UNIVERSIDAD DE SONORA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

DIFICULTADES PARA ARTICULAR LOS REGISTROS GRAFICO, ALGEBRAICO Y TABULAR Y LA EXPLORACION DE ALGUNAS ACTIVIDADES DIDACTICAS DISEÑADAS PARA SUPERAR ESTAS DIFICULTADES: EL CASO DE LA FUNCION LINEAL

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRIA EN CIENCIAS

ESPECIALIDAD

MATEMATICA EDUCATIVA

PRESENTA

JULIA XOCHILT PERALTA GARCIA

HERMOSILLO, SON. **JUNIO DE 2003**

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se detectan y analizan algunas dificultades que los estudiantes universitarios de reciente ingreso, encuentran cuando resuelven problemas que involucran el concepto de función lineal. Además se diseñan algunas actividades que pudieran ayudarlos a superar las dificultades identificadas y servir a la vez como elementos para la formulación de una propuesta de enseñanza sobre este tópico.

A pesar de que las funciones lineales son el primer contacto que los estudiantes tienen con el concepto de función y parecieran ser las funciones más sencillas de estudiar, diversas investigaciones han mostrado que las dificultades de aprendizaje que provocan no son simples (Duval, 1992; Hitt, 1996).

Las funciones en general resultan un concepto clave para la matemática y en general para otras ciencias, en el primer caso porque se consideran indispensables para desarrollar ciertos conceptos y en el segundo porque sirven de modelo para explicar una gran diversidad de fenómenos.

Un supuesto básico en este trabajo es que las dificultades de los estudiantes están relacionadas con las distintas representaciones del concepto de función lineal y las habilidades para pasar de una representación a otra. Aunque se acepta en general que las principales representaciones utilizadas para la función lineal son: la gráfica, la algebraica, la tabular y la del registro de la lengua natural, el presente estudio se restringe a las tres primeras y deja fuera de su alcance la última. Por distintas representaciones se entenderá aquí solamente los casos de las representaciones gráficas, algebraicas y tabulares.

El interés por llevar a cabo esta investigación tiene su origen en las observaciones directas en el aula, sobre las deficiencias mostradas por los estudiantes, cuando intentan utilizar este tipo de funciones como modelo para la resolución de problemas de Microeconomía. Estas deficiencias son recurrentes a pesar de que el concepto de función lineal ha sido ya discutido por los estudiantes en sus estudios pre-universitarios.

Para abordar la investigación se consideró pertinente utilizar los aportes teóricos desarrollados por R. Duval sobre registros de representación semiótica, que precisamente se enmarcan en el fenómeno de la representación, considerando ciertas actividades cognitivas propias del pensamiento humano.

Para la detección de las dificultades se ha diseñado un cuestionario cuya resolución exige al estudiante la identificación de diferentes representaciones de la función lineal y el paso de una representación a otra. La aplicación de este cuestionario se realizó en el semestre enero-mayo del 2001 con estudiantes universitarios del área económico-administrativa que tomaban en ese momento el curso "Matemática". Se analizaron los resultados para identificar el tipo de dificultades y a partir de ello fueron diseñadas una serie de actividades de enseñanza dirigidas a superar algunas de estas dificultades. Las actividades fueron realizadas por estudiantes del área económico-administrativa que tomaban el curso "Matemática" durante el semestre agosto-diciembre de 2002. Los reportes sobre las respuestas dadas por los estudiantes al cuestionario y los efectos que las actividades de enseñanza han tenido se incluyen en este trabajo.

El Capítulo 1 se ha dedicado a describir los motivos que originaron este trabajo, así como el planteamiento del problema a investigar. En el Capítulo 2 se presenta el marco de referencia que tiene como propósito ubicar el contexto educativo y curricular en el que se desarrollan los estudiantes que participaron en la parte experimental de este trabajo.

