocasiones a lo largo de la actividad. No alcanzan a interpretar el sentido del cuestionamiento, pero el conductor tampoco promueve la discusión en los equipos sobre la claridad de lo que se está pidiendo.

En un primer momento no se realiza ningún procedimiento geométrico y no se utiliza la figura para ofrecer algún argumento, es hasta que el profesor lo menciona que se concluye que: "La cantidad buscada es el promedio de las alturas, si se quiere ver geométricamente". Lo cual deja en evidencia la poca familiaridad que tienen los maestros para trabajar en el ambiente geométrico y para argumentar en este sentido. Los profesores ven el segmento sin medida como una incógnita y se dedican a indagar su valor. El fenómeno es similar al que se presenta cuando a un estudiante se le cuestiona ¿de qué grado es la ecuación $x^3 + 3x + 2 = 0$? y el estudiante intenta resolverla.

b) Usa la Figura 2 para calcular la cantidad que a tu juicio es una estimación de la población que tenía nuestro país en 1995.

Los profesores dejaron en blanco esta pregunta porque les pareció que la respuesta que encontraron en la pregunta anterior, responde también ésta.

c) Investiga la cantidad que arrojó el conteo de población realizado por el INEGI en 1995 y compáralo con la estimación obtenida. ¿A qué consideras que se debe la diferencia?

En internet se encuentra la cantidad del conteo de 1995 y se compara con la cantidad encontrada, la respuesta inicial es que efectivamente hay una diferencia entre la cantidad que maneja el INEGI y la estimación que se obtuvo en el equipo pero, esta diferencia no parece ser muy grande, ya que sólo son dos millones. Lo cual deja ver de nuevo la dificultad que se tiene para establecer referencias entre cantidades, cuando se hacen comparaciones.

Después de la discusión grupal se toma conciencia de la diferencia existente y se argumenta que esto se debe a que la curva no es precisamente lineal como se supone sin embargo, los argumentos que se ofrecen no son claros, se cree que se trata de una curva discontinua pero no se profundiza en la explicación.

d) Si quieres estimar cuántos habitantes tenía México en 1997, ¿cómo representarías esta cantidad en la Figura 2? Explica tu respuesta.

Esta pregunta se abordó de dos maneras diferentes, la primera como se observa en el fragmento de la hoja de trabajo, se contestó de forma geométrica. Se obvia la diferencia entre un segmento y su medida, porque pareciera que ambas cosas son lo mismo.

d) Si quieres estimar cuántos habitantes tenía México en 1997, ¿cómo representarías esta cantidad en la Figura 3.2? Explica tu respuesta.

Trazando un segmento perpendicular al punto donde está localizado el año 1997.

Otras de las respuestas del equipo es la siguiente, en donde nuevamente incluyen el cálculo sin este ser necesario para responder la pregunta. El cálculo que se hace para encontrar la cantidad de habitantes consiste en obtener la diferencia de habitantes entre el año 2000 y 1995 y dividir esa cantidad entre 5, lo cual les representa el incremento de habitantes anual, por último se agrega a la cantidad de habitantes de 1995 dos veces el crecimiento anual lo cual corresponde a los años que hay entre 1995 y 1997.

d) Si quieres estimar cuántos habitantes tenía México en 1997, ¿cómo representarías esta cantidad en la Figura 3.2? Explica tu respuesta. Con una línea vertical sobre el año 1997

2000 - 97.50
1995 - 89.35
8.15 ÷ 5 = 1.63 x 2 = 3.26

89.35
3.26
92.61 hab.

e) ¿Puedes hacer una estimación de la cantidad de habitantes que tenía nuestro país en 1997? Justifica tu respuesta.

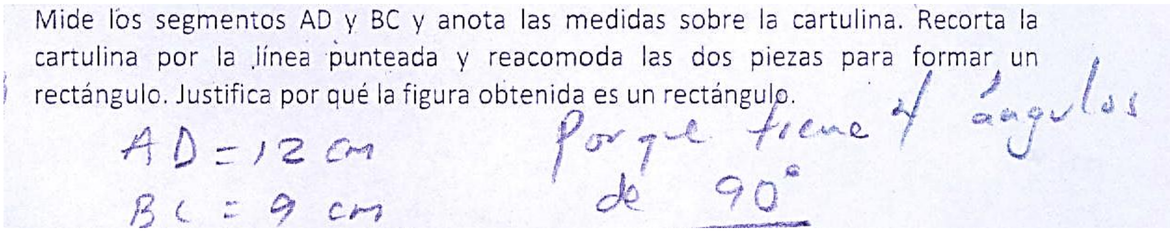
Los profesores dejaron en blanco esta pregunta porque les pareció que la respuesta que encontraron en la pregunta anterior, responde también ésta.

Pregunta 3:

a) Mide los segmentos AD y BC y anota las medidas sobre la cartulina. Recorta la cartulina por la línea punteada y reacomoda las dos piezas para formar un rectángulo. Justifica por qué la figura obtenida es un rectángulo.

Para formar el rectángulo ninguna de las integrantes tuvo problemas sin embargo llama la atención que al realizarse la medición se esperaba que los segmentos AD y BC midieran lo mismo en los diferentes trapecios que les fueron entregados y al no presentarse esa situación se creyera que se debía a un error de la actividad, lo cual deja ver la poca familiaridad que se tiene para trabajar una misma actividad con datos diferentes.

Algunas de las justificaciones que se ofrecen de porqué la figura formada con los trapecios es un rectángulo, son las siguientes:

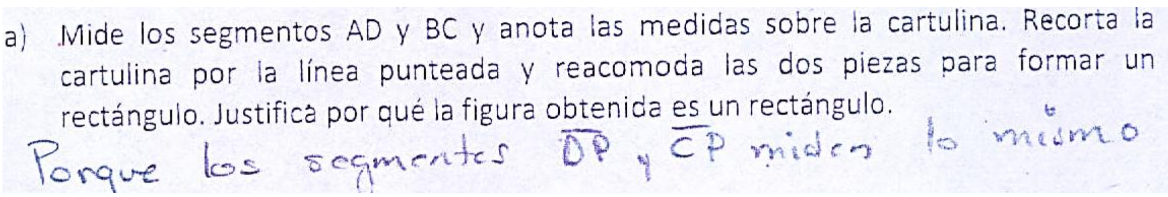


Mide los segmentos AD y BC y anota las medidas sobre la cartulina. Recorta la cartulina por la línea punteada y reacomoda las dos piezas para formar un rectángulo. Justifica por qué la figura obtenida es un rectángulo.

