UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

PROGRAMA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

Caracterización del Contrato Didáctico en una Situación en la que se emplea la Computadora para llevar a cabo los Procesos de Enseñanza y de Aprendizaje de la Derivada

TESIS

Que para obtener el Grado de Maestro en Ciencias
con Especialidad en Matemática Educativa

Presenta:

Darío Benjamín Sánchez Pérez

Directores:
M.C. Silvia Elena Ibarra Olmos
M.C. Agustín Grijalva Monteverde

Jurado:
M.C. Agustín Grijalva Monteverde
M.C. Alejandrina Bautista Jacobo
M.C. Gilberto Cuadras Camacho
Dr. José Luis Díaz Gómez
M.C. Silvia Elena Ibarra Olmos

Hermosillo, Sonora

Julio del 2003

ÍNDICE

Contenido		Página

CAPÍTULO 0
INTRODUCCIÓN

Sin duda que gran parte de nuestra vida cotidiana está siendo modificada cada día debido al rápido avance de la tecnología de la computación y de la comunicación, por lo que podemos considerar a este acontecimiento como uno de los fenómenos más significativos de estos últimos años. Estos recursos están produciendo transformaciones de tal magnitud que, prácticamente, todos los sectores de la sociedad están recibiendo, directa o indirectamente, su influencia.

Dichas transformaciones también se han venido reflejando en el campo de la educación, ya que cada vez es más común la utilización de equipos y aparatos dentro de ella, tales como equipos con conexión a Internet, equipos interactivos de videoconferencia, proyectores, calculadoras, computadoras, etc.

Particularmente la computadora es uno de los recursos tecnológicos que desde hace algún tiempo está incorporándose en muchas instituciones educativas, influenciando no sólo las actividades de carácter administrativo, sino también convirtiéndose en un importante auxiliar de las actividades de docencia.

La incorporación de este medio tecnológico al sistema escolar está generando un fenómeno de considerables dimensiones, dado que está provocando, por un lado la necesidad de cambios en los planes y programas de estudio y por otro, está abriendo la posibilidad de nuevas formas de trabajo en las aulas, creando con ello diversas expectativas de mejorar institucionalmente la enseñanza y el aprendizaje.

En la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas este hecho también está teniendo repercusiones. Debido al uso cada vez más frecuente del recurso computacional en el campo de la educación matemática, es común encontrar propuestas didácticas[1] con diferentes enfoques en áreas como cálculo, álgebra, geometría y en otras ramas de las matemáticas. Muestra de estos trabajos:

"Microcomputadoras en la clase de matemáticas. Una propuesta metodológica"
Tesis de Maestría. Ricardo Quintero Zazueta. CINVESTAV-IPN, 1987

"La microcomputadora y la desigualdad del triángulo. Propuesta didáctica"
Tesis de Maestría. Analida Isabel Ardilla Acuña. CINVESTAV-IPN, 1988

"*Enseñanza asistida por computadora a través de instructores interactivos de diversiones matemáticas*". Anteproyecto de tesis doctoral. M. En I. Gabriel Alejandro López Morteo. Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada. 2001.

Sin embargo estudios que indaguen acerca de los efectos en el ambiente que se crea en el aula de matemáticas cuando se incorpora la computadora no son tan abundantes, al menos en nuestro entorno local.

Bajo estas perspectivas del uso de la computadora en el campo educativo, se tiene la premisa de que el empleo adecuado de esta tecnología ofrece la oportunidad para que se consolide no solamente una nueva visión del contenido matemático que se enseña y que se aprende, sino también nuevas visiones acerca de las relaciones profesor-alumno-conocimiento, y del papel que juegan los diversos agentes didácticos en la construcción del conocimiento matemático por parte de los alumnos.

---

1 Ver Anexo A1

En cuanto a la investigación en este campo, en diversos foros[2] se ha reconocido la necesidad de plantear investigaciones dirigidas hacia el estudio de las implicaciones que la introducción de esta tecnología está originando en el salón de clases de matemáticas. Los estudios a los que hacemos referencia han tratado de contemplar las actividades desarrolladas tanto en el proceso de enseñanza como en el proceso de aprendizaje, bajo la hipótesis de que éstos incluyen una diversidad de situaciones de carácter social, cultural, didáctico epistemológico, cognitivo, etc. que se manifiestan en la interacción profesor-alumno-conocimiento matemático.

Lo anterior también se pone de manifiesto en el campo de la Matemática Educativa, donde se ha venido conformando una comunidad de investigadores dispuestos a enfrentar y tratar de dar respuesta a la problemática generada por este fenómeno educativo.

En el presente trabajo hemos abordado un estudio que tiene que ver con las interacciones que viven el profesor, los alumnos y el conocimiento matemático en juego, cuando en los procesos de enseñanza y de aprendizaje del concepto derivada se incorpora el recurso computacional, con el propósito de distinguir y caracterizar las reglas del juego y las estrategias de la situación didáctica en la que interaccionan los protagonistas. El conjunto de reglas que son esencialmente implícitas constituye ***el contrato didáctico***[3].

---

[2] Se muestran en el Anexo A2.

[3] Uno de los conceptos teóricos propuesto por Guy Broùsseau, en el modelo que él utiliza para estudiar experimentalmente algunos problemas involucrados en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

De acuerdo a la naturaleza del problema de investigación hemos dividido este reporte en seis capítulos tratando de concretizar en éstos los elementos característicos de la actividad didáctica que tiene como fin la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas desde la perspectiva del contrato didáctico.

En el **Capítulo I** se muestran los **Antecedentes** del problema de investigación.

En el **Capítulo II** se describe **El problema** y su justificación. El interés como investigador fue identificar y definir un problema que atañe a la Matemática Educativa, esto es, el estudio de un fenómeno que tiene que ver con el análisis del conjunto de reglas implícitas que regulan las interrelaciones entre el profesor, los alumnos y el conocimiento matemático, dentro del contexto particular del salón de clases en donde se desarrollan los procesos de enseñanza y de aprendizaje del cálculo, asistidos por computadora.

En el **Capítulo III** se presenta el **Marco de referencia**. En este apartado se decidió que el establecimiento de un marco general de referencia sería útil y conveniente para los fines de nuestra investigación, ya que éste nos permitiría identificar cómo a lo largo de estas últimas décadas en nuestra institución, la Universidad de Sonora particularmente en el Departamento de Matemáticas se ha venido incorporando la tecnología de la computadora en las distintas actividades relacionadas con la enseñanza de las matemáticas.

Al **Capítulo IV,** lo denominamos **Marco teórico**. De gran importancia también fue el establecimiento del fundamento teórico que le daría fuerza y sustento teórico a nuestro trabajo, así que los objetivos planteados en el problema de investigación nos llevaron a considerar uno de los elementos de la Teoría de Situaciones Didácticas, el Contrato Didáctico, como elemento que sería el eje central de la investigación.

En el **Capítulo V** presentamos la **Metodología** de trabajo. Para esto, consideramos la necesidad de organizar, plantear y llevar a cabo las acciones que nos permitirían realizar nuestro trabajo de campo. Las actividades contempladas en esta fase de la investigación incluyeron: la recopilación de la información a través del proceso de observación llevado a cabo en el propio escenario en donde ocurren los hechos, esto es, el salón de clases, hacer una adecuada ordenación del material recopilado hasta lograr la interpretación de dicho material. Utilizamos el método etnográfico como herramienta de análisis provista por la metodología cualitativa.

En el Capítulo VI. En este apartado presentamos los **Análisis de resultados,** donde se muestra el proceso de análisis hecho al cuerpo de información recopilada a través de los distintos medios empleados: la observación, aplicación de encuestas, entrevistas al profesor y alumnos, revisión bibliográfica.

En el Capítulo VII. Presentamos las **Conclusiones** de nuestro trabajo de investigación. Para esto hemos tomado en cuenta las observaciones realizadas, así como los materiales analizados en los capítulos anteriores.

En la última sección del presente trabajo se incluyen los apartados correspondientes a las **Referencias Bibliográficas** y los diferentes **Anexos**.

CAPÍTULO I

ANTECEDENTES

En los últimos años uno de los aspectos hacia el cual se orientaron los esfuerzos de investigación en el área de Matemática Educativa, fue el estudio de los efectos de la incorporación de la computadora en el quehacer del docente, debido a que el empleo de este recurso tecnológico en el campo de la enseñanza de las matemáticas se había venido generalizando. Estos trabajos se concretaron en propuestas metodológicas que partían de la premisa de que el empleo de este recurso afectaba de maneras diversas la forma de enseñar y aprender matemáticas en el salón de clases. Muestra de estos trabajos:

Por ejemplo en *"Un acercamiento a algunas ideas del cálculo diferencial empleando Logo y programas para graficar"*. Trabajo de tesis de Maestría. Enrique Galindo Morales. CINVESTAV-IPN. 1988, el autor señala:

"Se afirma que la computadora puede beneficiar la enseñanza de las matemáticas de las siguientes maneras: Hacer la matemática escolar más real, ilustrar las ideas matemáticas, ayudar a los estudiantes a trabajar con ejemplos; a estudiar y no sólo ejecutar algoritmos; a ofrecer aplicaciones más variadas e ilustrativas; a explorar y mejorar la intuición geométrica,..."

En *"Uso de la microcomputadora en el aula, para fortalecer el concepto de función lineal, mediante la descripción sistémica de las variables visuales y de las correspondientes en escritura algebraica"*. Tesis de Maestría. Rafael Alfonso Meza Villanueva. CINVESTAV-IPN. 1995, se señala:

"Las bondades que las computadoras nos pueden brindar no dejan de sorprender aunque sea un poco, aún al más incrédulo, sus alcances presentes pueden ir desde la mera máquina incansable y veloz capaz de realizar miles de operaciones aritméticas y lógicas en segundos hasta los manipuladores simbólicos......"

En años más recientes la investigación en este campo se ha ido encauzando por otros rumbos, motivada por la influencia de nuevos enfoques didácticos que toman en cuenta los aportes teóricos y metodológicos de diversas disciplinas, por la incorporación de productos de investigaciones realizadas en esta dirección, así como por la evolución de los dispositivos tecnológicos que cada día se incorporan al campo de la educación matemática.

En estas líneas de investigación se están tomando en consideración las grandes posibilidades que proveen las nuevas tecnologías computacionales, tanto en aplicaciones potentes para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, como en el diseño de situaciones didácticas, que buscan las condiciones tales que el encuentro entre el profesor, los alumnos y el conocimiento matemático, sea un encuentro fructífero.

En este sentido se tiene la expectativa de que el uso adecuado de esta tecnología ofrezca la oportunidad para que se consoliden no solamente una nueva visión del contenido matemático sino también nuevas visiones acerca de cómo abordar el estudio de las interrelaciones profesor-alumno-conocimiento y del papel de los diversos agentes didácticos como la computadora en la construcción del conocimiento matemático por parte del alumno. Estos nuevos enfoques de la investigación nos proveyeron los antecedentes para justificar la importancia de hacer investigación acerca de los efectos que esta tecnología podía causar en las interrelaciones.

Así, la problemática relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas asistidas por computadora, reclama la realización de estudios alrededor de la actividad didáctica que se desarrolla en estos procesos, teniendo en cuenta que éstos incluyen una diversidad de situaciones de carácter social, cultural, didáctico epistemológico, cognitivo, etc. y que se manifiestan en estas interacciones en el salón de clases.

Las interacciones generadas entre los protagonistas son reguladas por un conjunto de reglas del "juego" y las "estrategias" de la situación didáctica, unas de carácter explícito y otras implícito, constituyen lo que denominamos ***contrato didáctico.***

En la literatura encontramos algunos trabajos dentro del campo de la Matemática Educativa que manifiestan el interés por abordar el estudio de este fenómeno, uno de estos trabajos es el desarrollado por Josep Gascón [9]. Este trabajo fue el antecedente más inmediato que nos motivó a emprender un estudio en esta dirección en nuestro entorno local.

Gascón en el estudio mencionado se propone como uno de los objetivos centrales, "presentar la noción de contrato didáctico, a través del análisis de los cambios que sufre este contrato en el paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad". "Tratando de explicitar y ejemplificar en qué sentido el análisis de la actividad matemática, tal como ésta se lleva a cabo en las diferentes instituciones, constituye una nueva y vigorosa vía de acceso al estudio de fenómenos didácticos".

A partir del análisis de la actividad matemática escolar es posible describir los fenómenos didácticos y empezar a formular leyes que los rigen. Este es uno de los postulados básicos de la didáctica fundamental (Brousseau 1986) [9]

En otro orden de ideas, estamos convencidos de que el conocimiento matemático es una herramienta poderosa para el planteamiento y resolución de una diversidad de problemas que emergen de los diferentes campos del saber como la Química, la Física, la Ingeniería, la Sociología, etc., además, es considerado como uno de los contenidos valiosos para el desarrollo formativo del individuo.

Al referirnos al conocimiento matemático viene a la mente un cúmulo de ramas y conceptos, sin embargo, en este caso nos referiremos particularmente al Cálculo como aquella rama que ha sido medular en el desarrollo de la matemática. Su importancia ha sido tal, que actualmente se ha convertido en una herramienta poderosa, útil para analizar y establecer modelos de fenómenos de muy diferentes ciencias y esta relevancia le ha permitido ser incorporada en el currículo de planes de estudio de distintas carreras en las instituciones de educación media superior y superior, como es el caso de la Universidad de Sonora.

Sin embargo, hablar del Cálculo implica considerar a todo un grupo de temas y conceptos que son básicos en cada una de las etapas de formación de los estudiantes en cualquiera de las diferentes ciencias. Esto nos conduce a pensar que abordar un análisis desde cualquier perspectiva de la problemática derivada de la enseñanza y aprendizaje de esta rama de las matemáticas, es ambicioso, por esta razón y de acuerdo a las necesidades de nuestro trabajo nos restringiremos a considerar sólo una parte de él, en un campo de estudio específico.

Nos referimos al Cálculo Diferencial, dentro del cual aparece el concepto fundamental *de **la derivada***, así que en el transcurso del desarrollo de este trabajo cuando mencionemos al conocimiento matemático, estaremos haciendo referencia a él.

Con el fin de justificar el interés por estudiar el proceso de enseñanza de este concepto matemático, diremos que la Química, como la mayoría de las ciencias naturales, incluye enunciados cualitativos o descriptivos acerca de la naturaleza de los procesos que estudia, los cuales están caracterizados por una serie de cambios y variaciones. Para tal propósito esta ciencia ha tenido que buscar la manera de describir y cuantificar esos cambios y variaciones a través de modelos matemáticos, y justamente a este propósito sirve el concepto matemático de la derivada.

En el presente trabajo nos propusimos hacer un análisis de una situación didáctica en la que el profesor incorpora la computadora, cuando trabaja en la enseñanza de la derivada. Tomamos como hipótesis que el empleo de la computadora en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas transforma y modifica las interacciones del sistema didáctico: profesor-alumno-saber a enseñar.

En el apartado siguiente abundaremos sobre algunas de las cuestiones aquí vertidas y explicitaremos nuestro problema de investigación.

CAPÍTULO II

EL PROBLEMA Y SU JUSTIFICACIÓN

2.1 El problema

Las perspectivas con que se han venido incorporando las nuevas tecnologías al campo de la educación matemática, están haciendo necesario plantear nuevos modelos de investigación alrededor de los procesos educativos.

Se concibe el aula como el lugar donde en distintos niveles, de manera explícita e implícita se da una amplia gama de interrelaciones entre quienes protagonizan las acciones, entrando en juego una serie de actitudes, valores, conductas, roles, y un conjunto de responsabilidades mutuas entre éstos.

Con estas condiciones se habla de los ambientes de aprendizaje, como una posibilidad de recrear los sistemas educativos de una manera integral, sistemática y continua, con el fin de favorecer las estrategias encaminadas a darle sentido y significado al contenido matemático.

Conviene enfatizar al respecto que nuestro interés se ha centrado en observar, de toda la problemática que se desprende de la enseñanza de las matemáticas, un problema generado en el proceso de enseñanza de la materia de cálculo diferencial, particularmente la enseñanza y el aprendizaje del concepto matemático de derivada, cuando en estos procesos se incorpora la computadora.

Conscientes de esta problemática y del campo que se abre para llevar a cabo investigaciones de esta naturaleza, nos propusimos la realización del presente estudio, el que llevamos a cabo al interior del salón de clases en un grupo de estudiantes de la carrera de Químico Biólogo que cursan la materia de cálculo diferencial.

Consideramos pertinente mencionar que lo realizamos apoyándonos en nuestras experiencias en la docencia, pero fundamentalmente basándonos en algunos conocimientos teóricos en los que se sustentan las investigaciones en el campo de la Matemática Educativa.

Por otra parte es importante señalar que este trabajo puede ser abordado desde distintas ópticas o enfoques, de muy diversas formas, y sustentado en algún aparato conceptual. De toda esa amplia gama de puntos de vista, restringimos el estudio a aquel que tiene que ver con las interrelaciones que se dan entre el profesor, los alumnos y el conocimiento matemático cuando estos procesos son asistidos por la computadora.

Concretamente formulamos el trabajo a partir de la observación y análisis del ambiente que emerge de las interrelaciones que viven los protagonistas en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto matemático de derivada, con el propósito de caracterizar el contrato didáctico que se crea en la situación didáctica propuesta.

Específicamente nuestro problema consistirá en:

Caracterizar el contrato didáctico que se crea en una situación en la que se emplea la computadora para llevar a cabo los procesos de enseñanza y aprendizaje de la derivada.

Ahora bien, a este respecto podemos decir que hemos incluido el concepto de derivada como parte de los elementos de análisis bajo los siguientes supuestos.

- Es un tema de primera importancia en cálculo y en la formación matemática de un Químico Biólogo.

- Por las dificultades reportadas para su aprendizaje.
- Por la riqueza de interpretaciones.
- Por su relación con el desarrollo del cálculo en el área de Químico Biólogo.

2.2 Justificación

Un elemento crucial que creemos que día con día se vuelve importante, y que tradicionalmente no ha tenido la atención que le corresponde o que no se ha considerado en la vida de nuestra institución, es el que se refiere al análisis y estudio del fenómeno educativo que se genera en el ambiente que se vive en el salón de clases, cuando se incorpora la computadora.

Los motivos que dieron pie para la selección de nuestro problema de investigación están relacionados con el interés de estudiar las repercusiones que está teniendo el empleo de la computadora en el campo de la educación matemática, particularmente en las interacciones entre los protagonistas, así como con la inquietud por caracterizar el conjunto de interrelaciones que se generan en el sistema didáctico integrado por el profesor, los alumnos, el conocimiento matemático y la introducción de un nuevo elemento tecnológico como lo es la computadora.

" ... La aparición de las calculadoras gráficas y de los sistemas de manipulación simbólica, por ejemplo, deben tener eventualmente efectos importantes en las matemáticas que enseñamos. Estos cambios en el currículo estarán acompañados por cambios en las creencias acerca de las matemáticas y por oportunidades para vivir experiencias matemáticas que sean emocionalmente más positivas. La investigación debería guiar nuestros esfuerzos con el propósito de aumentar las reacciones afectivas hacia las matemáticas de carácter positivo a través de la utilización creativa de la tecnología." [22]

"El punto de vista didáctico imprime otro sentido al estudio de las relaciones entre los dos subsistemas: Alumno –Saber. El problema principal de investigación es el estudio de las condiciones en las cuales se construye el saber, pero con el fin de optimización, de su control y de su reproducción en situaciones escolares. Esto obliga a conceder una importancia particular al objeto ***de las interacciones entre los dos subsistemas****, que es precisamente de* ***situación problema*** *y* ***la gestión*** *por el profesor en esta interacción."* [13]

La investigación cuya propuesta se presenta en este documento se justifica en la necesidad y el interés por contar con la caracterización del contrato didáctico, en el contexto del salón de clases en donde se incorpora la computadora para llevar a cabo la actividad didáctica, y donde interactúan los protagonistas de tal situación.

A continuación resumimos algunos aspectos que consideramos importante señalar para la justificación del presente trabajo.

- ✓ Dado que el proceso de enseñanza de la derivada es un fenómeno tan complejo, que incluye una diversidad de elementos implícitamente relacionados con las interacciones profesor-alumno-computadora, resulta interesante emprender una investigación en torno a esta problemática.

- ✓ La incorporación de la computadora en educación matemática está generando nuevas situaciones didácticas. Abriendo nuevas formas de trabajo y nuevas responsabilidades al modificarse el ambiente mediado por el uso de este recurso, y creando, además, diversas expectativas de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

- ✓ Es justificable el hecho de tener la oportunidad para observar, analizar e interpretar las interrelaciones: profesor-alumno-computadora en el interior del aula cuando está en juego la enseñanza de la matemática, a través del análisis de las reglas implícitas de un concepto teórico aún no utilizado, al menos explícitamente, en el contexto de nuestra institución, nos referimos al contrato didáctico.

- ✓ Ha habido creciente interés por desarrollar trabajos orientados a tratar de entender y formular respuestas a la problemática generada por la enseñanza y el aprendizaje de la derivada con apoyo del recurso computacional; sin embargo, en la bibliografía consultada no se registra un estudio con el enfoque que nosotros hemos abordado esta investigación.

- ✓ Pensamos que es importante desarrollar investigación acerca de los efectos de la incorporación de este tipo de tecnología en la enseñanza de las matemáticas y cómo ella afecta en las interrelaciones profesor-alumno.

- ✓ Es importante también por razones internas y externas. En cuanto a las primeras, porque los procesos de innovación tecnológica en el campo de la educación matemática requieren recursos económicos que es necesario justificar adecuadamente. En cuanto a las segundas, creemos que los resultados de esta investigación de alguna forma pueden fundamentar decisiones futuras en cuanto a la incorporación de nuevas formas de trabajo.

- ✓ Consideramos que será de utilidad observar la interrelación que se da entre los actores cuando entran en juego en el proceso de enseñanza de la derivada, y poder caracterizar el contrato didáctico, cómo puede ser explicado y en última instancia, qué posibilidades tenemos de aportar elementos para posteriores estudios en distintos cursos y diversos conceptos matemáticos.

2.3 Objetivos

La investigación se orientó hacia el logro de los siguientes objetivos:

Objetivo general

Caracterizar el conjunto de interrelaciones que se establecen en el salón de clases, entre el profesor, los alumnos y el conocimiento matemático involucrado, cuando los procesos de enseñanza y de aprendizaje son asistidos por computadora.

Objetivos específicos.

- Explicar de qué manera el papel del profesor y el de los estudiantes tiende a modificarse en el desarrollo del proceso de enseñanza de la derivada, de acuerdo con sus expectativas.

- Describir qué tipo de procedimientos[4] y normas de comportamiento presentan el docente y los alumnos, cuando interactúan con el objeto matemático en juego.

- Interpretar qué efectos produce esta tecnología en el papel que el profesor cree que le toca asumir en su enseñanza, y cómo incide en el papel que el estudiante considera que le corresponde jugar en su proceso de aprendizaje.

---

[4] Entendiendo los procedimientos como todas aquellas actividades didácticas desarrolladas por el profesor y los alumnos con la intención de que éstos se apropien del saber matemático en juego.

Del planteamiento de estos objetivos, se derivaron las siguientes preguntas de investigación:

- ¿ Qué tipo de responsabilidades y obligaciones se pueden detectar en las interacciones dentro del aula, entre el protagonista que conduce la actividad de aprendizaje (el profesor) y quienes aprenden (los alumnos)?

- ¿ Qué aspectos relacionados con las matemáticas influyen para que los participantes actúen como lo hacen?

- ¿Hasta qué punto cumple las expectativas del profesor y de los alumnos el empleo de esta tecnología?

CAPÍTULO III

MARCO DE REFERENCIA

En este capítulo se decidió establecer un marco de referencia que sería útil y conveniente para los fines de nuestra investigación, ya que nos permitiría identificar cómo a lo largo de estas últimas décadas en nuestra institución, particularmente en el Departamento de Matemáticas, se ha venido incorporando la computadora en la enseñanza de las matemáticas.

En primer término presentaremos algunos aspectos que tienen que ver con el desarrollo de la tecnología de la computadora, su presencia en la sociedad y en nuestra institución -la Universidad de Sonora- y cómo su incorporación en el ámbito educativo está despertando el interés de muchos investigadores del campo de la Matemática Educativa. En un segundo momento centramos la atención en el Departamento de Matemáticas.

En relación con nuestro primer planteamiento, mencionaremos que los orígenes de las primeras computadoras, de acuerdo con las referencias bibliográficas consultadas, datan de la década de los cincuentas del siglo pasado, y a partir de esta época el desarrollo que ha tenido esta tecnología es incesante. En la década de los ochentas, la sociedad empieza a vivir el surgimiento de una *revolución informática* provocada precisamente por los grandes avances en la tecnología de la computadora, equiparable con la *revolución industrial* causada por el invento de la máquina de vapor en el siglo XVIII.

La *revolución industrial* provocada por la fuerza del vapor, liberó la fuerza del hombre de muchas tareas que antes eran exclusivas de él, elevando la productividad y generando muchos e importantes cambios sociales, culturales y económicos en la sociedad.

Por otra parte lo que podemos reconocer como *revolución informática*, basada en el poder de la computadora, ha liberado la mente del hombre de muchas tareas tediosas, generando nuevas formas de productividad así como una serie de cambios sustanciales en el empleo, en las competencias y actitudes del ser humano.

La Universidad de Sonora no ha quedado al margen de este fenómeno, pues en esta institución, en la década de los setentas ya se contaba con un equipo de cómputo. La aplicación que se le daba a este equipo era básicamente de carácter administrativo, también se prestaba servicio a diversas empresas de la región, y posteriormente se empezó a dar acceso a estudiantes de ciertas carreras para correr programas.

En la década de los ochentas se introducen al mercado las microcomputadoras, y la Universidad de Sonora empieza paulatinamente a instalar estos equipos en la mayoría de los Departamentos, primeramente para el uso administrativo y posteriormente para el área académica.

El Departamento de Matemáticas es uno de los Departamentos de nuestra institución en los que se ha venido impulsando el uso de la computadora en las distintas actividades académicas, particularmente aquellas que están vinculadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En este contexto ubicamos nuestro problema de investigación, sin embargo consideramos necesario obtener otro tipo de referencias en torno al problema propuesto. Para tal propósito planteamos las siguientes acciones:

- La primera tiene que ver con una indagación bibliográfica, la que emprendimos con el fin de revisar y obtener referencias de trabajos que se han realizado en esta línea de investigación.

- La segunda tuvo que ver con una encuesta que aplicamos entre los profesores de este departamento, para conocer cuántos de ellos han venido empleando la computadora en su actividad docente y cuál es el uso que se le ha dado.

En la siguiente sección, procedemos a analizar con cierto detalle cada una de estas cuestiones, poniendo interés en los aspectos que tienen relación directa o indirecta con nuestra investigación. Mostraremos aquellos trabajos e investigaciones que consideramos relevantes para incluirlos en este marco referencial, ya que en este aspecto hemos revisado otros medios de información; revistas, tesis de maestría de la localidad, artículos y trabajos reportados en Internet.

3.1 Revisión bibliográfica

En cuanto a la revisión bibliográfica la hicimos esencialmente con el fin de observar qué tipo de investigaciones se habían hecho en la dirección en la que nosotros hemos planteado, para esto nos pareció que una muestra representativa serían los trabajos de tesis de nivel de maestría y doctorado realizados por profesores del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV[5].

Reconociendo que ésta es la institución más importante en la formación de expertos en Matemática Educativa, que es el eje que sustenta las investigaciones en esta Disciplina, y que en cierta forma los resultados de los trabajos que se desarrollan ahí son el reflejo de lo que se hace en este campo de estudio en el ámbito nacional.

[5] En el Anexo A1 se menciona la relación de trabajos analizados

Como lo manifestamos anteriormente nuestro propósito se centró en detectar específicamente aquellos trabajos que se han desarrollado en la dirección que nosotros hemos emprendido nuestra investigación. En este sentido el análisis de la información nos revela que, un número significativo de trabajos de tesis de nivel maestría en estas últimas décadas se han orientado de alguna forma al estudio de aspectos que tienen que ver con la incorporación de la computadora en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En el periodo de 1987 a 1998 encontramos veinte trabajos en los que se estudia de alguna forma la incorporación de la computadora en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Dichos estudios fueron abordados desde distintos enfoques, desde distintas perspectivas teóricas y en diferentes niveles escolares.

De estos 20 trabajos:

- ✓ 17 son propuestas didácticas que se orientan al estudio de las posibilidades de incorporar la computadora como apoyo didáctico o como herramienta didáctica.

- ✓ 3 tienen que ver con el uso de la computadora, para el diseño y aplicación de software didáctico, u otras actividades relacionadas con la enseñanza de las matemáticas.

- ✓ 7 tienen que ver directamente con la enseñanza del cálculo, y nuestro interés por mencionarlo se debe precisamente a que nuestro trabajo lo hemos ubicado en el fenómeno involucrado en la enseñanza y el aprendizaje de uno de los conceptos del cálculo.

En esta sección, no podemos dejar de mencionar una trabajo que recientemente se ha desarrollado en el campo de la Matemática Educativa, que incorpora como eje central en su investigación el ***contrato didáctico***. Nos referimos al trabajo de tesis realizado por Gisela Montiel Espinoza. [18]

En nuestra opinión, es el contrato didáctico la noción que nos ha permitido analizar el funcionamiento de la unidad mínima de estudio, o unidad básica, de la didáctica de la matemática, es decir, el sistema formado por el triángulo didáctico: el saber a enseñar, el alumno y el profesor. En tanto que es una noción que aún no usa cotidianamente en los distintos trabajos de la matemática educativa .... de algún modo hemos querido mirar más de cerca, cómo es que se usa la noción de contrato didáctico para el análisis de fenómenos ligados al aprendizaje en matemáticas. [18]

El trabajo mencionado tiene como propósito hacer un análisis de lo que ocurre en la práctica educativa en un ambiente a distancia, esto es, centrando el estudio, no en una investigación de la educación a distancia, sino que el objetivo se centra en el análisis de los elementos que forman parte de la práctica educativa que son inherentes a la actividad desarrollada en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, en un escenario no presencial, específicamente en la modalidad en línea y con profesores interactuando con objetos matemáticos de nivel superior.

Es importante destacar que el sustento teórico de la investigación de referencia, está en la Teoría de las Situaciones Didácticas, desarrollada por Guy Brousseau, bajo la tesis de que esta Teoría permite diseñar y explorar los fenómenos didácticos que se presentan en el sistema interactivo que se genera en un *medio* en donde interactúan los protagonistas de esta situación didáctica, esto es, el profesor, los alumnos y el saber a enseñar en un ambiente virtual.

Después de hacer una descripción general de esta teoría y las situaciones didácticas que le dan sentido, se centra en uno de sus elementos, el contrato didáctico, del cual se hace un análisis más completo para finalmente incorporarlo como eje central de su investigación.

3.2 La encuesta[4] y sus resultados [5]

De acuerdo con las acciones propuestas, la segunda actividad de recolección de información la hemos hecho a través de una encuesta. Así que los datos que presentamos a continuación han sido obtenidos de dicha encuesta, aplicada a 46 de un total de 50 profesores de tiempo completo del Departamento de Matemáticas, a quienes se les cuestionó sobre aspectos que tienen que ver fundamentalmente con el uso de la computadora en sus distintas actividades académicas, poniendo especial interés en la enseñanza de las matemáticas.

Observamos que de los 46 profesores a los que se le aplicó la encuesta, 13 imparten la materia de cálculo, mientras que los restantes 33 imparten distintas materias como Análisis Matemático, Álgebra, Geometría, Probabilidad, Estadística, Ecuaciones Diferenciales, entre otras.

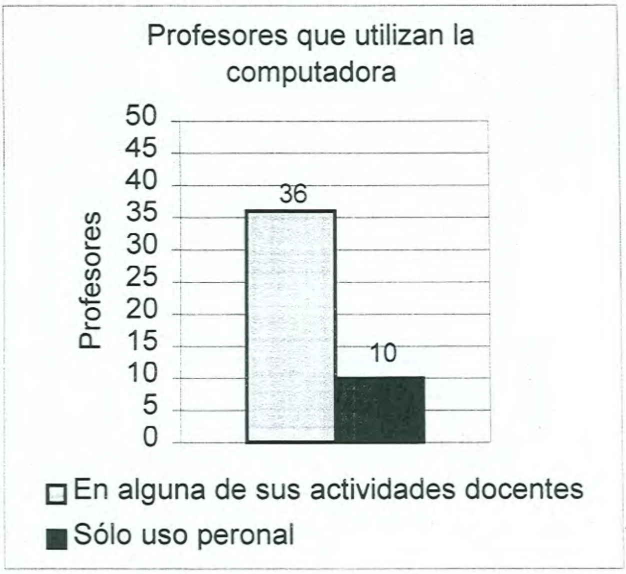
La presentación de la información recabada hasta este momento, la haremos de tal forma que se vaya centrando en los profesores de nuestro interés, es decir, aquellos que en su actividad docente utilizan la computadora, particularmente en quienes la utilizan en la enseñanza de las matemáticas.

En la gráfica 3.1 presentamos el resultado global de los 46 profesores, en cuanto al uso de la computadora en sus actividades académicas.