El Capítulo 3 está dedicado a describir las aportaciones teóricas de R. Duval desarrolladas alrededor del fenómeno de la representación en ambientes de aprendizaje de las matemáticas y la manera como estas aportaciones pueden utilizarse como herramientas para la interpretación de las dificultades específicas abordadas aquí, así como para el diseño de actividades de enseñanza sobre el tema que se aborda. En el Capítulo 4 se describe la metodología utilizada para llevar acabo la investigación, así como el diseño y los propósitos de los instrumentos utilizados en la parte experimental. Los resultados y conclusiones acerca de las dificultades detectadas y del montaje de las actividades didácticas, se reservaron para el Capítulo 5.

Capítulo 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Planteamiento del problema

Los estudiantes universitarios presentan serias deficiencias cuando resuelven problemas sencillos de economía, en los que tienen que utilizar la función lineal como modelo. Sus deficiencias parecen estar asociadas a la pobreza que muestran en su conceptualización de este tipo de funciones.

A pesar de que las funciones lineales son las primeras que aparecen en la currícula matemática, diversas investigaciones han mostrado que las dificultades de aprendizaje que plantean no son simples (Duval, 1992; Hitt, 1996).

Una función es un objeto matemático, cuyas características podemos conocer solamente a través de sus diversas representaciones. Esta vía obligada de acceso a los objetos matemáticos, ha sido subrayada por Duval (1998) para justificar la necesidad de profundizar en la naturaleza de las representaciones y en el estudio del papel que éstas juegan en el aprendizaje de la matemática.

Mientras que, por un lado la actividad matemática reconoce el uso de fórmulas algebraicas, gráficas, tablas y enunciados en la lengua natural como imprescindible para estudiar sus objetos; por otro, la enseñanza ha privilegiado el uso de representaciones algebraicas, en detrimento de otras, como las gráficas y numéricas. Esta disparidad no es casual, las representaciones algebraicas son las más compactas, las más precisas y las más económicas en términos de tratamientos. En lo que se refiere al concepto de función, esta situación se reproduce a pesar de los esfuerzos recientes por diversificar los tipos de representaciones usadas en su enseñanza.

Las representaciones semióticas de los objetos matemáticos se consideran imprescindibles en la actividad matemática para su aprehensión. Pero el manejo de las representaciones origina en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, que los objetos sean confundidos con sus representaciones y esto trae consigo, según Duval (1998, ibid, pp. 174 –175) ... *a mediano o largo plazo, una pérdida de comprensión y los conocimientos adquiridos llegan a ser pronto inutilizables fuera de su contexto de aprendizaje*. Por lo tanto, el distinguir el objeto de sus representaciones resulta un elemento de suma importancia para la comprensión de las matemáticas.

Una operación que se considera indispensable para hacer uso de varias representaciones es la actividad de conversión, ésta se refiere a transformar una representación de un registro dado en otra representación de otro registro. Por ejemplo, esta actividad es observable al cambiar la representación algebraica de una función lineal $f(x)=ax+b$ a su representación gráfica, siempre y cuando se discriminen los parámetros a y b de la función y los efectos que estos producen en la gráfica.

Pero esta actividad de conversión se ha descuidado en el proceso de enseñanza, porque no se considera que un cambio de registro pueda estar ligada con la comprensión de los objetos matemáticos. Como lo señala Duval (1998, pp.

186) ...*la poca importancia conferida a esta actividad, puede ser la causa de los fracasos y dificultades de aprendizaje conceptual de los objetos matemáticos.*

En la versión más reciente de los estándares de la NCTM (2000), por ejemplo, se incluye un nuevo estándar sobre *representaciones* en el que se recomienda el uso de diversas representaciones en la enseñanza de las matemáticas, porque se pueden utilizar para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas así como para modelar fenómenos físicos y sociales. Si bien es cierto una de las recomendaciones se refiere a la traducción entre diferentes representaciones en la resolución de problemas, entre las actividades sugeridas en este estándar no se muestran actividades específicas diseñadas para promover esta traducción.

Los estudiantes universitarios del Instituto Tecnológico de Sonora del área económico-administrativa, toman los cursos de Microeconomía y Macroeconomía como parte de su plan de estudios, en ellos resulta indispensable estudiar los fenómenos de oferta y demanda de mercado, utilizando como modelo las funciones lineales.