AD = 12 cm
BC = 9 cm

Porque tiene 4 ángulos de 90°

La afirmación toma por cierto que se trata de un cuadrilátero. No se percibe la posibilidad de que se trate de un hexágono porque la figura no lo revela. Pasar por alto esta posibilidad pudiera tener explicaciones más profundas.



a) Mide los segmentos AD y BC y anota las medidas sobre la cartulina. Recorta la cartulina por la línea punteada y reacomoda las dos piezas para formar un rectángulo. Justifica por qué la figura obtenida es un rectángulo.

Porque los segmentos $\overline{DP}$ y $\overline{CP}$ miden lo mismo

La respuesta revela que es suficiente que DP y CP coincidan al ensamblar los trapecios para afirmar que la figura que se forma es un rectángulo. Es innecesario por tanto aludir a la definición.

Los argumentos proporcionados reflejan la poca familiaridad que se tiene en la naturaleza de los objetos geométricos y sus definiciones. Se discute acerca de la colinealidad hasta que de manera grupal se trae a discusión pero de manera inicial no se ve la necesidad de discutir al respecto. La mayoría de los argumentos se basan en lo que aparentemente se ve, es decir, si la figura se ve que es un rectángulo no hay necesidad de ofrecer otro tipo de argumentación ya que resulta obvio.

Pregunta 4:

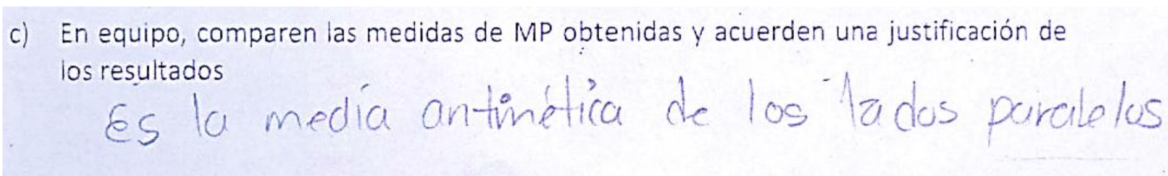
d) ¿Cuánto mide el segmento MP?____

Para responder a este inciso, no se calcula la media aritmética, sólo se mide con regla para encontrar la medida del segmento, lo cual no era la intención del inciso por lo tanto, se tendrán que hacer las adecuaciones pertinentes.

La respuesta revela un exceso de confianza en las propiedades de las figuras que se están manipulando. El procedimiento para calcular la media es innecesario

c) En equipo, comparen las medidas de MP obtenidas y acuerden una justificación de los resultados.

Al comparar las medidas, se encuentra la relación existente entre los lados paralelos del trapecio y la medida de MP, sin embargo, al momento de acordar una justificación de esa relación, las integrantes se restringen a describirla y no se ofrecen elementos que la justifiquen, muestra de ello son las respuestas que escriben en las hojas de trabajo:

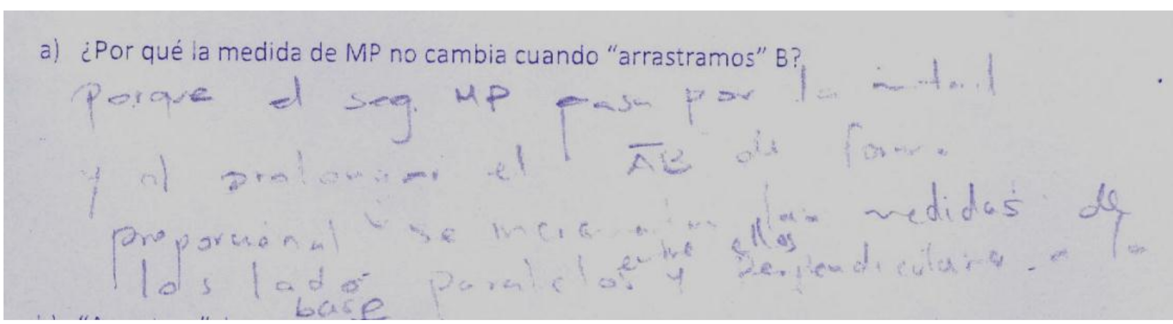

c) En equipo, comparen las medidas de MP obtenidas y acuerden una justificación de los resultados

Es la media aritmética de los lados paralelos

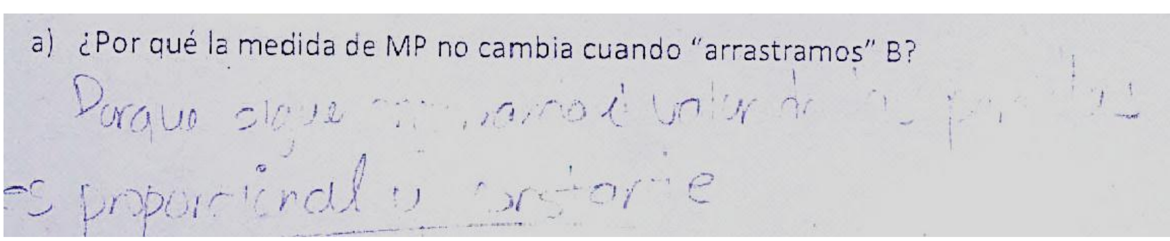
El uso del rectángulo "armado" en incisos anterior no ha funcionado como fuente de justificación.

Pregunta 5:

a) ¿Por qué la medida de MP no cambia cuando "arrastramos" B?


a) ¿Por qué la medida de MP no cambia cuando "arrastramos" B?

Porque el seg. MP [illegible] por la [illegible] y al [illegible] el $\overline{AB}$ de forma proporcional se [illegible] las medidas de los lados paralelos entre ellos y perpendiculares a la base


a) ¿Por qué la medida de MP no cambia cuando "arrastramos" B?

Porque sigue [illegible] el valor [illegible] es proporcional y [illegible]

Esta es la primera pregunta que involucra actividad con GeoGebra, las integrantes del equipo "arrastran" B sin problemas pero, las justificaciones proporcionadas carecen de argumentos y sólo se ofrecen descripciones de lo observado.

El nivel que alcanza la justificación es bastante pobre. La tecnología permite identificar los patrones, pero no estimula el razonamiento geométrico.

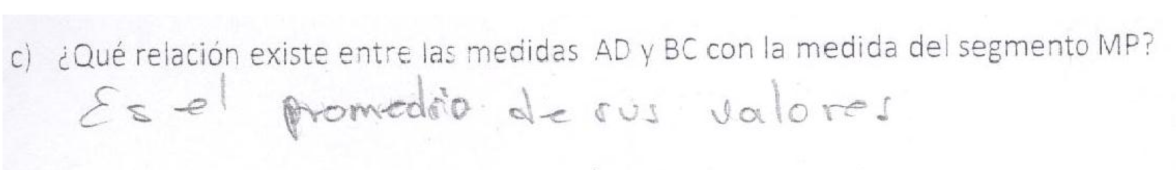
b) "Arrastren" los puntos B y D hasta que AD y BC midan lo que indica la tabla. Analicen cada caso y escriban los datos que faltan en la tabla.