---

[4] Véase Anexo A3.
[5] La información completa se encuentra en el Anexo A4

Resultado global

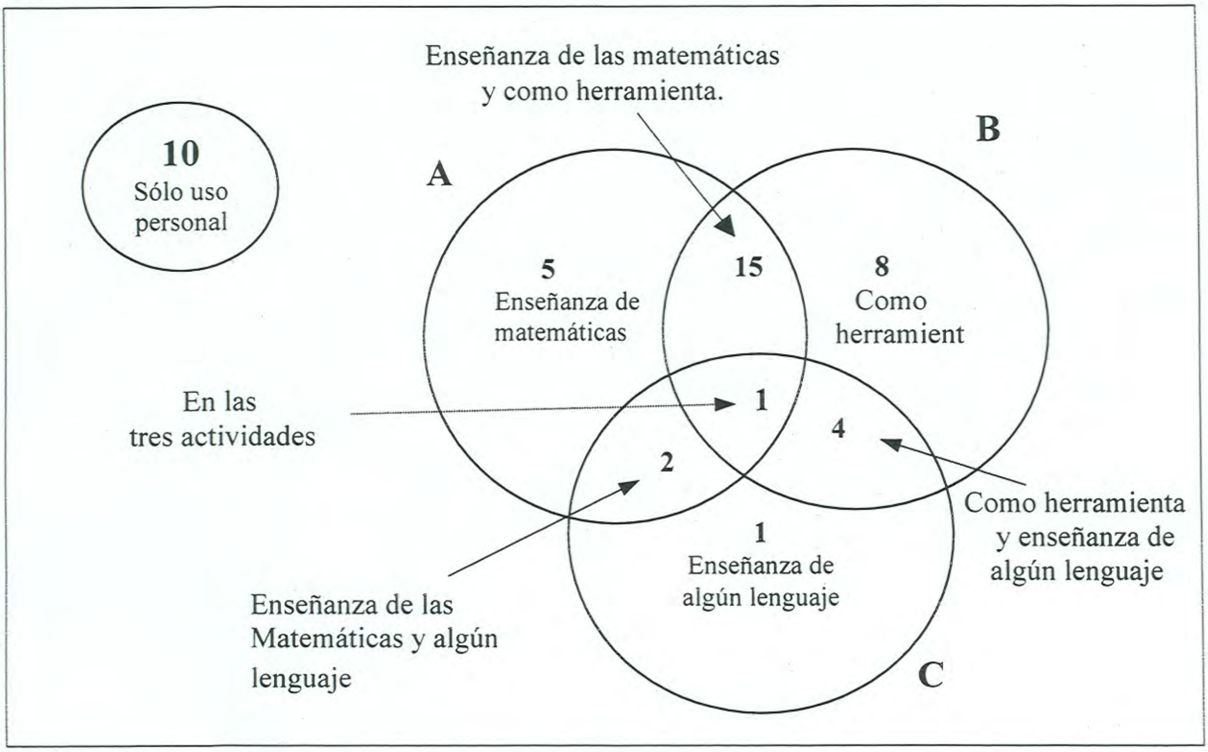


Gráfica 3.1

Basándonos en la información mostrada en la gráfica 3.1, observamos que una gran proporción de profesores en este Departamento utilizan la computadora de alguna forma en sus actividades académicas, lo que significa en términos globales, que el interés de los profesores por el uso de esta tecnología en sus actividades va en aumento. Con el fin de ubicar las actividades de los 36 profesores que utilizan la computadora, hicimos la siguiente clasificación. En la gráfica 3.2 se ilustra la situación correspondiente.

A. En la enseñanza de las matemáticas
B. Como herramienta para organizar sus tareas académicas
C. Para la enseñanza de algún lenguaje de programación.

Distribución del uso de la computadora



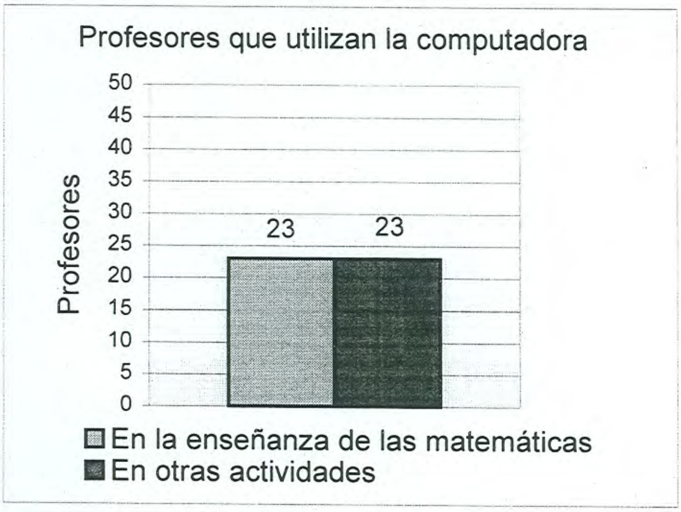
Gráfica 3.2

En las regiones del área A de la gráfica 3.2 podemos apreciar la distribución de los 23 profesores que utilizan la computadora en la enseñanza de las matemáticas, repartidos en las siguientes proporciones y en las siguientes actividades:

- ✓ 15 en la enseñanza de las matemáticas y como herramienta
- ✓ 2 en la enseñanza de las matemáticas y en la enseñanza de algún lenguaje de programación.
- ✓ 5 en la enseñanza de las matemáticas.
- ✓ 1 la utiliza en las tres actividades.

La información anterior nos permitió ir acotando nuestra observación hacia aquellos profesores que emplean la computadora en la enseñanza de las matemáticas, ya que nuestro propósito en este punto fue tener referencias de los profesores que desarrollan esta actividad. De estos datos, obtuvimos que 50% de ellos la emplean para la enseñanza de las matemáticas, como se muestra en la siguiente gráfica.

En la enseñanza de las matemáticas.



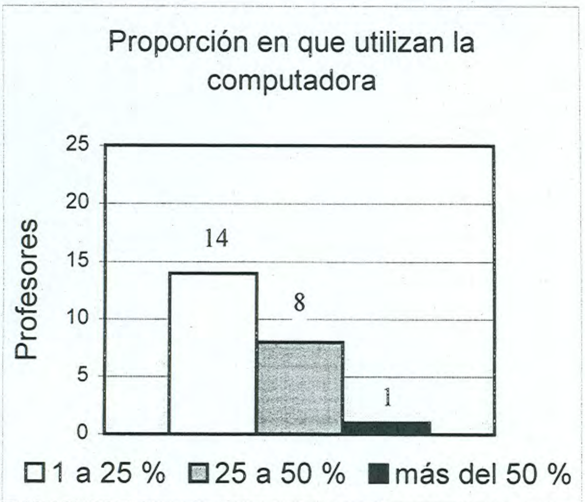
Gráfica 3.3

Dado que el interés de nuestra investigación era contar con las referencias generales de este tipo de profesores, centramos nuestra atención en ellos obteniendo otros datos útiles para nuestros propósitos, tales como:

- En que proporción utilizan la computadora en la enseñanza.
- Cambios que perciben al utilizarla.
- Si han elaborado alguna propuesta didáctica que contemple la incorporación de este recurso tecnológico.

De estas referencias, mostramos los resultados en la gráfica 3.4.

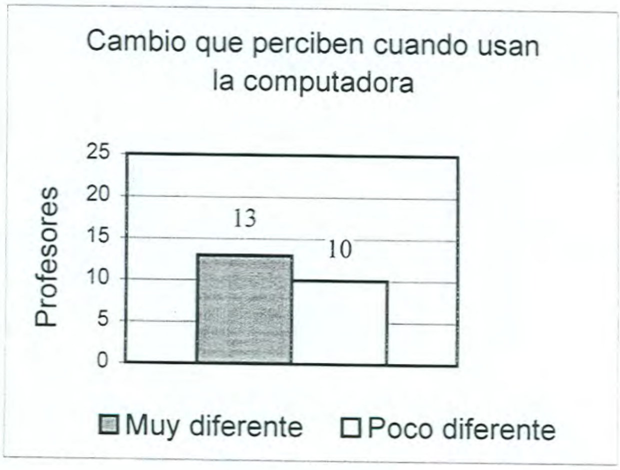
Proporción en que la utilizan.



Gráfica 3.4

En este rubro llama la atención que de los 23 profesores que usan la computadora en la enseñanza de las matemáticas, sólo uno la utilice más del 50%, y que en una mayor proporción de ellos, la empleen en porcentajes bajos, como se muestra en la gráfica 3.4.

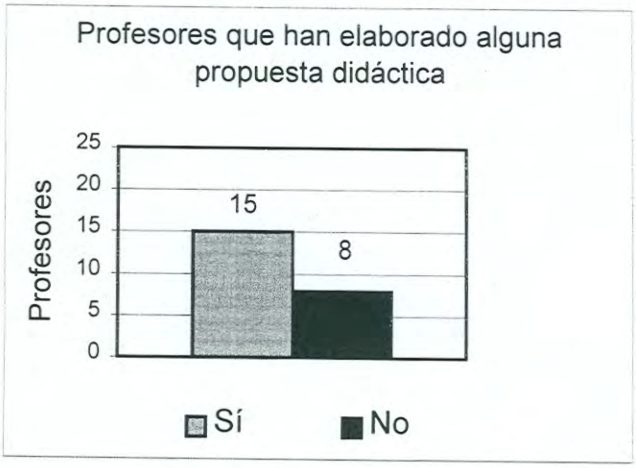
Otro aspecto que consideramos que se relacionaba con el empleo de este recurso tecnológico, era conocer si los profesores percibían algún cambio en las condiciones de trabajo cuando emplean la computadora en su enseñanza. Nuestro interés no fue entrar en detalle acerca de cuáles eran esos cambios, sino conocer en términos generales si ellos detectaban o no cambios en esa situación de enseñanza. A este respecto, encontramos información que mostramos en la gráfica 3.5.



Gráfica 3.5

En estas condiciones observamos que la mayor proporción, 13 de los 23 profesores, percibieron cambios significativos cuando usan la computadora con relación a cuando no la usan en su actividad docente.

El porcentaje de profesores que han realizado propuestas didácticas o metodológicas en el Departamento de Matemáticas se presenta en la gráfica 3.6. En este rubro tenemos que de los 23 profesores analizados, 15 han elaborado alguna propuesta didáctica.



Gráfica 3.6

Resultados

A partir de la información antes considerada podemos establecer las siguientes conclusiones:

- En términos generales observamos que los resultados de las investigaciones que se reportan fueron emprendidos desde distintos puntos de vista, en distintos niveles escolares o con distintos propósitos pero también pudimos detectar que, estos trabajos muestran escasamente algunos elementos que se pudieran ubicar en el contexto de nuestra investigación.

- En ellos se manifiesta una clara diferencia entre el nuestro, porque aquellos son fundamentalmente propuestas didácticas que persiguen sus propios objetivos, mientras que el nuestro parte de observar el resultado de una propuesta didáctica de las que ya se han realizado en nuestro entorno local, Departamento de Matemáticas, y de la cual nos interesa el análisis y estudio del conjunto de interrelaciones que se dan en el medio en donde se interrelacionan los actores de la situación didáctica.

En relación con la información recabada de los profesores del Departamento de Matemáticas, concluimos:

- El número de profesores que ha venido utilizando la computadora en sus actividades docentes es ya significativo.

- Aunque el interés de los profesores por el uso de este recurso va en aumento, también se observa que este incremento no es sistemático, pues sólo un profesor le emplea en una alto porcentaje.

- Es significativa la proporción de profesores que manifiestan notar cambios en el ambiente de enseñanza cuando usan la computadora.

- Asimismo hay evidencia del interés de los profesores por elaborar propuestas didácticas acordes con este recurso tecnológico.

En relación con estos aspectos recabados de los profesores en el Departamento de Matemáticas de esta institución, concluimos, que si bien es cierto que el uso de la computadora por parte de los profesores es cada vez más generalizado, y que el interés por elaborar propuestas didácticas es significativo, también es cierto que no ha habido un programa institucional que impulse este tipo de esfuerzos, sino que mas bien han sido trabajos desarrollados a título personal o de grupo.

Hasta aquí hemos querido dar un panorama general de lo que se ha venido presentando en el terreno de la investigación en el campo de la Matemática Educativa, y cómo se ha venido incorporando en estas investigaciones el empleo de la computadora, y cuáles han sido los fundamentos teóricos en los que se han sustentado. Lo anterior nos ha aportado elementos para justificar nuestro problema, y sobre todo que también nos ha permitido ubicar el problema dentro del contexto de esta disciplina.

CAPÍTULO IV

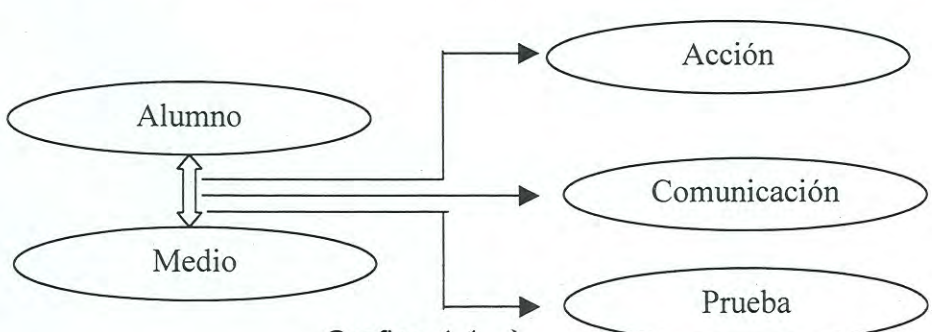
MARCO TEÓRICO

Uno de los puntos principales del marco teórico que sustenta esta investigación, es el concebir la idea de que en el ***medio*** en donde actúan los participantes de una situación didáctica, se crea un conjunto de interacciones entre ellos. Así que, para analizar tales interacciones era necesario respaldarnos en una herramienta teórica que orientara el trabajo hacia el logro de los objetivos. Bajo esta perspectiva se conformó el marco teórico.

4.1 Teoría de las Situaciones Didácticas

El enfoque general de nuestra investigación se ha inscrito dentro del marco general de la llamada ***Teoría de las Situaciones Didácticas*** desarrollada por Guy Brousseau, cuya mayor contribución consistió en enfatizar el carácter decisivo del conocimiento matemático en la problemática didáctica. Se propone el análisis del conocimiento matemático como vía de acceso para el estudio del fenómeno didáctico que se genera en la interacción de los elementos de la situación de enseñanza, partiendo del supuesto básico de que todo fenómeno didáctico tiene un componente matemático fundamental.

La idea básica de Brousseau es que el proceso para adquirir un conocimiento matemático consiste en diversas facetas y se basa en juegos específicos, donde el actor interactúa con un ambiente a distintos niveles, evolucionando sus nociones y su lenguaje. La interacción de un actor con su medio se da en tres niveles (ver Fig. 4.1)



Grafica 4.1

"La interacción del tipo de acción del actor fija un estado del medio o determina o limita las acciones de otros actores. La interacción del tipo de comunicación consiste en modificar los conocimientos de otro actor por medio de mensajes portadores de información, y por último la interacción de tipo de prueba tiende a la justificación o validación cultural de los actos o declaraciones establecidas explícita o implícitamente". [18]

"Brousseau utiliza una aproximación sistémica: considera la comunicación del conocimiento matemático como un proceso dentro de un sistema, sistema compuesto por una variedad de sub-sistemas que interactúan entre ellos. Dada la complejidad de las interacciones que se dan dentro de este sistema, Brousseau propone la construcción de un modelo de este sistema. Este modelo, conjunto de conceptos organizados, debe permitir la descripción de aquellos tipos de relaciones humanas pertinentes en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas; permitir considerar todos los fenómenos pertinentes; ser consistente".

El modelo que se propone está basado en cuatro conceptos. [11]

- *La situación didáctica*
- *La situación a-didáctica*
- *La transposición didáctica*
- *El contrato didáctico*

y en las siguientes hipótesis:

- *El conocimiento se produce dentro del espacio de las asociaciones entre las buenas preguntas y las buenas respuestas*
- *El alumno construye su conocimiento a partir de sus propias experiencias y de sus interacciones con el entorno como factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios (como en la sociedad misma)*

- *Sólo se reconoce que se ha adquirido un conocimiento cuando el alumno es capaz de resolver nuevos problemas*

Desde el punto de vista de Brousseau, por medio de **las situaciones didácticas** el profesor busca provocar en el estudiante los conflictos que lo lleven a la construcción del conocimiento. Este proceso de construcción se da en diferentes fases, de tal forma que el alumno interactúa con el ambiente y va logrando la evolución de las nociones originales. En una situación didáctica, se destaca la intencionalidad del profesor por lograr un objetivo de enseñanza previamente establecido. Como señala Chevallard, (1998), una situación didáctica comprende *El conjunto de relaciones establecidas explícitamente y /o implícitamente entre los alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente los instrumentos o los objetos) y el profesor a fin de conseguir que aquellos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución.* [11]

Cuando el alumno ha sido problematizado de tal forma que su actividad mental está en marcha, debe ser capaz de realizar acciones tales como hablar, argumentar, pensar y evolucionar pero por iniciativa propia. Esta etapa de la situación didáctica, en la cual desaparece la intencionalidad del profesor, donde su actividad es mínima, Brousseau la denomina **situación a-didáctica**.

4.2 El contrato didáctico

Las relaciones que se dan en el transcurso de la clase, y el juego dialéctico que se da entre situaciones didácticas y adidácticas, se rigen por el **contrato didáctico,** el cual podemos caracterizar como:

"El conjunto de comportamientos (específicos) del profesor que espera el alumno y conjunto de comportamientos del alumno que espera el profesor, que regulan el comportamiento de la clase y las relaciones profesor-alumno-saber, definiendo así los papeles de cada uno y la repartición de tareas: ¿quién puede hacer qué?. ¿quién debe hacer qué?..¿cuáles son los fines y los objetivos?" Brousseau 1986. [7]

El contrato didáctico no se reduce a estudiar las interrelaciones entendidas al nivel de contacto entre alumnos, profesor y conocimiento, sino que se concibe como el instrumento teórico que permite observar y analizar la actuación de los protagonistas cuando los primeros se enfrentan a un ambiente negociando significados de la matemática, y el segundo organizando el medio a través de situaciones problemáticas a-didácticas con la intención didáctica de adaptación.

"La descripción de los papeles que desempeñan el profesor y los alumnos, en el marco de la teoría de situaciones dejan ver la actividad del profesor representada en tres niveles, organización, devolución e institucionalización, y la actividad de los alumnos en los niveles de acción, formulación y validación como se muestra en el siguiente esquema". [18]. Ver Figura 4. *2*

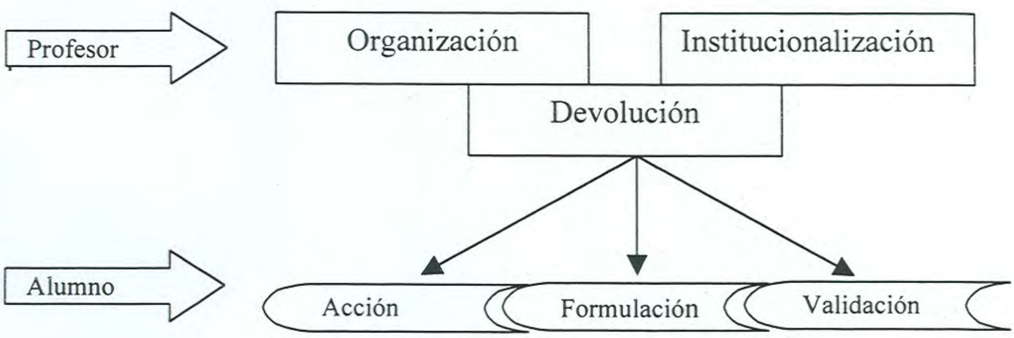


Figura 4.2

Con relación a los papeles que desempeñan el profesor y los alumnos, hemos querido hacer una breve descripción de cada una de estas acciones.

En relación con el profesor.

La organización. De manera natural, el profesor organiza las actividades que propondrá a los estudiantes con el fin de lograr los objetivos correspondientes a la clase. En la planeación el profesor deberá poner especial atención en provocar situaciones a-didácticas adecuadas.

Devolución. Esta es una etapa esencial en el juego didáctico. Es el acto mediante el cual el docente traspasa la responsabilidad de la situación al alumno, esto implica que el alumno asume y se hace cargo de las reglas del juego, del problema planteado, y toma la decisión para la búsqueda y elección de las estrategias a seguir.

Institucionalización. En el proceso de construcción del conocimiento los estudiantes generan procedimientos, algoritmos y concepciones que pueden formar parte del saber matemático reconocido socialmente. El profesor como depositario institucional de ese saber tiene la responsabilidad de comunicarlo a los estudiantes y hacer notar que los productos de la actividad escolar tienen cabida en la versión organizada de ese saber. A este proceso de comunicación se le denomina institucionalización.

Con relación a los alumnos

Acción. Este momento supone el análisis, y el establecimiento de las estrategias a implementar para resolver la situación problemática planteada por el profesor. En esta fase, los alumnos deberán comprometer sus conocimientos previos y sus propias heurísticas que le permitan abordar la tarea encomendada.

Formulación. Aquí el alumno propone modelos de la situación planteada, determinando las variables relevantes que define dicha situación.

Validación. En esta etapa se ponen a prueba los resultados desprendidos del modelo previamente formulado. La verificación y la argumentación son indispensables en el trabajo matemático que se realiza.

Las ideas que subyacen en estos trabajos han sido estudiadas por diferentes autores como Yves Chevallard (1988) quien describe el sistema didáctico en un sentido estricto, formado esencialmente por tres subsistemas: profesor-alumno-saber a enseñar, considerando, además, el medio exterior a la escuela, formado por la sociedad, los padres de familia, etc., integrando una zona intermedia entre éstos, denominada noosfera y que integrada al sistema didáctico constituye un sistema didáctico en sentido amplio.

Brousseau por su parte incorpora la idea de medio o milieu, entendida como los espacios físicos o virtuales que posibilitan la interacción de los participantes, conformado por materiales, juegos, situaciones didácticas, etc.

Textualmente manifiesta:

"El medio como conjunto de condiciones exteriores en las cuales vive y se desarrolla un individuo humano, juega un papel importante en la determinación de los conocimientos que el sujeto, su antagonista, debe desarrollar para controlar una situación de acción. Las teorías modernas le asignan un rol fundamental en los aprendizajes". (Brousseau, 1988) [18]

En el siguiente esquema (Figura 4.3) se pone de manifiesto que las interacciones se deben observar de forma sistémica para poder explicar los acontecimientos producidos en los procesos de enseñaza y aprendizaje.

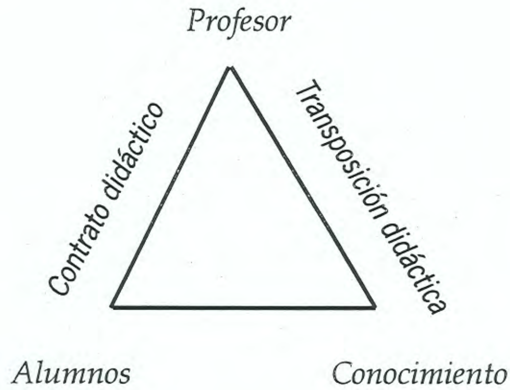


Figura 4.3

En el sistema didáctico propuesto, se perciben las relaciones en conjunto interviniendo los tres elementos, profesor-alumnos-conocimiento. Si vemos las relaciones que se presentan entre dos de los polos de este sistema didáctico, observamos que en ninguno de los casos se desliga el tercer elemento. Con el fin de tratar de interpretar esta idea, mostramos las siguientes relaciones:

La primera clase de relación es aquella que se da entre el alumno y el conocimiento matemático, podemos decir que este es un elemento esencial para que exista la educación. En este tipo de interacciones la influencia del profesor está presente ya sea en forma directa o indirecta cuando se encarga de conducir las actividades que los alumnos realizan, esta situación la representamos en la figura 4.4

Figura 4.4

En la relación entre el profesor y el conocimiento, podemos suponer que el profesor tiene sus propias concepciones acerca de lo que son las matemáticas y de la enseñanza de las mismas. Sin embargo en este conjunto de ideas tendrá que tomar en cuenta los procesos de aprendizaje del conocimiento de parte de los alumnos. Como se muestra en la figura 4.5.

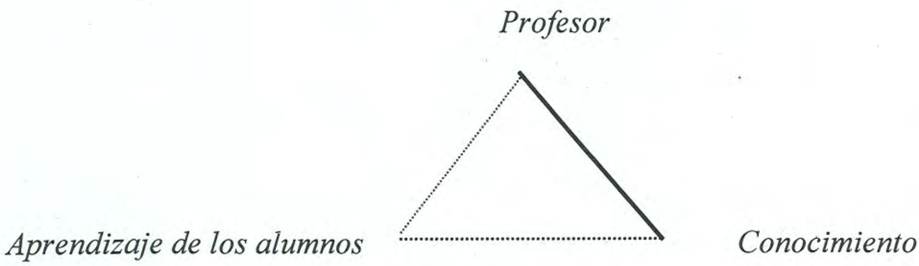


Figura 4.5

Por último en la relación entre el profesor y los alumnos la frecuencia e intensidad de la influencia del profesor en los alumnos son mayores que cuando se da la interacción alumno-contenido. Sin embargo no se puede desligar el conocimiento matemático dado que es motor que mueve la educación matemática. Esto lo podemos representar en la siguiente figura.

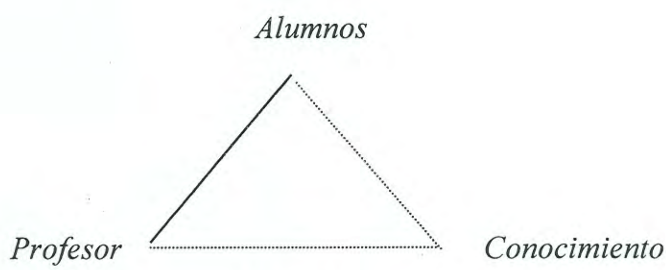


Figura 4.6

En este último tipo de relaciones se crea un fenómeno didáctico en la que se establece un conjunto de interrelaciones que son reguladas por un conjunto de cláusulas principalmente de carácter implícito y que evolucionan a medida que avanza el proceso didáctico. Este conjunto de cláusulas constituye lo que se ha denominado ***contrato didáctico***.

4.3 Los modelos de enseñanza

Otras ideas retomadas para conformar el marco de teórico, son las formuladas por Roland Charnay (1994). El autor describe algunos modelos de aprendizaje, analizados desde la perspectiva del contrato didáctico, observando y analizando el juego de interacciones que se dan entre los tres polos: profesor-alumno-saber. [7]

Los modelos a los cuales hacemos referencia son:

1. El modelo "normativo" (centrado en el contenido)
2. El modelo "incitativo" (centrado en el alumno)
3. El modelo "aproximativo" (centrado en la construcción del saber por parte del alumno)

En lo que sigue haremos una descripción de los modelos mencionados. Partiendo de la idea de que una situación de enseñanza puede ser observada a través del juego de las interrelaciones que acontecen en un escenario en donde opera la tríada didáctica integrada por:

- El profesor (P)
- Los alumnos (A)
- El conocimiento(C)

Como se muestra en la Figura 4.7

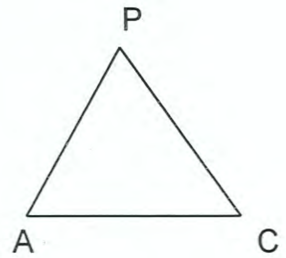


Figura 4.7

1. El modelo "normativo" -centrado en el contenido-

En este modelo, se concibe la idea de que el conocimiento ya está acabado y que la tarea del profesor se reduce a tomar y transmitir ese conocimiento a los alumnos al mismo tiempo que le proporciona ejemplos. Los alumnos por su parte deberán asumir su responsabilidad y entrar al juego didáctico en el que aprenden, escuchan, deben estar atentos, entrenan a la par con el profesor, ejercitan por su cuenta y al final aplican las técnicas en la solución de problemas aplicados. Esta idea está esquematizada en la figura 4.8.

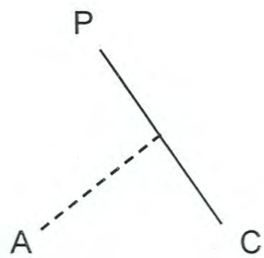


Figura 4.8

2. El modelo "incitativo"- centrado en el alumno-.

En este modelo los alumnos representan un papel relevante, ya que para el planteamiento de una determinada situación de enseñanza, se toman en cuenta sus intereses, sus necesidades, el entorno en donde se desarrollan, etc.

Bajo esta perspectiva el profesor interactúa con los alumnos en un primer nivel, y basándose en sus intereses y necesidades diseña y planea las estrategias con las que pretende motivarlos, suscitar su curiosidad hacia la búsqueda de la información, para que a través de este proceso ellos mismos organicen sus actividades, de tal modo que puedan apropiarse de las herramientas que les sean útiles para conseguir el aprendizaje del conocimiento en juego.

En este modelo el conocimiento en sí se estructura en un segundo plano pero ya en el proceso se vincula precisamente con lo que los alumnos requieren en su actividad cotidiana. Ver figura 4.9

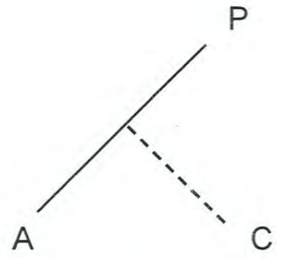


Figura 4.9

3. El modelo "aproximativo"-centrado en la construcción del saber por el alumno-.

En este modelo se propone partir de esquemas, de concepciones existentes en el alumno que se ponen a prueba para mejorarlas, modificarlas o construir nuevas concepciones, con el fin de lograr que él construya su conocimiento.

En estas condiciones el profesor actúa como organizador, interactuando desde un segundo nivel con el proceso en donde interactúan los alumnos y el conocimiento, en esa posición el profesor modela y organiza una serie de situaciones con las que pretende crear las condiciones propicias en las que los alumnos puedan interactuar con el conocimiento y con sus compañeros en un primer nivel, esperando que este juego de interacciones lo conduzcan a cumplir sus objetivos de apropiación del conocimiento. Ver Figura 4.10.

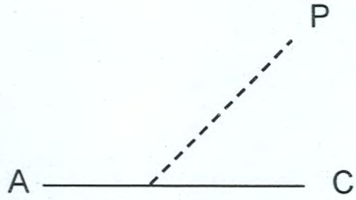


Figura 4.10

Con esta descripción hemos querido enfatizar que no es posible hacer un análisis de los elementos constitutivos de este triángulo didáctico de forma aislada, y que además pretendemos ir más allá de estas relaciones e incorporar un cuarto elemento, la computadora.

CAPÍTULO V
METODOLOGÍA

Introducción

El interés por obtener la información pertinente nos llevó a asistir al salón de clases, y observar el proceso que se da al interior de él, para llevar un registro pormenorizado de las acciones que ahí desarrollan los participantes.

Bajo esta perspectiva consideramos conveniente emplear una metodología de corte cualitativo. Utilizamos el enfoque etnográfico, ya que el objetivo central de esta técnica es el estudio de fenómenos en su marco natural, es decir, en el espacio donde ocurren los hechos; desde una perspectiva subjetiva y cualitativa.

La etnografía, como método de investigación, nos ha ayudado a interpretar y comprender el ambiente que se vive en el salón de clases. Se centra en el estudio de un grupo de personas que tienen algo en común, en un lugar determinado. Es holística y contextual, es decir aborda la realidad cultural de un grupo de personas como un todo, en el cual cada una de las conductas o eventos tiene un significado en relación con el contexto global en donde se desenvuelven, lo cual implica que las observaciones son puestas en una perspectiva amplia, entendiéndose que la conducta de las personas sólo puede ser entendida en contexto dentro de las interacciones de los protagonistas. .

Con el método empleado no nos limitamos a la observación participante, también recabamos notas de campo acerca de observado, consultamos documentos, usamos cuestionarios, entre otras actividades.

De acuerdo con Cook y Reichardt (1995) este tipo de investigaciones no pretende la generalización de resultados, sino el estudio cuidadoso de casos particulares. Para Barrantes (1999) la investigación de tipo cualitativo postula una concepción fenomenológica, inductiva y orientada al proceso. [16]

5.1 El trabajo de campo

El trabajo de campo lo llevamos a cabo con un grupo de estudiantes de la carrera de Químico Biólogo que cursan la materia de cálculo diferencial. En el grupo seleccionado el profesor del curso tenía experiencia en el uso de la computadora para la enseñanza del cálculo y proyectaba hacerlo sistemáticamente durante el periodo lectivo en que realizamos la investigación.

El curso formulado en esta propuesta tiene una duración de un semestre y está dirigido a los alumnos que estudian en el área de Químico-Biólogo. El tiempo destinado en el programa para el mismo es de cinco horas semanales.

El medio donde se desarrollaron los hechos fue un salón o laboratorio de cómputo cuyo mobiliario estaba compuesto de mesas de trabajo. En cada mesa se instalaron dos computadoras. La dinámica de trabajo se organizó con base en equipos de tres estudiantes, con dos computadoras por equipo. El profesor asistía personalmente a los equipos.

En el diagrama de la Figura 5.1 se muestra la organización de la sala de cómputo.