Los cursos de matemáticas que se ofrecen a estas áreas son Desarrollo del Pensamiento Numérico y Matemática, los cuales anteceden a los dos de economía mencionados antes. En el curso de Matemática los estudiantes abordan por primera vez los fenómenos de oferta y demanda de mercado haciendo uso de la función lineal, pero se ha observado que ellos tienen dificultades para resolver problemas sobre estos temas.

Uno de los factores a considerar en las dificultades mostradas por los estudiantes pudieran estar relacionadas con su poca destreza para convertir una representación en otra, por lo tanto bajo estas consideraciones, se propone investigar la siguiente interrogante:

¿Qué dificultades de aprendizaje identificadas en los estudiantes sobre la función lineal, tienen que ver con la actividad de conversión entre los registros de representación gráfico, algebraico y tabular?.

Por otra parte es necesario puntualizar que en los últimos años, sin embargo, se han desarrollado algunos estudios (Hitt,1997; Hernández, 1997; Sierpinska et al, 1999) que enfatizan el uso de diferentes registros de representación y de la articulación entre ellos, estos estudios usan invariablemente nuevas tecnologías como parte de los recursos de enseñanza.

La introducción de las nuevas tecnologías a las aulas ha permitido, al docente, desarrollar su labor de una manera más eficiente, a partir de que permite la sustitución de técnicas que han quedado obsoletas y la utilización de *software* que se ha ido desarrollando favoreciendo el desarrollo de habilidades intelectuales, eliminando gradualmente el papel pasivo que tradicionalmente se ha asignado al estudiante.

Uno de los supuestos en este trabajo es que la actividad de conversión puede ser enseñada, a pesar de ciertas dificultades atribuidas a la incongruencia entre representaciones. Por lo tanto si partimos de la hipótesis que la actividad de conversión puede ser enseñada y colocamos al estudiante ante situaciones de enseñanza donde se promueva esa actividad a través del diseño de ciertas tareas, surge la segunda interrogante:

¿Qué tareas podrían incluirse en una secuencia didáctica, que ayuden a superar las dificultades detectadas en los estudiantes?

1.2 Justificación

Resulta de suma importancia reconocer que las funciones en general son un concepto fundamental al interior de la matemática y tienen una gran diversidad de aplicaciones en otras áreas del conocimiento. Para el Cálculo Diferencial e Integral, por ejemplo, el concepto de función es una piedra de toque y en las ciencias naturales y económicas, sirve como modelo para estudiar una gran variedad de fenómenos. El concepto de función es un tema central en la matemática escolar, principalmente en el nivel universitario. Su importancia radica en el uso que tiene para modelar situaciones y fenómenos en otras ciencias y en la matemática misma.

Usualmente las funciones lineales son consideradas las más sencillas, por ello son las primeras que se abordan al enseñar el tema de funciones. Sus aplicaciones se ilustran normalmente con el estudio de diversos fenómenos donde aparecen relaciones lineales entre cantidades. En particular, los economistas se apoyan en los modelos lineales para poder analizar algunos fenómenos presentes en la Microeconomía, tal es el caso de los fenómenos de oferta y demanda de mercado. Aunque el comportamiento de estos, no es siempre necesariamente lineal, los modelos lineales pueden proporcionar aproximaciones aceptables.

Se reconoce que las funciones lineales son las primeras que aparecen en la currícula matemática, diversas investigaciones han mostrado que las dificultades de aprendizaje que muestran no son simples (Duval, 1992). Los

avances logrados hasta ahora (Hitt, 1996) sobre la enseñanza y el aprendizaje del concepto de función lineal, ponen en evidencia que este concepto es sencillo solo en apariencia, pues resulta difícil de comprender y aplicar para muchos estudiantes.

El lugar prioritario conferido a este tipo de funciones en los planes de estudio y a la diversidad de aplicaciones que tiene, hacen que la profundización en el conocimiento sobre sus dificultades de enseñanza y aprendizaje sea un tema de investigación de primer orden.