	AD	BC	MP
Caso 1	6	2	
Caso 2	7	4	
Caso 3	2.5	4.5	
Caso 4			

Aunque se ha observado el patrón, usan GeoGebra para llenar la tabla, sin embargo en las instrucciones no ha quedado claro que con el caso 4 se trataba de proponer segmentos y también calcular el promedio de sus medidas.

c) ¿Qué relación existe entre las medidas AD y BC con la medida del segmento MP?

Se encuentra la relación existente, sin embargo al momento de expresar esa relación de manera verbal se muestran dificultades para hacerlo, reflejo de ello es la siguiente respuesta dada por una integrante:


c) ¿Qué relación existe entre las medidas AD y BC con la medida del segmento MP?
Es el promedio de sus valores

La cual es bastante imprecisa ya que no si quiera se menciona a qué valores se refiere.

d) Propongan un procedimiento aplicable a figuras como las que se han visto y que permita calcular la medida de MP, si se conocen las medidas de AD y BC.

d) Propongan un procedimiento aplicable a figuras como las que se han visto y que permita calcular la medida de MP, si se conocen las medidas de AD y BC

(AD+BC)/2

d) Propongan un procedimiento aplicable a figuras como las que se han visto y que permita calcular la medida de MP, si se conocen las medidas de AD y BC

Sumarlos y dividirlos entre 2
Sacar la media

V.2 Actividad sobre el Índice de masa corporal

La presente actividad se aplicó en un grupo de 35 profesores de secundaria, a continuación se muestra un análisis de los resultados obtenidos en la puesta en escena de esta actividad. Los dos profesores que integraban el equipo observado, entregaron copia de las hojas de trabajo resueltas.

Una vez que el equipo leyó y comentó el contexto de la actividad, pasaron a responder las primeros tres preguntas del apartado 1, que tenían como propósito explorar la expresión algebraica que define el índice de masa corporal:

a) ¿Cuál es el IMC y cómo se clasifica a una persona que pesa 65 Kg y mide 1.70 m? b) Si una persona tiene un IMC de 28 y mide 1.70 ¿Cuánto pesa?

c) Si una persona pesa 86 Kg y su IMC es de 25 ¿Cuánto mide?

El equipo no tuvo mayores problemas para responder estas tres preguntas, los cálculos aritméticos se hacen con el apoyo de la calculadora y no se presentan problemas al despejar de ninguno de los miembros del equipo, sin embargo las preguntas se responden de manera individual y no ameritan la discusión en el equipo, a continuación se muestra las respuestas de uno de los integrantes.

a) ¿Cuál es el IMC y cómo se clasifica a una persona que pesa 65 Kg y mide 1.70 m?

Normal $IMC = \frac{65}{(1.7)^2} = \frac{65}{2.89} = 22.491.$

b) Si una persona tiene un IMC de 28 y mide 1.70 ¿Cuánto pesa? 80.92 Kg

$28 = \frac{P}{2.89}$ $P = (28)(2.89)$

c) Si una persona pesa 86 Kg y su IMC es de 25 ¿Cuánto mide?

1.85 m $25 = \frac{86}{E^2}$ $E^2 = \frac{86}{25}$ $E = \sqrt{3.44}$

En cambio las últimas dos preguntas del apartado 1 no se respondieron con la misma facilidad, ambas se refieren a las significaciones concretas que pueden tener los valores del índice de masa corporal:

d) ¿Cuál sería una descripción de la complexión de una persona cuyo IMC es 17?

e) ¿Cuál sería una descripción de la complexión de una persona cuyo IMC es 27?

Las primeras respuestas de los profesores dejan ver su percepción de que las personas con un IMC menor de 18 deberán ser muy delgadas y bajas de estatura, se descartan los casos de personas con estatura muy alta ya que ellas no podrían tener un IMC tan bajo. Aunque estas respuestas son preliminares y no quedaron registradas por escrito en la hoja de respuestas, es evidente que el IMC no se piensa como una relación entre dos cantidades que pueden variar, más bien se tiene la idea de que valores pequeños del IMC provienen de valores pequeños del peso y la estatura. Después de algunas intervenciones del conductor y algunos compañeros del grupo, se proponen casos particulares de pesos y estaturas que cumplen con un IMC de 17 y que habían sido descartados por el equipo inicialmente. Aunque la discusión en el equipo resultó enriquecedora, las respuestas finales registradas son bastantes escuetas:

d) ¿Cuál sería una descripción de la complexión de una persona cuyo IMC es 17?

Muy delgada

e) ¿Cuál sería una descripción de la complexión de una persona cuyo IMC es 27?

Robusta

En la Pregunta 2 los profesores tenían que Interpretar el IMC como una relación entre variables, graficar esta relación en un plano cartesiano y darle significado a la variación de las cantidades de las que depende este índice. Se reportan aquí las respuestas que ofrecieron.

En la primera tarea, la consigna dice:

d) Completa la siguiente tabla para una persona cuyo IMC es de 18

Peso	Estatura	IMC
		18
		18
		18
		18
		18

La tabla fue llenada por ambos profesores sin grandes dificultades, operando adecuadamente la relación entre las variables. Los diálogos revelan su preocupación por el significado de los valores que están asignando al peso y la estatura porque a juicio de ambos deben de corresponderse con pesos y estaturas reales y se plantean casos concretos de personas cuyo índice de masa corporal es mayor que 18 y de los kilos que tendría que bajar para que su IMC alcance ese valor. Uno de los integrantes inicia colocando la estatura para calcular el peso y el otro coloca el peso para calcular la estatura, aunque esta diferencia en el orden del llenado de la tabla no provocó ninguna discusión entre los participantes, deja en evidencia una eficiencia de cálculo distinta, porque un caso exige el cálculo de raíces cuadradas y el otro no. Después de descartar algunos valores por considerarlos fuera de la realidad, la tarea fue concluida en los términos que muestra la siguiente figura:

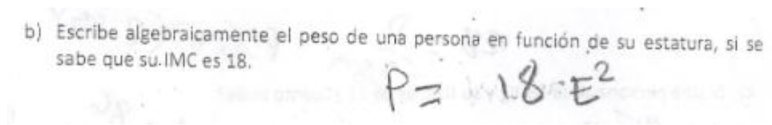
a) Completa la siguiente tabla para una persona cuyo IMC es de 18

