UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Actividades didácticas para la enseñanza de la integral en bachillerato

Tesis para obtener el grado de:

Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa

Presenta:

Erik Morales Mercado

Director:

Dr. Agustín Grijalva Monteverde

AGRADECIMIENTOS

Primeramente, quiero agradecer el apoyo incondicional de mi esposa Cecilia, el amor de mis hijos Erik y Elisa que me llena de felicidad en momento difíciles, gracias por permitirme ser una mejor persona por ustedes.

Quiero agradecer a mi director de tesis el Dr. Agustín por el tiempo dedicado para aclarar mis dudas, por sus discursos para que yo pudiera comprender mis errores, a mis profesores, me llevo grandes cosas de cada uno de ustedes.

A mis familiares y amigos que siempre están ahí para apoyarme.

CONTENIDOS

CAPÍTULO 1 PROBLEMATICA, JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS

1.1 La problemática y su contexto curricular

En el mundo en que vivimos la información se mueve en cuestión de segundos, la ciencia y la tecnología imprimen una nueva dinámica a las actividades profesionales, a las empresas, las actividades de gestión, las actividades gubernamentales y a la sociedad en su conjunto, exigiendo nuevas capacidades y habilidades para adaptarse a los cambios producidos. Consecuentemente las exigencias escolares se modifican, obligando a la formación de estudiantes con capacidad para el autoaprendizaje, diestros en el uso de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación.

Ante este panorama en México se han venido haciendo modificaciones al sistema educativo que, aún y con sus problemas, se orientan en dirección de hacer frente a esta realidad cambiante. Así, en el año 2008 se estableció la llamada Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS), desde el 2012 el bachillerato es obligatorio, aplicándose la Reforma Educativa desde el 2013 y, a partir del ciclo 2017-2018 se echó a andar un nuevo modelo educativo y curricular para la Educación Media Superior.

En el caso particular del bachillerato, considerando la gran diversidad de sistemas y subsistemas existentes, se establecieron lineamientos que, además de actualizar los planteamientos educativos, se enfocaran a homogeneizar el bachillerato, dentro de lo posible, estableciendo criterios mínimos que cada sistema de bachillerato debería cumplir. De esta manera, los sistemas de escuelas preparatorias de agruparon en tres tipos: bachillerato general, bachillerato tecnológico, profesional técnico y profesional técnico bachiller.

En el caso del profesional técnico bachiller el propósito fundamental es capacitar a los jóvenes para el trabajo técnico en actividades industriales y de servicios, posibilitando su incorporación al mundo laboral al egresar del bachillerato, en tanto el bachillerato general se centra en la formación para la realización de estudios de educación superior. El bachillerato tecnológico, por su parte, forma a los jóvenes para su incorporación a los estudios superiores y ofrece la posibilidad de optar por la capacitación técnica y su ingreso al mundo laboral.

Con estas directrices, en la RIEMS se establecieron una serie de elementos para el currículo de la Educación Media Superior que incluye los siguientes puntos:

- Marco curricular común.
- Cinco campos disciplinares (Ciencias Experimentales, Ciencias Sociales, Comunicación, Humanidades y Matemáticas).
- Tres tipos de competencias (Genéricas, Disciplinares y Profesionales).

Los tres elementos señalados en la RIEMS contribuyen a estructurar el bachillerato mexicano de mejor manera pues, a pesar de la existencia de numerosos sistemas y subsistemas de ese nivel educativo en el país, con el marco curricular común, los campos disciplinares y el modelo basado en competencias, se avanza hacia una mayor homogeneidad y la posibilidad de que los estudiantes puedan moverse de un bachillerato a otro.

La adopción del modelo educativo basado en competencias tiene repercusiones en la forma de concebir tanto la enseñanza como el aprendizaje, lo cual debe tomarse en cuenta para el diseño de las actividades didácticas en el caso de este trabajo, orientado a la enseñanza de la integral de una función.

Para el desarrollo de las competencias y con el fin de cumplir con el perfil de egreso del estudiante de educación media superior, se crea el Acuerdo secretarial 444 (2008) en el cual se establecen las competencias que constituyen el marco curricular común del Sistema Nacional de Bachillerato, las cuales se clasifican en Competencias Genéricas, Disciplinares y Profesionales.

Las competencias genéricas que han de articular y dar identidad a la EMS y que constituyen el perfil del egresado del SNB son las que todos los bachilleres deben estar en capacidad de desempeñar; les permiten comprender el mundo e influir en él; les capacitan para continuar aprendiendo de forma autónoma a lo largo de sus vidas, y para desarrollar relaciones armónicas con quienes les rodean. Las competencias disciplinares son comunes a todos los egresados de la EMS y representan la base común de la formación disciplinar en el marco del SNB, y las competencias profesionales proporcionan a los jóvenes formación elemental para el trabajo.

Las competencias genéricas y sus principales atributos son las que se establecen a continuación:

Se autodetermina y cuida de sí

1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
   Atributos:
   - Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
   - Identifica sus emociones, las maneja de manera constructiva y reconoce la necesidad de solicitar apoyo ante una situación que lo rebase.
   - Elige alternativas y cursos de acción con base en criterios sustentados y en el marco de un proyecto de vida.
   - Analiza críticamente los factores que influyen en su toma de decisiones.
   - Asume las consecuencias de sus comportamientos y decisiones.

- Administra los recursos disponibles teniendo en cuenta las restricciones para el logro de sus metas.

2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.
   Atributos:
   - Valora el arte como manifestación de la belleza y expresión de ideas, sensaciones y emociones.
   - Experimenta el arte como un hecho histórico compartido que permite la comunicación entre individuos y culturas en el tiempo y el espacio, a la vez que desarrolla un sentido de identidad.
   - Participa en prácticas relacionadas con el arte.
3. Elige y practica estilos de vida saludables.
   Atributos:
   - Reconoce la actividad física como un medio para su desarrollo físico, mental y social.
   - Toma decisiones a partir de la valoración de las consecuencias de distintos hábitos de consumo y conductas de riesgo.
   - Cultiva relaciones interpersonales que contribuyen a su desarrollo humano y el de quienes lo rodean.

   Se expresa y comunica
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
   Atributos:
   - Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
   - Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en el que se encuentra y los objetivos que persigue.
   - Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas.
   - Se comunica en una segunda lengua en situaciones cotidianas.
   - Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.

   Piensa crítica y reflexivamente
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
   Atributos:
   - Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
   - Ordena información de acuerdo con categorías, jerarquías y relaciones.
   - Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.
   - Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.

- Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas.
- Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.

6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.
   Atributos:
   - Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo con su relevancia y confiabilidad.
   - Evalúa argumentos y opiniones e identifica prejuicios y falacias.
   - Reconoce los propios prejuicios, modifica sus puntos de vista al conocer nuevas evidencias, e integra nuevos conocimientos y perspectivas al acervo con el que cuenta.
   - Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.
   - Aprende de forma autónoma
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
   Atributos:
   - Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimiento.
   - Identifica las actividades que le resultan de menor y mayor interés y dificultad, reconociendo y controlando sus reacciones frente a retos y obstáculos.
   - Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.
   - Trabaja en forma colaborativa
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
   Atributos:
   - Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
   - Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
   - Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

   Participa con responsabilidad en la sociedad
9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.
   Atributos:
   - Privilegia el diálogo como mecanismo para la solución de conflictos.
   - Toma decisiones a fin de contribuir a la equidad, bienestar y desarrollo democrático de la sociedad.
   - Conoce sus derechos y obligaciones como mexicano y miembro de distintas comunidades e instituciones, y reconoce el valor de la participación como herramienta para ejercerlos.
   - Contribuye a alcanzar un equilibrio entre el interés y bienestar individual y el interés general de la sociedad.
   - Actúa de manera propositiva frente a fenómenos de la sociedad y se mantiene informado.

- Advierte que los fenómenos que se desarrollan en los ámbitos local, nacional e internacional ocurren dentro de un contexto global interdependiente.

10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.
    Atributos:
    - Reconoce que la diversidad tiene lugar en un espacio democrático de igualdad de dignidad y derechos de todas las personas, y rechaza toda forma de discriminación.
    - Dialoga y aprende de personas con distintos puntos de vista y tradiciones culturales mediante la ubicación de sus propias circunstancias en un contexto más amplio.
    - Asume que el respeto de las diferencias es el principio de integración y convivencia en los contextos local, nacional e internacional.
11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.
    Atributos:
    - Asume una actitud que favorece la solución de problemas ambientales en los ámbitos local, nacional e internacional.
    - Reconoce y comprende las implicaciones biológicas, económicas, políticas y sociales del daño ambiental en un contexto global interdependiente.
    - Contribuye al alcance de un equilibrio entre los intereses de corto y largo plazo con relación al ambiente. SEMS, C. (2008).

CAMPO DISCIPLINAR DE MATEMÁTICAS

Las matemáticas son una herramienta de gran utilidad para las demás áreas del conocimiento, contribuyen al desarrollo de competencias genéricas y disciplinares que facilitan realizar el planteamiento, análisis y resolución de problemas. Las competencias disciplinares básicas de matemáticas buscan propiciar el desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes y son las siguientes:

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.
SEMS, C. (2008).

Para el caso del Nuevo Modelo Educativo, en el documento sobre el Nuevo Currículo para la Educación Media Superior (SEMS, 2017) se establecen modificaciones a los planes y programas de estudio que, aunque se señala como complemento de las formulaciones de la RIEMS, desde nuestro punto de vista se realizan modificaciones sustanciales que requieren analizarse a profundidad. Sin embargo, en este trabajo, por lo reciente de las modificaciones, hicimos un análisis limitado del mismo.

En el documento citado se señala que el cambio de mayor profundidad consiste en privilegiar las prácticas sobre los objetos formales de las matemáticas, fortaleciendo lo que genéricamente denomina el sentido de "lo propiamente matemático", reduciendo aspectos ineludibles pero secundarios como los procesos algorítmicos y la memorización.

Partiendo de caracterizar el distanciamiento entre el conocimiento matemático escolar como alejado de las prácticas cotidianas de los estudiantes, incorpora como prioritarias algunos preceptos (sin declararlo explícitamente) del acercamiento teórico de la socioepistemología, surgido en México por investigadores como Cantoral, Farfán, Cordero y otros. Así, se plantea la necesidad de centrar los procesos en aprendizajes claves, con contenidos centrales que se organizan en "prácticas anidadas".

El Nuevo Currículo se propone una organización jerárquica en Ejes, Componentes y Contenidos (centrales y específicos, que, de acuerdo con SEP (2017) se plantea lo siguiente:

- ✓ Eje: organiza y articula los conocimientos, destrezas, habilidades, actitudes y valores de las competencias de los campos disciplinares y es el referente para favorecer la transversalidad interdisciplinar.
- ✓ Componente: genera y, o, integra los contenidos centrales y responde a formas de organización específica de cada campo disciplinar.
- ✓ Contenido central: corresponde a los aprendizajes fundamentales y se refiere al contenido de mayor jerarquía dentro de los programas de estudio.
- ✓ Contenido específico: corresponde a los contenidos centrales y, por su especificidad, establece el alcance y profundidad de su abordaje.

SEMS (2017).

Asimismo, se plantean seis ejes articuladores para el campo disciplinar de matemáticas:

- ✓ Del pensamiento aritmético al lenguaje algebraico
- ✓ Del tratamiento del espacio, la forma y la medida, a los pensamiento geométricos y trigonométricos.
- ✓ Lugares geométricos y sistemas de referencia. Del pensamiento geométrico al analítico.
- ✓ Pensamiento y lenguaje variacional. Cambio y predicción.
- ✓ Pensamiento y lenguaje variacional. Cambio y acumulación.
- ✓ Del manejo de la información al pensamiento estocástico.

SEMS (2017)

1.2 Inserción en el currículo

El Cálculo integral es de gran relevancia, ya que el avance en la ciencia y tecnología se debe en gran medida al uso de esta disciplina, entre algunas aplicaciones señaladas en el Nuevo Currículo de la Educación Media Superior, se encuentran:

- Interpretar diversos fenómenos relacionados con el área bajo la curva.
- Calcular el área entre curvas, volúmenes de sólidos.
- Calcular la utilidad y el excedente del consumidor o del productor, entre otros problemas relativos a las ciencias económicas.
- Determinar el trabajo, dada una fuerza variable, o la distancia recorrida por un objeto que se mueve con velocidad variable, entre otros problemas ligados a la Física.

Estos aspectos del Nuevo Currículo de la Educación Medio Superior tienen implicaciones profundas para los procesos de aprendizaje y de enseñanza en el bachillerato que, insistimos, quedaron fuera del alcance de este trabajo, pero es importante señalar su existencia y la necesidad de tomarlo en cuenta en futuros trabajos.

De cualquier manera, nuestra propuesta es coincidente con la afirmación de que es necesario utilizar diferentes enfoques para la introducción del tema de la integral definida; es decir, que se analice la representación geométrica y se pueda visualizar el área bajo la curva, sin dejar de lado los procesos algebraicos que intervienen. El uso de la tecnología es fundamental para el desarrollo de las percepciones de la variación en la integral y para el uso de diferentes representaciones semióticas.

La inserción del Cálculo Integral en el currículo se da hasta la educación media superior, ya que se necesitan los conocimientos de álgebra, geometría plana, geometría analítica y cálculo diferencial, en las asignaturas de primero a quinto semestre de educación media superior; por este motivo se encuentra inmerso en el Marco de la Reforma Integral de Educación Media Superior (RIEMS), la cual se basa en el desarrollo de competencias, para que los estudiantes sean capaces de desenvolverse de manera adecuada a las exigencias del mundo contemporáneo.

Dado que el Cálculo Integral se encuentra dentro del campo disciplinar de las matemáticas, debe cumplir con las competencias disciplinares que marca la RIEMS y al analizar los libros que se sugieren en el programa de la dirección general de bachillerato, podemos observar que se encuentran mecanizados y enfocados a los procedimientos algebraicos por medio de algoritmos, por lo que no se atienden las necesidades de promover adecuadamente las competencias que un alumno debe desarrollar.

PERFIL DE EGRESO Y NUEVO MODELO EDUCATIVO

Es importante señalar que, como se señaló líneas atrás, en el año 2017 se establecieron modificaciones a los planes y programas de estudio que se iniciaron a implementar en agosto de 2018, pero que en los diferentes sistemas aún no se traducen en modificaciones específicas a los planes y programas de los diversos sistemas educativos del país.

Sin embargo, a pesar de que este trabajo no se realizó bajos los nuevos lineamientos, correspondientes al llamado nuevo modelo educativo para la educación preescolar, educación básica y educación media superior, es pertinente conocer los planteamientos generales de dicho nuevo modelo educativo. Para ello, es posible acceder al documento Planes de estudio de referencia del marco curricular común de la educación media superior (SEP;2017

En él se establecen los diversos lineamientos curriculares y principios rectores del nuevo modelo educativo y, en el caso de la educación media superior, el perfil de egreso del estudiante se enfoca a desarrollar las habilidades y destrezas en cada uno de los cinco campos disciplinares, así como el desarrollo de las competencias Genéricas.

LENGUAJE Y COMUNICACIÓN Se expresa con claridad en español de forma oral y escrita. Identifica las ideas clave en un texto o discurso oral e infiere conclusiones a partir de ellas, obtiene e interpreta información y argumenta con eficacia. Se comunica en inglés con fluidez y naturalidad.

PENSAMIENTO MATEMÁTICO Construye e interpreta situaciones reales, hipotéticas o formales que requieren de la utilización del pensamiento matemático. Formula y resuelve problemas, aplicando diferentes enfoques. Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos o analíticos.

EXPLORACIÓN Y COMPRENSIÓN DEL MUNDO NATURAL Y SOCIAL Obtiene, registra y sistematiza información, consultando fuentes relevantes, y realiza los análisis e investigaciones pertinentes. Comprende la interrelación de la ciencia, la tecnología, la sociedad y el medio ambiente en contextos históricos y sociales específicos. Identifica problemas, formula preguntas de carácter científico y plantea las hipótesis necesarias para responderlas.

PENSAMIENTO CRÍTICO Y SOLUCIÓN DE PROBLEMAS Utiliza el pensamiento lógico y matemático, así como los métodos de las ciencias para analizar y cuestionar críticamente fenómenos diversos. Desarrolla argumentos, evalúa objetivos, resuelve problemas, elabora y justifica conclusiones y desarrolla innovaciones. Asimismo, se adapta a entornos cambiantes.

HABILIDADES SOCIOEMOCIONALES Y PROYECTO DE VIDA Es autoconsciente y determinado, cultiva relaciones interpersonales sanas, se autorregula, tiene capacidad de afrontar la adversidad y actuar con efectividad y reconoce la necesidad de solicitar apoyo. Tiene la capacidad de construir un proyecto de vida con metas personales. Fija metas y busca aprovechar al máximo sus opciones y recursos. Toma decisiones que le generan bienestar presente, oportunidades y sabe lidiar con riesgos futuros.

COLABORACIÓN Y TRABAJO EN EQUIPO Trabaja en equipo de manera constructiva y ejerce un liderazgo participativo y responsable, propone alternativas para actuar y solucionar problemas. Asume una actitud constructiva.

CONVIVENCIA Y CIUDADANÍA Reconoce que la diversidad tiene lugar en un espacio democrático, con inclusión e igualdad de derechos de todas las personas. Entiende las relaciones entre sucesos locales, nacionales e internacionales, valora y practica la interculturalidad. Reconoce las instituciones y la importancia del Estado de Derecho.

APRECIACIÓN Y EXPRESIÓN ARTÍSTICAS Valora y experimenta las artes porque le permiten comunicarse y le aportan un sentido de identidad. Comprende su contribución al desarrollo integral de las personas. Aprecia la diversidad de las expresiones culturales.

ATENCIÓN AL CUERPO Y LA SALUD Asume el compromiso de mantener su cuerpo sano, tanto en lo que toca a su salud física como mental. Evita conductas y prácticas de riesgo para favorecer un estilo de vida activo y saludable.

CUIDADO DEL MEDIO AMBIENTE Comprende la importancia de la sustentabilidad y asume una actitud proactiva para encontrar soluciones sostenibles. Piensa globalmente y actúa localmente. Valora el impacto social y ambiental de las innovaciones y avances científicos.

HABILIDADES DIGITALES Utiliza las Tecnologías de la Información y la Comunicación de forma ética y responsable para investigar, resolver problemas, producir materiales y expresar ideas. Aprovecha estas tecnologías para desarrollar ideas e innovaciones. SEMS (2018)

1.3 El problema de la enseñanza de la integral

Existe una gran deficiencia en lo que refiere al aprendizaje significativo del Cálculo Integral en el ámbito educativo, tal como lo menciona Artigue en su investigación:

> La enseñanza mecanicista tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del Cálculo. Si bien con este tipo de enseñanza se logra disminuir sustancialmente el porcentaje de reprobados, con él no se logra que los estudiantes comprendan de manera satisfactoria los conceptos y métodos de pensamiento propios del Cálculo; los estudiantes acreditan los cursos por llevar a cabo, de manera más o menos mecánica, algunos cálculos de derivadas y primitivas y por resolver ciertos problemas estereotipados. (Artigue, 1995).

De esta manera es posible afirmar que no existe un aprendizaje sustentado en principios sólidos, tal como lo dice, Llorens, J. L., Santonja, F. J. (1997), los estudiantes tienen las siguientes complicaciones al cursar la asignatura de Cálculo Integral:

a) Generalmente, los estudiantes identifican “integral” con “primitiva”. La integral, para ellos, no comporta ningún proceso de convergencia ni tampoco ningún aspecto geométrico.

b) Las integrales “definidas” se identifican con la regla de Barrow, incluso cuando ésta no pueda aplicarse. Es decir, el símbolo:

$$\int_a^b f(x)dx$$

representa sólo un paso más del cálculo de primitivas, la aplicación de la regla de Barrow.

c) No se integra el concepto de área con el de integral. Ciertamente, los estudiantes han oído que existe una relación entre las integrales (definidas) y el área, pero no se produce una adecuada unión entre ambas, de modo que persiste una interpretación puramente algebraica de la integral. (Llorens, 1997, p. 61-76)

Trabajos relacionados

La investigación y las propuestas sobre el aprendizaje y la enseñanza de la integral es muy extensa y aquí sólo mostramos algunos trabajos que dan cuenta del énfasis que se pone en el uso de la tecnología, incorporando propuestas del uso de calculadoras desde inicios de la década de los 70´s en el siglo pasado. Asimismo, señalamos dos trabajos desarrollados en el marco teórico que usaremos, referidos a los contextos y los criterios de idoneidad didáctica.

En 1973 Ansola, Rodríguez, Hernández, Gómez, Oliva y Sánchez llevaron una investigación con un grupo de estudiantes de primer año de ingeniería a través de un curso facultativo en el que se retomó el cálculo de integrales definidas, utilizando la tecnología, con el propósito de:

- Consolidar el concepto de integral definida a través de su definición y de su interpretación geométrica.
- Mostrar otras formas de calcular una integral definida mediante aproximaciones numéricas y su interpretación geométrica.

El recurso tecnológico utilizado en este caso fue una calculadora graficadora CASIO ClassPad 300, aprovechando las posibilidades que ofrece la misma desde el punto de vista geométrico y de programación, que facilitan el auto aprendizaje de los estudiantes.

Teniendo con ello un acercamiento al uso de la tecnología y el uso de diferentes representaciones de la integral, las desventajas que presenta este trabajo en la actualidad es que el proceso es complicado, de poco acceso a los estudiantes y existen programas más sencillos de utilizar.

En 2008 Martínez, Molinàs y Juan abordaron la integral definida desde su representación geométrica con un math-bock que trata el problema del cálculo del área y su importancia en otras ramas de la ciencia para la resolución de situaciones reales, tales como puede ser el cálculo del espacio recorrido por un móvil en Física.

El desarrollo de este material de apoyo didáctico trata la representación geométrica de la integral definida, su desventaja es que es un software obsoleto y difícil de programar.

En 2010 Costa, Domenicantonio y Vacchino realizaron un material didáctico digital propuesto para un curso de Cálculo Integral y Vectorial en una y varias variables en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata. El material en formato de CD dispone de una breve introducción al Maple, con comandos básicos para el desarrollo de los contenidos de la asignatura, talleres didácticos y actividades de ejercitación, que guían al alumno en el proceso de enseñanza y aprendizaje a partir de la visualización.

Este material fue realizado para un taller, en él se utiliza un software para la representación geométrica de la integral con el fin de tener un recurso didáctico para mejorar el aprendizaje, pero el software utiliza un proceso de programación muy complicado, además es de poca accesibilidad.

En 2007 Grijalva en su tesis doctoral realizó una investigación sobre el papel del contexto en la asignación de significados a los objetos matemáticos, el cual se centró en la integral de una función. En la investigación se puede observar como los estudiantes buscan el algoritmo que pueden utilizar para resolver un problema, sin recurrir a otros procedimientos más sencillos, tratando de ajustar el modelo de una función definida, sin tomar en cuenta la perspectiva geométrica.

En 2010 Contreras, Ordóñez y Wilhelmi realizaron un análisis de una muestra representativa de libros de matemáticas con el objetivo de "mostrar algunas posibilidades para la mejora de la idoneidad didáctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje potenciales relativos al cálculo integral en el bachillerato" en la que identificaron cuatro configuraciones epistémicas (CE) de la integral definida: CE geométrica, CE resultado de un proceso de cambio, CE inversa de la derivada, y CE aproximación al límite. Posteriormente se ha identificado, además, la presencia de la CE algebraica. Tras analizar los libros de texto y las Pruebas de Acceso a la Universidad, los autores sugieren que se debe tener en cuenta los siguientes aspectos: proponer procesos de estudio que posibiliten el tránsito entre las distintas configuraciones epistémicas, solicitar a las universidades la inclusión de situaciones que requieran un conocimiento de la integral definida relacionado no solamente a las configuraciones epistémicas geométrica y algebraica, utilizar el cálculo numérico y la geometría elemental "como medios de control y 30 predicción, en situaciones complejas de modelización e interpretación".

En 2011 Soto realizó una secuencia didáctica sobre la integral definida para el curso de Cálculo Integral en ingenierías, en el cual se propone además de la representación verbal y analítica, una representación geométrica en un software amigable como GeoGebra. Esta secuencia didáctica es un proceso evolutivo en el desarrollo de la integral definida, partiendo de la representación verbal, pasando por la geométrica y terminando con la representación algebraica.

1.4 El Cálculo y la Integral en programa de la dirección general de bachillerato

En la actualidad no se cuenta con libros de texto obligatorios para el bachillerato mexicano ni libros de texto generalizados. En todo caso, algunos subsistemas o planteles promueven libros desarrollados al interior de sus comunidades, con apoyo institucional, pero en general las escuelas preparatorias pueden basarse en cualquier libro que cumpla con el programa de cada asignatura, regido por la Dirección General de Bachillerato (DGB). En cuanto al Cálculo Integral el programa es el siguiente:

BLOQUE 1: APLICAS LA DIFERENCIAL EN ESTIMACIÓN DE ERRORES Y APROXIMACIONES DE VARIABLES EN LAS CIENCIAS EXACTAS, SOCIALES, NATURALES Y ADMINISTRATIVAS

Objetos de aprendizaje	Competencias a desarrollar
La diferencial. Aproximaciones de variables. Estimación de errores.	Interpreta gráficamente el modelo matemático de fenómeno de su entorno y aproxima el comportamiento de su derivada a partir del cálculo de la diferencial. Analiza el error obtenido mediante la aplicación de la diferencial para determinar la precisión en

	la medición de una magnitud y como afecta la confiabilidad de ésta en situaciones reales de su contexto. Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores fortalezas y debilidades al trabajar con aproximaciones y estimación de errores.

BLOQUE II: DETERMINAS LA PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN E INTEGRAS FUNCIONES ALGEBRAICAS Y TRASCENDENTES COMO UNA HERRAMIENTA A UTILIZAR EN LAS CIENCIAS EXACTAS, SOCIALES, NATURALES Y ADMINISTRATIVAS

Objetos de aprendizaje	Competencias a desarrollar
Funciones primitivas. Integral Indefinida.	Resuelve problemas que involucren la obtención de la primitiva de una función y la interpreta en situaciones reales de su entorno. Desarrolla la habilidad en el manejo de técnicas de integración en un contexto teórico. Valora el trabajo en equipo como una alternativa para mejorar sus habilidades operacionales en el cálculo de integrales indefinidas.

BLOQUE III: CALCULAS E INTERPRETAS EL ÁREA BAJO LA CURVA EN EL CONTEXTO DE LAS CIENCIAS EXACTAS, SOCIALES, NATURALES Y ADMINISTRATIVAS

Objetos de aprendizaje	Competencias a desarrollar
Sumas de Riemann. Integral definida.	Resuelve problemas de áreas mediante las sumas de Riemann en cualquier disciplina que tenga relación con su entorno. Resuelve problemas de áreas mediante la integral definida en cualquier disciplina que tenga relación con su entorno. Asume una actitud constructiva y congruente con las competencias con las que cuenta en el uso de las TIC´s como herramientas para el modelado y la simulación de problemas de áreas bajo la curva en el contexto de la física, la geometría y la química.

BLOQUE IV: RESUELVES PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA EN SITUACIONES REALES EN EL CAMPO DE LAS CIENCIAS EXACTAS, SOCIALES, NATURALES Y ADMINISTRATIVAS

Objetos de aprendizaje	Competencias a desarrollar
Áreas y volúmenes de sólidos de revolución. Ley de Newton. Crecimientos exponenciales. Oferta y demanda.	Identifica casos factibles de aplicación de la integral definida en el ámbito de las ciencias exactas, naturales y sociales. Aplica la integral definida para resolver problemas en el campo disciplinar de las matemáticas, física, biología y economía, administración y finanzas. Valora el uso de las TIC´s como herramientas para el modelado y la simulación de problemas de aplicación de integrales definidas en cualquier contexto disciplinar. Asume una actitud constructiva, congruente a sus competencias para proponer maneras de solucionar un problema de su entorno mediante la aplicación de la integral diferenciada.

SEP (2013)

Dado que la existencia de textos y materiales didácticos son escasos apoyar el trabajo docente con el propósito de llevar a la práctica un enfoque basado en competencias, no es posible asegurar que se esté cumpliendo, y, por el contrario, una revisión de algunos de los libros que se utilizan nos permite decir que se enfocan en procedimientos algebraicos o algorítmicos, además, de no utilizar la tecnología para la construcción del conocimiento. En general, los libros existentes en el mercado no favorecen al impulso o promoción del desarrollo de las competencias genéricas y disciplinares que marca la RIEMS.

Competencias genéricas que es posible promover con acercamientos diferentes al estudio de la integral.

El trabajo realizado por alumnos y profesores, independientemente de las estrategias docentes en el que se desarrollan, conducen a la construcción de algunas competencias, tanto genéricas como disciplinares. De hecho, desde nuestro punto de vista, en el llamado currículum oculto subyace la promoción de determinadas competencias. Pero llevar a la práctica un modelo cuya base es el desarrollo de competencias, obliga a hacer explícitas las formas de trabajo que contribuyen a este fin, partiendo de la consideración inicial de que el desarrollo de competencias es un proceso de mediano y largo plazo, pues se requiere de un trabajo constante y permanente por largos periodos de tiempo para que se logre, por ejemplo, que un estudiante consiga expresar ideas y conceptos por medio de diferentes representaciones semióticas.

Con esas limitaciones, nuestra propuesta se propone la promoción de las competencias disciplinares en matemáticas y al menos las competencias genéricas que enunciamos líneas abajo. Para ello, además de tomar en consideración aspectos epistémicos, cognitivos, mediacionales y ecológicos, procuraremos incentivar el favorecimiento de actitudes positivas de involucramiento en la resolución de situaciones problema y el impulso a periodos de intensa interacción entre los estudiantes por medio del trabajo en equipo y de la interacción entre estudiantes-profesor, por medio de discusiones grupales.

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados, en sus atributos:
   - Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
   - Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos, en sus atributos:
   - Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
   - Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva, en su atributo:
   - Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo con su relevancia y confiabilidad.
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida, en su atributo:
   - Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos, en sus atributos:
   - Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
   - Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

PROPÓSITOS DEL TRABAJO

Con base en los planteamientos presentados hasta el momento, establecimos los propósitos del presente trabajo, los que enunciamos a continuación.

OBJETIVO GENERAL

Diseñar una propuesta de actividades didácticas para la enseñanza de la integral en el bachillerato, con apoyo de software de matemática dinámica.

.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

1. Determinar el significado institucional de referencia para la integral en el bachillerato de acuerdo con el programa de Cálculo Integral de la Dirección General de Bachillerato.
2. Determinar el significado institucional pretendido por las actividades didácticas a diseñar.
3. Diseñar actividades didácticas para la enseñanza de la integral donde se utilicen diferentes representaciones semióticas, en diferentes contextos, con apoyo en applets realizados con el software libre GeoGebra, de matemática dinámica.
4. Evaluar el diseño de las actividades didácticas a través de su puesta en escena.

CAPÍTULO 2 ELEMENTOS TEÓRICOS Y ESTRATEGIAS PARA EL DESARROLLO DEL TRABAJO

Para la realización de este trabajo, tanto en el diseño de las actividades de la propuesta didáctica como del análisis de la intervención didáctica correspondiente, se utilizaron algunos de los preceptos fundamentales del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción Matemáticos (EOS) (Godino 2017). El EOS es un marco teórico sistémico que incorpora una visión panorámica que incluye aspectos epistémicos, cognitivos, mediacionales, emocionales, interaccionales y ecológicos que da lugar a considerar múltiples aspectos para diseñar y analizar los procesos de aprendizaje y de enseñanza de las matemáticas. En específico se consideraron los siguientes elementos:

- ✓ Prácticas matemáticas y sistemas de prácticas.
- ✓ Objetos matemáticos primarios y elementos de significado.
- ✓ Configuraciones y Trayectorias, particularmente epistémica y cognitiva.
- ✓ Criterios de idoneidad didáctica.

2.1 Prácticas matemáticas

El EOS es un enfoque teórico de carácter pragmático que tiene como punto de partida la necesidad de contar con una noción de significado para los objetos matemáticos y una intención explícita de asumir una posición ontológica sobre dichos objetos matemáticos. Para ello se plantea que ante la imposibilidad de desentrañar fisiológicamente y determinar psicológicamente de forma absoluta los mecanismos del pensamiento, nuestro acceso para comprender las significaciones que damos a los objetos matemáticos sólo se puede lograr a través de nuestras acciones y nuestras formas de comunicación verbal.
Consecuentemente, al enfrentar una situación problema, los sujetos realizamos una serie de acciones o prácticas matemáticas. Así, (Godino y Batanero, 1994, p. 334) se estipula

Consideramos práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas.

En principio, las prácticas matemáticas son realizadas por un individuo y eso conduce a decir que esas prácticas son personales, propias de quienes la realiza. Pero por lo regular los individuos estamos inmersos en una comunidad que comparte la búsqueda de soluciones a situaciones problema comunes o del mismo tipo y al seno de esa comunidad se desarrollan prácticas similares, para lo cual ahora es posible referirnos a prácticas institucionales, propias de esa comunidad.

Toda vez que diferentes comunidades pueden desarrollar diferentes prácticas matemáticas, al hablar de prácticas matemáticas se asume no sólo una visión pragmática, sino también relativista pues no existen prácticas universales y es necesario especificar siempre referirse a qué individuo o a qué comunidad corresponde la realización de determinadas prácticas matemáticas.

2.2 Significado y objetos matemáticos primarios

Cuando un sujeto, ya sea un individuo en lo particular o una comunidad, enfrenta un mismo tipo de situaciones problema va generando también un conjunto o sistema de prácticas similares por medio de las cuales resuelve las situaciones. Así por ejemplo si se tiene interés en resolver una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, es común que se procure hacer una factorización de términos lineales, se busque completar un trinomio cuadrado perfecto, quizá se haga la gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$ y se busque determinar su intersección con el eje de las abscisas o se emplee la llamada fórmula general para resolver una ecuación cuadrática. Esta situación conduce a la creación no de prácticas aisladas sino a la generación de *sistemas de prácticas matemáticas* prototípicos, que se utilizan con frecuencia. A dichos sistemas de prácticas, asociados a la resolución de un mismo tipo de situaciones problema se le reconoce en el EOS como el *significado* de los objetos matemáticos. Cuando los sistemas de prácticas son realizados por un individuo en lo particular hablamos de *significados personales* y cuando se hace referencia los sistemas de prácticas compartidos en una comunidad, los identificamos como *significados institucionales*.

Atendiendo a la relatividad de los significados considerada en el EOS, cada una de estas caracterizaciones de los significados podemos concebirlas o ubicarlas en diferentes niveles de uso en dependencia de la forma en que se insertan en el sistema educativo. Por ejemplo, en el caso del significado institucional es posible que en los programas de las asignaturas se tomen como referencia los sistemas de prácticas de la comunidad matemática (significado de esa institución) o se opte por la empleada por una comunidad diferente. A los sistemas de prácticas empleados en este caso los denominaremos *significado institucional de referencia*. Por su parte, lo que se escribe en los programas de materia o en las planificaciones de los profesores, es una forma que se propone para abordar las temáticas correspondientes y entonces hablaremos del *significado institucional pretendido*, Pero por diversas circunstancias es también posible que el significado pretendido sufra transformaciones en el trabajo de aula con los estudiantes y a los sistemas de prácticas realmente llevados a la práctica los identificaremos como el *significado institucional implementado*. Por último, los sistemas de prácticas que son motivo de las evaluaciones efectuadas reciben el nombre de *significado institucional evaluado*.

De manera similar, en el caso de los sistemas de prácticas desarrollados por los individuos, siendo de interés particular los sistemas de prácticas de los estudiantes, nos llevan a considerar diferentes gradaciones estratos o gradaciones. Llamamos *significado personal global* a los sistemas de prácticas desarrolladas por un individuo, independientemente de si son consideradas adecuadas o correctas o se caracterizan como equivocadas o erróneas. A los sistemas de prácticas consideradas correctas los denominamos *significado personal logrado* y a las que se manifiestan en los procesos de evaluación los denominamos *significado personal declarado*.

Es pertinente señalar que bajo esta perspectiva en el EOS se considera que el propósito fundamental del proceso educativo consiste en lograr que los significados personales de los estudiantes progresen hacia la coincidencia con los significados institucionales de referencia o los significados institucionales pretendidos.

Por otra parte, si ponemos atención en los sistemas de prácticas que emergen de los procesos de solución de las situaciones problema enfrentadas, es posible percibir o detectar que emergen diferentes sistemas de prácticas: por una parte la solución de una situación conduce a plantearse nuevas situaciones problema, un lenguaje (verbal, algebraico, numérico, gráfico u otro) para referirse a los objetos en juego, genera procedimientos específicos, se atribuyen propiedades a los emergentes de los sistemas de prácticas, se usan o asocian argumentaciones específicas y con todo ello se construyen concepciones de dichos emergentes. Por lo tanto, a estos emergentes es posible reconocerlos explícitamente y caracterizarlos como elementos del significado y, más aún, podemos caracterizarlos como los objetos matemáticos primarios, cuya combinación da lugar a objetos matemáticos de mayor complejidad. En Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008) encontramos "Tal como se ha dicho, en el EOS se asumen los presupuestos de la epistemología pragmatista y los objetos se derivan de las prácticas matemáticas. En concreto se considera que los objetos matemáticos son emergentes de sistemas de prácticas".

El EOS ubica 6 objetos primarios que emergen de las prácticas matemáticas en la resolución de problemas de un mismo tipo:

- ✓ Situaciones-problemas (aplicaciones extra matemáticas, tareas, ejercicios)
- ✓ Elementos lingüísticos (términos, expresiones, notaciones, gráficos, etcétera) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, entre otros)
- ✓ Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etcétera)
- ✓ Proposiciones (enunciados sobre conceptos, etcétera)
- ✓ Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, entre otros).
- ✓ Conceptos definición (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, etcétera).

Los seis tipos de entidades primarias postuladas amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales, al considerarlas insuficientes para describir los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática. Las situaciones problemas son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí. (Godino, 2008, página 7)

2.3 Configuraciones Epistémicas y Cognitivas

Los objetos matemáticos primarios se organizan en entidades más complejas denominadas configuraciones epistémicas y configuraciones cognitivas; *Configuraciones epistémicas* si se refieren a los significados institucionales y *configuraciones cognitivas* si están relacionadas con los significados personales (Godino, Contreras y Font, 2006).

El conjunto ordenado de configuraciones epistémicas de acuerdo con el sistema de prácticas realizado en una institución se le denomina *trayectoria epistémica* y representa el significado institucional pretendido.

En este apartado analizaremos las configuraciones epistémicas que definen Contreras, Ordóñez y Wilhelmi en su trabajo "Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida", en la que identificaron las configuraciones epistémicas (CE) de la integral definida:

✓ **CE geométrica**

- La integral definida aparece en la determinación del área bajo una curva y el eje de abscisas. Los cálculos de longitudes, áreas y volúmenes asociados hacen referencia a un contexto geométrico totalmente estático, ausente de movimiento.
- Leibnitz es su principal valedor.
- Turégano (1994) propone la integral como medio para la introducción al análisis, tomando como punto de partida el cálculo de áreas planas y basándose en la definición geométrica de integral presentada por Lebesgue en 1928.
- En una línea similar, Azcárate y otros (1996) realizan una propuesta didáctica para presentar el concepto de integral definida a partir del concepto de área y su cálculo mediante un método de aproximaciones, combinando lo gráfico, lo numérico y lo algebraico por medio del uso de la tecnología.

✓ **CE resultado de un proceso de cambio**

- Mientras en Cálculo Diferencial nos interesa el cambio instantáneo de una magnitud, usamos el Cálculo Integral para determinar los resultados totales de estos procesos de cambio.
- Así, consideramos todos aquellos casos en que la integral es necesaria para resolver situaciones de otras ciencias: la física, la probabilidad, la biología, etc., esto es, asociada a procesos no estáticos, de una realidad cambiante, siendo el flujo de tiempo uno de los aspectos cruciales.
- Newton puede ser considerado el gran propulsor de este significado.

✓ **CE inversa de la derivada**

- Una tercera configuración proviene de la relación original entre derivada e integral que se puede asociar a los trabajos de Newton y Leibnitz.
- Se puede asociar a los trabajos de Newton y Leibnitz.
- El conjunto de funciones integrables es cada vez más extenso.

✓ **CE aproximación al límite.**

- Directamente relacionada con la formalización iniciada por Cauchy y que dio lugar a una nueva definición de integral definida.

✓ **CE algebraica**

- Podemos destacar la inadecuada concepción "área de la integral" ligada al "área como contexto", que lleva a considerar la necesidad de que la integral definida debe ser positiva.
- Las estudiantes asociadas al concepto de integral definida en:
- Primitiva (la integral es una fórmula)
- Operativa (la integral es un área y no consideran el signo)
- Descriptiva.
- Los estudiantes recuerdan las reglas, pero no saben por qué son áreas o volúmenes, hecho debido a la identificación abusiva de la integral con un área geométrica descontextualizada.
- (Contreras de la Fuente, 2010)

2.4 Criterios de Idoneidad didáctica

En la planeación de las actividades docentes, desde el diseño de actividades hasta su implementación en el aula, es deseable tomar en cuenta diferentes factores para que el proceso educativo se desarrolle de la mejor manera posible. A todos los factores involucrados y su adecuada realización podemos englobarlos en lo que se conoce en el EOS Godino 2017) como *idoneidad didáctica* a cuyos factores nos referiremos a continuación.

Un factor para considerar es la problematización adecuada que se pretende lograr, estableciendo las situaciones y el orden en que se presentarán para dar pie a la emergencia de los significados y objetos matemáticos proyectados, de tal manera que se correspondan con el significado institucional de referencia. La consideración de estos aspectos nos lleva a pensar en el proceso de *idoneidad epistémica*.

Si pensamos, por otra parte, en los procesos de aprendizaje podemos establecer criterios para que exista *idoneidad cognitiva* y, considerar los medios que deberán usarse, así como los mecanismos de interacción entre estudiantes y de éstos con el profesor, nos conduce a tomar en cuenta los llamados criterios de *idoneidad mediacional* en el primer caso y de *idoneidad interaccional* en el segundo. Para lograr el involucramiento deseado de los estudiantes con los procesos de solución de las situaciones propuestas deben considerarse las características que lleven a la *idoneidad emocional* y, por último, los factores condicionantes como la aplicación de los conocimientos a construir para solución de problemas en otros campos del conocimiento, deben establecerse criterios para la *idoneidad ecológica*.

Con el propósito de establecer explícitamente los criterios de idoneidad didáctica contemplados en el EOS, a continuación, describimos cada uno de ellos

- ✓ **Idoneidad epistémica**, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de un significado de referencia.

- ✓ **Idoneidad cognitiva**, expresa el grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.

- ✓ **Idoneidad interaccional**, grado en que las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y, por otra parte, resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción mediante la negociación de significados.

- ✓ **Idoneidad mediacional**, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

- ✓ **Idoneidad emocional**, grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio.

- ✓ **Idoneidad ecológica**, grado de adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social, etc. (Godino, 2008).

El establecimiento de estos criterios de idoneidad didáctica es de suma trascendencia para diseñar y evaluar los procesos educativos, pero es necesario contar con indicadores que permitan tener una visión más operativa de los mismos. Estos criterios se presentan en el capítulo 4, cuando se hace una valoración a priori de la secuencia didáctica del trabajo y se hace una evaluación de los criterios de idoneidad didáctica señalados.

2.5 Estrategia para el desarrollo del trabajo

Una vez planteada la problemática del trabajo y elementos de justificación, establecidos sus objetivos, con el conocimiento de los planteamientos curriculares de la RIEMS y el programa específico del curso de cálculo integral de la dirección general de bachillerato, aunado al desarrollo de los elementos teóricos del EOS a considerar, nos dimos a la tarea de fijar las acciones que seguiríamos para la realización integral de nuestros propósitos.

La primera acción para desarrollar consistió en hacer el diseño de las actividades didácticas a incluir en la secuencia considerando los elementos teóricos del EOS y las características señalados en la Reforma Integral de la Educación Media Superior.

Para la elaboración de la propuesta se tomaron en cuenta el tipo de problemas que de acuerdo con los lineamientos curriculares deben incorporarse y las actividades partieron de situaciones problema que contribuyeran a concebir a la integral de una función como una operación de fenómenos que se pueden estudiar como procesos de acumulación y caracterizar gráficamente con la situación prototípica del cálculo del área de una figura que incluye un lado curvo.
Asimismo, las configuraciones epistémicas de la propuesta se elaboraron guiándonos por los criterios de idoneidad didáctica, sumando los aspectos epistémicos, cognitivos, mediacionales, afectivos, interaccionales y ecológicos. Particularmente, en lo que se refiere

a la idoneidad mediacional, el diseño de las actividades se realizó incorporando el uso de GeoGebra.
La concreción de estos elementos se realizó con base en las siguientes etapas:

a) Se hizo un análisis del programa del curso de Cálculo Integral de la dirección general de bachillerato, con el fin de establecer el significado institucional de referencia, de tal manera que la secuencia didáctica cubriera las temáticas establecidas. En el análisis se detectaron, principalmente, los objetos matemáticos intervinientes y los objetos matemáticos emergentes.
b) Respecto a los tipos de configuraciones epistémicas señaladas en Godino, Contreras y Font, 2006 y descritas líneas atrás, se decidió centrar las actividades en la configuración epistémica relacionada con la integral como proceso de cambio, mediante una interpretación de los "procesos de acumulación", en relación estrecha con una configuración geométrica ligada a la integral como "área bajo la curva". Con este proceder la idea consistió en no alejarse demasiado de la forma propuesta en el programa del curso y de las prácticas tradicionales de los profesores.
c) Detectar aspectos en los que es necesario incorporar el uso de los medios tecnológicos modernos, en específico el software de matemáticas dinámicas GeoGebra, con el propósito de fortalecer los sistemas de prácticas de los estudiantes e indirectamente, de los profesores mismos.

Una vez establecidos estos criterios y desarrollados los trabajos correspondientes, se procedió a hacer el diseño de las actividades incorporando los elementos ya señalados del EOS y se procedió a realizar las siguientes acciones.

a) Se resolvieron todas las situaciones propuestas en la secuencia diseñada y, con base en las respuestas, se hizo un análisis a priori de los elementos en juego, detectando los objetos matemáticos intervinientes y los objetos matemáticos emergentes.
b) Se hizo una valoración a priori de la idoneidad didáctica y se hicieron las modificaciones pertinentes para que, a nuestro juicio, la valoración de cada tipo de idoneidad fuera alta y se tomaran en cuenta los diferentes descriptores construidos en el EOS.

Una vez concluida esta etapa se procedió a planear y llevar a cabo la intervención didáctica o puesta en escena. Por las características del trabajo, en esta etapa se hizo un estudio exploratorio para valorar la viabilidad de la propuesta y la detección de elementos que nos permitieran mejorarla. En tal sentido, la planeación de la intervención didáctica, aunque se hizo con base en elementos rigurosos, no siguen estrictamente los pasos o fases de una intervención didáctica con fines de obtener resultados de investigación.

Se tomaron en cuenta dos elementos fundamentales:

a) Acceso al campo de estudio. Con el propósito de contar con elementos de validez para evaluar la propuesta y, con las limitaciones de los plazos para poner a prueba la misma, se trabajó con dos grupos que acababan de finalizar su curso de cálculo diferencial y estaban a dos meses de llevar el curso de cálculo integral. La conducción de las actividades de la secuencia estuvo a cargo de un profesor de dichos cursos, quien no era responsable de los grupos experimentales, pero que conoció la propuesta de secuencia didáctica y manifestó su disposición de participar.

b) Recolección de datos. Aunque se cuentan con elementos de las respuestas a las actividades de todos los estudiantes de los dos grupos, los análisis se centraron en tres casos, los cuales proporcionan elementos suficientes de la propuesta en su totalidad, para tomar en cuenta con el fin de hacer las modificaciones correspondientes. La observación se llevó a cabo en tres sesiones con cada uno de los grupos, alternando el uso de cañón de video, asistencia a un centro de cómputo y el uso del software GeoGebra para teléfonos celulares. Los estudiantes ya tenían conocimientos elementales del uso de GeoGebra en su curso de Cálculo Diferencial, hizo observación no participante y se recolectaron todas las hojas de respuestas de los estudiantes, no sólo de los tres seleccionados para estudio de casos.

Posteriormente, se hicieron los análisis de las respuestas de los tres estudiantes seleccionados, observando si efectivamente los objetos matemáticos intervinientes eran conocidos por ellos y si las actividades dieron pie a la emergencia de los objetos matemáticos esperados. Asimismo, se pudo hacer una valoración de la idoneidad didáctica a posteriori, que proporcionara también elementos para mejorar la propuesta de secuencia didáctica.

Después, con la información obtenida y el procesamiento realizado con la misma, se elaboró una nueva propuesta de secuencia didáctica.

Para finalizar, presentamos una serie de reflexiones finales sobre la valoración respecto a la consecución de los objetivos del trabajo, tanto el general como los específicos y, con base en los criterios de idoneidad, hacemos también una valoración sobre las posibilidades de llevar a la práctica propuestas didácticas para la enseñanza de las matemáticas, con base en trayectorias didácticas que tengan su punto de partida en la resolución de situaciones problema en el contexto de los estudiantes, tanto de sus otros cursos como de la vida cotidiana.

Tomando en cuenta el contexto curricular de la propuesta, presentamos una valoración sobre las posibilidades de promover las competencias tanto genéricas como disciplinares y la relación que tiene el trabajo con algunos de los puntos esenciales del Nuevo Modelo Educativo.

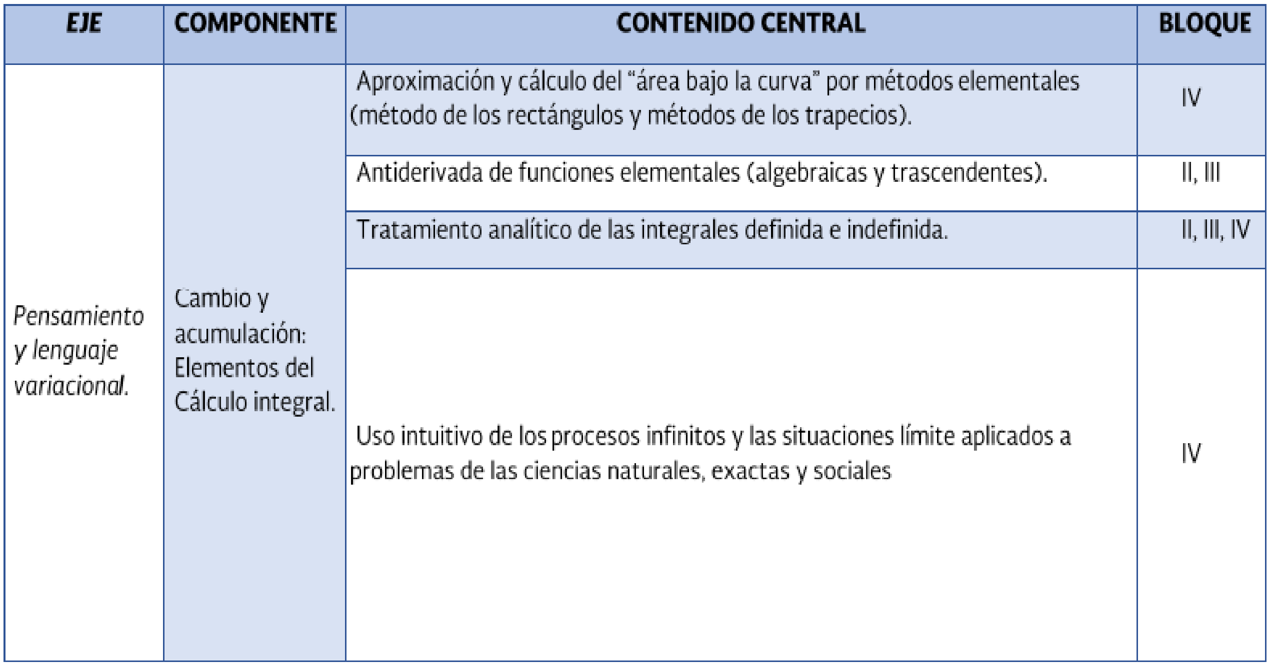
CAPÍTULO 3. LA PROPUESTA DIDÁCTICA Y SU ANÁLISIS A PRIORI

3.1 El programa del curso

El diseño de las actividades didácticas del presente trabajo, aunque se basan en una propuesta que, a diferencia de la enseñanza tradicional, pone énfasis en la solución de problemas de acumulación, es necesario enmarcarla en el posible ámbito de uso de la misma y, por tanto, tenemos en cuenta el significado institucional de referencia, el cual tomamos del programa de la materia de Calculo Integral de la dirección general de bachillerato.

PROGRAMA DE CÁLCULO INTEGRAL

RELACIÓN DE BLOQUES DEL PROGRAMA DE CÁLCULO INTEGRAL CON LOS CONTENIDOS DEL NUEVO MODELO EDUCATIVO DEL CAMPO DISCIPLINAR DE MATEMÁTICAS



EJE	**COMPONENTE**	**CONTENIDO CENTRAL**	**BLOQUE**
Pensamiento y lenguaje variacional.	Cambio y acumulación: Elementos del Cálculo integral.	Aproximación y cálculo del “área bajo la curva” por métodos elementales (método de los rectángulos y métodos de los trapecios).	IV
		Antiderivada de funciones elementales (algebraicas y trascendentes).	II, III
		Tratamiento analítico de las integrales definida e indefinida.	II, III, IV
		Uso intuitivo de los procesos infinitos y las situaciones límite aplicados a problemas de las ciencias naturales, exactas y sociales	IV

Bloque	I

Nombre del Bloque	Horas Asignadas
Diferenciales.	4

Propósito del Bloque
Utiliza de manera reflexiva, la aplicación de diferenciales que contribuyan en la resolución de situaciones de su vida cotidiana, a través de método de aproximaciones.

Interdisciplinariedad	Transversalidad
Ecología y Medio Ambiente. Se retomarán las asignaturas que en cada plantel se impartan en sexto semestre, tanto del componente de formación propedéutica como el de formación para el trabajo.	Eje transversal Social. Eje transversal Ambiental. Eje transversal de Salud. Eje transversal de Habilidades Lectoras.

CLAVE CG	CLAVE CDE	Conocimientos	Habilidades	Actitudes	Aprendizajes esperados
CG 1.1 CG 4.1 CG 5.1	CDEM 1 CDEM 2	Concepto de Diferencial. • Analítico • Geométrico Incremento de una función Aproximación de una raíz.	Interpreta la relación de la diferencial con la derivada de una función. Estima incrementos de una función relacionándolos con el concepto de diferencial. Estima el valor de raíces no exactas utilizando diferenciales.	Reconoce sus fortalezas y áreas de oportunidad. Muestra disposición al trabajo metódico y organizado. Externa un pensamiento crítico y reflexivo de manera solidaria.	Resuelve por medio de diferenciales, problemas reales y/o hipotéticos de su entorno utilizando el cálculo de raíces de manera metódica y organizada, reconociendo sus fortalezas y áreas de oportunidad.

Bloque	II

Nombre del Bloque	Horas Asignadas
Integral indefinida.	16

Propósito del Bloque
Usa las distintas formas de obtener la Integral indefinida, a través del conocimiento de las integrales de funciones para solucionar creativamente situaciones reales y/o hipotéticas presentes en su entorno.

Interdisciplinariedad	Transversalidad
Ecología y Medio Ambiente. Se retomarán las asignaturas que en cada plantel se impartan en sexto semestre, tanto del componente de formación propedéutica como el de formación para el trabajo.	Eje transversal Social. Eje transversal Ambiental. Eje transversal de Salud. Eje transversal de Habilidades Lectoras.

CLAVE CG	CLAVE CDE	Conocimientos	Habilidades	Actitudes	Aprendizajes esperados
CG 1.1 CG 4.1 CG 5.1	CDEM 1 CDEM 2	Definición de integral indefinida Integrales de funciones: • Algebraicas. • Trigonométricas. • Exponenciales.	Asocia la integral indefinida como proceso inverso de la derivada. Identifica los diferentes teoremas para obtener la integral indefinida de funciones. Reconoce las diferentes fórmulas inmediatas para dar solución a integrales indefinidas.	Externa un pensamiento crítico y reflexivo de manera solidaria. Muestra disposición al trabajo metódico y organizado. Aporta ideas en la solución de problemas promoviendo su creatividad.	Utiliza la definición de la integral indefinida como herramienta para el cálculo del proceso inverso de la derivada, aplicado a la integral inmediata de una función, favoreciendo su pensamiento crítico y reflexivo. Aplica las integrales inmediatas para la solución de situaciones reales y/o hipotéticas de su entorno relacionadas con funciones algebraicas, trigonométricas y exponenciales que favorezcan su creatividad y pensamiento crítico.

Bloque III

Nombre del Bloque	Horas Asignadas
Métodos de integración.	14

Propósito del Bloque
Emplea distintos métodos de integración para la solución de una integral no inmediata que se relacionen con situaciones de su contexto, coadyuvando en el desarrollo de un pensamiento crítico y reflexivo.

Interdisciplinariedad	Transversalidad
Ecología y Medio Ambiente. Se retomarán las asignaturas que en cada plantel se impartan en sexto semestre, tanto del componente de formación propedéutica como el de formación para el trabajo.	Eje transversal social. Eje transversal ambiental. Eje transversal de salud. Eje transversal de habilidades lectoras.

CLAVE CG	CLAVE CDE	Conocimientos	Habilidades	Actitudes	Aprendizajes esperados
CG 4.1 CG 5.1 CG 8.3	CDEM 1 CDEM 2	Integración por partes. Integración por fracciones parciales: • Factores lineales no repetidos. • Factores cuadráticos no repetidos.	Reconoce la importancia del método de integración por partes. Identifica las funciones en donde se puede aplicar el método de fracciones parciales.	Externa un pensamiento crítico y reflexivo de manera solidaria. Se relaciona con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado. Privilegia el diálogo para la construcción de nuevos conocimientos. Aporta ideas en la solución de problemas promoviendo su creatividad.	Aplica el método de integración por partes para resolver integrales que involucran el producto de funciones en problemas reales y/o hipotéticos del medio que lo rodea, favoreciendo la construcción de nuevos conocimientos. Usa el método de fracciones parciales para resolver integrales que involucran el cociente de polinomios, promoviendo el desarrollo de su creatividad en situaciones de su entorno.

Bloque IV

Nombre del Bloque	Horas Asignadas
Integral definida y aplicaciones.	14

Propósito del Bloque
Utiliza la integral definida y diversos procesos de integración para resolver situaciones reales y/o hipotéticas del medio que lo rodea, favoreciendo la construcción de nuevos conocimientos al afrontar los retos que se le presentan.

Interdisciplinariedad	Transversalidad
Ecología y Medio Ambiente. Se retomarán las asignaturas que en cada plantel se impartan en sexto semestre, tanto del componente de formación propedéutica como el de formación para el trabajo.	Eje transversal social. Eje transversal ambiental. Eje transversal de salud. Eje transversal de habilidades lectoras.

CLAVE CG	CLAVE CDE	Conocimientos	Habilidades	Actitudes	Aprendizajes esperados
CG 4.1 CG 5.1 CG 5.6 CG 7.3 CG 8.3	CDEM 1 CDEM 3 CDEM 4 CDEM 8	Área bajo la curva: • Suma de Riemann. • Integral definida. • Área entre curvas. Volumen de un sólido de revolución.	Reconoce la importancia de la suma de Riemann para el cálculo del área bajo la curva como un antecedente de la integral definida. Asocia la integral definida con el área bajo la curva de una función. Interpreta el volumen de un sólido de revolución como el resultado de girar una superficie plana alrededor de un eje.	Muestra disposición al trabajo metódico y organizado. Privilegia el diálogo para la construcción de nuevos conocimientos. Expresa ideas y conceptos favoreciendo su creatividad. Afronta retos asumiendo la frustración como parte de un proceso.	Aplica la integral definida para obtener áreas bajo la curva de funciones que se relacionen con situaciones de su entorno promoviendo el desarrollo de su creatividad. Calcula volúmenes de sólidos de revolución relacionándolos con situaciones de su contexto y siendo consciente de que la frustración es parte del proceso.

FUENTES DE CONSULTA

BÁSICA:

- Colegio Nacional de Matemáticas. (2016). Calculo diferencial e integral (4 ª ed.). México: Pearson Educación. ISBN: 9786073235853.
- Fuenlabrada, Samuel. (2013). Cálculo diferencial (4ª ed.). México: Mc Graw Hill. ISBN: 9786071508966
- Cuéllar, Juan Antonio. (2012). Matemáticas V (2ª ed.). México: Mc Graw Hill. ISBN: 9786071506931

COMPLEMENTARIA:

- Ortiz Cerecedo, Francisco Javier. (2015). Cálculo diferencial. (2ª ed.). México: Editorial Patria. ISBN: 9786077440475
- Larson, Ron. (2005). Cálculo diferencial e integral (7ª ed.). México: Mc Graw Hill Interamericana.
- ISBN: 9789701050064
- Zill, Dennis G. &Wright, Warren. & Ibarra, Joel. (2015). Matemáticas 1: Cálculo diferencial (2ª ed.). México: McGraw-Hill Interamericana. ISBN: 9786071512734
- Purcell, Edwin J. & Varberg, Dale. (2007). Cálculo diferencial e integral (9ª ed.). México: Pearson Educación. ISBN: 9789702609896
- Granville, William Anthony. (2008). Cálculo diferencial e integral. México: Limusa. ISBN: 9789681811785
- Ayres, Frank. Mendelson, Elliott. (2010). Cálculo: Schaum (5 ª ed.). México: Mc Graw Hill. ISBN: 9786071503572

ELECTRÓNICA:

- Khan Academy , recuperado el 11 de abril de 2018 desde: http://es.khanacademy.org/math/integral-calculus
- Secretaria de Educación Pública (cálculo integral), recuperado el 11 de abril de 2018 desde: http://www.tuprepaenvideos.sep.gob.mx/
- Julio profe recuperado el 11 de abril de 2018 desde: https://julioprofe.net/categoria/calculo-de-una-variable/

3.2 El significado institucional de referencia

Como puede observarse del programa del curso, aunque se señalan elementos de la adopción del modelo educativo basado en competencias y se especifican las competencias a promover en cada parte, las dinámicas posibles de trabajo para los profesores y los modos de evaluación, casi todos en la modalidad de evaluación formativa, el programa del curso sigue una trayectoria epistémica convencional o tradicional, partiendo de los conceptos matemáticos en juego para avanzar hacia su aplicación. Así, se inicia con el estudio de las diferenciales como preámbulo para presentar la integral como antiderivada, posteriormente el estudio de la integral definida y las sumas de Riemann, concluyendo con las aplicaciones de la integral y los métodos de integración típicos de los cursos.

Aunque es posible hacer un análisis profundo del programa y de las configuraciones didácticas a que da lugar el mismo, en nuestro análisis del mismo centraremos la atención sólo en la identificación de los objetos matemáticos primarios puestos en juego, con el fin de asegurarnos de que nuestra propuesta, en la secuencia didáctica que proponemos, incluya dichos objetos matemáticos primarios.

Para hacerlo, tomaremos los elementos principales de cada bloque.

Bloque I Diferenciales

- SITUACIONES
    - Resuelve por medio de diferenciales, problemas reales y/o hipotéticos su entorno utilizando el cálculo de raíces de manera metódica y organizada.
    - Interpreta la relación de la derivada con el diferencial.
    - Estima incrementos de una función relacionándolos con el concepto de diferencial.
    - Estima el valor de raíces no exactas utilizando diferenciales.

- LENGUAJE
    - Diferencial, incremento, función, aproximación, raíz, geométrico, analítico, derivada.

- PROCEDIMIENTOS
    - Resuelve por medio de diferenciales, problemas reales y/o hipotéticos su entorno utilizando el cálculo de raíces de manera metódica y organizada.

- CONCEPTOS
    - Diferencial, incremento, función, aproximación, raíz, geométrico, analítico, derivada.

- ARGUMENTOS
    - Diferencial.

Bloque II Integral Indefinida

- SITUACIONES
  - Asocia la integral indefinida como proceso inverso de la derivada.
  - Identifica los diferentes teoremas para obtener la integral indefinida de funciones.
  - Reconoce las diferentes fórmulas inmediatas para dar solución a integrales indefinidas.

- LENGUAJE
  - Integral indefinida, Función primitiva, técnicas de integración, integración por partes, por substitución trigonométrica, descomposición en fracciones parciales, antiderivada.

- PROCEDIMIENTOS
  - Resolver ejercicios sobre integrales inmediatas y técnicas de integración.
  - Realizar problemas para obtener la inversa de la derivada.

- CONCEPTOS
  - Antiderivada, inversa de la derivada, integral indefinida, Integración por partes, integración por partes, por substitución trigonométrica, descomposición en fracciones parciales.

Bloque III Métodos de integración

- SITUACIONES
  - Aplica el método de integración por partes para resolver integrales que involucran el producto de funciones en problemas reales y/o hipotéticos del medio que los rodea.
  - Usa el método de fracciones parciales para resolver integrales que involucran el cociente de polinomios.

- LENGUAJE
  - Integración por partes, integración por fracciones parciales, factores lineales no repetidos, factores cuadráticos no repetidos, producto de funciones.

- PROCEDIMIENTOS
  - Aplica el método de integración por partes para resolver integrales que involucran el producto de funciones.
  - Usa el método de fracciones parciales para resolver integrales que involucran el cociente de polinomios.

- CONCEPTOS
  - Integración por partes, integración por fracciones parciales, factores lineales no repetidos, factores cuadráticos no repetidos, producto de funciones.

Bloque IV Integral definida y aplicaciones

- SITUACIONES
  - Aplica la integral definida para obtener áreas bajo la curva de funciones que se relacionen con su entorno.
  - Calcula volúmenes de solidos de revolución.

- LENGUAJE
  - Sólidos en revolución, sumas de Riemman, integral definida, área entre curvas.

- PROCEDIMIENTOS
  - Aplica la integral definida para obtener áreas bajo la curva de funciones.
  - Calcula volúmenes de solidos de revolución.

- CONCEPTOS
  - Sólidos en revolución, sumas de Riemman, integral definida, área entre curvas.