El problema que se plantea en esta investigación tiene que ver con las dificultades de aprendizaje de la función lineal, que se relacionan con el fenómeno de la representación y las implicaciones que esta tiene en los ambientes escolares, el cual se reconoce como importante en condiciones de aprendizaje de ellas. Las características que muestra esta disciplina es la utilización de sistemas de expresión y representación distintos a los del lenguaje natural, lo que la hace diferente de otras ciencias.

Como lo señala Duval (1998) una función es un objeto matemático, cuyas características podemos conocer solamente a través de sus diversas representaciones. Esta vía obligada de acceso a los objetos matemáticos, justifica la necesidad de profundizar en la naturaleza de las representaciones y en el estudio del papel que éstas juegan en el aprendizaje de la matemática. Los referentes teóricos que han sido considerados importantes retomar, para explicar el fenómeno de la representación son los aportes de R. Duval sobre registros de representación semiótica. Las pretensiones del presente trabajo no va más allá de dar una interpretación del problema que nos propusimos investigar a través de la teoría y la exploración del diseño de una secuencia de actividades en este mismo marco.

Capítulo 2

MARCO REFERENCIAL

2.1 Aspectos generales del Instituto Tecnológico de Sonora

El Instituto Tecnológico de Sonora es una universidad pública y autónoma que se localiza en el sur de Sonora, cuenta con unidades académicas en Ciudad Obregón (Unidad Centro y Unidad Naínari), Guaymas y Navojoa.

El ITSON tiene como objetivos institucionales:

- Preparar los profesionales de nivel superior requeridos por el desarrollo del estado y del país.
- Realizar labores de investigación científica y tecnológica.
- Participar en el proceso de creación, conservación, renovación y transmisión de la cultura.
- Extender los beneficios de la ciencia y la tecnología hacia la comunidad.
- Promover en sus integrantes una formación armónica y equilibrada.

El funcionamiento académico del ITSON se encuentra basado en una estructura departamental. La conjugación de la docencia de todos los departamentos integran las diferentes carreras. Cada departamento está formado por un jefe, maestros de tiempo completo y maestros auxiliares. La División de Ingeniería y Ciencias Biológicas, ofrece a través de sus departamentos nueve carreras a nivel licenciatura y la División de Ciencias Sociales y Humanidades ofrece siete las cuales son: Contador Público (CP), Licenciado en administración (LA), Licenciado en Sistemas de Información Administrativas (LSIA), Licenciado en Economía y Finanzas (LEF), Licenciado en Psicología (LPS), Licenciado en Ciencias de la Educación (LCE) y Licenciado en Administración de Empresas Turísticas (LAT).

2.2 Departamento de Matemática y Física

El Departamento de Matemática y Física depende administrativamente de la División de Ingeniería y Ciencias Biológicas, tiene por función dar servicio a las diferentes carreras que ofrece la institución, específicamente en el área de herramientas relativa al campo de la matemática, la estadística y la física. Actualmente el departamento está integrado por un jefe, 15 maestros de tiempo completo y aproximadamente 100 maestros auxiliares.

Las materias que ofrece el departamento a las carreras adscritas en cada una de las divisiones en particular al área económico-administrativa son: Desarrollo del Pensamiento Numérico, Matemática, Estadística y Matemática - Estadística.

2.2.1 Cursos de matemáticas para el área económico administrativo

Los cursos de matemáticas que se imparten en el área son dos: Desarrollo del Pensamiento Numérico y Matemática; el primer curso está enfocado a la resolución de problemas y habilidades algebraicas, el segundo curso al estudio de modelos sencillos aplicados a la Economía y algo sobre Cálculo Diferencial e Integral.

El contenido del curso de Desarrollo del Pensamiento Numérico contempla los siguientes temas:

I. Los números Racionales y la Calculadora
II. Los Problemas, Las Estimaciones y las Medidas
III. Las Razones y Proporciones
IV. Fundamentos de Álgebra
V. Las Ecuaciones Algebraicas
VI. Rectas y Parábolas

El contenido del curso de Matemática contempla los siguientes temas:

I. Las Rectas
II. Funciones
III. Derivación
IV. Integración

2.3 Estudiantes del área económico- administrativo

Se delimitó el estudio con alumnos de las carreras del área económico-administrativo: Licenciado en Administración, Contador Público, Licenciados en Administración con acentuación en Turismo y Licenciados en Economía y Finanzas, quienes se encontraban en el segundo o tercer semestre de su carrera, llevando el curso de Matemática, donde se realizó el presente trabajo.