Peso	Estatura	IMC	
18	1	18	
40.5	1.5	18	2.25
46.08	1.6	18	2.56
52.02	1.7	18	2.89
58.32	1.8	18	

Posiblemente debido a la familiaridad con la expresión algebraica del IMC que han logrado obtener hasta esta parte de la actividad, los profesores no tuvieron problemas para realizar la tarea solicitada en la consigna siguiente:

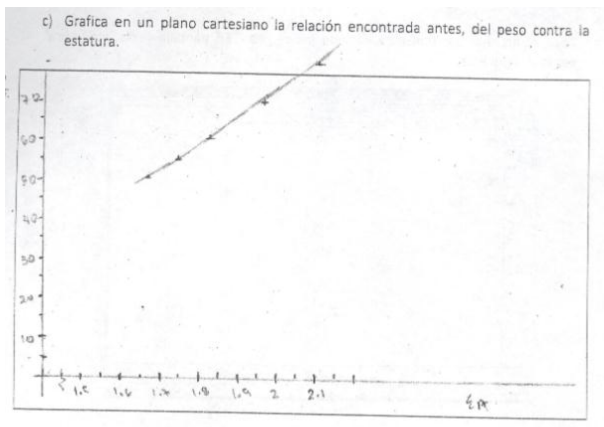
b) Escribe algebraicamente el peso de una persona en función de su estatura, si se sabe que su IMC es 18.

En ambos casos las respuestas son correctas y no se observan dificultades algebraicas para llegar a ella, se muestra aquí una de las respuestas:


b) Escribe algebraicamente el peso de una persona en función de su estatura, si se sabe que su IMC es 18.

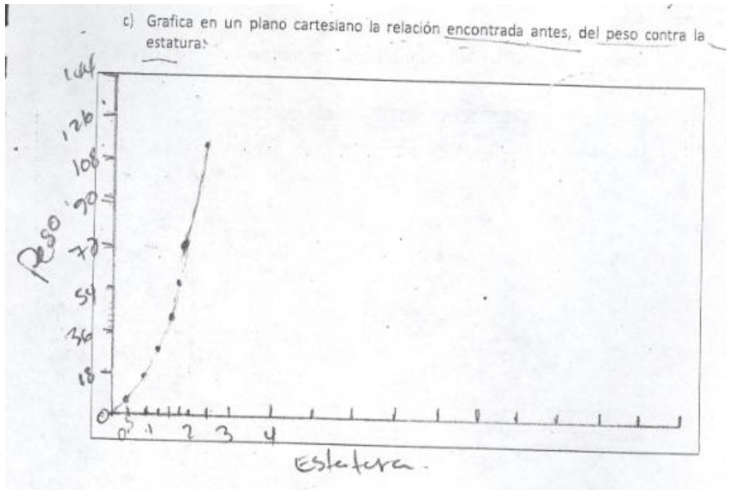
$P = 18 \cdot E^2$

En la tercera parte de la Pregunta 2 (inciso c) la tarea de graficar la relación $P = 18\,E^2$ se realiza con mayor dificultad que las anteriores, los profesores advierten que se trata de una función cuadrática pero al momento de graficar, uno de los profesores intercambia los ejes cartesianos, debido posiblemente a que la variable *peso* corresponde a la primera columna de su tabla. A sugerencia del Instructor corrige su gráfica y después de localizar algunos puntos en el plano cartesiano, llega a la conclusión de que la gráfica es una recta, sin tomar en cuenta el significado gráfico de la representación algebraica de la función, su gráfica presenta el siguiente aspecto



Como se observa en esta gráfica, el profesor está intentando construirla a partir solamente de los valores contenidos en su tabla y la manera como ha graduado los ejes no le permite percibir su gráfica como un todo.

El otro integrante del equipo tiene menos dificultades para graficar, construyendo la gráfica siguiente



En el apartado 3 se pide construir las gráficas en GeoGebra de la expresión $IMC = \frac{P}{E^2}$ para los valores del IMC considerados críticos y hacer algunas interpretaciones del fenómeno bajo estudio con base en estas gráficas. La primera tarea solicita:

e) Grafica en este archivo la relación $y = 18.5x^2$, que corresponde a la relación $\mathrm{P} = 18.5\mathrm{E}^2$ que no puede graficarse en GeoGebra directamente porque este software no reconoce las variables P y E como variables válidas. Para graficar la relación $\mathrm{y} = 18.5\mathrm{x}^2$, escríbela en la ventana denominada "Entrada" que se muestra en la parte inferior del archivo y luego presiona la tecla "Enter".

A pesar de las especificaciones técnicas contenidas en el enunciado de la tarea, los profesores no pudieron construir la gráfica solicitada. Lo hicieron posteriormente con ayuda del Instructor, la tarea ha puesto en evidencia la nula familiaridad con el software puesto que en el equipo observado su experiencia previa se reduce al "arrastre" de objetos en pantalla.

Una vez que los profesores lograron graficar en GeoGebra la función $y = 18.5x^2$, pudieron graficar todas las funciones solicitadas en los siguientes dos incisos:

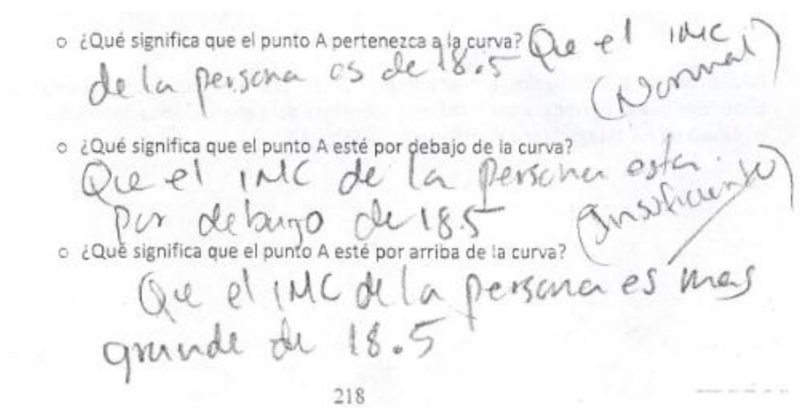
f) Si el punto A de la gráfica, cuyas coordenadas son la estatura y el peso de una persona, representa su índice de masa corporal, "arrástrelo" arriba y debajo de la curva y luego conteste las preguntas siguientes:

- **¿Qué significa que el punto A pertenezca a la curva?**
- **¿Qué significa que el punto A esté por debajo de la curva?**
- **¿Qué significa que el punto A esté por arriba de la curva?**

g) En el mismo archivo índice.ggb, grafica ahora las relaciones $y = 25x^2$ y $y = 30x^2$. Responde las preguntas siguientes, si lo consideras necesario "arrastra" el punto A para orientarte.