Organización del ambiente de trabajo en el grupo seleccionado

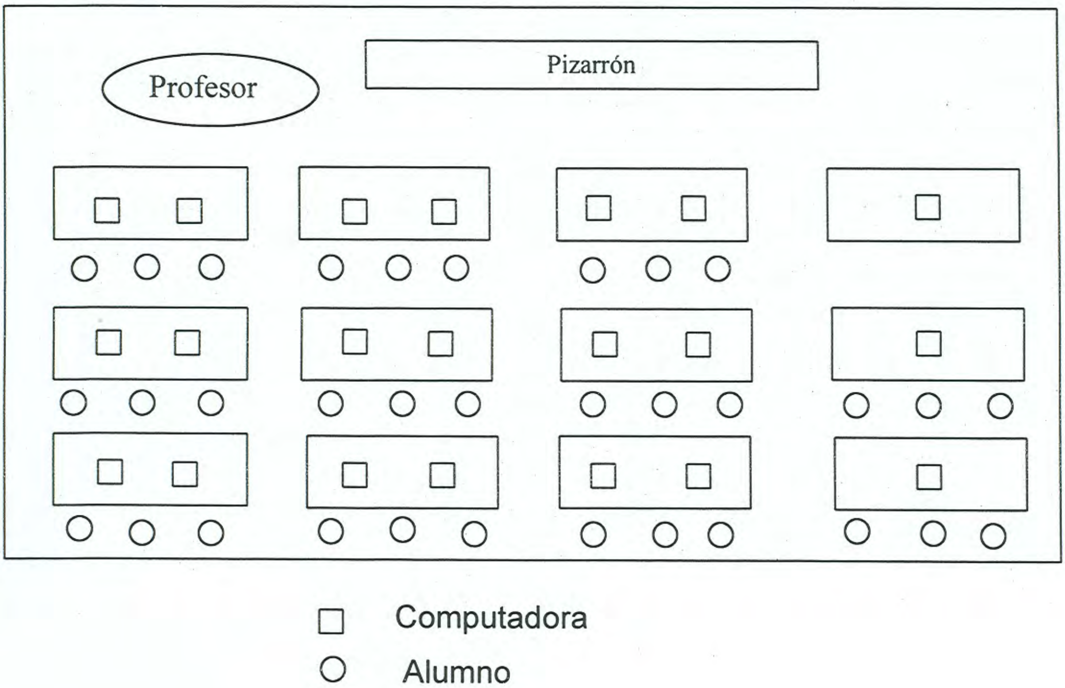


Figura 5.1

Las técnicas de recolección de información empleadas consistieron en:

- ***La observación participativa.***
- ***Notas de campo.***
- ***Los cuestionarios.***
- ***El análisis de documentos.***
- ***Las grabaciones de audio y video.***
- ***Las entrevistas.***

A continuación describiremos cada una de ellas, en el contexto de nuestra investigación.

5.2 La observación

En el párrafo siguiente se expresa la importancia y características del proceso de observación:

"La observación como otros procedimientos de recogida de datos, constituye un proceso deliberado y sistemático que ha de estar orientado por una pregunta, propósito, o problema. Este problema es el que da sentido a la observación en sí y el que determina aspectos tales como el qué se observa, quién es observado, cómo se observa, cuándo se observa, dónde se observa, cuándo se registran las observaciones, qué observaciones se registran, cómo se analizan los datos procedentes de la observación o qué utilidad se le da a los datos.".[16]

En nuestro caso:

- ✓ Al asistir al salón de clases tratamos de comportarnos como un miembro más del grupo para comprender mejor las interacciones profesor-alumno-computadora, sin embargo, cabe aclarar que tomamos una postura de observador externo con el fin de tener una perspectiva adecuada acerca de las actividades que se realizaban en el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

- ✓ Nuestra primera intención al asistir al salón de clase fue recabar toda la información posible de los hechos generales que se fueran presentando. Sin embargo a medida de que fuimos ubicándonos en los objetivos de nuestra investigación, centramos nuestra atención en aquellos hechos y acontecimientos que considerábamos que estaban relacionados con lo que buscábamos.

- ✓ Tratamos, en la medida de lo posible, ser sensibles y cuidadosos para no producir algún efecto o perturbación en las actividades del participante de la clase, especialmente cuando asistíamos con la cámara de video, la grabadora, o al momento de tomar alguna nota.

5.3 Notas de campo

Conforme se efectuaba la tarea de observación, llevamos un registro pormenorizado por medio de anotaciones, que incluyen comentarios, diálogos, cuestionamientos, etc., del profesor y los alumnos acerca de aspectos relacionados con la situación didáctica que se presentaba en cada momento.

Naturalmente que al resumir y sintetizar este registro de notas incorporábamos nuestras propias interpretaciones y puntos de vista, pues como investigadores presenciábamos directamente los acontecimientos y eso nos permitía centrar la atención en aquellos fenómenos de interés para los propósitos del presente estudio.

5.4 La encuesta[6]

Diseñamos una encuesta que contenía básicamente cuestionamientos orientados a recabar los datos e información que nos permitieran tener un diagnóstico general sobre el uso de la computadora en las actividades académicas. Tal encuesta fue aplicada en el Departamento de Matemáticas, a 46 profesores de tiempo completo de un total de 50. Los resultados de esta etapa del trabajo se muestran en el capítulo correspondiente al marco referencial.

Los resultados preliminares recopilados hasta aquí nos sirvieron de base para seleccionar algunos profesores con los cuales consideramos conveniente intercambiar algunas opiniones y puntos de vista en cuanto a su participación en trabajos relacionados con el uso de la computadora en la enseñanza de las matemáticas.

---

[6] Ver Anexo A3.

5.5 Análisis de documentos

Llevamos a cabo una revisión bibliográfica con el propósito de familiarizarnos con aspectos que tiene que ver con nuestro problema. En esta tarea analizamos varios estudios disponibles en nuestro medio, investigaciones desarrolladas en el ámbito nacional, así como trabajos que se encuentran en Internet, entre otros.

Los resultados del análisis de esta revisión constituyeron una parte importante para la justificación de nuestro problema de investigación y ya fueron mostrados en el apartado correspondiente.

5.6 Grabaciones de audio y video

Una parte importante de la evidencia de investigación se obtuvo mediante grabaciones de audio y video, en un lapso que consideramos razonable para poder captar los hechos relevantes para nuestros propósitos; para ello asistimos a las sesiones correspondientes.

5.7 Las entrevistas

Con la intención de profundizar en varios aspectos, planeamos y llevamos a cabo entrevistas al profesor y algunos estudiantes. Aún cuando diseñamos una guía para estas entrevistas, hubo momentos en que la conversación proporcionó más información de la esperada, lo cual resultó favorable para nuestros propósitos.

CAPÍTULO VI
EL ANÁLISIS

6.1 PRIMERA PARTE

Iniciaremos este apartado haciendo algunos comentarios respecto al programa del curso de Cálculo Diferencial en la carrera de Químico-Biólogo de la Universidad de Sonora. La investigación se llevó a cabo en un grupo escolar que estaba cursando esta asignatura y el programa es el primer acercamiento a conocer los aspectos matemáticos a desarrollar.

El curso en cuestión se ubica en el primero de 10 semestres de la carrera mencionada. En el caso del currículo de matemáticas, al curso de Cálculo Diferencial le continúan otros tres de matemáticas: uno de cálculo integral, otro de ecuaciones diferenciales y uno más de probabilidad y estadística.

El programa sintético es el siguiente[7]:

I. Sistemas numéricos
II. Funciones reales de una variable
III. Límites y continuidad
IV. Derivación
V. Aplicaciones de la derivada
VI. Diferenciales
VII. Antiderivadas

Del análisis del programa de curso mencionado, interpretado en los términos en los cuales Roland Charnay [7] caracteriza las diversos modelos de enseñanza a través del contrato didáctico, se desprende el hecho de que la propuesta curricular formal se corresponde con un modelo normativo, centrado en el saber matemático. Las sugerencias metodológicas ahí contenidas proponen la actividad del aula centrada en la figura del profesor, quien deberá transmitir el

[7] Fuente: Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora. Anexo A5

conocimiento institucional que él posee a los estudiantes; éstos por su parte deberán hacer lo conducente para apropiarse de ese saber (escuchar, estar atentos, seguir los ejemplos con los cuales el profesor ilustre, etc.)

Por otra parte, la propuesta investigada se desarrolló en un escenario novedoso, dado que el equipo integrado por el profesor, la metodología y con la inclusión de tecnología de cómputo modificó el proceso didáctico y, en consecuencia el manejo del concepto matemático de la derivada. Se percibe de entrada que la sala de cómputo se convirtió en un sitio en donde los alumnos pusieron en práctica sus conocimientos matemáticos guiados por el profesor para llevar a cabo una serie de acciones, formulaciones y validaciones.

Por supuesto que en estos niveles de acciones la computadora permitió situaciones que permitieron que el profesor pusiera en práctica los problemas y su metodología de trabajo diseñada para tal propósito, y los alumnos por su parte practicaron y aplicaron los conceptos con la intención de buscar la solución a dichos problemas. Hemos querido representar tal escenario situando en el triángulo didáctico la incorporación de la computadora, como se muestra en la figura 6.1.

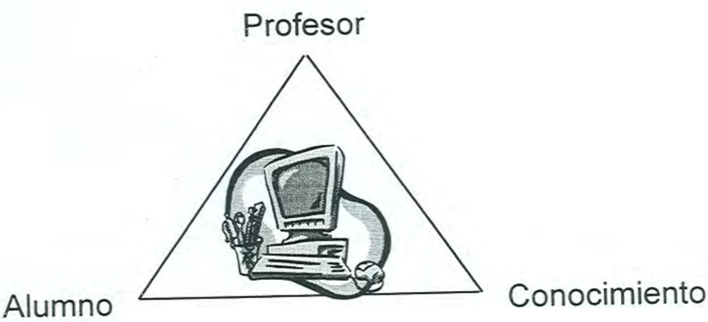


Figura 6.1

Nuestro propósito inicial, siguiendo a Charnay [7], consiste en determinar:

La distribución de los papeles de cada uno

El proyecto de cada uno

Las reglas del juego: ¿qué está permitido, qué es lo que se pide realmente, qué se espera, qué hay que hacer o decir para mostrar que se sabe...?

En el contexto general de la teoría de las situaciones didácticas se establece la posibilidad de que el alumno se adapte a un medio determinado. Como resultado de la búsqueda de esa adaptación, se genera un conjunto de interrelaciones con los demás componentes del sistema didáctico. Esas son las interrelaciones que nos interesa caracterizar.

6.1. 1 Descripción de la propuesta objeto de investigación.[8]

Una característica relevante en esta propuesta es que los contenidos matemáticos fueron organizados de una manera distinta. La organización temática fue:

1. Funciones y Graficación.
2. Problemas de optimización.
3. Función pendiente y la derivada.
4. Razón instantánea de cambio

Las tareas del profesor se clasificaron en tres momentos importantes: durante la clase directamente con sus alumnos, antes y después de ella. A su vez pudimos identificar tres áreas centrales de trabajo que formaron parte de los roles desempeñados por él en el salón de clases:

- El diseño de las tareas que fueron propuestas a los alumnos a través de módulos o folletos.
- La planificación del discurso en la clase a través de la metodología de resolución de problemas.

[8] Ver Anexo A6.

- La creación del ambiente de trabajo, desde la perspectiva que ofrece la incorporación de la computadora.

Los módulos

Las expectativas del profesor se centraron en la idea de que el conocimiento matemático cobraría sentido para los alumnos a través de la interacción: alumno-conocimiento-computadora, por lo que el diseño y la organización de todas sus actividades a desarrollar en el salón de clases se hicieron desde la perspectiva que ofrece este recurso tecnológico.

Dichas actividades contemplaron la utilización del paquete GRÁFICOS, pues éste posibilita que los alumnos manipulen con distintas representaciones: gráfica, algebraica y tabular, dando especial atención al papel que juegan los parámetros en los movimientos básicos de las gráficas de las funciones estudiadas.

A continuación describiremos de manera breve cada uno de los módulos.

PRIMER MÓDULO

Se incluyen actividades iniciales que permiten a los alumnos manipular la computadora con el fin de que se familiaricen con esta tecnología y con el paquete GRÁFICOS. Posteriormente se proponen situaciones problema en donde se trabaja con distintas representaciones de una función: algebraica, gráfica, tabular, dando especial atención al papel que juegan los parámetros en los movimientos básicos de las representaciones. Se hace explícito el siguiente objetivo:

El objetivo principal es que podamos Identificar la gráfica de una función analizando su expresión algebraica y viceversa.

Las funciones a estudiar:

1. $f(x) = ax + b$
2. $f(x) = a(x-c)^2 + b$
3. $f(x) = a\, sen(dx-c) + b$
4. $f(x) = a|dx - c| + b$
5. $f(x) = a\sqrt{dx - c} + b$
6. $f(x) = a\ln(dx - c) + b$

SEGUNDO MÓDULO

Después de haber ilustrado el tratamiento que se da a estas representaciones, se continúa con las actividades diseñadas en la segunda unidad, las cuales parten de dos aspectos relevantes:

a. ¿Cómo elegir la solución óptima a un determinado problema práctico?
b. ¿Cuál es la razón instantánea de cambio de una variable con respecto a otra?

En esta unidad se tratan problemas referentes al primer aspecto, los cuales se clasifican comúnmente como problemas de optimización que incluyen problemas de máximos y mínimos.

La solución que se obtiene en esta unidad es numérica pero se hace análisis gráfico de las funciones involucradas de tal forma que los estudiantes concluyan que los problemas también se pueden resolver identificando los puntos en los cuales las gráficas de las funciones tienen una recta tangente con pendiente cero.

TERCER MÓDULO

En esta tercera unidad los problemas tienen que ver con el trazo de rectas secantes y tangentes a una curva de una función dada. El propósito es la generación de un método para la obtención de los puntos de las gráficas de las funciones en donde exista un tangente cuya pendiente sea cero y con ello contar con un método eficiente para la resolución de los problemas de máximos y mínimos.

En el módulo correspondiente se declara que el objetivo es:

Dada la función $y= f(x)$, ¿en qué puntos de su representación gráfica tiene una recta tangente cuya pendiente es cero, esto es $m_{tan} = 0$?

CUARTO MÓDULO

Finalmente, en la cuarta unidad se aborda la segunda interrogante formulada al inicio del segundo módulo respecto a la razón instantánea de cambio. En esta unidad se presentan problemas de movimiento, los cuales se consideran representativos de la rapidez instantánea de cambio, presentándose situaciones cuya solución se obtiene a partir del cálculo de velocidades instantáneas en unos y de aceleraciones instantáneas en otros. La tabla 6.1 se resume la situación descrita hasta este momento.

MÓDULO I	OBJETIVOS	ACTIVIDADES
Graficación de funciones	Identificar la gráfica de una función observando y analizando su expresión algebraica y viceversa (a partir de su gráfica identificar su expresión algebraica)	Identificación de parámetros que intervienen en las funciones como: $f(x)= ax +b$ $f(x)=a(x-c)^2+b$ $f(x)=a\ sen(dx-c)+b$ $f(x) = a\lvert dx - c\rvert + b$ $f(x)= a\sqrt{dx - c} + b$ $f(x) = a\ln(dx - c) + b$
MÓDULO II	OBJETIVOS	ACTIVIDADES
Problemas de optimización	Iniciar el estudio de los problemas de optimización así como la obtención de herramientas conceptuales, y técnicas algorítmicas generales para enfrentar nuevos problemas relativos al cambio y la variación.	Situaciones-problema con la intención de motivar a los alumnos a la búsqueda de valores máximos y valores mínimos de una determinada expresión matemática obtenida del contexto de algún problema planteado.
MÓDULO III	OBJETIVOS	ACTIVIDADES
Problemas de tangentes	Búsqueda de un procedimiento para determinar los puntos de una gráfica en los cuales la pendiente de la recta tangente es igual a cero. Aquí se discuten algunas técnicas de derivación.	Problemas de cálculo de pendientes de rectas tangentes a las gráficas de funciones y ejercicios de cálculo de derivadas.
MÓDULO IV	OBJETIVOS	ACTIVIDADES
Problemas de movimiento	Analizar problemas que conduzcan a los alumnos a reflexionar acerca del movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria, como situación representativa de la razón instantánea de cambio.	Situaciones-problema en las que se involucra tanto a la velocidad instantánea como a la aceleración instantánea

Tabla 6.1

6.1.2 El diseño propuesto por el profesor

El diseño del curso propuesto por el profesor muestra características que presuponen que el alumno construye su propio conocimiento a través de la interacción con el contenido matemático y la computadora, pero también incluye factores que son decisivos para este proceso, como el rol que el mismo profesor juega, dado que su responsabilidad se traduce en emplear sus habilidades para diseñar las situaciones problemáticas y ponerlas en práctica empleando la computadora. En este rol de actividades se destacan los siguientes componentes:

- ✓ El desempeño del maestro en el aula.
- ✓ La responsabilidad de aprendizaje por parte de los alumnos.
- ✓ El uso de la computadora, específicamente el paquete de software empleado por las posibilidades que ofrece para el manejo de diversas representaciones.
- ✓ El diseño de los folletos, en los que se incorpora el contenido matemático a través de problemas.

Dentro de los roles que desempeña el profesor está la organización e institucionalización de sus actividades, aspectos que pasan a formar parte de las relaciones que se dan entre él y los demás componentes del sistema didáctico.

El papel del profesor en el laboratorio de cómputo requirió de gran dinamismo de su parte, pues la misma naturaleza de las actividades propuestas y realizadas en la computadora, provocaba que los estudiantes prestaran gran atención a los resultados de su propio trabajo y surgieran inquietudes e interrogantes no esperadas por el profesor.

Al principio del curso se establecieron varios acuerdos entre el profesor y los alumnos en relación directa con el conocimiento matemático, basados en una serie de criterios y condiciones con las que se pretendía regular la actividad en la computadora y lograr los objetivos del curso. Pero además de los acuerdos explícitos también existen situaciones y acuerdos implícitos que es necesario caracterizar y constituyen uno de nuestros principales objetivos de investigación.

Entre los aspectos que nos interesa caracterizar están los siguientes:

- Los diferentes roles y funciones de cada uno de los protagonistas.
- Sus derechos y obligaciones.
- El cauce que tomará la clase y las estrategias que se presentan en el desarrollo del proceso dentro del aula.
- Condiciones para trabajar en el aula.

Hay aspectos que creemos influyeron en el contrato didáctico, y están relacionados directa o indirecta con la intencionalidad de las actividades, el diseño de las mismas, la organización y la forma de presentar el contenido matemático de la derivada, la epistemología de los conocimientos en juego y del profesor. En esta dirección se destacan:

✓ La intención del diseño y la organización de las actividades se sustentaron en un enfoque que incorporaba la idea de buscar el aprendizaje de las matemáticas por medio de un proceso de exploración visual-gráfico. En estas actividades la computadora y particularmente la dinámica que facilita el software utilizado, representaron un papel importante.

✓ El núcleo fundamental de la actividad matemática llevada a cabo por el profesor con el propósito de presentar las nociones del curso, fue la resolución de problemas. La revisión de contenidos bajo esta dinámica es uno de los acuerdos implícitos a los que hemos hecho referencia.

- ✓ La presentación de los contenidos matemáticos se hizo por medio de folletos o módulos de trabajo, dejando en un segundo plano las exposiciones del profesor en el pizarrón.

- ✓ El trabajo en equipo fue un aspecto clave dentro del proceso de enseñanza, el cual contribuyó a fomentar la comunicación primeramente entre los integrantes de cada equipo y posteriormente con el profesor. Esta situación se vio reflejada en el intercambio de sus ideas, de sus estrategias de solución, en la "discusión" entre ellos y al relacionarse con los compañeros de otros equipos.

Siguiendo los planteamientos de Charnay [7], a esta propuesta la ubicamos dentro de lo que él denomina modelo aproximativo. Así, el profesor, en un segundo nivel de aparición, juega el papel de diseñador de las situaciones didácticas adecuadas para propiciar que, en un primer nivel, los estudiantes interactúen con el conocimiento matemático y con sus compañeros.

Lo anterior hacia suponer que los alumnos implícitamente tendrían que asumir su responsabilidad, y en primer lugar aceptar las condiciones de trabajo y entrar en el rol de actividades asumiendo un papel activo, y en segundo término involucrarse en un nivel de interactividad con la computadora, con sus compañeros de equipo y el conocimiento con el fin de iniciar la búsqueda de la posible solución al problema planteado.

6.2 SEGUNDA PARTE

El objetivo en este apartado es conformar un esquema de análisis para identificar, interpretar y caracterizar la situación didáctica que se origina en la enseñanza del contenido matemático desde la perspectiva del contrato didáctico. El diseño de la situación de enseñanza tuvo la intencionalidad de presentar los problemas en sentido amplio para los alumnos, de tal forma que para éstos los problemas se tradujeron en situaciones problemáticas.

Como señalamos con anterioridad, las actividades se apoyaron en el paquete de programación GRÁFICOS. De entre las opciones de las cuales dispone este software, está el que denomina "Función Pendiente", que consiste en graficar la función que a cada punto x del dominio de una determinada función f(x), le asocia la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f(x) en ese punto. Con ello se busca construir una conceptualización global de la derivada.

En este proceso, resaltamos el papel que jugó la computadora, específicamente GRAFICOS, el cual facilitó la manipulación y potenció la visualización de los conceptos matemáticos involucrados, enriqueciendo las significaciones de los alumnos.

Para el análisis que realizaremos a continuación, consideramos conveniente mostrar dos momentos representativos de la actividad desarrollada en el salón de clases. En estas etapas fue necesario analizar tanto los aspectos sociológicos y pedagógicos de la actividad desarrollada que corresponderían respectivamente a los contratos social y pedagógico, como también aquellas tareas, estrategias e instrumentos del diseño didáctico útiles para caracterizar la situación didáctica, tomando como categorías de análisis a algunos elementos de la Teoría de las Situaciones Didácticas.

Recordemos que bajo la perspectiva de esta teoría se establece que es a través de un proceso en el que cada vez se van dando nuevos contratos didácticos como se adquiere el conocimiento.

6.2.1 Los momentos seleccionados fueron:

I. Las tareas que se llevaron a cabo para arribar al concepto de función, específicamente las funciones lineales. El tratamiento geométrico que se hace de la derivada, tema de nuestro interés, tiene su base en una adecuada manipulación gráfica de las funciones. En ese sentido, el que los estudiantes alcancen los objetivos formulados en esta parte, es esencial para el desarrollo posterior.

II. Las tareas efectuadas para construir la derivada de la función $y = senx$ mediante recursos gráficos, empleando lo que en el software se denomina *función pendiente.*

6.2.2 PRIMER MOMENTO

Para iniciar el análisis presentaremos la Actividad 1 del primer Módulo de trabajo, correspondiente a las funciones lineales. Con el fin de facilitar su lectura los presentamos planteando las intervenciones del profesor y los estudiantes en itálicas, dejando nuestras observaciones en escritura normal. Las acciones propuestas son transcripciones de los folletos del curso.

Antes de iniciar con la actividad los estudiantes se organizaron en equipos de tres personas, disponiendo cada equipo de dos computadoras, como se mostró previamente en el Capítulo III.

Profesor: *Dada la representación gráfica de una función de primer grado encontrar su representación algebraica. Para lo cual te guiarás en la Actividad 1 del módulo I que aparece en el folleto de trabajo.*

Actividad 1. Identificación de los parámetros a y b que intervienen en la expresión general de la recta dada por $y = ax + b$

Intervención del profesor.

El profesor propone las actividades a través de este enunciado, tratando de provocar que los alumnos acepten el problema y la situación problemática que se origina.

Establece las reglas con las cuales se iniciará la interacción del alumno con la computadora, por medio de instrucciones en el lenguaje natural y que los alumnos deberán interpretar en el lenguaje de la computadora: "*abrir GRAFICOS, entrar al nivel medio opción 2 y luego selecciona las lineales. A continuación sigue las instrucciones hasta que aparezca en la pantalla la representación de una función lineal*".

- Construcción de la función base.

Seleccione la opción "Dibujar gráficos" presionando la tecla 2 del menú principal.

i. Escribamos la expresión $ax + b$ enseguida de "$f(x)$ =" y presionando la tecla intro.

ii. Después aparecerá "a =". Aquí Gráficos pide un valor inicial para el parámetro a, después de teclear el valor y presionar Intro aparecerá "b = " con lo cual nos indica la petición para el valor de b.

Nuestra función base estará dada por la expresión.

$$\boxed{f(x) = x}$$

iii. Una vez que hayamos dado entrada a los valores de los parámetros aparecerá en pantalla la siguiente imagen. Figura 6.2

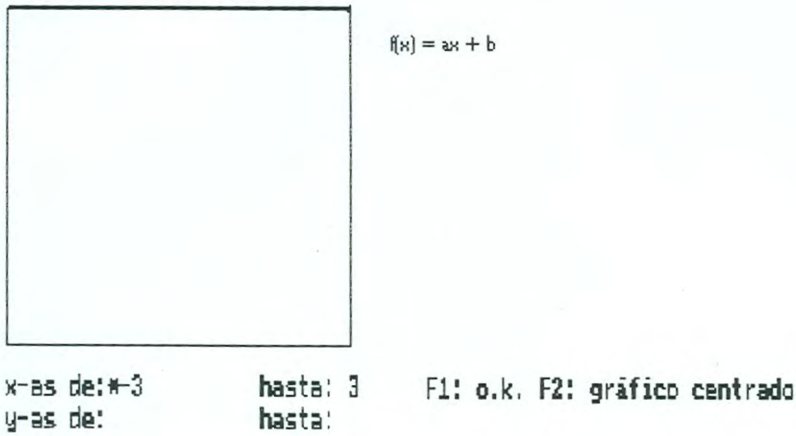


Figura 6.2

Aceptando la propuesta anterior se elige **F2** de gráfico centrado. Presionando **F2** se obtiene la siguiente imagen en la pantalla. Figura 6.3.

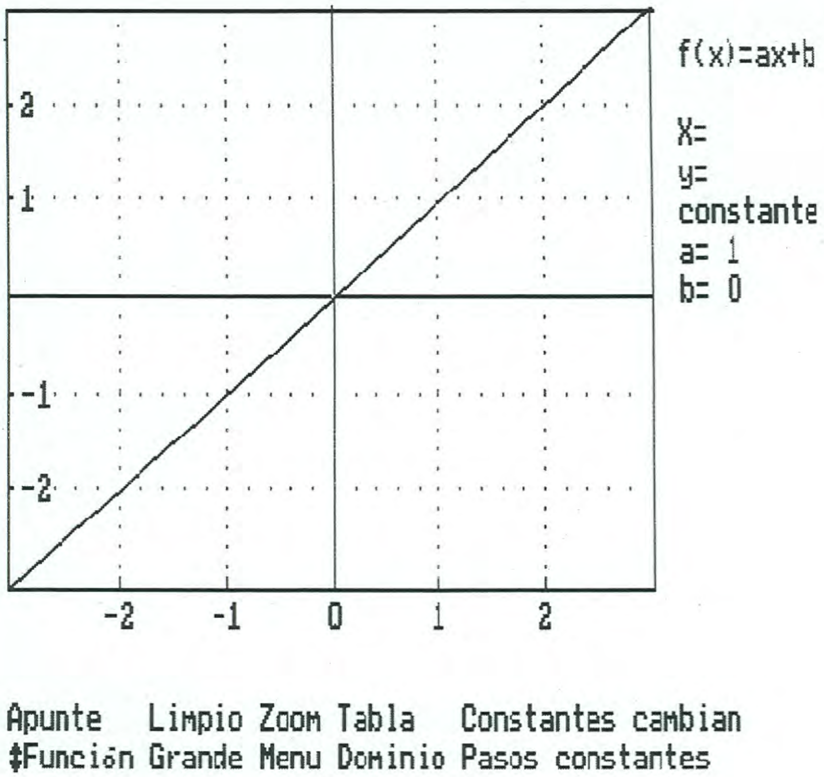


Figura 6.3

Acción de los alumnos. Una vez mostrada en la pantalla de la computadora la gráfica de la función, los alumnos empiezan a interactuar entre ellos en los equipos de trabajo, iniciando así un proceso de búsqueda de la posible solución a la situación problemática planteada.

Cuando este momento transcurre los alumnos se involucran en una situación a-didáctica de ***acción***, haciéndose cargo de la situación problemática, buscando y eligiendo conjuntamente las estrategias que ellos consideran útiles para resolver el problema. En este proceso se apoyan en algunos medios que creen serán apropiados; la interacción con otros recursos como lápiz y papel, la comunicación entre ellos y la visualización de la representación gráfica en la pantalla de la computadora.

La interacción creada entre los integrantes de cada equipo es producto de la intencionalidad del profesor, quien como parte de sus estrategias los trata de involucrar en dicha *situación a-didáctica.* Sus intervenciones son de coordinador o motivador de la búsqueda de soluciones al problema, pero se abstiene de brindar la información para dirigir la acción de los alumnos.

Bajo la perspectiva teórica asumida, se espera la construcción del conocimiento como consecuencia de la actividad y no como respuesta de lo que el profesor desea.

En esta fase se distingue un proceso de transferencia de responsabilidades del profesor al alumno quien se hace cargo de la situación y de las reglas del juego establecidas previamente, etapa a la que se le denomina ***devolución de la situación a-didáctica*** **por parte del profesor.**

En este momento estamos frente a un rasgo característico del contrato didáctico: la distribución de la ***responsabilidad matemática*** asignada a cada uno de los participantes en el juego didáctico. Los alumnos al asumir su responsabilidad matemática, están implícitamente aceptando las reglas del juego propuestas. A decir de algunos estudiantes:

Al inscribirme en este curso yo no sabía cómo se iba a desarrollar éste, pero como ya estoy inscrito mi responsabilidad es salir adelante y aceptar las condiciones de trabajo propuestas por el profesor.

En una segunda fase se provocan interacciones de ***formulación.*** Se hace énfasis en el manejo de expresiones variadas, de tipo verbal, escrito, gráfico, de manipulación, etc., con el fin de encontrar la forma más adecuada de expresar los resultados producto de sus acciones, de tal forma que éstos puedan ser materializados y entendidos por sus compañeros del grupo y por el profesor.

Posteriormente arribamos al momento en el cual se ***validan*** los resultados de las acciones anteriores. Es una fase de balance y presentación de resultados y de confrontación de los procedimientos surgidos anteriormente; para esta tarea el papel de la computadora es clave porque facilita la visualización dinámica, permite los ensayos y las pruebas para justificar los resultados.

El profesor estimula y coordina las actividades y devuelve a los alumnos las dudas y contradicciones que aparecieron, señala los procedimientos diferentes buscando que los alumnos exterioricen sus ideas y forma en que abordaron el problema, y el procedimiento que siguieron para obtener el resultado. El profesor devuelve una nueva actividad.

Algunos resultados y procedimientos seguidos por los alumnos.

Observando la recta en la pantalla de la computadora puedo localizar dos puntos en el plano, por ejemplo el (1,1) y el (0,0), podría entonces utilizar la fórmula general para encontrar el valor de la pendiente, y volviendo a mirar la recta trazada obtengo el valor b interpretado como la intersección de la gráfica con el eje "y". Así puedo expresar la ecuación matemática que andábamos buscando.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Asignando los valores de las coordenadas de los puntos en la expresión anterior, tenemos.

$$m = \frac{1-0}{1-0_1} = 1$$ *de aquí concluimos que a = 1*

y de la gráfica observo que b =0 porque la recta pasa por el punto (0,0). Concluyendo que $y = ax + b$ *equivale a escribir* $y = x + 0$ *o bien* $y = x$

Profesor. *Alguien encontró otro de los procedimientos que los llevó a encontrar la expresión para la recta.*

Alumno. Localice los puntos (1, -2) y el (0,0) y utilicé la formula para calcular la pendiente de una recta y encontré para la pendiente el valor de –2 y como la recta pasa por el origen, la intersección con "y" es cero que es el valor que le corresponde a b y luego en la expresión que tengo $y = ax + b$*, escribí para* a *el –2 y para b el cero y así obtuve la formula y = -2x + 0*

El profesor interviene para validar ese procedimiento diciendo *que como el 0 es neutro y la suma es el cero, la expresión finalmente queda f(x) = -2x.*

Profesor. *Alguien utilizó otro procedimiento diferente*

Otro proceso de ***validación*** mostrado por uno de los equipos de trabajo, fue aquel cuya explicación se basó en utilizar la idea de que la pendiente de una recta la puede interpretar por medio de la función tangente del ángulo que forma la recta con la horizontal. Se desprende de este resultado expuesto por los estudiantes que el proceso de formulación incorporaron elementos matemáticos que tal vez no eran esperados por el profesor.

Si sé que la pendiente de una recta se puede calcular con la función tangente del ángulo de inclinación, entonces conociendo el ángulo de dicha recta, hago la operación y así obtengo dicha pendiente. Ver figura siguiente.

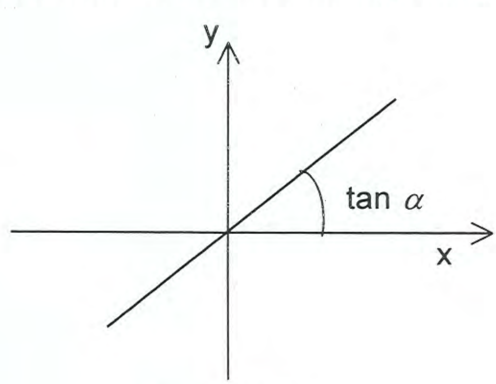


Figura 6.4

En este último caso se presenta una situación inesperada por el profesor. La explicación diferente que presentó en el pizarrón el alumno, se salió del contexto de lo que el profesor contemplaba, quien en lugar de aprovecharla favorablemente persistió en su idea original y se negó tácitamente a hacer un rompimiento del contrato didáctico.