3.3 La propuesta

La secuencia didáctica que presentamos en este trabajo no cubre todo el curso y se centra en el estudio inicial de la integral, con una propuesta de trayectoria epistémica distinta a la del programa, iniciando con los problemas de aplicación señalados en el Bloque IV, último del programa para promover, a partir de la solución de las situaciones problema propuestos, la emergencia de la integral de una función real de variable real y sus propiedades elementales.

Aunque esta es una forma diferente de proceder, las situaciones propuestas inician con problemas relativamente típicos y conocidos por los profesores, con el fin de que los sientan suficientemente cercanos a sus prácticas docentes y estén en condiciones de asumirlos sin mayores dificultades para su trabajo en el aula.

En las situaciones propuestas se privilegian los procesos de acumulación para el cálculo de distancias recorridas por objetos que se mueven con velocidad variable, el trabajo mecánico realizado por una fuerza variable, el gasto ocasionado por la compra de dólares con tasa de intercambio variable respecto al peso mexicano y otras más.

Siguiendo la estructura de las actividades y secuencias didácticas del programa, se distingue entre tres tipos de actividades: de inicio, de desarrollo y de cierre, como se enuncia a continuación.

- ✓ *Actividades de Inicio*: Es la fase donde se permite explorar y recuperar los saberes previos e intereses de los estudiantes. En nuestra propuesta las actividades de inicio son a la vez una introducción a los conocimientos que se espera emerjan de las actividades a lo largo de toda la secuencia, sin restringirnos a una mera introducción de los objetos matemáticos intervinientes.

- ✓ *Actividades de Desarrollo:* Esta fase permite crear escenarios y ambientes de colaboración para la construcción y reconstrucción del pensamiento a partir de la realidad. En esta fase se espera que emerjan los objetos matemáticos propios del curso.

- ✓ *Actividades de cierre:* Propone la elaboración de síntesis, conclusiones y reflexiones argumentativas que, entre otros aspectos, permiten advertir los avances o resultados del aprendizaje del estudiante.

La propuesta abordará la Integral con apoyo del software de matemática dinámica GeoGebra, en las que se incluirá el manejo de diferentes representaciones.

A continuación, presentamos la secuencia didáctica diseñada y, con posterioridad, haremos una valoración a priori de la misma, considerando por una parte las configuraciones epistémicas y su entramado de objetos matemáticos primarios y sus relaciones y, por otra, una valoración de las idoneidades didácticas, siguiendo los descriptores propuestos en el EOS.

Actividades de Inicio

ACTIVIDAD 1

Un objeto se mueve en línea recta de tal manera que su velocidad, medida en metros por segundo se comporta de acuerdo con la siguiente gráfica.

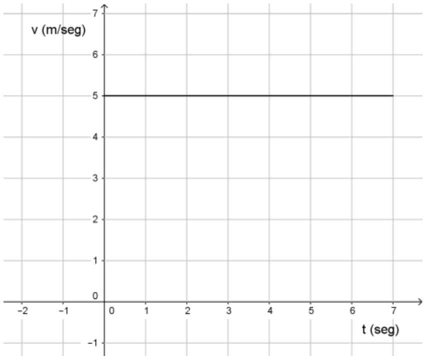


Figura 3.1

1. ¿Qué velocidad tiene el objeto después de 3 seg de recorrido? ¿y después de 5 seg?
2. ¿Cómo está representada la velocidad en la gráfica? ¿Cómo se representa el tiempo trascurrido?
3. ¿Qué distancia recorre el objeto después de 3 seg de movimiento? ¿Y después de 7 seg de movimiento?
4. ¿Cómo se representa la distancia transcurrida analíticamente?
5. ¿Qué representa geométricamente la distancia recorrida?

ACTIVIDAD 2

El trabajo es una magnitud física escalar que se representa con la letra W (del inglés Work) y se expresa en unidades de energía, esto es en julios o Joules (J) en el Sistema Internacional de Unidades**.** Cuando la fuerza que se aplica a un objeto es constante, el trabajo se determina de la siguiente manera:

$$w = F.d$$

Un cuerpo se mueve a lo largo de una línea recta por la aplicación de una fuerza. En la siguiente gráfica se representan la fuerza aplicada (en kg fuerza) y la distancia recorrida (en metros).

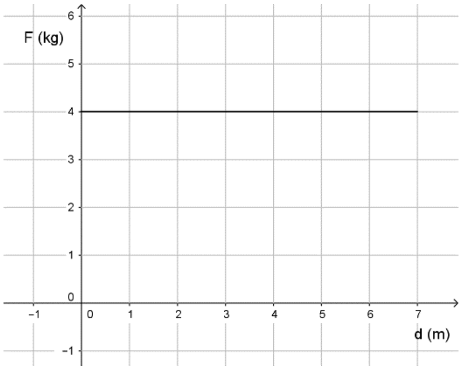


Figura 3.2

1. ¿Qué fuerza se aplica cuando el cuerpo se ha movido 2 m? ¿Y cuándo se ha movido 5 m?
2. ¿Cómo se representa la fuerza aplicada en la gráfica? ¿Y la distancia recorrida?
3. De termina el trabajo mecánico W realizado por la furza aplicada durante los primeros 7 m de recorrido.
4. ¿Cómo se representa el trabajo W realizado en la gráfica?

ACTIVIDAD 3

Una técnica utilizada para medir la constante de fuerza de un resorte consiste en colgar un resorte en forma vertical y luego se le une un objeto de masa m en su extremo inferior. Bajo la acción de la carga mg el resorte se estira una distancia d a partir de su posición de equilibrio. Puesto que la fuerza del resorte está dirigida hacia arriba (opuesta al desplazamiento), se debe equilibrar la fuerza de gravedad mg hacia abajo cuando el sistema esté en reposo.

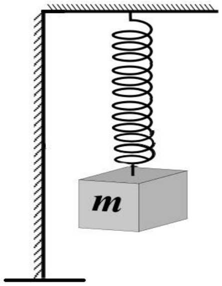


Figura 3.3

La actividad consiste en verificar la constante de fuerza de un resorte utilizando diferentes masas, por lo que para el ejercicio necesitaremos lo siguientes:

- Un soporte fijo
- Resorte
- Vernier
- Pesas (50 gramos, 100 gramos, 200 gramos)

Primero colocamos el resorte en el soporte (figura 1) y verificamos la longitud del mismo, luego vamos anexando las pesas de tal manera que nos den el peso solicitado, verificamos cuánto se alargó desde su posición original y colocamos los datos en la siguiente tabla:

Tabla 3.1

No. Pesa	Masa (Kg)	Δ_y Deformación del resorte $(y - y_0)$	$k = \frac{F}{\Delta_y}$
1	0.10	0.030	32.70
2	0.15	0.046	31.99
3	0.25	0.078	31.44
4	0.30	0.094	31.30
5	0.45	0.140	31.53
6	0.70	0.216	31.79

Ahora graficaremos la fuerza (kg) en función del desplazamiento (m)

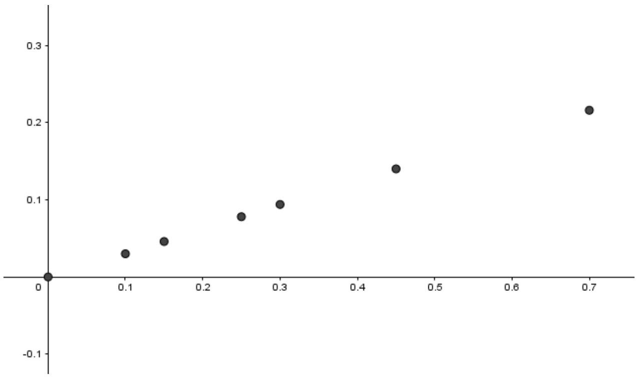


Figura 3.4

Realizamos un ajuste en GeoGebra para determinar la función que mejor representa los datos por medio del comando Ajustelineal.

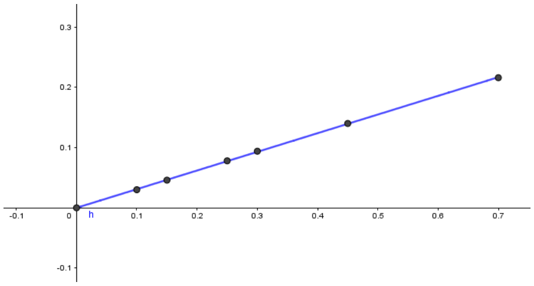


Figura 3.5

Como podemos observar la gráfica asemeja a una línea recta en el cual la pendiente es igual a la constante de fuerza k quedando:

$$f(x) = 0.31x$$

1. ¿Cuál será el trabajo realizado al colocar la primera pesa de 100 g?
2. ¿Cuál será el trabajo realizado por el resorte con todas las pesas?
3. ¿Cuál será el trabajo realizado en el intervalo que comprende la colocación de la tercera pesa a la quinta pesa?
4. ¿Cómo se determina el trabajo realizado en cualquier intervalo?
5. ¿Qué representa geométricamente el trabajo realizado?

Actividades de Desarrollo

ACTIVIDAD 1

Al finalizar la guerra de independencia en México, se estableció el precio por dólar de $1.00 peso por $1.00 dólar, a partir de esta fecha el peso comenzó a devaluarse (pérdida de valor de una moneda nacional frente a otra extranjera).

En los gobiernos de Adolfo López Mateos y Gustavo Díaz Ordaz no hubo inflación, por lo que el precio del peso mexicano mantuvo su valor con respecto al dólar $12.50, tal como se muestra en la siguiente gráfica:

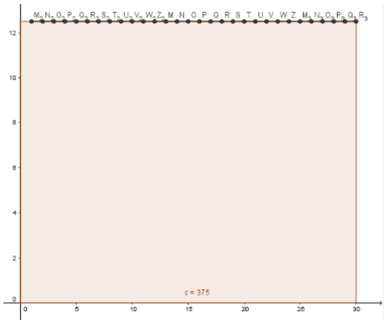


Figura 3.6

1. Si Francisco compró un dólar diario durante el mes de noviembre de 1960 (en Gobierno de Adolfo López Mateos). ¿Cuánto gastó al final de mes?
2. Realiza la gráfica del gasto de los 30 días.
3. ¿Y en el periodo de1 12 al 15 de noviembre? Realiza el procedimiento algebraico y geométrico.
4. ¿Cómo determinas la cantidad que pago en un periodo determinado?
5. ¿Que representa geométricamente el pago?

ACTIVIDAD 2

El peso mexicano ha sufrido varias devaluaciones a lo largo de su historia, en fechas recientes las elecciones a presidente de los Estados Unidos de América, trajo una gran volatilidad en el precio del dólar, a continuación, se presenta un gráfico con el comportamiento del dólar en el mes de noviembre de 2016, fecha en la cual se llevaron a cabo dichas elecciones.

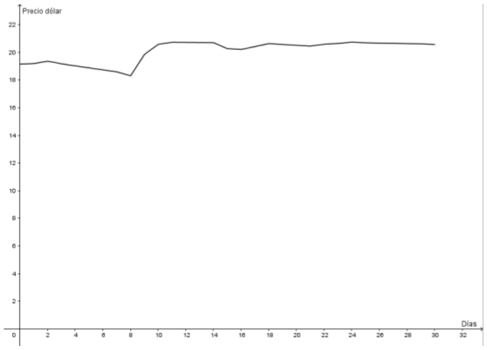


Figura 3.7

Como puedes darte cuenta, el cálculo para determinar el gasto al comprar un dólar diario durante un mes ya no es tan sencillo, dado que el precio se encuentra variando constantemente.

Con apoyo del applet de GeoGebra Devaluación del dólar encuentra el gasto que tendríamos al comprar un dólar diario durante el mes en cuestión, por medio de seccionar el área bajo la curva.

A. Analizaremos el área seccionando nuestra función por debajo de curva.
    1) Primero con 5 rectángulos por debajo de la curva con el deslizador $Inferior = 5$.

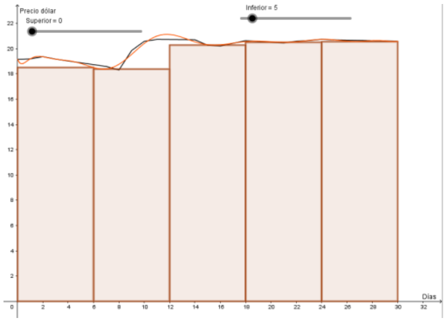


Figura 3.8

    2) Encuentra el $g(x)$ correspondiente al valor de dx de cada rectángulo colocando **Entrada** $g(x)$, donde x es el valor inicial de cada rectángulo. El valor aparecerá en la Vista algebraica como $a = 18.76$, cada vez que realices este procedimiento borra (dando click derecho en a y seleccinando borrar) el resultado para no saturar de información el applet.

    3) Encuentra el área de cada uno de rectángulos multiplicando la base de estos por su altura.

    4) Realiza la suma de las áreas de los rectángulos para obtener una aproximación del gasto en un mes.

    5) Repetimos del paso 1 al 4 con 10 rectángulos.

B. Ahora seccionaremos nuestra función en rectángulos por arriba de curva.

    1) Primero con 5 rectángulos por debajo de la curva con el deslizador $Superior = 5$.

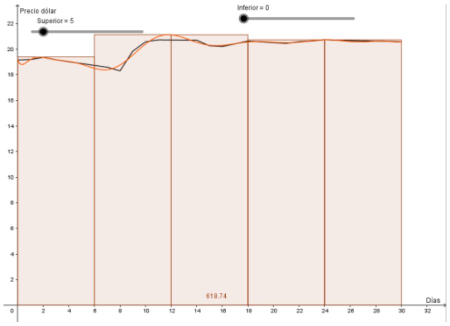


Figura 3.9

2) Encuentra el valor $g(x)$ más grande en cada rectángulo para obtener la altura de este, si se encuentra en $x = 12$, coloca en **Entrada** $g(12)$, borra el resultado de a para no saturar el applet.
3) Encuentra el área de cada uno de rectángulos multiplicando la base de estos por su altura.
4) Realiza la suma de las áreas de los rectángulos para obtener una aproximación del gasto en un mes.
5) Repetimos del paso 1 al 4 con 10 rectángulos.

C. Volvamos con el deslizador Inferior, que secciona nuestra función en rectángulos por debajo de la curva.
    1) Ponemos el deslizador $Inferior = 20$ y tomamos el valor que aparece en vista algebraica Sumainf que nos da la suma de las áreas de los 20 rectángulos.
    2) Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador Inferior = 30, 40 y 50. Llenando la tabla con los datos recabados.

D. Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador Superior, que secciona nuestra función en rectángulos por arriba de la curva.
    1) Ponemos el deslizador $Superior = 20$ y tomamos el valor que aparece en vista algebraica Sumasup que nos da la suma de las áreas de los 20 rectángulos.
    2) Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador $Superior = 30, 40$ y 50. Llenando la tabla con los datos recabados.

Tabla 3.2

Número de rectángulos	Suma de áreas de rectángulos por debajo de la curva	Suma de áreas de rectángulos por arriba de la curva
5		
10		
20		
30		
40		
50		

Entonces el gasto total que realizaremos en este mes se encuentra entre la suma de áreas de rectángulos por debajo de la curva y la suma de rectángulos por arriba de la curva.

$$\underline{g} \leq g \leq \overline{g}$$

ACTIVIDAD 3

A Usain Bolt corredor de 100 metros planos y poseedor del récord mundial de esta disciplina; a continuación, se presenta una tabla de datos de la velocidad en función del tiempo:

Tabla 3.3

Tiempo (s)	Velocidad $\left(\frac{m}{s}\right)$
0	*0*
1.85	*5.41*
2.87	*9.80*
3.78	*10.90*
4.65	*11.40*
5.50	*11.70*

6.32	*12.10*
7.14	*12.10*
7.96	*12.10*
8.79	*10.24*
9.69	*10.32*

A partir de estos realizamos la gráfica correspondiente:

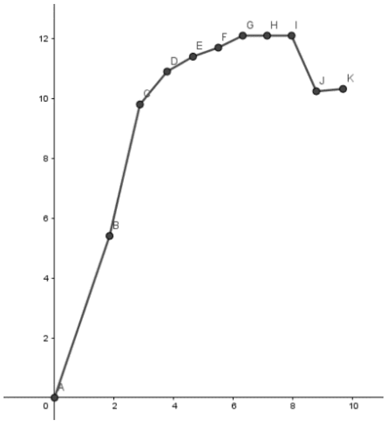


Figura 3.10

Ahora realizamos un ajuste en GeoGebra a los puntos para obtener una función que se aproxime a los datos.

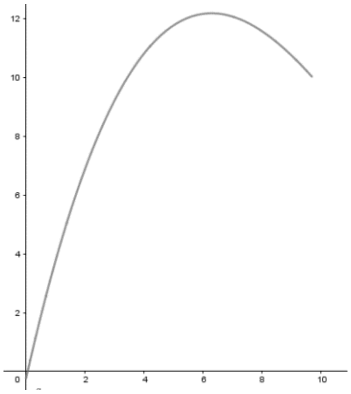


Figura 3.11

Tenemos la función $V(x) = 0.01x^3 - 0.48x^2 + 4.47x - 0.23$ en el intervalo [0, 9.69], que modela la velocidad en función del tiempo, para obtener la posición tenemos que la distancia $d = v.t$ cuando la velocidad es constante, para lo cual seccionaremos en rectángulos la función y sumamos sus áreas para obtener una aproximación al área real.

1. ¿Cuál será el área si seccionamos la función por debajo de la curva en 5 rectángulos?
2. ¿Cuál es el área bajo la curva si seccionamos la función en 5 rectángulos por arriba de la curva?
3. Ahora realiza el mismo procedimiento para 10 rectángulos.

Actividades de Cierre

Al resolver los problemas que se han presentado hasta el momento, podemos observar que independientemente del contexto del cual se trate, ya sea de trabajo mecánico, distancia recorrida, costo de la compra de dólares u otro, la solución nos lleva siempre a seguir un mismo procedimiento, en el que calculamos el área entre el eje X, la gráfica de la función que modela la situación y las rectas verticales que limitan el intervalo considerado.

Así, al seccionar la función en rectángulos con bases dx y alturas $f(x)$, podemos encontrar el área de cada uno de estos rectángulos como $f(x)dx$, como pudiste observar si la partición de la curva tiende a ser más grande, la suma de las áreas de estos tiende a aproximarse cada vez más al valor real.

La suma de las áreas de los rectángulos con una partición infinita de rectángulos nos proporciona el valor exacto del área bajo la curva se le denomina integral y se expresa de la siguiente manera:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Este procedimiento puede aplicarse a otras muchas situaciones, como veremos ahora en los problemas siguientes, relativos al cálculo de los volúmenes de los llamados Sólidos de revolución.

ACTIVIDAD 1

El departamento de producción de la empresa Plásticos S.A. desea elaborar cestos para ropa; los modelos aceptados fueron los siguientes y para su diseño se utilizó el software GeoGebra al girar una función sobre el eje x.

Cesto A

Cesto B

Figura 3.12

Para el diseño del cesto A primero hacemos un segmento de una recta con $y = 2$ en el intervalo [1,5] la cual haremos girar sobre el eje x para generar un cilindro.

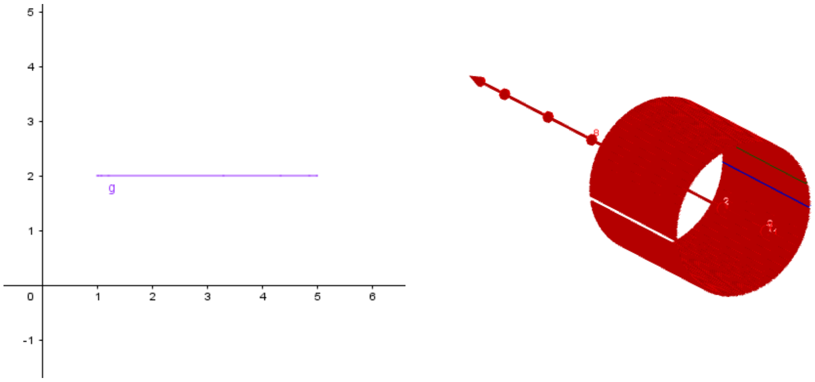


Figura 3.13

1. ¿Cuál es el radio del cilindro?
2. ¿Cómo obtuviste el radio?
3. ¿Cuál es el volumen del cilindro?

Para el diseño del cesto B tomaremos un segmento de la curva $y = \sqrt{x} + 1$ en el intervalo $[0,4]$ que haremos girar sobre el eje x para generar el sólido en revolución que deseamos.

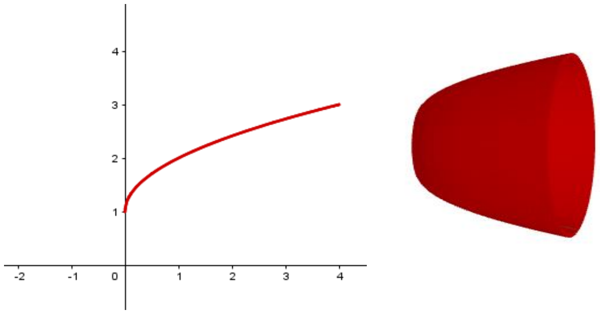


Figura 3.14

Para este caso el radio está cambiando constantemente.

1. ¿Cómo puedes determinar el radio en $x = 0$?
2. ¿Y, para $x = 4$?
3. ¿Cómo se puede calcular el radio para cualquier punto de x?

Segmentaremos el sólido de revolución por debajo de la curva de la siguiente manera:

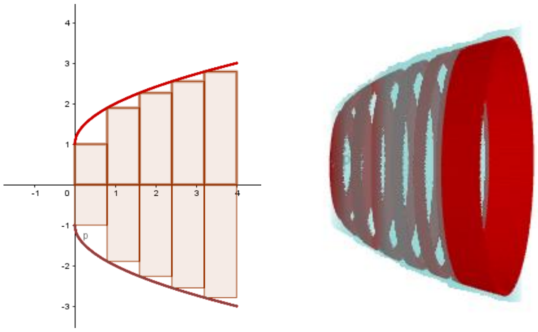


Figura 3.15

4. ¿Qué figuras se forman al hacer esta segmentación?
5. ¿Qué representa dx?
6. ¿Qué representa $f(x)$?
7. ¿Cómo podemos tener una aproximación al volumen del cesto?
8. Determina la ecuación que modele el volumen de cada segmento.
9. Obtén una aproximación al volumen segmentando el sólido por debajo de la curva en $5, 10, 15$ y 20 partes.
10. Obtén una aproximación al volumen segmentando el sólido por arriba de la curva en *5*, *10*, *15* y *20* partes.

ACTIVIDAD 2

De la misma manera que tenemos los datos para determinar la velocidad de Usain Bolt en función del tiempo, tenemos los datos correspondientes a la aceleración, los cuales se describen en la siguiente tabla:

Tabla 3.4

Tiempo (s)	Aceleración $(\frac{m}{s^2})$
0	*0*
1.85	*2.91*

2.87	*4.30*
3.78	*1.22*
4.65	*0.57*
5.50	*0.35*
6.32	*0.48*
7.14	*0*
7.96	*0*
8.79	*-0.13*
9.69	*-1.04*

Al realizar la gráfica obtenemos los siguiente:

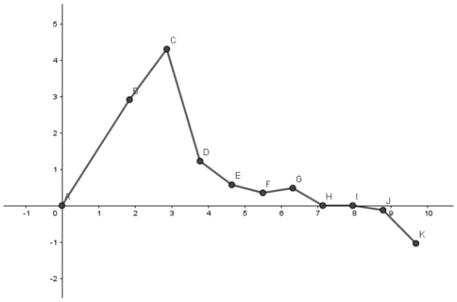


Figura 3.16

Al realizar un ajuste con GeoGebra obtuvimos una función en partes, de la siguiente manera:

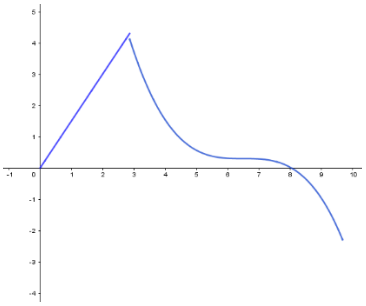


Figura 3.17

$$a(x) = \begin{cases} 1.5x & si\ 0 \leq x \leq 2.87 \\ -0.08(x-6.5)^3 + 0.3 & si\ 2.87 < x \leq 9.69 \end{cases}$$

Realiza una segmentación en rectángulos bajo la curva con bases iguales y contesta lo siguiente:

1. ¿Cómo se determina la velocidad si tenemos la aceleración y el tiempo?
2. ¿Qué representa geométricamente la velocidad en nuestra gráfica?
3. ¿Cómo determinas la altura de los rectángulos en el intervalo $[0\,,2.87]$?
4. ¿Cómo determinas la altura en el siguiente intervalo $(2.87\,,9.69]$?
5. ¿Cuál será la velocidad promedio de la carrera si seccionamos el área bajo la curva, por debajo de la curva en *20* rectángulos?
6. ¿Y si lo hacemos por arriba de la curva?
7. ¿Qué pasa con el área que se encuentra debajo del eje de las abscisas?

3.4 Análisis a priori

Configuraciones Epistémicas y Cognitivas

En esta sección primero dimos respuesta a las actividades propuestas y con base en ellas hicimos un análisis a priori de la secuencia para estar en condiciones de analizar los sistemas de prácticas a desarrollar, identificar los objetos matemáticos primarios involucrados, las configuraciones epistémicas y la consecuente trayectoria epistémica seguida y, por último, una valoración de las idoneidades didácticas.

Este análisis a priori nos permitirá contrastar las respuestas de los estudiantes seleccionados (análisis a posteriori de las configuraciones cognitivas) e identificar si efectivamente se promueve la emergencia de los objetos matemáticos proyectados.

Secuencia Didáctica

Actividades de Inicio

ACTIVIDAD 1

Un objeto se mueve en línea recta de tal manera que su velocidad, medida en metros por segundo se comporta de acuerdo con la siguiente gráfica.

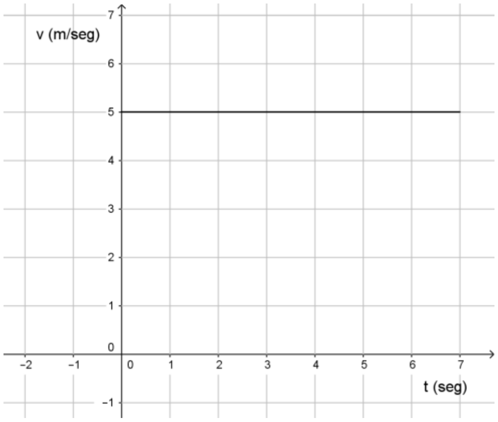


Figura 3.18

1. ¿Qué velocidad tiene el objeto después de 3 seg de recorrido? ¿y después de 5 seg?

   $v = 5\,{}^{m}/_{s}$

2. ¿Cómo está representada la velocidad en la gráfica? ¿Cómo se representa el tiempo trascurrido?

   La velocidad es un F(x) y

   El tiempo x

3. ¿Qué distancia recorre el objeto después de 3 seg de movimiento? ¿Y después de 7 seg de movimiento?

   $d = (5\,{}^{m}/_{s})(3s) = 15m$ y $d = (5\,{}^{m}/_{s})(7s) = 35m$

4. ¿Cómo se representa la distancia recorrida analíticamente?

   $d = 5x$

5. ¿Cómo se representa la distancia transcurrida en la gráfica?

   Como el área bajo la curva

ACTIVIDAD 2

El trabajo es una magnitud física escalar que se representa con la letra W (del inglés Work) y se expresa en unidades de energía, esto es en julios o joules (J) en el Sistema Internacional de Unidades**.** Cuando la fuerza que se aplica a un objeto es constante, el trabajo se determina de la siguiente manera:

$$w = F.d$$

Un cuerpo se mueve a lo largo de una línea recta por la aplicación de una fuerza. En la siguiente gráfica se representan la fuerza aplicada (en kg fuerza) y la distancia recorrida (en metros).

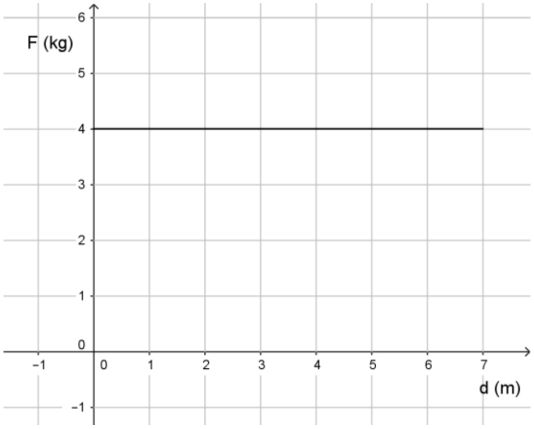


Figura 3.19

1. ¿Qué fuerza se aplica cuando el cuerpo se ha movido 2 m? ¿Y cuándo se ha movido 5 m?

   f (2) = 4 kg

2. ¿Cómo se representa la fuerza aplicada en la gráfica? ¿Y la distancia recorrida?

   Fuerza = f (x)

   distancia = x

3. Determina el trabajo mecánico W realizado por la furza aplicada durante los primeros 7 m de recorrido.

   w = (4 kg) (7 m) = 28 J

4. ¿Cómo se representa el trabajo W realizado en la gráfica?

   Como el área bajo la curva

ACTIVIDAD 2

Una técnica utilizada para medir la constante de fuerza de un resorte consiste en colgar un resorte en forma vertical y luego se le une un objeto de masa m en su extremo inferior. Bajo la acción de la carga mg el resorte se estira una distancia d a partir de su posición de equilibrio. Puesto que la fuerza del resorte está dirigida hacia arriba (opuesta al desplazamiento), se debe equilibrar la fuerza de gravedad mg hacia abajo cuando el sistema esté en reposo.

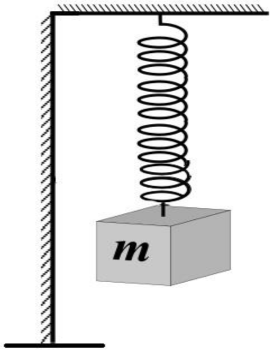


Figura 3.20

La actividad consiste en verificar la constante de fuerza de un resorte utilizando diferentes masas, por lo que para el ejercicio necesitaremos lo siguientes:

- Un soporte fijo
- Resorte
- Vernier
- Pesas (50 gramos, 100 gramos, 200 gramos)

Primero colocamos el resorte en el soporte (figura 1) y verificamos la longitud del mismo, luego vamos anexando las pesas de tal manera que nos den el peso solicitado, verificamos cuanto se alargó desde su posición original y colocamos los datos en la siguiente tabla:

Tabla 3.5

No. Pesa	Masa (K)	Δ_y Deformación del resorte $(y - y_0)$	$k = \frac{F}{\Delta_y}$
1	0.10	0.030	32.70
2	0.15	0.046	31.99
3	0.25	0.078	31.44
4	0.30	0.094	31.30
5	0.45	0.140	31.53
6	0.70	0.216	31.79

Ahora graficaremos la fuerza (kg) en función del desplazamiento (m)

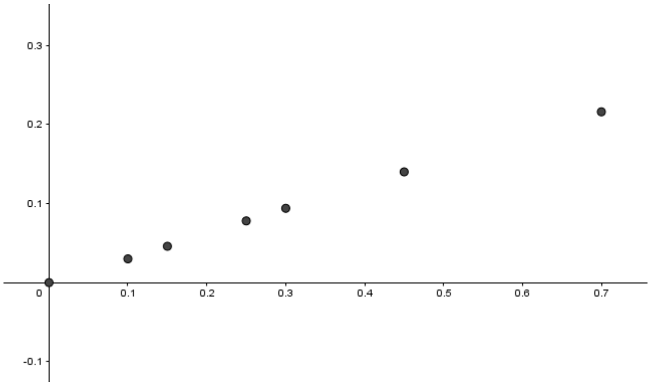


Figura 3.21

Realizamos un ajuste en GeoGebra para determinar la función que mejor representa los datos por medio del comando Ajustelineal.

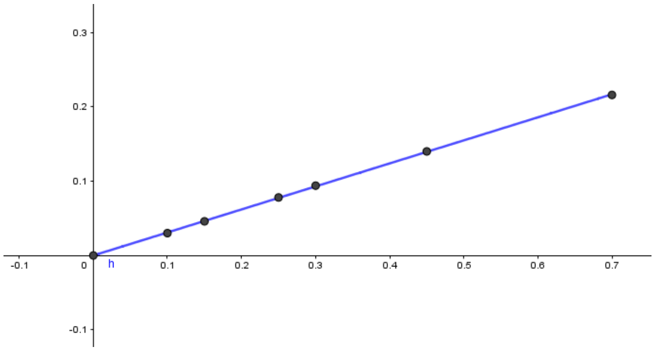


Figura 3.22

Como podemos observar la gráfica asemeja a una línea recta en el cual la pendiente es igual a la constante de fuerza k quedando:

$$f(x) = 0.31x$$

1. ¿Cuál será el trabajo realizado al colocar la primera pesa de 100 g?

$$f(0.1) = (0.31)(0.1) = 0.031$$

$$w = \frac{(0.031)(0.1)}{2} = 0.00155$$

2. ¿Cuál será el trabajo realizado por el resorte con todas las pesas?

$$f(0.7) = (0.31)(0.7) = 0.217$$

$$w = \frac{(0.7)(0.217)}{2} = 0.07595$$

3. ¿Cuál será el trabajo realizado en el intervalo que comprende la colocación de la tercera pesa a la quinta pesa?

$$f(0.5) = (0.31)(0.5) = 0.155$$

$$w(.5) = \frac{(0.5)(0.155)}{2} = 0.03875$$

$$f(0.3) = (0.31)(0.3) = 0.093$$

$$w(.3) = \frac{(0.3)(0.093)}{2} = 0.0279$$

Trabajo de la pesa 3 a la 5 sería:

$$w(5) - w(3) = 0.3875 - 0.0279 = 0.01085$$

4. ¿Cómo se determina el trabajo realizado en cualquier intervalo?

$$w = f(x).dx$$

5. ¿Qué representa geométricamente el trabajo realizado?

El área bajo la curva

Tabla 3.6 Prácticas matemáticas en Actividades de Inicio

Prácticas operativas y discursivas	Lenguaje (objetos ostensivos)	Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos (objetos no ostensivos)
Actividad 1 **Enunciados:** ¿Qué velocidad tiene el objeto después de 3 seg de recorrido? ¿y después de 5 seg? ¿Cómo está representada la velocidad en la gráfica? ¿Cómo	**Intervinientes** -Lenguaje natural: Velocidad, tiempo, distancia, gráfica -Lenguaje figural: Representa la distancia recorrida en la gráfica **Emergentes**	**Intervinientes** -Conceptos: Función, dominio, rango, multiplicaciones de dos magnitudes, gráfica de una función. **Emergentes** • Conceptos: Variable dependiente, variable independiente, distancia

se representa el tiempo trascurrido? ¿Qué distancia recorre el objeto después de 3 seg de movimiento? ¿Y después de 7 seg de movimiento? ¿Cómo se representa la distancia transcurrida en la gráfica?	-Lenguaje natural: Área.	recorrida como el área bajo la curva. • Argumentos: área bajo la curva, $d = v.t$
Actividad 2 **Enunciados:** ¿Qué fuerza se aplica cuando el cuerpo se ha movido 2 m? ¿Y cuándo se ha movido 5 m? ¿Cómo se representa la fuerza aplicada en la gráfica? ¿Y la distancia recorrida? Determina el trabajo mecánico W realizado por la fuerza aplicada durante los primeros 7 m de recorrido. ¿Cómo se representa el trabajo W realizado en la gráfica?	**Intervinientes** -Lenguaje natural: Magnitud, fuerza, distancia, gráfica. -Lenguaje figural: Representa la fuerza aplicada en la gráfica **Emergentes** -Lenguaje natural: Área.	**Intervinientes** -Conceptos: Función, dominio, rango, multiplicaciones de dos magnitudes, gráfica de una función. **Emergentes** • Conceptos: Variable dependiente, variable independiente, trabajo mecánico como el área bajo la curva. • Argumentos: área bajo la curva, $w = F.d$
Actividad 3 **Enunciados:**	**Intervinientes** -Lenguaje natural:	**Intervinientes** -Conceptos: Función, dominio, rango, multiplicaciones de dos

¿Cuál será el trabajo realizado al colocar la primera pesa de $100\ g$? ¿Cuál será el trabajo realizado por el resorte con todas las pesas? ¿Cuál será el trabajo realizado en el intervalo que comprende la colocación de la tercera pesa a la quinta pesa? ¿Cómo se determina el trabajo realizado en cualquier intervalo? ¿Qué representa geométricamente el trabajo realizado?	Magnitud, gravedad, peso, deformación, fuerza, constante de la fuerza k, distancia, gráfica. -Lenguaje figural: ¿Qué representa geométricamente el trabajo realizado? **Emergentes** -Lenguaje natural: Área.	magnitudes, gráfica de una función. **Emergentes** - Conceptos: Variable dependiente, variable independiente, trabajo como el área bajo la curva. - Procedimientos: La actividad consiste en verificar la constante de fuerza de un resorte utilizando diferentes masas, por lo que para el ejercicio necesitaremos lo siguiente: Un soporte fijo, Resorte, Vernier, pesas. Primero colocamos el resorte en el soporte y verificamos la longitud del mismo, luego vamos anexando las pesas de tal manera que nos den el peso solicitado, verificamos cuánto se alargó desde su posición original. Ahora graficaremos la fuerza *(kg)* en función del desplazamiento (m). Realizamos un ajuste en GeoGebra para determinar la función que mejor representa los datos por medio del comando Ajustelineal. - Argumentos: área bajo la curva, $w = F.d$

Actividades de Desarrollo

ACTIVIDAD 1

Al finalizar la guerra de independencia en México, se estableció el precio por dólar de \$1.00 peso por \$1.00 dólar, a partir de esta fecha el peso comenzó a devaluarse (pérdida de valor de una moneda nacional frente a otra extranjera).

En los gobiernos de Adolfo López Mateos y Gustavo Díaz Ordaz no hubo inflación, por lo que el precio del peso mexicano mantuvo su valor con respecto al dólar \$12.50, tal como se muestra en la siguiente gráfica:

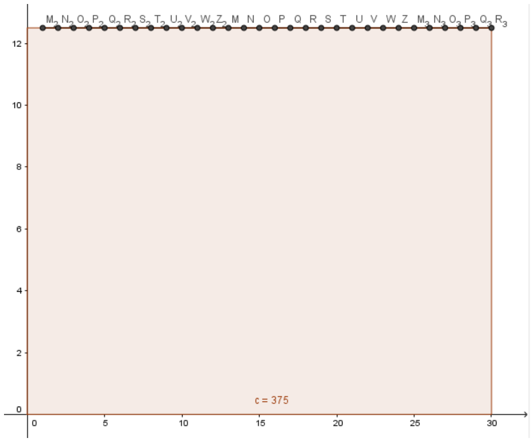


Figura 3.23

1. Si Francisco compró un dólar diario durante el mes de noviembre de 1960 (en gobierno de Adolfo López Mateos). ¿Cuánto gasto al final de mes?
$$Gasto = (30)(12.50) = \$375.00$$

2. Realiza la gráfica del gasto de los 30 días.

3. ¿Y en el periodo de1 12 al 15 de noviembre? Realiza el procedimiento algebraico y geométrico.
$$Gasto = (3)(12.50) = \$37.50$$

4. ¿Cómo determinas la cantidad que pago en un periodo determinado?
$$g(x) = 12.5x$$

5. ¿Que representa geométricamente el pago?

   Como el área bajo la curva

ACTIVIDAD 2

El peso mexicano ha sufrido varias devaluaciones a lo largo de su historia, en fechas recientes las elecciones a presidente de los Estados Unidos de América, trajo una gran volatilidad en el precio del dólar, a continuación, se presenta un gráfico con el comportamiento del dólar en el mes de noviembre de 2016, fecha en la cual se llevaron a cabo dichas elecciones.

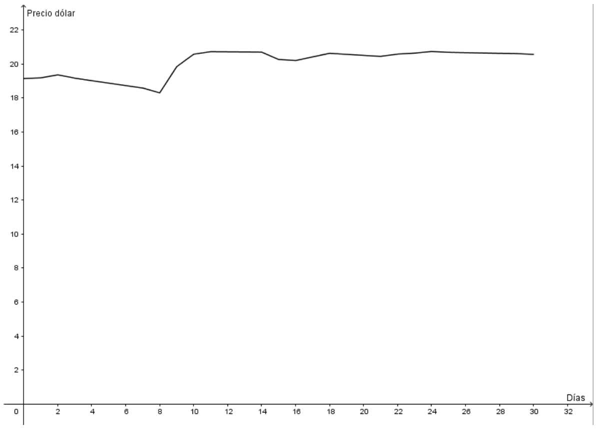


Figura 3.24

Como puedes darte cuenta, el cálculo para determinar el gasto al comprar un dólar diario durante un mes ya no es tan sencillo, dado que el precio se encuentra variando constantemente.

Con apoyo del applet de GeoGebra Devaluación del dólar encuentra el gasto que tendríamos al comprar un dólar diario durante el mes en cuestión, por medio de seccionar función en rectángulos bajo la curva.

E. Analizaremos el área seccionando nuestra función por debajo de curva.
   1) Primero con 5 rectángulos por debajo de la curva con el deslizador Inferior=5.

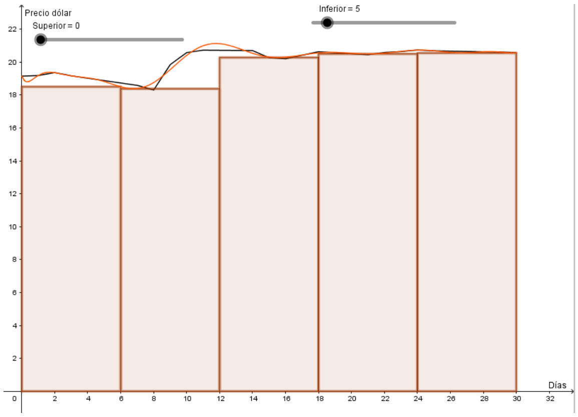


Figura 3.25

2) Encuentra el g(x) correspondiente al valor de dx de cada rectángulo colocando **Entrada** g(x), donde x es el valor inicial de cada rectángulo. El valor aparecerá en la Vista algebraica como a = 18.76, cada vez que realices este procedimiento borra (dando click derecho en a y seleccionando borrar) el resultado para no saturar de información el applet.
3) Encuentra el área de cada uno de rectángulos multiplicando la base de estos por su altura.
4) Realiza la suma de las áreas de los rectángulos para obtener una aproximación del gasto en un mes.
5) Repetimos del paso 1 al 4 con 10 rectángulos.

F. Ahora seccionaremos nuestra función en rectángulos por arriba de curva.

6) Primero con 5 rectángulos por debajo de la curva con el deslizador Superior=5.

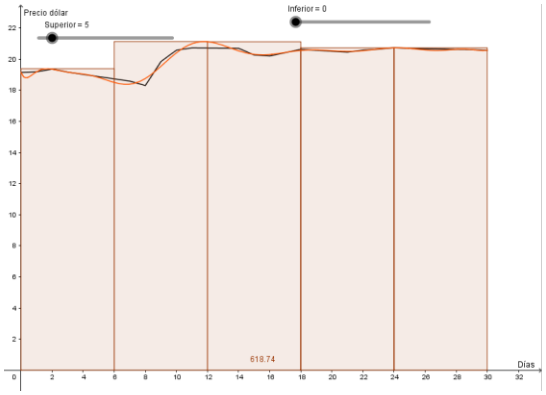


Figura 3.26

7) Encuentra el g(x) es más grande en cada rectángulo para obtener la altura de este, si se encuentra en $x = 12$, coloca en **Entrada** $g(12)$, borra el resultado de a para no saturar el applet.
8) Encuentra el área de cada uno de rectángulos multiplicando la base de estos por su altura.
9) Realiza la suma de las áreas de los rectángulos para obtener una aproximación del gasto en un mes.
10) Repetimos del paso 1 al 4 con 10 rectángulos.

G. Volvamos con el deslizador Inferior, que secciona nuestra función en rectángulos por debajo de la curva.

3) Ponemos el deslizador Inferior = 20 y tomamos el valor que aparece en vista algebraica Sumainf que nos da la suma de las áreas de los 20 rectángulos.

4) Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador Inferior = 30, 40 y 50. Llenando la tabla con los datos recabados.

H. Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador Superior, que secciona nuestra función en rectángulos por arriba de la curva.

   3) Ponemos el deslizador Superior = 20 y tomamos el valor que aparece en vista algebraica Sumasup que nos da la suma de las áreas de los 20 rectángulos.
   4) Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador Superior = 30, 40 y 50. Llenando la tabla con los datos recabados.

Tabla 3.7

Número de rectángulos	Suma de áreas de rectángulos por debajo de la curva	Suma de áreas de rectángulos por arriba de la curva
5	568.17	598.07
10	575.56	592.38
20	579.34	588.13
30	580.62	586.67
40	581.31	584.96
50	581.78	585.54

Entonces el gasto total que realizaremos en este mes se encuentra entre la suma de áreas de rectángulos por debajo de la curva y la suma de rectángulos por arriba de la curva.

$$\underline{g} \leq g \leq \overline{g}$$

$$581.78 \leq g \leq 585.54$$

ACTIVIDAD 3

A Usain Bolt corredor de 100 metros planos y poseedor del récord mundial de esta disciplina; a continuación, se presenta una tabla de datos de la velocidad en función del tiempo:

Tabla 3.8

Tiempo (s)	Velocidad $\left(\frac{m}{s}\right)$

0	0
1.85	5.41
2.87	9.80
3.78	10.90
4.65	11.40
5.50	11.70
6.32	12.10
7.14	12.10
7.96	12.10
8.79	10.24
9.69	10.32

A partir de estos realizamos la gráfica correspondiente:

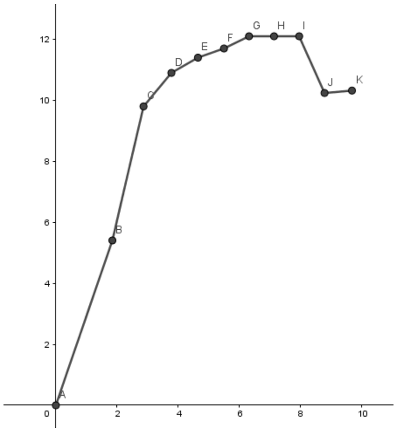


Figura 3.27

Ahora realizamos un ajuste en GeoGebra a los puntos para obtener una función que se aproxime a los datos.

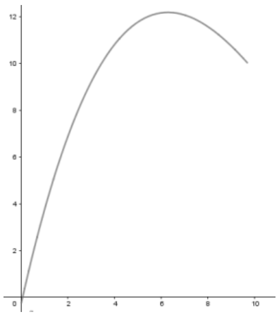


Figura 3.28

Tenemos la función $V(x) = 0.01x^3 - 0.48x^2 + 4.47x - 0.23$ en el intervalo [0, 9.69], que modela la velocidad en función del tiempo, para obtener la posición tenemos que la distancia $d = v.t$ cuando la velocidad es constante, para lo cual seccionaremos en rectángulos la función y sumamos sus áreas para obtener una aproximación al área real.

1. ¿Cuál será el área si seccionamos la función por debajo de la curva en 5 rectángulos?

$$d = 75.42m$$

2. ¿Cuál es el área bajo la curva si seccionamos la función en 5 rectángulos por arriba de la curva?

$$d = 83.73m$$

3. Ahora realiza el mismo procedimiento para 10 rectángulos.

$$\overline{d} = 97.80\ m$$
$$\underline{d} = 87.73\ m$$

4. ¿Y para 20 rectángulos?

$$\overline{d} = 94.59\ m$$
$$\underline{d} = 87.54\ m$$

5. ¿Qué puedes deducir a partir de estos datos?
   Que la distancia recorrida está entre 87.54 m y 94.59 m

Tabla 3.9 Prácticas matemáticas de las actividades de desarrollo

Prácticas operativas y discursivas	Lenguaje (objetos ostensivos)	Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos (objetos no ostensivos)
Actividad 1 **Enunciados:** Si Francisco compró un dólar diario durante el mes de noviembre de 1960 (en gobierno de Adolfo López Mateos). ¿Cuánto gasto al final de mes? Realiza la gráfica del gasto de los *30* días. ¿Y en el periodo de1 12 al 15 de noviembre? Realiza el procedimiento algebraico y geométrico. ¿Cómo determinas la cantidad que pago en un periodo determinado? ¿Qué representa geométricamente el gasto?	**Intervinientes** -Lenguaje natural: gráfica, gasto, procedimiento algebraico y geométrico. -Lenguaje figural: Representa la distancia recorrida en la gráfica **Emergentes** -Lenguaje natural: Área.	**Intervinientes** -Conceptos: Función, dominio, rango, multiplicaciones de dos magnitudes, gráfica de una función constante. **Emergentes** • Conceptos: Variable dependiente, variable independiente, gasto como el área bajo la curva. • Argumentos: área bajo la curva, $gasto = precio\ x\ días$
Actividad 2 **Enunciados:**	**Intervinientes** -Lenguaje natural: Gasto, gráfica.	**Intervinientes** -Conceptos: Función, dominio, rango, multiplicaciones de dos

Encuentra el gasto que tendríamos al comprar un dólar diario durante el mes de noviembre de 2016.	-Lenguaje figural: Seccionar la función por debajo de la curva. **Emergentes** -Lenguaje natural: Área bajo la curva.	magnitudes, gráfica de una función. **Emergentes** • Conceptos: Variable dependiente, variable independiente, gasto como el área bajo la curva. • Procedimientos: I. Analizaremos el área seccionando nuestra función por debajo de curva. 1) Primero con 5 rectángulos por debajo de la curva con el deslizador $Inferior = 5$. 2) Encuentra el valor $g(x)$ correspondiente al valor de dx de cada rectángulo colocando Entrada *g(x)*, donde *x* es el valor inicial de cada rectángulo. El valor aparecerá en la Vista algebraica como $a = 18.76$, cada vez que realices este procedimiento borra (dando click derecho en a y seleccionando borrar) el resultado para no saturar de información el applet. 3) Encuentra el área de cada uno de rectángulos multiplicando la base de estos por su altura. 4) Realiza la suma de las áreas de los rectángulos para obtener una

		aproximación del gasto en un mes. 5) Repetimos del paso 1 al 4 con *10* rectángulos. I. Ahora seccionaremos nuestra función en rectángulos por arriba de curva. 1) Primero con *5* rectángulos por debajo de la curva con el deslizador $Superior = 5$. 2) Encuentra el *g(x)* es más grande en cada rectángulo para obtener la altura del mismo, si se encuentra en $x = 12$, coloca en Entrada *g(12)*, borra el resultado de a para no saturar el applet. 3) Encuentra el área de cada uno de rectángulos multiplicando la base de estos por su altura. 4) Realiza la suma de las áreas de los rectángulos para obtener una aproximación del gasto en un mes. 5) Repetimos del paso 1 al 4 con *10* rectángulos. Volvamos con el deslizador Inferior, que secciona nuestra función en rectángulos por debajo de la curva. 1) Ponemos el deslizador $Inferior = 20$ y tomamos el valor que aparece en vista algebraica *Sumainf* que nos da

		la suma de las áreas de los *20* rectángulos. 2) Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador $Inferior = 30, 40$ y 50. Llenando la tabla con los datos recabados. 4. Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador Superior, que secciona nuestra función en rectángulos por arriba de la curva. 1) Ponemos el deslizador $Superior = 20$ y tomamos el valor que aparece en vista algebraica *Sumasup* que nos da la suma de las áreas de los *20* rectángulos. 2) Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador $Superior = 30, 40$ y 50. Llenando la tabla con los datos recabados. • Argumentos: área bajo la curva, $Gasto = precio\ x\ días$
Actividad 3 **Enunciados:** ¿Cuál será el trabajo realizado al colocar la primera pesa de $100\ g$? ¿Cuál será el trabajo realizado por el resorte con todas las pesas? ¿Cuál será el trabajo realizado en el intervalo que comprende la	**Intervinientes** -Lenguaje natural: Magnitud, gravedad, peso, deformación, fuerza, constante de la fuerza *k*, distancia, gráfica. -Lenguaje figural: ¿Qué representa geométricamente el trabajo realizado? **Emergentes**	**Intervinientes** -Conceptos: Función, dominio, rango, multiplicaciones de dos magnitudes, gráfica de una función. **Emergentes** • Conceptos: Variable dependiente, variable independiente, trabajo como el área bajo la curva. • Procedimientos: La actividad consiste en verificar la constante de fuerza de un resorte

colocación de la tercera pesa a la quinta pesa? ¿Cómo se determina el trabajo realizado en cualquier intervalo? ¿Qué representa geométricamente el trabajo realizado?	-Lenguaje natural: Área.	utilizando diferentes masas. Primero colocamos el resorte en el soporte y verificamos la longitud del mismo, luego vamos anexando las pesas de tal manera que nos den el peso solicitado, verificamos cuanto se alargó desde su posición original. Ahora graficaremos la fuerza (kg) en función del desplazamiento (m). Realizamos un ajuste en GeoGebra para determinar la función que mejor representa los datos por medio del comando $Ajustelineal$. - Argumentos: área bajo la curva, $w = F.d$

Actividades de Cierre

ACTIVIDAD 1

El departamento de producción de la empresa Plásticos S.A. desea elaborar cestos para ropa; los modelos aceptados fueron los siguientes y para su diseño se utilizó el software GeoGebra al girar una función sobre el eje x.

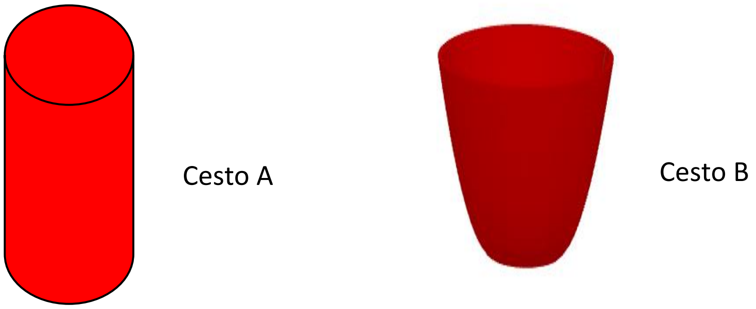


Figura 3.29

Para el diseño del cesto A primero hacemos un segmento de una recta con $y = 2$ en el intervalo [1,5] la cual haremos girar sobre el eje x para generar un cilindro.

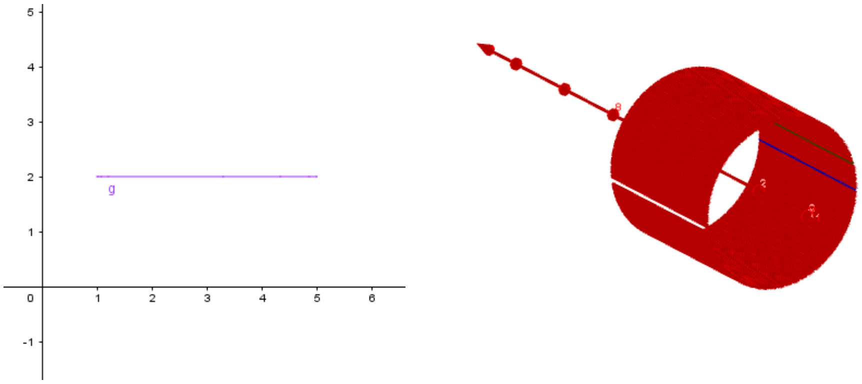


Figura 3.30

4. ¿Cuál es el radio del cilindro?

$$radio = 2$$

5. ¿Cómo obtuviste el radio?

   Es f(x)

6. ¿Cuál es el volumen del cilindro?

   $v = \pi r^2 h$
   $v = \pi(2)^2(4)$
   $v = 50.26\, m^3$

Para el diseño del cesto B tomaremos un segmento de la curva $y = \sqrt{x} + 1$ en el intervalo [0,4] que haremos girar sobre el eje x para generar el sólido en revolución que deseamos.

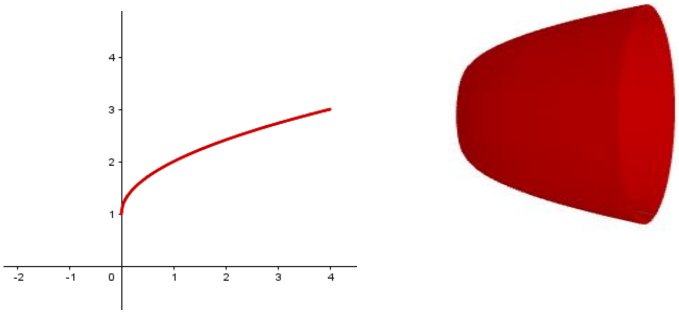


Figura 3.31

Para este caso el radio está cambiando constantemente.

11. ¿Cómo puedes determinar el radio en $x = 0$?

$$r = 1$$

12. ¿Y, para $x = 4$?

$$r = 3$$

13. ¿Cómo se puede calcular el radio para cualquier punto de x?

$$r = f(x)$$

$$y = \sqrt{x} + 1$$

Segmentaremos el sólido de revolución por debajo de la curva de la siguiente manera:

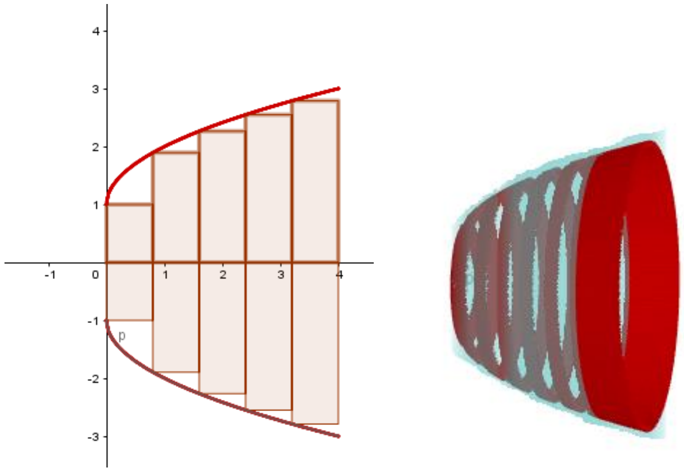


Figura 3.32

14. ¿Qué figuras se forman al hacer esta segmentación?

    Pequeños cilindros

15. ¿Qué representa el dx?

    La altura de los cilindros

16. ¿Qué representa el f(x)?

    El radio

17. ¿Cómo podemos tener una aproximación al volumen del cesto?

    Con la suma de los volúmenes de los cilindros

18. Determina la ecuación que modele el volumen de cada segmento.

$$v = \pi[f(x)]^2 dx$$

19. Obtén una aproximación al volumen segmentando el sólido por debajo de la curva en 5, 10, 15 y 20 partes.

Tabla 3.10

Número de rectángulos	Suma de las áreas

5	19.19
10	20.96
15	21.54
20	21.83

20. Obtén una aproximación al volumen segmentando el sólido por arriba de la curva en 5, 10, 15 y 20 partes.

Tabla 3.11

Número de rectángulos	Suma de las áreas
5	25.59
10	24.16
15	24.81
20	23.43

ACTIVIDAD 2

De la misma manera que tenemos los datos para determinar la velocidad de Usain Bolt en función del tiempo, tenemos los datos correspondientes a la aceleración, los cuales se describen en la siguiente tabla:

Tabla 3.12

Tiempo (s)	Aceleración $(\frac{m}{s^2})$
0	0
1.85	2.91
2.87	4.30
3.78	1.22
4.65	0.57

5.50	0.35
6.32	0.48
7.14	0
7.96	0
8.79	-0.13
9.69	-1.04

Al realizar la gráfica obtenemos los siguiente:

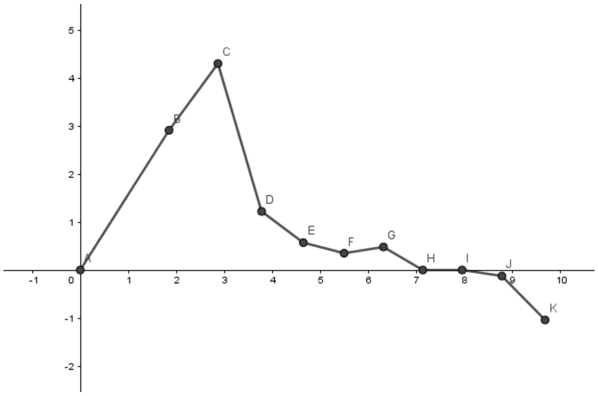


Figura 3.33

Al realizar un ajuste con GeoGebra obtuvimos una función en partes, de la siguiente manera:

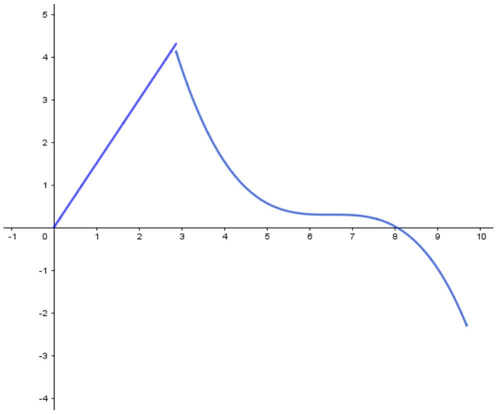


Figura 3.34

$$a(x) = \begin{cases} 1.5x & si\ 0 \leq x \leq 2.87 \\ -0.08(x-6.5)^3 + 0.3 & si\ 2.87 < x \leq 9.69 \end{cases}$$

Realiza una segmentación en rectángulos bajo la curva con bases iguales y contesta lo siguiente:

1. ¿Cómo se determina la velocidad si tenemos la aceleración y el tiempo?

   $$v = a.t$$

2. ¿Qué representa geométricamente la velocidad en nuestra gráfica?

   El área bajo la curva

3. ¿Cómo determinas la altura de los rectángulos en el intervalo [0 , 2.87]?

   Con a(x)

4. ¿Cómo determinas la altura en el siguiente intervalo (2.87 , 9.69]?

   Con $a(x) = -0.08(x-6.5)^3 + 0.3$

5. ¿Cuál será la velocidad promedio de la carrera si seccionamos el área bajo la curva, por debajo de la curva en 20 rectángulos?

   $$v = 7.10\, {}^{m}/_{s}$$

6. ¿y si lo hacemos por arriba de la curva?

   $$v = 11.04\, {}^{m}/_{s}$$

7. ¿Qué pasa con el área que se encuentra debajo del eje de las abscisas?

   Es negativa

Tabla 3.13 Prácticas matemáticas de actividades de cierre

Prácticas operativas y discursivas	Lenguaje (objetos ostensivos)	Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos (objetos no ostensivos)
Actividad 1 **Enunciados:** ¿Cuál es el radio del cilindro? ¿Cómo obtuviste el radio? ¿Cuál es el volumen del cilindro? ¿Cómo puedes determinar el radio en $x = 0$? ¿Y, para $x = 4$? ¿Cómo se puede calcular el radio para cualquier punto de x? ¿Qué figuras se forman al hacer esta segmentación? ¿Qué representa el dx? ¿Qué representa el $f(x)$? ¿Cómo podemos tener una aproximación al volumen del cesto? Determina la ecuación que modele el volumen de cada segmento.	**Intervinientes** -Lenguaje natural: Radio, Volumen, Función, gráfica, modelar, Sólido de revolución, aproximación -Lenguaje figural: ¿Cómo se puede calcular el radio para cualquier punto de x? **Emergentes** -Lenguaje natural: Volumen de un sólido de revolución, dx, $f(x)$	**Intervinientes** -Conceptos: Función, dominio, rango, multiplicaciones de dos magnitudes, gráfica de una función, sólido de revolución, volumen, cilindro. **Emergentes** • Conceptos: Variable dependiente, variable independiente, • Procedimientos: Para el diseño del cesto A primero hacemos un segmento de una recta con $y = 2$ en el intervalo [1,5] la cual haremos girar sobre el eje x para generar un cilindro. Para el diseño del cesto B tomaremos un segmento de la curva $y = \sqrt{x} + 1$ en el intervalo [0,4] que haremos girar sobre el eje x para generar el sólido en revolución que deseamos. Obtén una aproximación al volumen segmentando el sólido por debajo de la curva en 5, 10, 15 y 20 partes. • Argumentos: Volumen del solido de revolución $v = \pi[f(x)]^2dx$

Obtén una aproximación al volumen segmentando el sólido por debajo de la curva en $5, 10, 15\ y\ 20$ partes.		
Actividad 2 **Enunciados:** ¿Cómo se determina la velocidad si tenemos la aceleración y el tiempo? ¿Qué representa geométricamente la velocidad en nuestra gráfica? ¿Cómo determinas la altura de los rectángulos en el intervalo $[0\,,2.87]$? ¿Cómo determinas la altura en el siguiente intervalo $(2.87\,,9.69]$? ¿Cuál será la velocidad promedio de la carrera si seccionamos el área bajo la curva, por debajo de la curva en 20 rectángulos? ¿Y si lo hacemos por arriba de la curva? ¿Qué pasa con el área que se encuentra	**Intervinientes** -Lenguaje natural: Magnitud, velocidad, tiempo, aceleración, altura, rectángulo, gráfica, eje de las abscisas. -Lenguaje figural: ¿Cómo determinas la altura de los rectángulos en el intervalo $[0\,,2.87]$? ¿Cómo determinas la altura en el siguiente intervalo $(2.87\,,9.69]$? ¿Qué pasa con el área que se encuentra debajo del eje de las abscisas?	**Intervinientes** -Conceptos: Función, dominio, rango, multiplicaciones de dos magnitudes, gráfica de una función. **Emergentes** • Conceptos: Variable dependiente, variable independiente, velocidad como el área bajo la curva. • Procedimientos: Al realizar la gráfica de aceleración contra tiempo obtenemos los siguiente. Al realizar un ajuste con GeoGebra obtuvimos una función en partes, de la siguiente manera: $a(x) = \left\{\begin{matrix} 1.5x & si\ 0 \le x \le 2.87 \\ -0.08(x-6.5)^3+0.3 & si\ 2.87 < x \le 9.69 \end{matrix}\right\}$ Argumentos: área bajo la curva, $v = a.t$

debajo del eje de las abscisas?	**Emergentes** -Lenguaje natural: Área.	