- **¿Qué significa que el punto A esté entre las gráficas de $y = 18.5x^2$ y de $y = 25x^2$?**
- **¿Qué significa que el punto A esté entre las gráficas de $y = 25x^2$ y de $y = 30x^2$?**
- **¿Qué significa que el punto A esté por encima de la curva $y = 30x^2$?**

Una vez graficadas las funciones anteriores, "arrastran" el punto A en pantalla para responder las preguntas. Sin embargo sus respuestas se limitan a indicar a que clasificación pertenece la persona que representa al punto A, dependiendo de la región del plano en la que se localiza este punto. En la muestra de respuesta que se presenta enseguida, puede observarse el tipo de respuesta que dieron a estas preguntas:

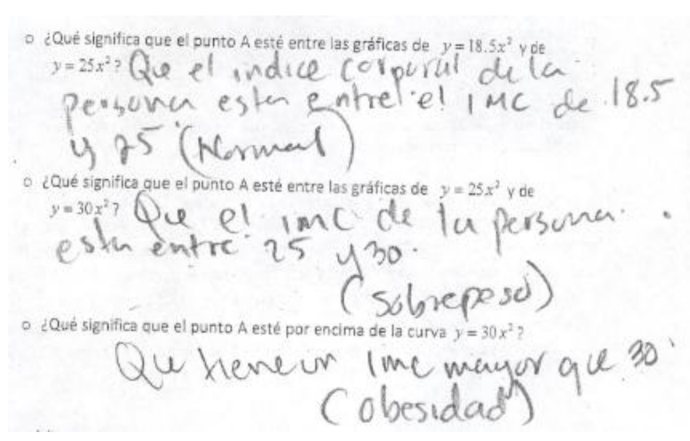


○ ¿Qué significa que el punto A pertenezca a la curva? Que el IMC de la persona es de 18.5 (Normal)

○ ¿Qué significa que el punto A esté por debajo de la curva? Que el IMC de la persona esta por debajo de 18.5 (Insuficiente)

○ ¿Qué significa que el punto A esté por arriba de la curva? Que el IMC de la persona es mas grande de 18.5

218



○ ¿Qué significa que el punto A esté entre las gráficas de $y = 18.5x^2$ y de $y = 25x^2$? Que el indice corporal de la persona esta entre el IMC de 18.5 y 25 (Normal)

○ ¿Qué significa que el punto A esté entre las gráficas de $y = 25x^2$ y de $y = 30x^2$? Que el IMC de la persona esta entre 25 y 30. (Sobrepeso)

○ ¿Qué significa que el punto A esté por encima de la curva $y = 30x^2$? Que tiene un IMC mayor que 30 (Obesidad)

Las respuestas denotan que se ha identificado la característica principal que tiene las personas representadas por el punto A, dependiendo de la región del plano donde se localiza este punto, pero las preguntas no despertaron el interés por profundizar en la interpretación de las coordenadas del punto A en el fenómeno que se está representando.

Los últimos dos incisos del apartado 3 plantean una situación problemática basada en las tareas previamente realizadas, las consignas de estos incisos son:

h) Un médico registra en la gráfica de la Figura 4.2, el Índice de Masa Corporal de un adolescente, en cuatro consultas consecutivas. En esta gráfica A_1 corresponde a la primera consulta y A_4 a la última.

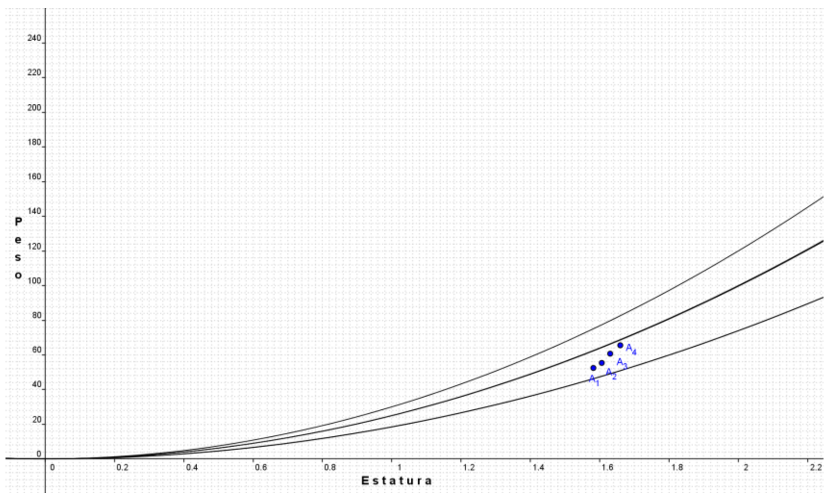


Figura 4.2

i) ¿Qué tipo de recomendaciones consideras que debe hacer el médico a partir de la gráfica?

Los profesores pudieron identificar en la gráfica la tendencia del paciente representada por la serie de puntos A_1, A_2, A_3 y A_4, aunque no abundaron en sus respuestas. Una de ellas dice:

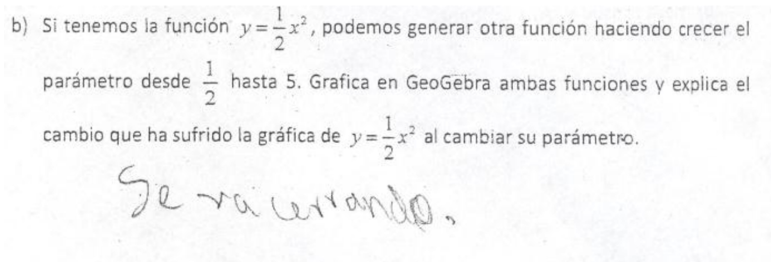
f) ¿Qué tipo de recomendaciones consideras que debe hacer el médico a partir de la gráfica? Que siga conservandose saludable como hasta ahora pues su IMC este dentro del rango normal; sin embargo esta a punto de entrar al otro rango.

En el último apartado de la actividad se trataba de que los profesores analizaran como objetos matemáticos las relaciones funcionales usadas a lo largo de la misma, que pudieran identificar y explicar los efectos gráficos producidos por la variación del parámetro *a* sobre la gráfica de la función $y = ax^2$. Se trataba primeramente de responder los dos incisos siguientes:

d) Al comparar dos de las funciones, por ejemplo $y = 18.5x^2$ con $y = 30x^2$, podemos tomar la función $y = 18.5x^2$ como referencia para explicar el cambio que ha sufrido su gráfica cuando el parámetro 18.5 se hace crecer hasta 30. Observa la Figura 4.2 para explicar este cambio.

e) Si tenemos la función $y = \frac{1}{2}x^2$, podemos generar otra función haciendo crecer el parámetro desde $\frac{1}{2}$ hasta 5. Grafica en GeoGebra ambas funciones y explica el cambio que ha sufrido la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^2$ al cambiar su parámetro.