La mayoría de los alumnos de esta área, provienen de preparatorias de la localidad tales como: COBACH, CETIS, CBTIS y en menor proporción otras.

Todo estudiante que desee ingresar al instituto debe presentar un examen de admisión, llamado prueba de aptitud académica del College Board. El examen contempla una sección de preguntas verbales, las cuales miden la habilidad del candidato para entender lo que lee y la riqueza y dominio de su vocabulario; la otra sección son preguntas de matemáticas que miden su habilidad para resolver problemas relacionados con el razonamiento aritmético, algebraico y geométrico.

Durante el ciclo enero-diciembre 2001 presentaron el examen 5797 estudiantes y fueron aceptados 3681, de los cuales aproximadamente 1300 corresponden al área económico-administrativo, a estos alumnos se les pide en el examen de admisión una puntuación mínima de 1300 puntos, 500 para razonamiento verbal, 500 para razonamiento matemático y 300 punto o más de acuerdo a su promedio de la preparatoria.

Capítulo 3

MARCO TEÓRICO

3.1 Introducción

En este capítulo se describe un panorama general sobre las características que aparecen en un marco de enseñanza tradicional de las matemáticas, a partir de la influencia que tuvieron por parte de las "matemáticas modernas" de los 60´s y de las teorías conductistas en los 70's. En las secciones restantes se describen los supuestos teóricos bajo los cuales se sustenta el presente trabajo, cuyo marco encierra el fenómeno de la *representación* y las aportaciones que han surgido para explicar este fenómeno en lo que respecta a las matemáticas han sido desarrollados por Raymond Duval sobre *registros de representación*.

3.2 Antecedentes

3.2.1 La "matemática moderna" y su influencia

A partir de los años 60's se introdujeron a las instituciones educativas las llamadas "matemáticas modernas". El cambio hacia una matemática distinta se debió a que pretendía adecuar la formación matemática de los estudiantes al desarrollo científico y tecnológico de las principales ciudades occidentales de la época.

Jean Dieudonné matemático de la época, influyó grandemente en la introducción de las "matemáticas modernas", marcando una ruptura con la tradición y haciéndose famoso con la frase "abajo Euclides". Se propuso durante un Congreso internacional de matemáticas realizado en Francia en 1959, convencer a los asistentes de la necesidad de abandonar la enseñanza euclideana, sustituyéndola por una matemática más fundamentada, más motivadora, y que correspondiera a las investigaciones matemáticas desarrolladas en esa época.

Jean Dieudonné encabezó al grupo Bourbaki que estaba integrado por un grupo de investigadores matemáticos que se inició en los años 30´s, a quienes se debe el gran desarrollo que tuvieron las matemáticas y que conocemos ahora como las "matemáticas modernas". El objetivo principal del grupo era ofrecer una compilación básica, sistemática y ordenada de los conocimientos matemáticos que se tenían hasta esos momentos, como lo hizo Euclides en el siglo III a. C, pero esta vez "sin fallas". Esta compilación fue escrita en la obra titulada *Éléments de mathématique.* Ellos consideraron que la abstracción y la axiomatización debían caracterizar a esta disciplina, por lo que la deducción y el rigor lógico eran esenciales en la práctica matemática, por lo que debían ser trasladados a la enseñanza.

Al introducir esta nueva visión de las matemáticas a las instituciones educativas en 1960, se dieron recomendaciones sobre los nuevos programas de matemáticas, proponiendo cursos de tipo intuitivo experimental previos a los cursos modernos. Estas recomendaciones no fueron consideradas y algunos matemáticos pensaron que lo mejor era adaptar a la escuela, la obra fundamental de Bourbaki, donde la matemática debía ser presentada de una manera más formal y rigurosa, como la proponía el grupo Bourbaki en su obra.