3.5 Criterios de idoneidad didáctica

En la propuesta didáctica se utilizará los criterios de idoneidad didáctica y sus componentes para realizar una valoración a priori sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje que se desea promover, al llevar a cabo la intervención didáctica de nuestra propuesta se realizará una nueva valoración de estos criterios para realizar ajustes a nuestra propuesta. Como lo señalamos en el capítulo 2, los criterios de idoneidad didáctica se dividen en 6 dimensiones y aquí los estudiamos con mayor detalle, incorporando en cada caso los descriptores correspondientes.

IDONEIDAD EPISTÉMICA

Se refiere al grado de representatividad de los contenidos a los significados institucionales implementados del sistema de referencia que en este caso es el Nuevo Modelo Educativo, el análisis se realiza a los objetos matemáticos primarios por medio de indicadores de idoneidad epistémica.

Situaciones problema:

Indicador: Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación.

En las actividades propuestas se muestran actividades contextualizadas que abordan temas como áreas, volúmenes, trabajo mecánico, velocidad, aceleración, precio del dólar, que son una muestra representativa de aplicación de problemas que se sugieren en el programa de la asignatura de Cálculo Integral, abordando conceptos como la aproximación del área bajo la curva por medio de la suma de rectángulos.

El diseño de las situaciones problema se realizó atendiendo al cuadro de contenidos de la asignatura de Cálculo Integral que se describe en el campo disciplinar de matemáticas del nuevo modelo educativo para educación media superior, el cual se describe a continuación:

Eje

Pensamiento variacional.

Componentes

Cambio y acumulación: Elementos del Cálculo Integral.

Contenido Central

Aproximación y cálculo del área bajo la curva por métodos elementales (Método de los rectángulos y método de los trapecios).

Contenidos específicos

- La gráfica como descripción del cambio. ¿Cómo interpreto gráficamente el crecimiento lineal? ¿Qué caracteriza al crecimiento no lineal?
- Aproximación del área bajo curvas conocidas, utilice curvas que representan crecimiento lineal y crecimiento no lineal.
- Comparación de aproximaciones. ¿Alguna es mejor?, ¿en qué circunstancias?
- Conjetura sobre expresiones generales del área bajo la curva (ejemplo el área bajo la gráfica de $f\ (x) = 1$ o bajo $f\ (x) = x$, así como el área bajo $f\ (x) = x^2$, con x entre 0 y 1, o entre 1 y 2, o en general entre $a\ y\ b$, donde $a < b$). Usa el reconocimiento de patrones.
- Interpretación del área según el fenómeno (ejemplo, el área de la función velocidad se interpreta como la distancia recorrida) ¿Por qué las medidas de la acumulación resultan útiles para el tratamiento de diferentes situaciones contextuales?

Indicador: Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización).

En este caso no se cumplió con este indicador, ya que el diseño se centró en crear situaciones atractivas para el estudiante, donde pudieran obtener los datos necesarios para completar su actividad en un laboratorio o mediante la manipulación de un software.

Lenguajes:

Indicador: Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre las mismas.

Uno de objetivos de este trabajo de tesis es promover el desarrollo de actividades didácticas donde se utilicen diferentes representaciones semióticas de la integral, por lo que se hacen transformaciones a distintas representaciones de la integral, tales como, gráficas, expresiones algebraicas y lenguaje natural; el uso del software dinámico GeoGebra ayuda en gran medida en la realización de estas transformaciones.

El uso de distintos lenguajes va desde la toma e interpretación de datos obtenidos en el laboratorio, su transformación en una función para modelar dicha situación hasta el manejo de esta función y el uso de la tecnología por medio de GeoGebra para simplificar algunos pasos repetitivos.

En el diseño de las actividades podemos encontrar el uso de diferentes lenguajes para introducir la problemática a abordar, por ejemplo, en la actividad del dólar comienza con una gráfica sobre el comportamiento de este en un periodo determinado, en la actividad de la velocidad se proporciona una tabla con los datos en varios segmentos de la carrera de Usain Bolt y a partir de estos se hacen las transformaciones necesarias para poder manipular dicha información, entre otras.

Indicador: Nivel de lenguaje adecuado a quien se dirige.

El diseño de las actividades se realizó tomando como base los conocimientos que poseen los estudiantes de Cálculo Integral, recuperando saberes previos, tales como, la creación de tablas de datos, gráficas, el desarrollo de ecuaciones algebraicas a partir de situaciones en contextos diversos, las derivadas de una función, etcétera.

El uso de la tecnología es primordial en la realización de este trabajo por medio del uso del software de geometría dinámica GeoGebra, que le permite al estudiante manipular los datos para mover los intervalos a estudiar, entre otras, haciendo más fácil la comprensión de los conceptos matemáticos emergentes.

Indicador: Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación.

Todas las actividades de la secuencia didáctica cuentan con situación donde el estudiante debe interpretar datos y hacer transformaciones a expresiones matemáticas, se manejan tablas de recolección de datos en donde el alumno debe interpretar lo mismo y hacer las transformaciones a gráficas y expresiones algebraicas que modelen dicha situación.

Al tratarse de problemas de acumulación, es necesario que puedan interpretar gráfica y analíticamente.

Conceptos:

1ndicador: ¿Las definiciones, procedimientos y proposiciones están clara y correctamente enunciados, y adaptados al nivel educativo al que se dirigen?

> En algunas actividades, como la actividad del precio del dólar se les da un procedimiento a seguir, para que puedan emerger los conceptos que se buscan, aquí es deseable que el estudiante ya haya realizado alguna práctica en GeoGebra.

Indicador: ¿Se presentan las definiciones, procedimientos y proposiciones fundamentales del tema según el significado de referencia, están clara y correctamente enunciados, y en el nivel educativo a que se dirigen?

En la propuesta didáctica se realizan procedimientos con el fin de que el estudiante pueda desarrollar sus conocimientos y que emerjan de manera natural los conceptos matemáticos, tales como el área bajo la curva en los procesos de acumulación o la integral definida. Además de utilizar el uso de GeoGebra para disminuir los tiempos, estableciendo procesos muy específicos para enfocar el esfuerzo en el aprendizaje de los conceptos claves del Cálculo Integral.

Además, se toman conocimientos que el estudiante ya posee de materias que curso en semestres anteriores como Cálculo Diferencial, para desarrollar la inversa de la derivada, el uso de intervalos de una función, entre otros.

Definiciones, proposiciones y procedimientos

Indicador: Las definiciones y procedimientos son claros y correctos y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen.

No se muestran definiciones en las actividades, se pretende que el estudiante llegue al concepto matemático por medio de la construcción del conocimiento, en cuanto a los procedimientos se muestran en algunas actividades, por ejemplo en el precio del dólar en el cual utilizamos el software GeoGebra donde se muestran los pasos a seguir en el applet para que el estudiante pueda hacer uso de esta herramienta y simplificar algunos procedimientos y enfocarnos en el desarrollo de nuevos conceptos matemáticos y dejar por un lado operaciones repetitivas.

Indicador: Se presentan enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado.

Los temas tratados en la secuencia didáctica se manejan procedimientos ya utilizados por los estudiantes en asignaturas que cursaron en semestres anteriores, como el llenado de tablas, presentar una función por medio de una expresión algebraica, realizar gráficas, calcular inversas de las derivadas, aproximar el área bajo curva por medio de la suma de áreas de rectángulos por debajo y por arriba de la curva.

Los enunciados que se presentan son de temas diversos, algunos de ellos de su vida cotidiana, intereses en común, temas relacionados con otras asignaturas cursadas en el mismo semestre y con un lenguaje adecuado a los conocimientos del estudiante.

Indicador: Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos.

Todas las actividades de la secuencia didáctica propuesta van encaminadas a que el estudiante pueda generar el concepto de la integral por medio de la noción geométrica y analítica, como la segmentación de la función en rectángulos por debajo y por encima de curva y la suma de sus áreas se aproxima al valor real del área bajo la curva al aumentar el número de rectángulos.

Argumentos

Indicador: Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo que se dirigen.

En las actividades se plantea que estudiante explique sus resultados, argumentado los valores obtenidos y su relación con las gráficas, muchas veces apoyados con el software GeoGebra. Que el estudiante se dé cuenta que el área bajo la curva está ligada con los valores que se buscan.

Indicador: Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.

En cada actividad de la secuencia didáctica se realizan una serie de preguntas que van encaminadas a que el estudiante pueda argumentar los resultados que obtuvo al realizar la misma, por ejemplo, en la actividad donde se aplica una fuerza constante a un objeto y este se desplaza cierta cantidad de metros, se le pide que argumente que representa geométricamente el trabajo realizado por el objeto.

Relaciones

Indicador: Los objetos matemáticos se relacionan y conectan entre sí.

Dado que las actividades propuestas van de una representación semiótica a otra, es de suma importancia que los objetos matemáticos utilizados se conecten entre sí, la interpretación de una gráfica debe coincidir con la ecuación de la función que modela esa situación y con los datos obtenidos en una tabla. En la actividad de la ley de Hooke, el estudiante trabaja en el laboratorio de Física y obtienen los datos que permiten realizar una tabla, con esta tabla realizan una gráfica y a partir de ésta obtienen la ecuación que modela dicha situación, para realizar estas transformaciones el alumno debe emplear varios objetos matemáticos y con estos puedan surgir y reforzar los objetos a desarrollar en la actividad.

Indicador: Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas.

En la actividad de cierre de los cestos se puede observar que al segmentar la función se obtienen pequeños cilindros en el cual la suma de estos volúmenes nos da el volumen total aproximado de cada uno de los cestos, el estudiante llega a estas conclusiones a través de preguntas guiadas.

IDONEIDAD COGNITIVA

Para obtener un nivel alto en cuanto a la idoneidad cognitiva que expresa el grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, se analizó el apartad de aprendizajes esperado del cuadro de contenidos de la asignatura.

Aprendizajes esperados

- Aproxima el área bajo una curva mediante rectángulos inscritos, se mide o calcula el área de estos y se estima el valor del área bajo la curva.
- Compara los resultados de diversas técnicas de aproximación.
- Acota el valor del área bajo la curva, aproximando por exceso y por defecto. Usan ambos métodos de aproximación: rectángulos y trapecios.
- Calcula el área debajo de curvas conocidas, como gráficas de funciones lineales, cuadráticas y cúbicas entre dos límites de integración.
- Interpreta por extensión o generalización, el área bajo la curva de gráficas de funciones trigonométricas básicas (seno y coseno).

El análisis de la idoneidad cognitiva se realiza por medio del cumplimiento de sus componentes que son:

- Componentes previos
  Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica

- Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales.

- Aprendizaje
  Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica: situaciones, lenguajes, conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos y relaciones entre los mismos.

Esto se hace por medio del cumplimiento de los siguientes indicadores

Conocimientos previos

Indicador: Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio).

La secuencia didáctica está diseñada para alumnos de sexto semestre de educación media superior, por lo que ya tiene conocimientos de álgebra, geometría plana, geometría analítica, precálculo y cálculo diferencial, ya han manejado tablas, gráficas de funciones, expresiones algebraicas, ecuaciones, entre otras cosas que necesitan para realizar las actividades.

Indicador: Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.

Los conocimientos pretendidos se encuentran en la zona de desarrollo próximo del estudiante, ya que como mencionamos antes, los estudiantes tienen los conocimientos requeridos para que, al utilizar dichos objetos matemáticos, puedan emerger nuevos conceptos.

Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales

Indicador: Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.

En el caso de las actividades de la secuencia nos enfocamos en el desarrollo de la noción intuitiva de integral y no se incluyen actividades de refuerzo.

Indicador: Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes.

Se favorece el logro de los estudiantes, al utilizar diferentes representaciones semióticas de la integral, partiendo de sus conocimientos previos, con actividades muy sencillas, empezando con funciones constantes o funciones lineales y a partir de ahí, subir el nivel hasta llegar a un proceso, el cual es aplicable a cualquier función.

IDONEIDAD INTERACCIONAL

El diseño de las actividades se realizó teniendo en cuenta los conflictos semióticos que se pueden presentar al expresar el área bajo la curva, recalcando que es un recurso didáctico y no representa en sí, problemas que sólo involucren áreas. Los componentes que analizar son:

- Interacción docente-alumno
- Interacción entre alumnos
- Autonomía
- Evaluación formativa

Interacción docente-alumno

El docente hace una presentación del tema, donde explica que se muestran una serie de situaciones, las cuales se pueden llevar procesos en los que el área bajo la curva ayuda a su resolución. Resuelve sus dudas y comentarios en cualquier momento de la actividad, enfatizando los conceptos clave de tema, buscando que los estudiantes lleguen a consenso mediante la interacción de los alumnos, intentando que la mayoría de ellos participe.

Interacción entre alumnos

Algunas actividades se encuentran diseñadas para trabajar en equipo, un ejemplo es la actividad “La ley de Hooke” que se realiza en laboratorio, manipulando instrumentos de medición y recolectando datos para obtener la función con la que trabajarán para determinar el trabajo mecánico, de igual manera en la actividad de “Precio del dólar” que se realiza en el laboratorio de informática, se manejan grupo de 3 personas, ya que el equipo disponible no es suficiente para todos los estudiantes, lo cual les permite interactuar y presentar sus argumentos matemáticos para generar conjeturas y respuestas en la actividad.

Autonomía

Algunas actividades, sobre todo las actividades de inicio se realizan individualmente, para que el estudiante pueda utilizar sus conocimientos previos para presentar soluciones, resolver problemas y poder expresarlos matemáticamente en cada actividad, esto fomenta el surgimiento de los nuevos conceptos matemáticos que se plantean en el programa.

IDONEIDAD MEDIACIONAL

El diseño de las actividades se tomó en cuenta los recursos materiales disponibles que tienen los planteles de Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, por lo que se diseñaron actividades en software libre GeoGebra, así como material de laboratorio de física para llevar a cabo actividades, tal como: Soporte, pesas, resortes, vernier. Los componentes que estudiar en este apartado son:

- Recursos materiales (Manipulativos, calculadoras, ordenadores).
- Número de alumnos, horario y condiciones del aula.
- Tiempo (De enseñanza colectiva /tutorización; tiempo de aprendizaje).

Recursos materiales

Indicador: Se usan materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al contenido pretendido.

Se utiliza el software libre de geometría dinámica GeoGebra, por lo que la actividad se llevará a cabo en el aula de informática para el grupo 1, para el grupo 2 se trabajará en la aplicación del celular y para el grupo 3 se realizará la actividad en un aula por medio de la presentación por un proyector, en el cual el aplicador manipula el software GeoGebra, por medio de las indicaciones de la actividad.

Indicador: Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.

Como ya se ha comentado el uso de tecnologías de información es esencial en el desarrollo de las actividades, favoreciendo la visualización de los modelos utilizados en diferentes representaciones semióticas como el uso de gráficas, tablas, ecuaciones y lenguaje cotidiano.

Número de alumnos

Los grupos a los que se aplicará la actividad son grupos del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora con alrededor de 50 alumnos, que se refleja la realidad de las aulas con sobrepoblación. Se aplican en el horario de la clase de Cálculo Integral, por lo que la hora es la apropiada para llevar cabo la secuencia.

Tiempo

Indicador: El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida.

Las actividades están diseñadas para implementarse en tres sesiones de 50 minutos, el utilizar el software GeoGebra nos ayuda a simplificar procedimientos repetitivos, por lo que es posible implementar el total de las actividades en el tiempo pretendido.

Indicador: Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema.

En todas las actividades se presentan diferentes representaciones de la integral, ya sea por medio de la segmentación por rectángulos del área bajo la curva, la utilización de tablas y por medio de la suma de áreas de una función analíticamente.

Indicador: Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión.

Las actividades basan gran parte del tiempo de la actividad en la segmentación en rectángulos por debajo y por arriba de la curva, para que el estudiante obtenga una aproximación por medio de la suma de sus áreas en diferentes contextos, ya sea en física, sólidos de revolución, etcétera.

IDONEIDAD EMOCIONAL

Se realizaron actividades de campo, donde el alumno debe realizar una actividad en el laboratorio de Física para obtener los datos y determinar la función que modela dicha actividad y obtener la integral por medio de acumulación, en otra actividad se presentan datos del corredor Usain Bolt en la carrera que obtuvo el récord mundial en esta disciplina, además de temas de interés como el precio del dólar y la fabricación de recipientes, para que es estudiante se sienta motivado y vea el uso práctico de esta disciplina. En esta idoneidad se analizan los siguientes componentes:

- Intereses y necesidades
- Actitudes
- Emociones

Interese y necesidades

Indicador: Las tareas tienen interés para los alumnos.

Las actividades se realizarán en los grupos de formación propedéutica de Físico-matemático, por lo que se plantearon actividades de Física como la velocidad y aceleración de Usain Bolt, el trabajo mecánico realizado, la ley de Hooke en donde se realizará una actividad utilizando material de laboratorio para obtener los datos para modelar dicha situación, en economía con un tópico muy útil para el estudiante como el precio de dólar y la fabricación de recipientes para los alumnos que se encuentren interesados en ingresar a una ingeniería.

Indicador: Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.

Al utilizar contexto tan variados y que los alumnos pueden visualizar, se puede observar el uso de los conceptos matemáticos de la integral en diversas áreas como ingeniería y ciencias exactas.

Actitudes

Indicador: Se promueve la participación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc.

Al utilizar diferentes recursos didácticos como el uso del software GeoGebra de fácil manipulación y con la ventaja de no realizar a mano los procesos repetitivos, se fomenta que emerjan los conceptos matemáticos sin que el estudiante se pierda en los procesos, además de utilizar diversos materiales en el laboratorio de Física para modelar la situación.

IDONEIDAD ECÓLOGICA

Atendiendo a las exigencias del Nuevo Modelo Educativo que plantea el impulso a la transversalidad, se ubicaron contextos relacionados con otras áreas del conocimiento como Física y Economía para la presentación de una noción intuitiva de la integral. Los componentes que analizar son:

- Adaptación al currículo
- Apertura hacia la innovación educativa
- Adaptación socio-profesional y cultural
- Educación en valores
- Conexiones intra e interdisciplinares

Adaptación al currículo

Indicador: Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.

Como ya se mencionó el diseño de la secuencia didáctica se basó en el significado institucional de referencia, que en este caso es el programa de la Dirección General de Bachillerato (DGB), atendiendo al Nuevo Modelo Educativo, por lo que se busca desarrollar las competencias generales y disciplinares pertinente al tema de la integral.

Apertura hacia la innovación educativa

Indicador: Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva.

Las actividades, así como la justificación de este trabajo de tesis está sustentado en investigaciones sobre las complicaciones que tiene el estudiante en el cálculo integral y sus aplicaciones, tratando que se enfoque en los conceptos de la integral y su aplicación en la vida profesional.

Indicador: Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo.

Se utiliza el software de geometría dinámica GeoGebra en sus modalidades de aplicaciones para PC y para celular, lo cual facilita la realización de procedimientos repetitivos y ayuda a realizar cambios en los valores de la variable, sin utilizar lápiz y papel. El uso de la calculadora también es vital al realizar la actividad en el tiempo establecido; favoreciendo la comprensión de los conceptos matemáticos y no en los algoritmos de resolución de problemas estereotipados.

Adaptación socio-profesional y cultural

Los contenidos contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes ya que se manejan actividades en equipo y de diferentes ramas, en ellas la Física, Temas de ingeniería y Economía.

Conexiones intra e interdisciplinares

Los contenidos utilizados en la secuencia didáctica sólo se manejan actividades interdisciplinares que, al momento de hacer las transformaciones semióticas a ecuaciones, el tratamiento que se da es intra-matemático y el resultado se debe interpretar como la solución a una situación problema.

CAPÍTULO 4 ANALISIS A POSTERIORI

Como se señaló en el capítulo 2, para hacer una valoración de la propuesta y detectar posibles cambios a la secuencia didáctica, se hizo un análisis a posteriori, analizando las respuestas de los estudiantes, lo cual permitió hacer un contraste con el análisis a priori que diera pie a una evaluación de tres puntos importantes de la propuesta:

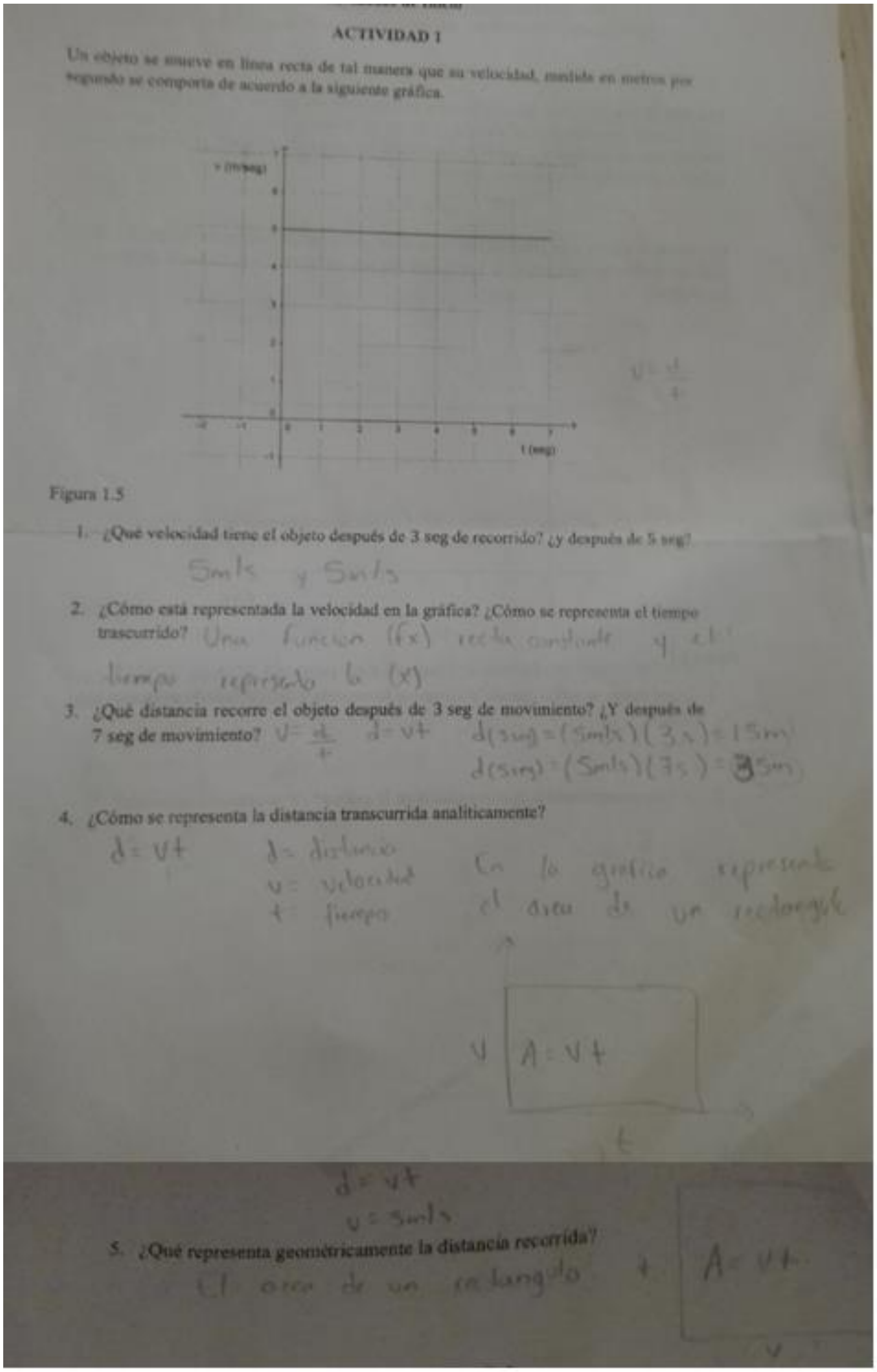
1. Verificar que efectivamente las actividades permiten la emergencia de los objetos matemáticos esperados.
2. Hacer una valoración de las idoneidades didácticas con el objetivo de hacer también las modificaciones correspondientes para mejorar el diseño.
3. Detectar si es necesario redactar de manera diferente algunos aspectos de las actividades propuestas, modificando las preguntas que dieran lugar a confusiones o proporcionaran información que causara dificultades.

4.1 Prácticas matemáticas desarrolladas por los estudiantes

En esta sección procedemos mostrando primero las respuestas de cada uno de los tres estudiantes seleccionados para nuestro estudio

Actividades de Inicio

Estudiante 1



ACTIVIDAD 1

Un objeto se mueve en línea recta de tal manera que su velocidad, medida en metros por segundo se comporta de acuerdo a la siguiente gráfica.

Figura 1.5

1. ¿Qué velocidad tiene el objeto después de 3 seg de recorrido? ¿y después de 5 seg?

5m/s y 5m/s

2. ¿Cómo está representada la velocidad en la gráfica? ¿Cómo se representa el tiempo trascurrido? Una funcion (fx) recta constante y el tiempo represento la (x)

3. ¿Qué distancia recorre el objeto después de 3 seg de movimiento? ¿Y después de 7 seg de movimiento? $V = \frac{d}{t}$ $d = vt$ $d(3seg) = (5m/s)(3s) = 15m$

$d(5seg) = (5m/s)(7s) = 35m$

4. ¿Cómo se representa la distancia transcurrida analíticamente?

$d = vt$

d = distancia
v = velocidad
t = tiempo

En la gráfica representa el area de un rectangulo

$d = vt$

$v = 5m/s$

5. ¿Qué representa geométricamente la distancia recorrida?

El area de un rectangulo

Tabla 4.1 Actividad 1

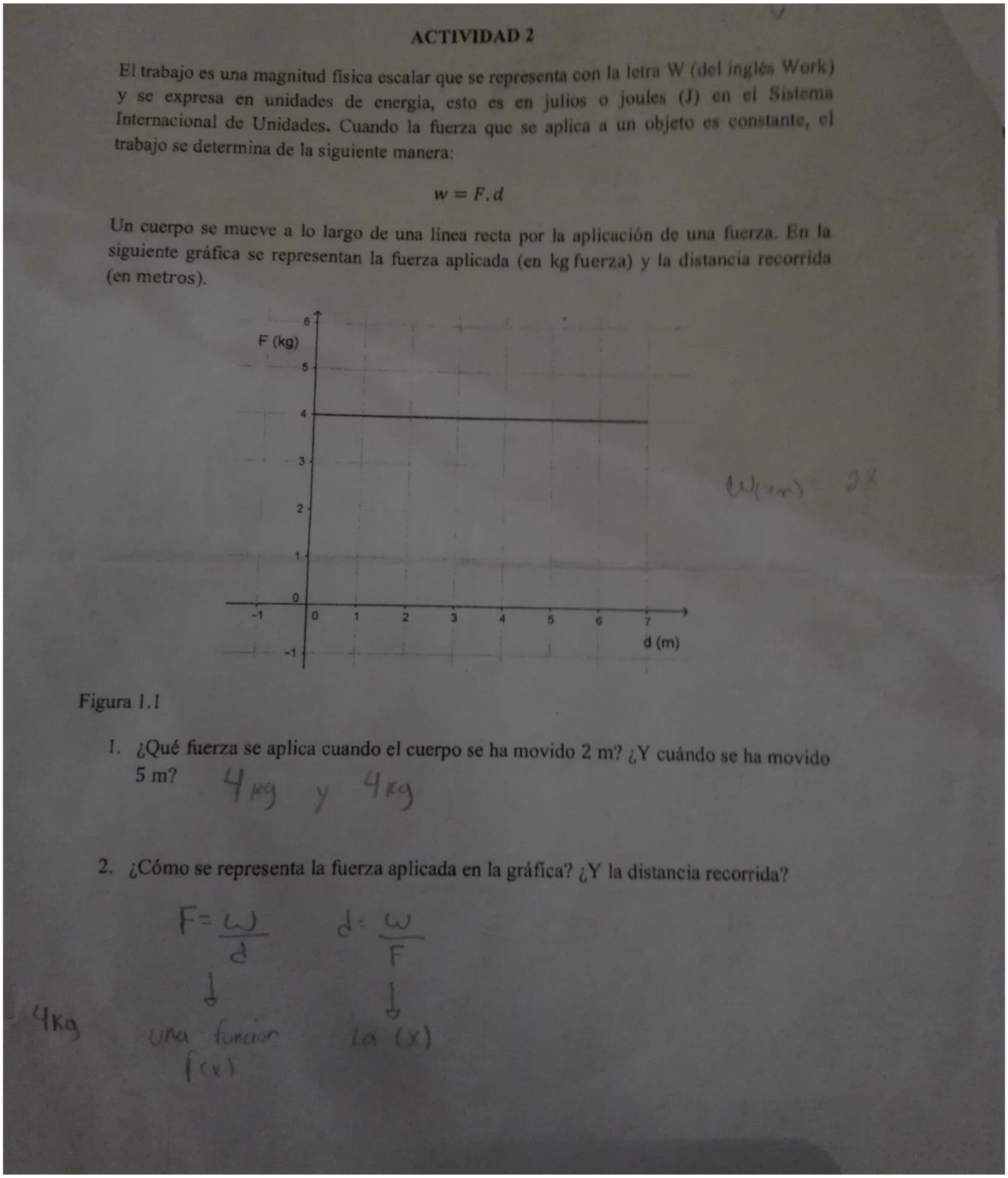
Lenguaje (objetos ostensivos)	Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos (objetos no ostensivos)
Reactivo 1 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Velocidad, tiempo, distancia, gráfica.	**Intervinientes** -Conceptos: Velocidad, tiempo
Reactivo 2 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Velocidad, tiempo, gráfica **Emergentes** -Lenguaje natural: Función f(x), recta y variable x	**Intervinientes** -Conceptos: Velocidad, gráfica. **Emergentes** • Conceptos: Variable dependiente, variable independiente, Función.
Reactivo 3 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Distancia, tiempo, movimiento.	**Intervinientes** -Conceptos: Distancia, tiempo, movimiento. **Emergentes** -Argumentos: $d = vt$ -Procedimientos: Cálculo de distancias recorridas $d(3s) = \left(5\frac{m}{s}\right)(3s) = 15m$ $d(7s) = \left(5\frac{m}{s}\right)(7s) = 35m$
Reactivo 4 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Distancia transcurrida.	**Intervinientes** -Conceptos: Distancia, tiempo, movimiento. **Emergentes** -Argumentos: $d = vt$
Reactivo 5	**Intervinientes**

Intervinientes -Lenguaje natural: Distancia. -Lenguaje figural: ¿Qué representa geométricamente la distancia recorrida? **Emergentes** -Lenguaje natural: Área	-Conceptos: Distancia, tiempo, movimiento. **Emergentes** -Conceptos: Área de un rectángulo -Argumentos: $d = vt$

Como puede observarse en la Tabla 4.1, el estudiante resolvió satisfactoriamente la actividad, rescatando sus conocimientos sobre el cálculo de distancias cuando conoce la velocidad del movimiento y, asimismo, identifica la distancia recorrida por el área de un rectángulo. Hasta esta parte podemos afirmar que las respuestas son satisfactorias en el sentido de que efectivamente aparecen en las respuestas todos los objetos matemáticos esperados en el análisis a priori.

También es pertinente destacar que en la versión que se usa aquí de las actividades de inicio, como describimos al presentar el diseño, las situaciones propuestas no sólo pretenden rescatar los conocimientos previos que son necesarios para el desarrollo de la secuencia, pues adicionalmente se formulan preguntas o cuestionamientos para ir generando las ideas de la nueva temática de estudio. En este caso nos referimos a ir introduciendo la idea de identificar gráficamente la distancia recorrida con el área de un rectángulo, idea generalizable posteriormente como “el área bajo la curva”.

Un conflicto presente en esta actividad es que la última pregunta “¿Qué representa geométricamente la distancia recorrida?” da lugar a una interpretación ambigua que debió ser resuelta por el profesor en el sentido de cuestionar alternativamente con ¿cómo se representa geométricamente la distancia recorrida?



ACTIVIDAD 2

El trabajo es una magnitud física escalar que se representa con la letra W (del inglés Work) y se expresa en unidades de energía, esto es en julios o joules (J) en el Sistema Internacional de Unidades. Cuando la fuerza que se aplica a un objeto es constante, el trabajo se determina de la siguiente manera:

$$w = F.d$$

Un cuerpo se mueve a lo largo de una línea recta por la aplicación de una fuerza. En la siguiente gráfica se representan la fuerza aplicada (en kg fuerza) y la distancia recorrida (en metros).

W(7m) = 28

Figura 1.1

1. ¿Qué fuerza se aplica cuando el cuerpo se ha movido 2 m? ¿Y cuándo se ha movido 5 m? 4kg y 4kg

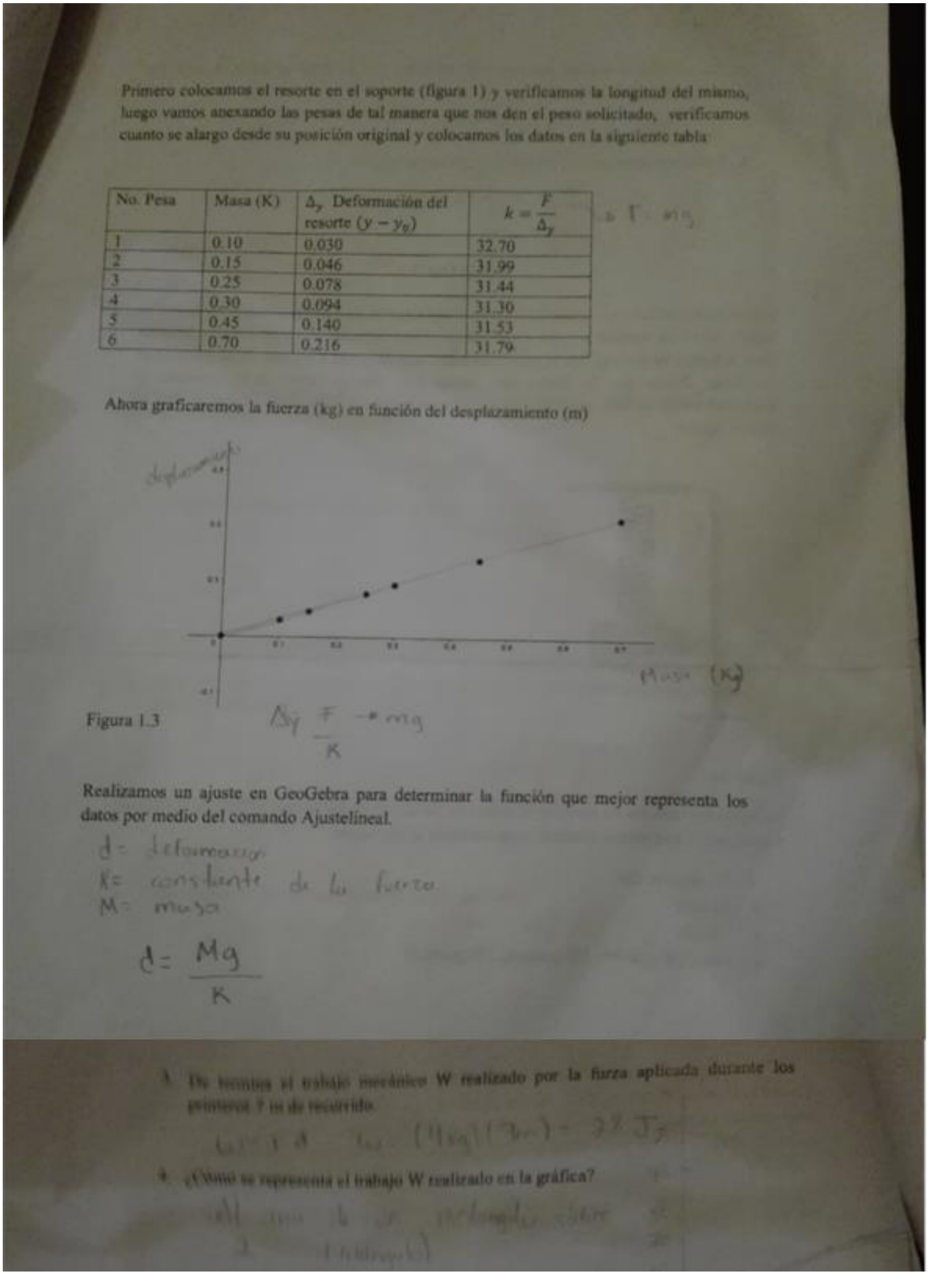
2. ¿Cómo se representa la fuerza aplicada en la gráfica? ¿Y la distancia recorrida?

$$F = \frac{w}{d} \qquad d = \frac{w}{F}$$

4Kg

una función f(x)

La (x)



Primero colocamos el resorte en el soporte (figura 1) y verificamos la longitud del mismo, luego vamos anexando las pesas de tal manera que nos den el peso solicitado, verificamos cuanto se alargo desde su posición original y colocamos los datos en la siguiente tabla

No. Pesa	Masa (K)	Δ_y Deformación del resorte $(y - y_0)$	$k = \frac{F}{\Delta_y}$
1	0.10	0.030	32.70
2	0.15	0.046	31.99
3	0.25	0.078	31.44
4	0.30	0.094	31.30
5	0.45	0.140	31.53
6	0.70	0.216	31.79

$F = mg$

Ahora graficaremos la fuerza (kg) en función del desplazamiento (m)

Figura 1.3

$\Delta y \ \frac{F}{K} \rightarrow mg$

Realizamos un ajuste en GeoGebra para determinar la función que mejor representa los datos por medio del comando Ajustelineal.

d= deformación
K= constante de la fuerza
M= masa

$$d = \frac{Mg}{K}$$

3. Determina el trabajo mecánico W realizado por la fuerza aplicada durante los primeros 7 m de recorrido.

$W = F\,d \quad W = (4kg)(7m) = 28\,J$

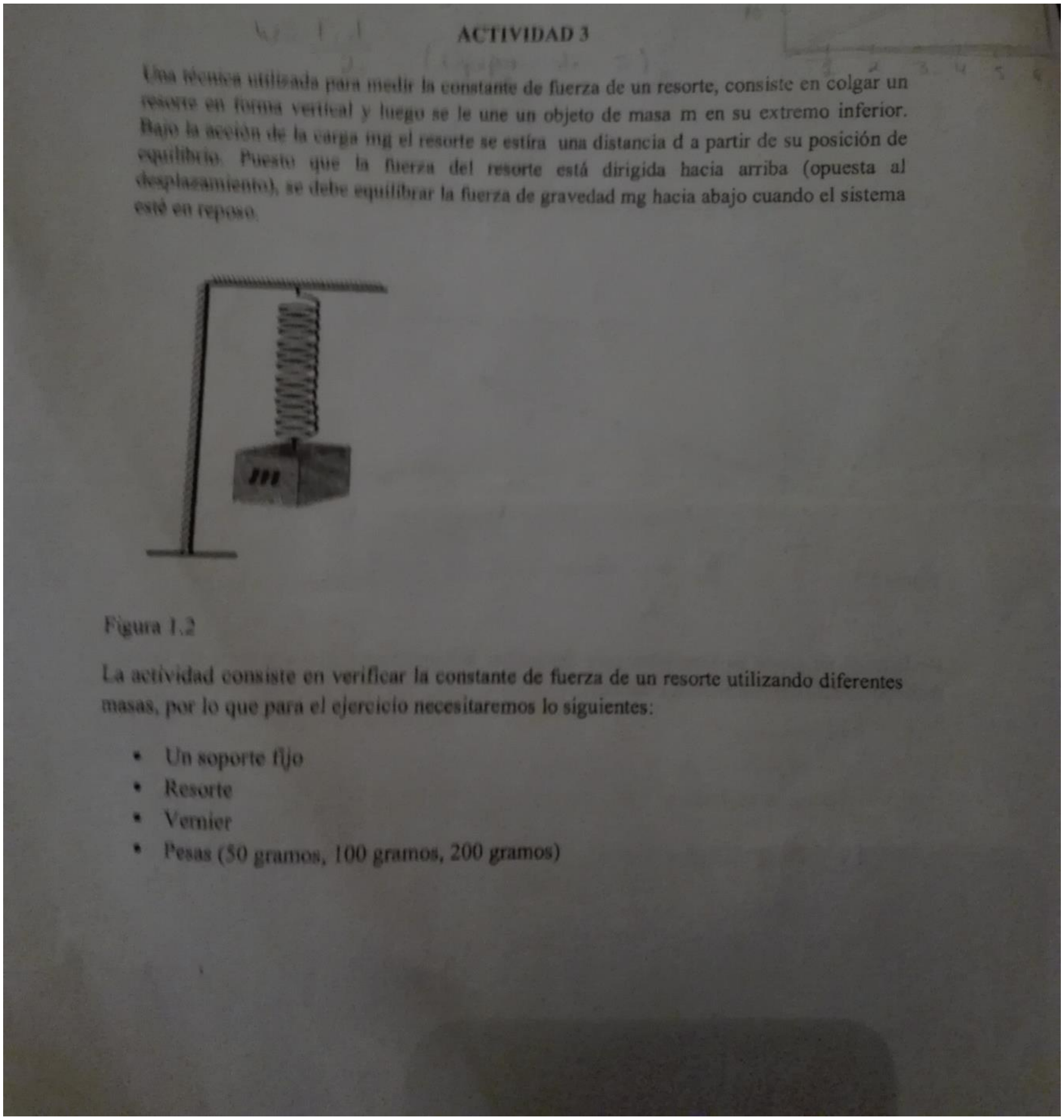
4. ¿Cómo se representa el trabajo W realizado en la gráfica?

el área de un rectángulo [illegible]
[illegible] (trabajo)

Tabla 4.2 Actividad 2

Lenguaje (objetos ostensivos)	Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos (objetos no ostensivos)
Reactivo 1 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Fuerza, cuerpo, movimiento.	**Intervinientes** -Conceptos: Fuerza, distancia.
Reactivo 2 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Magnitud, fuerza aplicada, distancia, gráfica. -Lenguaje figural: Representa la fuerza aplicada en la gráfica	**Intervinientes** -Conceptos: Fuerza, distancia. **Emergentes** • Conceptos: Trabajo. • Argumentos: $w = F.d$
Reactivo 3 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Trabajo mecánico, fuerza aplicada	**Intervinientes** -Conceptos: Fuerza, distancia, trabajo. **Emergentes** • Conceptos: Trabajo. • Argumentos: $w = F.d$ • Procedimiento: $w = (4\,kg)(7m) = 28J$
Reactivo 4 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Trabajo, fuerza, distancia. **Emergentes** -Lenguaje: área de un rectángulo.	**Intervinientes** -Conceptos: Fuerza, distancia. **Emergentes** • Conceptos: Trabajo, área bajo la curva. • Argumentos: $w = F.d$

Las observaciones en esta actividad son similares a las de la actividad anterior.



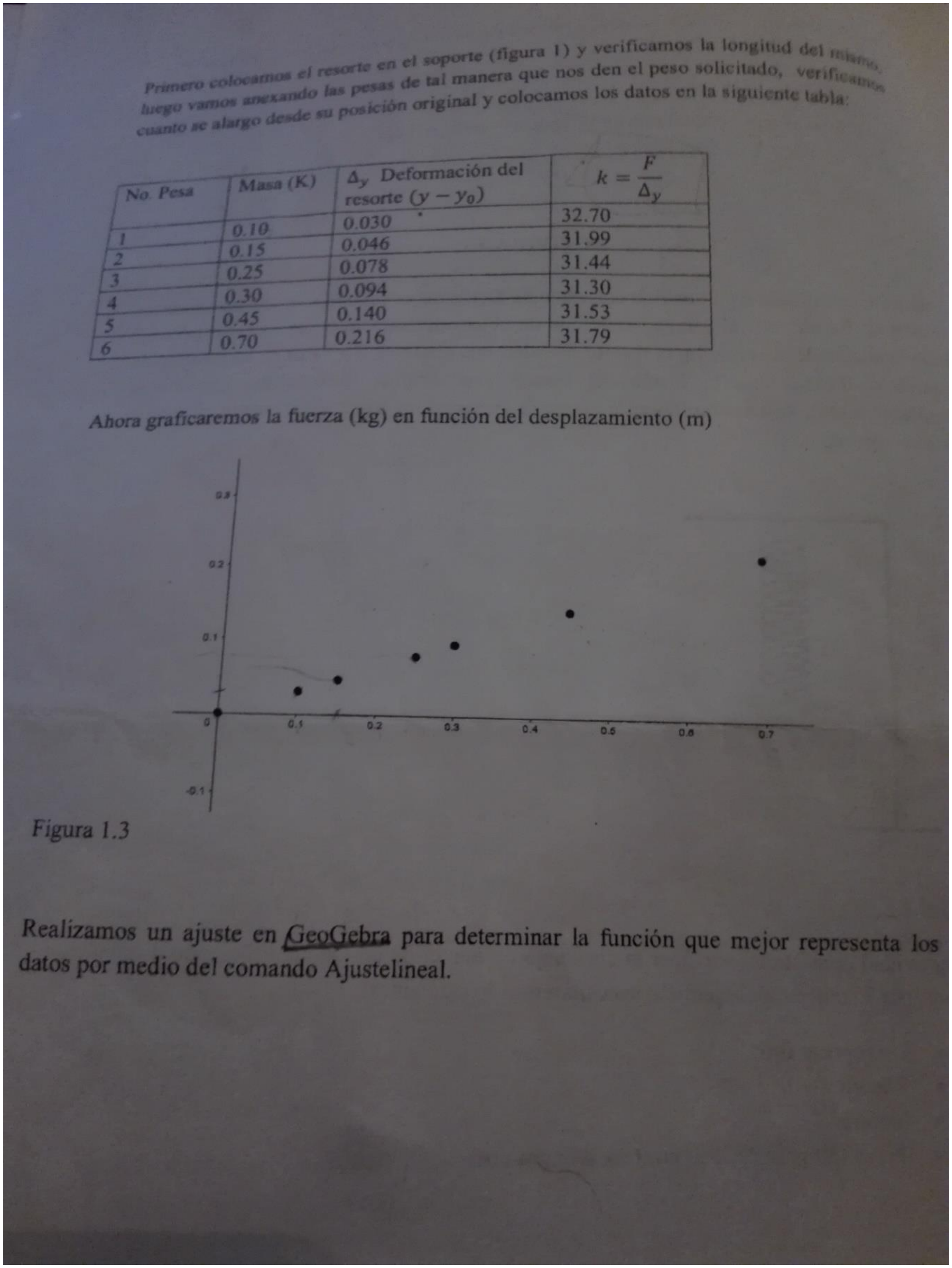
ACTIVIDAD 3

Una técnica utilizada para medir la constante de fuerza de un resorte, consiste en colgar un resorte en forma vertical y luego se le une un objeto de masa m en su extremo inferior. Bajo la acción de la carga mg el resorte se estira una distancia d a partir de su posición de equilibrio. Puesto que la fuerza del resorte está dirigida hacia arriba (opuesta al desplazamiento), se debe equilibrar la fuerza de gravedad mg hacia abajo cuando el sistema esté en reposo.

Figura 1.2

La actividad consiste en verificar la constante de fuerza de un resorte utilizando diferentes masas, por lo que para el ejercicio necesitaremos lo siguientes:

- Un soporte fijo
- Resorte
- Vernier
- Pesas (50 gramos, 100 gramos, 200 gramos)



Primero colocamos el resorte en el soporte (figura 1) y verificamos la longitud del mismo, luego vamos anexando las pesas de tal manera que nos den el peso solicitado, verificamos cuanto se alargo desde su posición original y colocamos los datos en la siguiente tabla:

No. Pesa	Masa (K)	Δ_y Deformación del resorte $(y - y_0)$	$k = \frac{F}{\Delta_y}$
1	0.10	0.030	32.70
2	0.15	0.046	31.99
3	0.25	0.078	31.44
4	0.30	0.094	31.30
5	0.45	0.140	31.53
6	0.70	0.216	31.79

Ahora graficaremos la fuerza (kg) en función del desplazamiento (m)

Figura 1.3

Realizamos un ajuste en GeoGebra para determinar la función que mejor representa los datos por medio del comando Ajustelineal.

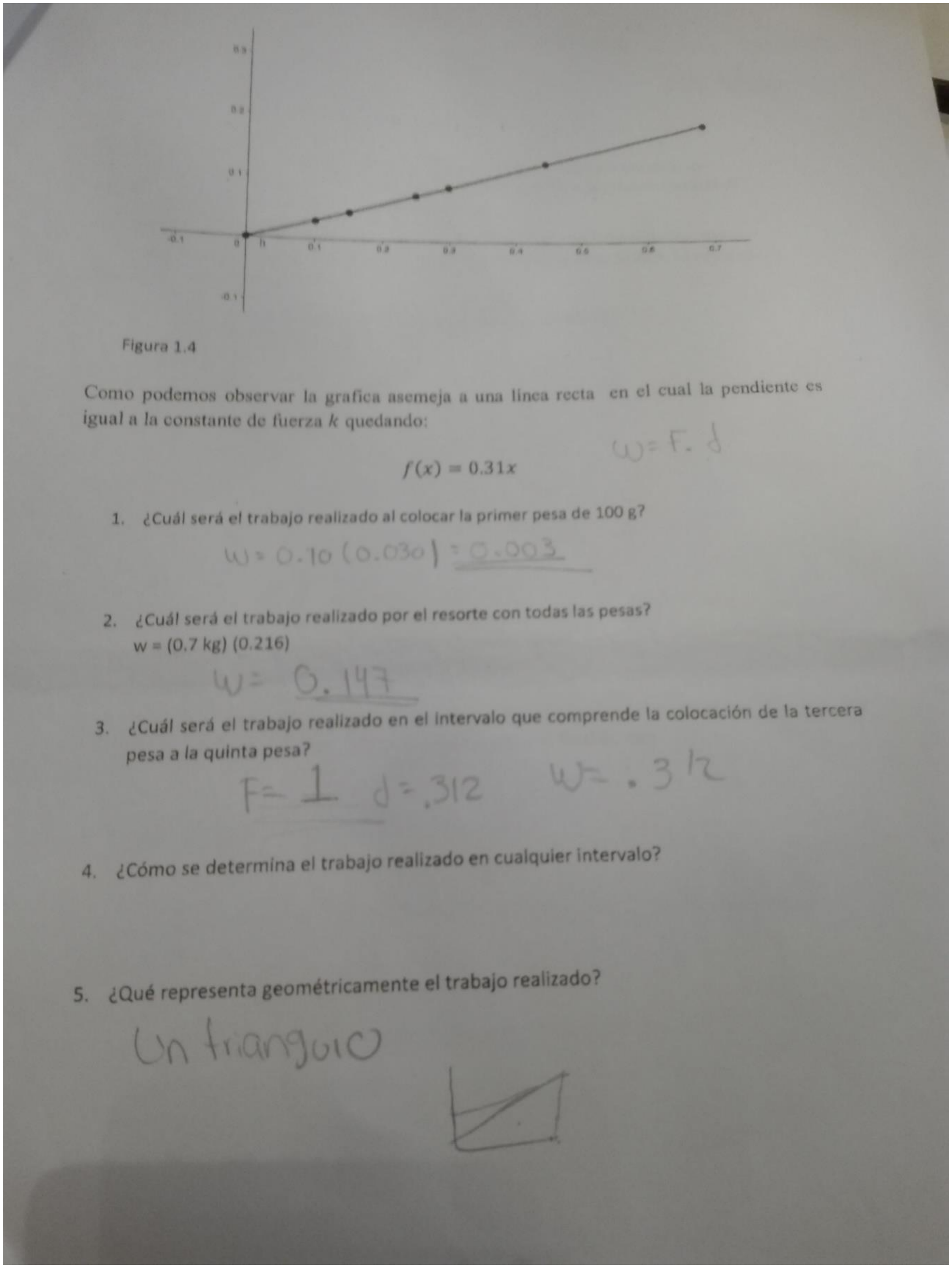


Figura 1.4

Como podemos observar la grafica asemeja a una linea recta en el cual la pendiente es igual a la constante de fuerza k quedando:

W= F. d

$$f(x) = 0.31x$$

1. ¿Cuál será el trabajo realizado al colocar la primer pesa de 100 g?

W= 0.10 (0.030) = 0.003

2. ¿Cuál será el trabajo realizado por el resorte con todas las pesas?
   w = (0.7 kg) (0.216)

W= 0.147

3. ¿Cuál será el trabajo realizado en el intervalo que comprende la colocación de la tercera pesa a la quinta pesa?

F= 1 d= .312 W= .312

4. ¿Cómo se determina el trabajo realizado en cualquier intervalo?

5. ¿Qué representa geométricamente el trabajo realizado?

Un triangulo

Tabla 4.3 Actividad 3

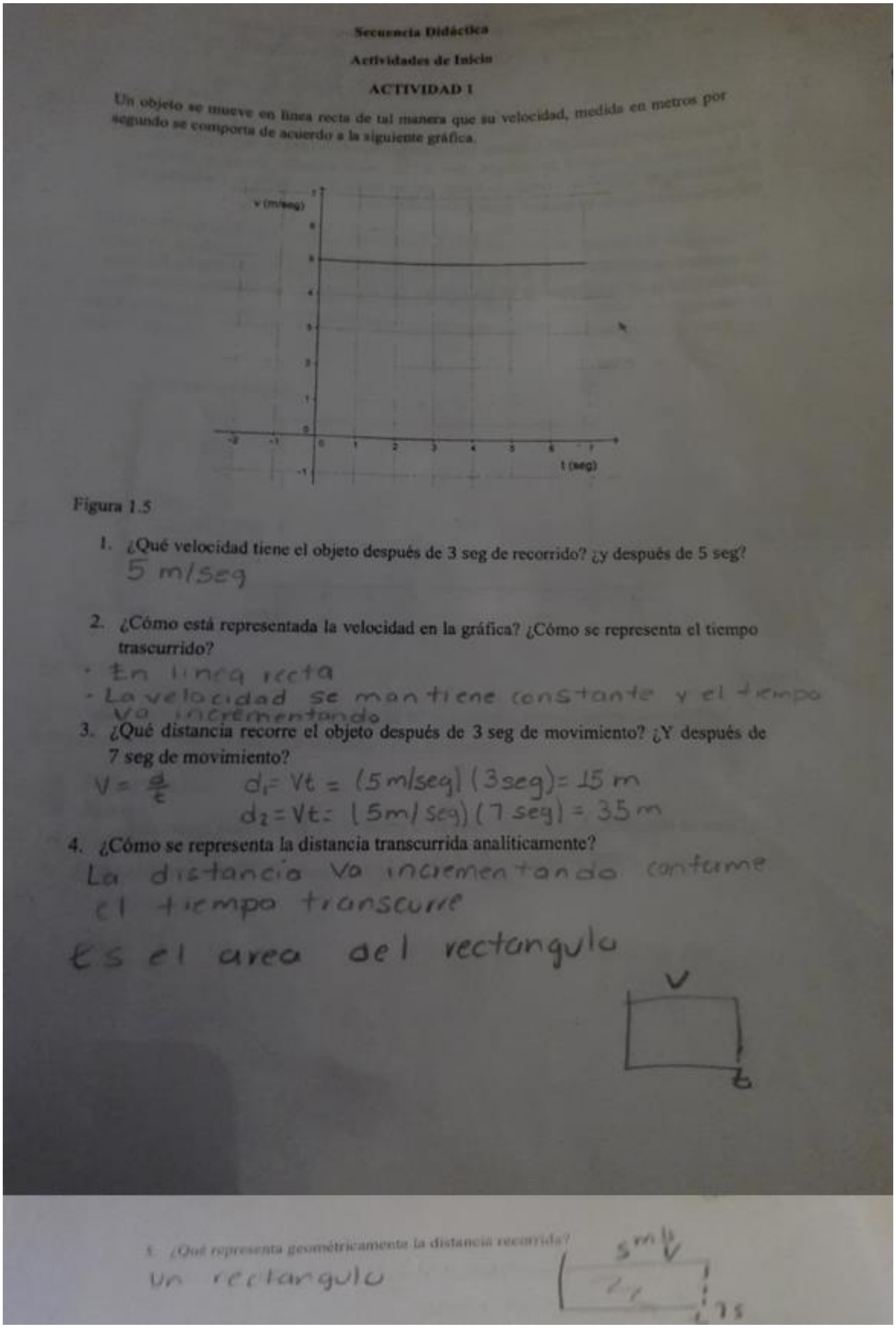
Lenguaje (objetos ostensivos)	Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos (objetos no ostensivos)
Reactivo 1 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Trabajo, pesa.	**Intervinientes** -Conceptos: Trabajo **Emergentes** • Conceptos: Trabajo • Argumentos: $w = f.d$ • Procedimientos: w= $(0.10)(0.030) = 0.003$
Reactivo 2 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Trabajo, pesa.	**Intervinientes** -Conceptos: Trabajo **Emergentes** • Conceptos: Trabajo • Argumentos: $w = f.d$ • Procedimientos: $w = (0.7)(0.216) = 0.147$
Reactivo 3 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Trabajo, pesa.	**Intervinientes** -Conceptos: Trabajo **Emergentes** • Conceptos: Trabajo • Argumentos: $w = f.d$ • Procedimientos: : $w = (1)(0.312) = 0.312$
Reactivo 4 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Trabajo.	**Intervinientes** -Conceptos: Fuerza, distancia.
Reactivo 4 **Intervinientes**	**Intervinientes** -Conceptos: Fuerza, distancia.

-Lenguaje natural: Trabajo. -Lenguaje figural: ¿Qué representa geométricamente el trabajo realizado? **Emergentes** -Lenguaje: área de un triángulo.	**Emergentes** • Conceptos: Trabajo, área bajo la curva.

Como podemos observar en la Tabla 4.3, el estudiante no pudo resolver la actividad satisfactoriamente, ya que tuvo varias complicaciones, en los reactivos 1 y 2 primero determinó la fuerza para cada intervalo, que era $f(x) = 0.31x$ (aun cuando no lo puso explícitamente en la hoja de trabajo) y después al determinar el trabajo realizado lo hizo $w = f.d$, siendo que la figura que se forma es un triángulo y para determinar el área se debe dividir el resultado entre 2, algo que no realizó el estudiante, en el reactivo 3 determinó que la fuerza era 1 y la distancia 0.312 y no realizó el procedimiento que esperábamos $w = w(5) - w(3)$; tampoco respondió el reactivo 4 ¿Cómo se determina el trabajo realizado en cualquier intervalo? Esto puede ser que no conozca algún término utilizado en la pregunta o no pueda realizar la generalización de un concepto. Cabe aclarar que sí se dio cuenta que la figura que se forma con esta función es un triángulo.

De la misma manera que en la actividad 1 también puede presentarse un conflicto en la última pregunta “¿Qué representa geométricamente el trabajo realizado?” que se tomará en cuenta al realizar los ajustes en la propuesta didáctica.

Estudiante 2



Secuencia Didáctica

Actividades de Inicio

ACTIVIDAD 1

Un objeto se mueve en línea recta de tal manera que su velocidad, medida en metros por segundo se comporta de acuerdo a la siguiente gráfica.

Figura 1.5

1. ¿Qué velocidad tiene el objeto después de 3 seg de recorrido? ¿y después de 5 seg?

5 m/seg

2. ¿Cómo está representada la velocidad en la gráfica? ¿Cómo se representa el tiempo trascurrido?

· En linea recta
- La velocidad se mantiene constante y el tiempo va incrementando

3. ¿Qué distancia recorre el objeto después de 3 seg de movimiento? ¿Y después de 7 seg de movimiento?

$V = \frac{d}{t}$ $d_1 = Vt = (5\,m/seg)(3seg) = 15\,m$

$d_2 = Vt = (5m/seg)(7\,seg) = 35\,m$

4. ¿Cómo se representa la distancia transcurrida analiticamente?

La distancia va incrementando conforme el tiempo transcurre

Es el area del rectangulo

5. ¿Qué representa geométricamente la distancia recorrida?

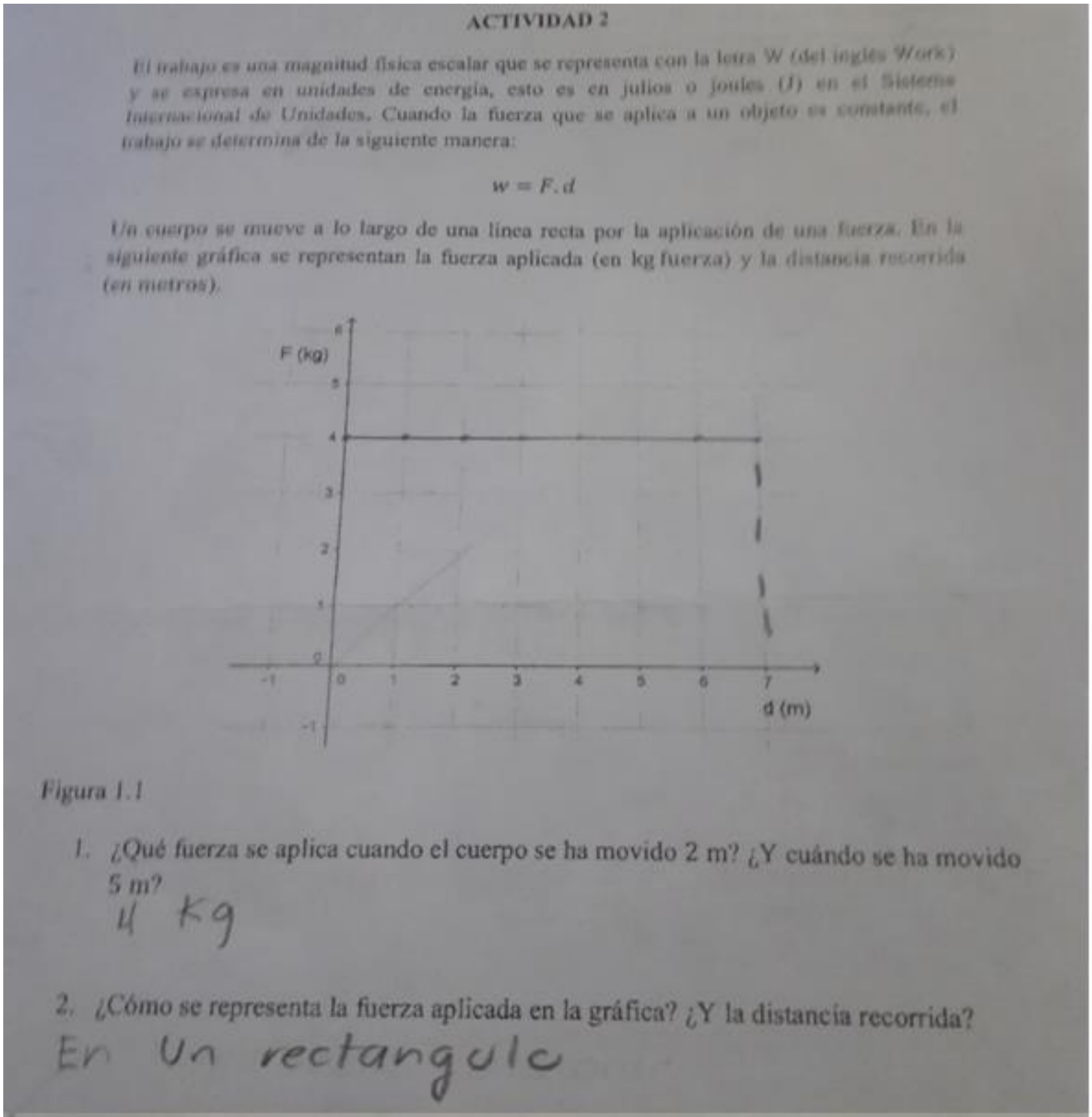
Un rectangulo

Tabla 4.4 Actividad 1

Lenguaje (objetos ostensivos)	Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos (objetos no ostensivos)
Reactivo 1 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Velocidad, tiempo, distancia, gráfica.	**Intervinientes** -Conceptos: Velocidad, tiempo
Reactivo 2 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Velocidad, tiempo, gráfica **Emergentes** -Lenguaje natural: Línea recta.	**Intervinientes** -Conceptos: Velocidad, gráfica. **Emergentes** • Conceptos: La velocidad se mantiene constante y el tiempo va incrementando
Reactivo 3 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Distancia, tiempo, movimiento.	**Intervinientes** -Conceptos: Distancia, tiempo, movimiento. **Emergentes** • Argumentos: $d = vt$ • Procedimientos: $d1 = \left(5\frac{m}{s}\right)(3s) = 15m$ $d2 = \left(5\frac{m}{s}\right)(7s) = 35m$
Reactivo 4 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Distancia transcurrida. **Emergentes** -Lenguaje natural: área del rectángulo	**Intervinientes** -Conceptos: Distancia, tiempo, movimiento. **Emergentes** -Argumentos: $d = vt$

Reactivo 5	**Intervinientes**
Intervinientes -Lenguaje natural: Distancia. -Lenguaje figural: ¿Qué representa geométricamente la distancia recorrida? **Emergentes** -Lenguaje natural: Área	-Conceptos: Distancia, tiempo, movimiento. **Emergentes** -Conceptos: Área de un rectángulo -Argumentos: $d = vt$

En la Tabla 4.4 correspondiente a la actividad 1 del estudiante 2 podemos observar que respondió sus reactivos correctamente, utilizando los conocimientos previos necesarios y emergieron los objetos matemáticos primarios que estaban descritos en el análisis a priori de esta actividad. Además, pudo reconocer que la distancia se puede representar como el área de un rectángulo al realizar la multiplicación de la función de la velocidad por el tiempo transcurrido.



ACTIVIDAD 2

El trabajo es una magnitud física escalar que se representa con la letra W (del inglés *Work*) y se expresa en unidades de energía, esto es en julios o joules (J) en el Sistema Internacional de Unidades. Cuando la fuerza que se aplica a un objeto es constante, el trabajo se determina de la siguiente manera:

$$w = F.d$$

Un cuerpo se mueve a lo largo de una línea recta por la aplicación de una fuerza. En la siguiente gráfica se representan la fuerza aplicada (en kg fuerza) y la distancia recorrida (en metros).