Aunque ambas tareas parecían similares, ninguno de los dos profesores pudo responder el inciso a, pero ambos contestaron el inciso b. Estos resultados son difíciles de explicar, pero posiblemente la diferencia estribe en que el inciso a tenía que responderse a partir de observar dos gráficas ya hechas mientras que en el inciso b los profesores se involucraron en el trazado de las gráficas. Si esta fuera la razón, estaría evidenciando una gran diferencia entre aprender observando y aprender accionando. Se muestra una de las respuestas:



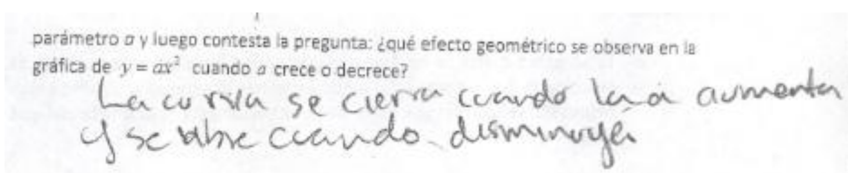
b) Si tenemos la función $y=\frac{1}{2}x^2$, podemos generar otra función haciendo crecer el parámetro desde $\frac{1}{2}$ hasta 5. Grafica en GeoGebra ambas funciones y explica el cambio que ha sufrido la gráfica de $y=\frac{1}{2}x^2$ al cambiar su parámetro.

Se va cerrando.

En el tercer y último inciso se trataba de construir en GeoGebra una gráfica dinámica de la función $y = ax^2$ en la que pudiera hacerse variar el parámetro *a* para observar los efectos que esta variación produce en la gráfica de la función. La consigna decía:

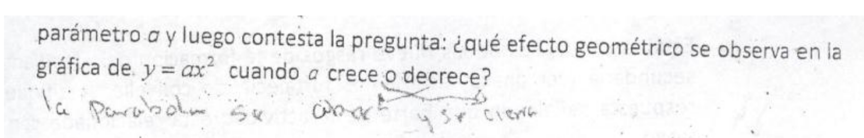
f) Utiliza ahora la herramienta "deslizador" para representar el parámetro *a* y graficar la función $y = ax^2$, configura el "deslizador" para que la *a* tome solamente valores positivos. "Arrastra" el punto del "deslizador" para hacer variar el parámetro *a* y luego contesta la pregunta: ¿qué efecto geométrico se observa en la gráfica de $y = ax^2$ cuando a crece o decrece?

Para realizar esta tarea los profesores contaron con indicaciones técnicas especificadas en la actividad misma. A pesar de que la herramienta "deslizador" era nueva para ellos las indicaciones resultaron suficientes para completar su construcción en GeoGebra. Una vez construido el "dispositivo" solicitado, el equipo respondió satisfactoriamente la tarea, las dos respuestas pueden verse en la siguiente figura:



parámetro *a* y luego contesta la pregunta: ¿qué efecto geométrico se observa en la gráfica de $y = ax^2$ cuando *a* crece o decrece?

La curva se cierra cuando la a aumenta y se abre cuando disminuye



parámetro *a* y luego contesta la pregunta: ¿qué efecto geométrico se observa en la gráfica de $y = ax^2$ cuando *a* crece o decrece?

la parabola se abre y se cierra

CAPÍTULO VI

Conclusiones

En el capítulo I se abordó la problemática existente en relación al aprendizaje y enseñanza de las matemáticas sobre todo en el nivel básico con la intención de explicar de manera integral el impacto de diferentes factores en el aprovechamiento académico de los estudiantes, además se ha destacado la importancia y necesidad de acompañar el Plan y Programas de estudio de secundaria con actividades didácticas concretas que le sirvan al docente como apoyo en la enseñanza de la matemática, porque se ha considerado que este es un elemento importante en la modificación de las prácticas docentes de los profesores. El producto principal del presente trabajo es el diseño de cuatro actividades didácticas dirigidas a los profesores de matemáticas en el nivel Secundaria.

La utilización de este tipo de actividades como base para la enseñanza de las matemáticas rompe fuertemente con las prácticas tradicionales basadas principalmente en los libros de texto, las listas de ejercicios y el programa de estudio, y en las que el profesor juega principalmente un papel de expositor frente a sus alumnos. Las actividades didácticas propuestas aquí están basadas en situaciones problemáticas y asignan al profesor el papel de conductor de las actividades que los estudiantes tendrán que desarrollar para hacerse por sí mismos del conocimiento.

Las situaciones problemáticas no tienen que ser inventadas necesariamente por el diseñador, se pueden tomar situaciones conocidas y adaptarlas al entorno y nivel académico para el que vayan dirigidas. Es importante mencionar que las cuatro actividades presentadas aquí están basadas en situaciones que resultaron de adaptar algunos problemas matemáticos conocidos. La actividad de la Pista parte de un problema propuesto originalmente por Papert y retomado por Arcavi (2006); la actividad de la media aritmética proviene del artículo de Pérez (2009) en el que se plantean diversas interpretaciones geométricas de las medias aritmética, geométrica, armónica y ponderada; el Índice de Masa Corporal como fuente de situaciones problemáticas ya se había empleado en otros diseños relacionados con otros temas matemáticos del nivel básico Ibarra et al (2009); mientras que la actividad sobre cuadriláteros está basada en uno de los problemas propuestos por Barroso (2003) con el propósito de ilustrar la potencia que tienen los software de geometría dinámica para explorar problemas geométricos.

Se buscó que las adaptaciones de las situaciones problemáticas seleccionadas resultaran atractivas para los profesores, que pudieran conectar con lo que ellos saben, es decir, que estuvieran a su alcance y que las herramientas matemáticas que se tengan que poner en práctica para su resolución estén en su zona de desarrollo próximo.

La búsqueda de situaciones problemáticas apropiadas que sirvan como base para las actividades didácticas no constituye una tarea fácil, muestra de ello es que en la etapa de diseño de este trabajo se consideraron varias situaciones problemáticas que por diferentes razones no fueron incluidas en la versión final.

Para el diseño de actividades es importante precisar el momento de introducir tanto los recursos tecnológicos como los manipulables, así como la selección del tipo de tecnología a utilizar, tecnología que esté al alcance de las personas que vayan a resolver las actividades y que sea de fácil uso.