Sin embargo desde nuestro punto de vista hubo un rompimiento a las reglas del contrato, dado que al incorporar otros elementos matemáticos no previstos en el diseño del profesor, y éste interviene devolviendo una validación de este resultado ante el grupo, lo que permitió una evolución del contrato didáctico.

En este nivel de validación el profesor después de escuchar las justificaciones de los alumnos señala un procedimiento diferente para resolver la situación problemática planteada.

Profesor. *Les voy a dar una forma sencilla de obtener la pendiente de una recta para posteriormente encontrar su expresión matemática; observen la gráfica dibujada en la pantalla de la computadora y localicen los puntos sobre la recta que utilizaron.* Los detalles se muestran en la figura 6.5

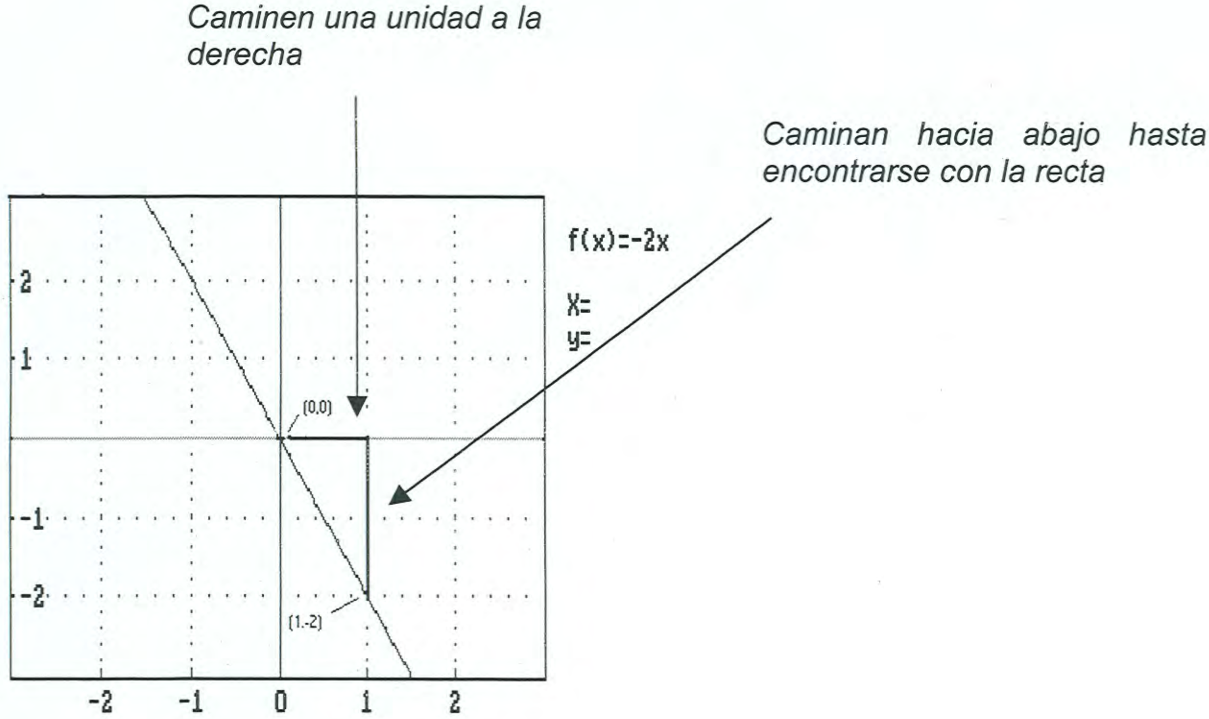


Figura 6.5

Como se movieron una unidad hacia la derecha y dos unidades hacia abajo, dividimos 2 entre 1, y como las dos unidades son hacia abajo entonces el valor es negativo. Por lo tanto la pendiente de esa recta es -2

Este procedimiento mostrado por el profesor deja ver una modificación en el contrato didáctico reflejándose en las actitudes de los estudiantes, ya que éstos al parecer no esperaban que la explicación fuese tan sencilla, sin embargo cobró sentido porque la demostración fue visual gráfica, que aunque se hizo en el pizarrón no se desligó de la actividad realizada por los alumnos.

Seguido a esta acción del profesor se da un proceso de validación de parte de él, esto con el fin de justificar esa demostración que en términos geométricos había hecho. Esta validación se fundamentó en la idea matemática implícita *de la fórmula para calcular la pendiente conocemos que la distancia entre dos puntos se representa con sus coordenadas, es exactamente lo que estamos utilizando aquí, veamos.* La siguiente figura esquematiza este procedimiento.

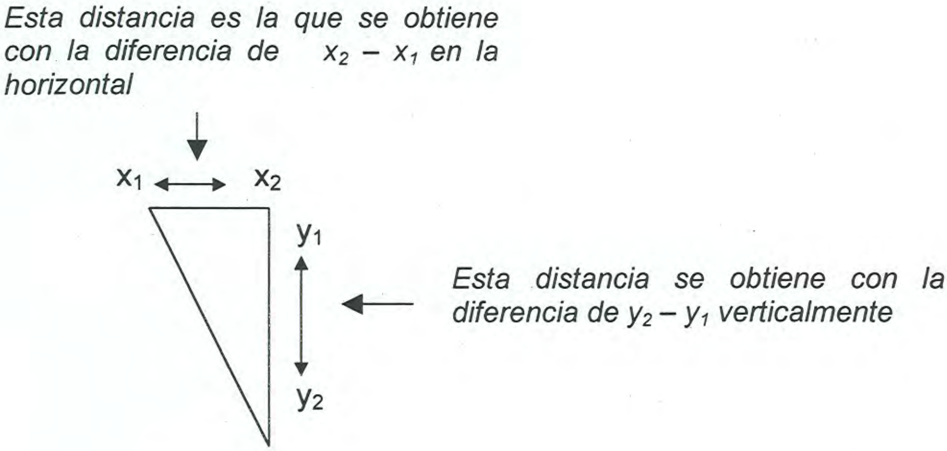


Figura 6.6

De aquí tenemos que estas distancias son las que se expresan en la fórmula que conocemos para calcular la pendiente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Una tarea también de relevancia en el presente momento, es la descripción de la fase de ***institucionalización***, en la cual el profesor juega un papel decisivo. Rescata los elementos importantes con el fin de dar un estatus formal al concepto matemático de función lineal, como el caso anterior en el que se institucionaliza el concepto de pendiente para evolucionar en el proceso de aprendizaje.

Como parte de este proceso hasta este momento se ha institucionalizado el concepto de función lineal a partir de una serie de acciones tanto de los alumnos como del profesor, que llevaron finalmente a entender que esta función tiene una representación algebraica y una representación grafica.

En relación observamos que se produce una ruptura en el contrato didáctico que permite a los alumnos avanzar en su aprendizaje, cuando ellos expresan.

Alumno. *Ahora en tiendo que para cada ecuación o función expresada en forma algebraica se tiene un dibujo, porque lo pude observar y practicar en la computadora.*

Mediante una reflexión de lo hecho en esta parte del proceso de enseñanza, encontramos elementos que dan valor y significado a las nociones matemáticas puestas en juego. Para lograr esto, el profesor explica, sintetiza, resume y rescata -de los conocimientos claves para resolver la situación problemática planteada- aspectos como: la pendiente, las intersecciones con los ejes y su representación tabular.

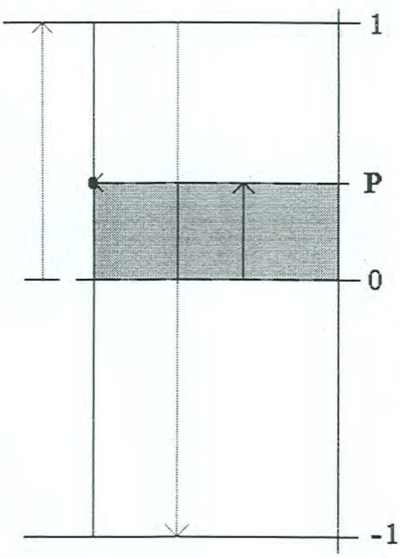
6.2.3 EL SEGUNDO MOMENTO

En este segundo momento hemos tomado la Actividad 7 del Módulo IV del folleto de trabajo, por considerar que es rica en interacciones profesor-estudiante, estudiantes - conocimiento matemático - computadora y profesor-estudiantes-conocimiento matemático-computadora, además de que es una muestra de un episodio en el que se construye la derivada de una función con apoyo en argumentos gráficos.

Notaremos que el reporte es ligeramente diferente al anterior, esto se debe a la dinámica seguida en la clase, en la cual se realiza un trabajo conjunto entre el maestro y los estudiantes. Las respuestas de estos últimos a las interrogantes que continuamente les son realizadas dan pie a nuevas situaciones a-didácticas de acción, formulación y validación; así como a constantes devoluciones de parte del profesor.

Actividad 7. Movimiento oscilatorio. ***Clase***.

Una partícula oscila tal y como se muestra en la figura. Si sabemos que la fórmula para la posición de **P** es $y(t) = Sin t$ contesta las siguientes cuestiones:



a. El tiempo que tarda en dar una oscilación completa.

b. Los valores entre los cuales varía la posición de **P**.

c. Para tener una visión más clara de lo que sucede con la oscilación de **P** en los primeros 2π segundos, completa la tabla escribiendo la posición de **P** en cada uno de los instantes dados.

Tiempo t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{8\pi}{6}$	$\frac{9\pi}{6}$	$\frac{10\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Posición $y(t)$	0												

Con el *diseño y la organización* del problema anterior, advertimos de nueva cuenta la intención del profesor de crear una situación problemática que motivara la actividad intelectual de sus alumnos. Otra vez el accionar con GRÁFICOS constituye un elemento básico en su planeación, pues permite la visualización de la geometría dinámica útil en cada una de las etapas del proceso que le llevaría a alcanzar sus objetivos.

Como ya se vio, el objeto matemático que participó en esta relación didáctica fue la función $y(t) = Sint$. Dicha función matemática constituyó lo que el profesor denominó el modelo matemático, y fue la base con la cual se iniciaría la actividad.

En una tarea previa a lo que estudiaría con este modelo matemático, los alumnos entran en un acercamiento al problema, determinando la posición de la partícula a través de completar la tabla que se muestra en el inciso c) .

El profesor: *el movimiento de la partícula P que se muestra en la figura del problema, es tal que se mueve hacia arriba alcanzando una altura máxima y luego se regresa hasta tocar un valor mínimo, y allí se anda paseando, esto es la representación de un movimiento oscilatorio.*

Hay ciertas condiciones con las cuales el profesor ***devuelve la situación*** problemática a los alumnos. *Si el movimiento de la partícula es oscilatorio entonces hay ciertas condiciones que se traducen al contexto del modelo matemático de estudio.*

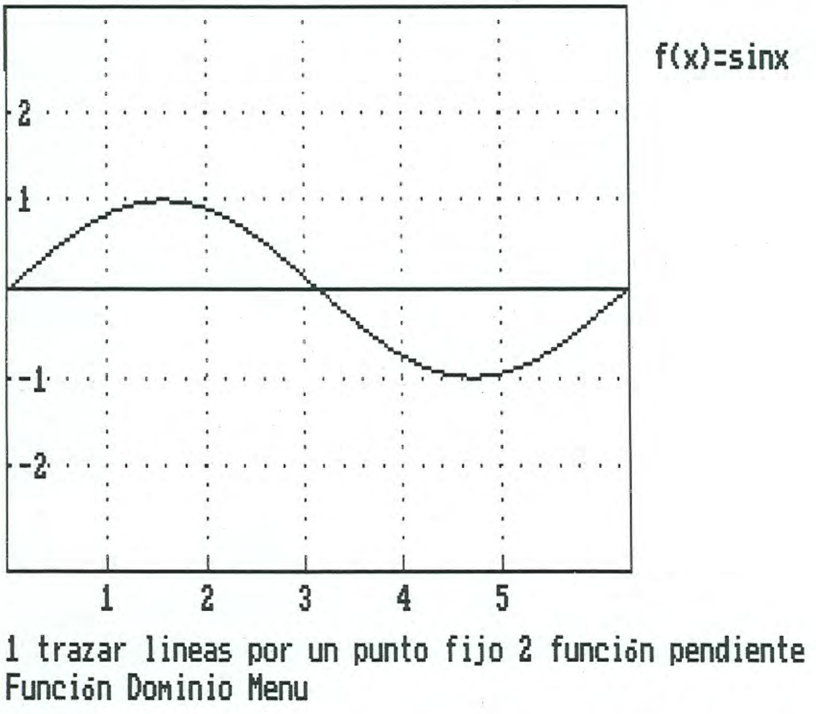
a. El tiempo que tarda en dar una oscilación completa.

*b. Los valores entre los cuales varía la posición de **P**.*

El profesor. *Usando el GRÁFICOS construye la gráfica de la curva* $y(t) = Sin t$.

Después de que los alumnos teclean las instrucciones indicadas para representar la grafica de la función, se muestra en la pantalla la gráfica solicitada, pero en el intervalo [-4, 4]. Esta situación es identificada por algunos estudiantes, quienes lo hacen notar al profesor.

Esto conduce a una discusión del grupo, hasta que se logra identificar la necesidad de modificar el intervalo predeterminado de GRÁFICOS, para restringirlo al intervalo [0, 2π], quedando entonces la Gráfica 6.7



Gráfica 6.7

El profesor traspasa a los alumnos la siguiente fase del problema y con ello la responsabilidad de que se hagan cargo de él. Retoma su papel así:

El profesor*: Las condiciones bajo las cuales estudiaremos nuestro modelo matemático, representado en la gráfica anterior, son las siguientes:*

Específicamente, en sus primeras acciones los alumnos empezaron a conjeturar como sería la pendiente de una recta trazada en alguno de los puntos de la curva, para luego tratar de identificar si ésta fuese positiva o negativa, en esta fase de la acción el recurso intermediario fue la computadora, ya que si en ese momento se hubiera quitado este instrumento, se quedarían sin elementos de apoyo. Figura 6.9

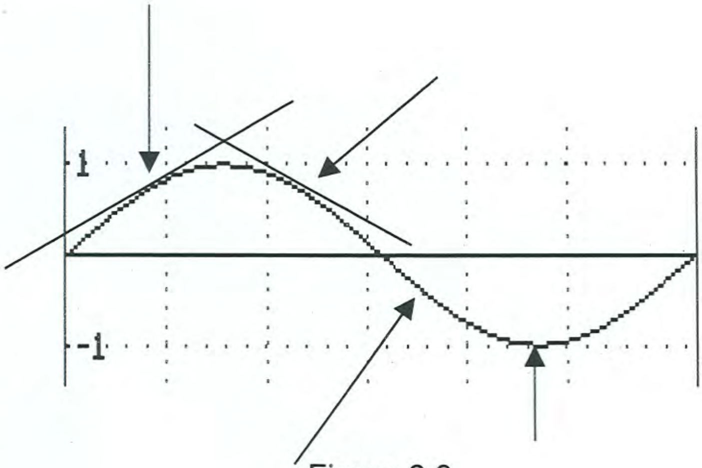


Figura 6.9

Ocurren también momentos de interacciones alumno-alumno, alumno-computadora-conocimiento en los cuales resalta el apoyo brindado por la computadora, puesto que es este recurso en el cual se auxilian los alumnos para empezar a formular sus posibles resultados a los cuestionamientos que van surgiendo como parte de las tareas diseñadas y propuestas por el profesor. Algo que nos llamó mucho la atención es el nivel de concentración que muchos participantes alcanzaron, tanto individual como grupalmente.

Por otro lado vale la pena resaltar el trabajo cooperativo de los integrantes de los equipos; la cooperación permitió tanto el compartir sus estrategias de solución de las tareas encomendadas como el brindarse apoyo para ir poco a poco formulando las respuestas a dichas tareas.

Aún cuando el accionar en equipo fue promovido por el profesor, derivó en ocasiones de manera muy natural en un trabajo un tanto independiente al interior de cada equipo de trabajo, hecho que tal vez no esperaba el profesor, ya que inclusive cuando éste daba algunas instrucciones alrededor de la tarea en ese momento, los alumnos estaban interactuando para probar inmediatamente lo que el profesor preguntaba.

Estas actitudes obedecen a la atención que prestan a los resultados que ellos miran en la pantalla de la computadora, los cuales proporcionan los elementos matemáticos con los cuales pueden intercambiar sus ideas con el resto de sus compañeros, y exponer sus puntos de vista al profesor con mayor seguridad.

En distintas etapas de este momento didáctico se dieron rompimientos al contrato didáctico. Aún cuando la guía de trabajo fue elaborada esperando ciertos resultados, sucedió que los alumnos mencionaron e incorporaron en su discusión otras herramientas matemáticas que no se contemplaban, por ejemplo, para comprender el ciclo completo que daba la partícula se apoyaron en la idea de representar un ciclo completo mediante una circunferencia. Como la que se muestra en la figura 6.10.

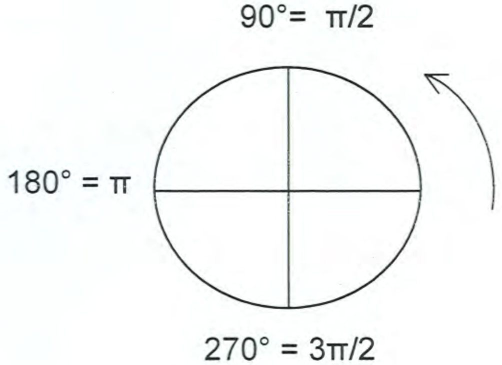


Figura 6.10

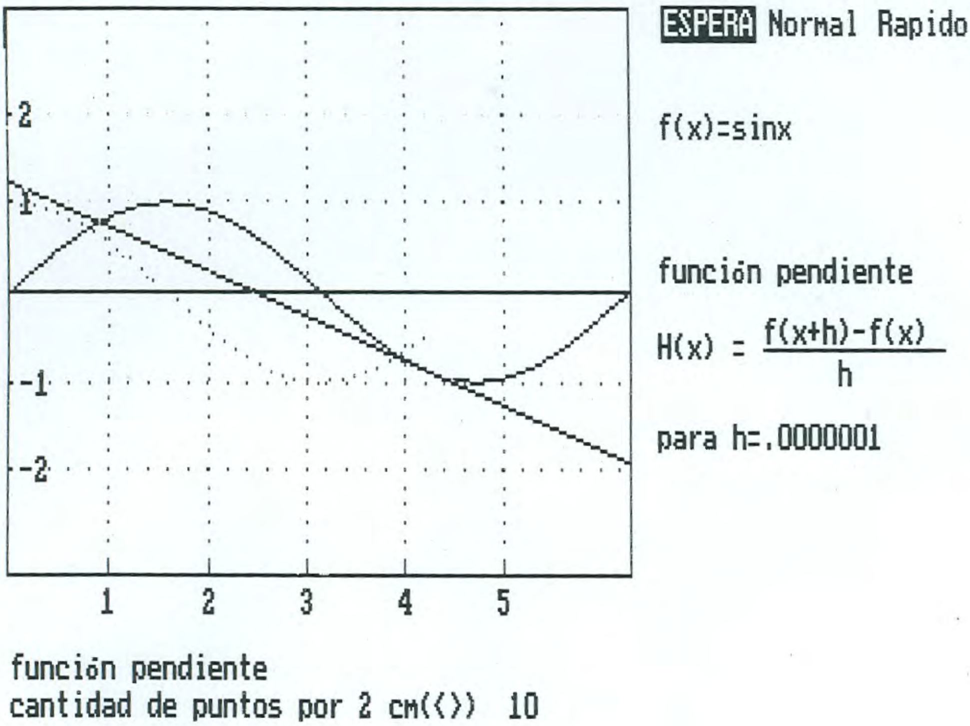
Un equipo: *Si el ciclo completo de la gráfica que estamos observando la representamos en la circunferencia unitaria, nos damos cuenta que en los primeros 90° las pendientes de las tangentes son positivas, que de los 90° a los 270° es negativa y que de los 270° a 0° vuelve a ser positiva.*

Este razonamiento les permite validar sus conjeturas las cuales realizaron con apoyo de la computadora; es claro que en este proceso echaron mano de manipulaciones matemáticas que les eran más familiares.

Una vez agotada esta etapa de validación, el profesor propone la siguiente tarea con el fin de dar respuesta al planteamiento inicial:

El profesor: *A partir del valor de las pendientes de las tangentes de la gráfica* $y(t) = Sin t$ *construye el bosquejo de la gráfica tiempo contra velocidad usando el mismo marco de referencia. Pero en este caso no vamos a especular sino que nos vamos directamente a GRAFICOS, vamos a trazar una recta tangente que se pasee por todos los puntos de la curva y observemos qué es lo que pasa.*

Usando la opción 4 del Menú principal y luego la opción 2, "función pendiente", los alumnos trazan una recta secante a la curva de la función $y(t) = Sin t$ en cada punto de la curva, dejando como rastro la gráfica de la pendiente correspondiente. Asignando un valor muy pequeño a h, cada recta secante se parece a la recta tangente y la gráfica de la función pendiente puede asumirse como la gráfica de la función derivada. Veamos la Gráfica 6.11



Gráfica 6.11

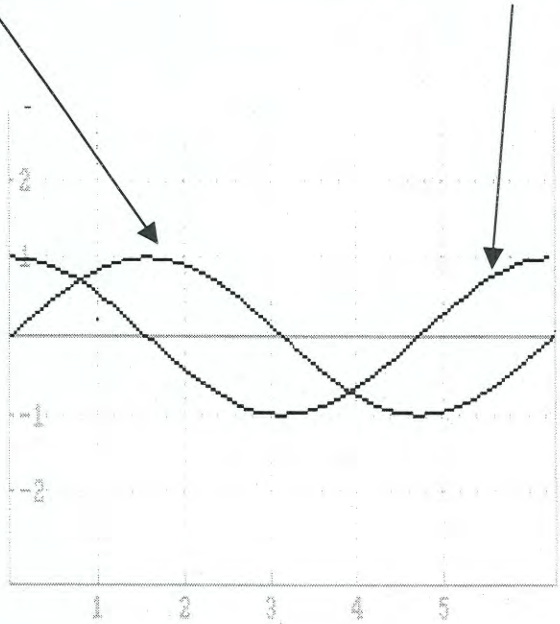
La obtención de la Gráfica 3 sitúa a los estudiantes en condiciones de identificar mediante una expresión algebraica a la función que representa a la velocidad instantánea. Nuevamente el profesor interviene para conducir y provocar formulaciones pertinentes.

El profesor: *Utilizando la idea que se observa en la Gráfica 3, completa la gráfica que dibuja la función pendiente, ¿qué tipo de gráfica representa la gráfica de ese modelo que estamos trabajando?*

Atendiendo la indicación, los alumnos obtienen la Gráfica 6.12.

Gráfica del modelo que estamos trabajando

Gráfica resultante como función pendiente



Gráfica 6.12

El profesor: *Aún cuando no tenemos una fórmula que nos represente la velocidad instantánea ni para la aceleración de la partícula, podemos tener al menos una idea geométrica de lo que sucede con la velocidad y la aceleración de P. Aquí estamos en condiciones de expresar la fórmula de la velocidad.*

De acuerdo con lo anterior, el profesor sugiere a los alumnos para que éstos tengan una idea de cómo será la gráfica que se quiere bosquejar. Como los puntos donde la función de nuestro modelo presenta un máximo o un mínimo la pendiente de la recta tangente en esos puntos es cero, por lo tanto la curva que vamos a construir tendrá las siguientes características. (esto lo expone en el pizarrón y lo ilustramos en la figura 6.13)

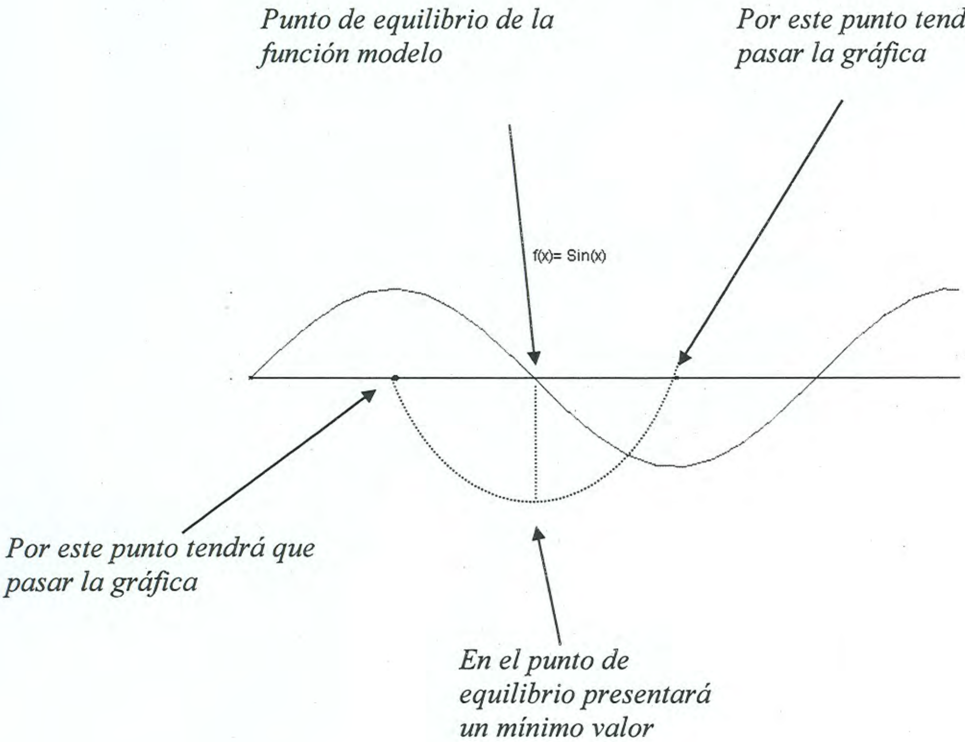


Figura 6.13

Algunos alumnos responden con bastante seguridad "*es la representación gráfica de la función coseno*", otros responden "*es la derivada*".

Es entonces cuando el profesor realiza la institucionalización del conocimiento matemático, reconociendo la velocidad instantánea como la función derivada de la función posición.

El profesor: *La gráfica que nos da la función pendiente del GRAFICOS, no es otra cosa más que la representación de la velocidad instantánea y ésta coincide precisamente con la función coseno, entonces podemos concluir que:*

$$f(x) = sen\, x$$

$$V(x) = \cos x$$ es la derivada del la función Seno

Continuando con esta dinámica el maestro propone tomar ahora a la función *f(x)=cos x* y obtener su derivada, sugiriendo la construcción de su función pendiente. Con relativa facilidad los estudiantes obtienen tanto la gráfica de la función pendiente y la expresión algebraica de la misma.

Identificamos un rompimiento a la tradición escolar. El profesor se desliga de los procedimientos algorítmicos, optando por el uso de los recursos gráficos y su coordinación con las representaciones algebraicas.

Esta síntesis conceptual del saber matemático en juego representa el cierre a esta actividad, y contribuye a que se haga una reflexión acerca de la evolución que se tiene en el proceso global del curso.

Los objetivos previamente establecidos se alcanzaron y como prueba de ello hacemos notar:

- ✓ La seguridad con que los estudiantes respondían a las distintas preguntas.
- ✓ Su participación voluntaria.
- ✓ La incorporación de ideas tal vez no previstas por el profesor.

Hubo comentarios de los alumnos en cuanto a las actitudes del profesor. Valoraron positivamente las actitudes del profesor, *como el gusto por la enseñanza, el ser dinámico, ordenado, que manifiesta interés en que ellos aprendan, claro en su forma de explicar. También plantean como un aspecto importante la buena comunicación y la confianza que se manifiesta en el aula.*

En relación propiamente con el trabajo en el aula de cómputo las opiniones son positivas, manifiestan aspectos como el agrado de trabajar en equipo, que para algunos fue una actividad novedosa, que hubo cosas nuevas que nunca habían entendido y que en los cursos de matemática solamente cobraba sentido cuando hacían problemas aplicados.

Pude entender que significa un máximo o un mínimo de una función, ya que antes había escuchado máximo y mínimo, pero me preguntaba ¿máximo o mínimo de qué?

CAPÍTULO VII
CONCLUSIONES

En este apartado daremos respuesta a los planteamientos hechos en los objetivos y en las preguntas de investigación formuladas en el Capítulo II, apoyando nuestros argumentos en el análisis de la información obtenida durante la etapa de observación del fenómeno investigado. En el capítulo anterior mostramos dos momentos ilustrativos de lo sucedido, aunque nuestras conclusiones incorporan también otras experiencias que no fueron reportadas en el cuerpo de este trabajo.

Con relación a la pregunta:
¿Qué tipo de responsabilidades y obligaciones se pueden detectar en las interacciones dentro del aula, entre el protagonista que conduce la actividad de aprendizaje (el profesor) y quienes aprenden (los alumnos)?

De entrada asumimos la existencia de un contrato pedagógico-sociológico, independiente de los medios de enseñanza, en el cual al profesor se le asigna la autoridad máxima en el aula, y que influye en el sometimiento de los estudiantes a la planeación escogida para el curso.

La actividad desarrollada por el profesor en el aula se fundamenta en la idea de que la tecnología de cómputo es una herramienta útil en la construcción del conocimiento, permitiendo la manipulación de objetos matemáticos, sin restringir su empleo a agilizar cálculos y algoritmos o sustituir a los libros de texto. En sus propias palabras, las computadoras son útiles *"para que los alumnos aprendan con ellas y no de ellas"*.

Con esta idea, el profesor buscó crear un medio en donde los alumnos tuvieran la posibilidad de interactuar con la computadora y el contenido matemático, de tal forma que con este proceso pudieran construir su conocimiento.

Por otro lado el uso de la computadora facilitó el trabajo en equipo. Si bien es cierto que el profesor propuso organizarse de esta manera, rápida y espontáneamente surgieron tutores quienes ayudaron a sus compañeros en el desarrollo de sus actividades. Asimismo en los distintos equipos se establecieron reglas internas que regularon su comportamiento frente a las obligaciones institucionales.

Al realizar las diferentes tareas los estudiantes manipularon diferentes representaciones simbólicas, exploraron con ejemplos diferentes a los señalados por el profesor y los folletos, promoviendo su independencia tanto en su acción, formulación, validación y rapidez de aprendizaje.

La autonomía que adquieren los alumnos es difícil de lograr sin contar con un medio como la computadora, en la cual es posible manipular las representaciones simbólicas de los objetos matemáticos de forma independiente, sin necesidad de esperar a que el profesor lo haga en el pizarrón.

Consecuentemente se problematizan con frecuencia y surgen situaciones a-didácticas de acción, formulación y validación algunas veces inesperadas y no siempre detectadas por el maestro.

El hecho de que los estudiantes asumían un papel activo en las discusiones grupales dirigidas por el maestro y siempre tuvieran respuestas a las preguntas que les eran formuladas, lo tomamos como manifestación de las características signadas en los párrafos anteriores.

Por otra parte el trabajo independiente de los alumnos incrementa las responsabilidades del profesor pues se complica la supervisión del trabajo y la detección de aquellos que distraen su atención de la clase y emplean la computadora con otros fines. Para minimizar estas actitudes es necesario mantener una constante discusión grupal en la que se evidencie si se han establecido formulaciones para la resolución de los problemas que se estén discutiendo.

Otra característica de los efectos causados por la incorporación de la computadora, es la comunicación que se da en este medio, ya que ambos tipos de participantes, profesor y alumnos, deben incorporar el lenguaje predeterminado por el software. Consecuentemente, en la actividad cotidiana se requirieron el tratamiento y la coordinación lenguaje verbal-lenguaje matemático-lenguaje computacional-información visual.

Respecto a la interrogante ¿Hasta qué punto cumple las expectativas del profesor y de los alumnos el empleo de esta tecnología?

Dado que la propuesta es original del profesor, de manera más natural pensamos que sus expectativas se ven satisfechas. Desde nuestro punto de vista ello no necesariamente es del todo válido. El profesor reconoce las ventajas que ofrece el manejo gráfico-visual de los conceptos y algoritmos matemáticos pero no se ven satisfechas sus expectativas respecto al grado de formalización de los mismos, más ligados a los procedimientos analíticos.

Esta aparente contradicción es muestra de que la computadora incorpora una manera de estudiar y analizar el conocimiento matemático diferente a la que se ha venido haciendo a lo largo de la historia, al menos escolar, y los profesores mismos nos vemos enfrentados a explorar nuevas posibilidades, algunas de las cuales contrastan con la manera en que nosotros mismos aprendimos.

Por otro lado nos queremos referir a los estudiantes, quienes se han enfrentado a esta contradicción de los profesores desde otra perspectiva. Para ellos las computadoras siempre han existido, forman parte de su cultura y han desarrollado habilidades para su uso, pero prácticamente nunca han tenido experiencias de aprendizaje de las matemáticas o de otras disciplinas con ellas.

Al principio se sentían desorientados, sin embargo, conforme fue avanzando el curso, el poder visualizar las distintas respuestas a los problemas planteados de una manera dinámica, les motivó a seguir adelante. Uno de ellos comentó que las matemáticas ya no le parecían tan abstractas, pues el manejo gráfico se convirtió en un referente que le daba significado a las expresiones algebraicas que anteriormente no le decían nada.