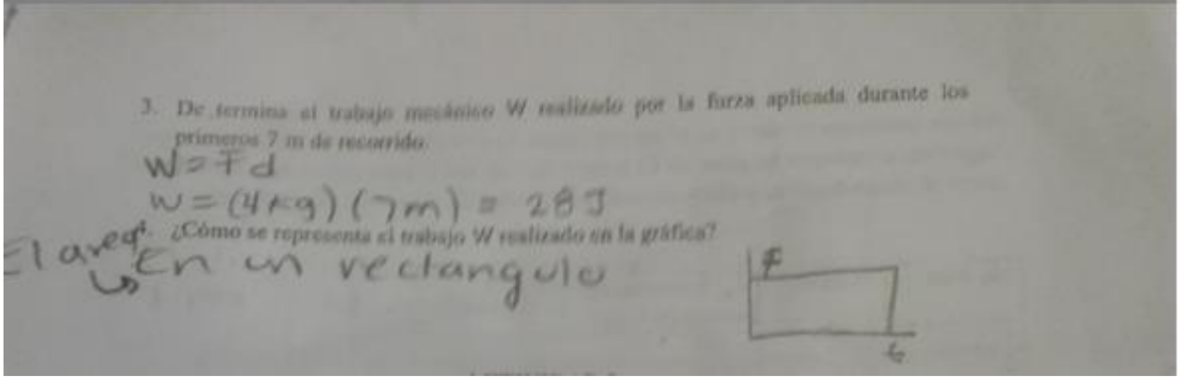
Figura 1.1

1. ¿Qué fuerza se aplica cuando el cuerpo se ha movido 2 m? ¿Y cuándo se ha movido 5 m?

4 Kg

2. ¿Cómo se representa la fuerza aplicada en la gráfica? ¿Y la distancia recorrida?

En Un rectangulo



3. De termina el trabajo mecánico W realizado por la furza aplicada durante los primeros 7 m de recorrido.

W = F d

w = (4 kg) (7 m) = 28 J

4. ¿Cómo se representa el trabajo W realizado en la gráfica?

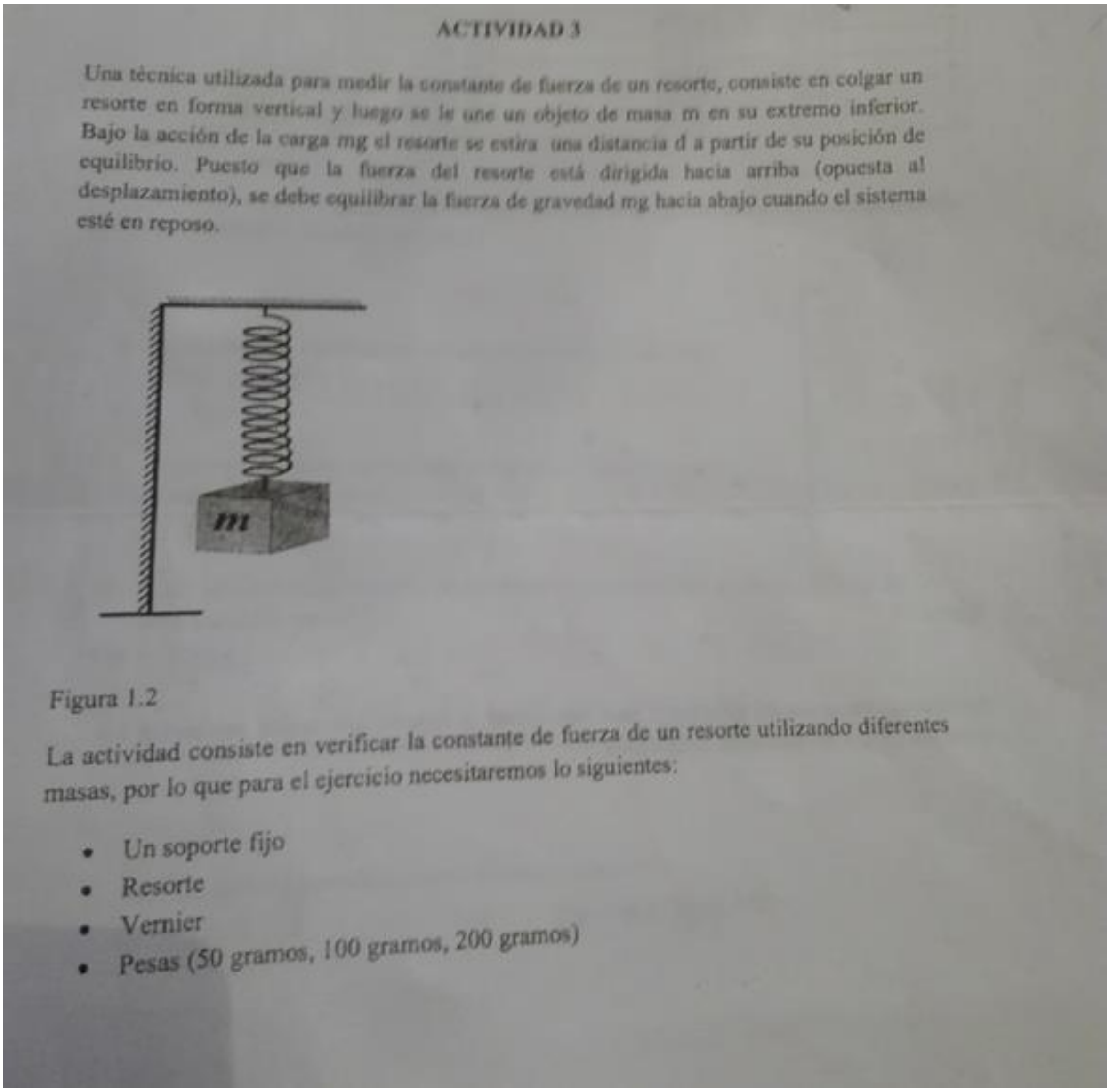
El area

En un rectangulo

Tabla 4.5 Actividad 2

Lenguaje (objetos ostensivos)	Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos (objetos no ostensivos)
Reactivo 1 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Fuerza, cuerpo, movimiento.	**Intervinientes** -Conceptos: Fuerza, distancia.
Reactivo 2 **Intervinientes** -Lenguaje natural: fuerza aplicada, distancia, gráfica. -Lenguaje figural: Representa la fuerza aplicada en la gráfica	**Intervinientes** -Conceptos: Fuerza, distancia. **Emergentes** • Conceptos: trabajo como el área de un rectángulo.
Reactivo 3 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Trabajo mecánico, fuerza aplicada	**Intervinientes** -Conceptos: Fuerza, distancia, trabajo. **Emergentes** • Conceptos: Trabajo. • Argumentos: $w = F.d$
Reactivo 4 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Trabajo, fuerza, distancia. **Emergentes** -Lenguaje: área de un rectángulo.	**Intervinientes** -Conceptos: Fuerza, distancia. **Emergentes** • Conceptos: Trabajo, área bajo la curva. • Argumentos: $w = F.d$ • Procedimientos: $w = (4\,kg)(7m) = 28J$

Los cometarios para la Tabla 4.5, son similares a los comentarios de la Tabla 4.4, el estudiante realizó la actividad correctamente.



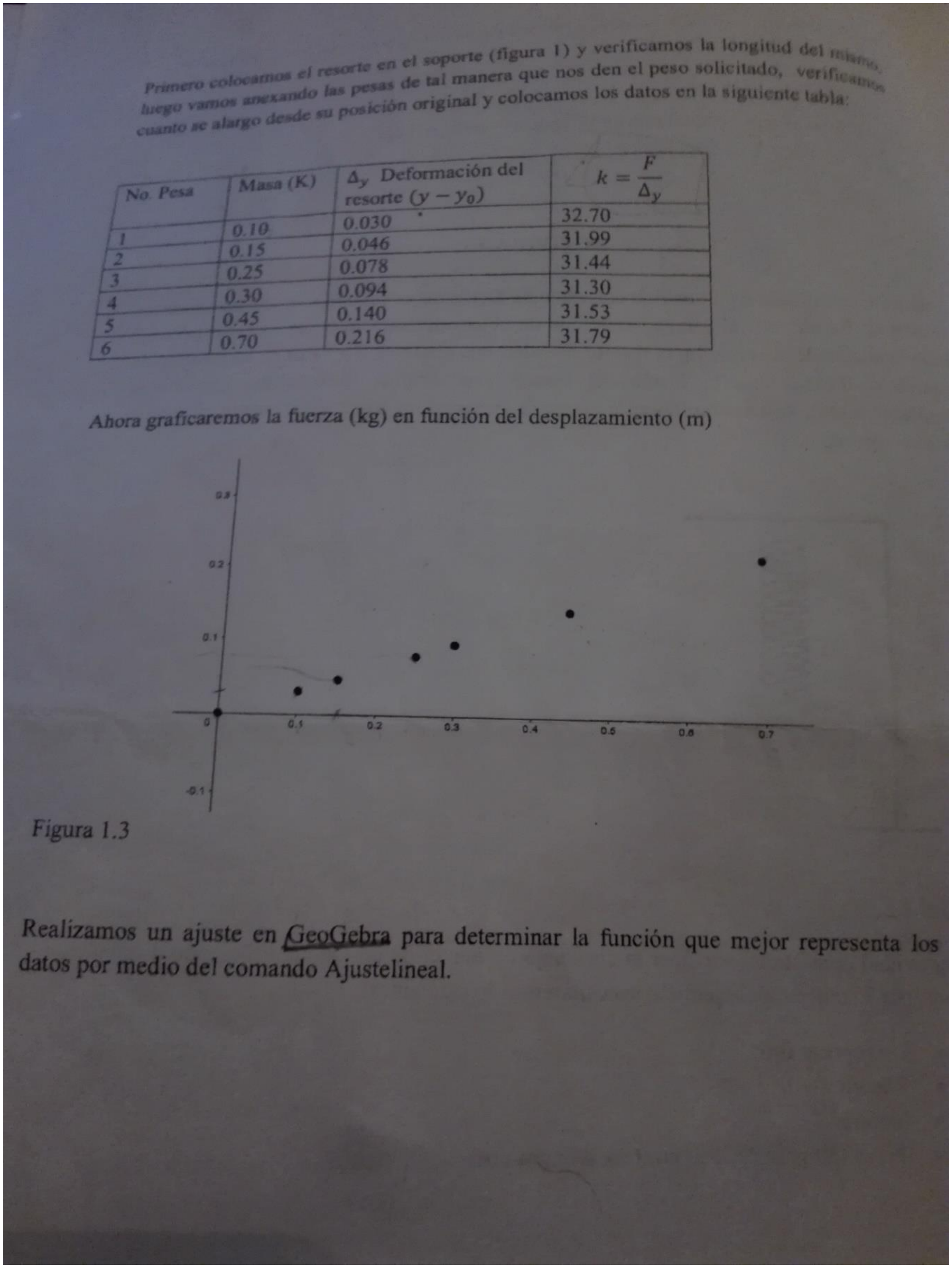
ACTIVIDAD 3

Una técnica utilizada para medir la constante de fuerza de un resorte, consiste en colgar un resorte en forma vertical y luego se le une un objeto de masa m en su extremo inferior. Bajo la acción de la carga mg el resorte se estira una distancia d a partir de su posición de equilibrio. Puesto que la fuerza del resorte está dirigida hacia arriba (opuesta al desplazamiento), se debe equilibrar la fuerza de gravedad mg hacia abajo cuando el sistema esté en reposo.

Figura 1.2

La actividad consiste en verificar la constante de fuerza de un resorte utilizando diferentes masas, por lo que para el ejercicio necesitaremos lo siguientes:

- Un soporte fijo
- Resorte
- Vernier
- Pesas (50 gramos, 100 gramos, 200 gramos)



Primero colocamos el resorte en el soporte (figura 1) y verificamos la longitud del mismo, luego vamos anexando las pesas de tal manera que nos den el peso solicitado, verificamos cuanto se alargo desde su posición original y colocamos los datos en la siguiente tabla:

No. Pesa	Masa (K)	Δ_y Deformación del resorte $(y - y_0)$	$k = \frac{F}{\Delta_y}$
1	0.10	0.030	32.70
2	0.15	0.046	31.99
3	0.25	0.078	31.44
4	0.30	0.094	31.30
5	0.45	0.140	31.53
6	0.70	0.216	31.79

Ahora graficaremos la fuerza (kg) en función del desplazamiento (m)

Figura 1.3

Realizamos un ajuste en GeoGebra para determinar la función que mejor representa los datos por medio del comando Ajustelineal.

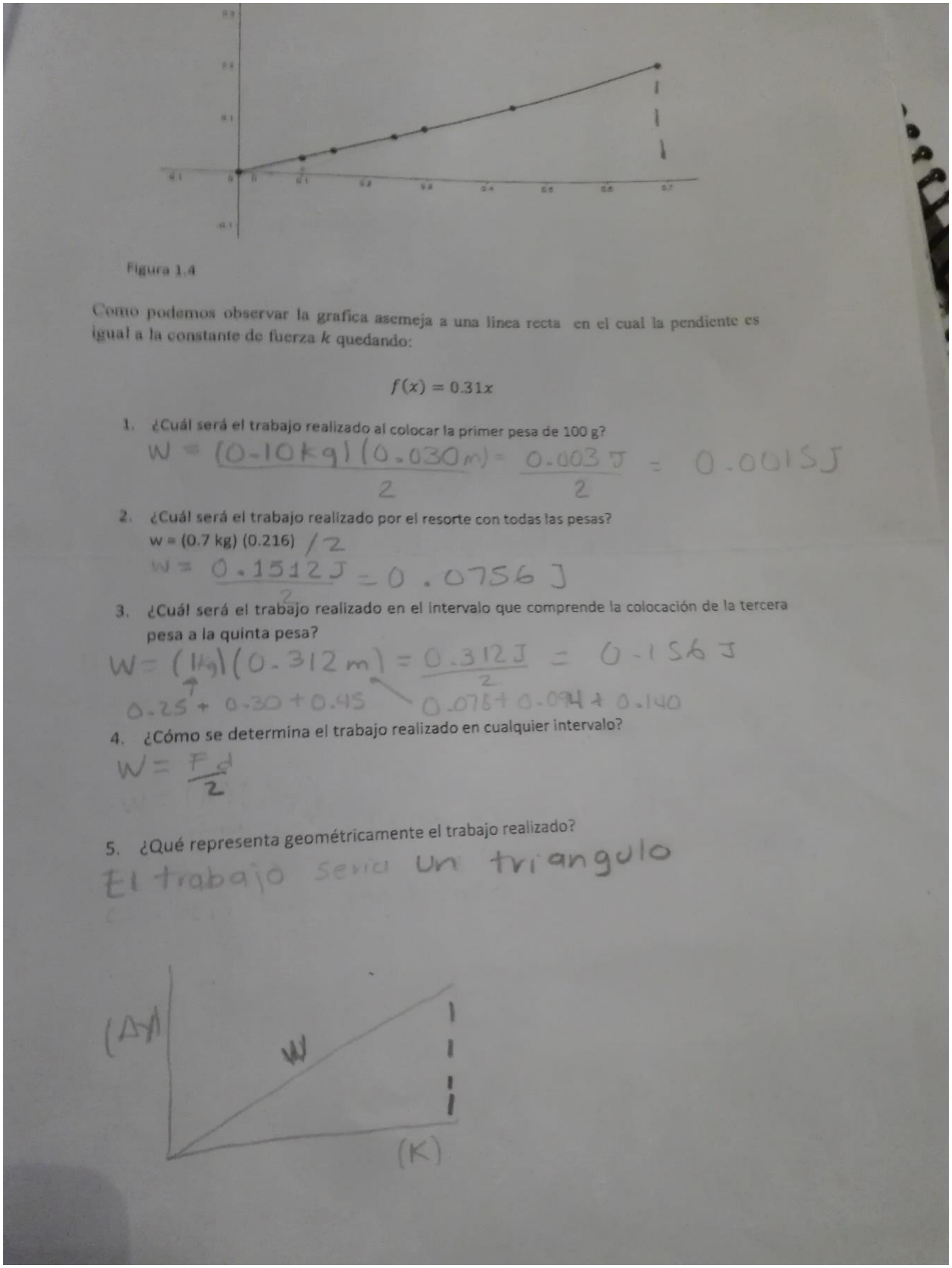


Figura 1.4

Como podemos observar la grafica asemeja a una linea recta en el cual la pendiente es igual a la constante de fuerza *k* quedando:

$$f(x) = 0.31x$$

1. ¿Cuál será el trabajo realizado al colocar la primer pesa de 100 g?

$W = \frac{(0.10 kg)(0.030 m)}{2} = \frac{0.003 J}{2} = 0.0015 J$

2. ¿Cuál será el trabajo realizado por el resorte con todas las pesas?

w = (0.7 kg) (0.216) /2

$w = \frac{0.1512 J}{2} = 0.0756 J$

3. ¿Cuál será el trabajo realizado en el intervalo que comprende la colocación de la tercera pesa a la quinta pesa?

$W = (1kg)(0.312 m) = \frac{0.312 J}{2} = 0.156 J$

0.25 + 0.30 + 0.45 0.078 + 0.094 + 0.140

4. ¿Cómo se determina el trabajo realizado en cualquier intervalo?

$W = \frac{Fd}{2}$

5. ¿Qué representa geométricamente el trabajo realizado?

El trabajo seria un triangulo

Tabla 4.6 Actividad 3

Lenguaje (objetos ostensivos)	Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos (objetos no ostensivos)
Reactivo 1 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Trabajo, pesa.	**Intervinientes** -Conceptos: Trabajo **Emergentes** - Conceptos: Trabajo - Argumentos: $w = (f.d)/2$ - Procedimientos: $w = \frac{[(0.10)(.030)]}{2} = 0.00155J$
Reactivo 2 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Trabajo, pesa.	**Intervinientes** -Conceptos: Trabajo **Emergentes** - Conceptos: Trabajo - Argumentos: $w = (f.d)/2$ - Procedimientos: $w = \frac{[(0.70)(.216)]}{2} = 0.0756J$
Reactivo 3 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Trabajo, pesa.	**Intervinientes** -Conceptos: Trabajo **Emergentes** - Conceptos: Trabajo - Argumentos: $w = (f.d)/2$ - Procedimientos: $w = \frac{[(1)(.312)]}{2} = 0.156\,J$
Reactivo 4 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Trabajo.	**Intervinientes** -Conceptos: Fuerza, distancia. - Argumentos: $w = (f.d)/2$

Reactivo 5 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Trabajo. -Lenguaje figural: ¿Qué representa geométricamente el trabajo realizado? **Emergentes** -Lenguaje: área de un triángulo.	**Intervinientes** -Conceptos: Fuerza, distancia. **Emergentes** • Conceptos: Trabajo, área bajo la curva. • Argumentos: $w = (F.d)/2$

En la Tabla 4.6 se puede observar que el estudiante pudo responder satisfactoriamente la actividad, utilizando los conocimientos previos, tales como, el área de un triángulo, el trabajo realizado, los conceptos de fuerza y distancia, entre otros, emergiendo los objetos matemático primarios previstos en el análisis a priori, con excepción del reactivo 3 ¿Cuál será el trabajo realizado en el intervalo que comprende la colocación de la tercera pesa a la quinta pesa? en el cual se esperaba el alumno realizara una resta del trabajo realizado al intervalo 5 menos el trabajo realizado al intervalo 3 utilizando la figura geométrica que se forma (Fig. 4.1) y él sólo determinó el trabajo realizado al colocar la quinta pesa.

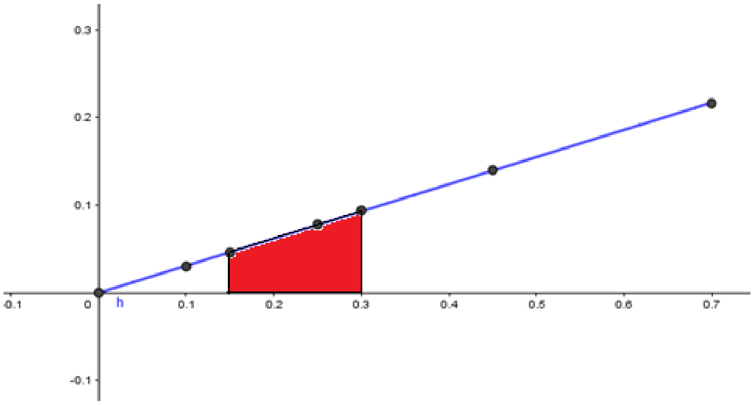
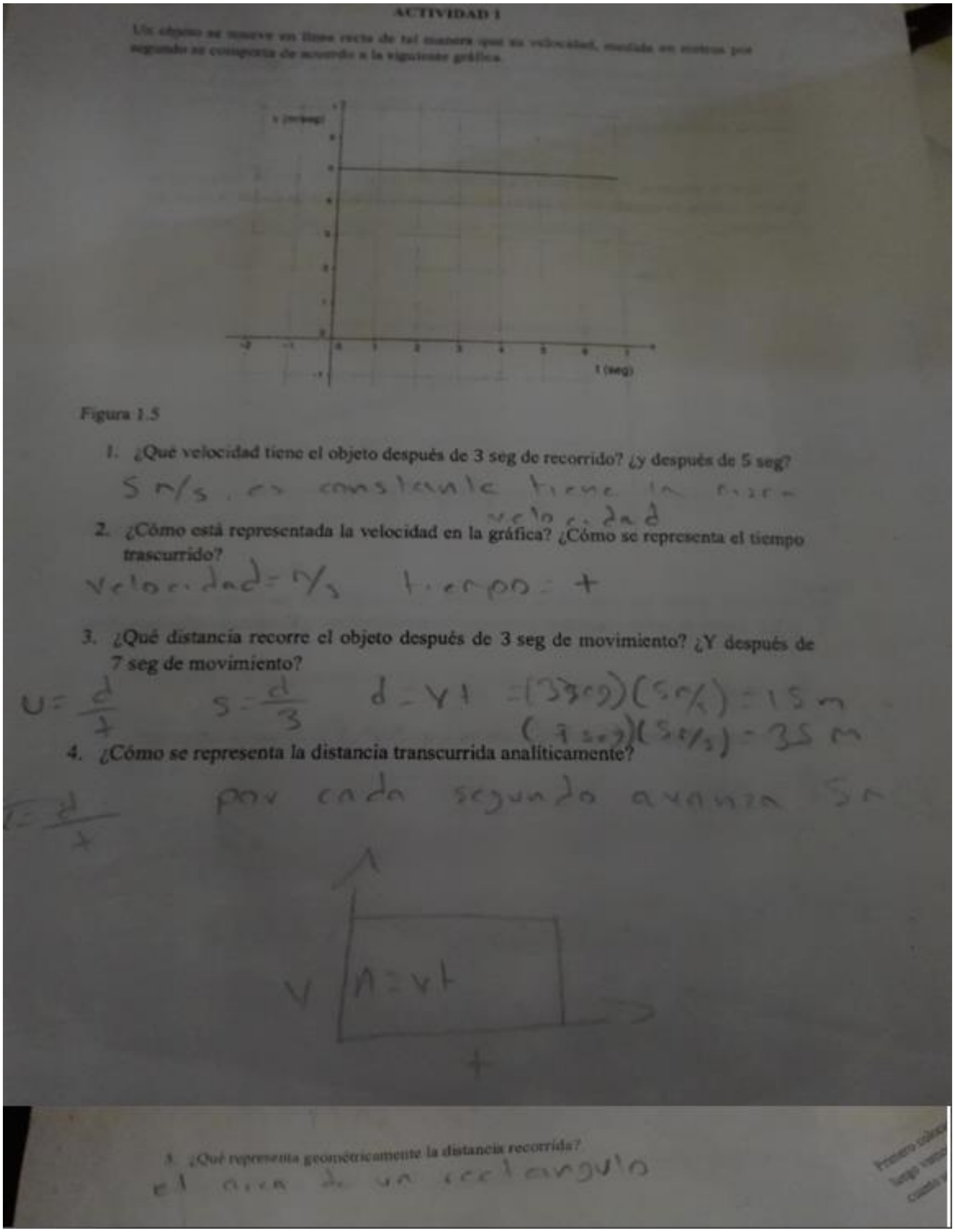


Figura 4.1

Estudiante 3



ACTIVIDAD 1

Un objeto se mueve en línea recta de tal manera que su velocidad, medida en metros por segundo se comporta de acuerdo a la siguiente gráfica.

Figura 1.5

1. ¿Qué velocidad tiene el objeto después de 3 seg de recorrido? ¿y después de 5 seg?

5 m/s, es constante tiene la misma velocidad

2. ¿Cómo está representada la velocidad en la gráfica? ¿Cómo se representa el tiempo trascurrido?

velocidad = m/s   tiempo = t

3. ¿Qué distancia recorre el objeto después de 3 seg de movimiento? ¿Y después de 7 seg de movimiento?

$v = \frac{d}{t}$ $5 = \frac{d}{3}$ $d = vt = (3seg)(5m/s) = 15 m$

$(7 seg)(5m/s) = 35 m$

4. ¿Cómo se representa la distancia transcurrida analíticamente?

$= \frac{d}{t}$ por cada segundo avanza 5m

5. ¿Qué representa geométricamente la distancia recorrida?

el area de un rectangulo

Primero coloca
luego vamo
cuando

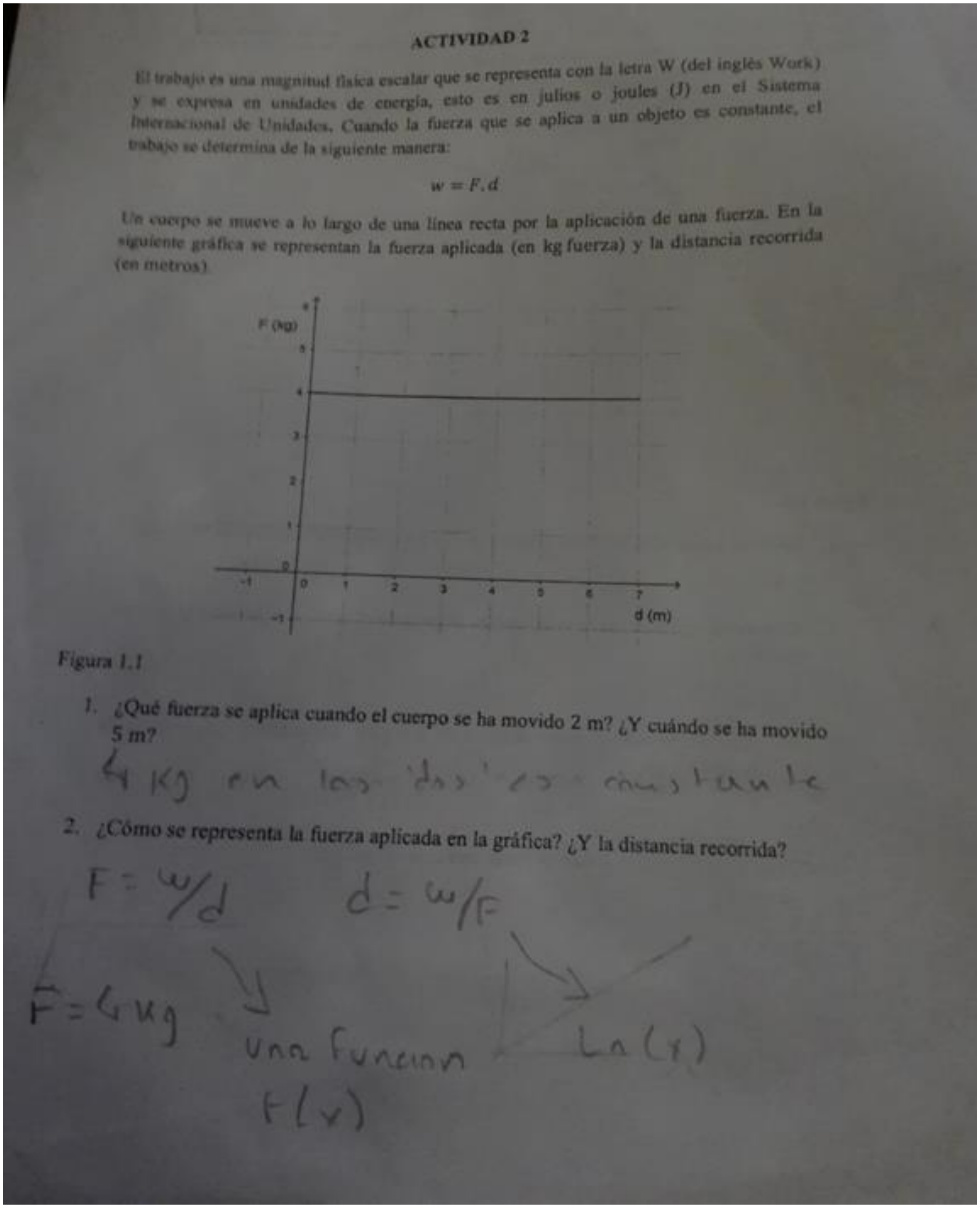
Tabla 4.7 Actividad 1

Lenguaje (objetos ostensivos)	Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos (objetos no ostensivos)
Reactivo 1 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Velocidad, tiempo, distancia, gráfica.	**Intervinientes** -Conceptos: Velocidad, tiempo **Emergentes:** Velocidad constante
Reactivo 2 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Velocidad, tiempo, gráfica **Emergentes** -Lenguaje natural: Línea recta.	**Intervinientes** -Conceptos: Velocidad, gráfica. **Emergentes** - Conceptos: Las unidades de la velocidad son m/s
Reactivo 3 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Distancia, tiempo, movimiento.	**Intervinientes** -Conceptos: Distancia, tiempo, movimiento. **Emergentes** - Argumentos: $d = vt$ -Procedimientos: $\left(5\frac{m}{s}\right)(3s) = 15m$ $\left(5\frac{m}{s}\right)(7s) = 35m$ -
Reactivo 4 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Distancia transcurrida. **Emergentes** -Lenguaje natural: área del rectángulo	**Intervinientes** -Conceptos: Distancia, tiempo, movimiento. **Emergentes** -Argumentos: Dibujo de un rectángulo

Reactivo 5 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Distancia. -Lenguaje figural: ¿Qué representa geométricamente la distancia recorrida? **Emergentes** -Lenguaje natural: Área	**Intervinientes** -Conceptos: Distancia, tiempo, movimiento. **Emergentes** -Conceptos: Área de un rectángulo

En la Tabla 4.7 se muestra que en la actividad 1 del estudiante 3 pudo responder correctamente la actividad al utilizar los conocimientos previos adecuados, como determinar la distancia recorrida y la forma de obtenerla al tener datos específicos tales como la velocidad y el tiempo transcurrido, así como interpretar una gráfica, logrando emerger los objetos matemáticos primarios esperados en esta actividad. También logró identificar la distancia recorrida geométricamente por medio del área de un rectángulo.

También se puede observar que en el reactivo 2 ¿Cómo está representada la velocidad en la gráfica? ¿Cómo se representa el tiempo transcurrido? El estudiante respondió m/s y t, lo que nos indica que existió un conflicto semiótico al formular las preguntas.



ACTIVIDAD 2

El trabajo es una magnitud física escalar que se representa con la letra W (del inglès Work) y se expresa en unidades de energía, esto es en julios o joules (J) en el Sistema Internacional de Unidades. Cuando la fuerza que se aplica a un objeto es constante, el trabajo se determina de la siguiente manera:

$$w = F.d$$

Un cuerpo se mueve a lo largo de una línea recta por la aplicación de una fuerza. En la siguiente gráfica se representan la fuerza aplicada (en kg fuerza) y la distancia recorrida (en metros)

Figura 1.1

1. ¿Qué fuerza se aplica cuando el cuerpo se ha movido 2 m? ¿Y cuándo se ha movido 5 m?

4 Kg en los dos' es constante

2. ¿Cómo se representa la fuerza aplicada en la gráfica? ¿Y la distancia recorrida?

$F = w/d$ $d = w/F$

$F = 4$ kg

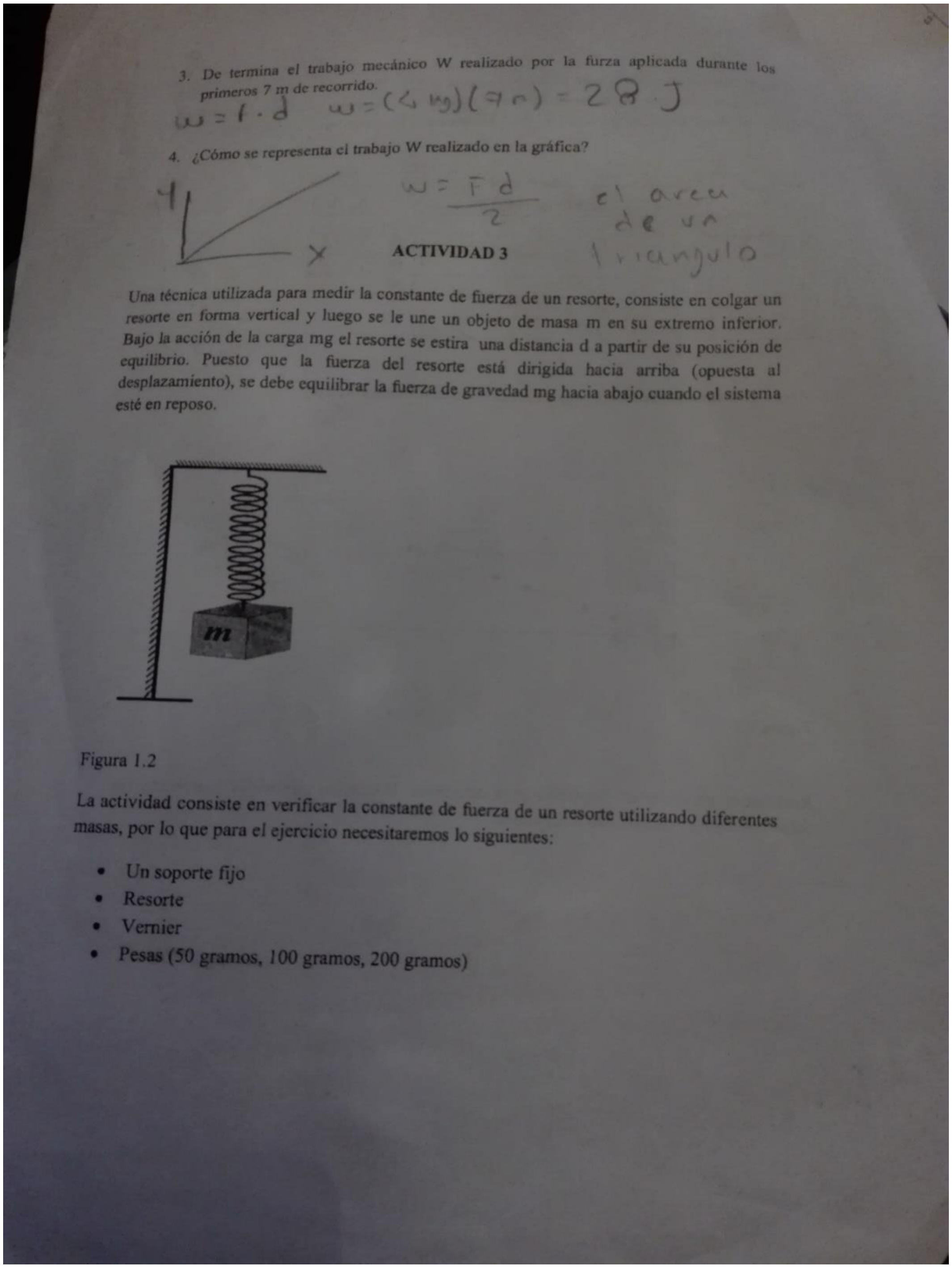
una funcion
$f(x)$

$Ln(x)$

Tabla 4.8 Actividad 2

Lenguaje (objetos ostensivos)	Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos (objetos no ostensivos)
Reactivo 1 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Fuerza, cuerpo, movimiento.	**Intervinientes** -Conceptos: Fuerza, distancia. **Emergentes** -Conceptos: Fuerza constante
Reactivo 2 **Intervinientes** -Lenguaje natural: fuerza aplicada, distancia, gráfica. -Lenguaje figural: Representa la fuerza aplicada en la gráfica	**Intervinientes** -Conceptos: Fuerza, distancia. **Emergentes** • Conceptos: función, trabajo como el área de un rectángulo,
Reactivo 3 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Trabajo mecánico, fuerza aplicada	**Intervinientes** -Conceptos: Fuerza, distancia, trabajo. **Emergentes** • Conceptos: Trabajo. • Argumentos: $w = F.d$ • Procedimientos: $w = (4\ kg)(7m) = 28J$
Reactivo 4 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Trabajo, fuerza, distancia. **Emergentes** -Lenguaje: área de un rectángulo.	**Intervinientes** -Conceptos: Fuerza, distancia. **Emergentes** • Conceptos: Trabajo, área bajo la curva. • Argumentos: $w = (F.d)/2$

Los comentarios sobre esta tabla son muy parecidos a los de la tabla anterior.



3. De termina el trabajo mecánico W realizado por la furza aplicada durante los primeros 7 m de recorrido.

$w = f \cdot d \quad w = (4\ kg)(7\ m) = 28\ J$

4. ¿Cómo se representa el trabajo W realizado en la gráfica?

$w = \frac{F d}{2}$

el area de un triangulo

ACTIVIDAD 3

Una técnica utilizada para medir la constante de fuerza de un resorte, consiste en colgar un resorte en forma vertical y luego se le une un objeto de masa m en su extremo inferior. Bajo la acción de la carga mg el resorte se estira una distancia d a partir de su posición de equilibrio. Puesto que la fuerza del resorte está dirigida hacia arriba (opuesta al desplazamiento), se debe equilibrar la fuerza de gravedad mg hacia abajo cuando el sistema esté en reposo.

Figura 1.2

La actividad consiste en verificar la constante de fuerza de un resorte utilizando diferentes masas, por lo que para el ejercicio necesitaremos lo siguientes:

- Un soporte fijo
- Resorte
- Vernier
- Pesas (50 gramos, 100 gramos, 200 gramos)

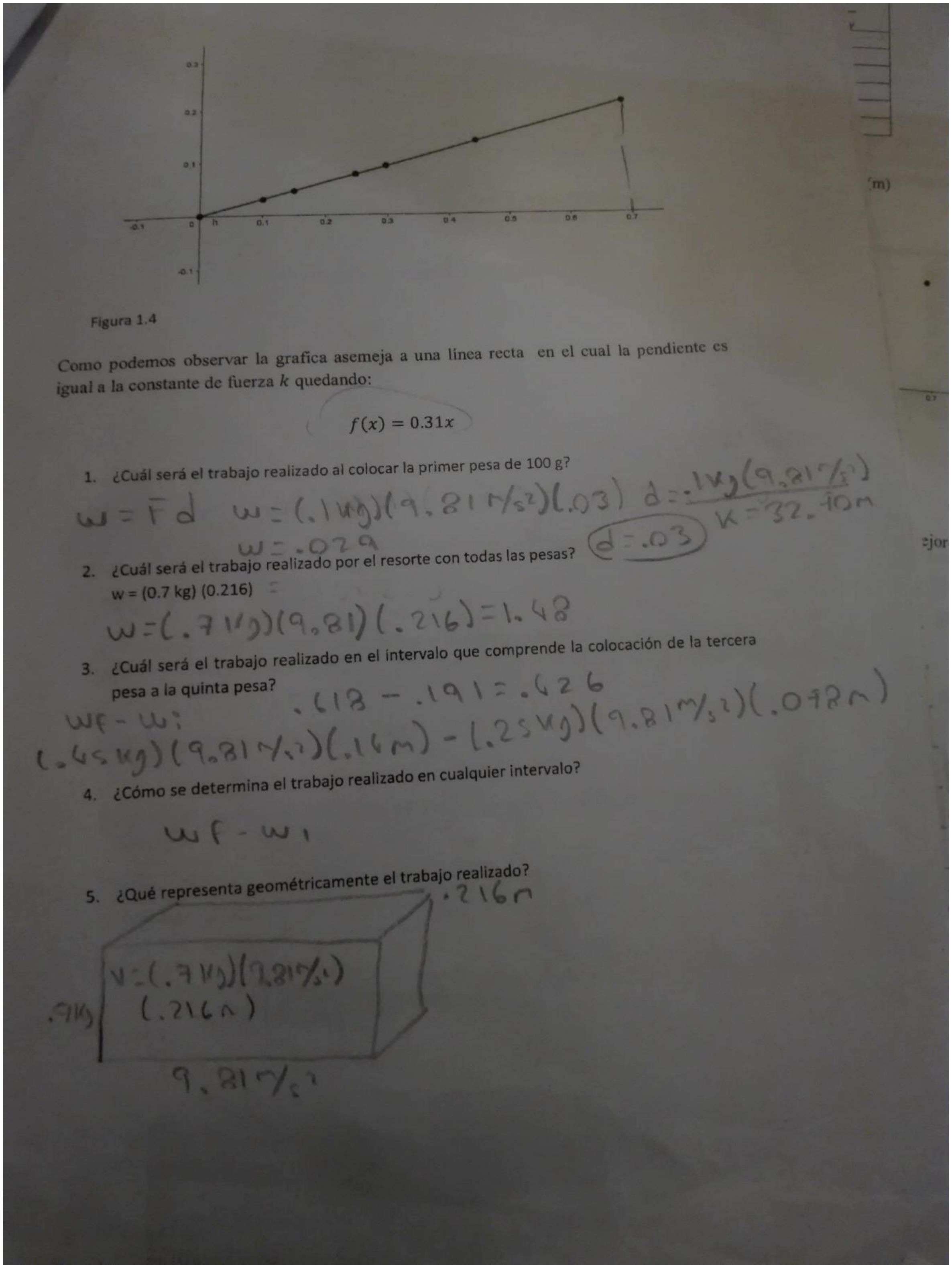


Figura 1.4

Como podemos observar la grafica asemeja a una línea recta en el cual la pendiente es igual a la constante de fuerza k quedando:

$$f(x) = 0.31x$$

1. ¿Cuál será el trabajo realizado al colocar la primer pesa de 100 g?

$w = Fd$ $w = (.1 kg)(9.81 m/s^2)(.03)$ $d = \frac{.1 kg(9.81 m/s^2)}{K = 32.10 m}$

$w = .029$ $d = .03$

2. ¿Cuál será el trabajo realizado por el resorte con todas las pesas?
   w = (0.7 kg) (0.216) =

$w = (.7 kg)(9.81)(.216) = 1.48$

3. ¿Cuál será el trabajo realizado en el intervalo que comprende la colocación de la tercera pesa a la quinta pesa?

$.618 - .191 = .426$

$wf - wi$:

$(.45 kg)(9.81 m/s^2)(.14 m) - (.25 kg)(9.81 m/s^2)(.078 m)$

4. ¿Cómo se determina el trabajo realizado en cualquier intervalo?

$wf - w1$

5. ¿Qué representa geométricamente el trabajo realizado?

Tabla 4.9 Actividad 3

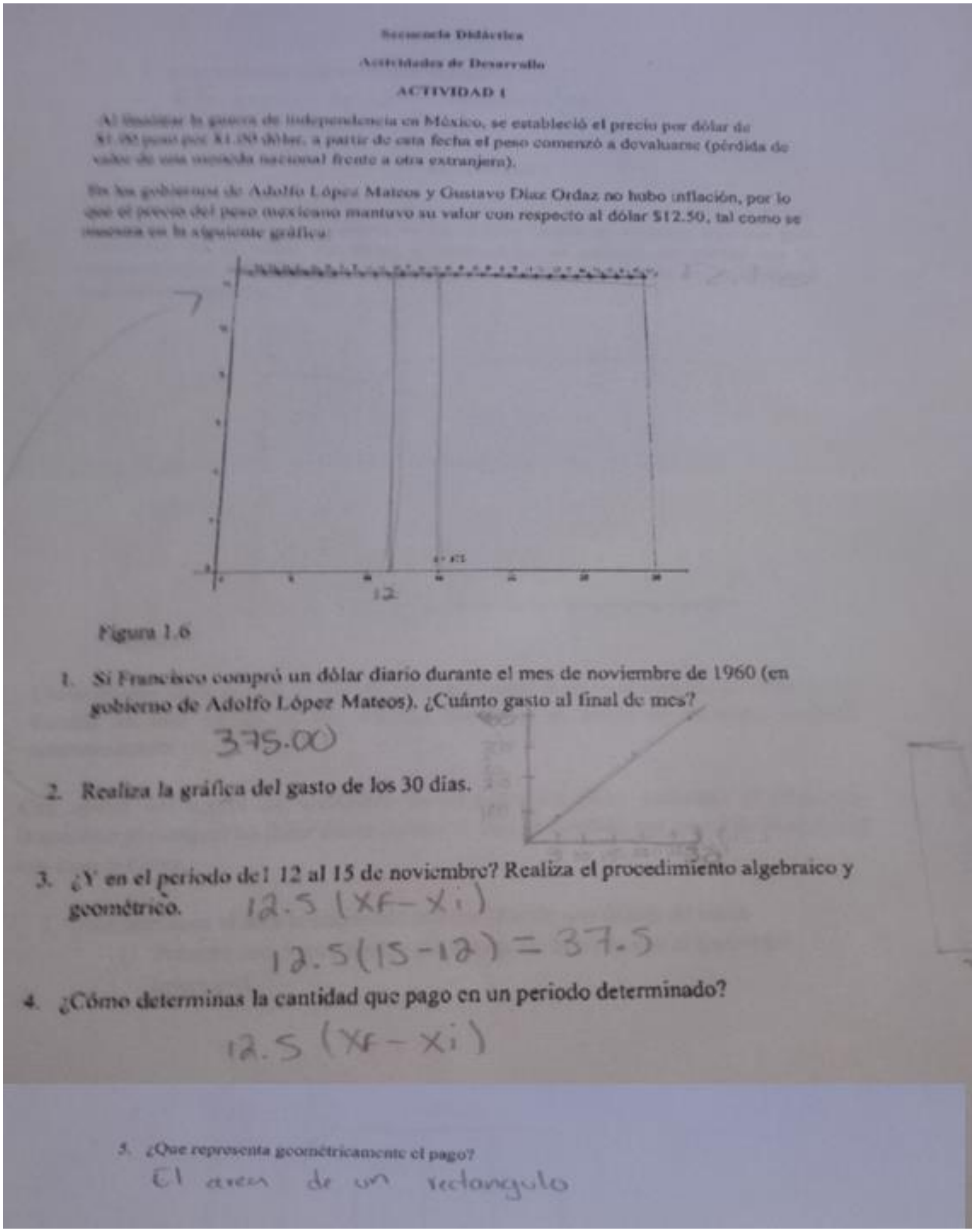
Lenguaje (objetos ostensivos)	Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos (objetos no ostensivos)
Reactivo 1 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Trabajo, pesa.	**Intervinientes** -Conceptos: Trabajo **Emergentes** • Conceptos: Trabajo • Argumentos: $w = m.g.d$ • Procedimientos: $w = (0.1)(9.81)(.03) = 0.029$
Reactivo 2 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Trabajo, pesa.	**Intervinientes** -Conceptos: Trabajo **Emergentes** • Conceptos: Trabajo • Argumentos: $w = m.g.d$ • Procedimientos: $w = (0.7)(9.81)(.216) = 1.48$
Reactivo 3 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Trabajo, pesa.	**Intervinientes** -Conceptos: Trabajo **Emergentes** • Conceptos: Trabajo • Argumentos: $w = m.g.d$ $w = wf - wi$ • Procedimientos $w = (0.45)(9.81)(.16) - (0.25)(9.81)(.48)$ $w = 0.618 - 0.191 = 0.526$
Reactivo 4 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Trabajo.	**Intervinientes** -Conceptos: Fuerza, distancia. - Argumentos: $wf - wi$

Reactivo 5 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Trabajo. -Lenguaje figural: ¿Qué representa geométricamente el trabajo realizado? **Emergentes** -Lenguaje: volumen de un prisma.	**Intervinientes** -Conceptos: Fuerza, distancia. **Emergentes** • Conceptos: Trabajo, área bajo la curva. • Argumentos: Dibujo de prisma rectangular

En la Tabla 4.9 se puede observar que el estudiante aplicó sus conocimientos previos necesarios para resolverla, emergieron los objetos matemáticos primarios esperados en el análisis a priori, incluso determinó la fuerza en Newtons, por lo que al responder el reactivo 5, se formó un prisma rectangular.

Actividades de Desarrollo

Estudiante 1



Secuencia Didáctica

Actividades de Desarrollo

ACTIVIDAD 1

Al finalizar la guerra de independencia en México, se estableció el precio por dólar de $1.00 peso por $1.00 dólar, a partir de esta fecha el peso comenzó a devaluarse (pérdida de valor de una moneda nacional frente a otra extranjera).

En los gobiernos de Adolfo López Mateos y Gustavo Díaz Ordaz no hubo inflación, por lo que el precio del peso mexicano mantuvo su valor con respecto al dólar $12.50, tal como se muestra en la siguiente gráfica:

Figura 1.6

1. Si Francisco compró un dólar diario durante el mes de noviembre de 1960 (en gobierno de Adolfo López Mateos). ¿Cuánto gasto al final de mes?

375.00

2. Realiza la gráfica del gasto de los 30 días.

3. ¿Y en el periodo del 12 al 15 de noviembre? Realiza el procedimiento algebraico y geométrico.

12.5 (Xf − Xi)

12.5(15 − 12) = 37.5

4. ¿Cómo determinas la cantidad que pago en un periodo determinado?

12.5 (Xf − Xi)

5. ¿Que representa geométricamente el pago?

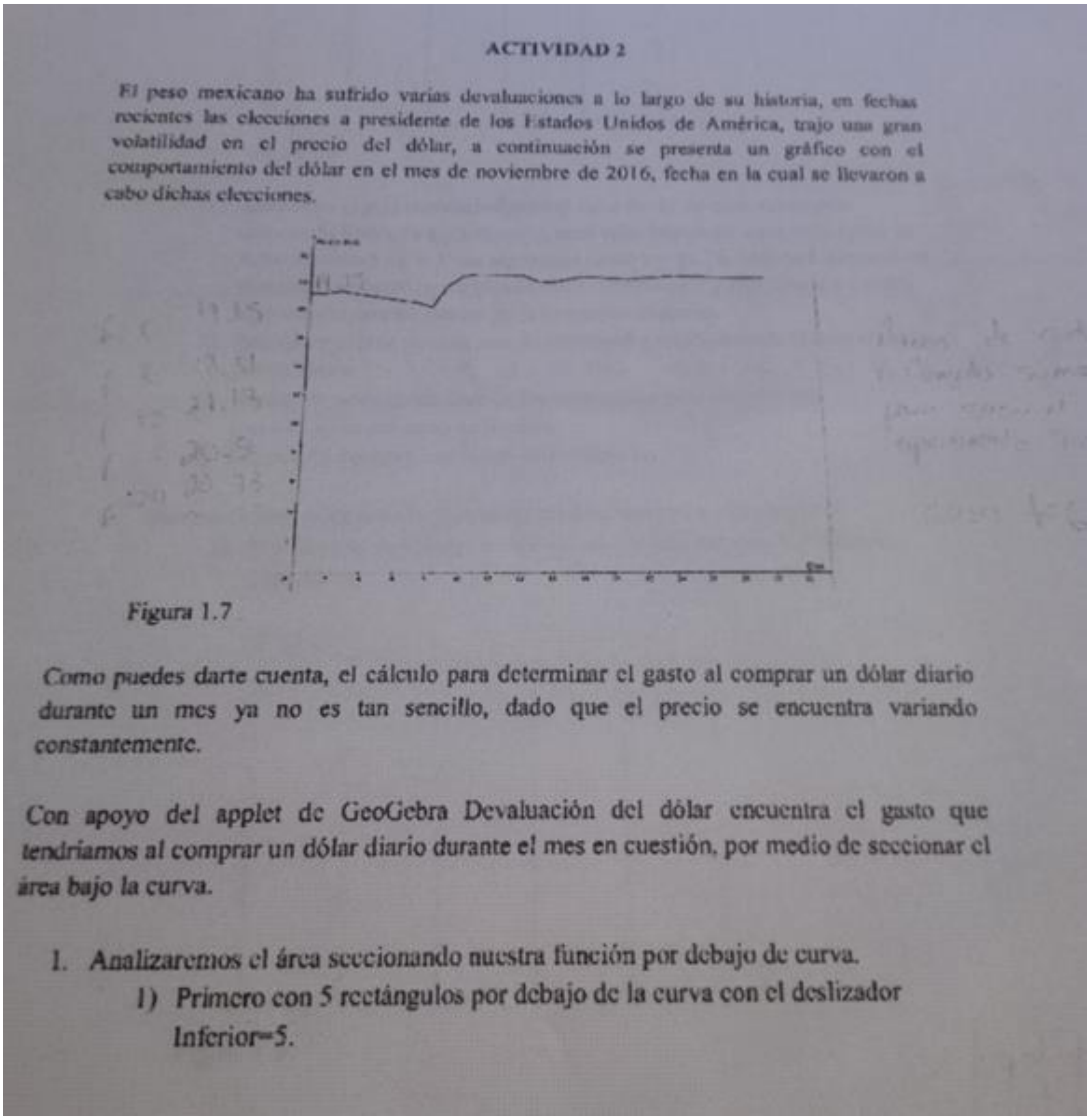
El area de un rectangulo

Tabla 4.10 Actividad 1

Lenguaje (objetos ostensivos)	Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos (objetos no ostensivos)
Reactivo 1 **Intervinientes** -Lenguaje natural: dólar, gasto. .	**Intervinientes** -Conceptos: Dólar, gasto. **Emergentes** • Argumentos: $gasto = precio\ x\ días$
Reactivo 2 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Gasto, gráfica. -Lenguaje figural: Realiza la gráfica de los 30 días. **Emergentes** -Lenguaje natural: Área bajo la curva.	**Intervinientes** -Conceptos: Función, dominio, rango, multiplicaciones de dos magnitudes, gráfica de una función. **Emergentes** • Conceptos: Variable dependiente, variable independiente, gasto como el área bajo la curva.
Reactivo 3 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Período, procedimiento algebraico y procedimiento geométrico.	**Intervinientes** -Conceptos: Función, dominio, rango, multiplicaciones de dos magnitudes, gráfica de una función. **Emergentes** • Conceptos: Variable dependiente, variable independiente. • Argumentos: $g = 12.5(xf - xi)$ • Procedimientos: • $g = 12.5(15 - 12) = 37.5$
Reactivo 4 **Intervinientes**	**Intervinientes**

-Lenguaje natural: Pago, periodo.	-Conceptos: Función, dominio, rango, multiplicaciones de dos magnitudes, gráfica de una función. **Emergentes** • Conceptos: Variable dependiente, variable independiente. • Argumentos: 12.5 $(xf - xi)$
Reactivo 5 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Representación geométrica.	**Intervinientes** -Conceptos: Representación geométrica. **Emergentes** • Concepto: área de un rectángulo.

Como puede observarse en la Tabla 4.10, el estudiante resolvió satisfactoriamente la actividad, emergiendo todos los objetos matemáticos previstos para esta actividad en el análisis a priori. Se puede observar que alumno ya se encuentra familiarizado con el concepto del área para resolver este tipo de problemas.



ACTIVIDAD 2

El peso mexicano ha sufrido varias devaluaciones a lo largo de su historia, en fechas recientes las elecciones a presidente de los Estados Unidos de América, trajo una gran volatilidad en el precio del dólar, a continuación se presenta un gráfico con el comportamiento del dólar en el mes de noviembre de 2016, fecha en la cual se llevaron a cabo dichas elecciones.

Figura 1.7

Como puedes darte cuenta, el cálculo para determinar el gasto al comprar un dólar diario durante un mes ya no es tan sencillo, dado que el precio se encuentra variando constantemente.

Con apoyo del applet de GeoGebra Devaluación del dólar encuentra el gasto que tendríamos al comprar un dólar diario durante el mes en cuestión, por medio de seccionar el área bajo la curva.

1. Analizaremos el área seccionando nuestra función por debajo de curva.
    1) Primero con 5 rectángulos por debajo de la curva con el deslizador Inferior=5.

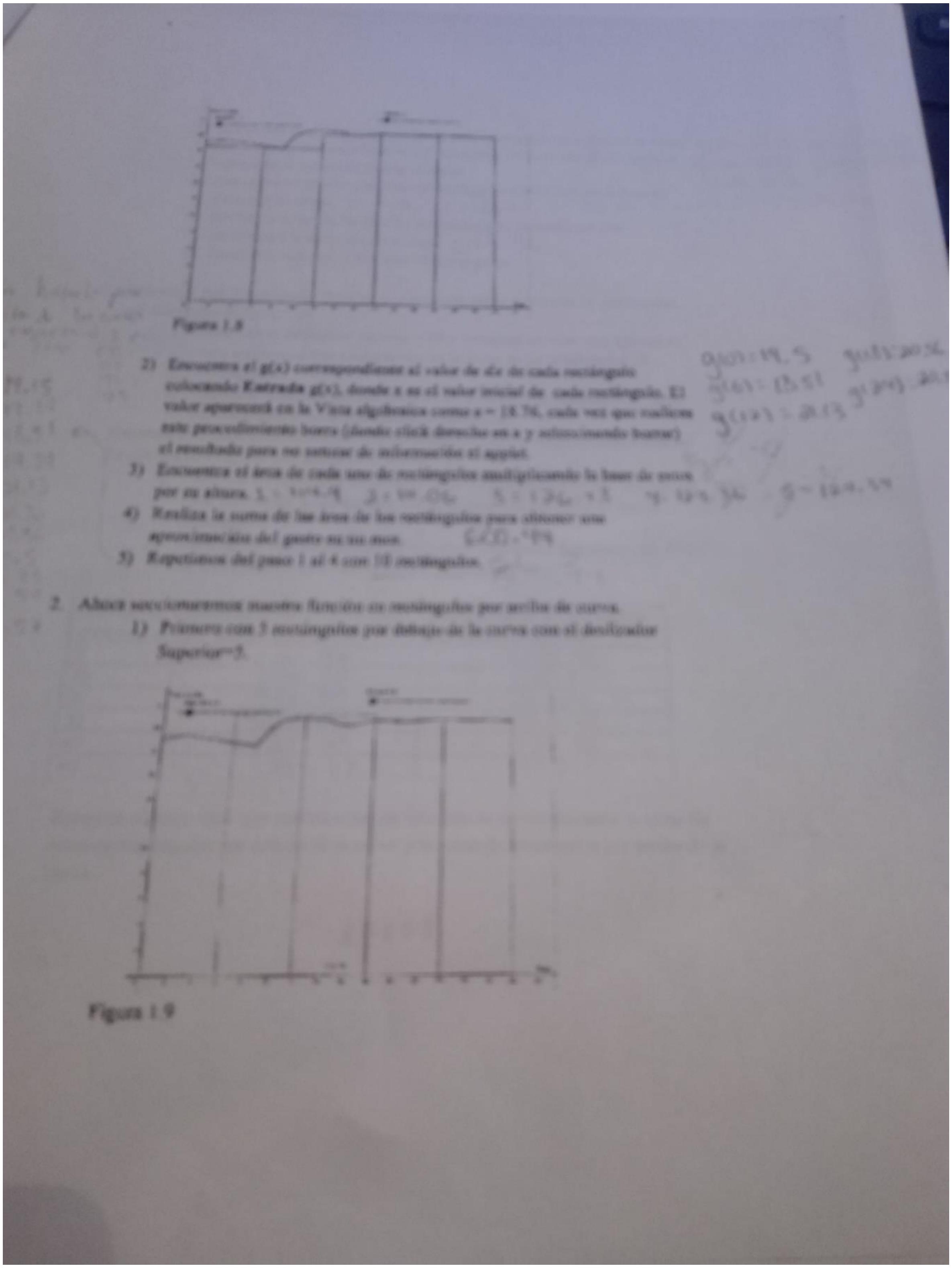


Figura 1.8

2) Encuentra el g(x) correspondiente al valor de día de cada rectángulo colocando **Entrada** g(x), donde x es el valor inicial de cada rectángulo. El valor aparecerá en la Vista algebraica como a = 18.76, cada vez que realices este procedimiento borra (dando click derecho en a y seleccionando borrar) el resultado para no saturar de información el applet.

3) Encuentra el área de cada uno de rectángulos multiplicando la base de estos por su altura. 1 = 114.9 2 = 119.06 3 = 126.43 4 = 123.36 5 = 124.54

4) Realiza la suma de las áreas de los rectángulos para obtener una aproximación del gasto en un mes. S(5) = 494

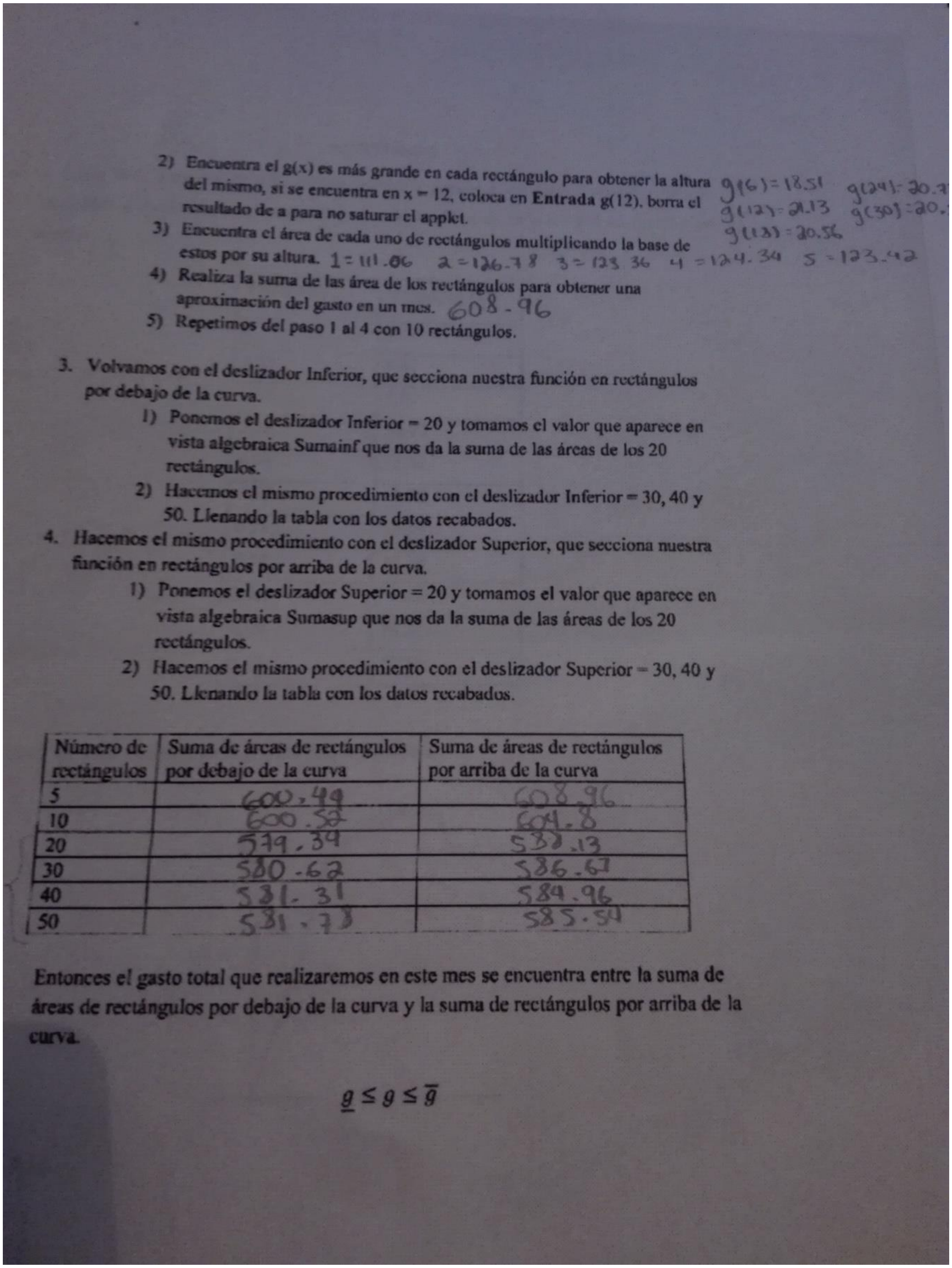
5) Repetimos del paso 1 al 4 con 10 rectángulos.

g(0) = 19.5 g(18) = 20.56
g(6) = 13.51 g(24) = 20.1
g(12) = 20.13

2. Ahora seccionaremos nuestra función en rectángulos por arriba de curva.

1) Primero con 5 rectángulos por debajo de la curva con el deslizador Superior=5.

Figura 1.9



2) Encuentra el g(x) es más grande en cada rectángulo para obtener la altura del mismo, si se encuentra en x = 12, coloca en **Entrada** g(12), borra el resultado de a para no saturar el applet.

g(6)=18.51 g(24)=20.7
g(12)=21.13 g(30)=20.
g(18)=20.56

3) Encuentra el área de cada uno de rectángulos multiplicando la base de estos por su altura. 1=111.06 2=126.78 3=123.36 4=124.34 5=123.42

4) Realiza la suma de las área de los rectángulos para obtener una aproximación del gasto en un mes. 608-96

5) Repetimos del paso 1 al 4 con 10 rectángulos.

3. Volvamos con el deslizador Inferior, que secciona nuestra función en rectángulos por debajo de la curva.
   1) Ponemos el deslizador Inferior = 20 y tomamos el valor que aparece en vista algebraica Sumainf que nos da la suma de las áreas de los 20 rectángulos.
   2) Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador Inferior = 30, 40 y 50. Llenando la tabla con los datos recabados.
4. Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador Superior, que secciona nuestra función en rectángulos por arriba de la curva.
   1) Ponemos el deslizador Superior = 20 y tomamos el valor que aparece en vista algebraica Sumasup que nos da la suma de las áreas de los 20 rectángulos.
   2) Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador Superior = 30, 40 y 50. Llenando la tabla con los datos recabados.

Número de rectángulos	Suma de áreas de rectángulos por debajo de la curva	Suma de áreas de rectángulos por arriba de la curva
5	600.49	608.96
10	600.52	604.8
20	579.39	582.13
30	580.62	586.67
40	581.31	584.96
50	581.78	585.54

Entonces el gasto total que realizaremos en este mes se encuentra entre la suma de áreas de rectángulos por debajo de la curva y la suma de rectángulos por arriba de la curva.