La posición filosófica dominante de las "matemáticas modernas" fue la formalista, presentando esta disciplina como un cuerpo estructurado de conocimientos constituidos por objetos matemáticos, relaciones entre ellos y reglas para validar sus resultados, basados en el método axiomático deductivo. La posición formalista exige trabajar sólo con las formas de los objetos, haciendo una abstracción de sus principales propiedades y las relaciones entre dichos objetos.

Los fundadores de las "matemáticas modernas" compartían las ideas de antiguos filósofos griegos como Platón, de que las matemáticas son conocimientos que "pre-existen", es decir, que tienen una realidad anterior al sujeto e independiente de él. El matemático "descubre" un resultado y luego lo "justifica" dentro de una estructura formal.

Los cambios que se dieron con estas nuevas matemáticas fueron: la eliminación de algunos contenidos de geometría así como la implementación de nuevos, tales como estructuras algebraicas y teoría de conjuntos; la creación de nueva simbología matemática; otro cambio fue una mayor generalización y mayor rigor axiomático. Las consecuencias que resultaron de esta nueva visión al interior de las escuelas fue una matemática descontextualizada del mundo real, lo cual repercutió en la mayoría de los estudiantes en una desmotivación hacia el estudio de esta disciplina. El estudiante no sólo tenía dificultades en el uso de los métodos o axiomas sino también en el empleo de operaciones fundamentales. Por lo tanto la reforma de los años 60´s entró en crisis en los 70´s, no resolvió los problemas que justificaron su introducción tales como la falta de motivación, el uso de la memorización para aprender contenidos, sino más bien acumuló otros tales como la desconexión con otras disciplinas.

Se critica el hecho de que los especialistas encargados de esta reforma, no tuvieron cuidado en considerar los aspectos psicológicos y pedagógicos en el estudiante, ellos fijaron su atención solamente en los contenidos matemáticos que deberían de enseñarse y la formalidad con que debían ser enseñados, desconectándola de las otras disciplinas. Los logros obtenidos en el terreno educativo no fueron muy exitosos, pero no así en las producciones matemáticas obtenidas como resultado de la concepción formalista, esto puede observarse por la gran cantidad de libros que se escribieron durante esa época.

3.2.2 La corriente conductista

El conductismo entiende por aprendizaje "el cambio duradero y observable de conducta, que ocurre como resultado de una experiencia" (Escamilla, 2000). Una característica muy importante del conductismo es su atención a los cambios de conducta observables. Las investigaciones sobre el comportamiento animal hicieron pensar que el aprendizaje era una respuesta que se producía ante un determinado estímulo. La repetición era la garantía para aprender y siempre se podía obtener más rendimiento si se suministraban los refuerzos oportunos.

Bajo esta postura el aprendizaje y la enseñanza se dan, cuando el estudiante conoce las respuestas correctas formuladas por el profesor a partir de un proceso mecánico de refuerzos positivos o negativos aplicados por él. Esta corriente no considera los procesos internos que ocurren en la mente de los estudiantes, por lo que la postura epistemológica del conductismo puede ser caracterizada como objetivista, es decir el conocimiento es algo que existe de manera externa al estudiante.

En los años setenta las teorías conductistas tuvieron un gran auge en los ámbitos escolares, porque ofrecían innovaciones didácticas que proponían una serie de técnicas: Máquinas de enseñanza, textos programados, programas por objetivos, etc. que aseguraban eficientar el proceso de transmisión y adquisición del conocimiento. De acuerdo a la concepción conductista del aprendizaje, se puede enseñar todo con programas organizados lógicamente desde la materia que se enseña.

En un marco de enseñanza tradicional de las matemáticas se identifican dos características importantes: una es el objetivismo, que se refiere a la manera en que se concibe el conocimiento y la otra es el formalismo que es la manera en que deben ser desarrollada y presentada esta disciplina.