La dinámica del curso condujo a los estudiantes a planteamientos que muestran la necesidad de completar las propuestas de incorporación de la computadora en el aula. Por ejemplo aquí los alumnos esperaban que las evaluaciones pudieran ser empleando la tecnología y trabajando en equipo, lo cual no sucedió. Claramente existe un conflicto no resuelto entre una forma de trabajar cotidianamente y otra de evaluar.

Referente a la pregunta ¿Qué aspectos relacionados con las matemáticas influyen para que los participantes actúen como lo hacen?

La principal componente del uso de la computadora en la experiencia estudiada es la incorporación del análisis gráfico, del cual destacamos dos situaciones: la función pendiente y la obtención de las reglas de derivación. En ambas se efectúa un análisis global de la derivada, identificando a la misma como una función emanada de la original. De esta manera el acercamiento puntual de los cursos y textos tradicionales es sustituido por el análisis global. En este sentido encontramos aquí un rompimiento con la tradición escolar.

Los análisis gráficos le dan sentido también a los problemas típicos del cálculo diferencial, hacen "tangibles" los objetos matemáticos. Así por ejemplo un estudiante nos dijo "*Pude entender que significa un máximo o un mínimo de una función, ya que antes había escuchado máximo y mínimo, pero me preguntaba ¿máximo o mínimo de qué?*"

En contraste no nos queda claro qué tanto se pueden empobrecer las capacidades de abstracción y de generalización, características intrínsecas del pensamiento matemático.

Por último queremos presentar algunas conclusiones de carácter global, relacionadas con el estudio que hemos hecho, sin que éstas den respuesta específica a alguna de nuestras preguntas de investigación.

Primeramente señalamos que la computadora es un medio más de enseñanza que viene a complementar la metodología escogida por el profesor. Sin embargo, en una propuesta didáctica con influencia constructivista, como fue la que investigamos, el uso que se da a ese instrumento tecnológico potencia de tal manera la actividad del estudiante, que en muchos casos el profesor se ve rebasado en su planeación. Claramente aumenta la posibilidad de existencia de momentos de rompimiento del contrato didáctico, elementos indispensables para que los estudiantes construyan su conocimiento, toda vez que el empleo de la computadora de manera independiente les permite hacer formulaciones y validaciones que no requieren de la intervención del maestro.

Otra conclusión importante es que la Teoría de las Situaciones Didácticas, como instrumento teórico que modela el trabajo realizado en el aula de matemáticas, funciona en un ambiente computacional. Aunque el elemento esencial con el cual desarrollamos nuestra investigación fue el contrato didáctico, no se puede separar del contexto de la Teoría de las Situaciones Didácticas, ya que como señala Josep Gascón, " *...la noción de contrato didáctico es, en realidad, una noción teórica que sólo toma su sentido preciso cuando se emplea a nivel de sistema didáctico en el marco de la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau 1986)"*

Debe hacerse notar que en el caso que investigamos, las creencias del profesor y en consecuencia la metodología de enseñanza escogida para realizar su diseño, la naturaleza del conocimiento matemático, así como las características de los estudiantes, tienen una influencia determinante respecto al uso que se da al recurso tecnológico. Pudimos habernos encontrado situaciones de enseñanza en los cuales se empleara la computadora, pero de manera diferente a la que estamos reportando, donde obviamente las características del contrato didáctico implicado serían diferentes. De tal suerte la noción de contrato didáctico se erige como una construcción teórica con existencia asegurada, pero cuyas características siempre dependerán en esencia de los elementos que conforman al triángulo didáctico clásico: profesor, estudiantes y conocimiento.

Finalmente nos referiremos a la conveniencia de incorporar la computadora en el aula de matemáticas. Nuestra respuesta es afirmativa, siempre y cuando se utilice para promover el trabajo creativo y autónomo en los estudiantes, que enriquezca sus significaciones matemáticas, sus posibilidades para establecer conjeturas, coordinar representaciones simbólicas, validar hipótesis previamente formuladas etc.

Evidentemente existen grandes dificultades para llevar estas ideas práctica pues aunque muchos profesores reconocen la importancia de la tecnología de cómputo en el mundo actual, sus concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje no han evolucionado suficientemente. Ahí está uno de nuestros grandes retos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Alzugaray, Gloria y Oviedo, Lina. *Los Sistemas Dinámicos, su enseñanza a través de la resolución de problemas: su investigación, análisis y evaluación.* Proyecto de investigación, Departamento de Ingeniería Civil, Secretaria de Ciencia y Tecnología de la Facultad Regional de Santa Fe, 2003.

2. Azinián, Herminia. *Resolución de problemas matemáticos.* Ediciones Novedades Educativas, Buenos Aires, 1997.

3. Brousseau, Guy. *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* Didactique Des Mathématiques. KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS,1990.

4. Brousseau, Guy. *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas.* CINVESTAV-IPN. Departamento de Matemática Educativa. México D.F., 1993.

5. Callejo, Mª Luz. *Un club matemático para la diversidad.* NARCEA S.A. de Ediciones, Madrid, 1994.

6. Cordero, Juan Antonio. *Resolución de problemas. Primaria y Eso.* Revista Digital de Educación y Nuevas Tecnologías. México D.F., 2000.

7. Charnay, Roland. "*Aprender (por medio de) la resolución de problemas*". Didáctica de Matemáticas: Aportes y Reflexiones. Círculos Matemáticos. Instituto Politécnico Nacional, 1994.

8. De Guzmán, Miguel. *Aventuras matemáticas*, Editorial Labor, Barcelona, 1986.

9. Gascón Pérez, Josep. "*Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad*". Revista SUMA N° 26, 1997.

10. Gómez, Pedro. "*Calculadoras gráficas y precálculo. Las actitudes de los estudiantes*", Una Empresa Docente. Universidad de los Andes. 1988.

11. Gómez, Pedro. "*Resumen y comentarios al artículo: Brousseau, G. (1986)*". Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques, 1993.

12. Gutiérrez, Lidia. *La Matemática Escolarizada: Un estudio etnográfico realizado en aulas universitarias*, Tesis doctoral presentada ante la Universidad Nacional Experimental Simón Rodríguez, 1994.

13. Gutiérrez Rodríguez, Ángel, *Área de Conocimiento Didáctica de las Matemáticas, Editorial Síntesis*, Tomo 1, Madrid España, 1999a.

14. Gutiérrez Rodríguez, Ángel. *La Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Departamento de Didáctica de la Matemática*, Universidad de Valencia. Madrid España, 1999b.

15. Josette, Adda. "*La observación en clase y la paradoja del observador*". Ponencia presentada en la Journée Didactique 1980. Université Paris, Paris, 1980.

16. Martínez M., Miguel. *Investigación Cualitativa Etnográfica en Educación*: manual teórico- práctico - 3ª ed , Editorial Trillas, México, 1988.

17. Meza Cascante, Luis Gerardo y Hernández Díaz, Fabio. "*Enseñanza de la Matemática en el TCR: Patrones de Interacción en el Aula*", Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica, 2001.

18. Montiel Espinosa, Gisela *Una caracterización del contrato didáctico en escenario virtual*. Tesis de maestría. Dpto. Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN. México, 2002.

19. Polya, G.. *Cómo plantear y resolver problemas.* Editorial Trillas, México (decimotercera reimpresión), julio, 1986 - 1era edición: 1944.

20. Rodríguez G., Gregorio., Gil Flores Javier y García J Eduardo. *Metodología de la Investigación Cualitativa,* Ediciones Aljibe, S. L. México D.F.,1996.

21. Santos Trigo, Luz Manuel y Sánchez Sánchez, Ernesto. *Perspectivas en Educación Matemática.* Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Departamento de Matemática Educativa. Grupo Editorial Iberoamericana, México D. F., 1996.

22. Schmelkes, Corina. *Manual para la presentación de anteproyectos e informes de investigación (tesis)*, Editorial Mexicana, 1999.

23. The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática.* 1988.

24. Villoro, Luis. *Crecer, Saber, Conocer.* Editorial Siglo Veintiuno, México, 1989.

ANEXOS

ANEXO A1

N°	año	Titulo del trabajo y Autor
1	1987	***"Construcción del concepto de ángulo con apoyo de microcomputadora".*** María del Carmen Álvarez Gómez.
2	1987	***"Microcomputadoras en la clase de matemáticas. Una propuesta metodológica".*** Ricardo Quintero Zazueta.
3	1988	***"La microcomputadora y la desigualdad del triángulo. Propuesta didáctica".*** Analida Isabel Ardila Acuña.
4	1988	***"Un contexto geométrico-numérico. la computadora en la introducción del cálculo".*** Guillermo Bonilla Martínez.
5	1988	***"Un acercamiento a alguna idea del cálculo diferencial empleando logo y programas para graficar".*** Enrique Galindo Morales.
6	1989	***"CALCDIFE: Un programa computacional de apoyo didáctico a un curso de cálculo diferencial".*** María Eugenia Andrade Ibarra.
7	1990	***"Enseñanza del cálculo integral, haciendo uso de la microcomputadora".*** Filiberto Quevedo G.
8	1992	***"Uso de la computadora para introducir conceptos de comunicaciones electrónicas".*** José Jorge Hernández Constante.
9	1992	***"Situaciones didácticas relativas al concepto de ángulo y sus propiedades en el ambiente computacional LOGO".*** Adolfo Maldonado Pérez.
10	1992	***"Escenario computacional para el aprendizaje de la probabilidad y la estadística".*** Rogelio de Jesús Orozco Becerra.

11	1993	***"El uso de la microcomputadora en el aprendizaje del cálculo diferencial: un medio entre la imagen conceptual y la definición conceptual".*** Héctor Santiago Chávez Rivera.
12	1993	***"la computadora como auxiliar en el Proceso Enseñanza-aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral".*** Jesús Reinaldo Girón Arreola.
13	1993	***"El uso de la microcomputadora en el curso de teoría del control".*** José Luis Rojas Rodríguez.
14	1994	***"Rectas: Software de apoyo al aprendizaje".*** José Carlos Cortés Zavala.
15	1994	***"Interacción entre representaciones visuales y representaciones simbólicas. Un estudio experimental".*** Enrique Farías Martínez.
16	1995	***"Uso de la microcomputadora en el aula, para fortalecer el concepto de función lineal, mediante la descripción sistemática de las variables visuales y de las correspondientes en su escritura algebraica".*** Rafael Alfonso Meza Villanueva.
17	1995	***"Una herramienta computacional para la enseñanza y el aprendizaje de la función polinomial en el Nivel Medio Superior".*** José Alberto Monzoy Vázquez.
18	1995	***"Lecciones de apoyo vía microcomputadora para un curso de matemáticas del Nivel Medio Superior".*** Miguel Ángel Ortega Pérez.
19	1996	***"Un acercamiento al concepto de función en los curricula matemática utilizando la computadora".*** Alfonso Martínez Vera.
20	1998	***"Un apoyo didáctico en computadora para análisis cinemático de mecanismos".*** Carlos García Franchini.

ANEXO A2

FOROS Y EVENTOS

CUARTO ENCUENTRO SOBRE LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO

Francisco Cordero Osorio (1997)

Dr. Francisco Cordero Departamento de Matemática Educativa CINVESTAV-IPN .Av. Instituto Politécnico Nacional 2508Col. San Pedro Zacatenco, C.P. 07300 Delegación. Gustavo A Madero, México, D.F.

El Cuarto Encuentro sobre la Enseñanza del Cálculo se llevó a cabo, los días 5, 6 y 7 de noviembre de 1997, en la Pontificia Universidad Javeriana de Bogotá. El evento fue organizado por el Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, de esa universidad.

El encuentro tuvo como finalidad mostrar y compartir perspectivas y experiencias diferentes sobre la enseñanza del cálculo. Para esto se invitaron expertos en matemáticas y Matemática Educativa de diferentes nacionalidades.

X CONFERENCIA INTERNACIONAL DE TECNOLOGÍA EN MATEMÁTICAS UNIVERSITARIAS.

Pedro Gómez (1997)

Pedro Gómez "una empresa docente". Universidad de los Andes Carrera 1 Este N[[ordmasculine]] Bogotá, Colombia.

La X Conferencia Internacional de Tecnología en Matemáticas Universitarias tuvo lugar en Chicago del 6 al 9 de noviembre de 1997. La conferencia estaba compuesta de diversos tipos de eventos. Los más importantes fueron los siguientes: conferencias plenarias, sesiones de presentación de trabajos, minicursos sobre computadores, talleres de calculadoras, sesiones de carteles, exhibiciones de material y eventos especiales.

En primera instancia, para mí fue evidente que la comunidad de profesores universitarios que se preocupan por la utilización de las nuevas tecnologías no es necesariamente la misma que se preocupa por los temas de la educación matemática (aun si se tiene en cuenta la tecnología). Esta situación caracteriza de manera muy especial los trabajos que se presentaron en la conferencia. Estos son trabajos que se centran en la tecnología misma, pero que, en muy contadas ocasiones, tienen en cuenta los marcos teóricos, los esquemas metodológicos y los resultados que se han obtenido en la investigación en educación matemática.

SEMINARIO INTERNACIONAL SOBRE EDUCACIÓN EN CIENCIA, MATEMÁTICAS Y TECNOLOGÍA PARA EL DESARROLLO NACIONAL

Dr. Martyn QuigleySeminar SecretaryDepartment of Science and Mathematics EducationSultan Hassanal BolkiahInstitute of EducationUniversiti Brunei DarussalamBandar Seri Begawan 2028Negara Brunei Darussalam (1998):

El departamento de Educación en Ciencia y Matemáticas del Instituto Sultan Hassanal Bolkiah de Educación, ha organizado un Seminario Internacional sobre Educación en Ciencia, Matemáticas y Tecnología para el Desarrollo Nacional, que se llevará a cabo en la Universidad Brunei Darussalam de junio 29 a julio 2 de 1998.

El propósito del seminario es reunir teóricos y practicantes para discutir las contribuciones que la educación en ciencia, matemáticas y tecnología puede hacer al desarrollo nacional.

3A REUNIÓN ANUAL DEL CLUB EMA (RACE 3)

DECIMOSEGUNDA REUNIÓN LATINOAMERICANADE MATEMÁTICA EDUCATIVA RELME 12

Mauricio Castro (1998)

Universidad Nacional de Colombia Fax: (91) 3680866 Universidad Distrital Fax: (91) 2173321

La reunión se articulará alrededor de los siguientes ejes temáticos: enseñanza de la aritmética, enseñanza de la geometría, resolución de problemas, incorporación de la tecnología en el aula y su impacto, enseñanza de la probabilidad y estadística, enseñanza del álgebra, enseñanza del cálculo, paradigmas teóricos y metodológicos de la matemática educativa y formación de profesores..

La reunión se articulará alrededor de los siguientes ejes temáticos: enseñanza de la aritmética, enseñanza de la geometría, resolución de problemas, incorporación de la tecnología en el aula y su impacto, enseñanza de la probabilidad y estadística, enseñanza del álgebra, enseñanza del cálculo, paradigmas teóricos y metodológicos de la matemática educativa y formación de profesores.

CONFERENCIA ASIÁTICA DE TECNOLOGÍA EN MATEMÁTICAS ACTM

En la ciudad de Tokio, Japón se realizará la Conferencia Asiática de Tecnología en Matemáticas, del 24 al 28 de agosto de 1998

ATAS DA CONFERÊNCIA INTERNACIONAL "EXPERIÊNCIAS E EXPECTATIVAS DO ENSINO DE ESTATÍSTICA - DESAFIOS PARA O SÉCULO XXI"

Florianópolis, Santa Catarina, Brasil - 20 a 23 de Setembro de 1999

PREMIOS INTERNACIONALES DE INVESTIGACIÓN Y DE RENOVACIÓN PEDAGÓGICA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LENGUA ESPAÑOLA O PORTUGUESA

III CIBEM Osnabrueck, Alemania, del 27 al 31 de agosto de 1998.

El trabajo en la conferencia esta organizado, principalmente, alrededor de 7 grupos temáticos, (coordinado cada uno por 4 líderes de diferentes países):

- La naturaleza y el contenido de las matemáticas y su relación con la enseñanza y el aprendizaje.
- Herramientas y tecnologías en didáctica de la matemática.
- Del estudio de prácticas de enseñanza a aspectos sobre la educación de profesores.
- Interacciones sociales en situaciones de aprendizaje matemático.
- Pensamiento y aprendizaje matemático como procesos cognitivos.
- Álgebra escolar: aspectos epistemológicos y educacionales.
- Paradigmas de investigación y metodologías y su relación con preguntas de la educación matemática.

La Computadora en la Enseñanza de la Estadística

Esther Hochsztain - Raúl Ramírez - Ramón Alvarez (1999)

Hay que reconocer que la utilización de computadoras es la única novedad metodológica digna de mención que puede haberse producido desde hace 20 años. Apuntes de probabilidad o de inferencia que se usaban hace 40 años .... se siguen usando hoy. Quizá casi todo el mundo empieza a compartir la idea de que hay que usar computadoras. Sin embargo, se está muy lejos de obtener una respuesta unánime sobre el modo de hacerlo.

Pues bien, en este artículo la respuesta que queremos dar es siempre: "que algo que pueda hacer la computadora no se haga a mano". Por tanto, la computadora debe estar presente en toda la tarea docente del profesor de estadística.

ANEXO A3

Estimado compañero:

Debido a que hemos emprendido un trabajo de investigación en donde se involucra el uso de la computadora en la enseñanza de las matemáticas en este Departamento, deseamos conocer algunos datos que consideramos serán de gran utilidad para nuestros fines.

Por esta razón recurrimos a usted para que nos ayude contestando las preguntas que a continuación exponemos.

Gracias de antemano por su valiosa aportación
Atentamente
Darío Benjamín Sánchez

1. Sus cursos de matemáticas los imparte en:

- [ ] El Programa de Maestría en Mat. Educativa
- [x] Tronco común de las Licenciaturas
- [ ] Materias específicas de:
    - [ ] Lic. en Matemáticas
    - [ ] Lic. en computación

2. ¿Emplea usted la computadora en su actividad docente?

- [x] No, porque
    - [x] No tiene acceso a ella
    - [ ] No la requiere en sus cursos
    - [x] Sólo para uso personal
- [ ] Sí,
    - [ ] Como herramienta para organizar sus tareas académicas
    - [ ] Para la enseñanza de algún lenguaje de programación
    - [ ] Como apoyo en la enseñanza de las matemáticas

3. ¿ Ha elaborado alguna propuesta didáctica para la enseñanza de las matemáticas que contemple el uso de la computadora?

- [ ] No
- [ ] Sí
    - [ ] Individualmente
    - [ ] Incorporado a un grupo de trabajo
    - [ ] Como parte de un proyecto de investigación

4. ¿En qué proporción utiliza la computadora en sus cursos de matemáticas?

☐ Menos del 25% ☐ Entre 25% y 50 % ☐ Más del 50%

5. En este modo de enseñanza, generalmente:

☐ Los alumnos asisten al aula de computadoras
☐ Usted lleva el equipo de cómputo al salón de clases

6. Cuando los alumnos asisten a la sala de cómputo, trabajan:
☐ Individualmente
☐ En equipo

7. ¿ Percibe usted algún cambio en la situación que se presenta en la enseñanza de las matemáticas, cuando utiliza la computadora a cuando no la utiliza?

☐ Muy diferente ☐ Poco diferente ☐ Es la misma situación

8. ¿Actualmente está ud. incorporado en algún proyecto de investigación, en donde se involucre a la computadora como un auxiliar en la enseñanza de las matemáticas?

☐ No ☐ Sí

ANEXO A4

46 de 50 profesores de tiempo completo del Departamento de Matemáticas

Encuesta levantada para conocer cuántos profesores usan la computadora y cómo la usan.

Profesor	Carga académica en:	La utiliza en su actividad docente		En la enseñanza de las matemáticas		Proporción en que la usa	Como herramienta en sus tareas académicas	En enseñanza de algún lenguaje	Percibe algún cambio cuando usa la comp.	Ha elaborado alguna propuesta didáctica
		SI	NO	SI	NO					
1	TC	1			0	1 a 25	1	0		no
2	TC, LM	1		1	1	1 a 25	1	0		SI (ind)
3	TC	1		1	1	1 a 25	1	0	PD	SI (ind)
4	TC		1		0	0	0	0		no
5	TC	1		1	1	1 a 25	1	0	MD	no
6	TC	1		1	1	25 a 50	1	1	PD	SI (ind)
7	ME,TC,ME	1			0		1	0		SI (ind) y proy.
8	ME,LM,,LC	1		1	1	25 a 50	1	0	MD	si(ind) y proy
9	TC, LM	1		1	1	25 a 50	1	0	PD	NO
10	ME,TC	1			0	0	1	0		SI
11	MC, LC	1		1	1	1 a 25	1	0	PD	SI (ind)
12	TC	1		1	1	25 a 50	0	0	MD	no
13	TC	1			0	más de 50	1	1	MD	no
14	LM	1			0	0	1	1	PD	SI
15	TC	1			0	0	1	0		no
16	ME,TC,LM		1		0	0	0	0		no
17	TC		1		0	0	0	0		no
18	TC		1		0	0	0	0		no
19	TC	1			0	0	1	0		no
20	TC	1		1	1	1 a 25	1	0	MD	no
21	TC,LM,LC	1		1	1	25 a 50	1	0	MD	si(ind) y proy
22	TC,LM	1		1	1	1 a 25	0	0	PD	no
23	TC		1		0	0	0	0		no
24	TC,LM		1		0	0	0	0		no
25	TC	1		1	1	1 a 25	1	0	PD	Si(gpo. Trab)
26	LM	1			0	0	1	1	MD	Si(proy)
27	LM	1			0	0	1	0		no
28	LM		1		0	0	0	0		no
29	ME,TC	1		1	1	1 a 25	1	0	MD	SI
30	TC,LM	1		1	1	1 a 25	0	1	MD	SI(ind)

Profesor	carga académica en:	La utiliza en su actividad docente		En la enseñanza de las matemáticas		Proporción en que la usa	Como herramienta en sus tareas académicas	en enseñanza de algún lenguaje	percibe algún cambio cuando usa la comp.	Ha elaborado alguna propuesta didáctica
		SI	NO	SI	NO					
31	TC, LM	1		1	1	1 a 25	1	0	PD	NO
32	TC	1		1	1	25 a 50	0	0	MD	SI (ind)
33	LM	1			0	1 a 25	1	0	0	SI (proy)
34	TC, LC	1		1	1	1 a 25	0	1	PD	NO
35	LC	1			0	25 a 50	1	1	MD	NO
36	ME, TC	1		1	1	25 a 50	1	0	MD	SI(ind,proy, gpo)
37	LC	1			0	25 a 50	0	1	MD	NO
38	TC		1		0	0	0	0	0	NO
39	TC		1		0	0	0	0	0	NO
40	TC	1		1	1	25 a 50	1	0	MD	SI
41	ME, TC	1		1	1	1 a 25	1	0	MD	SI(proy)
42	TC	1		1	1	1 a 25	0	0	PD	SI(ind)
43	TC		1		0	0	0	0	0	NO
44	LM	1			0	0	1	0	0	SI
45	TC.LC	1		1	1	50-	0	0	MD	SI
46	LC	1		1	1	1 a 25	1	0	PD	NO
TOTAL										
46		**36**	**10**	**23**	**23**		**28**	**8**	PD: 11	SI: 19
									MD: 16	NO: 27
									PD: 24%	**SI: 41.3 %**
									MD: 35 %	**NO: 58.69 %**

ME: Matemática Educativa
TC: Tronco común de licenciaturas
LM: Licenciatura en Matemáticas
LC: Licenciatura en computación

Cuántos profesores usan la computadora en su actividad docente, y cómo la usan.

Profesor	Tienen su carga académica en:	La utiliz en su actividad docente SI	NO	En la enseñanza de las matemáticas SI	NO	Como herramienta en sus tareas académicas	En enseñanza de algún lenguaje
1	TC	1			0	1	0
2	TC, LM	1		1		1	0
3	TC	1		1		1	0
4	TC		0		0	0	0
5	TC	1		1		1	0
6	TC	1		1		1	1
7	ME,TC,LM,LC	1			0	1	0
8	ME,LM,LC	1		1		1	0
9	TC, LM	1		1		1	0
10	ME,TC	1			0	1	0
11	LM, LC	1		1		1	0
12	TC	1		1		0	0
13	TC	1			0	1	1
14	LM	1			0	1	1
15	TC	1			0	1	0
16	ME,TC,LM		0		0	0	0
17	TC		0		0	0	0
18	TC		0		0	0	0
19	TC	1			0	1	0
20	TC	1		1		1	0
21	TC,LM,LC	1		1		1	0
22	TC,LM	1		1		0	0
23	TC		0		0	0	0
24	TC,LM		0		0	0	0
25	TC	1		1		1	0
26	LM	1			0	1	1
27	LM	1			0	1	0
28	LM		0		0	0	0
29	ME,TC	1		1		1	0
30	TC,LM	1		1		0	1
31	TC, LM	1		1		1	0
32	TC	1		1		0	0
33	LM	1			0	1	0
34	TC, LC	1		1		0	1
35	LC	1			0	1	1
36	ME, TC	1		1		1	0
37	LC	1			0	0	1
38	TC		0		0	0	0
39	TC		0		0	0	0
40	TC	1		1		1	0
41	ME, TC	1		1		1	0
42	TC	1		1		0	0
43	TC		0		0	0	0
44	LM	1			0	1	0
45	TC,LC	1		1		0	0
46	LC	1		1		1	0
46		**36**	**10**	**23**	**23**	**28**	**8**

Dado que nuestro interés se centra en los profesores que utilizan la computadora en la enseñanza de las matemáticas, hemos seleccionado los siguientes:

Profesor	Carga académica *	Proporción en que la utilizan (porcentaje)			Cambio que perciben, de cuando la usan a cuando no la usan.		Ha elaborado alguna propuesta didáctica que contempla el uso de la comptadora.	
		1 a 25 %	25 a 50 %	más de 50 %	Muy diferente	Poco diferente	SI	NO
2	TC, LM	1			1		1	
3	TC	1				1	1	
5	TC	1			1			1
6	TC		1			1	1	
8	ME,LM,LC		1		1		1	
9	TC, LM		1			1		1
11	MC, LC	1				1	1	
12	TC		1		1			1
20	TC	1			1			1
21	TC,LM,LC		1		1		1	
22	TC,LM	1				1		1
25	TC	1				1	1	
29	ME,TC	1			1		1	
30	TC,LM	1			1		1	
31	TC, LM	1				1		1
32	TC		1		1		1	
34	TC, LC	1				1		1
36	ME, TC		1		1		1	
40	TC		1		1		1	
41	ME, TC	1			1		1	
42	TC	1				1	1	
45	TC,LC			1	1		1	
46	LC	1				1		1
23		**14**	**8**	**1**	**13**	**10**	**15**	**8**

* TC. Profesor de servicio en el tronco común
LM. En el área de la Licenciatura en Matemáticas
ME. En el área del Programa de Maestría en Matemática Educativa

ANEXO A5

UNISON

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

AREA: QUIMICO-BIOLOGICAS

MATERIA: ALGEBRA LINEAL
(Contenido específico: Cálculo Diferencial e I.)

CLAVE: 0005

SEMESTRE: I

CREDITOS: 110

TIEMPO REQUERIDO: 75 HORAS

NUMERO DE TEMAS: VII

NUMERO DE OBJETIVOS: ESPECIFICOS: 51

OBJETIVOS GENERALES

El alumno usará las funciones reales de variable real como modelo matemático de fenómenos naturales.

El alumno aplicará las técnicas del Cálculo Diferencial para resolver problemas de Física, Química y Biología que pueden ser descritos por medio de funciones reales de variable real.

El alumno obtendrá la antiderivada más general de funciones algebraicas sencillas.

TEMARIO

I SISTEMAS NUMERICOS.

II FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

III LIMITES Y CONTINUIDAD

IV DERIVACION

V APLICACIONES DEL CALCULO DIFERENCIAL

VI DIFERENCIALES

VII ANTIDERIVADAS

ELABORACION:

MC. Dora Julia Borbón González
LM. Francisco Armando Carillo N.

FECHA DE ELABORACION:

Septiembre de 1988.

MAESTRO QUE IMPARTE LA MATERIA

____

ARIO	OBJETIVOS	ACTIVIDADES	TIEMPO ESTIMADO DE ESTUDIO	BIBLIOGRAFIA
SISTEMAS NUMERICOS.	El alumno explicará el sistema de los números reales y sus propiedades, algebraicas y de orden.	El sistema de los números reales consiste en un conjunto de elementos denominados NUMEROS REALES y dos operaciones conocidas como ADICION Y MULTIPLICACION.	6 horas	Libros 1,3,4
	01. El alumno enunciará las propiedades algebraicas de losnúmeros rales.			
	02. El alumno enunciará las propiedades de orden de los números rales.	02. P1. $a<b \leftrightarrow b-a>0$ P2. $a>b \leftrightarrow b<a$ P3. $a<b \leftrightarrow a<b$ o $a=b$ P4. $a<b \leftrightarrow a>b$ o $a=b$ P5. $a<b, b<c \rightarrow a<c$ P6. $a<b \rightarrow a+c \quad b+c$ P7. $a<b, c>d \quad a+c<b+d$ P8. $a<b, c>0 \rightarrow a \; c<bc$ P9. $a<b, c<0 \rightarrow ac>bc$ P10. $0<a<b, 0<c<d \rightarrow ac<bd$		
	03. El alumno explicará la propiedad de continuidad de los números reales.			

TEMARIO	OBJETIVOS	ACTIVIDADES	TIEMPO ESTIMADO DE ESTUDIO	BIBLIOGRAFIA
	04. El alumno explicará la diferencia entre números racionales y en términos de su expansión decimal.	04. Un número racional es un número que se puede expresar como un cociente de dos números enteros p/q donde $q \neq 0$. A los racionales pertenecen los factores positivos y negativos. Los decimales conmensurables periódicos positivos y negativos. Un número irracional es un número que no es racional y son los decimales inconmensurables aperiodicos positivos y negativos. EJEMPLO: De nos. racionales son: 2/7, -4/5, 236/100 = 2.36, -01/111= -0, 549549... EJEMPLO: de nos. irracionales son $\sqrt{a}= 1.732...$ $\pi = 3.14159...$		
	05. El alumno construirá la recta real, asociándole a cualquier número real un punto de la recta.	05. AXIOMA DE COMPLETEZ: El sistema de los números reales tiene una correspondencia biunívoca con los puntos de una recta.		
	06. El alumno explicará las propiedades del valor absoluto de un número real.	06. P1. $\lvert x \rvert < a \leftrightarrow -a<x<a,\ a>0.$ P2. $\lvert x \rvert \leq a \leftrightarrow a \leq x \leq a \quad a>0$ P3. $\lvert x \rvert > a \leftrightarrow x>a$ o $x<-a, a>0.$ P4. $\lvert x \rvert \geq a \leftrightarrow x \geq a$ o $x \leq -a, a>0.$ P5. $\lvert ab \rvert = \lvert a \rvert \lvert b \rvert.$ P6. $\lvert a/b \rvert = \lvert a \rvert / \lvert b \rvert$ P7. $\lvert a+b \rvert \leq \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$ P8. $\lvert a-b \rvert < \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$ P9. $\lvert a-b \rvert \geq \lvert a \rvert - \lvert b \rvert$ A la propiedad 7 se le llama la DESIGUALDAD DEL TRIANGULO.		

MARIO	OBJETIVOS	ACTIVIDADES	TIEMPO ESTIMADO DE ESTUDIO	BIBLIOGRAFIA
I. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL.	El alumno explicará el concepto de función y terminología relacionada con dicho concepto.	Una función es un conjunto de parejas ordenadas de números (x,y) en el cual no hay dos parejas ordenadas distintas que tengan el mismo primer número.	12 Horas	Libros 1,3,4,5
	El alumno identificará algunos tipos de funciones reales de variable real.	Ejemplos de funciones reales de variable real; a) $f(x)=x$; func. identidad b) $f(x)=x^2+ax+b$ cuadrático c) $g(t)=\ln t$ log natural d) $v(w)=e^v$ exponencial e) $g(x)=\text{sen}(x)$ Trigono- f) $g(x)=\cos(x)$ métricas g) $h(x)=\begin{cases} 3 & \text{si } x<-2 \\ -3 & \text{si } x\geq -2 \end{cases}$ escalonada		
	07. El alumno enunciará el concepto conjuntista de función.	07. Def. Una función es un conjunto de parejas ordenadas (x,y), en el cual no hay dos parejas ordenadas distintas que tengan la misma primera componente x.		
	08. El alumno enunciará los conceptos de dominio y rango en una función.	08. El dominio de una función es el conjunto de todos los valores posibles de la variable independiente.		

TEMARIO	OBJETIVOS	ACTIVIDADES	TIEMPO ESTIMADO DE ESTUDIO	BIBLIOGRAFIA
		El rango de una función es el conjunto de todos los valores posibles de la variable dependiente.		
	09. El alumno representará gráficamente una función	09. Si f es una función entonces la GRAFICA de f es el conjunto de todos los puntos (x,y) en R^2 para los cuales (x,y) es una pareja ordenada en f,		
	10. El alumno construirá la suma, resta, producto, cociente, y composición de funciones dadas especificando el dominio de la función resultante.	10. DEF. Dadas dos funciones f y g: i) Su SUMA, se define por $(f+g)(x)=(x)+g(x)$ ii) Su DIFERENCIA, se define por: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ iii) Su PRODUCTO, se define por: $(fg)(x)=(x)\ g(x)$ iv) Su COCIENTE, se define por: $(f/g)(x)=f(x)/g(x)$ En cada caso, el dominio de la función resultante consiste en aquellos valores de x comunes a los dominios de f y g, en el caso iv) se excluyen los valores de x para los cuales $g(x)=0$.		