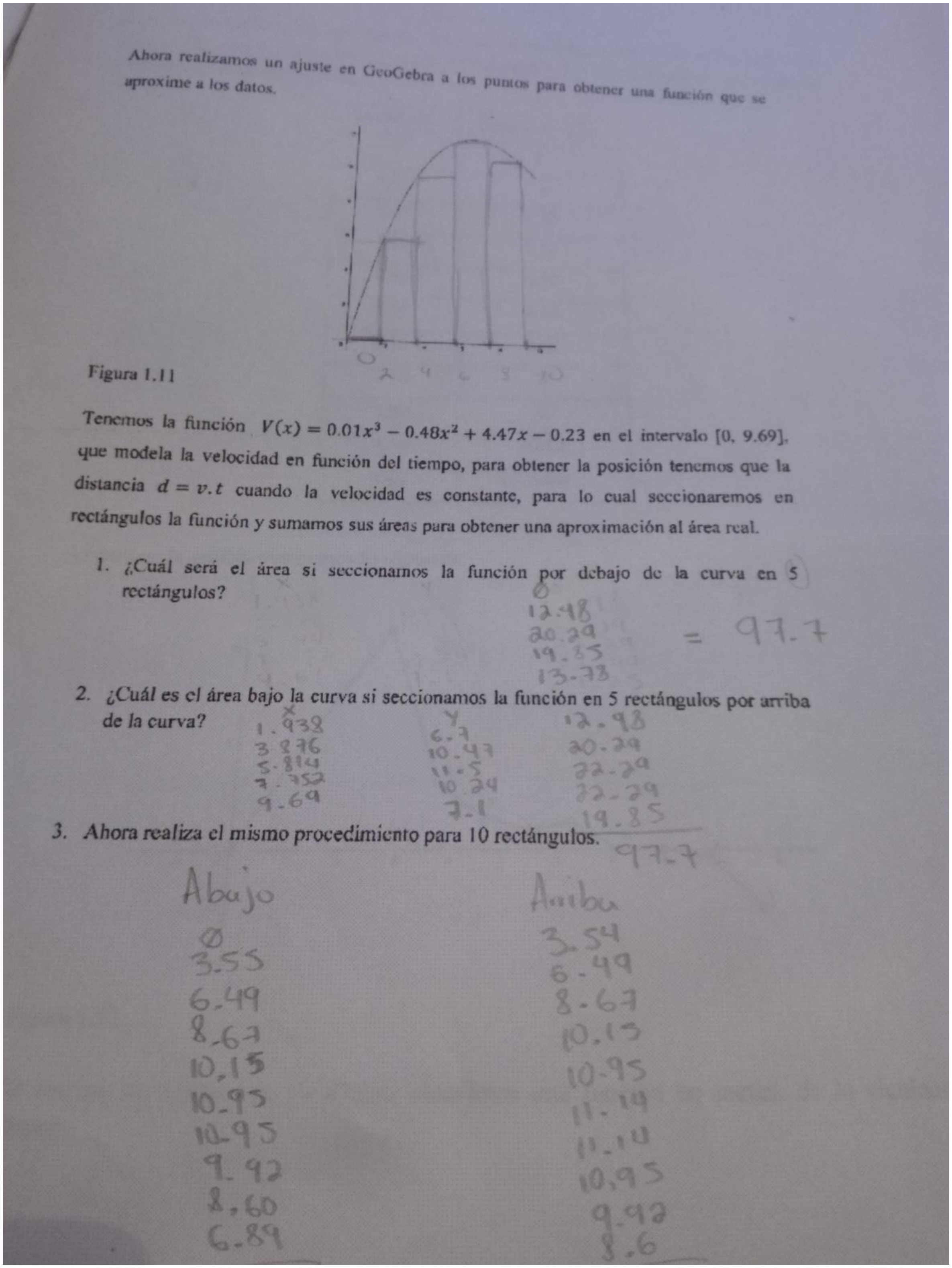
$$\underline{g} \leq g \leq \overline{g}$$

Tabla 4.11 Actividad 2

Lenguaje (objetos ostensivos)	Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos (objetos no ostensivos)
Intervinientes -Lenguaje natural: Gasto, gráfica. -Lenguaje figural: Seccionar la función por debajo de la curva. **Emergentes** -Lenguaje natural: Área bajo la curva.	**Intervinientes** -Conceptos: Función, dominio, rango, multiplicaciones de dos magnitudes, gráfica de una función. **Emergentes** - Conceptos: Variable dependiente, variable independiente, gasto como el área bajo la curva. - Procedimientos: I. Analizaremos el área seccionando nuestra función por debajo de curva. 1) Primero con *5* rectángulos por debajo de la curva con el deslizador $Inferior = 5$. 2) Encuentra el valor $g(x)$ correspondiente al valor de dx de cada rectángulo colocando Entrada *g(x)*, donde *x* es el valor inicial de cada rectángulo. El valor aparecerá en la Vista algebraica como $a = 18.76$, cada vez que realices este procedimiento borra (dando click derecho en a y seleccionando borrar) el resultado para no saturar de información el applet. 3) Encuentra el área de cada uno de rectángulos multiplicando la base de estos por su altura. 4) Realiza la suma de las áreas de los rectángulos para obtener una aproximación del gasto en un mes. 5) Repetimos del paso 1 al 4 con *10* rectángulos. I. Ahora seccionaremos nuestra función en rectángulos por arriba de curva. 1) Primero con *5* rectángulos por debajo de la curva con el deslizador $Superior = 5$. 2) Encuentra el *g(x)* es más grande en cada rectángulo para obtener la altura del mismo, si se

	encuentra en $x = 12$, coloca en Entrada *g (12)*, borra el resultado de a para no saturar el applet. 3) Encuentra el área de cada uno de rectángulos multiplicando la base de estos por su altura. 4) Realiza la suma de las áreas de los rectángulos para obtener una aproximación del gasto en un mes. 5) Repetimos del paso 1 al 4 con *10* rectángulos. Volvamos con el deslizador Inferior, que secciona nuestra función en rectángulos por debajo de la curva. 1) Ponemos el deslizador $Inferior = 20$ y tomamos el valor que aparece en vista algebraica *Sumainf* que nos da la suma de las áreas de los *20* rectángulos. 2) Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador $Inferior = 30, 40$ y 50. Llenando la tabla con los datos recabados. 4. Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador Superior, que secciona nuestra función en rectángulos por arriba de la curva. 1) Ponemos el deslizador $Superior = 20$ y tomamos el valor que aparece en vista algebraica *Sumasup* que nos da la suma de las áreas de los *20* rectángulos. 2) Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador $Superior = 30, 40$ y 50. Llenando la tabla con los datos recabados. • Argumentos: área bajo la curva, $581.78 \leq g \leq 585.54$

La actividad que describe la tabla 4.11 se lleva a cabo con apoyo del software de matemática dinámica GeoGebra, lo que hace simplificar algunos procedimientos, el estudiante obtuvo los resultados esperados en dicha actividad, emergiendo los objetos matemáticos esperados, ya utilizando el concepto de área bajo la curva y como obtener una aproximación por medio de la segmentación en rectángulos.



Ahora realizamos un ajuste en GeoGebra a los puntos para obtener una función que se aproxime a los datos.

Figura 1.11

Tenemos la función $V(x) = 0.01x^3 - 0.48x^2 + 4.47x - 0.23$ en el intervalo [0, 9.69], que modela la velocidad en función del tiempo, para obtener la posición tenemos que la distancia $d = v.t$ cuando la velocidad es constante, para lo cual seccionaremos en rectángulos la función y sumamos sus áreas para obtener una aproximación al área real.

1. ¿Cuál será el área si seccionamos la función por debajo de la curva en 5 rectángulos?

0
12.98
20.29
19.35
13.73

= 97.7

2. ¿Cuál es el área bajo la curva si seccionamos la función en 5 rectángulos por arriba de la curva?

x	y	
1.938	6.7	12.98
3.876	10.47	20.29
5.814	11.5	22.29
7.752	10.24	22.29
9.69	7.1	19.85
		97.7

3. Ahora realiza el mismo procedimiento para 10 rectángulos.

Abajo	Arriba
0	3.54
3.55	6.49
6.49	8.67
8.67	10.15
10,15	10.95
10.95	11.19
10.95	11.19
9.92	10,95
8,60	9.92
6.89	8.6

Tabla 4.12 Actividad 3

Lenguaje (objetos ostensivos)	Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos (objetos no ostensivos)
Reactivo 1 **Intervinientes** -Lenguaje natural: seccionar por debajo de la curva. .	**Intervinientes** -Conceptos: curva, seccionar, rectángulos, suma de áreas. **Emergentes** • Argumentos: $V(x) = 0.01x^3 - 0.48x^2 + 4.47x - 0.23$ $d = v.t$ • Procedimientos: a) Primero se secciona la función por debajo de la curva en 5 rectángulos. b) Luego se determina el valor de las bases de los rectángulos dx dividiendo el dominio entre 5. $dx = 9.69/5 = 1.938$ c) Después se determina el volumen para cada rectángulo con la función $V(x)$ por debajo de curva (es decir, se toma el valor inferior dx del rectángulo) d) A continuación, se determina el área de cada rectángulo al multiplicar $V(x).dx$ e) Por último, se realiza la suma de áreas para obtener una aproximación del área total bajo la curva en este caso 97.7
Reactivo 2 **Intervinientes** -Lenguaje natural: seccionar por debajo de la curva. .	**Intervinientes** -Conceptos: curva, seccionar, rectángulos, suma de áreas. **Emergentes** • Argumentos: $V(x) = 0.01x^3 - 0.48x^2 + 4.47x - 0.23$ $d = v.t$ • Procedimientos:

	a) Primero se secciona la función por arriba de la curva en 5 rectángulos. b) Luego se determina el valor de las bases de los rectángulos dx dividiendo el dominio entre 5. $dx = 9.69/5 = 1.938$ c) Después se determina el volumen para cada rectángulo con la función $V(x)$ por arriba de la curva (es decir, se toma el valor superior dx del rectángulo) d) A continuación, se determina el área de cada rectángulo al multiplicar $V(x).dx$ • Por último, se realiza la suma de áreas para obtener una aproximación del área total bajo la curva en este caso 97.7
Reactivo 3 **Intervinientes** -Lenguaje natural: seccionar por debajo de la curva. .	**Intervinientes** -Conceptos: curva, seccionar, rectángulos, suma de áreas. **Emergentes** • Argumentos: $V(x) = 0.01x^3 - 0.48x^2 + 4.47x - 0.23$ $d = v.t$ • Procedimientos: a) Primero se secciona la función por debajo de la curva en 10 rectángulos. b) Luego se determina el valor de las bases de los rectángulos dx dividiendo el dominio entre 10. $dx = \frac{9.69}{10} = 0.969$ c) Después se determina el volumen para cada rectángulo con la función $V(x)$ por debajo de curva (es decir, se toma el valor inferior dx del rectángulo) d) A continuación, se determina el área de cada rectángulo al multiplicar $V(x).dx$

	e) Por último, se realiza la suma de áreas para obtener una aproximación del área total bajo la curva en este caso 76.17 f) Después se determina el volumen para cada rectángulo con la función $V(x)$ por arriba de la curva (es decir, se toma el valor superior dx del rectángulo) g) A continuación, se determina el área de cada rectángulo al multiplicar $V(x).dx$ h) Por último, se realiza la suma de áreas para obtener una aproximación del área total bajo la curva en este caso 91.56

La Tabla 4.12 se refiere a la actividad 3 del estudiante 1 en la cual podemos observar que realizó lo que esperado en el análisis a priori, emergieron los objetos matemáticos primarios descritos, utilizando correctamente la aproximación al área por medio de la segmentación en rectángulos. Cabe mencionar que en esta ocasión los cálculos se realizaron sólo con la ayuda de una calculadora, aplicando los objetos matemáticos necesarios para su resolución.

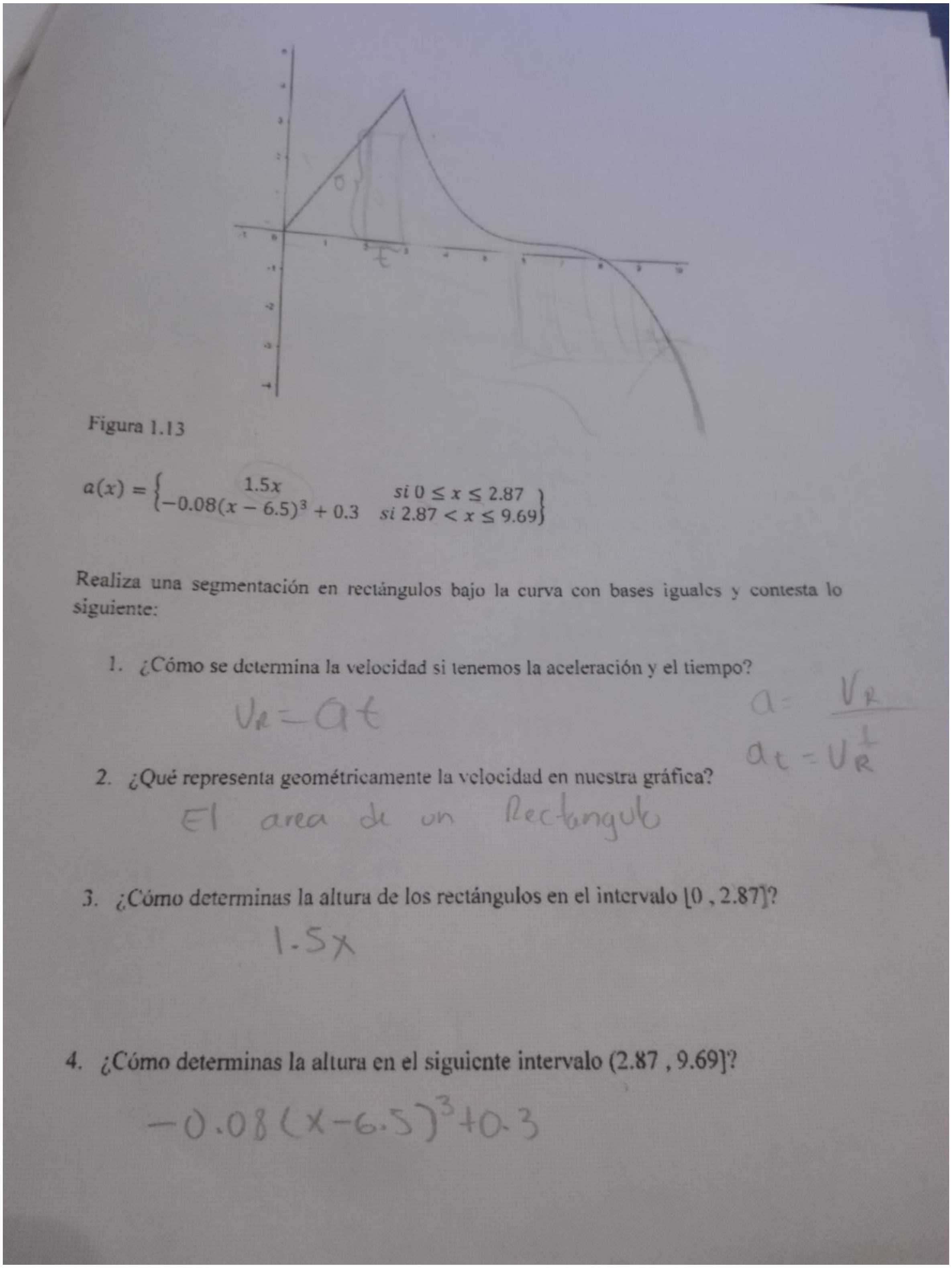


Figura 1.13

$$a(x) = \begin{cases} 1.5x & si\ 0 \le x \le 2.87 \\ -0.08(x-6.5)^3 + 0.3 & si\ 2.87 < x \le 9.69 \end{cases}$$

Realiza una segmentación en rectángulos bajo la curva con bases iguales y contesta lo siguiente:

1. ¿Cómo se determina la velocidad si tenemos la aceleración y el tiempo?

$V_R = at$

$a = \frac{V_R}{}$

$a_t = V_R^1$

2. ¿Qué representa geométricamente la velocidad en nuestra gráfica?

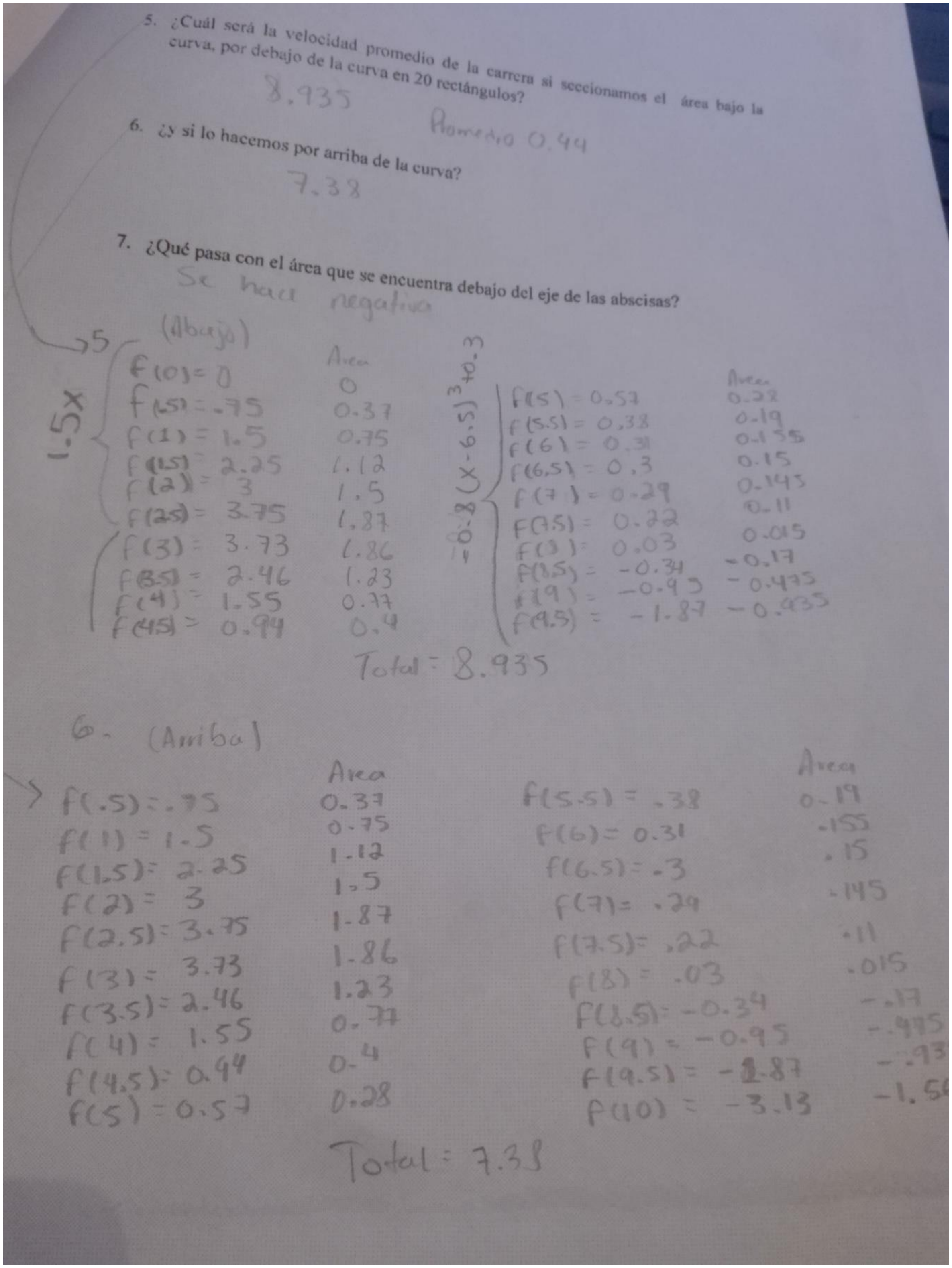
El area de un Rectangulo

3. ¿Cómo determinas la altura de los rectángulos en el intervalo [0 , 2.87]?

$1.5x$

4. ¿Cómo determinas la altura en el siguiente intervalo (2.87 , 9.69]?

$-0.08(x-6.5)^3+0.3$



5. ¿Cuál será la velocidad promedio de la carrera si seccionamos el área bajo la curva, por debajo de la curva en 20 rectángulos?

8.935

Promedio 0.44

6. ¿y si lo hacemos por arriba de la curva?

7.38

7. ¿Qué pasa con el área que se encuentra debajo del eje de las abscisas?

Se hace negativa

5 (Abajo)

$1.5x$

$-0.8(x-6.5)^3+0.3$

	Area		Area
f(0) = 0	0	f(5) = 0.57	0.28
f(.5) = .75	0.37	f(5.5) = 0.38	0.19
f(1) = 1.5	0.75	f(6) = 0.31	0.155
f(1.5) = 2.25	1.12	f(6.5) = 0.3	0.15
f(2) = 3	1.5	f(7) = 0.29	0.145
f(2.5) = 3.75	1.87	f(7.5) = 0.22	0.11
f(3) = 3.73	1.86	f(8) = 0.03	0.015
f(3.5) = 2.46	1.23	f(8.5) = -0.34	-0.17
f(4) = 1.55	0.77	f(9) = -0.95	-0.475
f(4.5) = 0.94	0.4	f(9.5) = -1.87	-0.935

Total = 8.935

6. (Arriba)

	Area		Area
f(.5) = .75	0.37	f(5.5) = .38	0.19
f(1) = 1.5	0.75	f(6) = 0.31	.155
f(1.5) = 2.25	1.12	f(6.5) = .3	.15
f(2) = 3	1.5	f(7) = .29	.145
f(2.5) = 3.75	1.87	f(7.5) = .22	.11
f(3) = 3.73	1.86	f(8) = .03	.015
f(3.5) = 2.46	1.23	f(8.5) = -0.34	-.17
f(4) = 1.55	0.77	f(9) = -0.95	-.475
f(4.5) = 0.44	0.4	f(9.5) = -1.87	-.93
f(5) = 0.57	0.28	f(10) = -3.13	-1.5

Total = 7.38

Tabla 4.13 Actividad 3

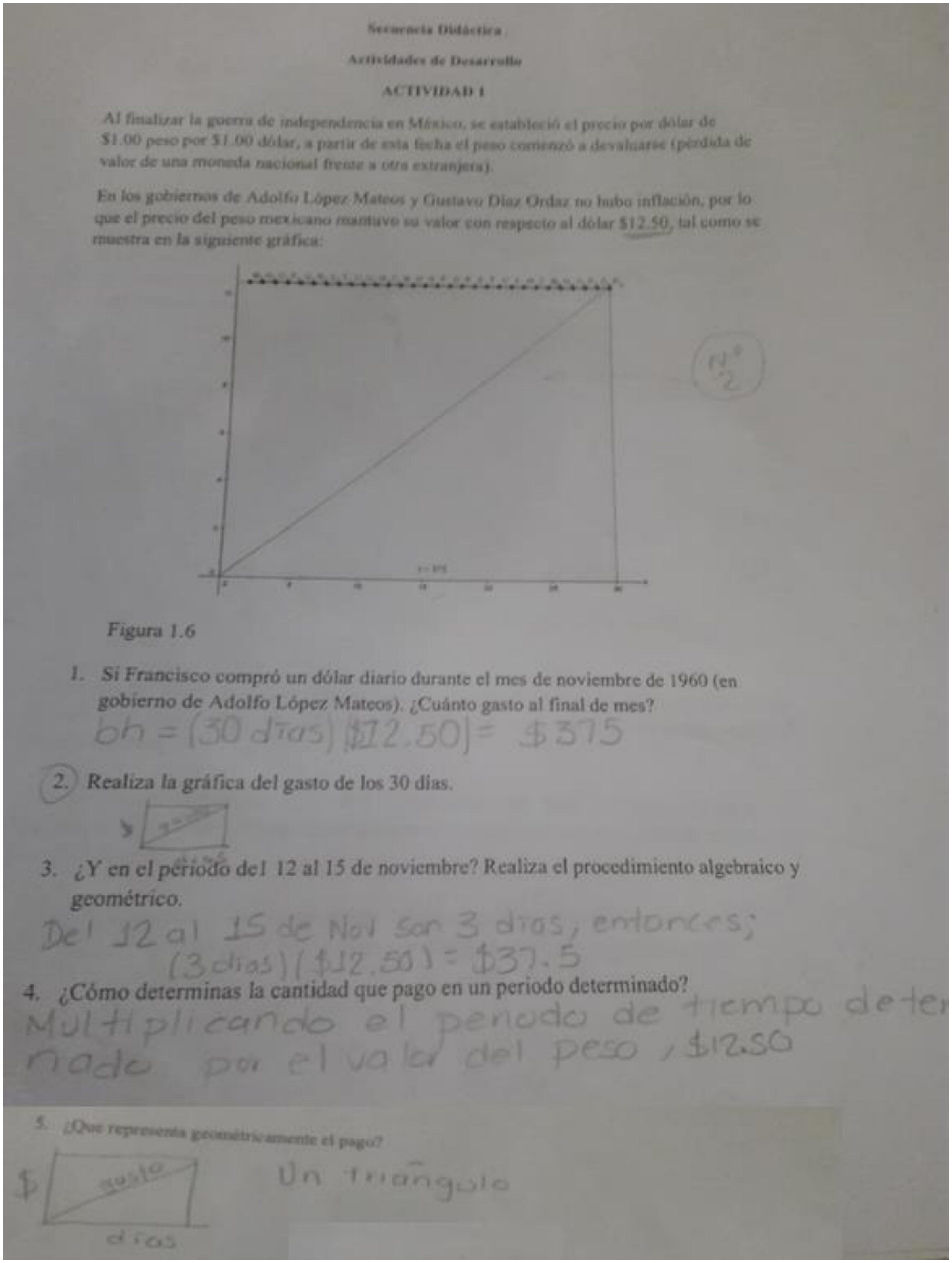
Lenguaje (objetos ostensivos)	Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos (objetos no ostensivos)
Reactivo 1 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Velocidad, aceleración, tiempo.	**Intervinientes** -Conceptos: velocidad, aceleración y tiempo. **Emergentes** - Argumentos: $v = a.t$
Reactivo 2 **Intervinientes** -Lenguaje natural: representación geométrica, velocidad.	**Intervinientes** -Conceptos: representación geométrica, velocidad **Emergentes** Conceptos: área de un rectángulo.
Reactivo 3 **Intervinientes** -Lenguaje natural: altura, rectángulos, intervalo. .	**Intervinientes** -Conceptos: altura, rectángulos, intervalo. **Emergentes** - Argumentos: $altura = 1.5x$
Reactivo 4 **Intervinientes** -Lenguaje natural: altura, rectángulos, intervalo. .	**Intervinientes** -Conceptos: altura, rectángulos, intervalo. **Emergentes** - Argumentos: $altura = -0.089(x - 6.5)^3 + 0.3$
Reactivo 5 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Velocidad, aceleración, tiempo.	**Intervinientes** -Conceptos: velocidad, aceleración y tiempo. **Emergentes** - Argumentos: $v = a.t$ - Procedimientos: a) Primero se secciona la función por debajo de la curva en 20 rectángulos.

	b) Luego se determina el valor de las bases de los rectángulos dx dividiendo el dominio entre 20. $$dx = \frac{9.69}{20} = 0.4845$$ c) Después se determina el volumen para cada rectángulo con la función $V(x)$ por debajo de curva (es decir, se toma el valor inferior dx del rectángulo) d) A continuación, se determina el área de cada rectángulo al multiplicar $V(x).dx$ e) Por último, se realiza la suma de áreas para obtener una aproximación del área total bajo la curva en este caso 8.935
Reactivo 6 **Intervinientes** -Lenguaje natural: representación geométrica, velocidad.	**Intervinientes** - Conceptos: velocidad, aceleración y tiempo. **Emergentes** - Argumentos: $v = a.t$ - Procedimientos: a) Primero se secciona la función por arriba de la curva en 20 rectángulos. b) Luego se determina el valor de las bases de los rectángulos dx dividiendo el dominio entre 20. $$dx = \frac{9.69}{20} = 0.4845$$ c) Después se determina el volumen para cada rectángulo con la función $V(x)$ por arriba de la curva (es decir, se toma el valor superior dx del rectángulo) d) A continuación, se determina el área de cada rectángulo al multiplicar $V(x).dx$ Por último, se realiza la suma de áreas para obtener una aproximación del área total bajo la curva en este caso 7.38
Reactivo 7	**Intervinientes**

Intervinientes -Lenguaje natural: área, eje abscisas	- Conceptos: área, eje abscisas. **Emergentes** -Conceptos: Por debajo de las abscisas se toma negativo.

Los comentarios sobre esta tabla son similares a los de la tabla anterior.

Estudiante 2



Secuencia Didáctica

Actividades de Desarrollo

ACTIVIDAD 1

Al finalizar la guerra de independencia en México, se estableció el precio por dólar de $1.00 peso por $1.00 dólar, a partir de esta fecha el peso comenzó a devaluarse (pérdida de valor de una moneda nacional frente a otra extranjera).

En los gobiernos de Adolfo López Mateos y Gustavo Díaz Ordaz no hubo inflación, por lo que el precio del peso mexicano mantuvo su valor con respecto al dólar $12.50, tal como se muestra en la siguiente gráfica:

N° 2

Figura 1.6

1. Si Francisco compró un dólar diario durante el mes de noviembre de 1960 (en gobierno de Adolfo López Mateos). ¿Cuánto gasto al final de mes?

bh = (30 días)($12.50) = $375

2. Realiza la gráfica del gasto de los 30 días.

3. ¿Y en el periodo del 12 al 15 de noviembre? Realiza el procedimiento algebraico y geométrico.

Del 12 al 15 de Nov son 3 días, entonces;
(3 días)($12.50) = $37.5

4. ¿Cómo determinas la cantidad que pago en un periodo determinado?

Multiplicando el periodo de tiempo deter
nado por el valor del peso, $12.50

5. ¿Que representa geométricamente el pago?

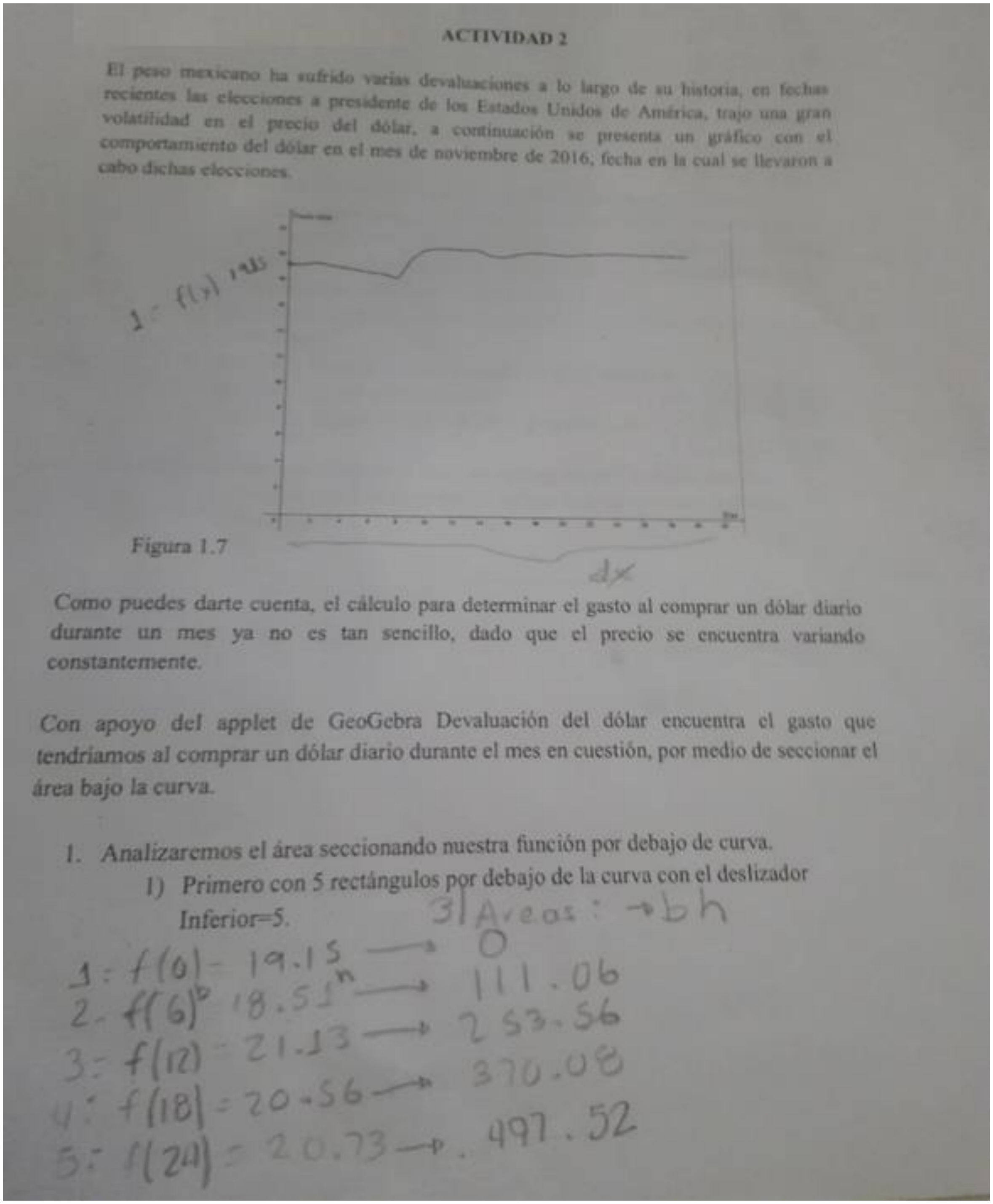
Un triangulo

Tabla 4.14 Actividad 1

Lenguaje (objetos ostensivos)	Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos (objetos no ostensivos)
Reactivo 1 **Intervinientes** -Lenguaje natural: dólar, gasto. .	**Intervinientes** -Conceptos: Dólar, gasto. **Emergentes** - Argumentos: $gasto = precio\ x\ días$
Reactivo 2 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Gasto, gráfica. -Lenguaje figural: Realiza la gráfica de los 30 días. **Emergentes** -Lenguaje natural: Área bajo la curva.	**Intervinientes** -Conceptos: Función, dominio, rango, multiplicaciones de dos magnitudes, gráfica de una función. **Emergentes** - Conceptos: Variable dependiente, variable independiente, gasto como el área bajo la curva.
Reactivo 3 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Período, procedimiento algebraico y procedimiento geométrico.	**Intervinientes** -Conceptos: Función, dominio, rango, multiplicaciones de dos magnitudes, gráfica de una función. **Emergentes** - Conceptos: Variable dependiente, variable independiente. - Argumentos: 12.5 $(\#\ días)$ - Procedimientos: $(12.5)(3\ días) = \$37.5$
Reactivo 4 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Pago, periodo.	**Intervinientes** -Conceptos: Función, dominio, rango, multiplicaciones de dos magnitudes, gráfica de una función.

	Emergentes - Conceptos: Variable dependiente, variable independiente. - Argumentos: 12.5 $(\#\ días)$
Reactivo 5 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Representación geométrica.	**Intervinientes** -Conceptos: Representación geométrica. **Emergentes** - Concepto: área de un triángulo.

En la tabla 4.14 se puede observar que el estudiante ya puede determinar el área bajo la curva comprendida entre un intervalo aun cuando realizó correctamente los reactivos 1, 3 y 4 utilizando los objetos matemáticos primarios esperados, en el reactivo 2 Realiza la gráfica del gasto de los 30 días, hizo una gráfica de un triángulo y el reactivo 5 ¿Que representa geométricamente el pago? su respuesta fue un triángulo, cuando la figura 1.16 se ve claramente que es un rectángulo.



ACTIVIDAD 2

El peso mexicano ha sufrido varias devaluaciones a lo largo de su historia, en fechas recientes las elecciones a presidente de los Estados Unidos de América, trajo una gran volatilidad en el precio del dólar, a continuación se presenta un gráfico con el comportamiento del dólar en el mes de noviembre de 2016, fecha en la cual se llevaron a cabo dichas elecciones.

Figura 1.7

Como puedes darte cuenta, el cálculo para determinar el gasto al comprar un dólar diario durante un mes ya no es tan sencillo, dado que el precio se encuentra variando constantemente.

Con apoyo del applet de GeoGebra Devaluación del dólar encuentra el gasto que tendríamos al comprar un dólar diario durante el mes en cuestión, por medio de seccionar el área bajo la curva.

1. Analizaremos el área seccionando nuestra función por debajo de curva.
   1) Primero con 5 rectángulos por debajo de la curva con el deslizador Inferior=5.

3| Areas: → bh

1: f(0) = 19.15 → 0

2. $f(6)^{b}$ 18.51^{n} → 111.06

3: f(12) = 21.13 → 253.56

4: f(18) = 20.56 → 370.08

5: f(24) = 20.73 → 497.52

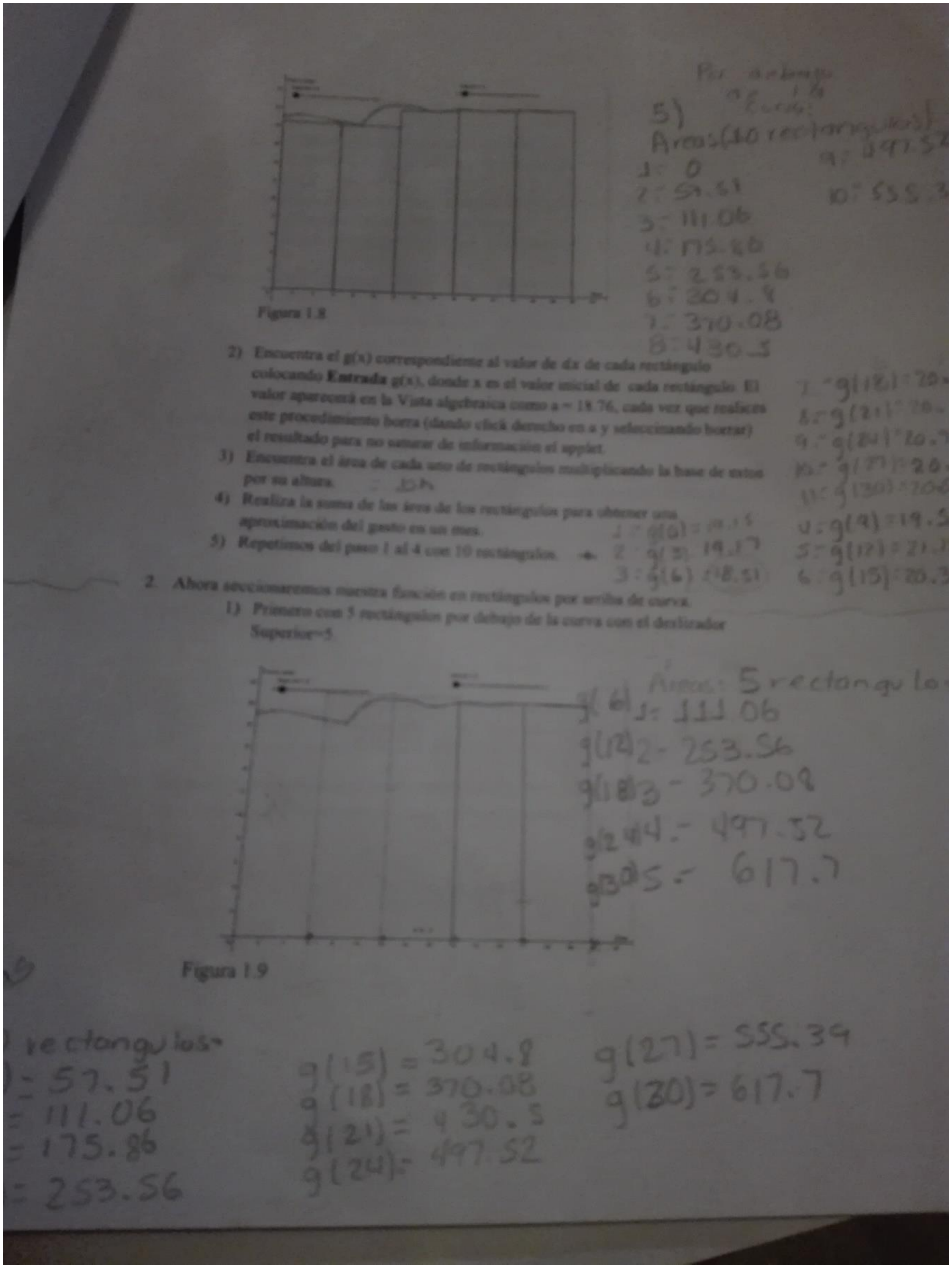


Figura 1.8

2) Encuentra el g(x) correspondiente al valor de dx de cada rectángulo colocando **Entrada** g(x), donde x es el valor inicial de cada rectángulo. El valor aparecerá en la Vista algebraica como a = 18.76, cada vez que realices este procedimiento borra (dando click derecho en a y seleccionando borrar) el resultado para no saturar de información el applet.
3) Encuentra el área de cada uno de rectángulos multiplicando la base de estos por su altura. = 10h
4) Realiza la suma de las área de los rectángulos para obtener una aproximación del gasto en un mes.
5) Repetimos del paso 1 al 4 con 10 rectángulos.

2. Ahora seccionaremos nuestra función en rectángulos por arriba de curva.
   1) Primero con 5 rectángulos por debajo de la curva con el deslizador Superior=5.

Figura 1.9

Por debajo de la curva:

5) Areas(10 rectangulos)
1: 0
2: 59.51
3: 111.06
4: 175.86
5: 253.56
6: 304.8
7: 370.08
8: 430.5
9: 497.52
10: 555.3

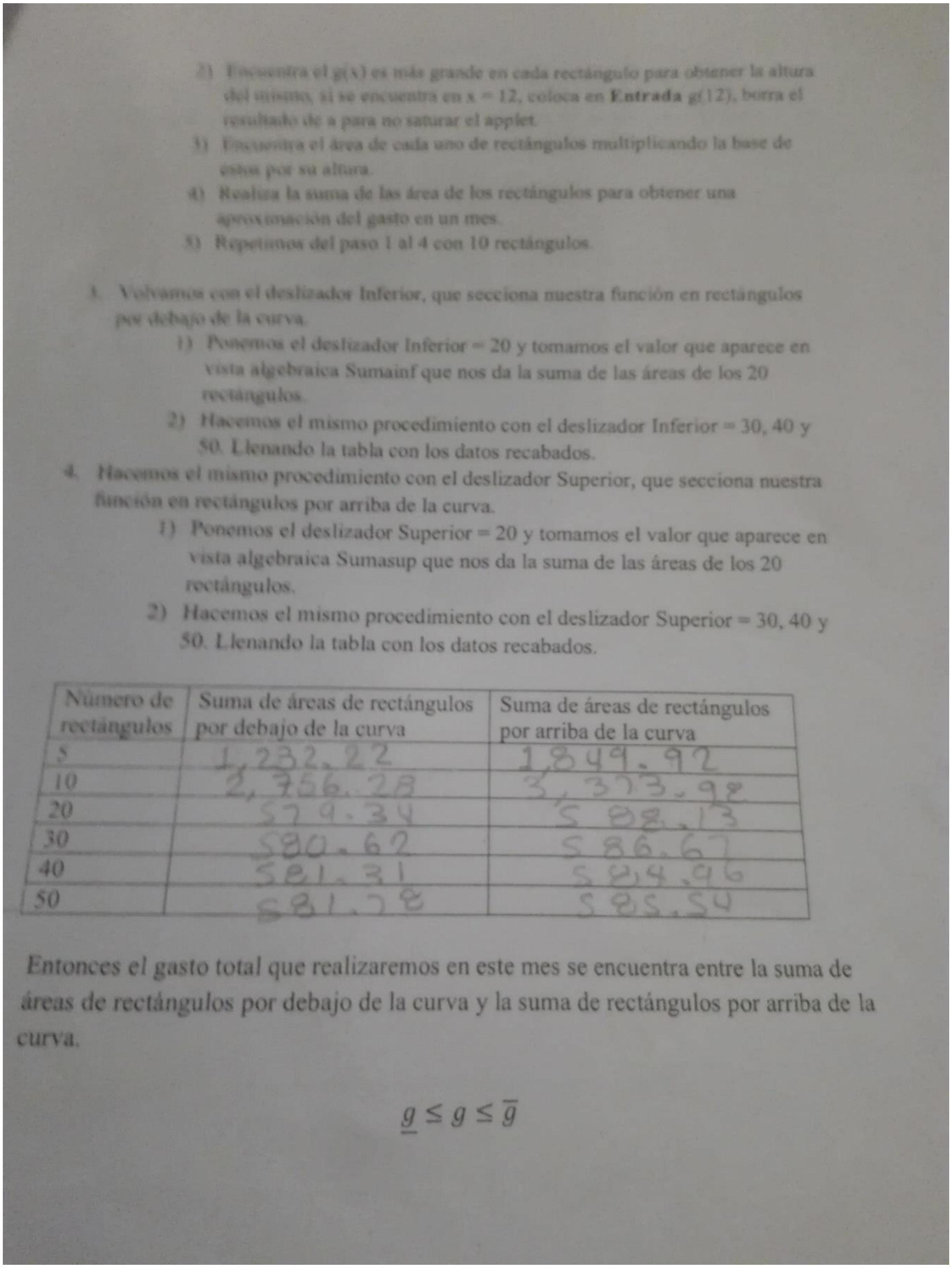
1: g(0) = 19.15
2: g(3) 19.17
3: g(6) 18.51
4: g(9) = 19.5
5: g(12) = 21.
6: g(15) = 20.3
7: g(18) = 20.
8: g(21) = 20.
9: g(24) = 20.
10: g(27) = 20.
11: g(30) = 20.

Areas: 5 rectangulos
g(6) 1: 111.06
g(12) 2 - 253.56
g(18) 3 - 370.08
g(24) 4 - 497.52
g(30) 5 - 617.7

rectangulos
- 57.51
= 111.06
= 175.86
= 253.56

g(15) = 304.8
g(18) = 370.08
g(21) = 430.5
g(24) = 497.52

g(27) = 555.39
g(30) = 617.7



2) Encuentra el g(x) es más grande en cada rectángulo para obtener la altura del mismo, si se encuentra en x = 12, coloca en **Entrada** g(12), borra el resultado de a para no saturar el applet.
3) Encuentra el área de cada uno de rectángulos multiplicando la base de estos por su altura.
4) Realiza la suma de las área de los rectángulos para obtener una aproximación del gasto en un mes.
5) Repetimos del paso 1 al 4 con 10 rectángulos.

3. Volvamos con el deslizador Inferior, que secciona nuestra función en rectángulos por debajo de la curva.
    1) Ponemos el deslizador Inferior = 20 y tomamos el valor que aparece en vista algebraica Sumainf que nos da la suma de las áreas de los 20 rectángulos.
    2) Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador Inferior = 30, 40 y 50. Llenando la tabla con los datos recabados.
4. Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador Superior, que secciona nuestra función en rectángulos por arriba de la curva.
    1) Ponemos el deslizador Superior = 20 y tomamos el valor que aparece en vista algebraica Sumasup que nos da la suma de las áreas de los 20 rectángulos.
    2) Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador Superior = 30, 40 y 50. Llenando la tabla con los datos recabados.

Número de rectángulos	Suma de áreas de rectángulos por debajo de la curva	Suma de áreas de rectángulos por arriba de la curva
5	1,232.22	1,849.92
10	2,756.28	3,373.98
20	$79.34	$88.13
30	$80.62	$86.67
40	$81.31	$84.96
50	$81.78	$85.54

Entonces *el gasto total* que realizaremos en este mes se encuentra entre la suma de áreas de rectángulos por debajo de la curva y la suma de rectángulos por arriba de la curva.

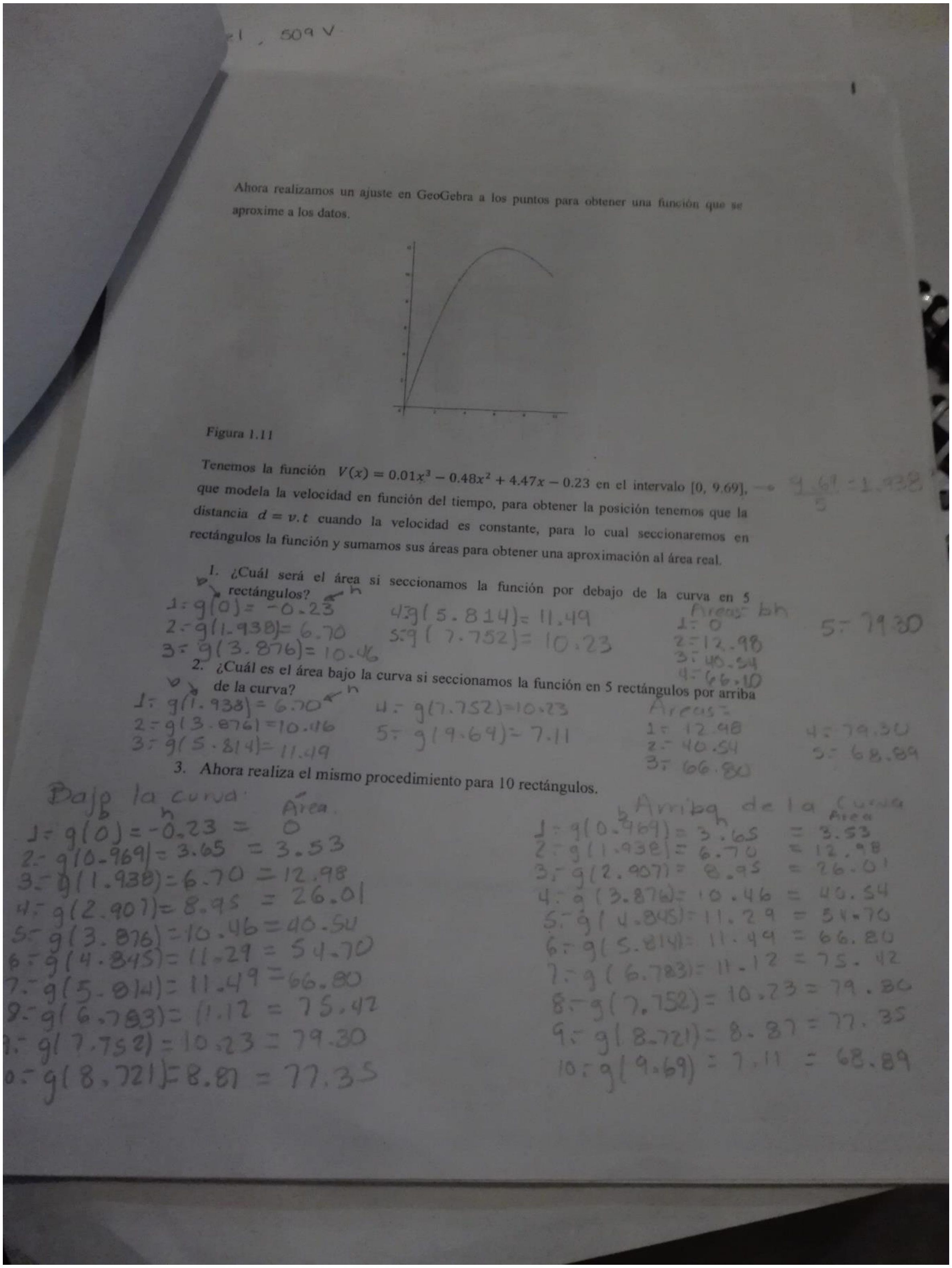
$$\underline{g} \leq g \leq \overline{g}$$

Tabla 4.15 Actividad 2

Lenguaje (objetos ostensivos)	Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos (objetos no ostensivos)
Intervinientes -Lenguaje natural: Gasto, gráfica. -Lenguaje figural: Seccionar la función por debajo de la curva. **Emergentes** -Lenguaje natural: Área bajo la curva.	**Intervinientes** -Conceptos: Función, dominio, rango, multiplicaciones de dos magnitudes, gráfica de una función. **Emergentes** - Conceptos: Variable dependiente, variable independiente, gasto como el área bajo la curva. - Procedimientos: I. Analizaremos el área seccionando nuestra función por debajo de curva. 1) Primero con *5* rectángulos por debajo de la curva con el deslizador $Inferior = 5$. 2) Encuentra el valor $g(x)$ correspondiente al valor de dx de cada rectángulo colocando Entrada *g(x)*, donde *x* es el valor inicial de cada rectángulo. El valor aparecerá en la Vista algebraica como $a = 18.76$, cada vez que realices este procedimiento borra (dando click derecho en a y seleccionando borrar) el resultado para no saturar de información el applet. 3) Encuentra el área de cada uno de rectángulos multiplicando la base de estos por su altura. 4) Realiza la suma de las áreas de los rectángulos para obtener una aproximación del gasto en un mes. 5) Repetimos del paso 1 al 4 con *10* rectángulos. V. Ahora seccionaremos nuestra función en rectángulos por arriba de curva. 2) Primero con *5* rectángulos por debajo de la curva con el deslizador $Superior = 5$. 2) Encuentra el *g(x)* es más grande en cada rectángulo para obtener la altura del mismo, si se

	encuentra en $x = 12$, coloca en Entrada *g (12)*, borra el resultado de a para no saturar el applet. 3) Encuentra el área de cada uno de rectángulos multiplicando la base de estos por su altura. 4) Realiza la suma de las áreas de los rectángulos para obtener una aproximación del gasto en un mes. 5) Repetimos del paso 1 al 4 con *10* rectángulos. Volvamos con el deslizador Inferior, que secciona nuestra función en rectángulos por debajo de la curva. 1) Ponemos el deslizador $Inferior = 20$ y tomamos el valor que aparece en vista algebraica *Sumainf* que nos da la suma de las áreas de los *20* rectángulos. 2) Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador $Inferior = 30, 40$ y 50. Llenando la tabla con los datos recabados. 4. Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador Superior, que secciona nuestra función en rectángulos por arriba de la curva. 1) Ponemos el deslizador $Superior = 20$ y tomamos el valor que aparece en vista algebraica *Sumasup* que nos da la suma de las áreas de los *20* rectángulos. 2) Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador $Superior = 30, 40$ y 50. Llenando la tabla con los datos recabados. • Argumentos: área bajo la curva, $581.78 \leq g \leq 585.54$

En la tabla 4.15 podemos observar que el estudiante pudo realizar la actividad utilizando y generando los objetos matemáticos primarios esperados en el análisis a priori de esta actividad, con la ayuda del software matemático GeoGebra.



1 , 509 V

Ahora realizamos un ajuste en GeoGebra a los puntos para obtener una función que se aproxime a los datos.

Figura 1.11

Tenemos la función $V(x) = 0.01x^3 - 0.48x^2 + 4.47x - 0.23$ en el intervalo [0, 9.69], → $\frac{9.69}{5} = 1.938$ que modela la velocidad en función del tiempo, para obtener la posición tenemos que la distancia $d = v.t$ cuando la velocidad es constante, para lo cual seccionaremos en rectángulos la función y sumamos sus áreas para obtener una aproximación al área real.

1. ¿Cuál será el área si seccionamos la función por debajo de la curva en 5 rectángulos?

b h

1: g(0) = -0.23
2: g(1.938) = 6.70
3: g(3.876) = 10.46
4: g(5.814) = 11.49
5: g(7.752) = 10.23

Areas: bh
1: 0
2: 12.98
3: 40.54
4: 66.10
5: 79.30

2. ¿Cuál es el área bajo la curva si seccionamos la función en 5 rectángulos por arriba de la curva?

b h

1: g(1.938) = 6.70
2: g(3.876) = 10.46
3: g(5.814) = 11.49
4: g(7.752) = 10.23
5: g(9.69) = 7.11

Areas:
1: 12.98
2: 40.54
3: 66.80
4: 79.30
5: 68.89

3. Ahora realiza el mismo procedimiento para 10 rectángulos.

Bajo la curva: b h Área

1: g(0) = -0.23 = 0
2: g(0.969) = 3.65 = 3.53
3: g(1.938) = 6.70 = 12.98
4: g(2.907) = 8.95 = 26.01
5: g(3.876) = 10.46 = 40.54
6: g(4.845) = 11.29 = 54.70
7: g(5.814) = 11.49 = 66.80
8: g(6.783) = 11.12 = 75.42
9: g(7.752) = 10.23 = 79.30
10: g(8.721) = 8.87 = 77.35

Arriba de la curva b h Área

1: g(0.969) = 3.65 = 3.53
2: g(1.938) = 6.70 = 12.98
3: g(2.907) = 8.95 = 26.01
4: g(3.876) = 10.46 = 40.54
5: g(4.845) = 11.29 = 54.70
6: g(5.814) = 11.49 = 66.80
7: g(6.783) = 11.12 = 75.42
8: g(7.752) = 10.23 = 79.80
9: g(8.721) = 8.87 = 77.35
10: g(9.69) = 7.11 = 68.89

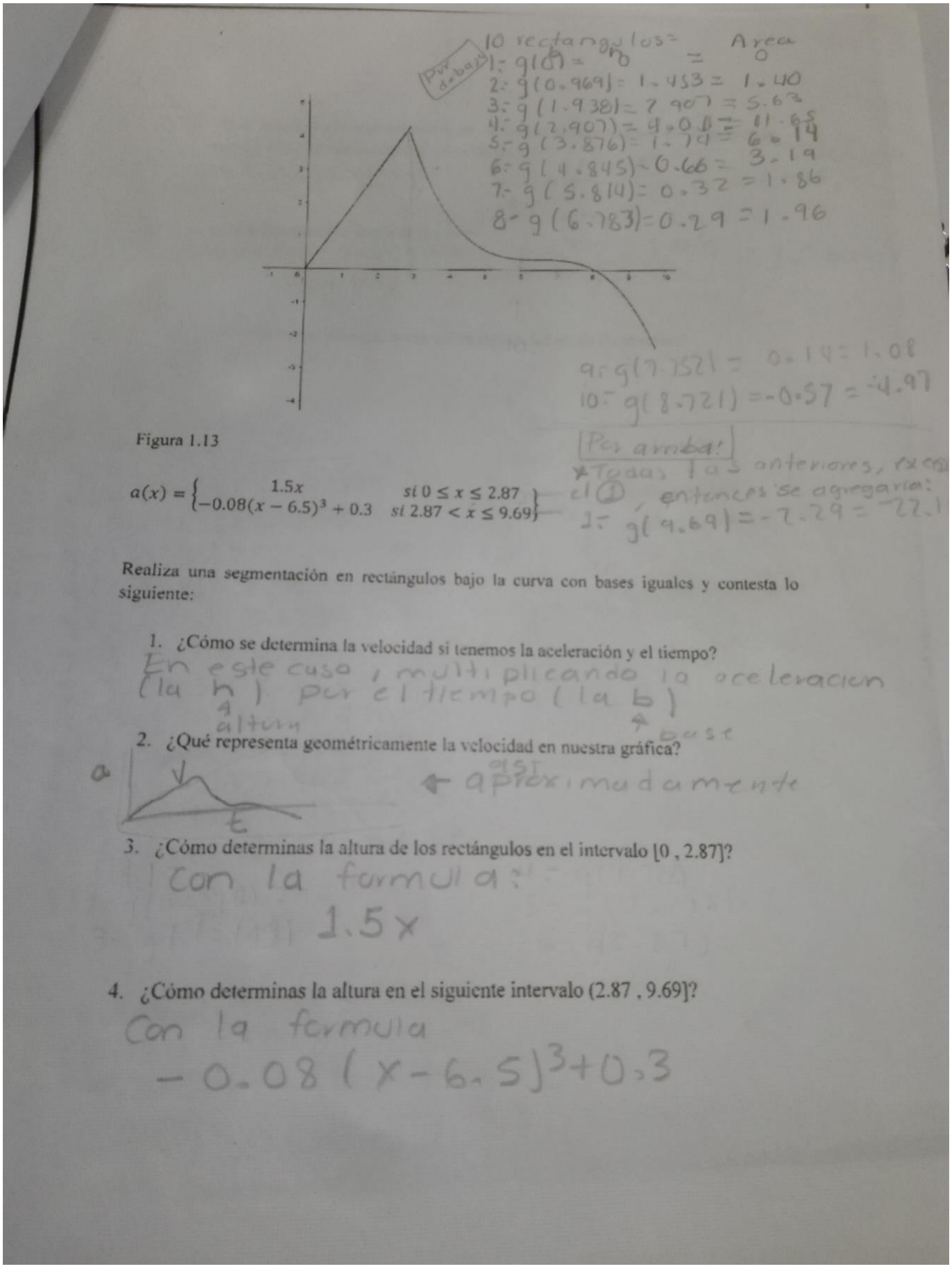
Tabla 4.16 Actividad 3

Lenguaje (objetos ostensivos)	Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos (objetos no ostensivos)
Reactivo 1 **Intervinientes** -Lenguaje natural: área, seccionar por debajo de la curva. .	**Intervinientes** -Conceptos: área, curva, seccionar, rectángulos, suma de áreas. **Emergentes** • Argumentos: Altura g(x) $Ancho\ del\ rectángulo = 9.69/5$ $V(x) = 0.01x^3 - 0.48x^2 + 4.47x - 0.23$ $d = v.t$ • Procedimientos: e) Primero se secciona la función por debajo de la curva en 5 rectángulos. f) Luego se determina el valor de las bases de los rectángulos dx dividiendo el dominio entre 5. $dx = 9.69/5 = 1.938$ g) Después se determina el volumen para cada rectángulo con la función $V(x)$ por debajo de curva (es decir, se toma el valor inferior dx del rectángulo) h) A continuación, se determina el área de cada rectángulo al multiplicar $V(x).dx$
Reactivo 2 **Intervinientes** -Lenguaje natural: seccionar por debajo de la curva. .	**Intervinientes** -Conceptos: curva, seccionar, rectángulos, suma de áreas. **Emergentes** • Argumentos: Altura g(x) $Ancho\ del\ rectángulo = 9.69/5$ $V(x) = 0.01x^3 - 0.48x^2 + 4.47x - 0.23$ $d = v.t$ • Procedimientos:

	a) Primero se secciona la función por arriba de la curva en 5 rectángulos. b) Luego se determina el valor de las bases de los rectángulos dx dividiendo el dominio entre 5. $dx = 9.69/5 = 1.938$ c) Después se determina el volumen para cada rectángulo con la función $V(x)$ por arriba de la curva (es decir, se toma el valor superior dx del rectángulo) d) A continuación, se determina el área de cada rectángulo al multiplicar $V(x).dx$
Reactivo 3 **Intervinientes** -Lenguaje natural: seccionar por debajo de la curva. .	**Intervinientes** -Conceptos: curva, seccionar, rectángulos, suma de áreas. **Emergentes** • Argumentos: $V(x) = 0.01x^3 - 0.48x^2 + 4.47x - 0.23$ $d = v.t$ • Procedimientos: a) Primero se secciona la función por debajo de la curva en 10 rectángulos. b) Luego se determina el valor de las bases de los rectángulos dx dividiendo el dominio entre 5. $dx = \frac{9.69}{5} = 0.969$ c) Después se determina el volumen para cada rectángulo con la función $V(x)$ por debajo de la curva (es decir, se toma el valor inferior dx del rectángulo) d) A continuación, se determina el área de cada rectángulo al multiplicar $V(x).dx$ e) Primero se secciona la función por arriba de la curva en 10 rectángulos. f) Luego se determina el valor de las bases de los rectángulos dx dividiendo el dominio entre 5.

	$$dx = \frac{9.69}{5} = 0.969$$ g) Después se determina el volumen para cada rectángulo con la función $V(x)$ por arriba de la curva (es decir, se toma el valor superior dx del rectángulo) h) A continuación, se determina el área de cada rectángulo al multiplicar $V(x).dx$

En la tabla 4.16 podemos observar que el estudiante pudo realizar la actividad sin apoyo del software GeoGebra de manera satisfactoria, utilizando los objetos matemáticos necesarios para que emergieran los objetos matemáticos primarios esperados en el análisis a priori.



10 rectangulos= Area

Por debajo

1:- g(0) = 0 = 0

2:- g(0.969) = 1.453 = 1.40

3:- g(1.938) = 2.907 = 5.63

4:- g(2.907) = 4.08 = 11.65

5:- g(3.876) = 1.74 = 6.14

6:- g(4.845) - 0.66 = 3.19

7:- g(5.814) = 0.32 = 1.86

8- g(6.783) = 0.29 = 1.96

9:- g(7.752) = 0.14 = 1.08

10:- g(8.721) = -0.57 = -4.97

Por arriba!

*Todas las anteriores, exce

el ①, entonces se agregaria:

1:- g(9.69) = -7.29 = -22.1

Figura 1.13

$$a(x) = \begin{cases} 1.5x & si\ 0 \leq x \leq 2.87 \\ -0.08(x-6.5)^3 + 0.3 & si\ 2.87 < x \leq 9.69 \end{cases}$$

Realiza una segmentación en rectángulos bajo la curva con bases iguales y contesta lo siguiente:

1. ¿Cómo se determina la velocidad si tenemos la aceleración y el tiempo?

En este caso, multiplicando la aceleracion (la h) por el tiempo (la b)

altura base

2. ¿Qué representa geométricamente la velocidad en nuestra gráfica?

a V t ← asi aproximadamente

3. ¿Cómo determinas la altura de los rectángulos en el intervalo [0 , 2.87]?