Las matemáticas son el área de contenido en que los métodos tradicionales han tenido los efectos más nocivos para el aprendizaje, la culpa recae sobre todo en los métodos y en las peticiones que se concentran en la transmisión directa de maestro a alumno y en las respuestas correctas más que en la construcción de principios matemático (Wadsworth, 1991). Han surgido reacciones al respecto, principalmente la de los constructivistas, quienes argumentan que el individuo adquiere el conocimiento como resultado de su propia actividad sobre el objeto, esto es, el sujeto construye su propio conocimiento. Esta nueva concepción queda enmarcada dentro de teorías constructivistas y una de esas teorías que se considera que provee de marcos conceptuales idóneos para explicar como se origina el conocimiento son las formulaciones realizadas por Jean Piaget en su *Epistemología Genética*.

Las investigaciones de Piaget (1969) constituyen una importante aportación para explicar cómo se produce el conocimiento en general y el científico en particular. Marcan el inicio de una concepción constructivista del aprendizaje que se entiende como un proceso de construcción interno, activo e individual.

Los referentes teóricos en lo cuales se apoya el presente trabajo tiene sus raíces en el constructivismo, parten de la idea que es la actividad del individuo sobre el objeto la que puede lograr que se adquiriera el conocimiento. Para el caso de los objetos matemáticos que son "entes" abstractos se utilizan diferentes formas para representarlos a través de símbolos algebraicos, numéricos, gráficos, etc., y es la propia actividad del individuo sobre esas representaciones la que puede lograr que él aprenda. Bajo esta premisa y en ambientes de aprendizaje de las matemáticas se desprenden algunas de las aportaciones teóricas de R. Duval., él cual se centra en ciertas actividades cognitivas básicas que están muy relacionadas con la comprensión y dificultades de aprendizaje de las matemáticas.

En la siguiente sección se describen los aportes de la teoría que se consideran necesario puntualizar para poder explicar los resultados obtenidos en la investigación.

3.3 Aportes teóricos de Duval

El aprendizaje de las matemáticas se considera un campo privilegiado para el estudio de ciertas actividades cognitivas tales como la conceptualización y la resolución de problemas entre otras. Se desprende del hecho, que estas actividades requieren del uso de sistemas de expresión y de representación, que son distintos a los del lenguaje natural. Por ejemplo: los números pueden ser representados en distintos sistemas de numeración (binaria, decimal, sexagesimal, etc.); las funciones pueden ser representadas de distintas formas: algebraica, tabular, gráficamente, etc.; de la misma manera, esto sucede con otros objetos matemáticos tales como los vectores, círculos, rectas etc.

Los objetos matemáticos presentes en la actividad matemática, requieren del uso de representaciones, porque es la única manera de acercarse a los objetos, ellos no son objetos con los que se pueda interactuar directamente, como lo son en otras áreas de conocimiento tales como en biología, física, etc. Las representaciones en matemáticas resultan ser el único medio de acceso, es por lo tanto indispensable reconocer el sitio central que ocupan las representaciones en el aprendizaje de las matemáticas (Duval, 1993).

3.3.1 Registros de representación semiótica

Las representaciones semióticas resultan ser indispensables al momento de querer accesar, adquirir o comunicar conocimientos matemáticos. Un objeto matemático tiene la particularidad de contar con distintas maneras de representación semiótica, como es el caso de las funciones, estas se pueden representar en forma: tabular, gráfica, algebraica o en la forma de enunciado en la lengua natural.

Las representaciones semióticas están constituidas por el uso de signos que pertenecen a un sistema de representación, por ejemplo: una gráfica al sistema cartesiano, una fórmula al sistema algebraico o un enunciado a la lengua natural; cuyos sistemas inducen a tener sus propias unidades significativas y reglas de funcionamiento.