Es importante destacar la ventaja de contar con una metodología que sirva tanto para el diseño de actividades así como su instrumentación en el aula. La metodología ACODESA fue fundamental para el diseño de las actividades y las consideraciones tomadas al ponerlas en escena con los profesores. Esta metodología ha resultado consistente con las recomendaciones especificadas en los lineamientos generales de la reforma. Sin embargo se trata de una metodología general, que ha sido utilizada en otros niveles educativos.

El presente trabajo no pretende involucrar a los profesores en el diseño de actividades, sin embargo la preparación de los docentes para que pudieran diseñar sus propias actividades iría más allá de la resolución de las actividades que se les propusieron y posiblemente exigiría de una metodología más específica o más aún, de la posibilidad de contar con un manual para el diseño que incluya los siguientes temas:

a) ¿Qué se entiende por una situación problemática y cuál es su contexto?
b) Partes principales que constituyen una actividad didáctica.
c) El papel del profesor y los estudiantes.

d) El papel de la tecnología y su inserción en la actividad.
e) Organización del grupo escolar a lo largo de la actividad.
f) El uso de materiales manipulables y su inserción en la actividad.

De la puesta en escena de las actividades pueden extraerse las conclusiones generales siguientes:

1. Algunas deficiencias detectadas en los estudiantes por los exámenes estandarizados (ver Capítulo I) se han observado también en los profesores durante la resolución de las actividades. Tal es el caso de la competencia denominada *Comunicar información matemática* que muestra un bajo nivel de desarrollo en los profesores observados. La lectura de las instrucciones se hacía a veces en forma descuidada, lo cual los llevaba a respuestas que no se correspondían con la pregunta. Se observaron también dificultades para expresar por escrito las conclusiones a las que llegaban después de haber discutido las respuestas con sus colegas. Esta conclusión cobra particular importancia a la luz de las expectativas contempladas en los nuevos planes y programas de estudio sobre el desarrollo de competencias en los estudiantes, que los profesores no han desarrollado suficientemente.

2. Un aspecto importante que señala la reforma curricular reciente (SEP, 2011) es la creación de ambientes tecnológicos en la práctica escolar que enriquezcan el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sin embargo las actividades didácticas incluidas como ejemplos en dicho documento, y que podrían servir como guía para los profesores, no incluyen ni promueven la utilización de recurso tecnológico alguno. Si los profesores toman estas actividades como referencia, no tendrían por qué ver la necesidad de incorporar recursos tecnológicos a su práctica docente y si tuvieran la iniciativa de hacerlo, las actividades no ilustran formas concretas de utilizarlos.

En cambio, las cuatro actividades que aquí se presentaron incorporan en algún momento de su desarrollo el uso del software GeoGebra, aunque la mayoría de los profesores desconocían la existencia del software, su utilización no presentó dificultades serias, debe recalcarse que las archivos de GeoGebra que se utilizaron estaban preconstruidos y no fue tarea de los profesores participantes elaborarlos sino simplemente manipularlos. Lo anterior puede significar que la incorporación de GeoGebra en sus actividades docentes, exija al profesor una mayor familiaridad con este software.

Aunque la manipulación de las representaciones construidas con el software no significó mayor problema para los participantes, las interpretaciones de sus resultados fueron muy pobres, en algunos casos no se lograron establecer las conexiones apropiadas entre lo que se hacía con el software y los conceptos matemáticos que se habían venido discutiendo durante la actividad. Algunos profesores sólo se limitaron a describir los cambios que resultaban de sus propias manipulaciones y no profundizaron en las interpretaciones de lo que observaban en pantalla. El siguiente ejemplo muestra que los profesores pueden utilizar recursos como GeoGebra, pero esto no significa que estén aprovechando su potencial didáctico.

En la pregunta 5 de la actividad sobre la media aritmética los profesores pudieron “arrastrar” el punto que se indicaba y observar que las deformaciones producidas en el trapecio dejaban invariante la media aritmética de las medidas de los segmentos verticales, pero no pudieron justificar este resultado, limitándose en el mejor de los casos a describir los cambios observados en pantalla.

3. Aunque este trabajo no se propone profundizar en las concepciones y creencias de los profesores, del desempeño durante el desarrollo de las actividades se han podido observar algunos indicios de algunas de ellas, y aunque no se cuenta con elementos para hablar de su arraigo y de su impacto sobre la práctica docente; se mencionan aquí algunas de ellas como una manera de enfatizar la necesidad de estudiar este tema en otros trabajos.

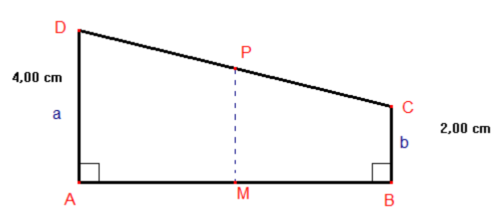
a) En la pregunta 1a) sobre la media aritmética (ver Capítulo V), el dato sobre el lapso de tiempo al que se refiere el crecimiento de la población (60 años) es innecesario para dar una respuesta; sin embargo al equipo observado le pareció que el dato tenía que usarse en los cálculos. Aunque finalmente se decidió ignorarlo en los cálculos, detrás de la insistencia en incluir este dato pudiera estar presente la creencia de que en un problema todos los datos son necesarios para encontrar la solución.

b) Tanto la discusión que se dio en una de las parejas observadas como la respuesta que dieron a la pregunta 1b), revelan la creencia de que cada problema cuenta con un procedimiento que lo resuelve, de tal modo que el problema puede resolverse si se tiene en mente tal procedimiento. Independientemente de los errores aritméticos cometidos por esta pareja, se deja ver en su respuesta que han aplicado un "procedimiento" con el que tuvieron contacto alguna vez, pero que no recordaban con precisión.

c) Las confusiones observadas en las respuestas a la pregunta 2a) pudieran estar relacionadas con la creencia de que la resolución de un problema matemático consiste principalmente en "hacer un cálculo". La pregunta se refiere a la representación gráfica de una cantidad, pero los profesores en lugar de responderla dedicaron todos sus esfuerzos a calcular la cantidad representada.