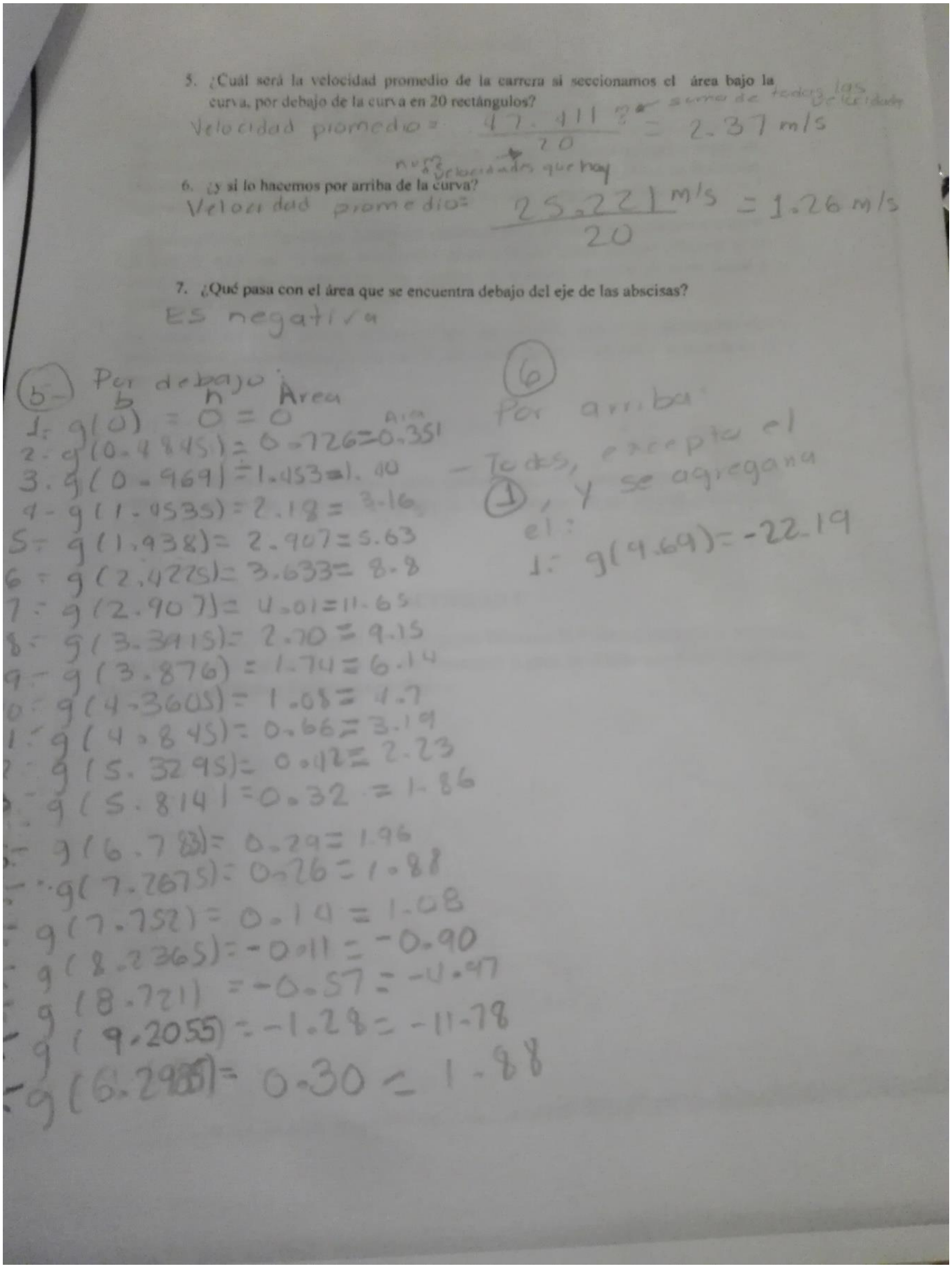
Con la formula:

1.5x

4. ¿Cómo determinas la altura en el siguiente intervalo (2.87 , 9.69]?

Con la formula

$-0.08(x-6.5)^3+0.3$



5. ¿Cuál será la velocidad promedio de la carrera si seccionamos el área bajo la curva, por debajo de la curva en 20 rectángulos?

suma de todas las velocidades

Velocidad promedio = $\frac{47.411}{20}$ = 2.37 m/s

num. de velocidades que hay

6. ¿y si lo hacemos por arriba de la curva?

Velocidad promedio = $\frac{25.221 \text{ m/s}}{20}$ = 1.26 m/s

7. ¿Qué pasa con el área que se encuentra debajo del eje de las abscisas?

Es negativa

⑤- Por debajo:

b h Área

Área

1: g(0) = 0 = 0
2. g(0.4845) = 0.726 = 0.351
3. g(0.969) = 1.453 = 1.40
4. g(1.4535) = 2.18 = 3.16
5: g(1.938) = 2.907 = 5.63
6: g(2.4225) = 3.633 = 8.8
7: g(2.907) = 4.01 = 11.65
8: g(3.3915) = 2.70 = 9.15
9- g(3.876) = 1.74 = 6.14
0: g(4.3605) = 1.08 = 4.7
1: g(4.845) = 0.66 = 3.19
2: g(5.3295) = 0.42 = 2.23
- g(5.814) = 0.32 = 1.86
- g(6.783) = 0.29 = 1.96
- g(7.2675) = 0.26 = 1.88
- g(7.752) = 0.14 = 1.08
- g(8.2365) = -0.11 = -0.90
- g(8.721) = -0.57 = -4.97
- g(9.2055) = -1.28 = -11.78
- g(6.2985) = 0.30 = 1.88

⑥

Por arriba:

- Todas, excepto el ①, y se agregana el:

1: g(9.69) = -22.19

Tabla 4.17 Actividad 3

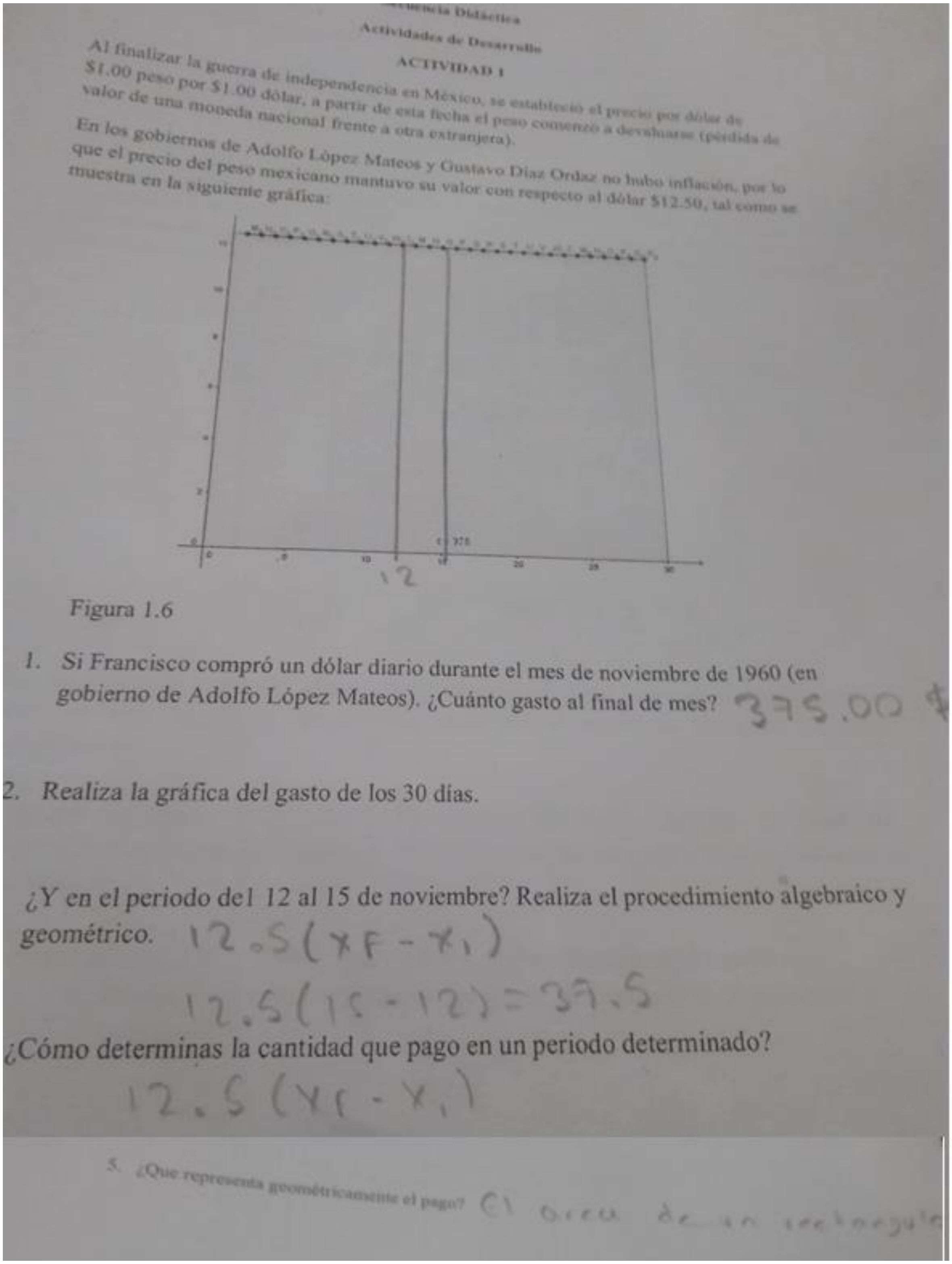
Lenguaje (objetos ostensivos)	Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos (objetos no ostensivos)
Reactivo 1 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Velocidad, aceleración, tiempo.	**Intervinientes** -Conceptos: velocidad, aceleración y tiempo. **Emergentes** • Argumentos: $v = a.t$ (altura x base)
Reactivo 2 **Intervinientes** -Lenguaje natural: representación geométrica, velocidad.	**Intervinientes** -Conceptos: representación geométrica, velocidad
Reactivo 3 **Intervinientes** -Lenguaje natural: altura, rectángulos, intervalo. .	**Intervinientes** -Conceptos: altura, rectángulos, intervalo. **Emergentes** • Argumentos: $altura = 1.5x$
Reactivo 4 **Intervinientes** -Lenguaje natural: altura, rectángulos, intervalo. .	**Intervinientes** -Conceptos: altura, rectángulos, intervalo. **Emergentes** • Argumentos: $altura = -0.089(x-6.5)^3 + 0.3$
Reactivo 5 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Velocidad, aceleración, tiempo.	**Intervinientes** -Conceptos: velocidad, aceleración y tiempo. **Emergentes** • Argumentos: $v = a.t$ • Procedimientos: a) Primero se secciona la función por debajo de la curva en 20 rectángulos.

	b) Luego se determina el valor de las bases de los rectángulos dx dividiendo el dominio entre 20. $dx = \frac{9.69}{20} = 0.4845$ c) Después se determina el volumen para cada rectángulo con la función $V(x)$ por debajo de curva (es decir, se toma el valor inferior dx del rectángulo) d) A continuación, se determina el área de cada rectángulo al multiplicar $V(x).dx$ e) Al final se determina la velocidad promedio $v = \frac{47.411}{20} = 2.37\ m/s$
Reactivo 6 **Intervinientes** -Lenguaje natural: representación geométrica, velocidad.	**Intervinientes** - Conceptos: velocidad, aceleración y tiempo. **Emergentes** • Argumentos: $v = a.t$ • Procedimientos: a) Primero se secciona la función por debajo de la curva en 20 rectángulos. b) Luego se determina el valor de las bases de los rectángulos dx dividiendo el dominio entre 20. $dx = \frac{9.69}{20} = 0.4845$ c) Después se determina el volumen para cada rectángulo con la función $V(x)$ por debajo de curva (es decir, se toma el valor inferior dx del rectángulo) d) A continuación, se determina el área de cada rectángulo al multiplicar $V(x).dx$ e) Por último, se realiza la operación para determinar la velocidad promedio $v = \frac{25.221}{20} = 1.26\ m/s$

Reactivo 7 **Intervinientes** -Lenguaje natural: área, eje abscisas	**Intervinientes** - Conceptos: área, eje abscisas. **Emergentes** -Conceptos: Por debajo de las abscisas se toma negativo.

En esta tabla los comentarios son similares a los de la tabla anterior.

Estudiante 3



cuencia Didáctica

Actividades de Desarrollo

ACTIVIDAD 1

Al finalizar la guerra de independencia en México, se estableció el precio por dólar de $1.00 peso por $1.00 dólar, a partir de esta fecha el peso comenzó a devaluarse (pérdida de valor de una moneda nacional frente a otra extranjera).

En los gobiernos de Adolfo López Mateos y Gustavo Díaz Ordaz no hubo inflación, por lo que el precio del peso mexicano mantuvo su valor con respecto al dólar $12.50, tal como se muestra en la siguiente gráfica:

Figura 1.6

1. Si Francisco compró un dólar diario durante el mes de noviembre de 1960 (en gobierno de Adolfo López Mateos). ¿Cuánto gasto al final de mes? 375.00 $

2. Realiza la gráfica del gasto de los 30 días.

¿Y en el periodo del 12 al 15 de noviembre? Realiza el procedimiento algebraico y geométrico. $12.5(x_F - x_1)$

$12.5(15-12) = 37.5$

¿Cómo determinas la cantidad que pago en un periodo determinado?

$12.5(x_f - x_1)$

5. ¿Que representa geométricamente el pago? El area de un rectangul

Tabla 4.18 Actividad 1

Lenguaje (objetos ostensivos)	Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos (objetos no ostensivos)
Reactivo 1 **Intervinientes** -Lenguaje natural: dólar, gasto. .	**Intervinientes** -Conceptos: Dólar, gasto. **Emergentes** • Argumentos: $gasto = precio\ x\ días$
Reactivo 2 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Gasto, gráfica. -Lenguaje figural: Realiza la gráfica de los 30 días. **Emergentes** -Lenguaje natural: Área bajo la curva.	**Intervinientes** -Conceptos: Función, dominio, rango, multiplicaciones de dos magnitudes, gráfica de una función.
Reactivo 3 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Período, procedimiento algebraico y procedimiento geométrico.	**Intervinientes** -Conceptos: Función, dominio, rango, multiplicaciones de dos magnitudes, gráfica de una función. **Emergentes** • Conceptos: Variable dependiente, variable independiente. • Argumentos: $precio = 12.50(xf - xi)$ • Procedimientos: $precio = 12.50(15 - 12) = \$37.5$
Reactivo 4 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Pago, periodo.	**Intervinientes** -Conceptos: Función, dominio, rango, multiplicaciones de dos magnitudes, gráfica de una función.

	Emergentes - Conceptos: Variable dependiente, variable independiente. - Argumentos: $12.5\ (xf - xi)$
Reactivo 5 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Representación geométrica.	**Intervinientes** -Conceptos: Representación geométrica. **Emergentes** - Concepto: área de un rectángulo.

En la tabla 4.18 se puede observar que emergieron y se utilizaron los objetos matemáticos primarios que se describen en el análisis a priori de esta actividad, representando algebraica y geométricamente el área bajo la curva como lo pide el reactivo 3.

ACTIVIDAD 2

El peso mexicano ha sufrido varias devaluaciones a lo largo de su historia, en fechas recientes las elecciones a presidente de los Estados Unidos de América, trajo una gran volatilidad en el precio del dólar, a continuación se presenta un gráfico con el comportamiento del dólar en el mes de noviembre de 2016, fecha en la cual se llevaron a cabo dichas elecciones.

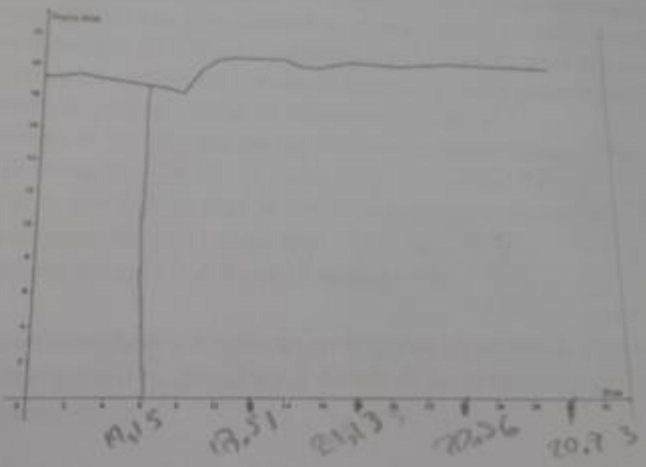


Figura 1.7

Como puedes darte cuenta, el cálculo para determinar el gasto al comprar un dólar diario urante un mes ya no es tan sencillo, dado que el precio se encuentra variando onstantemente.

on apoyo del applet de GeoGebra Devaluación del dólar encuentra el gasto que dríamos al comprar un dólar diario durante el mes en cuestión, por medio de seccionar el a bajo la curva.

I. Analizaremos el área seccionando nuestra función por debajo de curva.
    1) Primero con 5 rectángulos por debajo de la curva con el deslizador Inferior=5.

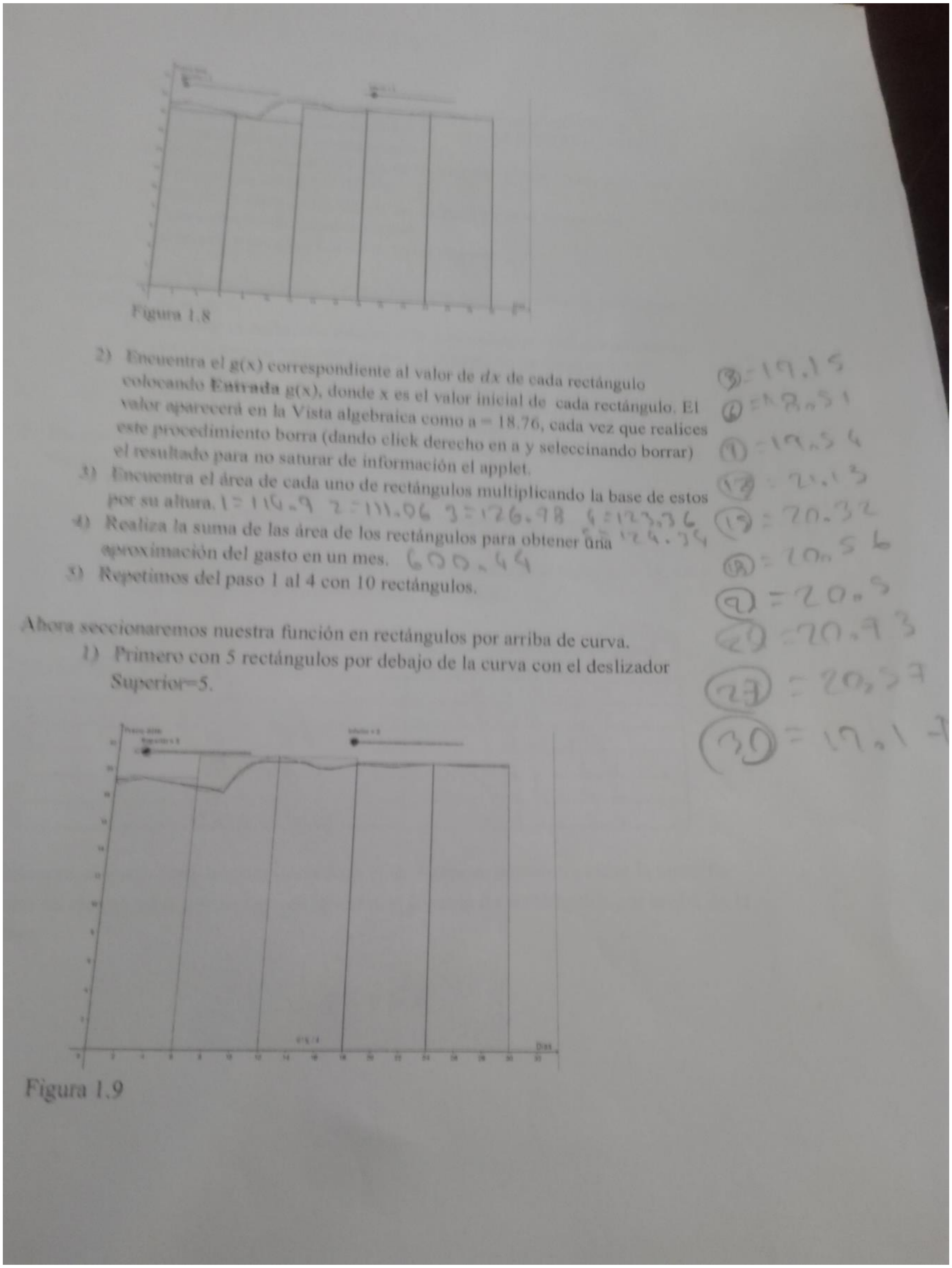


Figura 1.8

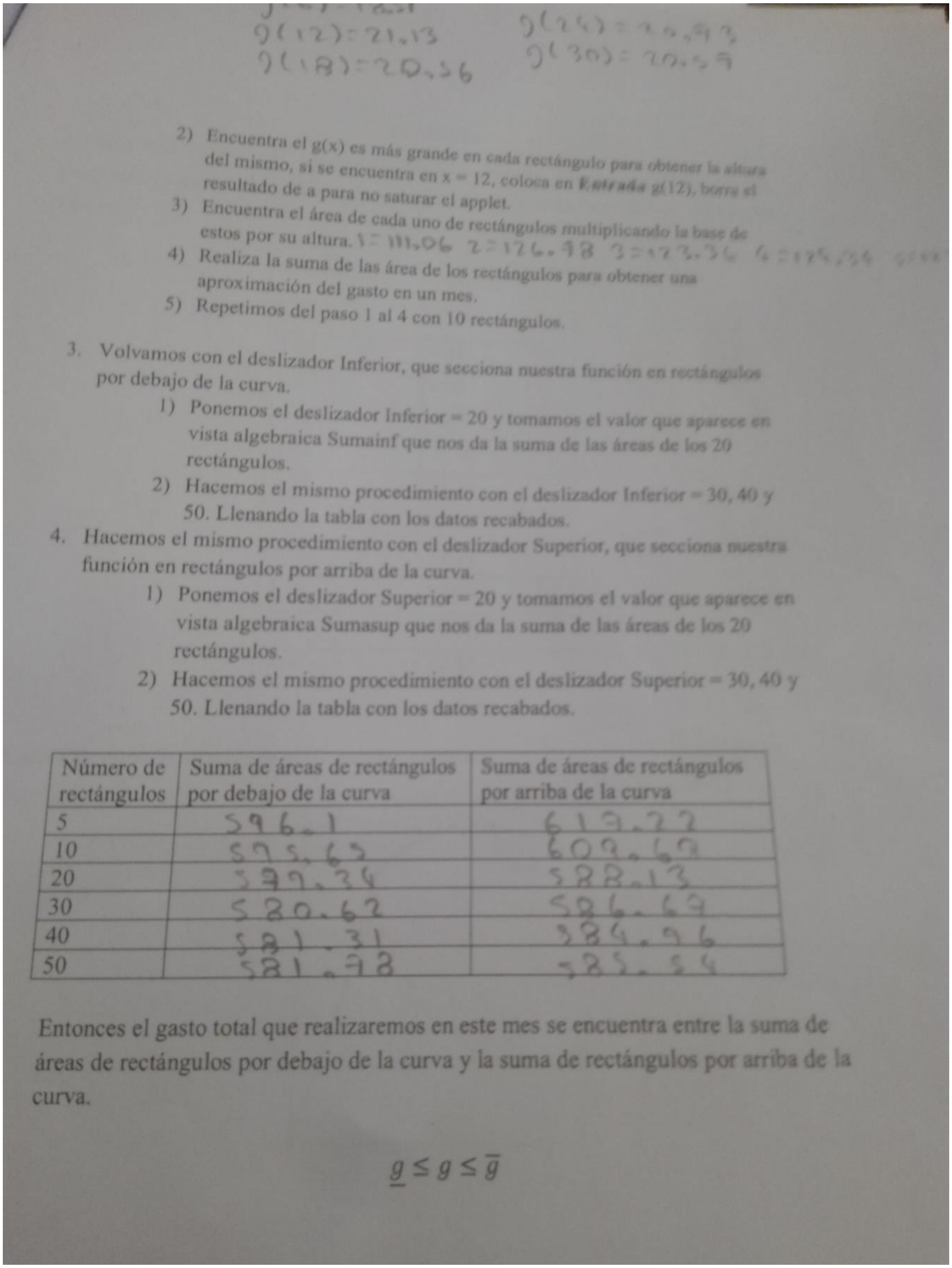
2) Encuentra el g(x) correspondiente al valor de *dx* de cada rectángulo colocando **Entrada** g(x), donde x es el valor inicial de cada rectángulo. El valor aparecerá en la Vista algebraica como a = 18.76, cada vez que realices este procedimiento borra (dando click derecho en a y seleccinando borrar) el resultado para no saturar de información el applet.
3) Encuentra el área de cada uno de rectángulos multiplicando la base de estos por su altura. 1 = 114.9 2 = 111.06 3 = 126.98 4 = 123.36 5 = 124.34
4) Realiza la suma de las área de los rectángulos para obtener una aproximación del gasto en un mes. 600.44
5) Repetimos del paso 1 al 4 con 10 rectángulos.

③ = 19.15
⑥ = 18.51
⑨ = 19.54
⑫ = 21.13
⑮ = 20.32
⑱ = 20.56
㉑ = 20.5
㉔ = 20.93
㉗ = 20.57
㉚ = 19.17

Ahora seccionaremos nuestra función en rectángulos por arriba de curva.

1) Primero con 5 rectángulos por debajo de la curva con el deslizador Superior=5.

Figura 1.9



g(12)=21.13 g(24)=20.93
g(18)=20.56 g(30)=20.59

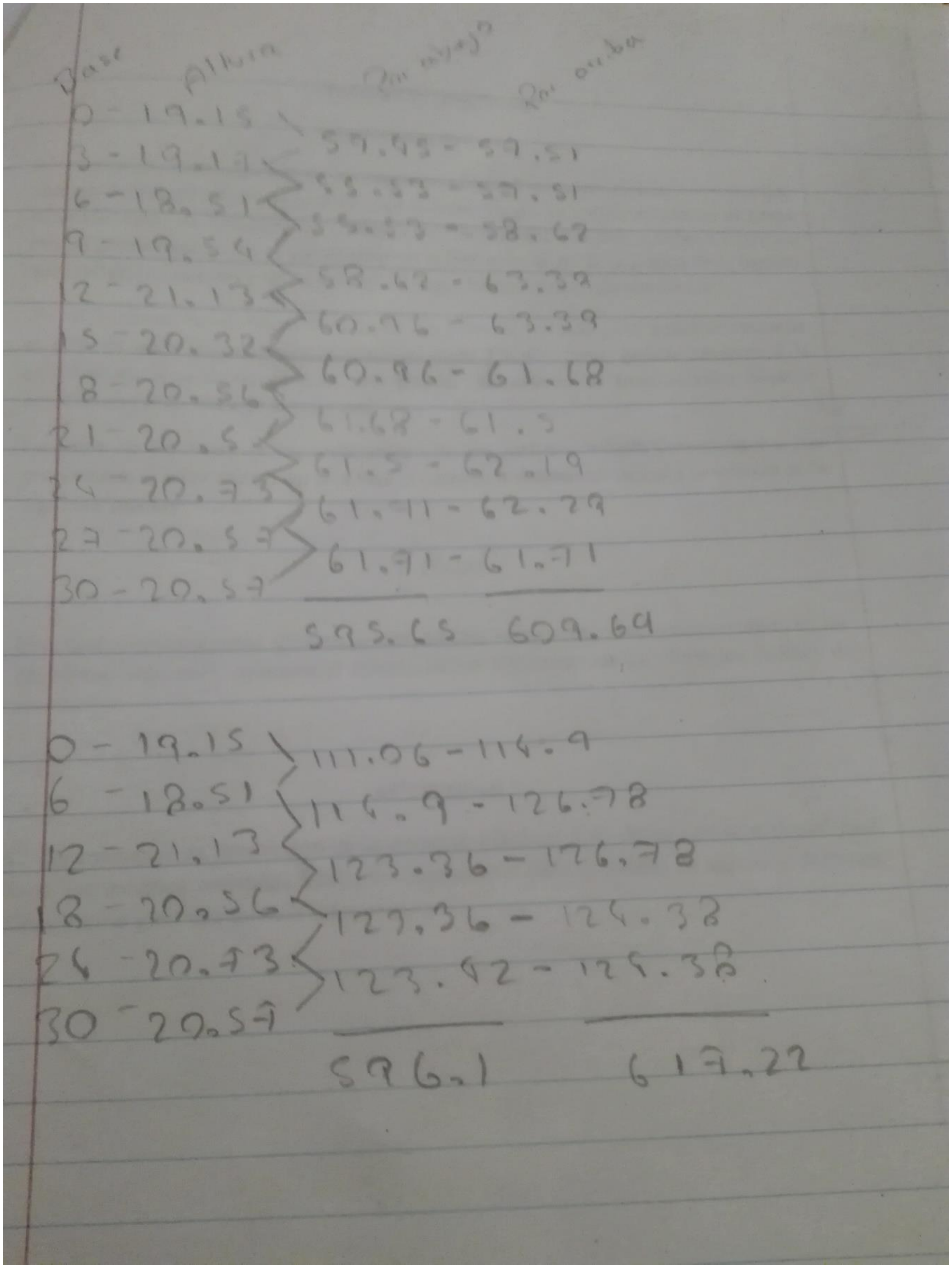
2) Encuentra el g(x) es más grande en cada rectángulo para obtener la altura del mismo, si se encuentra en x = 12, coloca en **Entrada** g(12), borra el resultado de a para no saturar el applet.
3) Encuentra el área de cada uno de rectángulos multiplicando la base de estos por su altura. 1= 111.06 2=126.98 3=123.36 4=125.54
4) Realiza la suma de las área de los rectángulos para obtener una aproximación del gasto en un mes.
5) Repetimos del paso 1 al 4 con 10 rectángulos.

3. Volvamos con el deslizador Inferior, que secciona nuestra función en rectángulos por debajo de la curva.
    1) Ponemos el deslizador Inferior = 20 y tomamos el valor que aparece en vista algebraica Sumainf que nos da la suma de las áreas de los 20 rectángulos.
    2) Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador Inferior = 30, 40 y 50. Llenando la tabla con los datos recabados.
4. Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador Superior, que secciona nuestra función en rectángulos por arriba de la curva.
    1) Ponemos el deslizador Superior = 20 y tomamos el valor que aparece en vista algebraica Sumasup que nos da la suma de las áreas de los 20 rectángulos.
    2) Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador Superior = 30, 40 y 50. Llenando la tabla con los datos recabados.

Número de rectángulos	Suma de áreas de rectángulos por debajo de la curva	Suma de áreas de rectángulos por arriba de la curva
5	596.1	619.72
10	575.63	609.69
20	579.34	588.13
30	580.62	586.69
40	581.31	584.96
50	581.78	583.54

Entonces el gasto total que realizaremos en este mes se encuentra entre la suma de áreas de rectángulos por debajo de la curva y la suma de rectángulos por arriba de la curva.

$$\underline{g} \leq g \leq \overline{g}$$



Base Altura [illegible] [illegible]

0 - 19.15
3 - 19.17 57.45 - 57.51
6 - 18.51 55.53 - 57.51
9 - 19.54 55.53 - 58.62
12 - 21.13 58.62 - 63.39
15 - 20.32 60.96 - 63.39
18 - 20.56 60.96 - 61.68
21 - 20.5 61.68 - 61.5
24 - 20.73 61.5 - 62.19
27 - 20.57 61.71 - 62.29
30 - 20.57 61.71 - 61.71

595.65 609.64

0 - 19.15 111.06 - 114.9
6 - 18.51 114.9 - 126.78
12 - 21.13 123.36 - 126.78
18 - 20.56 123.36 - 124.38
24 - 20.73 123.42 - 124.38
30 - 20.57

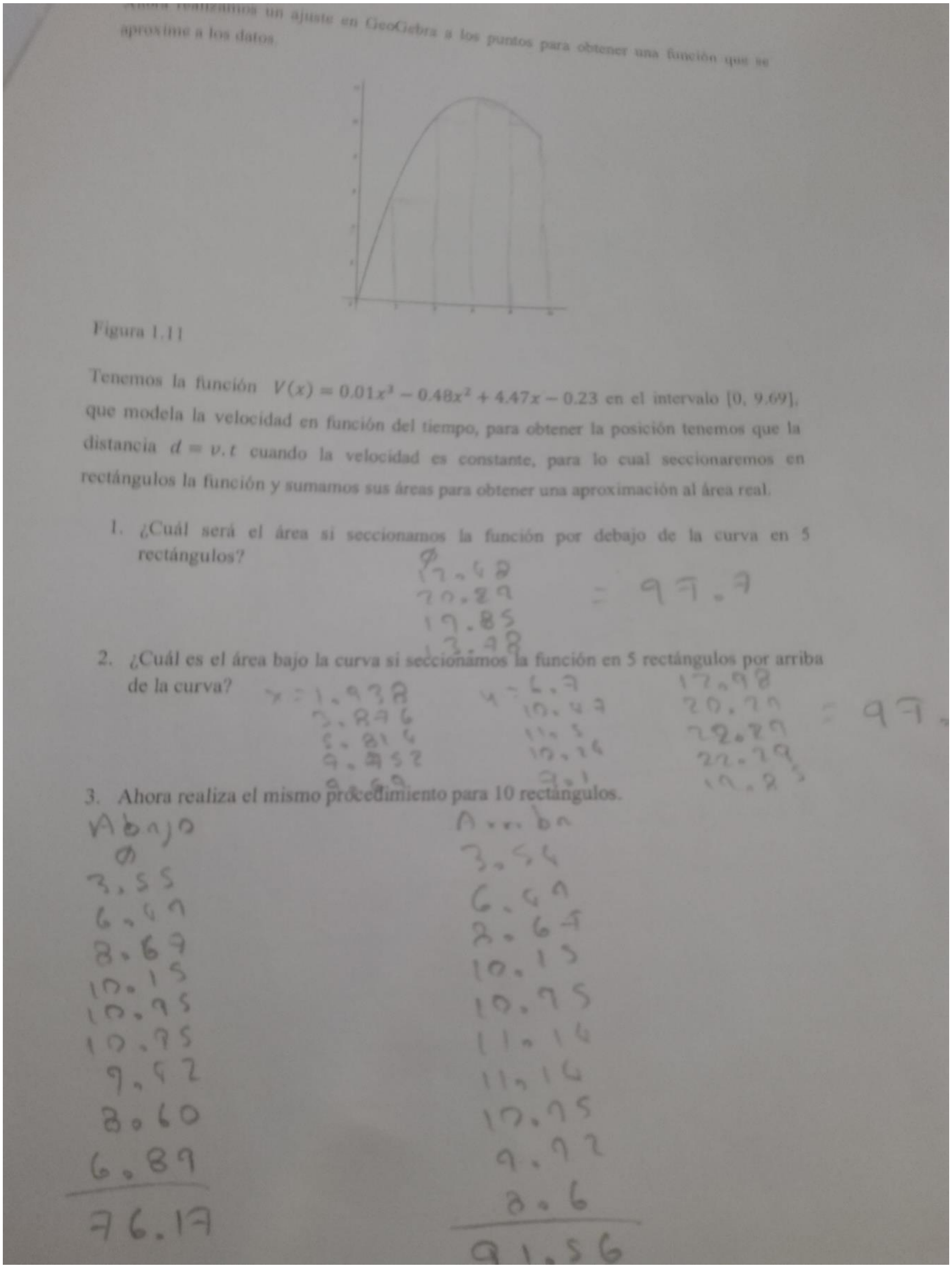
596.1 617.22

Tabla 4.19 Actividad 3

Lenguaje (objetos ostensivos)	Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos (objetos no ostensivos)
Intervinientes -Lenguaje natural: Gasto, gráfica. -Lenguaje figural: Seccionar la función por debajo de la curva. **Emergentes** -Lenguaje natural: Área bajo la curva.	**Intervinientes** -Conceptos: Función, dominio, rango, multiplicaciones de dos magnitudes, gráfica de una función. **Emergentes** - Conceptos: Variable dependiente, variable independiente, gasto como el área bajo la curva. - Procedimientos: I. Analizaremos el área seccionando nuestra función por debajo de curva. 1) Primero con *5* rectángulos por debajo de la curva con el deslizador $Inferior = 5$. 2) Encuentra el valor $g(x)$ correspondiente al valor de dx de cada rectángulo colocando Entrada *g(x)*, donde *x* es el valor inicial de cada rectángulo. El valor aparecerá en la Vista algebraica como $a = 18.76$, cada vez que realices este procedimiento borra (dando click derecho en a y seleccionando borrar) el resultado para no saturar de información el applet. 3) Encuentra el área de cada uno de rectángulos multiplicando la base de estos por su altura. 4) Realiza la suma de las áreas de los rectángulos para obtener una aproximación del gasto en un mes. 5) Repetimos del paso 1 al 4 con *10* rectángulos. I. Ahora seccionaremos nuestra función en rectángulos por arriba de curva. 3) Primero con *5* rectángulos por debajo de la curva con el deslizador $Superior = 5$. 2) Encuentra el *g(x)* es más grande en cada rectángulo para obtener la altura del mismo, si se

	encuentra en $x = 12$, coloca en Entrada *g(12)*, borra el resultado de a para no saturar el applet. 3) Encuentra el área de cada uno de rectángulos multiplicando la base de estos por su altura. 4) Realiza la suma de las áreas de los rectángulos para obtener una aproximación del gasto en un mes. 5) Repetimos del paso 1 al 4 con *10* rectángulos. Volvamos con el deslizador Inferior, que secciona nuestra función en rectángulos por debajo de la curva. 1) Ponemos el deslizador $Inferior = 20$ y tomamos el valor que aparece en vista algebraica *Sumainf* que nos da la suma de las áreas de los *20* rectángulos. 2) Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador $Inferior = 30, 40$ y 50. Llenando la tabla con los datos recabados. 4. Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador Superior, que secciona nuestra función en rectángulos por arriba de la curva. 1) Ponemos el deslizador $Superior = 20$ y tomamos el valor que aparece en vista algebraica *Sumasup* que nos da la suma de las áreas de los *20* rectángulos. 2) Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador $Superior = 30, 40$ y 50. Llenando la tabla con los datos recabados. • Argumentos: área bajo la curva, $581.78 \leq g \leq 585.54$

En la tabla 4.19 que se realiza con el apoyo de software GeoGebra se puede observar que estuvieron presentes los objetos matemáticos primarios que se esperaban.



Ahora realizamos un ajuste en GeoGebra a los puntos para obtener una función que se aproxime a los datos.

Figura 1.11

Tenemos la función $V(x) = 0.01x^3 - 0.48x^2 + 4.47x - 0.23$ en el intervalo [0, 9.69], que modela la velocidad en función del tiempo, para obtener la posición tenemos que la distancia $d = v.t$ cuando la velocidad es constante, para lo cual seccionaremos en rectángulos la función y sumamos sus áreas para obtener una aproximación al área real.

1. ¿Cuál será el área si seccionamos la función por debajo de la curva en 5 rectángulos?

0
17.48
20.89
19.85
13.48
= 97.7

2. ¿Cuál es el área bajo la curva si seccionamos la función en 5 rectángulos por arriba de la curva?

x = 1.938
3.876
5.814
9.452
9.69

y = 6.7
10.47
11.5
10.26
9.1

17.98
20.79
22.29
22.29
19.8
= 97.

3. Ahora realiza el mismo procedimiento para 10 rectángulos.

Abajo
0
3.55
6.49
8.67
10.15
10.95
10.95
9.92
8.60
6.89
76.17

Arriba
3.54
6.49
8.67
10.15
10.95
11.14
11.14
10.95
9.92
8.6
91.56

Tabla 4.20 Actividad 3

Lenguaje (objetos ostensivos)	Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos (objetos no ostensivos)
Reactivo 1 **Intervinientes** -Lenguaje natural: área, seccionar por debajo de la curva. .	**Intervinientes** -Conceptos: área, curva, seccionar, rectángulos, suma de áreas. **Emergentes** - Argumentos: Altura g(x) $Ancho\ del\ rect\acute{a}ngulo = 9.69/5$ $V(x) = 0.01x^3 - 0.48x^2 + 4.47x - 0.23$ $d = v.t$ - Procedimientos: a) Primero se secciona la función por debajo de la curva en 5 rectángulos. b) Luego se determina el valor de las bases de los rectángulos dx dividiendo el dominio entre 5. $dx = 9.69/5 = 1.938$ c) Después se determina el volumen para cada rectángulo con la función $V(x)$ por debajo de curva (es decir, se toma el valor inferior dx del rectángulo) d) A continuación, se determina el área de cada rectángulo al multiplicar $V(x).dx$ e) Por último, se realiza la suma de áreas para obtener una aproximación del área real bajo la curva suma de área =97.7
Reactivo 2 **Intervinientes** -Lenguaje natural: seccionar por debajo de la curva. .	**Intervinientes** -Conceptos: curva, seccionar, rectángulos, suma de áreas. **Emergentes** - Argumentos:

	Altura g(x) $Ancho\ del\ rectángulo = 9.69/5$ $V(x) = 0.01x^3 - 0.48x^2 + 4.47x - 0.23$ $d = v.t$ a) Primero se secciona la función por arriba de la curva en 5 rectángulos. b) Luego se determina el valor de las bases de los rectángulos dx dividiendo el dominio entre 5. $dx = 9.69/5 = 1.938$ c) Después se determina el volumen para cada rectángulo con la función $V(x)$ por arriba de la curva (es decir, se toma el valor superior dx del rectángulo) d) A continuación, se determina el área de cada rectángulo al multiplicar $V(x).dx$ e) Por último, se realiza la suma de áreas para obtener una aproximación del área real bajo la curva suma de área =97.7
Reactivo 3 **Intervinientes** -Lenguaje natural: seccionar por debajo de la curva. .	**Intervinientes** -Conceptos: curva, seccionar, rectángulos, suma de áreas. **Emergentes** • Argumentos: $V(x) = 0.01x^3 - 0.48x^2 + 4.47x - 0.23$ $d = v.t$ • Procedimientos a) Primero se secciona la función por debajo de la curva en 10 rectángulos. b) Luego se determina el valor de las bases de los rectángulos dx dividiendo el dominio entre 10. $dx = 9.69/10 = 0.969$ c) Después se determina el volumen para cada rectángulo con la función $V(x)$ por debajo de curva (es decir, se toma el valor inferior dx del rectángulo)

	d) A continuación, se determina el área de cada rectángulo al multiplicar $V(x).dx$ e) Luego se realiza la suma de áreas para obtener una aproximación del área real bajo la curva suma de área = 76.17 f) Se secciona la función por arriba de la curva en 10 rectángulos. g) Luego se determina el valor de las bases de los rectángulos dx dividiendo el dominio entre 10. $dx = 9.69/10 = 0.969$ h) Después se determina el volumen para cada rectángulo con la función $V(x)$ por arriba de curva (es decir, se toma el valor superior dx del rectángulo) i) A continuación, se determina el área de cada rectángulo al multiplicar $V(x).dx$ j) Por último, se realiza la suma de áreas para obtener una aproximación del área real bajo la curva suma de área =91.56

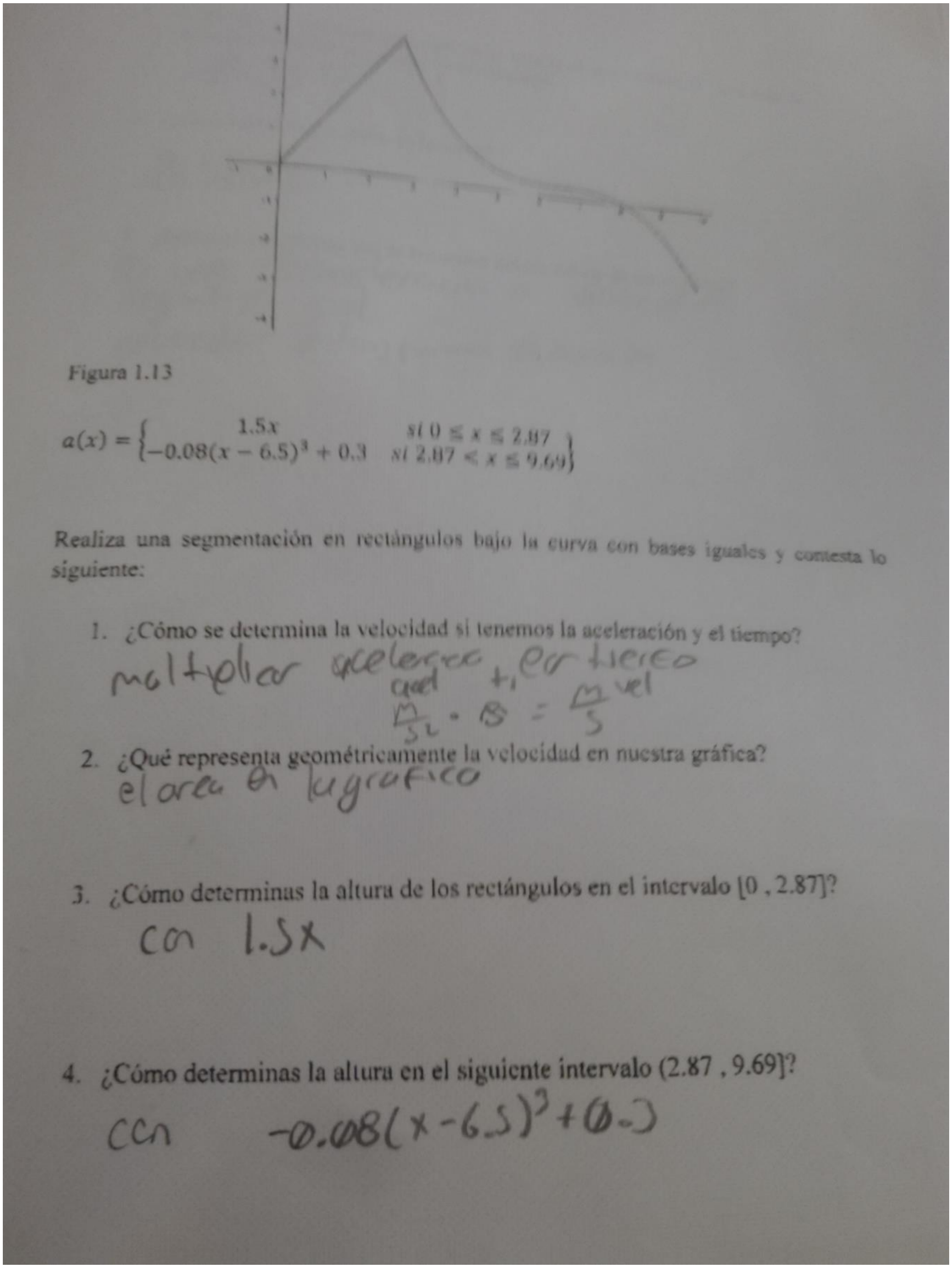


Figura 1.13

$$a(x) = \begin{cases} 1.5x & si\ 0 \leq x \leq 2.87 \\ -0.08(x-6.5)^3 + 0.3 & si\ 2.87 < x \leq 9.69 \end{cases}$$

Realiza una segmentación en rectángulos bajo la curva con bases iguales y contesta lo siguiente:

1. ¿Cómo se determina la velocidad si tenemos la aceleración y el tiempo?

multiplicar aceleracion, en tiempo

acel t, vel

$\frac{m}{s^2} \cdot s = \frac{m}{s}$

2. ¿Qué representa geométricamente la velocidad en nuestra gráfica?

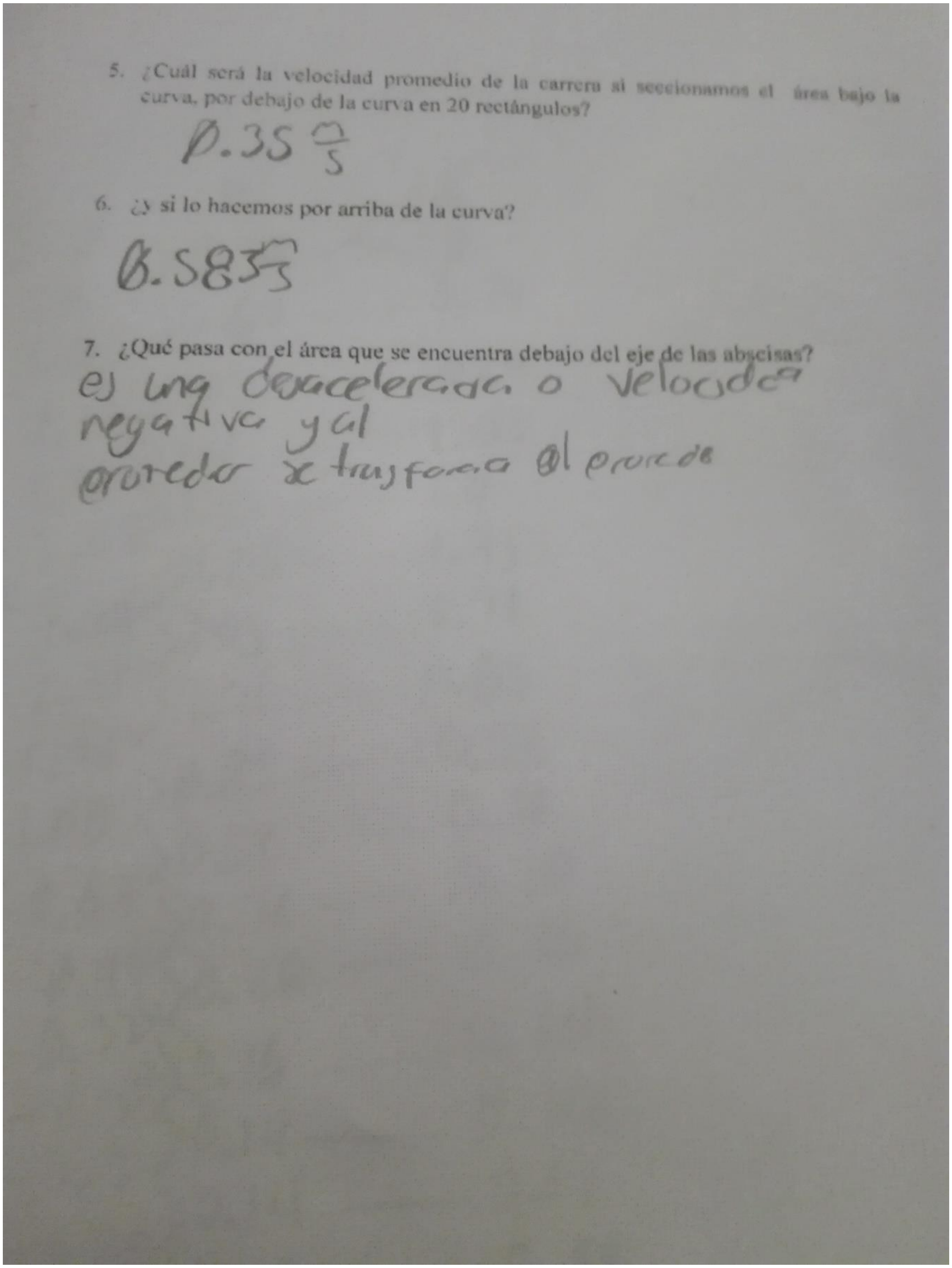
el area en la grafica

3. ¿Cómo determinas la altura de los rectángulos en el intervalo [0 , 2.87]?

con $1.5x$

4. ¿Cómo determinas la altura en el siguiente intervalo (2.87 , 9.69]?

con $-0.08(x-6.5)^3+0.3$



5. ¿Cuál será la velocidad promedio de la carrera si seccionamos el área bajo la curva, por debajo de la curva en 20 rectángulos?

0.35 $\frac{m}{s}$

6. ¿y si lo hacemos por arriba de la curva?

0.585 $\frac{m}{s}$

7. ¿Qué pasa con el área que se encuentra debajo del eje de las abscisas?

es una desaceleracion o velocidad
negativa y al
proceder se trasforma al procede

Tabla 4.21 Actividad 3

Lenguaje (objetos ostensivos)	Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos (objetos no ostensivos)
Reactivo 1 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Velocidad, aceleración, tiempo.	**Intervinientes** -Conceptos: velocidad, aceleración y tiempo. **Emergentes** - Argumentos: $v = a.t$
Reactivo 2 **Intervinientes** -Lenguaje natural: representación geométrica, velocidad.	**Intervinientes** -Conceptos: representación geométrica, velocidad **Emergentes** -Conceptos: área
Reactivo 3 **Intervinientes** -Lenguaje natural: altura, rectángulos, intervalo. .	**Intervinientes** -Conceptos: altura, rectángulos, intervalo. **Emergentes** - Argumentos: $altura = 1.5x$
Reactivo 4 **Intervinientes** -Lenguaje natural: altura, rectángulos, intervalo. .	**Intervinientes** -Conceptos: altura, rectángulos, intervalo. **Emergentes** - Argumentos: $altura = -0.089(x - 6.5)^3 + 0.3$
Reactivo 5 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Velocidad, aceleración, tiempo.	**Intervinientes** -Conceptos: velocidad, aceleración y tiempo. **Emergentes** - Argumentos: $v = a.t$ - Procedimientos: a) Primero se secciona la función por debajo de la curva en 20 rectángulos.

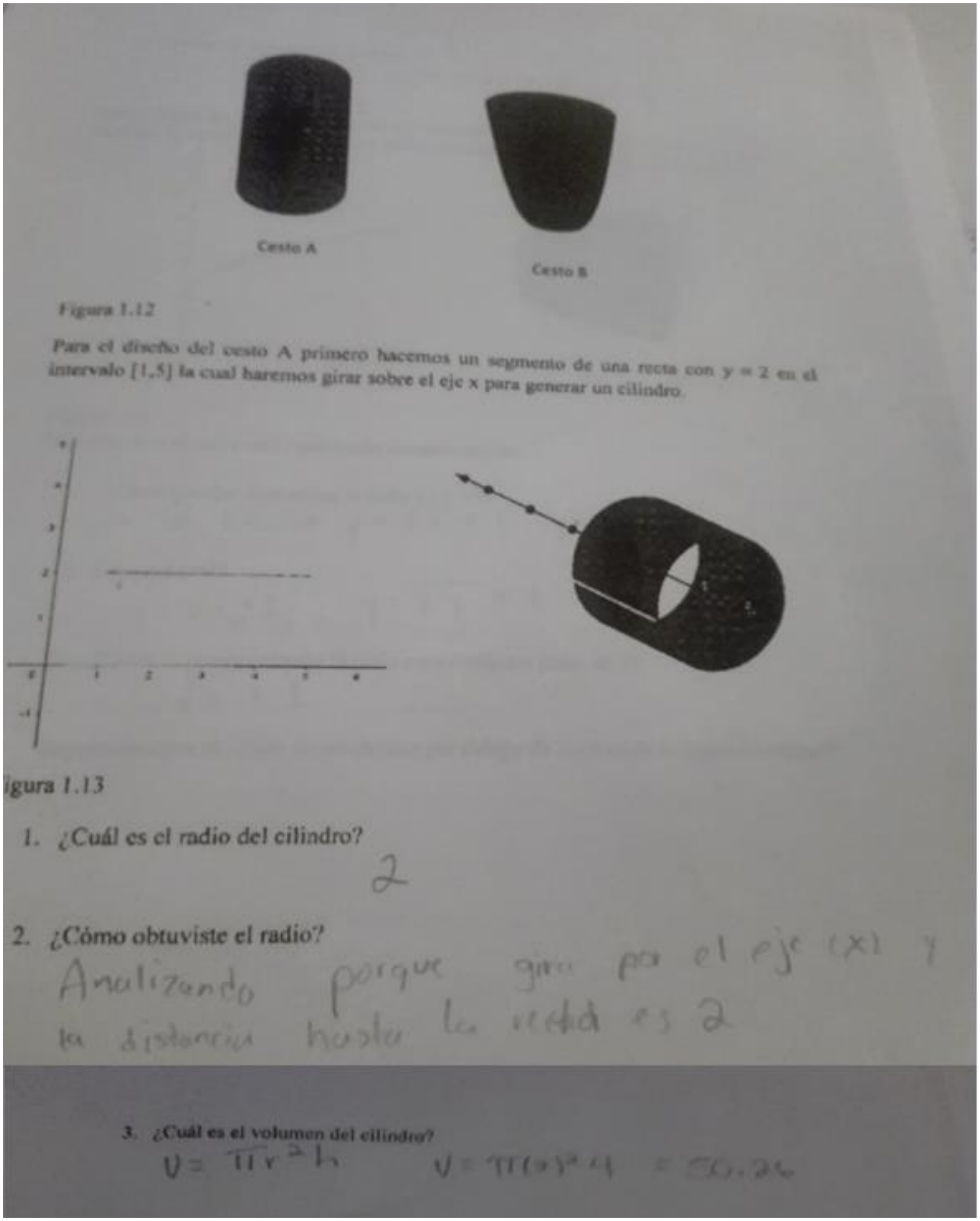
	b) Luego se determina el valor de las bases de los rectángulos dx dividiendo el dominio entre 20. $dx = \frac{9.69}{20} = 0.4845$ c) Después se determina el volumen para cada rectángulo con la función $V(x)$ por debajo de curva (es decir, se toma el valor inferior dx del rectángulo) d) A continuación, se determina el área de cada rectángulo al multiplicar $V(x).dx$ e) Por último, se determina la velocidad $v = 7.35$
Reactivo 6 **Intervinientes** -Lenguaje natural: representación geométrica, velocidad.	**Intervinientes** - Conceptos: velocidad, aceleración y tiempo. **Emergentes** - Argumentos: $v = a.t$ - Procedimientos: a) Primero se secciona la función por arriba de la curva en 20 rectángulos. b) Luego se determina el valor de las bases de los rectángulos dx dividiendo el dominio entre 20. $dx = \frac{9.69}{20} = 0.4845$ c) Después se determina el volumen para cada rectángulo con la función $V(x)$ por arriba de curva (es decir, se toma el valor superior dx del rectángulo) d) A continuación, se determina el área de cada rectángulo al multiplicar $V(x).dx$ e) Por último, se realiza la suma de áreas para obtener una aproximación del área total bajo la curva en este caso 8.58
Reactivo 7 **Intervinientes**	**Intervinientes** - Conceptos: área, eje abscisas.

-Lenguaje natural: área, eje abscisas	**Emergentes** -Conceptos: Por debajo de las abscisas se toma negativo. Es una desaceleración.

En la tabla 4.21 se puede observar que el estudiante pude utilizar y lograr que emergieran los objetos matemáticos primarios necesarios para la resolución de esta actividad, la cual presenta una función son dos ecuaciones y el estudiante utilizó la correcta según el intervalo descrito en el reactivo, en el reactivo 7 el estudiante pudo contextualizar como desaceleración al área que se encuentra por debajo del eje de las abscisas.

Actividade de Cierre

Estudiante 1



Cesto A

Cesto B

Figura 1.12

Para el diseño del cesto A primero hacemos un segmento de una recta con y = 2 en el intervalo [1,5] la cual haremos girar sobre el eje x para generar un cilindro.

igura 1.13

1. ¿Cuál es el radio del cilindro?

2

2. ¿Cómo obtuviste el radio?

Analizando porque giro por el eje (x) y la distancia hasta la recta es 2

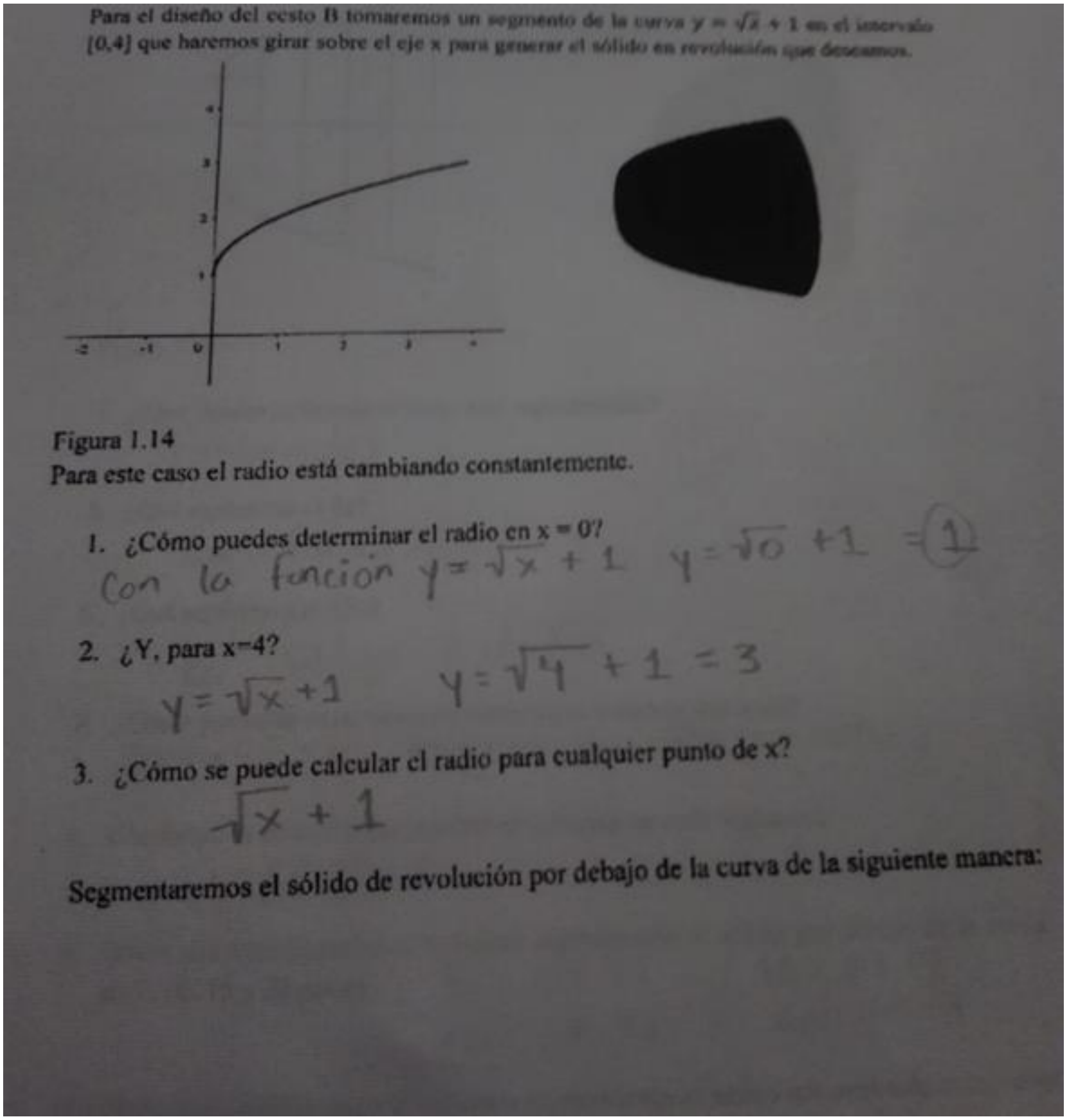
3. ¿Cuál es el volumen del cilindro?

$V = \pi r^2 h$ $V = \pi(2)^2 4 = 50.26$

Tabla 4.22 Actividad 1

Lenguaje (objetos ostensivos)	Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos (objetos no ostensivos)
Reactivo 1 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Radio, cilindro.	**Intervinientes** -Conceptos: Radio, cilindro.
Reactivo 2 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Radio, cilindro.	**Intervinientes** -Conceptos: Radio, cilindro. **Emergentes** Radio de un sólido de revolución.
Reactivo 3 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Volumen, cilindro.	**Intervinientes** -Conceptos: volumen, cilindro, altura, radio, π. **Emergentes** • Argumentos: $v = \pi r^2 h$ • Procedimientos: $v = \pi(2)^2(4) = 50.26$

En la tabla 4.22 se presenta la primera parte de la actividad 1 de las actividades de cierre, donde se manejan objetos matemáticos que el estudiante ya está familiarizado como el volumen de un cilindro y que determine cuál es su radio. Se obtuvieron los resultados esperados.



Para el diseño del cesto B tomaremos un segmento de la curva $y = \sqrt{x} + 1$ en el intervalo [0,4] que haremos girar sobre el eje x para generar el sólido en revolución que deseamos.

Figura 1.14

Para este caso el radio está cambiando constantemente.

1. ¿Cómo puedes determinar el radio en x = 0?

Con la funcion $y = \sqrt{x} + 1$ $y = \sqrt{0} + 1 = \boxed{1}$

2. ¿Y, para x=4?

$y = \sqrt{x} + 1$ $y = \sqrt{4} + 1 = 3$

3. ¿Cómo se puede calcular el radio para cualquier punto de x?

$\sqrt{x} + 1$

Segmentaremos el sólido de revolución por debajo de la curva de la siguiente manera:

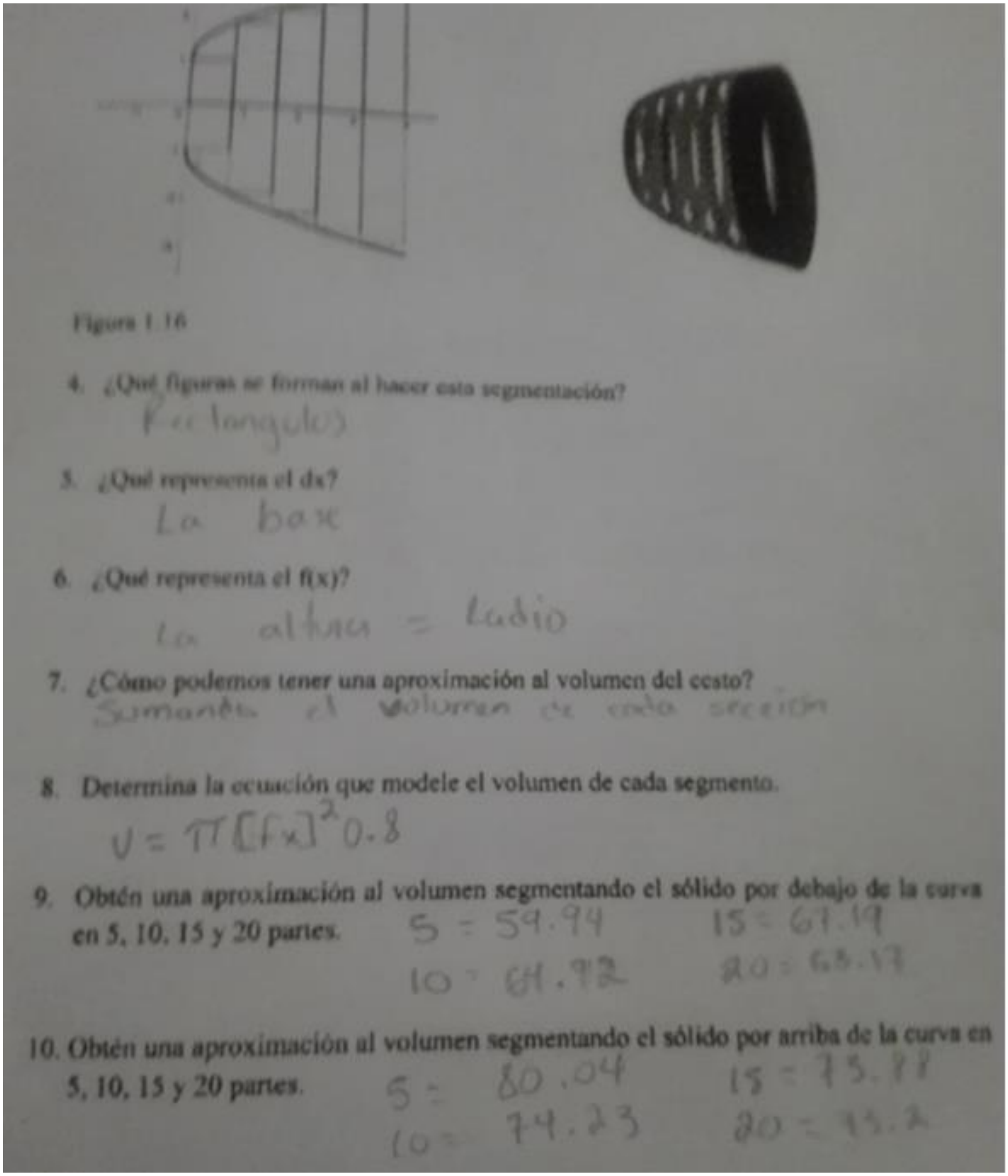


Figura 1.16

4. ¿Qué figuras se forman al hacer esta segmentación?