TEMARIO	OBJETIVOS	ACTIVIDADES	TIEMPO ESTIMADO DE ESTUDIO	BIBLIOGRAFIA
		v) La FUNCION COMPUESTA se define por: $(f\circ g)(x)= f(g(x))$ el dominio de $f\circ g$ es el conjunto de todos los números x en el dominio de g, tales que g(x) se encuentra en el dominio de f.		
	11. El alumno explicará el comportamiento de algunas funciones especiales tales como: función lineal, función cuadrática, función polinomiales y racionales función exponencial función trigonométrica, función escalonada, función valor absoluto.	11. Más ejemplos de funciones: 1) $f(x)= \|x\|$ valor absoluto 2) $f(x)=x-1/(x^2+3)$ función racional 3) $g(x)=a_0 + a_1x+\ldots+a_nx^n$ función polinomial.		
	12. El alumno explicará el concepto de funcion biunívoca o uno a uno.	12. DEF. Se dice que una función es biunívoca a uno a uno si y solo si x_1 y x_2 son dos números diferentes cualesquiera, en el dominio de f, entonces $f(x_1)\neq f(x_2)$.		

TEMARIO	OBJETIVOS	ACTIVIDADES	TIEMPO ESTIMADO DE ESTUDIO	BIBLIOGRAFIA
	13. El alumno explicará el concepto de función inversa.	13. DEF. Si f es una función uno a uno la cual es el conjunto de pares ordenados (x,y), entonces existe una función f^{-1}, denominada INVERSA de f, donde f^{-1} es el conjunto de pares ordenados (y,x) definida por: $x=f^{-1}(y) \leftrightarrow y=(x)$ el dominio de f^{-1} es el contradominio de f y el contradominio de f^{-1} es el dominio de f.		
	14. El alumno explicará la teoría de funciones reales de variable real al planteamiento y solución de problemas reales.	14. EJEMPLO: El ritmo al que se propaga una epidemia a través de una comunidad es conjuntamente proporcional al número de personas que han cogido la enfermedad y al número de los que no lo han hecho. Exprese este ritmo como función del número de personas que han cogido la enfermedad. SOLUCION. Sea x=# de personas que han cogido la enfermedad. y=# de personas que no han cogido la enfermedad n=tamaño de la propagación y=n-x. $R=k(xy)$, entonces $R(x)=k(nx-x^2)$ donde k es la cuenta de proporcionalidad.		

...ARIO	OBJETIVOS	ACTIVIDADES	TIEMPO ESTIMADO DE ESTUDIO	BIBLIOGRAFIA
LIMITES Y CONTINUIDAD	El alumno manejará los conceptos de límite de una función y de función continua.		12 Horas	Libros 1,3,4,5
...ímites de ...unciones.	15. El alumno explicará la definición intuitiva de límite.	15. DEF. Límite de f(x) en a Sea f una función y a un número fijado. Supongamos que el dominio de f contiene intervalos abiertos (c,a) y (a,b), para algún número c<a y algún número b>a, si al aproximarse x hacia a tanto por su izquierda como por su derecha f(x) tiende a un número específico L, entonces L se llama el límite de f(x) cuando x tiende a a y este se escribe: $\lim_{x\to a} f(x)= L$		
...opiedades de ...os límites.	16. El alumno manejara las propiedades de los límites	16. Propiedades de los límites: son f y g funciones y supongamos que: $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existen ambos. Entonces: 1) $\lim (f(x)+g(x)=\lim f(x)+g(x)$ 2) $\lim kf(x)=k \lim f(x)$ 3) $\lim (f(x)g(x)=\lim f(x)\lim g(x)$ 4) $\lim (f(x)/g(x))=\lim f(x)/\lim g(x)$ si $\lim g(x)\neq 0$ 5) $\lim (f(x)) = \lim f(x))^n$		

MARIO	OBJETIVOS	ACTIVIDADES	TIEMPO ESTIMADO DE ESTUDIO	BIBLIOGRAFIA
	17. El alumno calculará límites usando las propiedades de los límites.	17.- Ejemplo:Calcular: $\lim_{x\to 2} (x^2-2x-3)$ $= \lim x^2+\lim 2x -\lim 3$ $= (\lim x^2)^2+ \lim 2 \lim x - \lim 3$ $= z^{2^2}+2(2) - 3$ $= 4 + 4 - 3$ $= 5.$		
	18. El alumno calculará límites de funciones exponenciales. 19. El alumno explicará el comportamiento de algunas funciones cuando la variable independientes crece o decrece sin cota.	19. Límites en el infinito $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ Límites al infinito $\lim_{x\to\alpha} f(x)=$ $\lim_{x\to\alpha} f(x)=$		
	20. El alumno interpretará los límites en el infinito y los límites al infinito como asintotas verticales y horizontales.			
) Límites Laterales.	21. El alumno explicará el concepto de límite lateral en un punto.			

MARIO	OBJETIVOS	ACTIVIDADES	TIEMPO ESTIMADO DE ESTUDIO	BIBLIOGRAFIA
	22. El alumno calculará algunos límites late-les y comparará los casos que se presen-tan.			
Continuidad	23. El alumno explicará el concepto de con-tinuidad de una fun-ción en un punto y el de continuidad en un intervalo.	23. DEF: Supongamos que f(x) esta definida en a y en algún in-tervalo abierto (a,b) que contenga al número a. Entonces se dira que f es continua en a si: 1) $\lim_{x\to a} f(x)$ es continua 2) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ Def: Una función f(x) se dice que es continua en un intervalo en (c,b) si es continua en todos los puntos del intervalo.		
	24. El alumno determinará el dominio de continui-dad de las funciones antes vistas.			
DERIVACION	El alumno derivará funciones reales de variable real.		15 Horas.	Libros 1,2,3,5
Derivada como pendiente de una curva.	25. El alumno definirá la pendiente de una curva en un punto.			

MARIO	OBJETIVOS	ACTIVIDADES	TIEMPO ESTIMADO	BIBLIOGRAFIA
	26. El alumno definirá la derivada de una función en un punto y la usará para calcular la pendiente de una curva en punto dado.	26. DEF: Sea f una función definida al menos en un intervalo abierto que incluya al número x. Si: $\lim_{w \to x} f(w)-f(x)/(w-x)$ existe, se llama la derivada de f en x y se denota $f'(x)$.		
a Derivada omo razón e cambio.	27. El alumno definirá la razón de cambio media y razón de cambio instantánea.	27. DEF: Sea f una función entonces se define la razón de cambio media de media de f en el intervalo abierto (a,b) como $f(b)-f(a)/(b-a)$. DEF. Sea f una función entonces se - la razón de cambio instantánea de f en el punto $x=a$ como: $\lim_{b \to a} f(b)-f(a)/(b-a)$		
	28. El alumno usará la derivada para calcular razones de cambio instantáneas.			
TEOREMAS SOBRE DERIVADAS.	29. El alumno calculará la derivada de una suma, resta, producto y cociente de funciones derivables.	29. Sean f y g funciones derivables entonces: T1. $D_x(x^n)=nx^{n-1}$ T2. $(cf(x))'=cf'(x)$ T3. $(f\underline{+}g)'=f\underline{+}g'$		

TEMARIO	OBJETIVOS	ACTIVIDADES	TIEMPO ESTIMADO	BIBLIOGRAFIA
		T4. $(fg)'=f\pm g'$ T5. $(f/g)'=f'g=fg'/g^2$		
	30. El alumno calculará la derivada de una composición de funciones derivables.	30. TEOREMA. Si y es una función de u, definida por $y=f(u)$ y la D_u y existe, y si u es una función de x, definida por $u=g(x)$ y $D_x u$ existe, entonces y es una función de x y $D_x y$ existe y esta dada por: $D_x y = D_u y D_x u$		
d) Derivadas de orden superior.	31. El alumno calculará las derivadas sucesivas de una función			
e) Derivación implícita	32. El alumno diferenciará entre forma explícita e implícita de una función 33. El alumno aplicará las técnicas de derivación implícita aplicada a funciones dadas en forma implícita.			

TEMARIO	OBJETIVOS	ACTIVIDADES	TIEMPO ESTIMADO	BIBLIOGRAFIA
IV. Aplicaciones del Cálculo Diferencial.	El alumno resolverá problemas de máximos y mínimos usando derivadas. El alumno trazará la gráfica aproximada de una función utilizando para ello la información que proporciona la primera y segunda derivada de una función.		15 horas	Libros 1,2,3,5
	34. El alumno explicará el Teorema de Rolle.	34. Enuncie el Teorema de Rolle "Si una función f es continua en un intervalo cerrado [a,b] y derivable en el intervalo abierto (a,b) y f(a)= f(b), entonces existe al menos un número c en (a,b) tal que f'(c)=0". Ilustrar el significado geométrico del Teorema de Rolle mediante la gráfica de una función f que cumpla con las condiciones enunciadas para el caso en que f(a)=f(b)=0, señalando que la gráfica muestra que tiene que haber al menos un punto en ella que corresponda a un número c, en (a,b) en el cual la tangente sea horizontal.		

TEMARIO	OBJETIVOS	ACTIVIDADES	TIEMPO ESTIMADO	BIBLIOGRAFIA
	35. El alumno explicará el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial.	35. Enunciar el Teorema del Valor Medio para derivadas: "Sea f continua en [a,b] y diferenciable en (a,b). Entonces existe un número c en (a,b) tal que: $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ Ilustrar el significado geométrico de este Teorema mediante la gráfica de una función f que cumpla con las condiciones enunciadas, señalando que geométricamente, el Teorema del Valor medio afirma que la pendiente de la recta tangente en (c,f(e)) es igual a la pendiente de la secante que pasa por (a,f(a)), (b,f(b)).		
	36. El alumno explicará cuando una función es creciente o decreciente en en un intervalo [a,b]	36. Exponer las siguientes definiciones sea f una función definida en un intervalo [a,b] i) Se diuce que f es creciente en [a,b] si $f(x_1)<f(x_2)$ cuando x_1 y x_2 son números en [a,b] que satisfacen $x_1<x_2$ ii) Se dice que f es decreciente en [a,b] si $f(x_1)\geq f(x_2)$ cuando x_1 y x_2 son números que satisfacen $x_1<x_2$. Relacionar los conceptos de funciones creciente y decreciente con la noción de derivada utilizando para ello el Teorema del valor medio, enunciado		

TEMARIO	OBJETIVOS	ACTIVIDADES	TIEMPO ESTIMADO	BIBLIOGRAFIA
		el siguiente Teoremma y demostrándolo. TEOREMA. Sea f continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b) i) Si $f'(x)>0$ para todo x en (a,b), entonces f es creciente en $[a,b]$. ii) Si $f'(x)<0$ para todo x en (a,b) entonces f es decreciente en $[a,b]$.		
	37. El alumno explicará los conceptos de máximos y mínimos absolutos de una función.	37. Definir máximo y mínimo absoluto. Sea f una función definida en un intervalo $[a,b]$ y C_1 un valor contenido en éste. i) Un número $f(c_1)$ es un Máximo absoluto de f si $f(x)<f(c_1)$ para todo x en el dominio de f. ii) Un número $f(c_1)$ es un Mínimo absoluto de f si $f(x)>f(c_1)$ para todo x en el dominio de f.		
	38. El alumno explicará los conceptos de maxímos y mínimos relativos o locales de una función.	38. Definir máximo y mínimo relativo: Sea f una función definida en un intervalo (a,b), y c_1 un valor contenido en éste. i) Un número $f(c_1)$ es un máximo relativo de f si $f(x)<f(c_1)$ para todo x en (a,b) ii) Un número $f(c_1)$es un mínimo relativo de f si $f(x)>f(c_1)$ para todo x en (a,b). Presentar la gráfica de una función donde se muestren sus máximos y/o mínimos relativos. Observar que si C_1 es un valor en que ocurre un extremo relativo entonces $f'(c_1)=0$ o bien $f'(c_1)$ no existe.		

TEMARIO	OBJETIVOS	ACTIVIDADES	TIEMPO ESTIMADO	BIBLIOGRAFIA
	39. El alumno explicará el concepto de valor cŕitico de una función.	39. Definir valor crítico: Un valor crítico de una función f es un número c_1 en su dominio para el cual $f'(c_1)=0$ o $f'(c_1)$no existe. Enunciar que si f tiene un extremo relativo en c_1, entonces c_1 es un valor crítico. EJERCICIOS. Encuentre los valores críticos de la función dada: 1) $f(x)= 2x^2-6x+8$ 2) $f(x)= (4x-3)^{1/3}$ 3) $f(x)=\frac{1+x}{\sqrt{x}}$ 4) $f(x)= 2x^3-15x^2+36x+1$		
	40. El alumno explicará el criterio de la primera derivada para verificar si un punto es maḱimo o ḿinimo relativo.	40. Establecen el criterio de la primera derivada: Sea un función f continuas en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), excepto posiblemente en el valor crítico C i) Si $f'(x)<0$ para $a<x<c$ y $f(x)>0$ para $c<x<b$ entonces $f(c)$ es un máximo relativo. ii) Si $f'(x)<0$ para $a<x<c$ y $f'(x)>0$ para $c<x<b$, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo. iii) Si $f'(x)$ tiene el mismo signo algebraico en $a<x<c$ y $c<x<b$, entonces $f(c)$ no es		

TEMARIO	OBJETIVOS	ACTIVIDADES	TIEMPO ESTIMADO	BIBLIOGRAFIA
		un extremo.		
		EJERCICIOS. Utilizar el criterio de la primera derivada para encontrar los extremos relativos de la función dada. 1) $f(x)= -x^2+2x+1$ 2) $f(x)= x^3-3x$ 3) $f(x)= (x-4)^{2/3}$ 4) $f(x)=\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$		
	41. El alumno explicará el concepto de concavidad hacia arriba y concavidad hacia abajo de una función.	41. Definir concavidad hacia arriba y hacia abajo: Sea f diferenciable en (a,b) i) Si f' es una función creciente en (a,b) entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en el intervalo. Si f' es creciente, entonces $f''(x)>0$ para todo x en (a,b). ii) Si f' es una función decreciente en (a,b), entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en el intervalo. Si f' es decreciente, entonces $f''(x)<0$ para todo x en (a,b). De lo anterior establecer el criterio de concavidad: Sea f una función para la cual f'' existe en (a,b).		

TEMARIO	OBJETIVOS	ACTIVIDADES	TIEMPO ESTIMADO	BIBLIOGRAFIA
		1) Si $f''(x)>0$ para todo x en (a,b) entonces gráfica de f es cóncava hacia arriba en (a,b). 2) Si $f''(x)<0$ para todo x en (a,b) entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en (a,b). EJERCICIOS. Determine los intervalos en los que la gráfica de la función es cóncava hacia arriba y en los que es cóncava hacia abajo a) $f(x)= -x^2+7x$ b) $f(x)= -x^3+6x^2+X-1$ c) $f(x)= x^{1/3}+2x$		
	42. El alumno explicará el concepto de punto de inflexión de una función.	42. Definir punto de inflexión. Sea f continua en C. Un punto (c,f(c)) es un punto de inflexión si ocurre que en (c,f(c)) cambia la concavidad de f. Un punto de inflexión (c,f(c)) ocurre en un número c para el cual $(f''(c))=0$ o bien $f''(c)$ no existe. EJERCICIO Localice todos los puntos de inflexión de la función: 1) $f(x)=x^4-12x^2+x-1$ 2) $f(x)= -(2x+5)^2$ 3) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-12x$		

TEMARIO	OBJETIVOS	ACTIVIDADES	TIEMPO ESTIMADO	BIBLIOGRAFIA
	43. El alumno explicará el criterio de la segunda derivada para verificar si un punto es máximo o mínimo relativo.	43. Establece el criterio de la segunda derivada. Sea f una función para la cual f" existe en un intervalo (a,b) que contiene al número crítico c. i) Si $f''(c)>0$, entonces f(c) es un mínimo relativo. ii) Si $f''(c)<0$, entonces f(c) es un máximo relativo. __Observación:__ El criterio de la segunda derivada puede no conducir a alguna conclusión; usar entonces el criterio de la primera derivada. EJERCICIOS: Utilizar el criterio de la segunda derivada para encontrar los extremos relativos de la función dada: 1) $f(x)= -(2x-5)^2$ 2) $f(x)= \sqrt{9-x^2}$ 3) $f(x)= x^{1/2}-\frac{1}{4}x$ 4) $f(x)= \frac{1}{4}x^4-2x^2$		
	44. El alumno trazará gráficas de funciones utilizando los conceptos de Cálculo ya vistos.	44. Trazar la gráfica de las siguientes funciones: 1) $f(x)= -x^3+6x^2+x-1$ 2) $f(x)= x^4-x^2$ 3) $f(x)= x(x-2)^2$ 4) $f(x)= (x^2-1)^{1/3}$		

TEMARIO	OBJETIVOS	ACTIVIDADES	TIEMPO ESTIMADO	BIBLIOGRAFIA
		nal a la cantidad que queda de la sustancia original. Encuentre el valor de x que maximiza la velocidad de reacción.	5 horas	Libros 3,4,5
VI. DIFERENCIALES.	El alumno identificará y resolverá problemas concretos donde se utilice el concepto de diferencial.			
	46. El alumno explicará el concepto de diferencial para una función de una variable independiente.	46. Definir el diferencial de la variable independiente y el de la variable dependiente: Dada una función del tipo $y=f(x)$ al incremento Δx se llama diferencial de la variable independiente y se denota por dx; $dx=\Delta x$. A la expresión $f'(x)\Delta x$ se le llama diferencial de la variable dependiente y se denota por dy; $dy=f'(x)\Delta x$. Mostrar gráficamente la interpretación geométrica de dy; haciendo notar que cuando Δx es muy pequeño: $\Delta y \approx dy$		
	47. El alumno calculará Δy y dy para algunas funciones.	47. Obtener Δy y dy en cada uno de los siguientes casos: a) Para $Y= 5x^2+4x+1$ si $x=6$ y $\Delta x=0.02$ b) Para $Y= x^3=1$ si $x=2$ y $\Delta x=0.001$ c) Obtener dY para c/u de las siguientes funciones $Y= x^4+3x^2$ $Y=\frac{x}{(3x-1)^4}$ $Y= \frac{1}{\sqrt{2x}}$ $Y= 12(x^4-1)^{1/3}$		

TEMARIO	OBJETIVOS	ACTIVIDADES	TIEMPO ESTIMADO	BIBLIOGRAFIA
	48. El resolverá problemas utilizando diferenciales.	48. Presentar problemas de aplicación de cálculo de aproximación, error relativo, etc. 1) Encuentre una aproximación a $\sqrt{36.4}$ 2) Un tanque de almacenamiento de aceite en forma de cilindro circular vertical tiene una altura de 5 m. El radio mide 8 m. con un error posible de $\pm$ 0.25 m. Utilice diferenciales para encontrar el error máximo en el volumen; calcule además el error relativo aproximado. 3) Según Poiseville, la resistencia R de un vaso sanguíneo de longitud l y radio r es $R=\frac{kl}{r^4}$, en donde k es una constante. Dado que l es constante, encuentre el cambio aproximado de R cuando r cambia de 0.2 mm. a 0.3 mm.		

TEMARIO	OBJETIVOS	ACTIVIDADES	TIEMPO ESTIMADO	BIBLIOGRAFIA
VII. ANTIDERIVADAS	El alumno obtendrá la antiderivada de funciones algebraicas y mediante el uso de las reglas para antidiferenciación.		10 horas	Libros 2,3,4,5
	49. El alumno explicará el concepto de antiderivada de una función.	49. Presentar la definición de antiderivada de una función; "Se dice que una función F es una antiderivada de una función f si $F'(x)=f(x)$ en algún intervalo". Demostrar que cualquier antiderivada de f debe ser de la forma $G(x)=F(x)+C$ donde C es una constante y $F(x)+C$ es la antiderivada más general de f.		
	50. El alumno manejará la notación para la antiderivada de una función y el proceso para encontrar la antiderivada más general.	50. Introducir una notación para la antiderivada más general de una función Si $F'(x)=f(x)$, la antiderivada más general de f se representa: $\int f(x)dx= F(x)+C$ Establecer que el proceso de encontrar una antiderivada recibe el nombre de antidiferenciación o integración y que la notación $\int f(x)dx$ se le llama integral indefinida de $f(x)$ con resa x. Enunciar las reglas para encontrar antiderivadas.		

TEMARIO	OBJETIVOS	ACTIVIDADES	TIEMPO ESTIMADO	BIBLIOGRAFIA
	51. El alumno obtendrá la antiderivada más general de una función, usando las reglas de antidiferenciación o integración.	51. Presentar ejemplos de integrales indefinidas que puedan resolverse con las reglas de antidiferenciación: a) $\int\sqrt{x}\,dx$ b) $\int\frac{x-10}{x^3}dx$ c) $\int(3x^2+2x-1)dx$ d) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2x+1}}$ e) $\int\frac{x}{(x^2+5)^3}dx$ f) $\int\sqrt{1-4x}\,dx$		

BIBLIOGRAFIA

1.- LEITHOLD
El Cálculo
Ed. Harperf Row

2.- SERIE DE COMPENDIOS SCHAUM'S
Cálculo Diferencial e Integral
Ed. Mc. Graw-Hill.

3.- SWOKOWSKI E.W.
Cálculo (con Geometría Analítica)
Ed. Wadsworth Internacional/Iberoamérica.

4.- TAYLOR H.E. Y WADE T.L.
Cálculo Diferencial e Integral
Ed. Limusa.

5.- ZILL D.G.
Cálculo (con Geometría Analítica)
Grupo Editorial Iberoamérica.

EVALUACION

Se sugiere aplicar cinco exámenes parciales, con la siguiente distribución de temas:

1er. Parcial: temas I y II

2do. Parcial: tema III

3er. Parcial: tema IV

4to. Parcial: tema V

5to. Parcial: tema VI y VII

El promedio de los cinco parciales dará la calificación final.

ANEXO A6

CAPÍTULO I

GRAFICACIÓN DE FUNCIONES

I. INTRODUCCIÓN

En muchas ocasiones resolver un problema de ingeniería, de física o de otras disciplinas, nos conduce a la elaboración de un modelo matemático en el cual siempre aparece una representación, ya sea gráfica, algebraica o numérica.

En el caso de los problemas que involucran a la variación los modelos matemáticos se relacionan estrechamente con el concepto de función, por lo cual éste se constituye en uno de los temas más importantes de los cursos de **Cálculo Diferencial e Integral** en los que, por su parte, se tiene como objeto de estudio precisamente a la variación.

Los materiales que servirán de base en esta propuesta para llevar a cabo los cursos de Cálculo Diferencial e Integral I y que se inician con el presente, ponen su acento en el uso de diversas representaciones gráficas, numéricas y algebraicas, con el propósito de desarrollar habilidades para operar dentro de cada una de esas representaciones así como de transitar entre ellas.

Para potenciar el trabajo que realizaremos, en las actividades que aquí se presentan nos apoyaremos en la computadora y de manera particular utilizaremos el paquete **Gráficos,** ya que la filosofía con la que fue creado se presta para alcanzar los objetivos y propósitos de este curso.

II. EL SOFTWARE GRÁFICOS

Este paquete es original del investigador en Matemática Educativa David Tall, quien trabaja en su país natal, Inglaterra, en el Mathematics Education Research Centre. El software fue elaborado para apoyar sus teorías sobre las formas en los que los seres humanos aprendemos matemáticas, particularmente el Cálculo Diferencial e Integral, área de su interés.

En nuestro caso consideramos que las posibilidades ofrecidas por el software se ajustan a los propósitos de los cursos ya señalados.

El paquete es de fácil manejo y puede trabajarse con él en cualquier computadora independientemente de su capacidad, adaptándose automáticamente a las características del equipo que estemos empleando. Al iniciar en "Gráficos" éste te presenta el siguiente menú de opciones:

Gráficos	I.P.N, Sección de Matemática educativa Calle Dakota # 379, México.
1. buscar instrucción de funciones	A. representación parámetro de la curva.
2. dibujar gráficos	B. representación de parámetros en el espacio
3. ampliar	C. funciones complejas
4. diferenciar	D. ecuaciones diferenciales
5. integrar	E. ecuaciones diferenciales de 2º grado
6. solucionar ecuaciones numéricas	F. ecuaciones diferenciales simultáneas
7. Taylor polinomios	G. funciones de dos variables
8. Blancmange	H. opciones
9. definir funciones	
0. alto	
indica tu decisión _	

En este momento el software te invita a seleccionar una de las diferentes opciones o tareas que en él se pueden desarrollar, con sólo presionar un dígito del 1 al 9 o una letra de la A hasta la H. Las opciones de la 1 a la 4 son las que están relacionadas con nuestro curso de Cálculo Diferencial e Integral I.

Realizaremos las siguientes actividades teniendo siempre en mente que:

El objetivo principal es que podamos identificar la gráfica de una función analizando su expresión algebraica y viceversa.

III. ACTIVIDADES

Actividad 1. Identificación de los parámetros a y b que intervienen en la expresión general de la recta dada por $y = ax + b$. ***Clase***.

- **Construcción de la <u>función base</u>**.

Seleccionamos la opción "dibujar gráficos" presionando la tecla 2 del menú principal

i. Escribamos la expresión $ax + b$ en seguida de "***f(x)*** = " y presionemos la tecla Intro.

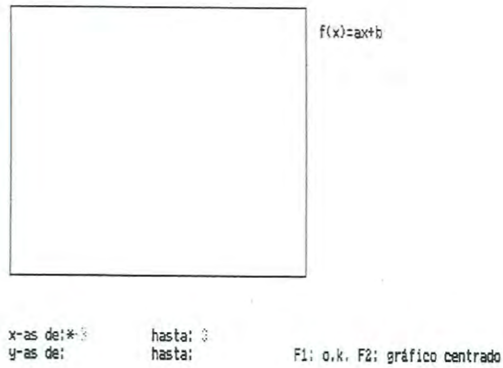
ii. Después aparecerá " ***a*** = ". Aquí "Gráficos" pide un valor inicial para el parámetro ***a***, después de teclear el valor y presionar Intro aparecerá " ***b*** = " con lo cual nos indica la petición para el valor de ***b***.

Nuestra función base estará dada por la expresión

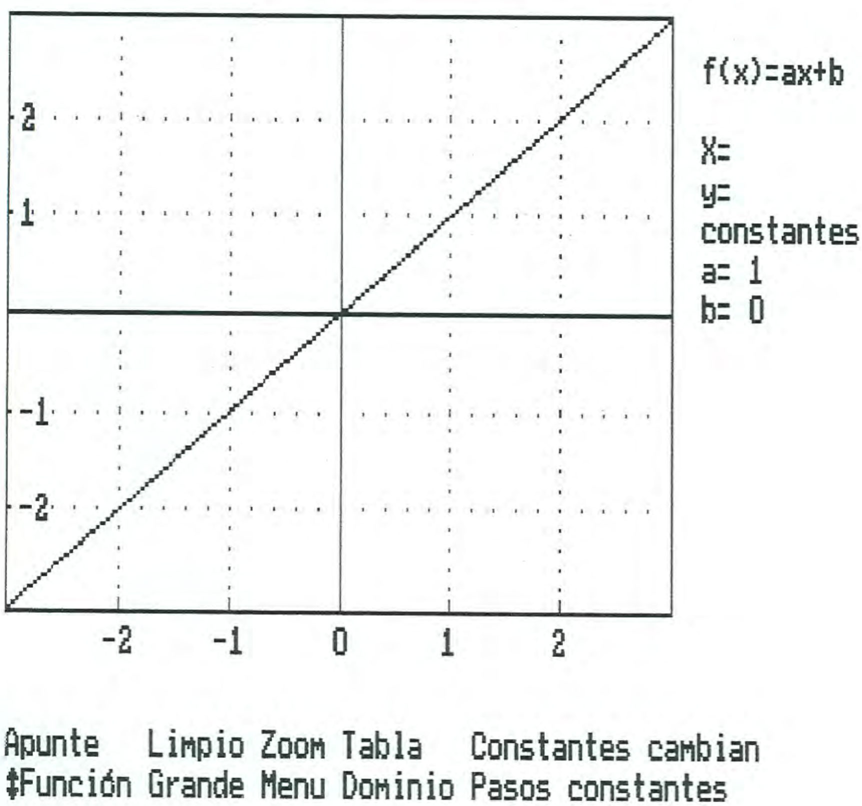
$$\boxed{f(x) = x}$$

para posteriormente analizar qué sucede si modificamos los valores de ***a*** y ***b***. ¿Qué valores tendremos que utilizar en los parámetros para obtener dicha función?

iii. Una vez que hayamos dado entrada a los valores de los parámetros aparecerá en pantalla la siguiente imagen.



En la que interpretaremos lo siguiente: La expresión quedará definida en el intervalo cerrado [-3,3] para los valores *x*, quedando libre el intervalo para los valores de *y*. Por el momento aceptaremos dicha propuesta y elegiremos la opción **F2** de "gráfico centrado". Al presionar la tecla **F2** obtenemos la siguiente imagen en pantalla.



Analiza la gráfica e identifica las coordenadas de tres puntos y escríbelas en la siguiente tabla:

x			
$y = f(x)$			

¿Qué relación existe entre los valores de x e y?.

Llena los espacios vacíos de la siguiente tabla:

X	-2		1.5	-0.5		$\sqrt{2}$	A
$y = f(x)$		3			1.32		

- **Análisis del parámetro** a.

i. Como podremos observar, en el menú que aparece en la parte inferior de la pantalla existe la opción "**C**onstantes cambian" la cual se activa presionando la tecla c, ésta nos permite modificar los valores de a y de b. Ahora modificaremos el valor de a como sigue:

1. Presionemos la tecla c
2. Tecleemos el 2 y presionemos la tecla Intro
3. Presionemos **F**1

Analiza la nueva gráfica e identifica las coordenadas de tres puntos y escríbelas en la siguiente tabla:

X			
$y = f(x)$			

¿Qué observas?

- **Análisis del parámetro b.**

i. Iniciaremos este análisis mostrando la <u>función base</u> en pantalla.

ii. Tecleemos la tecla c para cambiar el valor de b a 1 y presionemos **F1**.
¿Qué ocurrió?

iii. Analiza la gráfica con b = -2.
¿Qué propiedad tienen las rectas?

¿A qué se debe?

¿Qué papel juega el parámetro b?

Actividad 2. Construcción de gráficas combinando valores en los parámetros. ***Taller***.

Actividad 3. Identificación de la expresión algebraica analizando su gráfica. ***Taller***.

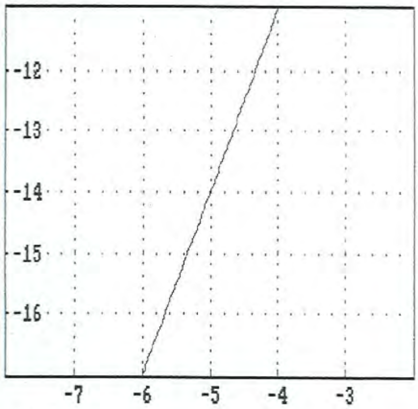
Procedimiento

i. Presionemos la tecla 1, "busca instrucciones de funciones", del menú principal
ii. Entrar en "Nivel Inicial", presionando el uno.
iii. Entrar en "Lineal", presionando el uno. Espera las indicaciones del maestro.
iv. Conclusiones.

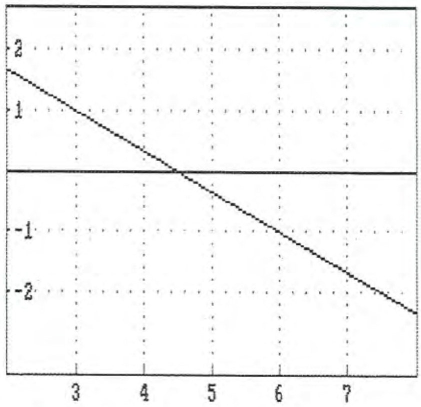
Actividad 4. Grafica en tu cuaderno las siguientes funciones sin tabular. ***Tarea***.

a. $f(x)=2x-1$	b. $f(x)=-x/3+1$	c. $f(x)=\sqrt{2}x-1.5$

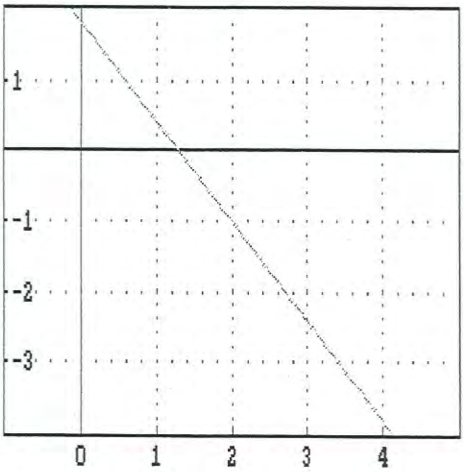
Actividad 5. Identifica la expresión algebraica de las siguientes funciones. ***Tarea***.



a). $f(x) =$



b). $f(x) =$



c). $f(x) =$

Actividad 6. Identificación de los parámetros a, b y c que intervienen en la expresión cuadrática dada por $y = a(x-c)^2 + b$. *Clase*.