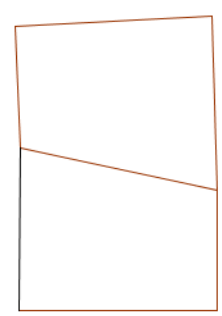
4. Entre las dificultades matemáticas que los profesores encontraron durante el desarrollo de las actividades, se señalan aquí tres de ellas porque son las que pueden documentarse a partir del trabajo desarrollado por el equipo sometido a observación.

a) Enseñar Geometría en la escuela secundaria implica la promoción de dos competencias importantes: por una parte el uso de las propiedades de los objetos geométricos para resolver problemas del mundo físico y por otra, la justificación de estas propiedades, es decir la construcción de argumentaciones que fundamenten su validez. En algunas tareas los profesores no parecieran tener clara la diferencia entre la medición de un objeto "físico" y la resolución y justificación de un problema geométrico. Por ejemplo, en la pregunta 5b) sobre la Media Aritmética, no pudieron justificar geométricamente por qué la medida del segmento MP no cambia cuando se deforma el rectángulo "arrastrando" el punto B, en una figura como la siguiente:



A pesar de que habían podido calcular la longitud de MP como la media aritmética entre los valores de a y b, no pudieron detectar que el "arrastre" de B mantiene intactas las propiedades del trapecio que hacen que la longitud de MP no cambie en tanto no se modifiquen los valores de a y b. Como la construcción en GeoGebra incluía la medida de MP, los profesores no perciben que la justificación es un problema relacionado con las propiedades del trapecio que permanecen invariantes, más bien parecieran asociarlo a la "medición" que hace el software del segmento MP, como si se tratara de un objeto físico.

b) Las respuestas dadas por los profesores muestran algunos errores conceptuales particularmente en geometría, en donde su formación pareciera ser la más débil. Por ejemplo, en la actividad de la media aritmética, en la pregunta 3a) se pide a los profesores recortar en dos partes un trapecio dibujado en cartulina y reacomoden estas dos partes para formar un rectángulo. Hasta aquí los profesores realizan la tarea sin mayores dificultades; pero cuando se les pide argumentar por qué dicha figura es efectivamente un rectángulo, los profesores no pueden hacerlo. En las argumentaciones que ofrecen puede observarse la deficiencia de las definiciones que están usando de este objeto geométrico. En donde para una integrante del equipo es suficiente que la figura tenga 4 ángulos rectos mientras que para otra basta con que en la figura, los segmentos CP y DP (Ver Figura 4 Capítulo III.4.3) midan lo mismo. En ningún momento se percatan de que la definición establece que el rectángulo debe tener cuatro lados y que la imposibilidad de que la figura "armada" sea un hexágono como el siguiente:



es un problema de colinealidad entre puntos que depende de las propiedades del trapecio recortado.

Este descuido con el que se aplican las definiciones geométricas está presente también en otras partes de la actividad y puede explicar en gran parte las dificultades que se tienen para justificar resultados matemáticos, lo cual indica que la competencia denominada *Validar procedimientos y resultados,* no presenta un buen nivel de desarrollo entre los profesores y seguramente dificultará la promoción de esta competencia entre los estudiantes.

c) En los incisos 1d) y 1e) sobre el IMC (ver Capítulo III), los profesores tuvieron dificultades para interpretar el significado de valores concretos de la razón que define el IMC, particularmente insistieron en asociar el valor 17 con "personas delgadas y bajas de estatura", lo cual revela que están asociando valores pequeños de una razón entre cantidades, con valores pequeños de dichas cantidades. Esta dificultad es de la misma naturaleza que la identificada y documentada por Filloy y Lema (1996, pp. 55-75), en la que el orden entre magnitudes se transfiere al orden entre sus razones.

d) Otro de los errores observados que está relacionado con la articulación entre las diferentes representaciones de un objeto matemático ampliamente documentado por Duval (1998), ha sido durante el desarrollo de la actividad sobre el IMC (ver Capítulo V). Cuando uno de los profesores intenta graficar la función $y = 18x^2$, la confunde con una recta. Convierte mal la representación tabular en gráfica, como si la representación algebraica a partir de la cual ha construido la tabla, no existiera. A pesar de que convierte bien la representación algebraica en tabular tiene serias dificultades para construir la representación gráfica, porque no logra incorporar a su tarea la conversión algebraico gráfica.

Referencias

Arcavi, Abraham (2006), En una visión integradora, ¿Qué proponemos integrar? y ¿Cómo? Memorias del Foro Nacional de Competencias Matemáticas. Colombia. Ministerio de Educación Nacional. Disponible en: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/medioteca/1607/articles-113411-archivopdf

Castaño, J (2006) En la búsqueda de una educación matemática integradora. Posibilidades y obstáculos. Memorias del Foro Nacional de Competencias Matemáticas. Colombia. Ministerio de Educación Nacional. Disponible en: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/medioteca/1607/articles-113411-archivopdf

Diccionario de la Lengua Española (2001), Vigésima segunda edición, España.

Del Castillo, G; Villalba, M y Armenta, M. (2008). Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria.

Duval, R (1998) Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F Hitt (Ed), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy, E. y Lema, S. (1996) El Teorema de Tales; significado y sentido en un sistema matemático de signos. En F Hitt (Ed), *Investigaciones en Matemática Educativa* (pp. 55-75). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hitt, F. y Cortés, J. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelación matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, Vol. 10, n°1, pp. 1-30 Disponible en: www.cidse.itcr.ac.cr/revistamete

Ibarra, S; Armenta, M; Favela, G; Fuentes, V; Grijalva, A y Perea, G (2009). Matemáticas I. Módulo de aprendizaje. Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Sonora. Primera Edición pp.145-147

Ibarra, S; Villalba, M; Armenta, M; Del Castillo, A; Grijalva, A; Soto, M; Urrea, M y Ávila, R. (2011). Material del Participante. Secretaria de Educación y Cultura del Estado de Sonora. Primera Edición.

INEGI “¿Cuánto aumentó la población?”, Estadísticas Sociodemográficas. Población total según sexo 1950 a 2005. Censo de Población y Vivienda 2010. http://cuentame.inegi.org.mx/

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) “PISA 2006 en México” Primera edición 2007, México → María Antonieta Díaz Gutiérrez, Gustavo Flores Vázquez, Felipe Martínez Rizo.

Organización de Estados Iberoamericanos Para la Educación, la Ciencia y la Cultura, OEI “México - Informe PISA 2006” Disponible en: http://www.oei.es/noticias/spip.php?article1491&debut_5ultimasOEI=30

Secretaría de Educación Pública, (2000), *Fichero. Actividades didácticas. Matemáticas. Educación Secundaria,* México, SEP.

Secretaría de Educación Pública, (2000), *Libro para el maestro. Matemáticas. Educación Secundaria,* México, SEP.

Secretaría de Educación Pública, (2006a), *Plan y programas de estudio. Educación Secundaria,* México. SEP.

Secretaría de Educación Pública, (2011), *Plan y programas de estudio. Educación Secundaria,* México. SEP.

Secretaría de Educación Pública, (2006b), *Programas de estudios. Matemáticas. Educación Secundaria*, México, SEP.

Secretaría de Educación Pública, (2011), *Programas de estudios. Matemáticas. Educación Secundaria*, México, SEP.