Rectangulos

5. ¿Qué representa el dx?

La base

6. ¿Qué representa el f(x)?

La altura = radio

7. ¿Cómo podemos tener una aproximación al volumen del cesto?

Sumando el volumen de cada sección

8. Determina la ecuación que modele el volumen de cada segmento.

$V = \pi [fx]^2 0.8$

9. Obtén una aproximación al volumen segmentando el sólido por debajo de la curva en 5, 10, 15 y 20 partes.

5 = 59.94

10 = 64.92

15 = 67.19

20 = 68.17

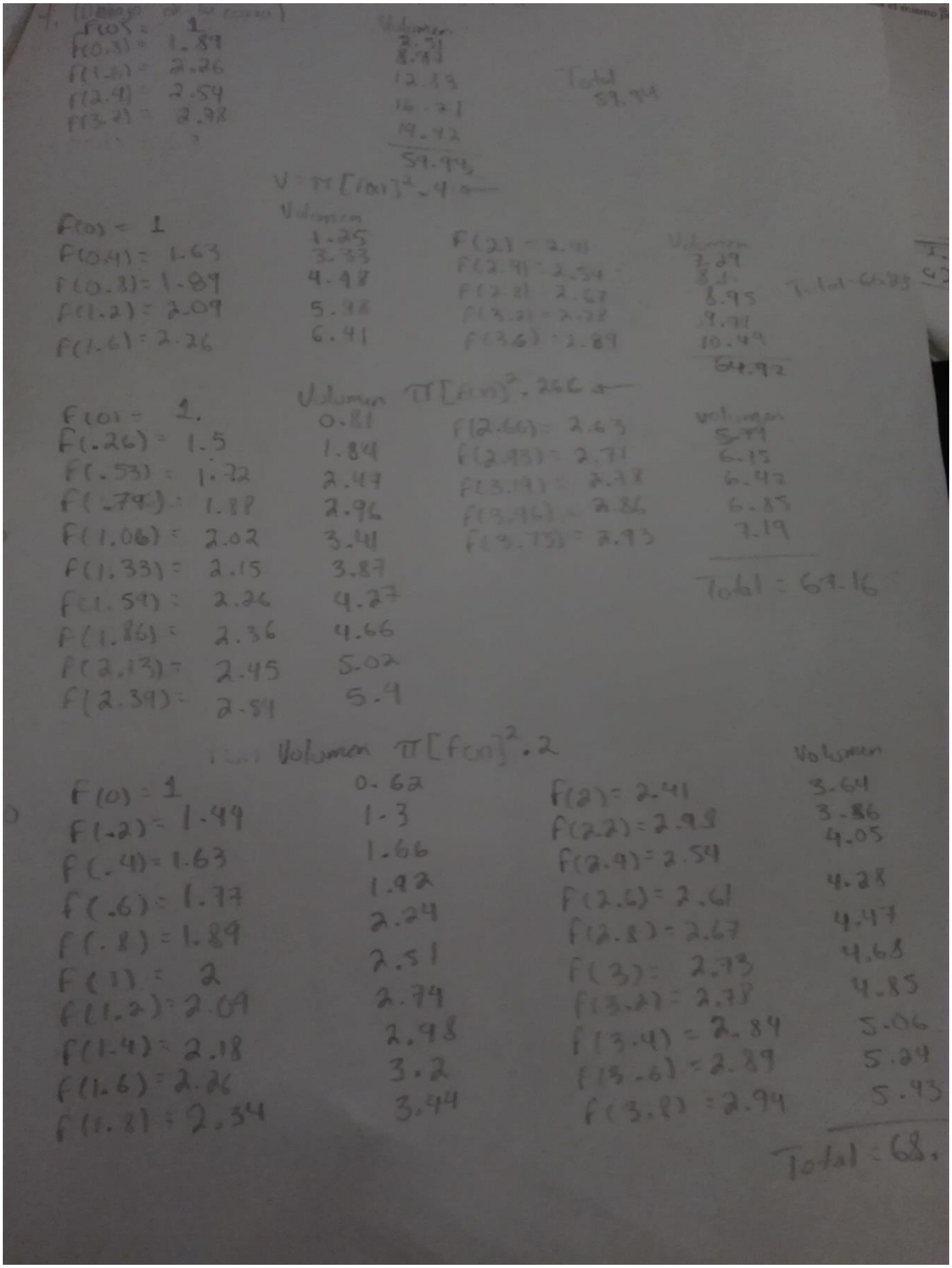
10. Obtén una aproximación al volumen segmentando el sólido por arriba de la curva en 5, 10, 15 y 20 partes.

5 = 80.04

10 = 74.23

15 = 73.88

20 = 73.2



4. (Dibujo de la curva)

	Volumen
f(0) = 1	2.71
f(0.8) = 1.89	8.97
f(1.6) = 2.26	12.83
f(2.4) = 2.54	16.21
f(3.2) = 2.78	19.42
	59.94

Total 59.94

$V = \pi[f(x)]^2 \cdot .4 \leftarrow$

	Volumen		Volumen
f(0) = 1	1.25	f(2) = 2.41	7.29
f(0.4) = 1.63	3.33	f(2.4) = 2.54	8.1
f(0.8) = 1.89	4.48	f(2.8) = 2.67	8.95
f(1.2) = 2.09	5.98	f(3.2) = 2.78	9.71
f(1.6) = 2.26	6.41	f(3.6) = 2.89	10.49
			64.92

Total = 64.93

Volumen $\pi[f(x)]^2 \cdot .266 \leftarrow$

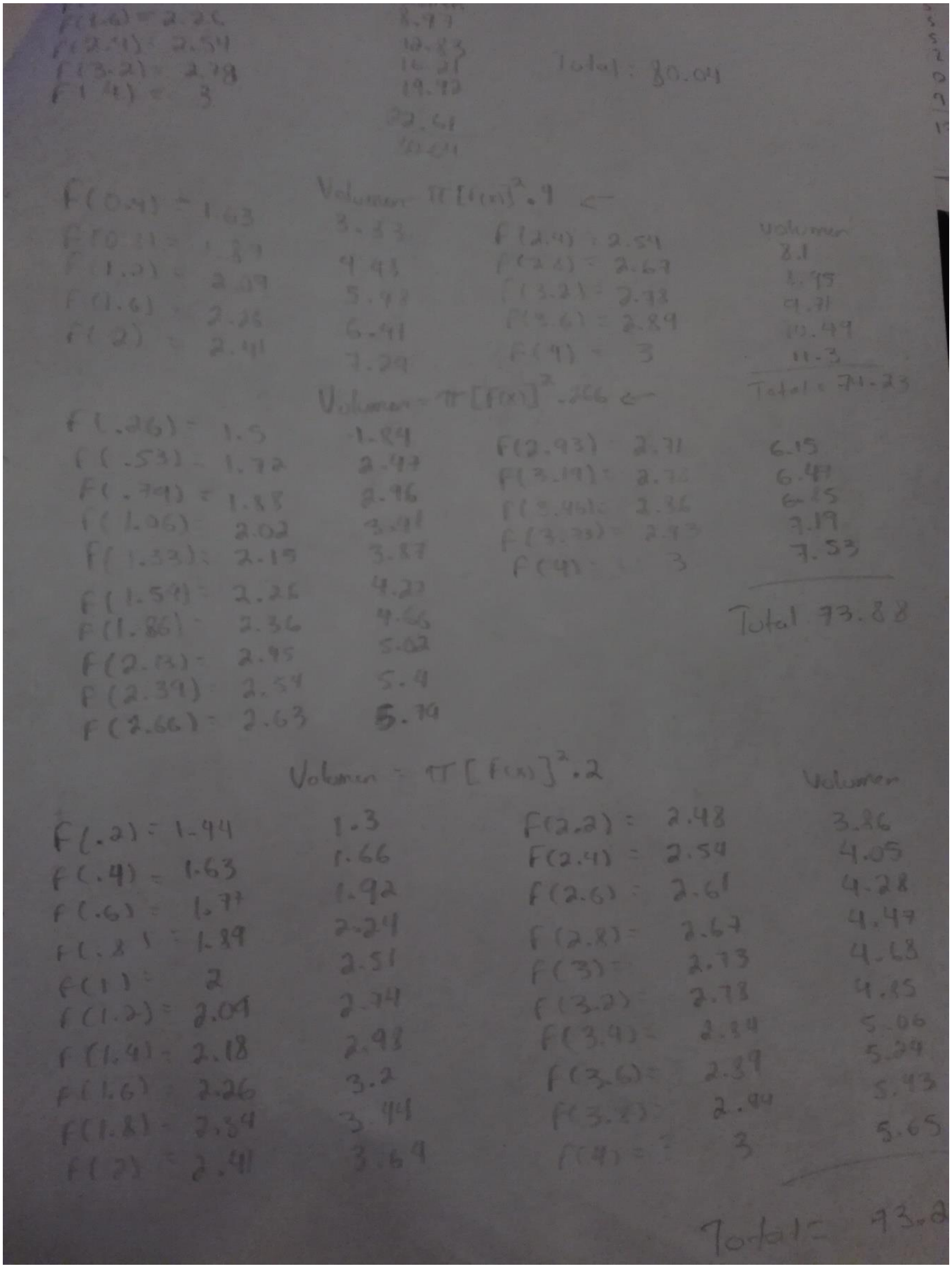
	Volumen		Volumen
f(0) = 1.	0.81	f(2.66) = 2.63	5.79
f(.26) = 1.5	1.84	f(2.93) = 2.71	6.15
f(.53) = 1.72	2.47	f(3.19) = 2.78	6.47
f(.79) = 1.88	2.96	f(3.46) = 2.86	6.85
f(1.06) = 2.02	3.41	f(3.73) = 2.93	7.19
f(1.33) = 2.15	3.87		
f(1.59) = 2.26	4.27		
f(1.86) = 2.36	4.66		
f(2.13) = 2.45	5.02		
f(2.39) = 2.54	5.4		

Total = 67.16

Volumen $\pi[f(x)]^2 \cdot .2$

	Volumen		Volumen
f(0) = 1	0.62	f(2) = 2.41	3.64
f(.2) = 1.49	1.3	f(2.2) = 2.48	3.86
f(.4) = 1.63	1.66	f(2.4) = 2.54	4.05
f(.6) = 1.77	1.92	f(2.6) = 2.61	4.28
f(.8) = 1.89	2.24	f(2.8) = 2.67	4.47
f(1) = 2	2.51	f(3) = 2.73	4.68
f(1.2) = 2.09	2.74	f(3.2) = 2.78	4.85
f(1.4) = 2.18	2.98	f(3.4) = 2.84	5.06
f(1.6) = 2.26	3.2	f(3.6) = 2.89	5.24
f(1.8) = 2.34	3.44	f(3.8) = 2.94	5.43

Total = 68.



f(1.6) = 2.26	8.97	
f(2.4) = 2.54	12.83	
f(3.2) = 2.78	16.21	Total: 80.04
f(4) = 3	19.42	
	22.61	
	80.04	

$$\text{Volumen } \pi[f(x)]^2 \cdot .4 \leftarrow$$

f(0.4) = 1.63	3.33			Volumen
f(0.8) = 1.89	4.43	f(2.4) = 2.54		8.1
f(1.2) = 2.09	5.48	f(2.8) = 2.67		8.95
f(1.6) = 2.26	6.41	f(3.2) = 2.78		9.71
f(2) = 2.41	7.29	f(3.6) = 2.89		10.49
		f(4) = 3		11.3
				Total = 71.23

$$\text{Volumen} = \pi[f(x)]^2 \cdot .266 \leftarrow$$

f(.26) = 1.5	1.84	f(2.93) 2.71	6.15
f(.53) = 1.72	2.47	f(3.19) = 2.7	6.49
f(.79) = 1.88	2.96	f(3.46) = 2.86	6.85
f(1.06) = 2.02	3.41	f(3.73) = 2.93	7.19
f(1.33) = 2.15	3.87	f(4) = 3	7.53
f(1.59) = 2.26	4.27		
f(1.86) = 2.36	4.66		Total 73.88
f(2.13) = 2.45	5.02		
f(2.39) = 2.54	5.4		
f(2.66) = 2.63	5.79		

$$\text{Volumen} = \pi[f(x)]^2 \cdot .2$$

			Volumen
f(.2) = 1.44	1.3	f(2.2) = 2.48	3.86
f(.4) = 1.63	1.66	f(2.4) = 2.54	4.05
f(.6) = 1.77	1.92	f(2.6) = 2.61	4.28
f(.8) = 1.89	2.24	f(2.8) = 2.67	4.47
f(1) = 2	2.51	f(3) = 2.73	4.68
f(1.2) = 2.09	2.74	f(3.2) = 2.78	4.85
f(1.4) = 2.18	2.98	f(3.4) = 2.84	5.06
f(1.6) = 2.26	3.2	f(3.6) = 2.89	5.24
f(1.8) = 2.34	3.44	f(3.8) = 2.94	5.43
f(2) = 2.41	3.64	f(4) = 3	5.65
			Total = 73.2

Tabla 4.21 Actividad 1

Lenguaje (objetos ostensivos)	Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos (objetos no ostensivos)
Reactivo 1 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Radio, variable.	**Intervinientes** -Conceptos: Radio, variable. **Emergentes** • Conceptos: Función, f(0 • Argumentos: $y = \sqrt{x} + 1$ • Procedimientos: $y = \sqrt{0} + 1 = 1$
Reactivo 2 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Radio, variable.	**Intervinientes** -Conceptos: Radio, variable. **Emergentes** • Conceptos: Función, f(4) • Argumentos: $y = \sqrt{x} + 1$ • Procedimientos: $y = \sqrt{4} + 1 = 3$
Reactivo 3 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Radio, variable.	**Intervinientes** -Conceptos: Radio, variable. **Emergentes** -Conceptos: Función, f(x) -Argumentos: $y = \sqrt{x} + 1$
Reactivo 4 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Cilindro, segmentar.	**Intervinientes** -Conceptos: Cilindro, segmentar. **Emergentes** -Conceptos: Radio, altura.
Reactivo 5	**Intervinientes**

Intervinientes -Lenguaje natural: dx.	-Conceptos: dx. **Emergentes** -Conceptos: dx
Reactivo 6 **Intervinientes** -Lenguaje natural: f(x).	**Intervinientes** -Conceptos: f(x). **Emergentes** -Conceptos: Función, f(x)
Reactivo 7 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Aproximación, volumen.	**Intervinientes** -Conceptos: Aproximación, volumen. **Emergentes** -Conceptos: suma de volúmenes.
Reactivo 8 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Ecuación, modelar, volumen, segmento.	**Intervinientes** -Conceptos: Ecuación, modelar, volumen, segmento **Emergentes** -Conceptos: Función de volumen. -Argumentos: $v = \pi[f(x)]^2(0.8)$
Reactivo 9 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Aproximación, volumen, sólido de revolución, debajo de la curva.	**Intervinientes** -Conceptos: Aproximación, volumen, sólido de revolución, curva. **Emergentes** • Conceptos: suma de volúmenes. • Argumentos: $Suma\ de\ volúmenes\ de\ cada\ segemento$ $por\ abajo\ de\ la\ curva\ v = \pi[f(x)]^2dx$ • Procedimientos: a) Primero se secciona la función por debajo de la curva en 5 cilindros.

	b) Luego se determina el valor de las alturas de los cilindros dx dividiendo el dominio entre 5. $dx = \frac{4}{5} = 0.8$ c) Después se determina el volumen para cada cilindro con la función $\mathrm{v}(x)$ por debajo de la curva (es decir, se toma el valor inferior dx del cilindro) d) A continuación, se determina el volumen de cada rectángulo al multiplicar $\mathrm{v}(x).dx$ e) Por último, se realiza la suma de los volúmenes para obtener una aproximación del volumen total bajo la curva. f) Seguimos al seccionar la función por debajo de la curva ahora en 10 cilindros. g) Luego se determina el valor de las alturas de los cilindros dx dividiendo el dominio entre 10. $dx = \frac{4}{10} = 0.4$ h) Después se determina el volumen para cada cilindro con la función $\mathrm{v}(x)$ por debajo de la curva (es decir, se toma el valor inferior dx del cilindro) i) A continuación, se determina el volumen de cada rectángulo al multiplicar $\mathrm{v}(x).dx$ j) Por último, se realiza la suma de los volúmenes para obtener una aproximación del volumen total bajo la curva. k) Después se secciona la función por debajo de la curva en 15 cilindros. l) Luego se determina el valor de las alturas de los cilindros dx dividiendo el dominio entre 15. $dx = \frac{4}{15} = 0.2666$

	m) Después se determina el volumen para cada cilindro con la función $\mathrm{v}(x)$ por debajo de la curva (es decir, se toma el valor inferior dx del cilindro) n) A continuación, se determina el volumen de cada rectángulo al multiplicar $\mathrm{v}(x).dx$ o) Por último, se realiza la suma de los volúmenes para obtener una aproximación del volumen total bajo la curva. p) Primero se secciona la función por debajo de la curva en 20 cilindros. q) Luego se determina el valor de las alturas de los cilindros dx dividiendo el dominio entre 20. $$dx = \frac{4}{20} = 0.2$$ r) Después se determina el volumen para cada cilindro con la función $\mathrm{v}(x)$ por debajo de la curva (es decir, se toma el valor inferior dx del cilindro) s) A continuación, se determina el volumen de cada rectángulo al multiplicar $\mathrm{v}(x).dx$ t) Por último, se realiza la suma de los volúmenes para obtener una aproximación del volumen total bajo la curva.
Reactivo 10 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Aproximación, volumen, sólido de revolución, arriba de la curva.	**Intervinientes** -Conceptos: Aproximación, volumen, sólido de revolución, curva. **Emergentes** -Conceptos: suma de volúmenes.

-Argumentos:

$Suma\ de\ volúmenes\ de\ cada\ segemento$

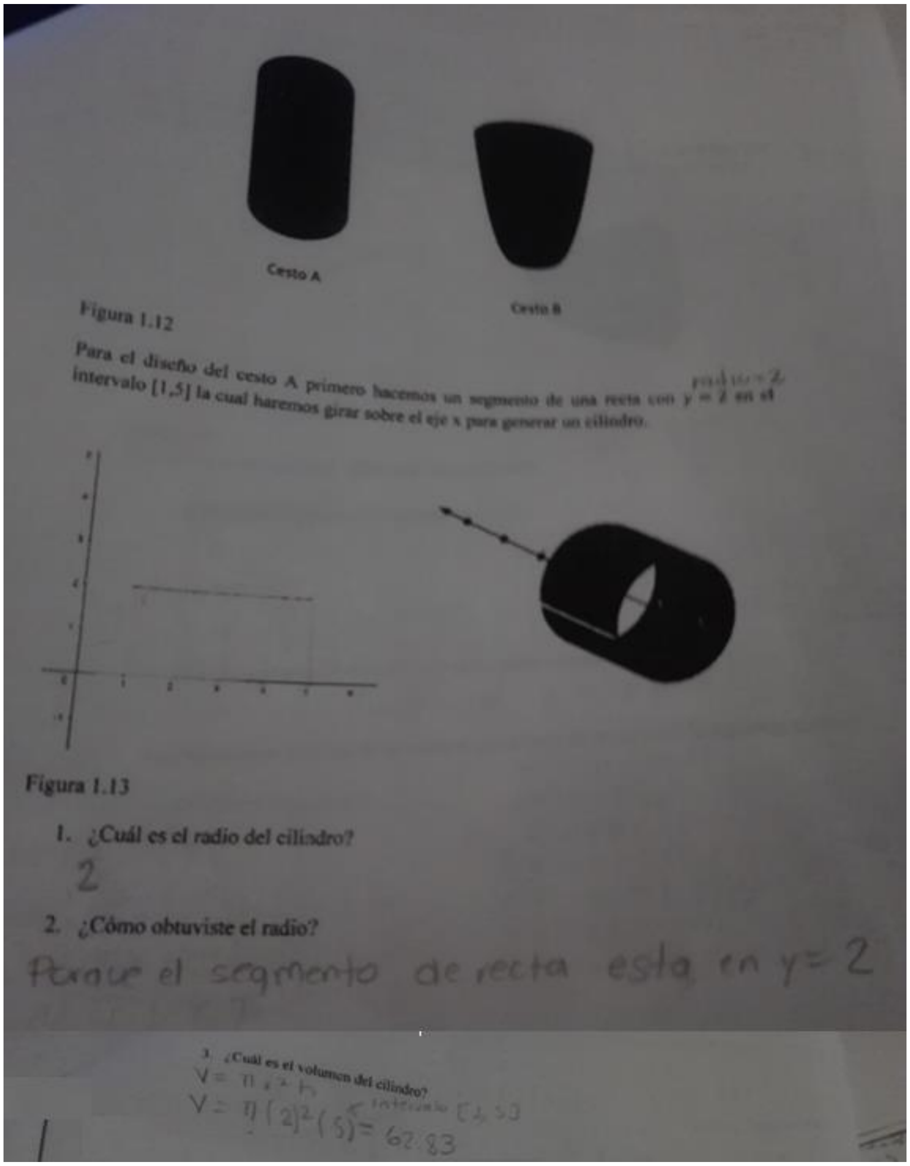
$por\ arriba\ de\ la\ curva\ v = \pi[f(x)]^2 dx$

- Procedimientos:
  a) Primero se secciona la función por arriba de la curva en 5 cilindros.
  b) Luego se determina el valor de las alturas de los cilindros dx dividiendo el dominio entre 5.
  $$dx = \frac{4}{5} = 0.8$$
  c) Después se determina el volumen para cada cilindro con la función v(x) por arriba de la curva (es decir, se toma el valor superior dx del cilindro)
  d) A continuación, se determina el volumen de cada rectángulo al multiplicar v$(x).dx$
  e) Por último, se realiza la suma de los volúmenes para obtener una aproximación del volumen total bajo la curva.
  f) Seguimos al seccionar la función por arriba de la curva ahora en 10 cilindros.
  g) Luego se determina el valor de las alturas de los cilindros dx dividiendo el dominio entre 10.
  $$dx = \frac{4}{10} = 0.4$$
  h) Después se determina el volumen para cada cilindro con la función v(x) por arriba de la curva (es decir, se toma el valor superior dx del cilindro)
  i) A continuación, se determina el volumen de cada rectángulo al multiplicar v$(x).dx$
  j) Se realiza la suma de los volúmenes para obtener una aproximación del volumen total bajo la curva.

	k) Después se secciona la función por arriba de la curva en 15 cilindros. l) Luego se determina el valor de las alturas de los cilindros dx dividiendo el dominio entre 15. $dx = \frac{4}{15} = 0.2666$ m) Después se determina el volumen para cada cilindro con la función $\mathrm{v}(x)$ por arriba de la curva (es decir, se toma el valor superior dx del cilindro) n) A continuación, se determina el volumen de cada rectángulo al multiplicar $\mathrm{v}(x).dx$ Se realiza la suma de los volúmenes para obtener una aproximación del volumen total bajo la curva. o) Se secciona la función por arriba de la curva en 20 cilindros. p) Luego se determina el valor de las alturas de los cilindros dx dividiendo el dominio entre 20. $dx = \frac{4}{20} = 0.2$ q) Después se determina el volumen para cada cilindro con la función $\mathrm{v}(x)$ por arriba de la curva (es decir, se toma el valor superior dx del cilindro) r) A continuación, se determina el volumen de cada rectángulo al multiplicar $\mathrm{v}(x).dx$ s) Por último, se realiza la suma de los volúmenes para obtener una aproximación del volumen total bajo la curva.

La tabla 4.21 nos muestra la continuación de la actividad 1, en la cual se muestra como el estudiante utiliza los objetos matemáticos primarios requeridos para realizar la actividad que se previeron al momento de realizar el análisis a priori, pudo segmentar el sólido de revolución en pequeños cilindros para obtener una aproximación al volumen real por debajo y por arriba de la curva

Estudiante 2



Cesto A

Cesto B

Figura 1.12

Para el diseño del cesto A primero hacemos un segmento de una recta con $y = 2$ en el intervalo [1,5] la cual haremos girar sobre el eje x para generar un cilindro.

radio = 2

Figura 1.13

1. ¿Cuál es el radio del cilindro?

2

2. ¿Cómo obtuviste el radio?

Porque el segmento de recta esta en $y=2$

3. ¿Cuál es el volumen del cilindro?

$V = \pi r^2 h$

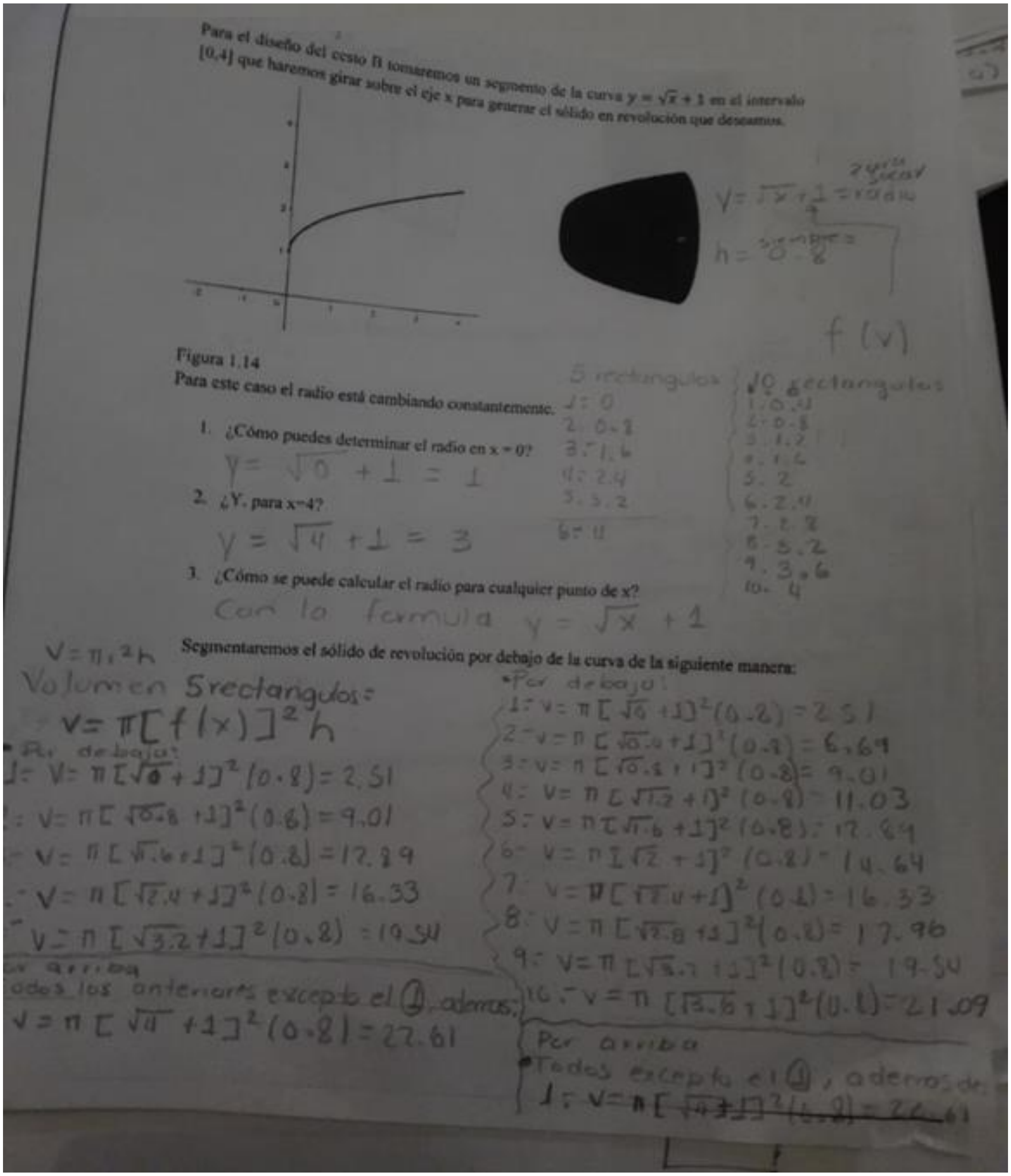
$V = \pi (2)^2 (5) = 62.83$ intervalo [1, 5]

Tabla 4.22 Actividad 1

Lenguaje (objetos ostensivos)	Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos (objetos no ostensivos)
Reactivo 1 **Intervinientes**	**Intervinientes** -Conceptos: Radio, cilindro.

-Lenguaje natural: Radio, cilindro.	
Reactivo 2 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Radio, cilindro.	**Intervinientes** -Conceptos: Radio, cilindro. **Emergentes** Radio de un sólido de revolución.
Reactivo 3 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Volumen, cilindro.	**Intervinientes** -Conceptos: volumen, cilindro, altura, radio, π. **Emergentes** • Argumentos: $v = \pi r^2 h$

En la tabla 4.22 se puede observar que el estudiante desarrolla los objetos matemáticos primarios esperados en esta actividad.



Para el diseño del cesto [illegible] tomaremos un segmento de la curva $y = \sqrt{x} + 1$ en el intervalo [0,4] que haremos girar sobre el eje x para generar el sólido en revolución que deseamos.

$y = \sqrt{x} + 1$ = radio

h = 0.8

f(v)

Figura 1.14

Para este caso el radio está cambiando constantemente.

5 rectangulos	10 rectangulos
1: 0	1. 0.4
2: 0.8	2. 0.8
3: 1.6	3. 1.2
4: 2.4	4. 1.6
5: 3.2	5. 2
6: 4	6. 2.4
	7. 2.8
	8. 3.2
	9. 3.6
	10. 4

1. ¿Cómo puedes determinar el radio en x = 0?

   $y = \sqrt{0} + 1 = 1$

2. ¿Y, para x=4?

   $y = \sqrt{4} + 1 = 3$

3. ¿Cómo se puede calcular el radio para cualquier punto de x?

   Con la formula $y = \sqrt{x} + 1$

Segmentaremos el sólido de revolución por debajo de la curva de la siguiente manera:

$V = \pi r^2 h$

Volumen 5rectangulos:

$V = \pi[f(x)]^2 h$

- Por debajo:

1: $V = \pi[\sqrt{0} + 1]^2(0.8) = 2.51$

2: $V = \pi[\sqrt{0.8} + 1]^2(0.8) = 9.01$

3: $V = \pi[\sqrt{1.6} + 1]^2(0.8) = 12.89$

4: $V = \pi[\sqrt{2.4} + 1]^2(0.8) = 16.33$

5: $V = \pi[\sqrt{3.2} + 1]^2(0.8) = 19.54$

Por arriba

Todos los anteriores excepto el ①, además:

$V = \pi[\sqrt{4} + 1]^2(0.8) = 22.61$

- Por debajo:

1: $v = \pi[\sqrt{0} + 1]^2(0.8) = 2.51$

2: $v = \pi[\sqrt{0.4} + 1]^2(0.4) = 6.69$

3: $v = \pi[\sqrt{0.8} + 1]^2(0.8) = 9.01$

4: $V = \pi[\sqrt{1.2} + 1]^2(0.8) = 11.03$

5: $v = \pi[\sqrt{1.6} + 1]^2(0.8) = 12.89$

6: $V = \pi[\sqrt{2} + 1]^2(0.8) = 14.64$

7: $V = \pi[\sqrt{2.4} + 1]^2(0.8) = 16.33$

8: $V = \pi[\sqrt{2.8} + 1]^2(0.8) = 17.96$

9: $V = \pi[\sqrt{3.2} + 1]^2(0.8) = 19.54$

10: $v = \pi[\sqrt{3.6} + 1]^2(0.8) = 21.09$

Por arriba

- Todos excepto el ①, además de:

1: $V = \pi[\sqrt{4} + 1]^2(0.8) = 22.61$

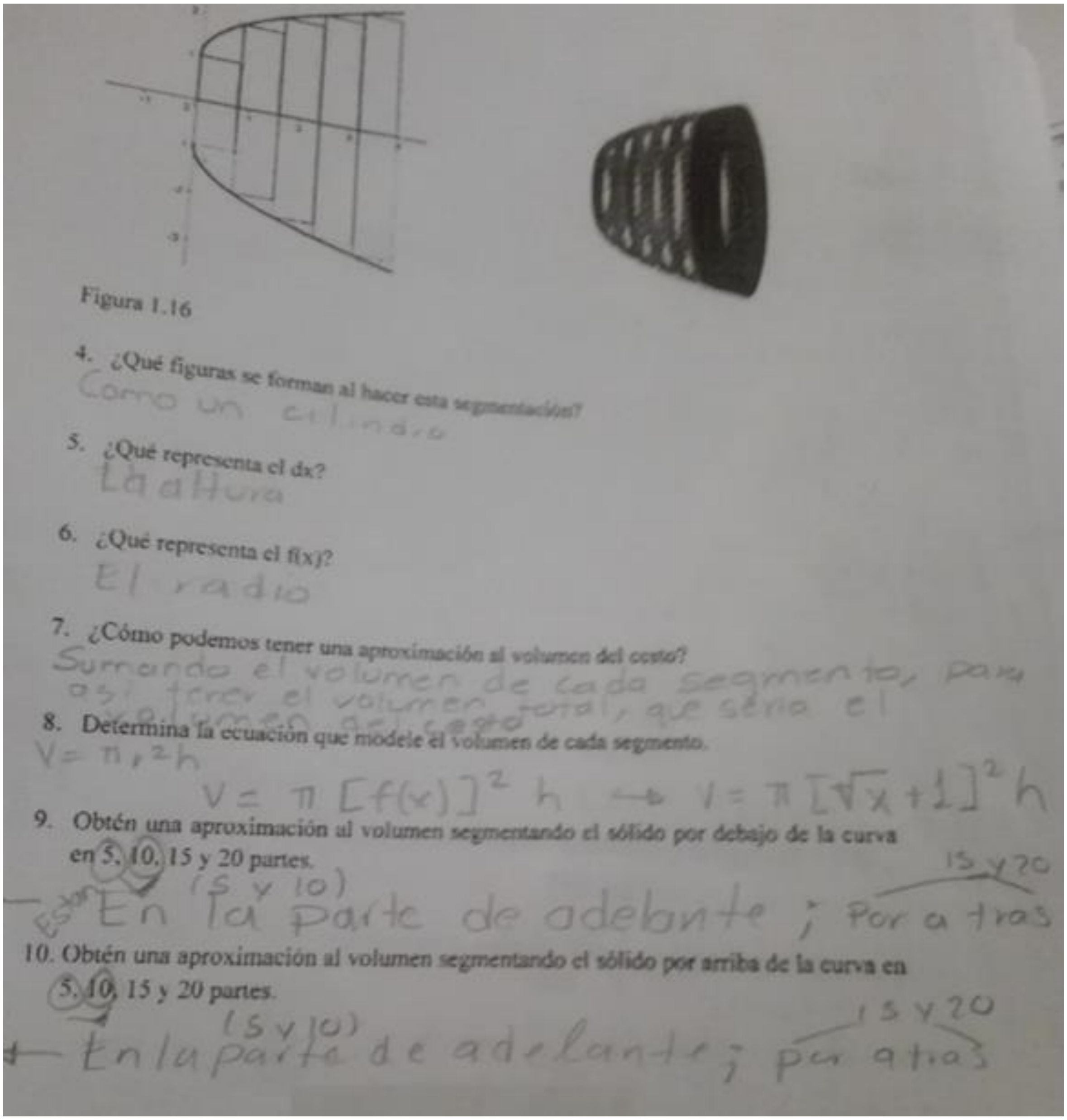


Figura 1.16

4. ¿Qué figuras se forman al hacer esta segmentación?

Como un cilindro

5. ¿Qué representa el dx?

La altura

6. ¿Qué representa el f(x)?

El radio

7. ¿Cómo podemos tener una aproximación al volumen del cesto?

Sumando el volumen de cada segmento, para asi tener el volumen total, que sería el volumen del cesto

8. Determina la ecuación que modele el volumen de cada segmento.

$V = \pi r^2 h$

$V = \pi [f(x)]^2 h \rightarrow V = \pi [\sqrt{x} + 1]^2 h$

9. Obtén una aproximación al volumen segmentando el sólido por debajo de la curva en 5, 10, 15 y 20 partes.

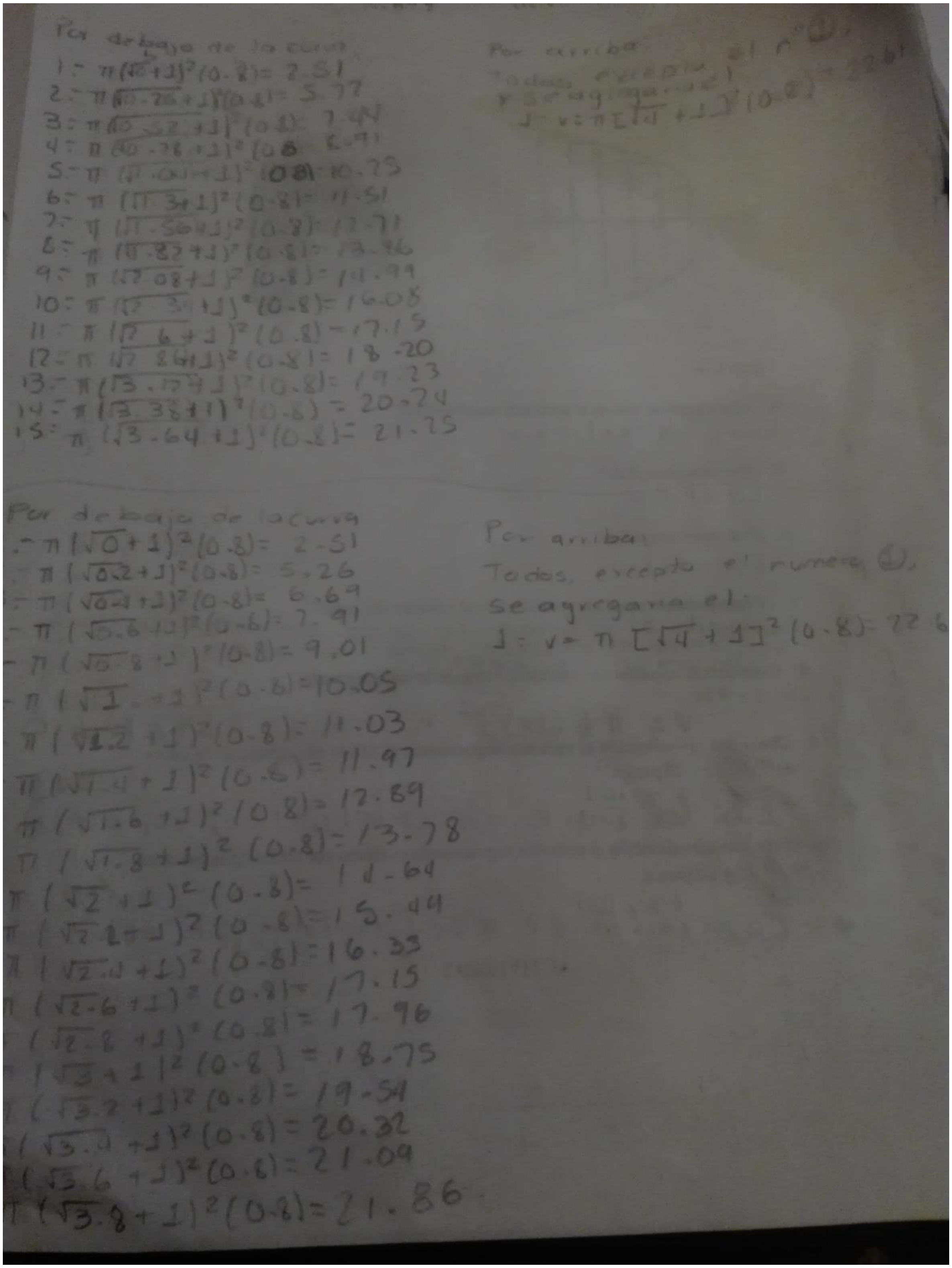
(5 y 10) 15 y 20

Eso En la parte de adelante ; Por a tras

10. Obtén una aproximación al volumen segmentando el sólido por arriba de la curva en 5, 10, 15 y 20 partes.

(5 y 10) 15 y 20

En la parte de adelante ; por a tras



Por debajo de la curva

1 = $\pi(\sqrt{0}+1)^2(0.8) = 2.51$

2 = $\pi(\sqrt{0.26}+1)^2(0.8) = 5.77$

3 = $\pi(\sqrt{0.52}+1)^2(0.8) = 7.44$

4 = $\pi(\sqrt{0.78}+1)^2(0.8 = 8.91$

5 = $\pi(\sqrt{1.04}+1)^2(0.8) = 10.25$

6 = $\pi(\sqrt{1.3}+1)^2(0.8) = 11.51$

7 = $\pi(\sqrt{1.56}+1)^2(0.8) = 12.71$

8 = $\pi(\sqrt{1.82}+1)^2(0.8) = 13.86$

9 = $\pi(\sqrt{2.08}+1)^2(0.8) = 14.99$

10 = $\pi(\sqrt{2.34}+1)^2(0.8) = 16.08$

11 = $\pi(\sqrt{2.6}+1)^2(0.8) = 17.15$

12 = $\pi(\sqrt{2.86}+1)^2(0.8) = 18.20$

13 = $\pi(\sqrt{3.12}+1)^2(0.8) = 19.23$

14 = $\pi(\sqrt{3.38}+1)^2(0.8) = 20.24$

15 = $\pi(\sqrt{3.64}+1)^2(0.8) = 21.25$

Por arriba el n° ①

Todos excepto el 1)

y se agregaría el

1: $v = \pi[\sqrt{4}+1]^2(0.8) = 22.6$

Por debajo de la curva

$\pi(\sqrt{0}+1)^2(0.8) = 2.51$

$\pi(\sqrt{0.2}+1)^2(0.8) = 5.26$

$\pi(\sqrt{0.4}+1)^2(0.8) = 6.69$

$\pi(\sqrt{0.6}+1)^2(0.8) = 7.91$

$\pi(\sqrt{0.8}+1)^2(0.8) = 9.01$

$\pi(\sqrt{1}+1)^2(0.8) = 10.05$

$\pi(\sqrt{1.2}+1)^2(0.8) = 11.03$

$\pi(\sqrt{1.4}+1)^2(0.8) = 11.97$

$\pi(\sqrt{1.6}+1)^2(0.8) = 12.89$

$\pi(\sqrt{1.8}+1)^2(0.8) = 13.78$

$\pi(\sqrt{2}+1)^2(0.8) = 14.64$

$\pi(\sqrt{2.2}+1)^2(0.8) = 15.44$

$\pi(\sqrt{2.4}+1)^2(0.8) = 16.33$

$\pi(\sqrt{2.6}+1)^2(0.8) = 17.15$

$\pi(\sqrt{2.8}+1)^2(0.8) = 17.96$

$\pi(\sqrt{3}+1)^2(0.8) = 18.75$

$\pi(\sqrt{3.2}+1)^2(0.8) = 19.54$

$\pi(\sqrt{3.4}+1)^2(0.8) = 20.32$

$\pi(\sqrt{3.6}+1)^2(0.8) = 21.09$

$\pi(\sqrt{3.8}+1)^2(0.8) = 21.86$

Por arriba

Todos, excepto el numero ①,

se agregaría el:

1: $v = \pi[\sqrt{4}+1]^2(0.8) = 22.6$

Tabla 4.23 Actividad 1

Lenguaje (objetos ostensivos)	Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos (objetos no ostensivos)
Reactivo 1 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Radio, variable.	**Intervinientes** -Conceptos: Radio, variable. **Emergentes** -Conceptos: Función, f (0) -Argumentos: $y = \sqrt{x} + 1$ $y = \sqrt{0} + 1 = 1$
Reactivo 2 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Radio, variable.	**Intervinientes** -Conceptos: Radio, variable. **Emergentes** -Conceptos: Función, f (4) -Argumentos: $y = \sqrt{x} + 1$ $y = \sqrt{4} + 1 = 3$
Reactivo 3 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Radio, variable.	**Intervinientes** -Conceptos: Radio, variable. **Emergentes** -Conceptos: Función, f(x) -Argumentos: $y = \sqrt{x} + 1$
Reactivo 4 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Cilindro, segmentar.	**Intervinientes** -Conceptos: Cilindro, segmentar. **Emergentes** -Conceptos: Radio, altura.
Reactivo 5	**Intervinientes**

Intervinientes -Lenguaje natural: dx.	-Conceptos: dx. **Emergentes** -Conceptos: dx = altura
Reactivo 6 **Intervinientes** -Lenguaje natural: $f(x)$.	**Intervinientes** -Conceptos: $f(x)$. **Emergentes** -Conceptos: Función, $f(x) =$ radio
Reactivo 7 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Aproximación, volumen.	**Intervinientes** -Conceptos: Aproximación, volumen. **Emergentes** -Conceptos: suma de volúmenes de cada segmento.
Reactivo 8 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Ecuación, modelar, volumen, segmento.	**Intervinientes** -Conceptos: Ecuación, modelar, volumen, segmento **Emergentes** -Conceptos: Función de volumen. -Argumentos: $v = \pi[f(x)]^2h$
Reactivo 9 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Aproximación, volumen, sólido de revolución, debajo de la curva.	**Intervinientes** -Conceptos: Aproximación, volumen, sólido de revolución, curva. **Emergentes** -Conceptos: suma de volúmenes. -Argumentos: $Suma\ de\ volúmenes\ de\ cada\ segemento$ $por\ abajo\ de\ la\ curva\ v = \pi[f(x)]^2dx$ • Procedimientos:

	a) Primero se secciona la función por debajo de la curva en 5 cilindros. b) Luego se determina el valor de las alturas de los cilindros dx dividiendo el dominio entre 5. $dx = \frac{4}{5} = 0.8$ c) Después se determina el volumen para cada cilindro con la función $\mathrm{v}(x)$ por debajo de la curva (es decir, se toma el valor inferior dx del cilindro) d) A continuación, se determina el volumen de cada rectángulo al multiplicar $\mathrm{v}(x).dx$ e) Por último, se realiza la suma de los volúmenes para obtener una aproximación del volumen total bajo la curva. f) Seguimos al seccionar la función por debajo de la curva ahora en 10 cilindros. g) Luego se determina el valor de las alturas de los cilindros dx dividiendo el dominio entre 10. $dx = \frac{4}{10} = 0.4$ h) Después se determina el volumen para cada cilindro con la función $\mathrm{v}(x)$ por debajo de la curva (es decir, se toma el valor inferior dx del cilindro) i) A continuación, se determina el volumen de cada rectángulo al multiplicar $\mathrm{v}(x).dx$ j) Por último, se realiza la suma de los volúmenes para obtener una aproximación del volumen total bajo la curva. k) Después se secciona la función por debajo de la curva en 15 cilindros. l) Luego se determina el valor de las alturas de los cilindros dx dividiendo el dominio entre 15.

	$dx = \frac{4}{15} = 0.2666$ m) Después se determina el volumen para cada cilindro con la función $\mathrm{v}(x)$ por debajo de la curva (es decir, se toma el valor inferior dx del cilindro) n) A continuación, se determina el volumen de cada rectángulo al multiplicar $\mathrm{v}(x).dx$ o) Por último, se realiza la suma de los volúmenes para obtener una aproximación del volumen total bajo la curva. p) Primero se secciona la función por debajo de la curva en 20 cilindros. q) Luego se determina el valor de las alturas de los cilindros dx dividiendo el dominio entre 20. $dx = \frac{4}{20} = 0.2$ r) Después se determina el volumen para cada cilindro con la función $\mathrm{v}(x)$ por debajo de la curva (es decir, se toma el valor inferior dx del cilindro) s) A continuación, se determina el volumen de cada rectángulo al multiplicar $\mathrm{v}(x).dx$ t) Por último, se realiza la suma de los volúmenes para obtener una aproximación del volumen total bajo la curva.
Reactivo 10 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Aproximación, volumen, sólido de revolución, arriba de la curva.	**Intervinientes** -Conceptos: Aproximación, volumen, sólido de revolución, curva. **Emergentes** **-**Conceptos: suma de volúmenes.

-Argumentos:

$Suma\ de\ vol\acute{u}menes\ de\ cada\ segemento$

$por\ arriba\ de\ la\ curva\ v = \pi[f(x)]^2 dx$

- Procedimientos:
  a) Primero se secciona la función por arriba de la curva en 5 cilindros.
  b) Luego se determina el valor de las alturas de los cilindros dx dividiendo el dominio entre 5.
  $$dx = \frac{4}{5} = 0.8$$
  c) Después se determina el volumen para cada cilindro con la función v(x) por arriba de la curva (es decir, se toma el valor superior dx del cilindro)
  d) A continuación, se determina el volumen de cada rectángulo al multiplicar v$(x).dx$
  e) Por último, se realiza la suma de los volúmenes para obtener una aproximación del volumen total bajo la curva.
  f) Seguimos al seccionar la función por arriba de la curva ahora en 10 cilindros.
  g) Luego se determina el valor de las alturas de los cilindros dx dividiendo el dominio entre 10.
  $$dx = \frac{4}{10} = 0.4$$
  h) Después se determina el volumen para cada cilindro con la función v(x) por arriba de la curva (es decir, se toma el valor superior dx del cilindro)
  i) A continuación, se determina el volumen de cada rectángulo al multiplicar v$(x).dx$
  j) Se realiza la suma de los volúmenes para obtener una aproximación del volumen total bajo la curva.

k) Después se secciona la función por arriba de la curva en 15 cilindros.

l) Luego se determina el valor de las alturas de los cilindros dx dividiendo el dominio entre 15.

$$dx = \frac{4}{15} = 0.2666$$

m) Después se determina el volumen para cada cilindro con la función $\mathrm{v}(x)$ por arriba de la curva (es decir, se toma el valor superior dx del cilindro)

n) A continuación, se determina el volumen de cada rectángulo al multiplicar $\mathrm{v}(x).dx$

Se realiza la suma de los volúmenes para obtener una aproximación del volumen total bajo la curva.

o) Se secciona la función por arriba de la curva en 20 cilindros.

p) Luego se determina el valor de las alturas de los cilindros dx dividiendo el dominio entre 20.

$$dx = \frac{4}{20} = 0.2$$

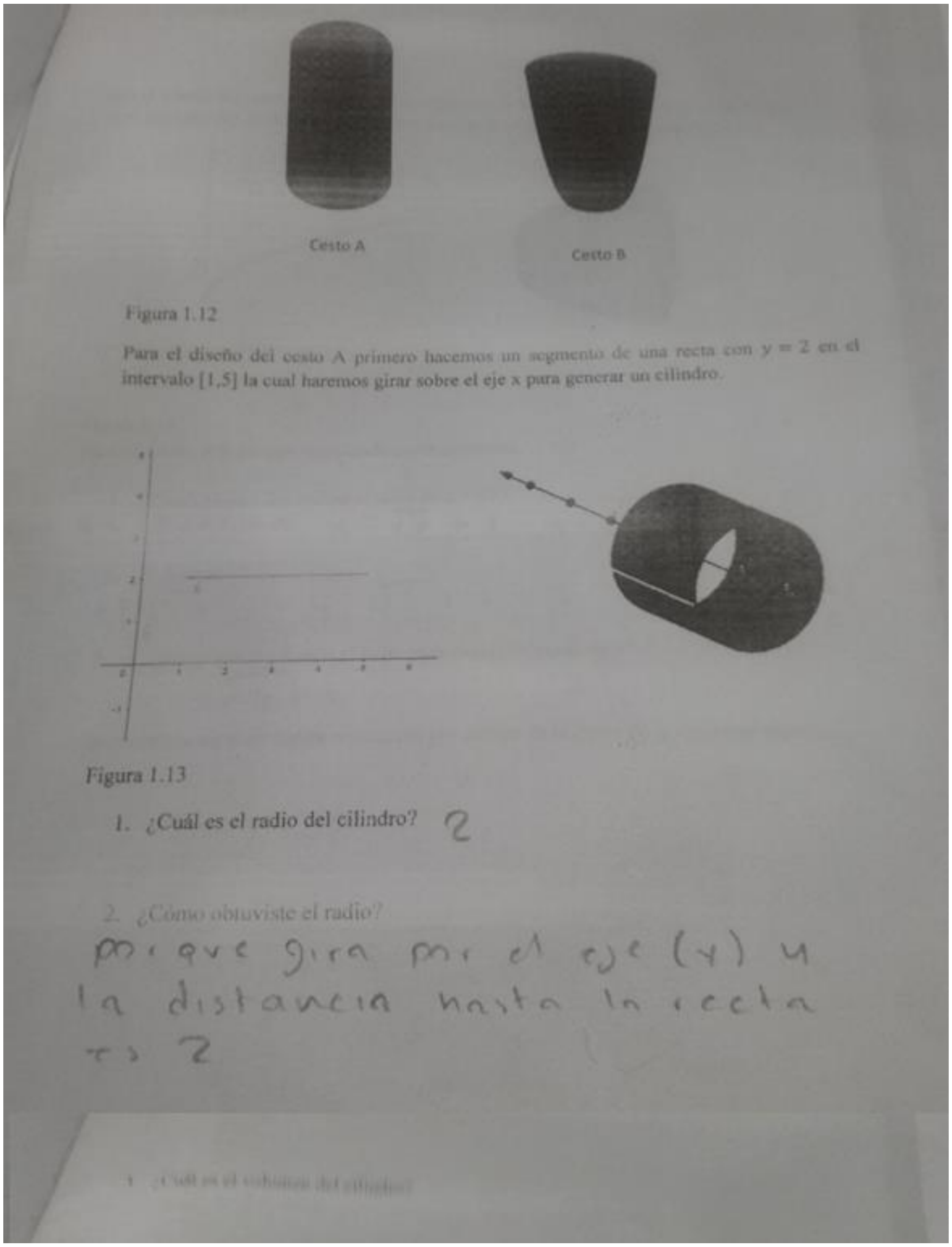
q) Después se determina el volumen para cada cilindro con la función $\mathrm{v}(x)$ por arriba de la curva (es decir, se toma el valor superior dx del cilindro)

r) A continuación, se determina el volumen de cada rectángulo al multiplicar $\mathrm{v}(x).dx$

s) Por último, se realiza la suma de los volúmenes para obtener una aproximación del volumen total bajo la curva.

Se puede observar en la tabla 4.23 que el alumno utiliza los conceptos matemáticos necesarios para que emerjan los objetos matemáticos primarios que se pretenden en la actividad.

Estudiante 3



Cesto A

Cesto B

Figura 1.12

Para el diseño del cesto A primero hacemos un segmento de una recta con $y = 2$ en el intervalo [1,5] la cual haremos girar sobre el eje x para generar un cilindro.

Figura 1.13

1. ¿Cuál es el radio del cilindro? 2

2. ¿Cómo obtuviste el radio?

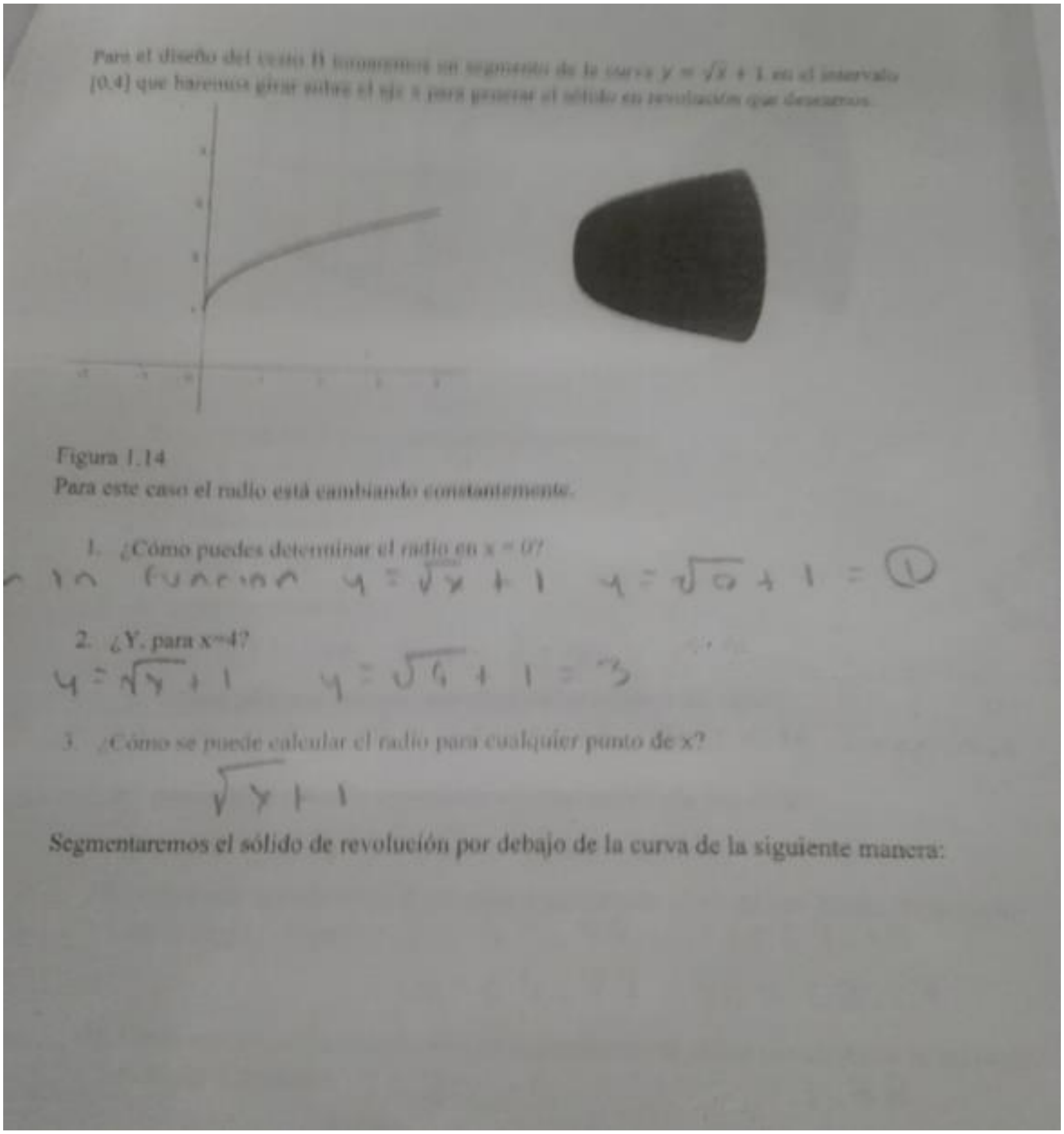
por que gira por el eje (y) y
la distancia hasta la recta
es 2

3. ¿Cuál es el volumen del cilindro?

Tabla 4.24 Actividad 1

Lenguaje (objetos ostensivos)	Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos (objetos no ostensivos)
Reactivo 1 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Radio, cilindro.	**Intervinientes** -Conceptos: Radio, cilindro.
Reactivo 2 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Radio, cilindro.	**Intervinientes** -Conceptos: Radio, cilindro. **Emergentes** Radio de un sólido de revolución.
Reactivo 3 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Volumen, cilindro.	**Intervinientes** -Conceptos: volumen, cilindro, altura, radio, π. **Emergentes** • Argumentos: $v = \pi r^2 h$

Como se puede ver en la tabla 4.24 el estudiante utiliza los objetos matemáticos primarios en la resolución de la actividad, por lo que se cumple lo que se analizó a priori para esta actividad.



Para el diseño del vaso B tomaremos un segmento de la curva $y = \sqrt{x} + 1$ en el intervalo [0,4] que haremos girar sobre el eje x para generar el sólido en revolución que deseamos.

Figura 1.14

Para este caso el radio está cambiando constantemente.

1. ¿Cómo puedes determinar el radio en x = 0?

la funcion $y = \sqrt{x} + 1$ $y = \sqrt{0} + 1 =$ ①

2. ¿Y, para x=4?

$y = \sqrt{x} + 1$ $y = \sqrt{4} + 1 = 3$

3. ¿Cómo se puede calcular el radio para cualquier punto de x?

$\sqrt{x} + 1$

Segmentaremos el sólido de revolución por debajo de la curva de la siguiente manera:

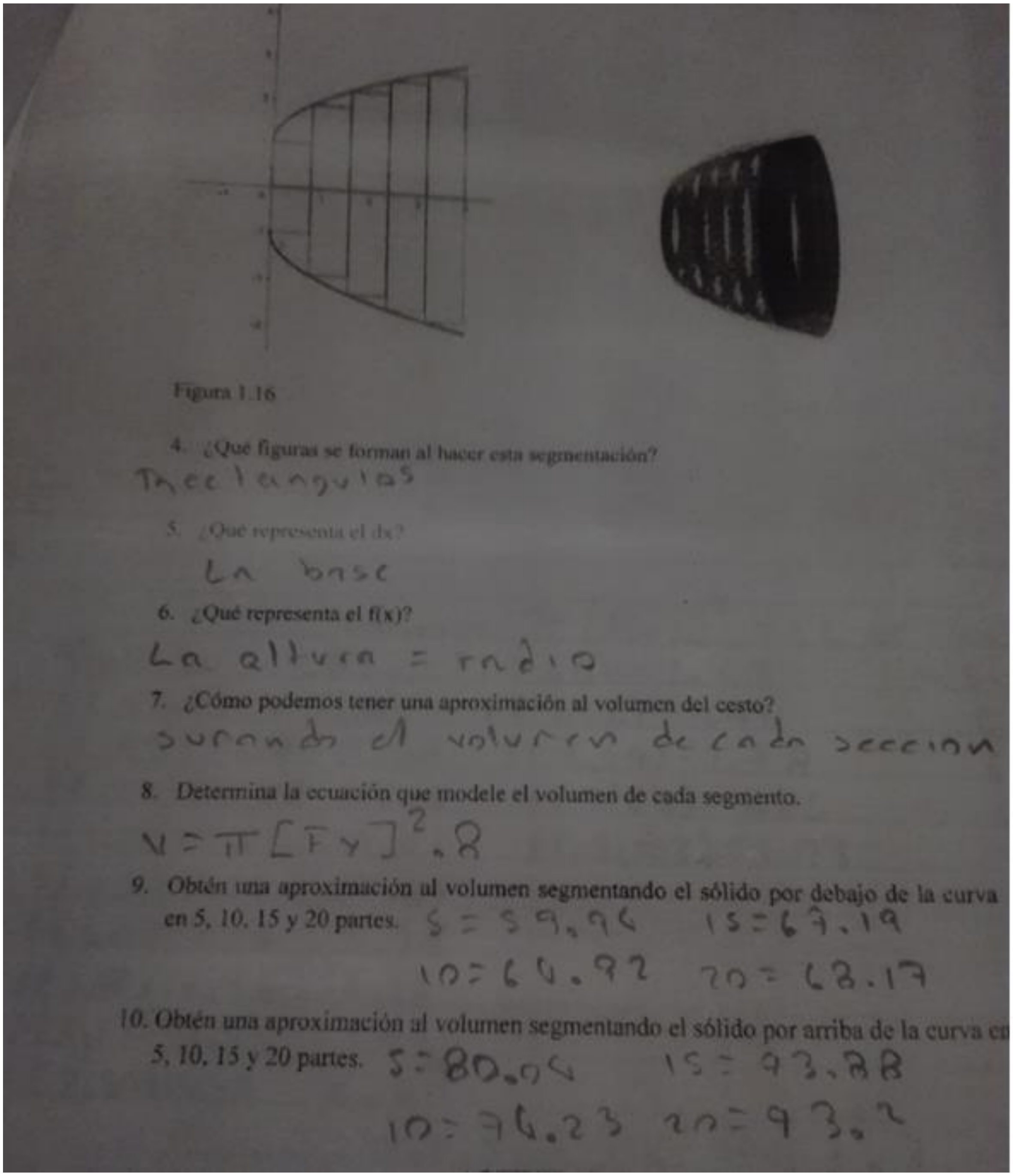


Figura 1.16

4. ¿Qué figuras se forman al hacer esta segmentación?

Rectangulos

5. ¿Qué representa el dx?

La base

6. ¿Qué representa el f(x)?