- **Construcción de la función base**.

i. Seleccionamos la opción de "dibujar gráficos" escribiendo $a(x-c)^2 + b$ enseguida de "*f(x)* = " y presionando la tecla Intro.

ii. Después aparecerá "*a* =". Aquí gráficos pide un valor inicial para el parámetro *a*, después de teclear el valor y presionar Intro aparecerá "*b* =", en este momento gráficos te pide el valor para el parámetro *b* y por último te pedirá el valor de *c*. Esta actividad la iniciaremos con la expresión

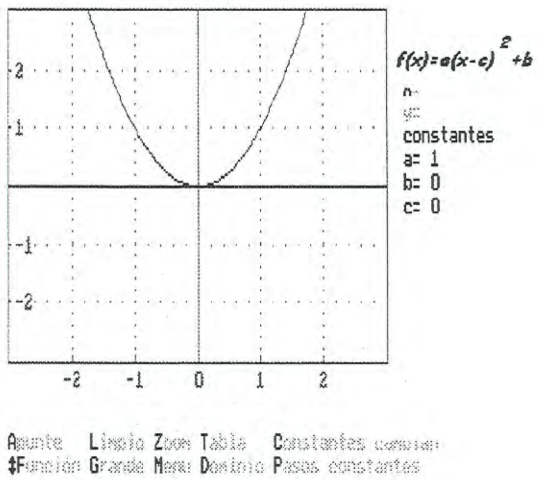
$$\boxed{f(x) = x^2}$$

¿Qué valores tendremos que utilizar en los parámetros para obtener dicha función?

$a =$ $\qquad\qquad$ $b =$ $\qquad\qquad$ $c =$

iii. Después de dar entrada al valor de *c* "gráficos" nos propone utilizar el intervalo [-3, 3] para los valores de *x*, dejando abierto el intervalo para los valores de *y*. Por el momento lo aceptaremos y presionaremos la tecla **F2**.

iv. Enseguida "gráficos" mostrará en pantalla la siguiente imagen



Donde la parábola será la representación gráfica de la función base. Analicemos la gráfica e identifiquemos las coordenadas de tres puntos y escribámoslas en la siguiente tabla:

x			
$y=f(x)$			

¿Qué relación existen entre los valores de x e y?.

Llena los espacios vacíos de la siguiente tabla:

x	-2		1.5	-0.5		$\sqrt{2}$	a
$y=f(x)$		9			3		

- **Análisis del parámetro** c.

i. Seleccionemos la opción "Constantes cambian" y asignémosle el valor de 2 al parámetro c, presionando después **F1**.
¿Qué ocurrió?

ii. Analicemos la gráfica con $c = -1$.
¿Qué papel juega el parámetro c?

- **Análisis del parámetro** b.

i. Limpiemos pantalla y grafiquemos la función base.

ii. Seleccionemos la opción "Constantes cambian" y asignémosle el valor de -2 al parámetro b, presionando después **F1**.
¿Qué ocurrió?

iii. Analicemos la gráfica con $b = 1$.
¿Qué papel juega el parámetro b?

iv. Limpiemos pantalla y grafiquemos la función base.

v. Asignémosle el valor de 2 al parámetro *b*, y -3 al parámetro *c*.

vi. Tracemos la gráfica en nuestra memoria.

vii. Presionen **F1** para mirar la gráfica en pantalla y comparémosla con la nuestra.

¿Es la misma?

¿Qué papel juega los parámetros?

- **Análisis del parámetro** *a*.

i. Limpiemos pantalla y grafiquemos la función base.

ii. Presionemos la tecla **D** de "**D**ominio" para cambiar el intervalo de *y*, presionemos la tecla flecha para abajo y escribamos -1 y luego tecleemos Intro después presionemos la tecla 5 y enseguida Intro, de esta manera los valores de *y* quedarán en el intervalo de menos uno a cinco. Para mira la gráfica presionamos la tecla **F2**.

iii. Seleccionemos la opción "**C**onstantes cambian" y asignémole el valor de 2 al parámetro *a*, presionando después **F1**.

¿Qué ocurrió?

iv. Analicemos la gráfica con $a = 3$.

¿Qué papel juega el parámetro *a*?

¿Qué pasaría con la gráfica sí el valor del parámetro *a* es 10?

¿Cómo podemos determinar el valor del parámetro *a*?

v. Para comprobar ó determina el valor del parámetro *a*, modificaremos el intervalo actual de los valores de *x*, con el mismo que tiene la *y*, reconstruyamos las gráficas. Siga las indicaciones del maestro para llenar la siguiente tabla.

x	1	1	1				2	3	c
y	1	2	4				4	4	d
a				5	1/4	1/16			

Actividad 7. Construcción de gráficas combinando valores en los parámetros. ***Taller***.

Actividad 8. Identificación de la expresión algebraica analizando su gráfica. ***Taller***.

Procedimiento

i. Presionemos la tecla 1, "busca instrucciones de funciones", del menú principal

ii. Entrar en "Nivel Inicial", presionando el uno.

iii. Entrar en "Cuadráticas", presionando el tres. Espera las indicaciones del maestro.

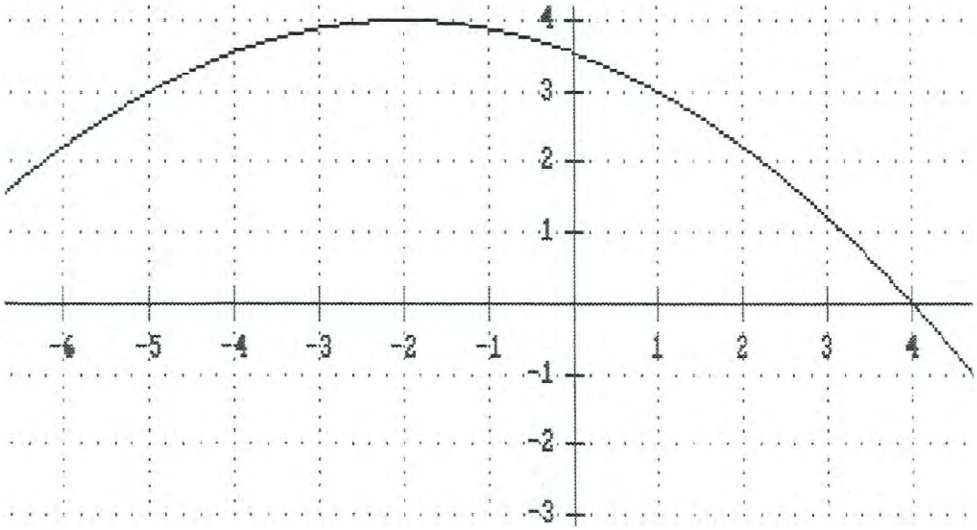
Actividad 9. Sin tabular, haz la gráfica de las siguientes funciones. ***Tarea***.

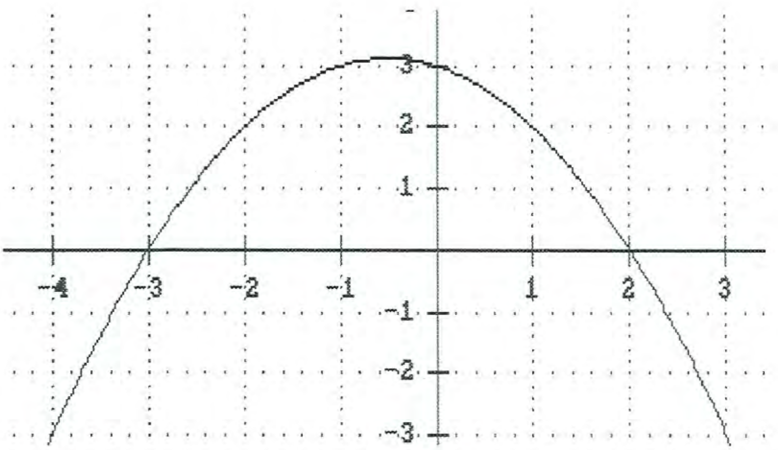
a. $f(x) = 2(x+1)^2 + 2$	b. $f(x) = -\frac{3}{4}(x-1.5)^2 + 2$	c. $f(x) = 2(x+2)^2/3 - 2$

Actividad 10. Escribe en forma paramétrica las expresiones de las siguientes funciones y graficalas sin tabular. ***Tarea***.

a. $f(x) = x^2 - 6x + 15$	b. $f(x) = -3x^2 + 15x - 21$	c. $f(x) = 2x^2 + 7x - 6$

Actividad 11. Identifica la expresión algebraica de las siguientes funciones. ***Tarea***.



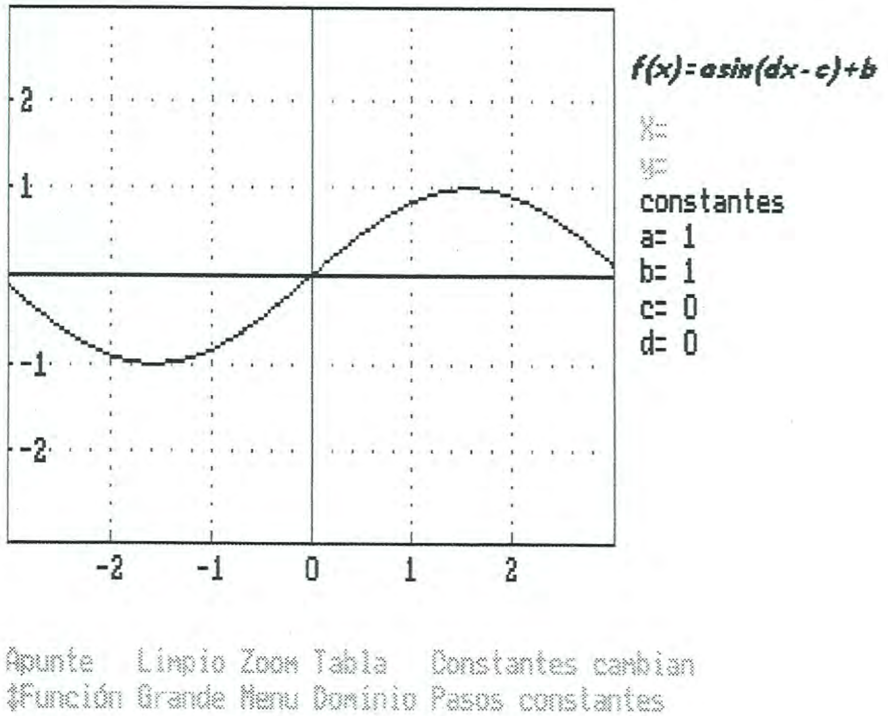


Actividad 12. Identificación de los parámetros a, b, c, y d que intervienen en la expresión $y = a\sin(dx - c) + b$. ***Clase***.

i. ¿Cuáles deben de ser los valores iniciales para los parámetros a, b, c y d, sí la función base es $f(x) = \sin x$

$a =$ $\qquad$ $b =$ $\qquad$ $c =$ $\qquad$ $d =$

ii. Siguiendo los pasos acostumbrados para obtener la gráfica de esta función base, **Gráficos** nos mostrará la siguiente imagen.



iii. ¿Qué parámetro hace que la gráfica tenga un movimiento vertical? ________, Compruébalo.

iv. ¿Qué parámetro hace que la gráfica tenga un movimiento horizontal? ________, Compruébalo.

v. ¿Qué papel juega el parámetro a?. Analicémoslo.

vi. Si la gráfica representa una onda sonora ¿qué papel juega el parámetro b?. Analicémoslo.

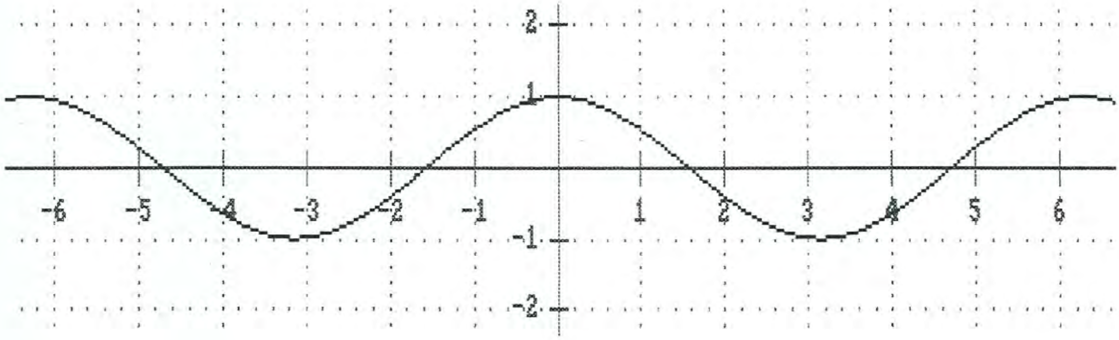
Actividad 13. Identificación de la expresión algebraica analizando su gráfica. ***Taller***.

Actividad 14. Haz la gráfica de cada función sin tabular, y en un solo plano las funciones de cada inciso. ***Tarea***.

a. $f(x) = senx + 1$ $f(x) = senx - 2$	b. $f(x) = sen(x-2)$ $f(x) = sen(x+1)$	c. $f(x) = 2senx$ $f(x) = -3senx$

d. $f(x) = sen3x$	$f(x) = -sen3x$	$f(x) = sen(-3x)$

Actividad 15. En la siguiente figura se muestra la gráfica de la función coseno natural, es decir, $f(x) = \cos x$. ***Tarea***.



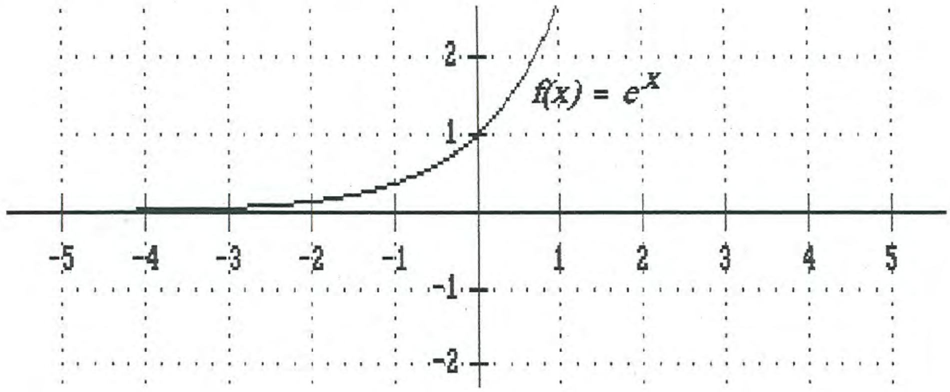
Tomando como base a la gráfica de esta función, haz la gráfica de cada una de las siguientes funciones, siguiendo las indicaciones de la actividad anterior.

a. $f(x) = \cos x - 2$ $f(x) = \cos(x-2)$	b. $f(x) = \cos 3x$ $f(x) = 3\cos x$	c. $f(x) = -2\cos x$ $f(x) = 2\cos(-x)$

Actividad 16. Análisis Gráfico de funciones especiales. *Clase*.

a. $f(x) = \sqrt{x}$ b. $f(x) = \sqrt{x} + 3$ c. $f(x) = 2\sqrt{x+5} - 3$	a. $f(x) = \sqrt{x^2}$ b. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ c. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$	a. $f(x) = \ln x$ b. $f(x) = -\ln x$ c. $f(x) = \ln(-x)$

Actividad 17. Tomen como base la gráfica que se muestra a continuación para trazar la gráfica de las funciones que aparecen en la tabla. ***Tarea***.



a. $f(x)=2e^{x}+2$	b. $f(x)=e^{-x}-1$	c. $f(x)=-e^{x}-2$

CAPÍTULO II

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

I. INTRODUCCIÓN

El cambio es una de las características de la vida actual. En todos los terrenos es común enfrentarnos a situaciones que están en transformación. Lo mismo en economía, en política, en la organización social, en el empleo de técnicas para las actividades productivas, en los materiales que se emplean en las mismas, y en cualquier esfera de la vida cotidiana.

Esta característica nos conduce a estudiar los procesos de cambio y de variación desde todas las perspectivas posibles y en el caso de las matemáticas existen diferentes enfoques para realizar análisis sobre tales procesos.

En el caso del presente curso, abordamos los procesos de cambio iniciándonos en el estudio del cálculo, herramienta matemática creada en la segunda mitad del Siglo XVII con el propósito de estudiar precisamente los fenómenos de variación.

Centraremos nuestra atención en dos aspectos relevantes para las diversas actividades humanas cuando se estudian y analizan fenómenos de magnitudes variables:

a. En una situación variable, ¿cómo elegir la mejor opción para resolver un problema?
b. ¿Qué tan rápido cambia una variable cuando se modifica otra variable de la cuál es dependiente?

En la lista de problemas de este folleto nos dedicamos a analizar los problemas del primer tipo, a los cuales denominaremos problemas de optimización pues el propósito de los mismos es aprender a tomar la decisión óptima en una determinada situación. Tales problemas –como señalamos líneas atrás- son frecuentes en todas las ramas de la actividad humana.

Así por ejemplo, en la industria es frecuente enfrentar la exigencia de producir la mayor cantidad posible de dispositivos con las mínimas pérdidas de material, o de fabricar piezas que sean lo más resistente posible y al mismo tiempo lo más ligeras, de reducir los costos de producción economizando no sólo materia prima sino también combustibles, energía eléctrica, tiempo y otros factores.

Las situaciones de este tipo constituyen una parte preponderante en la práctica profesional de cualquier ingeniero, independientemente de la rama específica en la cual se desenvuelva.

La lista de problemas que abordamos a continuación tienen el objetivo central de iniciarnos tanto en el estudio de los problemas de optimización como en la obtención de herramientas conceptuales y técnicas algorítmicas generales que nos coloquen en mejor situación para enfrentar nuevos problemas relativos al cambio y la variación. Los problemas fueron originalmente formulados por los profesores Dr. Ramiro Ávila Godoy y M.C. José David Fonseca, y en el presente folleto se adaptaron para incluir el uso de la computadora.

II. ACTIVIDADES

Actividad 1. El problema de la caja sin tapa. *Clase.*

De un cartón rectangular de 40 x 50 centímetros se quiere construir una caja sin tapa; para esto se recortarán cuadrados iguales en las cuatro esquinas del cartón y se doblarán las cejas con el fin de formar los lados (ver figura 1). Con base en esta información responde las siguientes cuestiones y determina las dimensiones de la caja de volumen máximo.

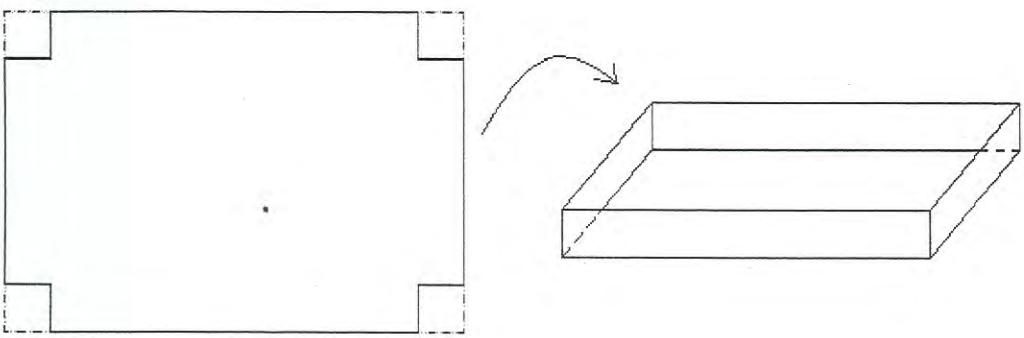


Fig. 1

a. ¿Cómo pueden expresarse la longitud del largo y del ancho de la caja si se designa con "x" a la longitud del lado de los cuadrados que se recortarán en las esquinas?

Largo: ________ Ancho: __________

b. ¿Cómo se calcula el volumen de la caja? Llamemos $V(x)$ a dicho volumen.

$V(x) =$ ______________________

c. ¿Cuál es el menor valor que puede tener x? $x =$ ______________

d. ¿Cuál es el mayor valor que puede tener x? $x =$ ______________

e. De los dos incisos anteriores determina el intervalo de valores que puede tomar x.

f. Utilicemos **gráficos** para observar la gráfica de ***volumen*** contra "x" correspondiente a la caja en el intervalo especificado en el inciso anterior.

g. Construyamos una tabla de valores en el mismo intervalo.

h. ¿Para qué valor de x se obtuvo el máximo valor de V?

i. ¿Es este valor de x la solución de nuestro problema? ... ¿ Por qué?

j. ¿Entre qué valores estará el valor de x que buscamos según se puede deducir de los valores que presenta la tabla?

k. ¿Si calculamos los valores de V para nuevos valores de x podremos así resolver el problema?

l. Si entre los valores ya calculados para V estuviera el que representa la V máxima. ¿Habría manera de reconocerlo?... ¿Porqué?

m. Sabiendo que cada punto de la gráfica representa una pareja de valores que corresponden, la abscisa al valor de la x y la ordenada al valor de la V. ¿Cómo debemos plantear nuestro problema en la gráfica?

n. Con nuestros conocimientos de geometría ¿puedes responder cómo es la tangente en el punto más alto de la curva?

o. ¿Cuál es la característica analítica que determina la inclinación de una recta?

p. ¿Cuál es el valor de la pendiente de una recta "horizontal"?

q. Tomando en cuenta esta última característica de las rectas "horizontales" ¿Cuál es la interpretación geométrica del problema de la caja de volumen máximo?

Actividad 2. El problema del cenicero. ***Taller***.

Supón que de una hoja de estaño, de 8 x 15 centímetros se hace un cenicero recortando cuadrados de igual tamaño de las esquinas y doblando las cajas para formar los lados.

a. Si x representa la longitud de los lados de los cuadrados recortados de las esquinas, encuentra una expresión algebraica para el volumen del cenicero en términos de x.

b. Encuentra una desigualdad para expresar las restricciones físicas sobre el valor de x.

c. En tu cuaderno de trabajo, dibuja la gráfica de la expresión algebraica del volumen $V(x)$, sin tabular.

d. Estima las dimensiones del cenicero del volumen máximo.

Actividad 3. Primer problema teórico. ***Taller***.

Cuando se discutió el problema de la caja sin tapa, se construyó una tabla que mostraba diversos valores para x (la longitud del lado de cada uno de los cuadrados que se cortan en las esquinas) y para el volumen V de la caja correspondiente. Muestra que esta tabla no contiene la solución exacta del problema.

Actividad 4. Segundo problema teórico. ***Taller***.

Suponiendo que S y t son dos variables relacionadas por la expresión $S(t) = 10 + 4t - 2t^2$ donde el valor de t esta restringido por la condición $0 \leq t \leq 2$. Demuestra que en estas condiciones $S = 11$ no es el máximo valor posible.

Actividad 5. El problema del patio. ***Tarea***.

López y Pérez poseen sendos lotes vecinos de 25 x 50 metros, López ha construido ya una cerca alrededor de su terreno. Pérez quiere construir ahora un patio rectangular para su perro, de área tan grande como sea posible, pero no dispone más que de 80 metros de alambre para cercar. Por supuesto Pérez puede utilizar parte de la cerca de López para cercar un lado del patio, ver la figura 2.

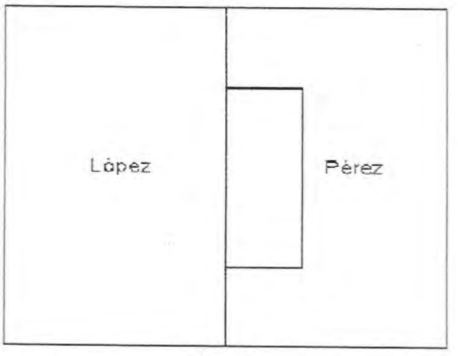


Fig. 2

a. Si x representa la longitud de la porción de cerca de López que Pérez comparte, encuentra una expresión algebraica para el área del patio del perro de Pérez, en términos de x. Llámale $A(x)$.

b. ¿Cuál es la mínima longitud de x? ¿Cuál es la máxima?.

c. ¿Cuál es el área en cada una de las longitudes anteriores?.

d. Toma una longitud para x entre los dos valores anteriores y calcula su área, ¿cómo es el área para este valor comparado con las áreas de los valores anteriores?

e. Bosqueja la gráfica de la expresión algebraica del área $A(x)$.

f. Estima las dimensiones que Pérez debe usar para el patio.

Actividad 6. El problema del canalón. ***Tarea***.

Una pieza larga y rectangular de lámina de 30 centímetros de ancho va a convertirse en un canal para agua doblando hacia arriba dos de sus lados hasta formar ángulos rectos con la base. ¿Cuál debe ser el ancho de las partes dobladas para que el canal tenga una capacidad máxima?

Actividad 7. El problema de la bodega. ***Tarea***.

En un terreno en forma de un triángulo rectángulo isósceles se desea construir una bodega rectangular, estima las dimensiones para que el área del piso sea máxima, ver la figura 3.

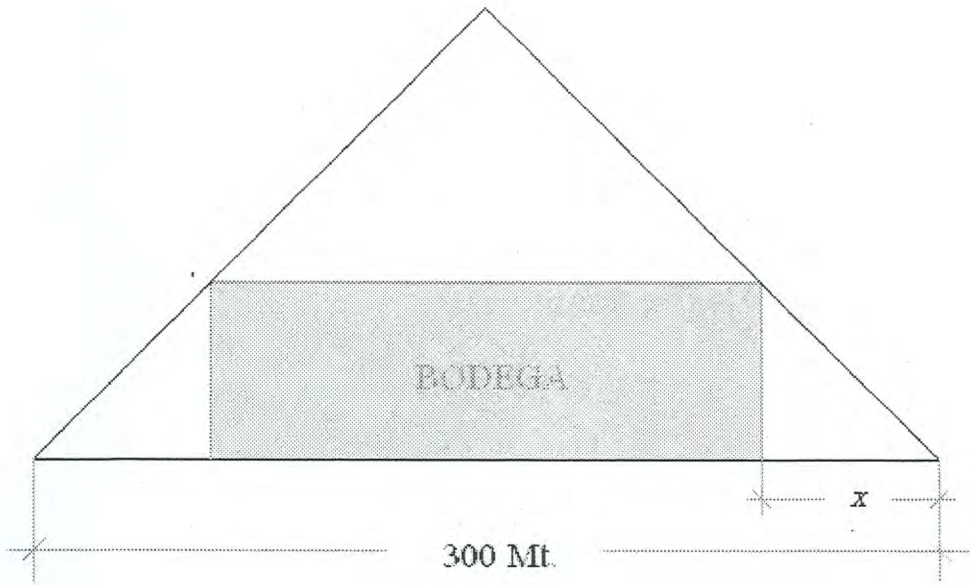


Fig. 3

Actividad 8. El problema de la lata de aceite. ***Clase***.

Debemos diseñar una lata de aceite en forma de un cilindro circular recto de tal forma que ésta debe contenga un litro (o sea 1000 cm^3) de aceite. Con esta información responde las siguientes cuestiones y determina cuales son las dimensiones que debe tener la lata, de manera que requiera la mínima cantidad de metal para su manufactura. Ver la figura 4.

a. ¿Qué valores numéricos son necesarios especificar para poder calcular el volumen de un cilindro circular recto?

b. A partir de las dimensiones a que hace referencia el inciso anterior ¿Cómo puede ser expresado el volumen del cilindro circular recto?

$V =$ ______________

c. De acuerdo con la fórmula del volumen del cilindro circular recto, se observa que el valor de dicho volumen depende de dos dimensiones ¿de cuáles?

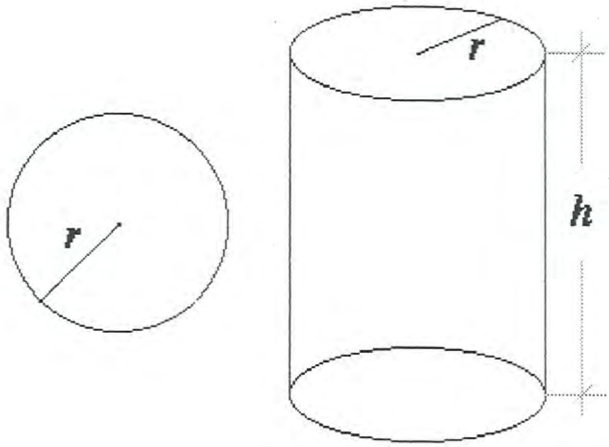


Fig. 4

d. En nuestro problema el valor del volumen de la lata de aceite es un dato, debe valer 1000 cm^3. Sustituyendo este valor en la expresión del volumen V. ¿Cuál es la nueva expresión?

e. En esta nueva expresión ¿de quién depende ahora el valor de la altura h?

f. Despeja la altura h de la expresión obtenida al sustituir el valor de V, en la expresión del volumen del cilindro circular recto.

g. ¿Cómo habrá de cortarse la lámina para construir la lata?

h. Si se considera que el grueso tanto del fondo como de los lados y de la tapa de la lata es uniforme. ¿De quién dependerá la cantidad de metal empleado en la fabricación de la lata?

i. Escribe una expresión algebraica para el área del rectángulo que sirve de cara lateral del cilindro en función del radio y de la altura.

j. Escribe también una expresión para el área de la tapa y del fondo del bote en función del radio.

k. Con base en los resultados de los incisos i y j escribe una expresión para calcular el área de la superficie del cilindro.

l. En el inciso anterior hemos obtenido una expresión para calcular el área de la superficie de la lata que depende del radio y la altura. Utilizando la expresión del inciso f escribe una expresión para calcular el área de la superficie de la lata de nuestro problema (esto es, la superficie de la lata que tiene un volumen de 1000 cm^3) de tal manera que dicha área sólo dependa del radio.

m. ¿Cuál es el menor valor que puede tomar el radio r en nuestro problema? ¿ Y el mayor?

n. Escribe una desigualdad que exprese los valores que puede tomar r en nuestro problema.

o. Si el volumen de la lata que queremos construir es fijo. ¿Qué pasa con la altura de dicha lata a medida que tomamos un radio cada vez más pequeño? ¿Y qué pasa con la altura a medida que el radio es cada vez más grande?.

p. Dibuja por lo menos tres latas con el supuesto de que su volumen es un litro, pero que tengan, la primera un radio pequeño, la segunda un radio muy grande, y la tercera un radio mediano.

q. Usa **gráficos** para graficar la expresión del área y una tabla de valores iniciando en uno.

r. Analizando los valores obtenidos en la tabla ¿Cuál es la mínima área? ¿Con qué radio?

s. ¿Es ese valor la solución de nuestro problema?

t. ¿Cómo se interpreta en la gráfica nuestro problema?

u. ¿Cómo es la tangente a la curva en el punto más bajo?

Actividad 9. El segundo problema de la lata de aceite. ***Taller***.

Debemos diseñar una lata de aceite en forma de cilindro recto. Sabemos que la unidad cuadrada del metal usado para hacer la tapa y el fondo de la lata cuesta el doble que la unidad cuadrada del metal usado para hacer la cara lateral.

a. Si r y h representan el radio y la altura de la lata respectivamente, escribe una expresión algebraica para el costo total del metal usado en la manufactura de ésta.

b. Suponiendo que la lata debe contener cuatro litros de aceite, expresa otra vez el costo del metal usado, en términos únicamente de la variable r.

c. En tu cuaderno de trabajo, dibuja la gráfica de la expresión de costo $C(r)$ sin tabular.

d. Estima las dimensiones de la lata de mínimo costo.

Actividad 10. Tercer problema teórico. ***Taller***.

Cuando se discutió el problema de la lata de aceite, se construyó una tabla que mostraba diversos valores para el radio r de la lata y para el área de la superficie correspondiente. Verifica que esta tabla no contiene la solución exacta del problema de la lata de aceite.

Actividad 11. Cuarto problema teórico. ***Taller***.

Si T y x son dos variables relacionadas por la fórmula $T(x) = x^2 - 2x + 3$ donde el valor de x esta restringido por la condición $2 \leq x \leq 5$, demuestra que en estas condiciones $T = 4$ no es el valor mínimo posible.

Actividad 12. El problema de la caja de base cuadrada. ***Tarea***.

Se quiere construir una caja de base cuadrada que tenga un volumen de cuatro decímetros cúbicos. Encuentra las dimensiones que hagan que la cantidad de material necesario sea mínima (ignora el espesor del material y lo que se desperdicia en la construcción).

a. Si la caja no tiene tapa. b. Si la caja tiene tapa.

Actividad 13. El problema del tanque de gas. ***Taller***.

Se desea construir un tanque de acero para almacenar gas propano, en forma de un cilindro circular recto con un hemisferio en cada extremo. La capacidad deseada es de 2 m^3 ¿Cuáles son las dimensiones que requieren menor cantidad de acero?

Actividad 15. Sexto problema teórico. ***Tarea***.

Supón que x e y son dos variables relacionadas por la fórmula $y = (x-2)^2 + 3$. Sin ninguna restricción sobre el valor de x. Explica por qué, en estas condiciones, el valor mínimo posible para y es $y = 3$.

Actividad 16. El problema del granjero. ***Tarea***.

Un granjero necesita cercar una área rectangular de 7200 m^2 con la mínima cantidad de cerca, para lo cual aprovechará la margen de un arroyo que le ahorrará uno de los lados de la cerca. Determinar las dimensiones que debe tener el terreno para que el granjero consiga su objetivo de minimizar la cantidad de cerca.

CAPÍTULO III

PROBLEMAS DE TANGENTES

I. INTRODUCCIÓN

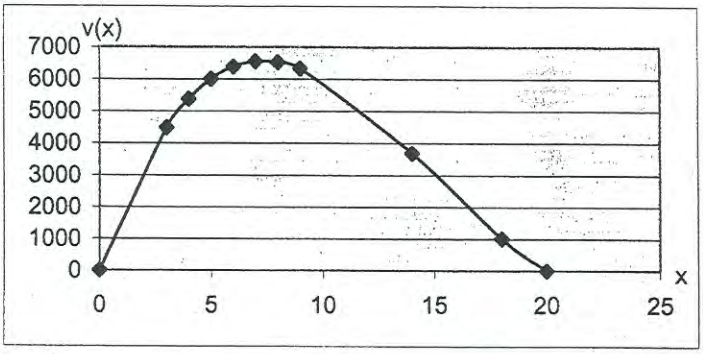
Los problemas de optimización que hemos analizado anteriormente nos condujeron a la búsqueda de los valores máximos o mínimos de una determinada expresión obtenida del contexto del problema en cuestión.

En esa búsqueda empleamos representaciones de los fenómenos estudiados, desenvolviéndonos con las representaciones numéricas, algebraicas y gráficas. La solución obtenida en cada caso se centró en las representaciones numéricas y algebraicas.

En esta ocasión queremos llamar la atención sobre las representaciones gráficas. Para ello tomaremos la expresión algebraica del problema de la caja sin tapa y su correspondiente tabla de valores numéricos obtenida en esa ocasión.

$$v(x) = (50 - 2x)(40 - 2x)x$$

x	$v(x)$
0	0
3	4488
4	5376
5	6000
6	6384
7	6552
8	6528
9	6336
14	3696
18	1008
20	0



En la gráfica podemos observar que en el punto más alto, correspondiente al valor del volumen máximo, la recta tangente a la gráfica tiene pendiente igual a cero. Si observamos el resto de los problemas que hemos resuelto en la sección anterior podemos observar la repetición de este fenómeno tanto para el caso de los valores máximos como de los mínimos.

Este hecho nos conduce a centrar la atención en la búsqueda de un procedimiento para determinar los puntos de una gráfica en los cuales la pendiente de la recta tangente es igual a cero. Sintéticamente este problema lo expresamos así:

Dada la función $y = f(x)$, ¿en qué puntos de su representación gráfica tiene una recta tangente cuya pendiente es cero, esto es $m_{\tan} = 0$?

Para resolver este problema de carácter general realizaremos una serie de actividades que nos permitan contar con un método para obtener la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en cualquier punto y posteriormente nos avocaremos a la determinación de aquellos puntos en los que la pendiente de la recta tangente es cero.

Este problema, la determinación de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función, así como el relativo a la búsqueda de la rapidez con la cual cambia una variable al cambiar otra de la cual depende, dio origen a lo que en la actualidad conocemos como Cálculo Diferencial.

Se reconoce en Isaac Newton[1] (1643-1727), de origen inglés y en el filósofo alemán Gottfried Wilhelm **Leibniz**[2] (1646-1716) a los fundadores del Cálculo Diferencial e Integral, sin duda una de las herramientas matemáticas más poderosas creadas en los últimos 400 años por la humanidad.

Con estos antecedentes iniciaremos los problemas relativos a los cálculos de las pendientes de las rectas tangentes.

---

[1] Físico y matemático, figura que sirvió durante la revolución científica del siglo XVII para sintetizar aspectos fundamentales de la física. Obtiene su título universitario en el Trinity College de Cambridge en 1665 y en los dos años siguientes, mientras la universidad está cerrada como consecuencia de los efectos desvastadores de la plaga, Newton desarrolla el Cálculo infinitesimal, sus ideas sobre el color, examina la mecánica del movimiento planetario y obtiene la ley del inverso del cuadrado, que resultaría ser crucial más adelante en el desarrollo de su teoría de la gravitación universal. En 1667 regresa al Trinity College como individuo de número y allí llega a ser Profesor Lucasiano de matemáticas en 1669. La carrera científica de Newton fue muy prolongada y entre sus contribuciones más importantes figuran el descubrimiento de la composición de la luz blanca, la formulación de las tres leyes fundamentales de la mecánica, la ley de la gravitación universal y el cálculo infinitesimal. De esto queda evidencia escrita en trabajos como ***Opticks*** (1704) y los ***Principia*** (1687, que luego se tradujeron al inglés en 1729). Como servidor público tuvo a su cargo la regulación y el control de la menta en Inglaterra. Sostuvo debates por años con el filósofo natural inglés Robert Hooke y el filósofo alemán Gottfried Wilhem Leibniz.

[2] Filósofo, matemático y estadista alemán. Leibniz nació el 1 de julio de 1646 en Leizpig, (Alemania). Cursó sus estudios en universidades de su ciudad natal, de Jena y de Altdorf. En 1666 fue premiado con un doctorado en leyes. Dedicó su tiempo al estudio de las matemáticas, la ciencia y la filosofía. Su contribución al mundo de las matemáticas consistió en enumerar en 1675 los principios fundamentales del cálculo infinitesimal. Esta explicación se produjo con independencia de los descubrimientos del científico inglés Isaac Newton, cuyo sistema de cálculo fue inventado en 1666. En 1684 se publicó el sistema de Leibniz, en 1687 el de Newton, y el método de notación ideado por Leibniz fue adoptado universalmente. En 1672 también inventó una máquina de calcular capaz de multiplicar, dividir y extraer raíces cuadradas. Es considerado un pionero en el desarrollo de la lógica matemática. En la exposición filosófica de Leibniz, el Universo está compuesto de innumerables centros conscientes de fuerza espiritual o energía, conocidos como mónadas. Cada mónada representa un microcosmos individual, que refleja el Universo en diversos grados de perfección y evolucionan con independencia del resto de las mónadas. El Universo constituido por estas mónadas es el resultado armonioso de un plan divino. Los humanos, sin embargo, con su visión limitada, no pueden aceptar la existencia de las enfermedades y la muerte como partes integrantes de la armonía universal. Este Universo de Leibniz, "el mejor de los mundos posibles", es satirizado como una utopía. Dentro de sus obras filosóficas hay que destacar: Ensayos de Teodicea sobre la bondad de Dios, la libertad del hombre y el origen del mal (2 vols., 1710), Monadología (1714; publicado en latín como Principia Philosophiae, 1721), y Nuevo tratado sobre el entendimiento humano (1703; pub. 1765).

II. ACTIVIDADES

Actividad 1. Trazo de recta secante a una curva. ***Clase.***

a. Traza la gráfica de la función $f(x) = x^2$. Traza la recta secante a la parábola de manera tal que la recta pase por los puntos (1,1) y (0,0).

b. Traza la gráfica de la función $f(x) = x^3$. Traza la recta que pasa por el punto (0,0) y el punto de abscisa 2. ¿Es esta recta secante a la curva?

c. Traza la gráfica de la función $f(x) = 1/x$. Traza la recta que pasa por los puntos de abscisa -1 y 2 respectivamente. ¿Es esta recta secante a la curva?

d. Traza la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$. Escribe las condiciones para trazar cualquier recta secante a esta curva.

Actividad 2. Construcción de rectas tangentes a la curva $f(x) = x^2$. ***Clase.***

i. Determinemos el valor de la pendiente de la recta ***l*** que es tangente a la curva $f(x) = x^2$ en el punto fijo A(1,1). Ver la figura 1.

- PRIMER PROCEDIMIENTO.

1. Seleccionemos la opción 4 "**diferenciar**".
2. Escribamos x^2 enseguida de **f(x) =**, y presionemos la tecla Intro
3. Aceptamos el intervalo propuesto por **gráficos** presionando la tecla **F2**.
4. Después **gráficos** nos mostrará la gráfica de la función y un nuevo menú, con el cual podemos trazar una infinidad de rectas secantes a la curva seleccionando la opción 1 "**trazar líneas por un punto fijo**" tecleemos el uno.
5. Enseguida **gráficos** pedirá el valor de la abscisa del punto fijo, en este caso el punto fijo es A(1,1). Después de teclear el uno **gráficos** mostrará un nuevo menú en este momento presionaremos la tecla E de "**Espera**".

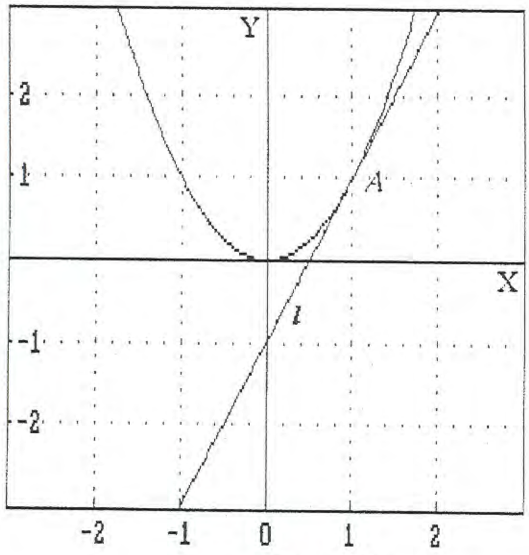


Figura 1.

6. Ahora tecleamos la D de "**Distancia**" y escribamos **-2.5** y luego presionamos la tecla Intro y posteriormente presionamos la tecla A de "**Apunte**"
7. ¿Qué ocurrió?
8. ¿Qué pendiente tiene la recta?
9. Demuéstralo numéricamente.
10. Presionemos la tecla Esc, después la D de "**Distancia**" y escribamos **-2.0** y luego presionamos la tecla Intro y posteriormente presionamos la tecla A de "**Apunte**"
11. ¿Qué ocurrió?
12. ¿Qué pendiente tiene la recta? Demuéstralo.
13. ¿A qué distancia se refiere **gráficos** con la opción "**Distancia**"?
14. Presionemos la tecla Esc, después la D de "**Distancia**" y escribamos **-1.0** y luego presionamos la tecla Intro y posteriormente presionamos la tecla A de "**Apunte**"
15. Calcula la pendiente tiene de la recta.
16. ¿Qué podemos hacer para trazar una recta tangente en el punto A?
17. Presionemos varias veces, pero pausadamente, la tecla Intro ¿qué esta ocurriendo?
18. ¿A qué valor se está acercando la pendiente de la recta? ¿Cuándo lo hace?
19. Agreguemos más datos. ¿Cómo es la recta a la curva? ¿Cuál es el valor de su pendiente?

- SEGUNDO PROCEDIMIENTO.

1. Presionemos la tecla D de "**Distancia**" y escribamos **2**, luego presionamos la tecla Intro y después la tecla E de "**Espera**" y por último presionemos la tecla A de "**Apunte**".
2. ¿Qué ocurrió?
3. ¿Qué pendiente tiene la recta? Demuéstrenlo.
4. ¿A qué distancia se refiere **gráficos** con la opción "**Distancia**"?
5. Presionemos la tecla Esc, después la D de "**Distancia**" y escribamos **1** y luego presionamos la tecla Intro y posteriormente presionamos la tecla A de "**Apunte**"
6. Calcula la pendiente tiene de la recta.
7. ¿Qué podemos hacer para trazar una recta tangente en el punto A?
8. Presionemos varias veces, pero pausadamente, la tecla Intro ¿qué esta ocurriendo?
9. ¿A qué valor se está acercando la pendiente de la recta? ¿Cuándo lo hace?
10. Agreguemos más datos. ¿Cómo es la recta a la curva? ¿Cuál es el valor de su pendiente?

El análisis realizado en el primer procedimiento es considerado como el método de ***"aproximación por la izquierda"*** a la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x^2$ en el punto A(1,1). El segundo procedimiento es el método de "***aproximación por la derecha***".

ii. Apliquemos los métodos de ***"aproximación por la izquierda"*** y ***"aproximación por la derecha"***, para determinar el valor de la pendiente de la recta tangente a los puntos fijos (x_1, y_1) que se indican en la siguiente tabla.

x_1	y_1	Aprox. por la izquierda.	Aprox. por la derecha.	Valor de la pendiente de la recta tangente.
1	1	1.99999	2.00001	
-1	1			
2	4			
-2	4			
1.5				
a				

iii. El análisis realizado en la parte ii, nos permite establecer una expresión para calcular la pendiente a cualquier recta tangente a la curva $y = x^2$ ¿Cuál sería su expresión algebraica?

iv. ¿Qué condiciones deben considerarse?

v. Si $A(x_1, y_1)$ es un punto fijo sobre la curva $y = x^2$ y $B(x_2, y_2)$ es otro punto sobre la misma curva. ¿Cómo se determina la pendiente de la recta secante?

vi. ¿Cómo podemos obtener la recta tangente en el punto A?

vii. ¿Cuál sería su pendiente?

Actividad 3. Construcción de rectas tangentes a la curva $f(x) = x^3$. ***Taller.***

Apliquemos los métodos de ***"aproximación por la izquierda"*** y ***"aproximación por la derecha"***, para determinar el valor de la pendiente de la recta tangente a los puntos fijos (x_1, y_1) que se indican en la siguiente tabla.

x_1	y_1	Aprox. por la izquierda.	Aprox. por la derecha.	Valor de la pendiente de la recta tangente.
1	1			
-1	-1			
2	8			
-2				
1.5				
a				

i. Este análisis nos permite establecer una expresión para calcular la pendiente a cualquier recta tangente a la curva $y = x^3$ ¿Cuál sería su expresión algebraica?

ii. ¿Qué condiciones deben considerarse?

iii. Si $A(x_1, y_1)$ es un punto fijo sobre la curva $y = x^3$ y $B(x_2, y_2)$ es otro punto sobre la misma curva. ¿Cómo se determina la pendiente de la recta secante?

iv. ¿Cómo podemos obtener la recta tangente en el punto A?

v. ¿Cuál sería su pendiente?

Actividad 4. Construcción de rectas tangentes a la curva $f(x) = \frac{1}{x}$. ***Taller.***

Utiliza los métodos de anteriores para determinar la expresión para calcular pendientes de rectas tangentes a esta nueva curva.

x_1	y_1	Aprox. por la izquierda.	Aprox. por la derecha.	Valor de la pendiente de la recta tangente.
1	1			
-1	-1			
2	1/2			
-2				
1.5				
a				

i. ¿Qué condiciones deben considerarse?

ii. Si $A(x_1, y_1)$ es un punto fijo sobre la curva $y = \frac{1}{x}$ y $B(x_2, y_2)$ es otro punto sobre la misma curva. ¿Cómo se determina la pendiente de la recta secante?

iii. ¿Cómo podemos obtener la recta tangente en el punto A?

iv. ¿Cuál sería su pendiente?

Actividad 5. Construcción de rectas tangentes a la curva $f(x) = \sqrt{x}$. ***Taller***.

Utiliza los métodos para determinar la expresión para calcular pendientes de rectas tangentes a esta nueva curva.

x_1	y_1	Aprox. por la izquierda.	Aprox. por la derecha.	Valor de la pendiente de la recta tangente.
1	1			
4	2			
2				
5				
1.5				
a				

i. ¿Qué condiciones deben considerare?

ii. Si $A(x_1, y_1)$ es un punto fijo sobre la curva $y = \dfrac{1}{x}$ y $B(x_2, y_2)$ es otro punto sobre la misma curva. ¿Cómo se determina la pendiente de la recta secante?

iii. ¿Cómo podemos obtener la recta tangente en el punto A?

iv. ¿Cuál sería su pendiente?

Resumen. De acuerdo a lo analizado en las actividades anteriores podemos resumir lo siguiente:

- ***Trazo de recta secante***. Dada la curva $y = f(x)$ y los puntos $A(x_0, y_0)$ y $B(x, y)$ -*con la condición de que estén sobre la curva*- trazamos la recta secante a ésta. Su pendiente estará dada por:

$$m_s = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Si llamamos h a la diferencia de las abscisas, esto es, $h = x - x_0$ luego $x = x_0 + h$ entonces la pendiente de la recta secante la reescribimos como:

$$m_s = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

- ***Trazo de rectas tangentes.*** El trazo de una recta tangente a la curva en un punto fijo, la obteníamos cuando:

i. Si el punto (x_0, y_0) es fijo y el punto (x_1, y_1) lo vamos tomando de manera que cada vez este más cerca del punto fijo, la recta secante se convierte en recta tangente en el punto (x_0, y_0).

ii. Si el punto (x_0, y_0) es fijo y h un es incremento para x_0 entonces, conforme la h tome valores cada vez más pequeños (cerca de cero), los trazos de rectas secantes se acercan a la recta tangente.

- ***La pendiente de la tangente.*** De acuerdo a lo anterior, concluimos que la pendiente de la recta tangente la podemos aproximar con la expresión para la pendiente de la recta secante. El valor preciso de la pendiente de la recta tangente lo obtenemos en lo que denominamos el valor límite.

$$m_T \cong m_S; \text{ cuando } h \cong 0$$

y

$$m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

El valor m_T es el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto (x_0, y_0)

Ejemplo 1. Sea $f(x)=x^2$ la curva para la cual queremos obtener una expresión para calcular pendientes de tangentes.

La expresión para calcular la pendiente de una recta secante, obtenida anteriormente es $m_S = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, de aquí que, necesitamos una expresión para $f(x+h)$ cuyo valor es:

$$f(x+h)=(x+h)^2$$

Sustituyendo estos valores en la expresión se obtiene

$$m_S = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \quad con\ h \neq 0$$

efectuando operaciones y simplificando resulta

$$m_S = 2x + h \quad con\ h \neq 0$$

Esta expresión se obtuvo en el inciso vii de la actividad 2, ¿la recuerdas?

Con esta expresión es fácil obtener la expresión para la pendiente de la recta tangente pues ahora sólo es necesario aplicar el límite a m_S cuando la h tiende a cero; esto es

$$m_T = \lim_{h \to 0} (2x+h)$$

y de esta expresión se concluye que $m_T = 2x$.

Ejemplo 2. Sea $f(x)=x^3$ la curva para la cual queremos obtener una expresión para calcular pendientes de tangentes.

Utilizando de nuevo la expresión $m_S = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para calcular la pendiente de una recta, necesitamos una expresión para $f(x+h)$ cuyo valor es:

$$f(x+h)=(x+h)^3$$

Sustituyendo estos valores en la expresión se obtiene

$$m_S = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \quad con\ h \neq 0$$

efectuando operaciones y simplificando resulta

$$m_S = 3x^2 + 3xh + h^2 \quad con\ h \neq 0$$

Con esta expresión es fácil obtener la expresión para la pendiente de la recta tangente pues ahora sólo es necesario aplicar el límite a m_S cuando la h tiende a cero; esto es

$$m_T = \lim_{h \to 0} \left(3x^2 + 3xh + h^2\right)$$

y de esta expresión se concluye que $m_T = 3x^2$.

Actividad 6. Función pendiente. ***Taller***.

Utilizando **gráficos** para probar la función pendiente para las curvas de los ejemplos anteriores.

Actividad 7. Utilizando **gráficos** determinen la función pendiente de las siguientes funciones. ***Tarea***.

a. $f(x)=x^2-2$	b. $f(x)=(x-1)^2$	c. $f(x)=(x+2)^2+1$
d. $f(x)=2x^2$	e. $f(x)=\frac{1}{4}x^3$	f. $f(x)=3(x-1)^3-2$

CAPÍTULO IV

PROBLEMAS DE MOVIMIENTO

I. INTRODUCCIÓN

En los problemas revisados hasta este momento hemos empleado la noción de derivada en su interpretación de "función pendiente", es decir, con la función derivada evaluamos las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de una función en los puntos donde deseemos.

En los problemas que abordaremos a continuación, extendemos la noción de derivada para estudiar situaciones en las que la razón instantánea de cambio juega un papel trascendental. Con estos problemas veremos que la expresión

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

que nos fue de utilidad para el cálculo de las pendientes de las rectas tangentes y que identificamos como derivada, aparece también para el estudio de la razón instantánea de cambio.

Centraremos nuestra atención en situaciones que nos conducen a trabajar con las nociones de velocidad instantánea y de aceleración de objetos en movimiento.

II. ACTIVIDADES

Actividad 1. El problema del globo aerostático. ***Clase.***

Un globo aerostático asciende verticalmente desde una plataforma de lanzamiento que tiene una altura de 24 metros. Se observa el movimiento durante los primeros 5 minutos y se determina que la altura "*y*" del globo con respecto a la Tierra cumple con la ley $y(t) = 10t^2 + 24$ donde t está dada en minutos y $y(t)$ en metros. Con esta información contesta las siguientes cuestiones:

a. ¿En qué tiempo alcanza la altura de 64 metros?
b. ¿Qué altura alcanza el globo al cabo de los cinco minutos?
c. ¿Cuál es la velocidad media en el recorrido de los primeros 5 minutos?
d. ¿Durante qué intervalo el globo está viajando más lentamente que la velocidad media registrada en los primeros 5 minutos?
e. ¿Con qué velocidad inició el vuelo el globo?

Actividad 2. El problema de caída libre. ***Taller.***

Se deja caer una pelota desde la parte alta de un edificio y ésta toca tierra 7 seg más tarde. Considerando el hecho de que cualquier objeto en caída libre recorre 4.9 t^2 m en t seg contesta las siguientes preguntas:

a. ¿Qué tan alto es el edificio?
b. ¿A qué velocidad está viajando la pelota cuando choca contra el suelo?
c. ¿Cuál es la rapidez promedio de la pelota durante su caída?
d. ¿En qué instante alcanza la pelota esta rapidez promedio?
e. ¿Qué distancia tiene que recorrer la pelota antes de alcanzar la rapidez promedio?

Actividad 3. Primer problema teórico. ***Taller.***

A continuación se da una expresión algebraica la cual describe la posición de una partícula (que se mueve a lo largo del eje y) a los t seg. Encuentra en cada caso, una expresión para la velocidad instantánea $v(t)$.

a. $y(t) = 72t - 8t^2$	b. $y(t) = 1 + t + t^2$
c. $t^2 + 8$	d. $y(t) = (t+2)(t-5)t$

Actividad 4. Segundo problema teórico. ***Taller***.

La posición de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta está definida por la relación $S(t) = t^3 - 6t^2 - 15t + 40$ en la que S se expresa en pies y t en segundos:

a. Determina una expresión para la velocidad instantánea $v(t)$.

b. Determina una expresión para la aceleración instantánea $\mathbf{a}(t)$.

c. Calcula la posición, velocidad y aceleración inicial

$S(0) =$ __________

$v(0) =$ __________

$\mathbf{a}(0)=$ __________

d. Cuando la partícula se encuentre en la posición s = 20 pies determina:

i. El tiempo en que sucede.

ii. La velocidad que lleva.

iii. La aceleración que tiene.

e. La posición cuando $v = 0$ y la distancia que ha recorrido desde el inicio del movimiento.

Posición: Distancia recorrida:

Actividad 5. Tercer problema teórico. ***Tarea***.

Encuentra una expresión para la velocidad instantánea en cada caso:

a. $y(t) = t^3 - 5t + 1$	b. $S(t) = \frac{1}{t} + t$	c. $x(t) = (2 - 3t)(2t + 2t^2)$

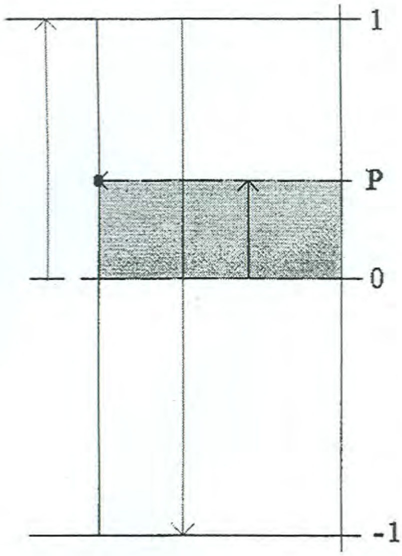
Actividad 6. Cuarto problema teórico. ***Tarea***.

Determina las aceleraciones en los instantes indicados:

a. $S = 3t^2 + 2t,\ t = 1$	b. $y = t^4 - 8t,\ t = 2$
c. $S(t) = \frac{1}{t} + t,\ t = 9$	d. $y(t) = 5 - \sqrt{2}\,t^2,\ t = 2$

Actividad 7. Movimiento oscilatorio. ***Clase***.

Una partícula oscila tal y como se muestra en la figura. Si sabemos que la expresión para la posición de **P** es $y(t) = sen\,t$ contesta las siguientes cuestiones:



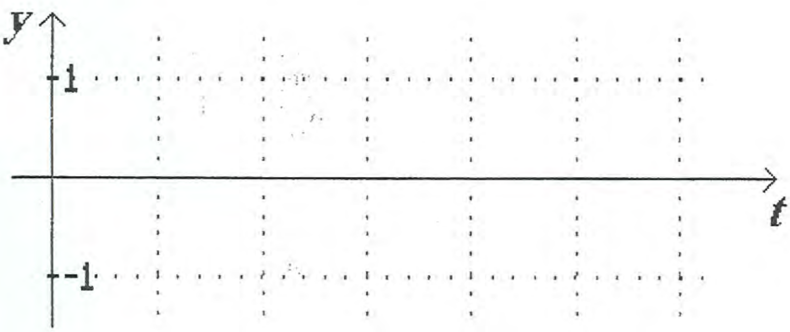
a. El tiempo que tarda en dar una oscilación completa.

b. Los valores entre los cuales varía la posición de **P**.

c. Para tener una visión más clara de lo que sucede con la oscilación de **P** en los primeros 2π segundos, completa la tabla escribiendo la posición de **P** en cada uno de los instantes dados.

Tiempo t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{8\pi}{6}$	$\frac{9\pi}{6}$	$\frac{10\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Posición $y(t)$	0												

d. Con los datos anteriores construye la gráfica de la curva $y(t) = sen\, t$.



e. Traza líneas rectas tangentes a la curva en cada uno de los puntos de la tabla.

f. ¿Qué representa, en la descripción del movimiento, las pendientes de la recta tangente en cada punto?

g. Observando la posición de las tangentes contesta ¿qué sucede con el valor de la velocidad de la partícula en el intervalo de 0 a $\pi/2$ segundos?

h. Cuando la partícula inicia su movimiento en un tiempo $t = 0$

1. ¿Qué posición tiene?
2. ¿Qué signo tiene la velocidad en ese punto?
3. ¿Un instante después, está arriba o abajo de su posición inicial?

i. Cuando la partícula llega al punto máximo

1. ¿Cuánto vale su velocidad?
2. ¿En qué posición se encuentra?
3. ¿En qué instante lo hace por primera vez?
4. Para todo instante t, tal que $2\pi/6 < t < 4\pi/6$ ¿hacia dónde se mueve la partícula?
5. ¿Qué signo tiene la velocidad para todo instante t comprendido entre $2\pi/6 < t < 3\pi/6$?
6. Y para los instantes comprendido entre $3\pi/6 < t < 4\pi/6$ ¿qué signo tiene la velocidad?

j. Cuando la partícula alcanza el punto mínimo

1. ¿Cuánto vale su velocidad?
2. ¿En qué posición se encuentra?
3. ¿En qué instante lo hace por primera vez?
4. Para todo instante t, tal que $8\pi/6 < t < 9\pi/6$ ¿hacia dónde se mueve la partícula? ¿Y hacia dónde cuando $9\pi/6 < t < 10\pi/6$?
5. ¿Qué signo tiene la velocidad para todo instante t comprendido entre
$8\pi/6 < t < 9\pi/6$?
6. Y para los instantes comprendido entre $9\pi/6 < t < 10\pi/6$ ¿qué signo tiene la velocidad?

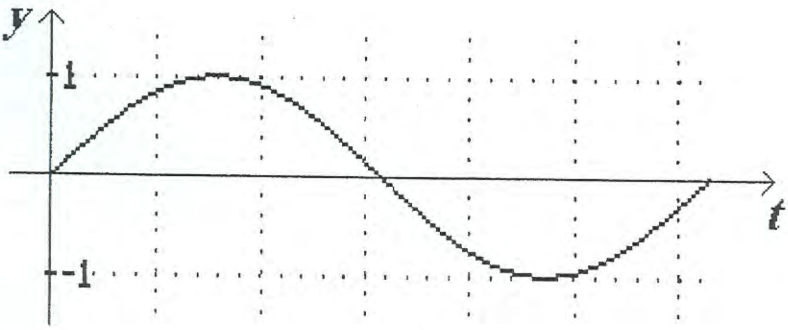
k. La partícula pasa del punto máximo al mínimo

1. Escribe el intervalo de tiempo en que se efectúa
2. ¿Qué signo tienen todas las pendientes de las rectas tangentes comprendidas entre esos dos puntos?
3. ¿Qué signo tiene la velocidad en este intervalo?
4. ¿Hacia dónde se dirige la partícula en este intervalo?
5. ¿En qué instante atraviesa el eje de equilibrio?
6. ¿Qué sucede con los valores de las pendientes de las tangentes conforme nos aproximamos al punto de equilibrio?
7. Lo anterior significa que el valor de la velocidad instantánea es ____________

8. Después de pasar por el punto de equilibrio ¿qué sucede con los valores de la velocidad?
9. Lo anterior se observa porque el valor de las pendientes de las tangentes van ___
10. ¿Cómo es, por lo tanto, el valor de la velocidad en el instante en que cruza el eje de equilibrio?

l. Si la partícula continuara con ese mismo comportamiento, pasaría de un punto mínimo a un punto máximo:
1. ¿En qué intervalo de tiempo lo haría por primera vez?
2. ¿Qué signo tienen todas las pendientes de las rectas tangentes comprendidas entre estos dos puntos?
3. ¿Qué signo tiene la velocidad en este intervalo?
4. ¿Hacia dónde se dirige la partícula en este intervalo?
5. ¿En qué instante atraviesa el eje de equilibrio?
6. ¿Qué sucede con los valores de las pendientes de las tangentes conforme nos aproximamos al punto de equilibrio?
7. ¿Lo anterior significa que el valor de la velocidad instantánea va?
8. Después de pasar por el punto de equilibrio ¿qué sucede con el valor de la velocidad?
9. ¿Lo anterior se aprecia porque el valor de las pendientes de las tangentes van?
10. Por lo tanto ¿cómo es el valor de la velocidad en el instante que cruza el eje de equilibrio?

m. Hemos observado que para instantes distintos no sólo cambia la posición de p, sino también varía la velocidad y por consiguiente esto es un indicador de que existe aceleración. A pesar de que todavía no contamos con una expresión para la velocidad ni para la aceleración, podemos tener al menos una idea geométrica de lo que sucede con la velocidad y con la aceleración de p, si construimos el bosquejo de sus gráficas.



1. A partir del valor de las pendientes de las tangentes de la gráfica y = sen t construye el bosquejo de la gráfica tiempo contra velocidad.

2. A partir del valor de las pendientes de las tangentes de la gráfica tiempo contra velocidad bosqueja la gráfica tiempo contra aceleración.

n. Analiza las gráficas del inciso anterior y contesta lo siguiente:

1. Indica el intervalo donde la posición de la partícula es creciente. En este intervalo ¿qué signo tiene la velocidad? Y ¿qué signo tiene la aceleración?

2. Indica el intervalo donde la posición de la partícula es decreciente. En este intervalo ¿qué signo tiene la velocidad? Y ¿qué signo tiene la aceleración?

3. ¿Qué nos dice el signo de la velocidad?

4. Indica el intervalo donde la posición de la partícula está arriba del eje de equilibrio y el intervalo cuando está abajo.

5. Completa la tabla tal y como se muestra en el ejemplo resuelto

INTERVALO	POSICIÓN	VELOCIDAD	ACELERACIÓN
0 a $\pi/2$	arriba del eje "*t*"	positiva	negativa
		negativa	positiva
		positiva	positiva
		negativa	negativa
	arriba del eje "*t*"		negativa
		negativa	

o. De acuerdo a las observaciones que hiciste y a la experiencia adquirida, analiza y comenta cada una de las siguientes preguntas, antes de contestarlas.

1. Cuando la velocidad de la partícula es cero. ¿Podrías asegurar que está en el punto máximo? ¿Por qué?
2. ¿Qué condiciones observas que tendría que cumplir la partícula en relación de su velocidad y aceleración para afirmar que se localiza en el punto máximo? Y ¿cuáles para el punto mínimo?
3. ¿Cuánto vale la aceleración de la partícula, cuando ésta cruza el eje de equilibrio?
4. ¿A partir de qué momento podemos asegurar que la gráfica que describe el comportamiento de la partícula cambia su concavidad?

Actividad 8. Quinto problema teórico. ***Tarea***.

Cada una de las siguientes curva, describen la posición de una partícula que presenta un movimiento oscilatorio en dirección del eje "*y*" a los "*t*" segundos. Con el uso de la computadora, en lo que la consideres necesario, encuentra en cada caso:

a. La representación gráfica.
b. La fórmula para la velocidad instantánea.
c. La fórmula para la aceleración instantánea.

i. $y(t) = \text{sen } t$	ii. $y(t) = -2\text{sen } t$
iii. $y(t) = 3\text{sen } t/2$	iv. $y(t) = \text{sen } t^2$
v. $y(t) = \cos t$	vi. $y(t) = .5\cos t$
vii. $y(t) = \cos t/3$	viii. $y(t) = \cos t^4$
ix. $y(t) = \text{sen } t + \cos t$	x. $y(t) = \text{tsen } t + t$
xi. $y(t) = \text{sen } 1/t$	xii. $y(t) = \text{sen } 2t + 1/t$