La altura = radio

7. ¿Cómo podemos tener una aproximación al volumen del cesto?

sumando el volumen de cada seccion

8. Determina la ecuación que modele el volumen de cada segmento.

$V = \pi [F y]^2 . 8$

9. Obtén una aproximación al volumen segmentando el sólido por debajo de la curva en 5, 10, 15 y 20 partes.

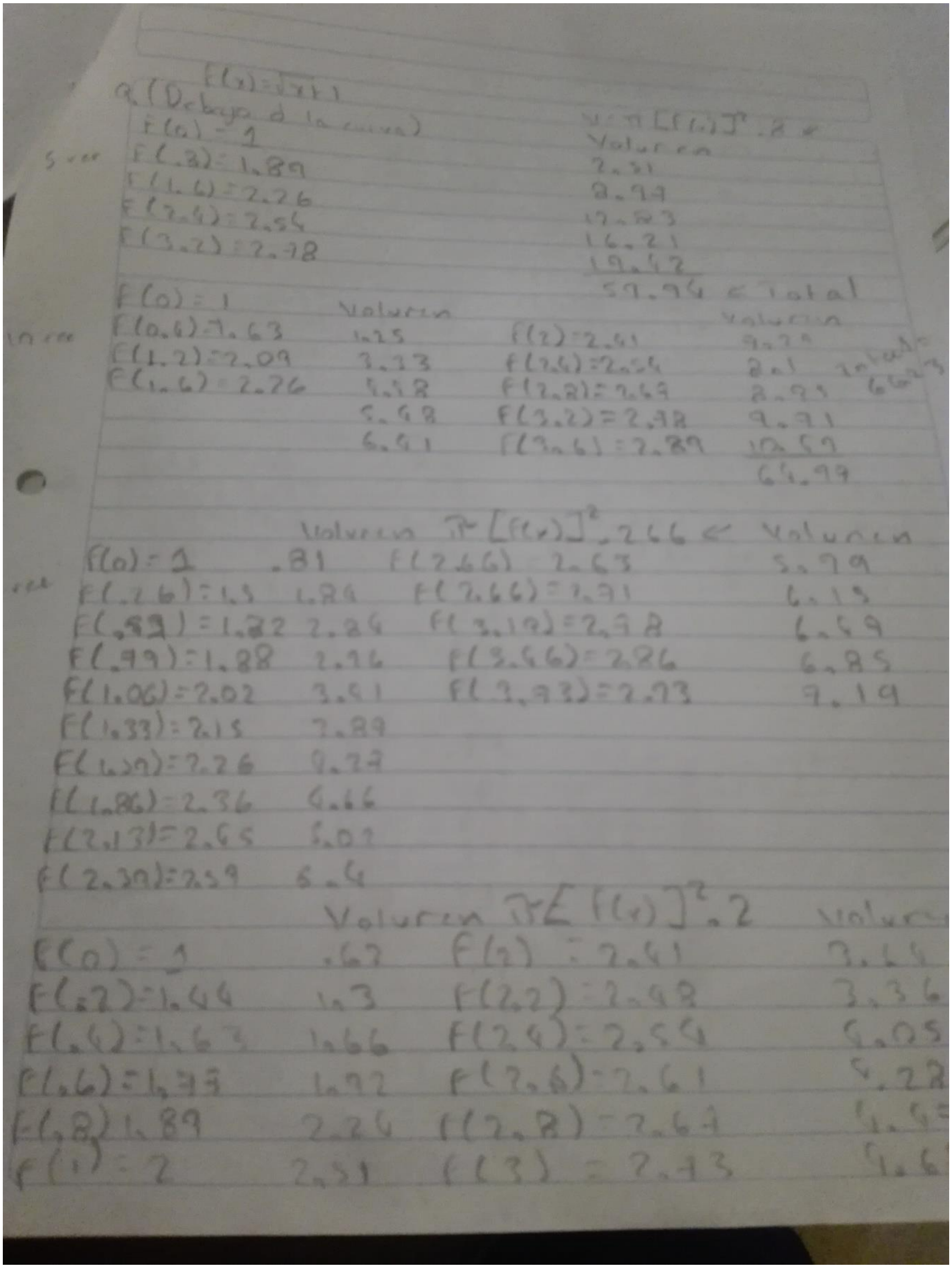
5 = 59.94 15 = 67.19

10 = 64.92 20 = 68.17

10. Obtén una aproximación al volumen segmentando el sólido por arriba de la curva en 5, 10, 15 y 20 partes.

5 = 80.04 15 = 93.38

10 = 74.23 20 = 93.2



f(x)=√x+1

a.(Debajo d la curva)

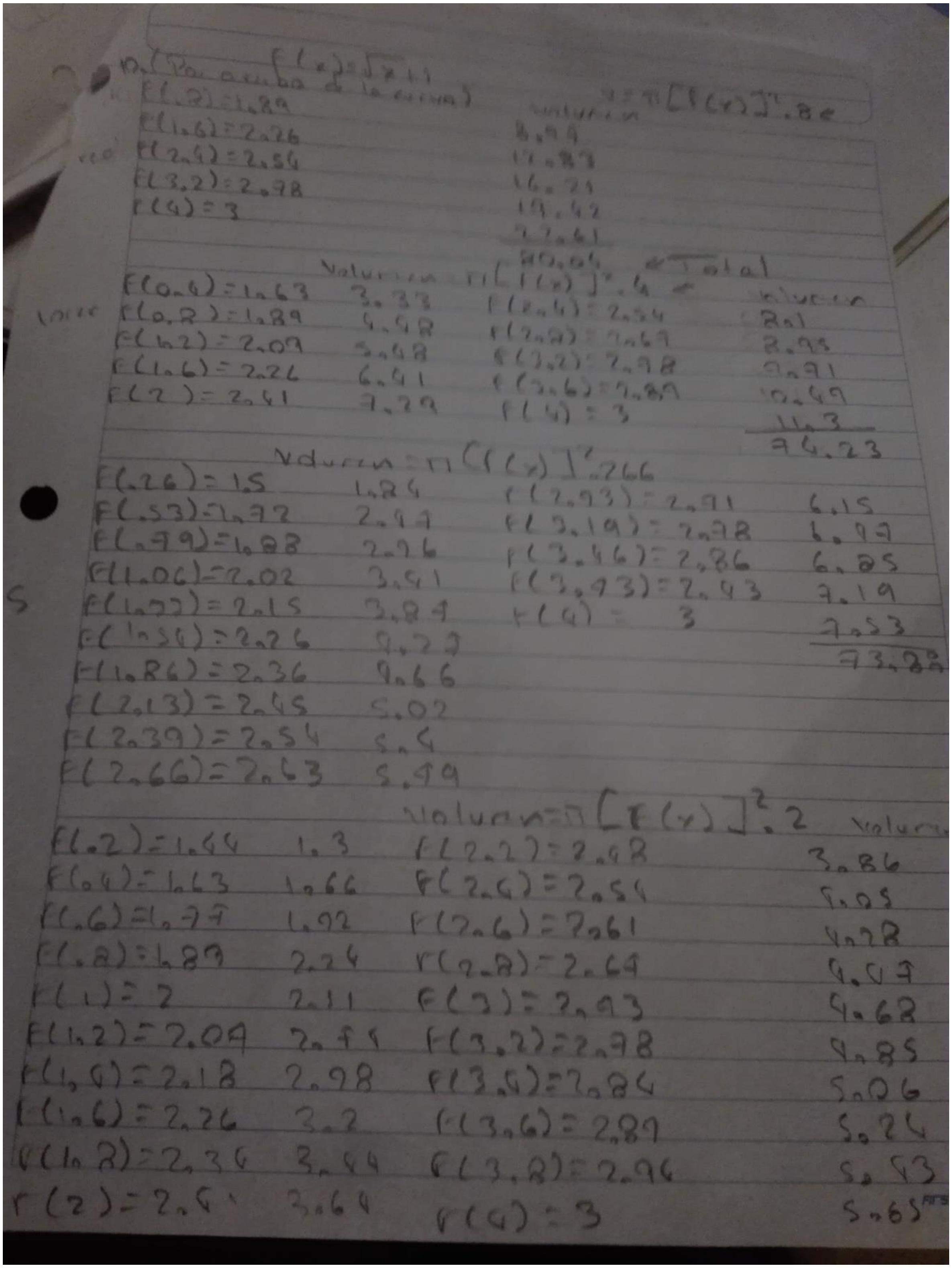
f(0) = 1	V=π[f(x)]².8 *
	Volumen
5 rec f(.8)=1.89	2.31
f(1.6)=2.26	8.97
f(2.4)=2.54	17.83
f(3.2)=2.78	16.21
	19.42
	57.94 ← Total

f(0)=1	Volumen		Volumen
10 rec f(0.6)=1.63	1.25	f(2)=2.41	9.79
f(1.2)=2.09	3.33	f(2.4)=2.54	8.1
f(1.6)=2.26	5.58	f(2.8)=2.69	8.93
	5.48	f(3.2)=2.78	9.71
	6.41	f(3.6)=2.89	10.59
			64.99

Total= 66.23

	Volumen π[f(x)]².266 ←		Volumen
f(0)=1	.81	f(2.66) 2.63	5.79
rec f(.26)=1.3	1.84	f(2.66)=2.71	6.13
f(.53)=1.22	2.24	f(3.19)=2.78	6.49
f(.79)=1.88	2.76	f(3.46)=2.86	6.85
f(1.06)=2.02	3.41	f(3.73)=2.73	7.19
f(1.33)=2.15	3.89		
f(1.59)=2.26	4.27		
f(1.86)=2.36	4.66		
f(2.13)=2.45	5.02		
f(2.39)=2.59	5.4		

	Volumen π[f(x)]².2		Volum
f(0) = 1	.62	f(2) = 2.41	3.64
f(.2)=1.44	1.3	f(2.2) = 2.48	3.36
f(.4)=1.63	1.66	f(2.4)=2.54	4.05
f(.6)=1.77	1.92	f(2.6)=2.61	4.28
f(.8) 1.89	2.24	f(2.8)=2.67	4.4
f(1)=2	2.51	f(3) = 2.73	4.6



$f(x)=\sqrt{x}+1$

10. (Por arriba de la curva)

$V=\pi[f(x)]^2 \cdot .8$ ←

	volumen
F(.8)=1.89	8.99
F(1.6)=2.26	12.83
F(2.4)=2.54	16.21
F(3.2)=2.78	19.42
F(4)=3	22.61
	80.06 ← Total

Volumen $=\pi[f(x)]^2 \cdot .4$ ←

			volumen
F(0.4)=1.63	3.33	F(2.4)=2.54	8.1
F(0.8)=1.89	4.48	F(2.8)=2.67	8.95
F(1.2)=2.09	5.48	F(3.2)=2.78	9.71
F(1.6)=2.26	6.41	F(3.6)=2.89	10.49
F(2)=2.41	7.29	F(4)=3	11.3
			74.23

Volumen $=\pi[f(x)]^2 \cdot .266$

F(.26)=1.5	1.84	F(2.93)=2.71	6.15
F(.53)=1.72	2.47	F(3.19)=2.78	6.47
F(.79)=1.88	2.96	F(3.46)=2.86	6.85
F(1.06)=2.02	3.41	F(3.73)=2.93	7.19
F(1.33)=2.15	3.84	F(4)= 3	7.53
F(1.59)=2.26	4.27		73.28
F(1.86)=2.36	4.66		
F(2.13)=2.45	5.02		
F(2.39)=2.54	5.4		
F(2.66)=2.63	5.49		

S

Volumen $=\pi[f(x)]^2 \cdot 2$

			Volum
F(.2)=1.44	1.3	F(2.2)=2.48	3.86
F(.4)=1.63	1.66	F(2.4)=2.54	4.05
F(.6)=1.77	1.97	F(2.6)=2.61	4.28
F(.8)=1.89	2.24	F(2.8)=2.67	4.47
F(1)=2	2.51	F(3)=2.73	4.68
F(1.2)=2.09	2.74	F(3.2)=2.78	4.85
F(1.4)=2.18	2.98	F(3.4)=2.84	5.06
F(1.6)=2.26	3.2	F(3.6)=2.89	5.24
F(1.8)=2.34	3.44	F(3.8)=2.96	5.43
F(2)=2.41	3.64	F(4)=3	5.65

Tabla 4.25 Actividad 1

Lenguaje (objetos ostensivos)	Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos (objetos no ostensivos)
Reactivo 1 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Radio, variable.	**Intervinientes** -Conceptos: Radio, variable. **Emergentes** **-**Conceptos: Función, $f(0)$ -Argumentos: $y = \sqrt{x} + 1$ $y = \sqrt{0} + 1 = 1$
Reactivo 2 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Radio, variable.	**Intervinientes** -Conceptos: Radio, variable. **Emergentes** **-**Conceptos: Función, $f(4)$ -Argumentos: $y = \sqrt{x} + 1$ $y = \sqrt{4} + 1 = 3$
Reactivo 3 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Radio, variable.	**Intervinientes** -Conceptos: Radio, variable. **Emergentes** **-**Conceptos: Función, $f(x)$ -Argumentos: $y = \sqrt{x} + 1$
Reactivo 4 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Cilindro, segmentar.	**Intervinientes** -Conceptos: Cilindro, segmentar. **Emergentes** **-**Conceptos: Radio, altura.
Reactivo 5	**Intervinientes**

Intervinientes -Lenguaje natural: dx.	-Conceptos: dx. **Emergentes** -Conceptos: $dx = base$
Reactivo 6 **Intervinientes** -Lenguaje natural: f(x).	**Intervinientes** -Conceptos: $f(x)$. **Emergentes** -Conceptos: Función, $f(x) = radio$
Reactivo 7 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Aproximación, volumen.	**Intervinientes** -Conceptos: Aproximación, volumen. **Emergentes** -Conceptos: suma de volúmenes de cada segmento.
Reactivo 8 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Ecuación, modelar, volumen, segmento.	**Intervinientes** -Conceptos: Ecuación, modelar, volumen, segmento **Emergentes** -Conceptos: Función de volumen. -Argumentos: $v = \pi[f(x)]^2(.8)$
Reactivo 9 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Aproximación, volumen, sólido de revolución, debajo de la curva.	**Intervinientes** -Conceptos: Aproximación, volumen, sólido de revolución, curva. **Emergentes** -Conceptos: suma de volúmenes. -Argumentos: $\mathit{Suma\ de\ vol\acute{u}menes\ de\ cada\ segemento}$ $\mathit{por\ abajo\ de\ la\ curva}\ v = \pi[f(x)]^2dx$ • Procedimientos:

a) Primero se secciona la función por debajo de la curva en 5 cilindros.

b) Luego se determina el valor de las alturas de los cilindros dx dividiendo el dominio entre 5.

$$dx = \frac{4}{5} = 0.8$$

c) Después se determina el volumen para cada cilindro con la función $\mathrm{v}(x)$ por debajo de la curva (es decir, se toma el valor inferior dx del cilindro)

d) A continuación, se determina el volumen de cada rectángulo al multiplicar $\mathrm{v}(x).dx$

e) Por último, se realiza la suma de los volúmenes para obtener una aproximación del volumen total bajo la curva.

f) Seguimos al seccionar la función por debajo de la curva ahora en 10 cilindros.

g) Luego se determina el valor de las alturas de los cilindros dx dividiendo el dominio entre 10.

$$dx = \frac{4}{10} = 0.4$$

h) Después se determina el volumen para cada cilindro con la función $\mathrm{v}(x)$ por debajo de la curva (es decir, se toma el valor inferior dx del cilindro)

i) A continuación, se determina el volumen de cada rectángulo al multiplicar $\mathrm{v}(x).dx$

j) Por último, se realiza la suma de los volúmenes para obtener una aproximación del volumen total bajo la curva.

k) Después se secciona la función por debajo de la curva en 15 cilindros.

l) Luego se determina el valor de las alturas de los cilindros dx dividiendo el dominio entre 15.

$$dx = \frac{4}{15} = 0.2666$$

m) Después se determina el volumen para cada cilindro con la función $\mathrm{v}(x)$ por

	debajo de la curva (es decir, se toma el valor inferior dx del cilindro) n) A continuación, se determina el volumen de cada rectángulo al multiplicar $\mathrm{v}(x).dx$ o) Por último, se realiza la suma de los volúmenes para obtener una aproximación del volumen total bajo la curva. p) Primero se secciona la función por debajo de la curva en 20 cilindros. q) Luego se determina el valor de las alturas de los cilindros dx dividiendo el dominio entre 20. $$dx = \frac{4}{20} = 0.2$$ r) Después se determina el volumen para cada cilindro con la función $\mathrm{v}(x)$ por debajo de la curva (es decir, se toma el valor inferior dx del cilindro) s) A continuación, se determina el volumen de cada rectángulo al multiplicar $\mathrm{v}(x).dx$ t) Por último, se realiza la suma de los volúmenes para obtener una aproximación del volumen total bajo la curva.
Reactivo 10 **Intervinientes** -Lenguaje natural: Aproximación, volumen, sólido de revolución, arriba de la curva.	**Intervinientes** -Conceptos: Aproximación, volumen, sólido de revolución, curva. **Emergentes** **-**Conceptos: suma de volúmenes. -Argumentos: $Suma\ de\ volúmenes\ de\ cada\ segemento$ $por\ arriba\ de\ la\ curva\ v = \pi[f(x)]^2dx$ - Procedimientos: a) Primero se secciona la función por arriba de la curva en 5 cilindros.

	b) Luego se determina el valor de las alturas de los cilindros dx dividiendo el dominio entre 5. $dx = \frac{4}{5} = 0.8$ c) Después se determina el volumen para cada cilindro con la función $\mathrm{v}(x)$ por arriba de la curva (es decir, se toma el valor superior dx del cilindro) d) A continuación, se determina el volumen de cada rectángulo al multiplicar $\mathrm{v}(x).dx$ e) Por último, se realiza la suma de los volúmenes para obtener una aproximación del volumen total bajo la curva. f) Seguimos al seccionar la función por arriba de la curva ahora en 10 cilindros. g) Luego se determina el valor de las alturas de los cilindros dx dividiendo el dominio entre 10. $dx = \frac{4}{10} = 0.4$ h) Después se determina el volumen para cada cilindro con la función $\mathrm{v}(x)$ por arriba de la curva (es decir, se toma el valor superior dx del cilindro) i) A continuación, se determina el volumen de cada rectángulo al multiplicar $\mathrm{v}(x).dx$ j) Se realiza la suma de los volúmenes para obtener una aproximación del volumen total bajo la curva. k) Después se secciona la función por arriba de la curva en 15 cilindros. l) Luego se determina el valor de las alturas de los cilindros dx dividiendo el dominio entre 15. $dx = \frac{4}{15} = 0.2666$ m) Después se determina el volumen para cada cilindro con la función $\mathrm{v}(x)$ por arriba de la curva (es decir, se toma el valor superior dx del cilindro)

	n) A continuación, se determina el volumen de cada rectángulo al multiplicar $\mathrm{v}(x).dx$ Se realiza la suma de los volúmenes para obtener una aproximación del volumen total bajo la curva. o) Se secciona la función por arriba de la curva en 20 cilindros. p) Luego se determina el valor de las alturas de los cilindros dx dividiendo el dominio entre 20. $dx = \frac{4}{20} = 0.2$ q) Después se determina el volumen para cada cilindro con la función $\mathrm{v}(x)$ por arriba de la curva (es decir, se toma el valor superior dx del cilindro) r) A continuación, se determina el volumen de cada rectángulo al multiplicar $\mathrm{v}(x).dx$ s) Por último, se realiza la suma de los volúmenes para obtener una aproximación del volumen total bajo la curva.

El estudiante 3 en la actividad 2 realizó lo esperado en esa actividad tal como se observa en la tabla 4.25 utilizando los objetos matemáticos primarios necesarios.

4.2 Análisis a posteriori de Idoneidad Didáctica

Después de realizar la intervención didáctica se hizo un análisis a los criterios de idoneidad, para contrastarlos con los criterios realizados a priori y a partir de estos hacer los ajustes pertinentes a las actividades, con el fin de alcanzar los objetivos planteados en este trabajo de tesis y se logre una compresión del concepto de la integral en el bachillerato.

IDONEIDAD EPISTÉMICA

Se agregaron dos actividades en el cierre que tratan sobra la inversa de la derivada, que era una de las configuraciones que se pretendían trabajar, pero que no se llevaron a cabo en la puesta en escena de la secuencia didáctica, que viene a reforzar los conceptos matemáticos que se pretenden. Al ser estudiantes del sexto semestre, ya cursaron Cálculo Diferencial asignatura donde se aborda el tema de la derivada, además utilizamos actividades que ya trabajaron, motivo por el cual pueden conocer el resultado de dichas situaciones problemas.

IDONEIDAD COGNITIVA

En la puesta en escena de las actividades pudimos observar que existen conflictos semióticos al utilizar el término de área bajo la curva, en algunas ocasiones los estudiantes formaban rectángulos, en otras cuando el área bajo la curva correspondía a un triángulo, los estudiantes continuaban determinando el área bajo la curva de un rectángulo, en otras ocasiones era difícil asimilar para el alumno que el área bajo la curva representaba un volumen o representaba una distancia, motivo por el cual se cambiará por el término de acumulación, que es más adecuado a cualquier contexto.

IDONEIDAD INTERACCIONAL

Las interacciones entre: docente-alumno, entre alumnos, proceso de autonomía**,** se realizó de manera adecuada, el docente interviniendo con dudas elementales, se trabajó de manera individual y en equipo, hubo momentos en los que se llevó a cabo un plenaria, al finalizar cada momento, para reforzar los conocimientos adquiridos.

IDONEIDAD MEDIACIONAL

En el diseño de las actividades se tomaron en cuenta los recursos materiales disponibles que tienen los planteles de educación media superior de Colegio de bachilleres del estado de Sonora, por lo que se diseñaron actividades en software libre GeoGebra ya sea en su modalidad de Pc´s cuando se trabajó en el laboratorio de informática o la aplicación para el celular al trabajar en salón de clases, así como material de laboratorio de física para llevar a cabo actividades, tal como: Soporte, pesas, resortes, vernier.

Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones; con grupos de alumnos de 50 estudiantes en tiempo de clases establecidos por el Colegio de Bachilleres del estado de Sonora.

IDONEIDAD EMOCIONAL

Se realizaron actividades de campo, donde el alumno debe realizar una actividad en el laboratorio de Física para obtener los datos y determinar la función que modela dicha actividad y obtener la integral por medio de acumulación, en otra actividad se presentan datos del corredor Usain Bolt en la carrera que obtuvo el récord mundial en esta disciplina, además de temas de interés como el precio del dólar y la fabricación de recipientes, para que es estudiante se sienta motivado y vea el uso práctico de esta disciplina.

IDONEIDAD ECÓLOGICA

Atendiendo a las exigencias del Nuevo Modelo Educativo que plantea el impulso a la transversalidad, se ubicaron contextos relacionados con otras áreas del conocimiento como Física y Economía para la presentación de una noción intuitiva de la integral. La secuencia didáctica está basada en el programa de la DGB, por lo que cumple con el significado institucional de referencia.

CAPÍTULO 5 REESTRUCTURACIÓN DE LA PROPUESTA

Una vez terminado el análisis a posteriori, pudimos concluir que las actividades permitieron la intervención y que emergieran los objetos matemáticos que esperábamos en dicho análisis, además concluimos que era necesario agregar dos actividades en la que interviniera la configuración epistémica inversa a la derivada, ya que esta nos proporciona el valor exacto y al utilizar actividades ya trabajadas por los estudiantes, ellos podían verificar que los resultados coinciden con la resolución por medio de las configuraciones epistémicas geométrica y como resultado de un proceso de cambio.

Además, se realizaron modificaciones en la redacción de algunas preguntas de las actividades que causaban confusión, como por ejemplo en la actividad 1 de inicio un estudiante respondió m/s y s al reactivo ¿Cómo se representa la velocidad en la gráfica? Y ¿El tiempo? Y fue redactado de la siguiente manera: ¿Cómo se representa geométricamente la velocidad en la gráfica? Y ¿Cómo se representa geométricamente el tiempo en la gráfica?

El término área bajo la curva también presentó algunos conflictos en las actividades de inicio y de desarrollo, motivo por el cual se cambió la redacción para tratar proceso de acumulación, en donde se utilizaba el mismo contexto que se planteaba, antes de entrar al concepto de área bajo la curva, por ejemplo, en lugar de mencionar las bases de los rectángulos son de 5, mencionábamos que seccionábamos en periodos de tiempo iguales de cinco días.

Secuencia Didáctica

Actividades de Inicio

ACTIVIDAD 1

Un objeto se mueve en línea recta de tal manera que su velocidad, medida en metros por segundo se comporta de acuerdo con la siguiente gráfica.

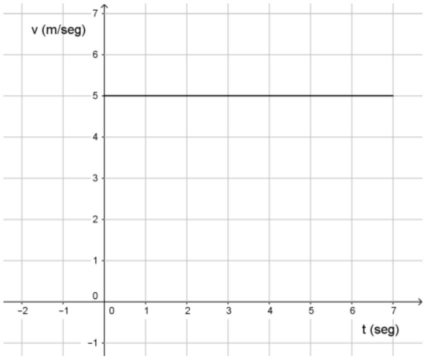


Figura 5.1

1. ¿Qué velocidad tiene el objeto después de 3 seg de recorrido? ¿y después de 5 seg?
2. ¿Cómo está representada gráficamente la velocidad en el plano? ¿Cómo se representa gráficamente el tiempo trascurrido?
3. ¿Qué distancia recorre el objeto después de 3 seg de movimiento? ¿Y después de 7 seg de movimiento?
4. ¿Cómo se representa la distancia transcurrida analíticamente?
5. ¿Cómo se representa geométricamente la distancia recorrida?

ACTIVIDAD 2

El trabajo es una magnitud física escalar que se representa con la letra W (del inglés Work) y se expresa en unidades de energía, esto es en julios o Joules (J) en el Sistema Internacional de Unidades**.** Cuando la fuerza que se aplica a un objeto es constante, el trabajo se determina de la siguiente manera:

$$w = F.d$$

Un cuerpo se mueve a lo largo de una línea recta por la aplicación de una fuerza. En la siguiente gráfica se representan la fuerza aplicada (en kg fuerza) y la distancia recorrida (en metros).

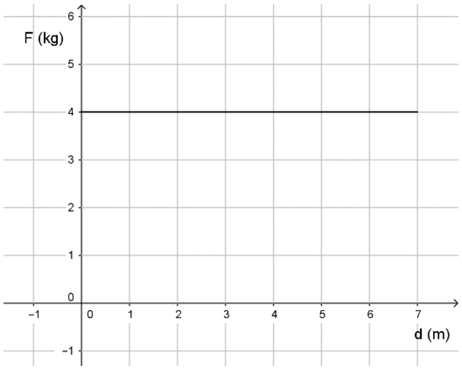


Figura 5.2

1. ¿Qué fuerza se aplica cuando el cuerpo se ha movido 2 m? ¿Y cuándo se ha movido 5 m?
2. ¿Cómo se representa gráficamente la fuerza aplicada? ¿Y la distancia recorrida?
3. Determina el trabajo mecánico W realizado por la furza aplicada durante los primeros 7 m de recorrido.
4. ¿Cómo se representa gráficamente el trabajo W realizado?

ACTIVIDAD 3

Una técnica utilizada para medir la constante de fuerza de un resorte consiste en colgar un resorte en forma vertical y luego se le une un objeto de masa m en su extremo inferior. Bajo la acción de la carga mg el resorte se estira una distancia d a partir de su posición de equilibrio. Puesto que la fuerza del resorte está dirigida hacia arriba (opuesta al desplazamiento), se debe equilibrar la fuerza de gravedad mg hacia abajo cuando el sistema esté en reposo.

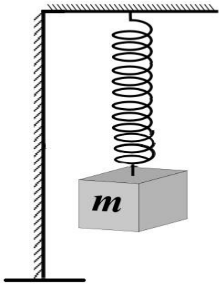


Figura 5.3

La actividad consiste en verificar la constante de fuerza de un resorte utilizando diferentes masas, por lo que para el ejercicio necesitaremos lo siguientes:

- Un soporte fijo
- Resorte
- Vernier
- Pesas (50 gramos, 100 gramos, 200 gramos)

Primero colocamos el resorte en el soporte (figura 1) y verificamos la longitud del mismo, luego vamos anexando las pesas de tal manera que nos den el peso solicitado, verificamos cuánto se alargó desde su posición original y colocamos los datos en la siguiente tabla:

Tabla 5.1

No. Pesa	Masa (Kg)	Δ_y Deformación del resorte $(y - y_0)$	$k = \dfrac{F}{\Delta_y}$
1	0.10	0.030	32.70
2	0.15	0.046	31.99
3	0.25	0.078	31.44
4	0.30	0.094	31.30
5	0.45	0.140	31.53
6	0.70	0.216	31.79

Ahora graficaremos la fuerza (kg) en función del desplazamiento (m)

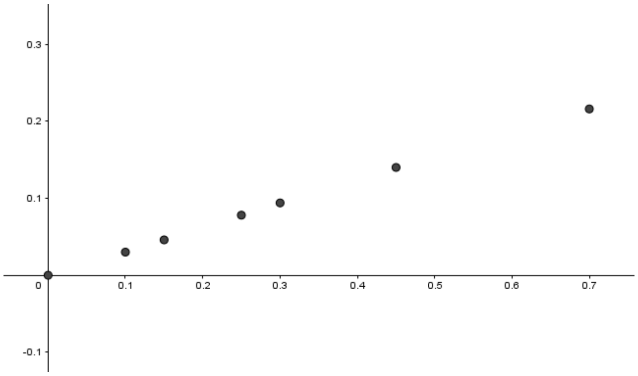


Figura 5.4

Realizamos un ajuste en GeoGebra para determinar la función que mejor representa los datos por medio del comando Ajustelineal.

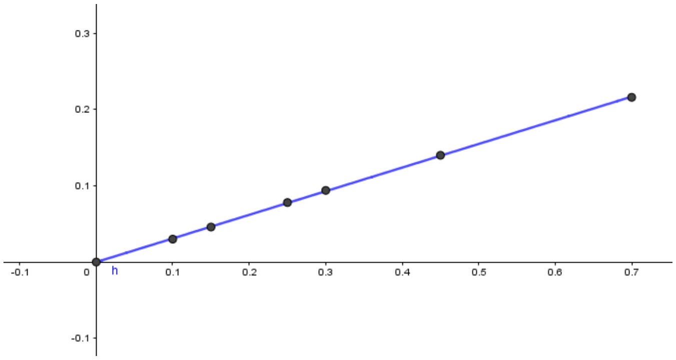


Figura 5.5

Como podemos observar la gráfica asemeja a una línea recta en el cual la pendiente es igual a la constante de fuerza k quedando:

$$f(x) = 0.31x$$

1. ¿Cuál será el trabajo realizado al colocar la primera pesa de 100 g?
2. ¿Cuál será el trabajo realizado por el resorte con todas las pesas?
3. ¿Cuál será el trabajo realizado en el intervalo que comprende la colocación de la tercera pesa a la quinta pesa?
4. ¿Cómo se determina el trabajo realizado en cualquier intervalo?
5. ¿Cómo se representa gráficamente el trabajo realizado?

Actividades de Desarrollo

ACTIVIDAD 1

Al finalizar la guerra de independencia en México, se estableció el precio por dólar de $1.00 peso por $1.00 dólar, a partir de esta fecha el peso comenzó a devaluarse (pérdida de valor de una moneda nacional frente a otra extranjera).

En los gobiernos de Adolfo López Mateos y Gustavo Díaz Ordaz no hubo inflación, por lo que el precio del peso mexicano mantuvo su valor con respecto al dólar $12.50, tal como se muestra en la siguiente gráfica:

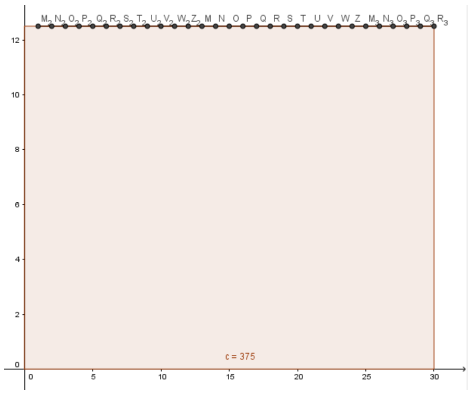


Figura 5.6

1. Si Francisco compró un dólar diario durante el mes de noviembre de 1960 (en Gobierno de Adolfo López Mateos). ¿Cuánto gastó al final de mes?
2. Haz la gráfica del gasto de los 30 días.
3. ¿Y en el periodo de1 12 al 15 de noviembre? Realiza el procedimiento algebraico y geométrico.
4. ¿Cómo determinas la cantidad que pago en un periodo determinado?
5. ¿Cómo se representa gráficamente el pago?

ACTIVIDAD 2

El peso mexicano ha sufrido varias devaluaciones a lo largo de su historia, en fechas recientes las elecciones a presidente de los Estados Unidos de América, trajo una gran volatilidad en el precio del dólar, a continuación, se presenta un gráfico con el comportamiento del dólar en el mes de noviembre de 2016, fecha en la cual se llevaron a cabo dichas elecciones.

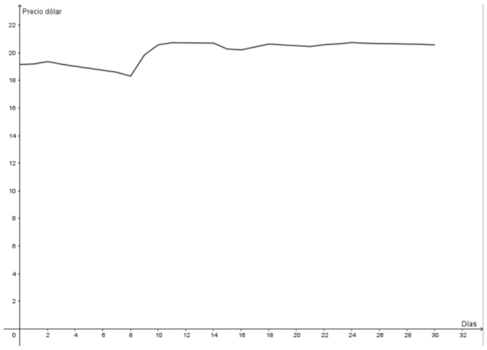


Figura 5.7

Como puedes darte cuenta, el cálculo para determinar el gasto al comprar un dólar diario durante un mes ya no es tan sencillo, dado que el precio se encuentra variando constantemente.

Con apoyo del applet de GeoGebra Devaluación del dólar encuentra el gasto que tendríamos al comprar un dólar diario durante el mes en cuestión, considerando que el precio de cada dólar es constante cada periodo considerado. Por ejemplo, si el precio del dólar cambió durante un periodo de cinco días, tomamos el precio más bajo como constante en ese periodo de 5 días.

A. Analizaremos el gasto en pesos seccionando el precio asignando el precio más bajo del dólar cada periodo de tiempo.
    1) Primero con 5 periodos de seis días cada uno. ¿Cómo se representa gráficamente el gasto en pesos cada periodo de seis días? Para hacerlo se requiere el deslizador $Inferior = 5$.

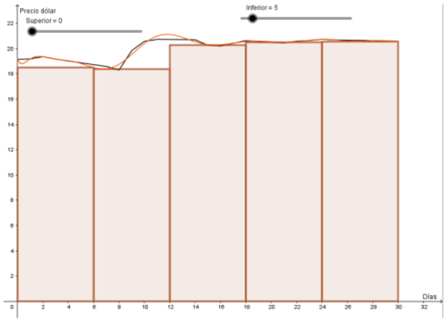


Figura 5.8

    2) Determina la altura, que podemos denominar $g(x)$, correspondiente al valor de cada periodo de tiempo, el cual denominaremos por medio de dx. De esa manera en el archivo de GeoGebra colocamos **Entrada** $g(x)$, donde x es el valor inicial de cada periodo. El valor aparecerá en la Vista algebraica como $a = 18.76$. Cada vez que realices este procedimiento borra (dando click derecho en a y seleccinando borrar) el resultado para no saturar de información el applet.

    3) Encuentra el gasto de cada uno de los periodos de tiempo, multiplicando la base de estos por su altura ($g(x)$ por dx).

    4) Realiza la suma de los gastos correspondientes a cada periodo de tiempo para obtener una aproximación del gasto en un mes.

    5) ¿Cómo se representa gráficamente el gasto total en el mes?

6) ¿El cálculo del gasto se hizo con precisión? De no ser así ¿cómo podemos aproximarlo de mejor manera?
7) Procedamos nuevamente pero ahora considerando diez periodos de tiempo iguales en el mes ¿De cuántos días es ahora cada periodo de tiempo?

B. Ahora seccionaremos el gasto considerando el mayor precio del dólar en cada periodo de tiempo.

1) Primero con 5 periodos iguales de tiempo con el deslizador $Superior = 5$.

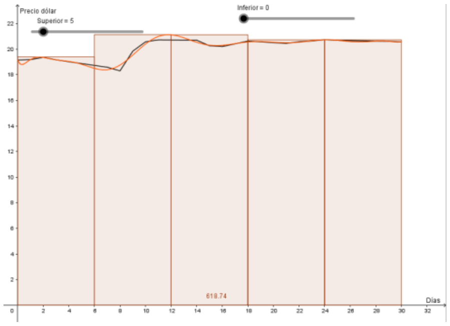


Figura 5.9

2) Encuentra el valor $g(x)$ más grande en cada caso y repitamos el procedimiento con $x = 12$, colocando en **Entrada** $g(12)$, borra el resultado de a para no saturar el applet.

3) Encuentra el gasto en cada periodo de tiempo multiplicando $g(x)$ por dx ¿Qué representa este cálculo en la gráfica?

4) Realiza la suma de los gastos correspondientes a cada periodo para obtener una aproximación del gasto en un mes.

5) Hagamos lo mismo considerando diez periodos iguales de tiempo.

6) ¿Cómo podemos aproximar de mejor manera el gasto total realizado en el mes?

Como pudiste observar, se puede determinar una aproximación al gasto total, al realizar la suma de los gastos de cada intervalo de tiempo que obtuvimos al multiplicar cada valor de $g(x)$ por el dx correspondiente.

Tomando el hecho de que en cada caso se puede determinar el gasto por medio del cálculo de áreas, procederemos a usar el archivo de GeoGebra, para hacer los cálculos de áreas que representan el gasto en pesos de la compra de dólares.

A. Volvamos con el deslizador Inferior, que secciona nuestra función en rectángulos por debajo de la curva.

    1) Ponemos el deslizador $Inferior = 20$ y tomamos el valor que aparece en vista algebraica Sumainf que nos da la suma de las áreas de los 20 rectángulos.
    2) Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador Inferior = 30, 40 y 50. Llenando la tabla con los datos recabados.

B. Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador Superior, que secciona nuestra función en rectángulos por arriba de la curva.

    1) Ponemos el deslizador $Superior = 20$ y tomamos el valor que aparece en vista algebraica Sumasup que nos da la suma de las áreas de los 20 rectángulos.
    2) Hacemos el mismo procedimiento con el deslizador $Superior = 30, 40$ y 50. Llenando la tabla con los datos recabados.

Tabla 5.2

Número de rectángulos	Suma de áreas de rectángulos por debajo de la curva	Suma de áreas de rectángulos por arriba de la curva
5		
10		
20		
30		
40		
50		

Entonces el gasto total que realizaremos en este mes se encuentra entre la suma de áreas de rectángulos por debajo de la curva y la suma de rectángulos por arriba de la curva.

$$\underline{g} \leq g \leq \overline{g}$$

ACTIVIDAD 3

A Usain Bolt corredor de 100 metros planos y poseedor del récord mundial de esta disciplina; a continuación, se presenta una tabla de datos de la velocidad en función del tiempo:

Tabla 5.3

Tiempo (s)	Velocidad $\left(\frac{m}{s}\right)$
0	*0*
1.85	*5.41*
2.87	*9.80*
3.78	*10.90*
4.65	*11.40*
5.50	*11.70*
6.32	*12.10*
7.14	*12.10*
7.96	*12.10*
8.79	*10.24*
9.69	*10.32*

A partir de estos realizamos la gráfica correspondiente:

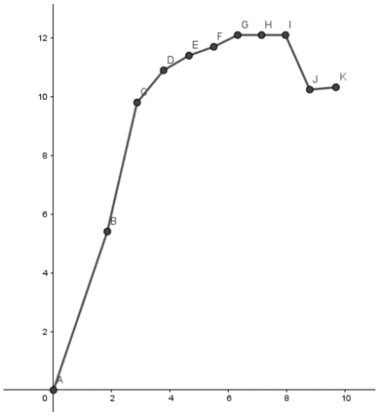


Figura 5.10

Ahora realizamos un ajuste en GeoGebra a los puntos para obtener una función que se aproxime a los datos.

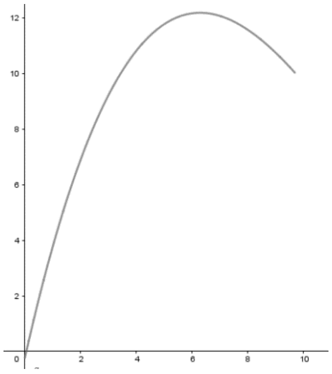


Figura 5.11

Tenemos la función $V(x) = 0.01x^3 - 0.48x^2 + 4.47x - 0.23$ en el intervalo [0, 9.69], que modela la velocidad en función del tiempo (fórmula obtenida con los datos de la tabla y usando el comando “AjustePolinomico” de GeoGebra para obtener la expresión analítica).

Para obtener la distancia en cada periodo de tiempo se obtiene con la expresión $d = v.t$ cuando la velocidad es constante, para lo cual seccionaremos en intervalos iguales de tiempo y sumamos las distancias obtenidas en cada caso para obtener una aproximación a la distancia total recorrida.

1. ¿Cuánto será el valor de la distancia si seccionamos en cinco periodos iguales de tiempo, tomando el mínimo valor de la velocidad en cada periodo?

2. ¿Cuál es el valor de la distancia recorrida si seccionamos la función en 5 periodos iguales de tiempo, pero tomamos ahora la máxima velocidad en cada caso
3. Ahora realiza el mismo procedimiento para 10 periodos iguales de tiempo.
4. ¿Cómo se representa gráficamente la distancia recorrida en cada periodo de tiempo? Y ¿Cómo se representa gráficamente la distancia total recorrida?
5. ¿Cómo podemos obtener una mejor aproximación a la distancia total recorrida?

Ahora, de forma similar a las de los anteriores, podemos determinar una aproximación a la distancia recorrida, al realizar la suma de las distancias de cada intervalo de tiempo que obtuvimos al multiplicar cada valor de $v(x)$ por el dx correspondiente.

Secuencia de Actividades

Actividades de Cierre

Al resolver los problemas que se han presentado hasta el momento, podemos observar que independientemente del contexto del cual se trate, ya sea de trabajo mecánico, distancia recorrida, costo de la compra de dólares u otro, la solución nos lleva siempre a seguir un mismo procedimiento, en el que calculamos el valor correspondiente a la función que modele la situación, que en general podemos llamar $f(x)$ por el valor dx correspondiente. Este valor se corresponde geométricamente con el área entre el eje X, la gráfica de la función $f(x)$ que modela la situación y las rectas verticales que limitan el intervalo considerado.

Así, al seccionar la función en rectángulos con bases dx y alturas $f(x)$, podemos encontrar el área de cada uno de estos rectángulos como $f(x)dx$, como pudiste observar si la partición de la curva tiende a ser más grande, la suma de las áreas de estos tiende a aproximarse cada vez más al valor real. En cada caso esta área corresponde al valor de la variable que estemos tratando, la cual puede ser una distancia recorrida, el gasto en pesos de comprar dólares, trabajo mecánico realizado por una fuerza, etc.

La suma de las áreas de los rectángulos con una partición infinita de rectángulos nos proporciona el valor exacto del área bajo la curva y se le denomina integral, la cual se expresa de la siguiente manera:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

Este procedimiento puede aplicarse a otras muchas situaciones, como veremos ahora en los problemas siguientes, relativos al cálculo de los volúmenes de los llamados Sólidos de revolución.

ACTIVIDAD 1

El departamento de producción de la empresa Plásticos S.A. desea elaborar cestos para ropa; los modelos aceptados fueron los siguientes y para su diseño se utilizó el software GeoGebra al girar una función sobre el eje x.

Cesto A

Cesto B

Figura 5.12

Para el diseño del cesto A primero hacemos un segmento de una recta con $y = 2$ en el intervalo [1,5] la cual haremos girar sobre el eje x para generar un cilindro.

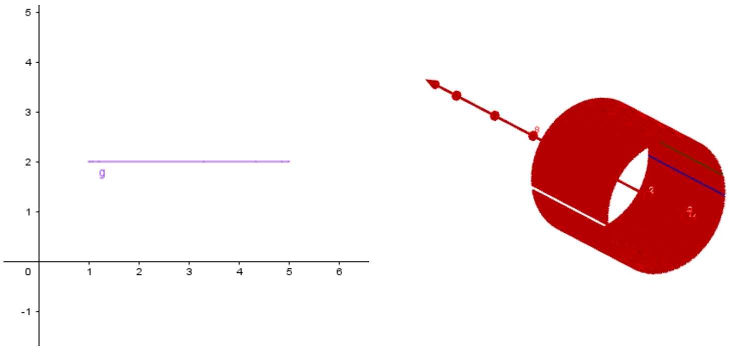


Figura 5.13

1. ¿Cuál es el radio del cilindro?
2. ¿Cómo obtuviste el radio?
3. ¿Cuál es el volumen del cilindro?

Para el diseño del cesto B tomaremos un segmento de la curva $y = \sqrt{x} + 1$ en el intervalo $[0,4]$ que haremos girar sobre el eje x para generar el sólido en revolución que deseamos.

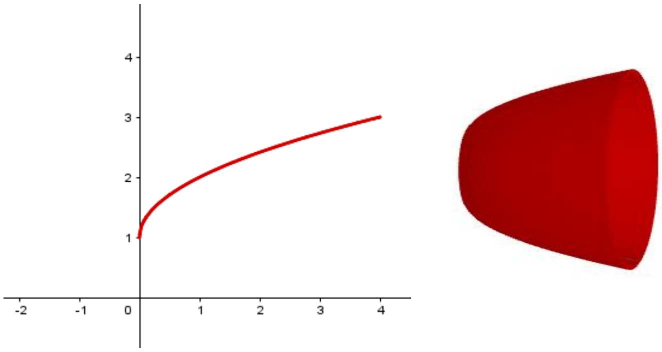


Figura 5.14

Para este caso el radio está cambiando constantemente.

4. ¿Cómo puedes determinar el radio en $x = 0$?
5. ¿Y, para $x = 4$?
6. ¿Cómo se puede calcular el radio para cualquier punto de x?

Segmentaremos el sólido de revolución por debajo de la curva de la siguiente manera:

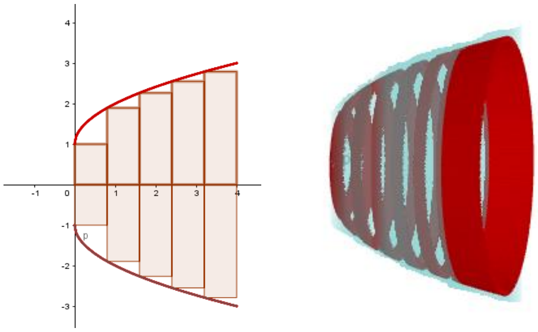


Figura 5.16

7. ¿Qué figuras se forman al hacer esta segmentación?
8. ¿Qué representa dx?
9. ¿Qué representa $f(x)$?
10. ¿Cómo podemos tener una aproximación al volumen del cesto?
11. Determina la ecuación que modele el volumen de cada segmento.
12. Obtén una aproximación al volumen segmentando el sólido por debajo de la curva en $5, 10, 15$ y 20 partes.
13. Obtén una aproximación al volumen segmentando el sólido por arriba de la curva en *5*, *10*, *15* y *20* partes.

ACTIVIDAD 2

De la misma manera que tenemos los datos para determinar la velocidad de Usain Bolt en función del tiempo, tenemos los datos correspondientes a la aceleración, los cuales se describen en la siguiente tabla:

Tabla 5.4

Tiempo (s)	Aceleración ($\frac{m}{s^2}$)
0	*0*
1.85	*2.91*
2.87	*4.30*
3.78	*1.22*
4.65	*0.57*
5.50	*0.35*
6.32	*0.48*
7.14	*0*
7.96	*0*
8.79	*-0.13*
9.69	*-1.04*

Al realizar la gráfica obtenemos los siguiente:

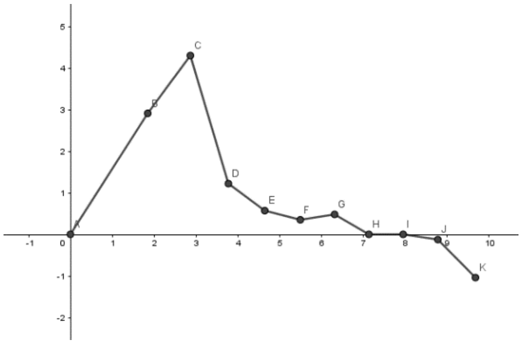


Figura 5.17

Al realizar un ajuste con GeoGebra obtuvimos una función en partes, de la siguiente manera:

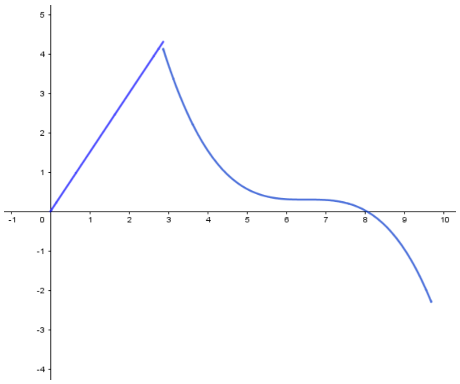


Figura 5.18

$$a(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 1.5x & si\ 0 \leq x \leq 2.87 \\ -0.08(x-6.5)^3 + 0.3 & si\ 2.87 < x \leq 9.69 \end{array} \right\}$$

Realiza una segmentación en rectángulos bajo la curva con bases iguales y contesta lo siguiente:

1. ¿Cómo se determina la velocidad si tenemos la aceleración y el tiempo?
2. ¿Qué representa geométricamente la velocidad en nuestra gráfica?
3. ¿Cómo determinas la altura de los rectángulos en el intervalo $[0\,, 2.87]$?
4. ¿Cómo determinas la altura en el siguiente intervalo $(2.87\,, 9.69]$?
5. ¿Cuál será la velocidad promedio de la carrera si seccionamos el área bajo la curva, por debajo de la curva en *20* rectángulos?
6. ¿Y si lo hacemos por arriba de la curva?
7. ¿Qué pasa con el área que se encuentra debajo del eje de las abscisas?

De la Antiderivada

Actividad 3

En la actividad 1 de inicio se te presentó el siguiente problema:

Un objeto se mueve en línea recta de tal manera que su velocidad, medida en metros por segundo se comporta de acuerdo con la siguiente gráfica.

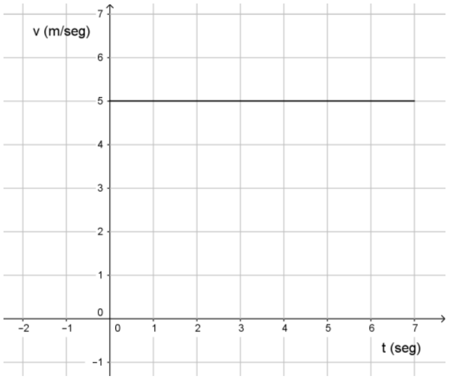


Figura 5.18

Como ya viste en el curso de cálculo diferencial, la derivada de la distancia con respecto al tiempo es la velocidad, entonces si aplicamos el proceso inverso a la derivada de la velocidad podremos obtener la distancia recorrida en un tiempo determinado.

Al determinar la ecuación de la velocidad de este objeto que se mueve a velocidad constante nos queda de la siguiente manera:

$$y = 5$$

1. Como ya mencionamos esta sería la derivada de la distancia, por lo que la ecuación de la distancia recorrida por el objeto sería:

Tomando como base el área bajo la curva que hemos determinado en ejercicios anteriores, analizaremos el comportamiento del área bajo la curva en función del tiempo transcurrido, tomando el área acumulada, desde el origen hasta el punto solicitado. A continuación, llena la siguiente tabla:

Tabla 5.5

Tiempo	Área bajo la curva Acumulada

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

Ahora grafica los datos obtenidos

2. ¿Qué relación tiene el área bajo la curva con la inversa de la derivada?

Ahora retomaremos la actividad 2 de las actividades de cierre donde se proveen las ecuaciones de la aceleración en una función escalonada:

Tabla 5.7

Tiempo (s)	Aceleración ($\frac{m}{s^2}$)
0	*0*
1.85	*2.91*
2.87	*4.30*
3.78	*1.22*
4.65	*0.57*
5.50	*0.35*
6.32	*0.48*

7.14	*0*
7.96	*0*
8.79	*-0.13*
9.69	*-1.04*

Al realizar la gráfica obtenemos los siguiente:

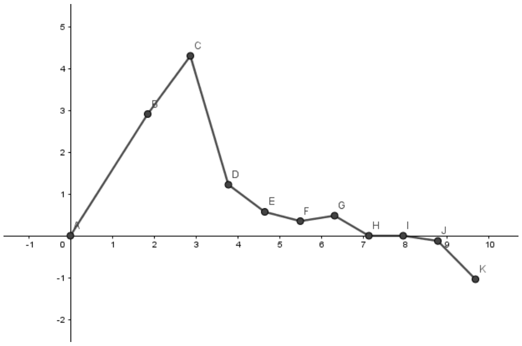


Figura 5.19

Al realizar un ajuste con GeoGebra obtuvimos una función en partes, de la siguiente manera:

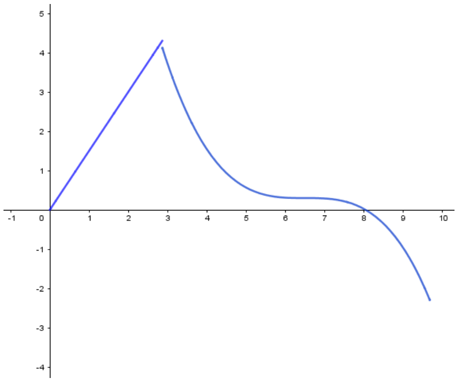


Figura 5.20

$$a(x) = \left\{ \begin{matrix} 1.5x & si\ 0 \leq x \leq 2.87 \\ -0.08(x-6.5)^3 + 0.3 & si\ 2.87 < x \leq 9.69 \end{matrix} \right\}$$

1. Realiza el llenado de la siguiente tabla en la cual analizaremos el comportamiento del área bajo la curva en función del tiempo transcurrido, tomando el área acumulada

desde el origen hasta el punto solicitado, el área que se obtenga por debajo del eje de las abscisas se tomara con signo negativo.

Tabla 5.8

Tiempo	Área bajo la curva acumulada
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	

2. Realiza la gráfica correspondiente a los datos obtenidos en la tabla:

3. Determina las expresiones algebraicas de la velocidad a partir de la aceleración.

4. Realiza la gráfica de las expresiones algebraicas tomando en cuenta que la curva que estamos realizando es desde el origen hasta el punto de las abscisas que analizamos, por lo que al llegar a la segunda expresión le debemos sumar el área comprendida desde el origen hasta el límite superior de la primera expresión.

5. ¿Qué relación tiene la gráfica del área bajo la curva que realizaste con la gráfica de las expresiones?

REFLEXIONES FINALES

El trabajo de tesis tiene el propósito de contribuir a la elaboración de materiales didácticos para usarse en el bachillerato, enmarcado en los lineamientos de los programas de materia de la Dirección General de Bachillerato de Cálculo Integral y, consecuentemente, en los planteamientos de la Reforma Integral de Educación Media Superior RIEMS, establecida en 2008 e implementado en educación media superior el año de 2012.

Debe aclararse que al final del trabajo comenzó a aplicarse un Nuevo Modelo Educativo implementado en 2018, el cual, a pesar de que declara la continuidad con la RIEMS, establece novedades que modifican en los hechos algunos aspectos, pues no sólo atiende a la promoción de competencias, sino que agrega y centra sus fundamentos en el desarrollo de lo que denomina prácticas sociales. Sin embargo, destacamos que, en la revisión de dicho modelo, éste incluye aspectos que, de una u otra manera, fueron planteados en nuestra propuesta.

Para la elaboración de la propuesta, primeramente hicimos un análisis general de las formas tradicionales de enseñanza del cálculo integral, pudiendo observar que al cursar esta asignatura, los estudiantes son enfrentados a exposiciones magistrales de los profesores, revisando, en el mejor de los casos sólo a problemas estereotipados y la mayoría de las veces restringidos a los procedimientos algorítmicos, lo cual los conduce a construir significados muy pobres de los objetos matemáticos del cálculo con relación al significado institucional de referencia o pretendido.

Ante este panorama, optamos por elaborar una secuencia didáctica con el fin de favorecer el desarrollo de las competencias indicadas en el modelo educativo establecido en la RIEMS y en el programa del curso de la Dirección General de Bachillerato, estableciendo el siguiente objetivo general de la tesis:

- ✓ Diseñar una propuesta de actividades didácticas para la enseñanza de la integral en el bachillerato, con apoyo de software de matemática dinámica.

Atendiendo al objetivo general nos propusimos desarrollar los siguientes objetivos específicos:

- Determinar el significado institucional de referencia para la integral en el bachillerato de acuerdo con la Dirección General de Bachillerato.
- Determinar el significado institucional pretendido por las actividades didácticas a diseñar.

- Diseñar actividades didácticas para la enseñanza de la integral donde se utilicen diferentes representaciones semióticas y en diferentes contextos, con apoyo en applets realizados con el software libre GeoGebra, de matemática dinámica.
- Evaluar el diseño de las actividades didácticas a través de su puesta en escena para identificar aspectos con el propósito de mejorarlo.

En la medida de que se pudieron cumplir cada uno de los objetivos específicos, es posible decir que el objetivo general fue alcanzado. Sin embargo, es necesario decir que también el trabajo presenta limitaciones y faltantes que no deben obviarse.

Por ejemplo, las limitaciones de tiempo para la puesta en escena, desencadena que la evaluación de la propuesta esté incompleta y no fue posible profundizar en la determinación de los conflictos semióticos ocurridos y, además, no se pudo profundizar en algunos aspectos por limitaciones de nuestra propia estrategia, por señalar una de ellas mencionamos que no pudimos realizar una entrevista posterior con los estudiantes elegidos para el estudio de casos, lo cual nos hubiera posibilitado tener un panorama más completo.

Aun reconociendo dichas limitaciones, apuntamos que el marco teórico usado, el EOS, nos proporciona elementos de reflexión para avaluar la experiencia tanto de diseño como de la puesta en escena, pudiendo recurrir a diferentes categorías de análisis. De ellas, tomamos en cuenta las idoneidades didácticas y sus descriptores, observando lo siguiente:

Idoneidad epistémica: La propuesta y las discusiones realizadas por los estudiantes en la puesta en escena, es una muestra de que es posible estudiar la integral con una versión diferente a la tradicional, en la cual el punto de partida son situaciones problema planteadas en diferentes contextos, las cuales dan pie a la emergencia de los objetos matemáticos de integral de una función y otros alrededor de dicho objeto. Es posible que los estudiantes desarrollen procedimientos, identifiquen o usen propiedades, argumenten, empleen nuevos lenguajes y vayan formando una concepción de la integral y sus propiedades.

Idoneidad cognitiva: El acercamiento a la integral a partir de las situaciones problema en diferentes contextos está cercano a la zona de desarrollo próximo de los estudiantes y, con apoyo de los recursos tecnológicos, aspectos que de otra manera hubieran sido difíciles de manejar, fue posible desarrollarlos, como el caso de los ajustes lineales y polinómicos que se hicieron en situaciones como el estudio de los recorridos de Usain Bolt.

Idoneidad mediacional: En muchas de las clases de matemáticas se privilegia la exposición magistral del profesor usando un pizarrón o, quizá, un proyector de video. La puesta en escena, con todo y las limitaciones de lo realizado, nos convencen de que es posible hacer un uso más flexible de todos los recursos al alcance de profesores y alumnos. Así, a pesar de sólo haber experimentado la propuesta en tres horas para cada uno de dos grupos de 50 alumnos, las actividades se avanzaron sufrientemente y algunos de los equipos que se formaron para el trabajo, las concluyeron íntegramente. De acuerdo con las condiciones y planeaciones correspondientes en esas tres horas se usaron el pizarrón, el proyector de video, se hizo una experimentación en un laboratorio de física, en otro momento los estudiantes, organizados por equipos, trabajaron con computadoras y en otros casos se usó el teléfono celular.

Idoneidad interaccional: Las actividades se desarrollaron incluyendo momentos de trabajo individual, de trabajo en equipo y de discusión grupal. Pudo observarse que la mayor interacción se dio entre los propios estudiantes, quienes en determinados momentos realizaron discusiones intensas y también, aunque en menor medida, se propició la interacción estudiante-profesor por medio de las discusiones grupales. Nuestra versión de las posibilidades que se suscitan para el desarrollo de procesos de interacción es optimista y satisfactoria, pero es pertinente aclarar que por errores de planificación y de concepción, limitamos las interacciones entre profesor y estudiantes.

Idoneidad emocional: En este rubro también es posible señalar que las situaciones problema planteadas motivaron a los estudiantes a involucrarse en la discusión sobre las formas para resolverlas y con el manejo del software pudieron establecer relaciones entre las representaciones gráficas, algebraicas y numéricas.

Idoneidad ecológica: Igualmente la propuesta es indicativa de que partiendo de situaciones problema extraídas de ambientes o contextos extramatemáticos, ligados a la vida cotidiana o de otros cursos de los estudiantes, es posible general la discusión y la emergencia de los conocimientos matemáticos esperados y la promoción de competencias tanto genéricas como disciplinares.

Queremos enfatizar que estas reflexiones no nos conducen a plantear que el proceso fue idóneo en cada caso, pero si es importante resaltar que partiendo de situaciones problema como las trabajadas, es posible desarrollar acciones que apunten hacia procesos de aprendizaje adecuados, como los estipulados en los criterios de la idoneidad didáctica formulados en el EOS.

Una reflexión adicional consiste en señalar que, con la propuesta y las dinámicas de trabajo es posible, por mínimo que sea, avanzar en la promoción de competencias tanto genéricas como disciplinares, pero, con la conciencia de que el desarrollo de competencias es muy largo, consideramos que, para evaluar dicho desarrollo, es necesario tomar en cuenta periodos de estudio muchos más extenso, tanto en lo que se refiere a las actividades como al tiempo que se dedica en los cursos para ello.

De cualquier forma, desde nuestro punto de vista esta propuesta se encamina a promover las siguientes competencias.

Genéricas:

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados, en sus atributos:

- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

- Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas.

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos, en sus atributos:
   - Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.
   - Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva, en su atributo:
   - Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo con su relevancia y confiabilidad.
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida, en su atributo:
   - Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana.
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos, en sus atributos:
   - Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
   - Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

Disciplinares:

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Por último, el diseño de las actividades se realizó antes de la implementación del Nuevo Modelo Educativo, sin embargo, como señalamos líneas atrás, se cumplen varias cuestiones que se plantean en él, por ejemplo:

a) Las actividades son de carácter secuencial, transversal y funcional del conocimiento matemático a través de situaciones diversas, las cuales se encuentran contextualizadas en áreas de interés para el estudiante, abordando temas como el precio de dólar, la velocidad y aceleración del múltiple medallista olímpico de Usain Bolt, la fabricación de recipientes por medio de la modelación en GeoGebra, entre otras.

b) El cuadro de contenidos de la asignatura de Cálculo Integral en uno de sus contenidos centrales dice: se debe realizar una aproximación y cálculo del área bajo la curva por métodos elementales (Método de los rectángulos y método de los trapecios).
c) En el mismo cuadro de contenidos marca como aprendizajes esperados:
    - Aproxima el área bajo una curva mediante rectángulos inscritos, se mide o calcula el área de estos y se estima el valor del área bajo la curva.
    - Calcula el área debajo de curvas conocidas, como gráficas de funciones lineales, cuadráticas y cúbicas entre dos límites de integración.
d) Se utilizan diferentes representaciones semióticas, para que el estudiante pueda ir de una a otra dependiendo de la conveniencia de cada una de ellas.

Se manejaron como referencia las configuraciones epistémicas citadas por Contreras de la Fuente, Ángel, Ordóñez Cañada, Lourdes y Wilhelmi, Miguel R., en su trabajo INFLUENCIA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD EN LA ENSEÑANZA DE LA INTEGRAL DEFINIDA EN EL BACHILLERATO:

- ✓ Configuración epistémica geométrica (CE-geo).
- ✓ Configuración epistémica resultado de un proceso de cambio (CE-RPC).

Elegimos el marco teórico del EOS, ya que esté nos proporcionó los elementos necesarios para realizar primeramente un análisis al programa del curso de Cálculo Integral de la dirección general de bachillerato y determinar el significado institucional de referencia, Realizar las configuraciones y trayectorias epistémicas del trabajo del diseño y realizar un análisis a priori y a posteriori de los criterios de idoneidad didáctica, para realizar ajustes en la propuesta.

En la puesta en escena de la propuesta didáctica tuvimos la oportunidad de probar diferentes recursos tecnológicos para la resolución de las actividades, en las actividades de inicio se realizaron a lápiz y papel en el aula, en la sesión destinada para las actividades de desarrollo se utilizó en un grupo el laboratorio de informática para trabajar el software GeoGebra con las PC´s, en otro grupo se trabajó con la aplicación del celular y en una sesión de las actividades de cierre se trabajó con el cañón y a lápiz y papel, tomando en cuenta los recursos disponibles para cada sesión.

En el análisis a posteriori se contrastan los significados personales (prácticas discursivas y operatorias) de los estudiantes analizados contra el significado institucional de referencia o el significado institucional pretendido, aquí se puede observar que los alumnos pudieron comprender los objetos matemáticos que se pretendían al realizar la resolución de las actividades de la secuencia didáctica. También nos pudimos dar cuenta que existen conflictos semióticos al utilizar el concepto de área bajo la curva, ya que lo ligan al concepto de área como contexto, por lo que siempre debe ser positiva, tampoco pudieron discriminar entre el área bajo la curva y el volumen de un sólido de revolución (continuaban asegurando que eran rectángulos cuando en realidad se formaban cilindros), aun cuando sus cálculos estaban correctos.

En las actividades no habíamos incluido actividades que contuvieran configuraciones o trayectorias epistémicas relacionadas con la inversa de la derivada, las cuales se incluyeron después de realizar el análisis a posteriori, ya que se consideran importantes y aprovechamos las mismas actividades para que utilizaran este método y que pudieran corroborar sus resultados con los esperados.

BIBLIOGRAFÍA

- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. Grupo Editorial Ibero americano.
- Contreras, O. y. (2010). Un análisis de una muestra representativa de libros de matemáticas con el objetivo de “mostrar algunas posibilidades para la mejora de la idoneidad didáctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje potenciales relativos al cálculo integral en el bachillerato.
- Esther Ansola Hazday, E. C. (2008). Aproximaciones al valor de la Integral Definida utilizando una calculadora graficadora. Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.
- Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Disponible en, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html
- Grijalva, M. A. (2007). El papel del contexto en la asignación de significados a los objetos matemáticos. El caso de la integral de una función.
- Incorporadas UNISON. (s.f.). Obtenido de Programas de estudio: http://www.incorporadas.uson.mx/academica/PROGRAMAS_DE_ESTUDIO_POR_SEMESTRE/SEMESTRE_VI/S6CFP-CI_(PROPEDEUTICA).pdf
- Llorens, J. L. (1997). Una Interpretación de las Dificultades en el Aprendizaje del concepto de la Integral. Divulgaciones Matemáticas, 61-76.
- SEMS, C. (2008). COSDAC Subsecretaría de educación media superior. Obtenido de http://cosdac.sems.gob.mx/portal/index.php/riems
- SEMS (2018) Subsecretaría de educación media superior. Obtenido de SEP: http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/12482/1/images/tabla_perfils_egreso.pdf
- SEMS (2017) Subsecretaría de educación media superior. Obtenido de SEP http://www.sems.gob.mx/curriculoems/planes-de-estudio-de-referencia

- SEP. (2013). Subsecretaría de educación media superior. Obtenido de SEP: https://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/cfp_6sem/CALCULO_INTEGRAL.pdf
- SEP. 2017, Subsecretaría de educación media superior. Obtenido de SEP: https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/241519/planes-estudio-sems.pdf.
- Soto Álvarez, J. (2011). Actividades didácticas para la enseñanza de la integral con apoyo de un software de geometría dinámica.
- Viviana A. Costa, R. M. (2010). Artículo “Material educativo digital como recurso didáctico para el aprendizaje del Cálculo Integral y Vectorial”. Revista Iberoamericana de la Educación, 173-185.