Para que las representaciones puedan ser útiles en la actividad matemática, deben pertenecer a sistemas semióticos que sean registros de representación y para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, debe permitir tres actividades cognoscitivas fundamentales asociadas a toda representación:

1) La formación de un conjunto de signos que sean identificables como una representación de algo en un sistema determinado; por ejemplo una fórmula es identificable en el registro algebraico. Esta formación implica una selección de rasgos y de datos en el contenido por representar, esto es, si se quiere representar a la función lineal en el registro algebraico se identifica la siguiente representación: $y=-2x+1$. La selección se hace en función de las unidades y de las reglas de formación que son propias de cada registro, esas reglas ya están dadas en el registro y lo importante de esta actividad es reconocerlas, no diseñarlas. Por ejemplo, si se quiere representar una función lineal de la siguiente manera " $y=2x\ ++1$ " esta representación algebraica no sería coherente con las reglas de formación del registro algebraico. La segunda actividad es la de tratamiento.

2) El tratamiento es la transformación de una representación en el mismo registro en el cual ha sido formada, haciendo uso sólo de las reglas propias a ese registro. El tratamiento es una transformación interna a un registro. Esta actividad puede verse con el siguiente ejemplo: $y=-2x+1$ y $y=-2(x-\frac{1}{2})$. Existen reglas de tratamiento propias de cada registro, su naturaleza y número varía de un registro a otro. Por último la tercer actividad asociada a la representación es la de conversión.

3) La conversión es la transformación de una representación en otra que pertenece a otro registro conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial. La conversión es una transformación externa al registro de partida. No debe confundirse esta actividad con la actividad de tratamiento, por lo que debe quedar claro que no existen ni pueden existir reglas para promover esta actividad cognitiva de conversión como existen reglas de tratamiento.

No todos los sistemas semióticos permiten estas tres actividades cognitivas fundamentales, los principales registros que se utilizan en matemáticas sí permiten estas tres actividades, tales como las gráficas, expresiones algebraicas, expresiones numéricas, figuras geométricas, enunciados en la lengua natural, etc.

Las representaciones semióticas se consideran esenciales tanto para fines de comunicación como para la realización de ciertas actividades cognitivas del pensamiento, tales como propiciar el desarrollo de representaciones mentales a través de una interiorización de las representaciones semióticas.

La única forma de trabajar con los objetos matemáticos es a través de sus representaciones, pero éstas, pueden ocasionar problemas en el proceso de aprendizaje cuando son confundidas con el objeto que se quiere representar, pero ¿cómo no confundir el objeto con sus representaciones en los inicios de su aprendizaje, si la única manera de enfrentarse a ellos es a través de sus representaciones?.

En la actividad matemática es necesario poder movilizar varios registros en el transcurso de una misma acción o escoger un registro en lugar de otro, es importante en esta actividad poder diferenciar lo que es la semiosis de la noesis. Se le llama semiosis a la aprehensión o producción de una representación semiótica y noesis a la aprehensión conceptual de un objeto. Es importante reconocer por un lado, que la aprehensión de los objetos matemáticos es una aprehensión conceptual y por otro lado, no puede haber una conceptualización del objeto matemático sin la aprehensión primeramente de las representaciones semióticas, una de las tesis centrales de Duval es que no puede haber noesis sin semiosis por lo que esta puede explicar las dificultades para aprender este tipo de conocimientos.

3.3.2 Actividad de conversión

Como se ha dicho anteriormente las actividades cognitivas ligadas a la semiosis son tres y son necesarias para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación: la actividad de formación, la de tratamiento y la de conversión De las tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis, la conversión resulta ser, con frecuencia, la menos atendida en el proceso de enseñanza, primero porque se considera automática desde el momento que se pueden formar representaciones en diferentes registros y efectuar tratamientos sobre las representaciones y en segundo lugar, por la creencia que no es una actividad importante para la comprensión de los objetos matemáticos porque se limita sólo a *un cambio de registro. De acuerdo a Duval, la poca importancia conferida a la actividad de conversión repercute en la noesis y de una manera más general, en la comprensión.*

Existe cierta confusión entre la actividad de conversión y otras actividades que se le asemejan. Una de estas actividades es la codificación. La codificación es la transformación de una representación en una representación de otro registro, por simple aplicación de reglas de correspondencia: a cada elemento de un registro dado le corresponde uno y sólo un elemento de otro registro, por ejemplo, una pareja de puntos (a,b) de números reales le corresponde un solo punto del sistema cartesiano y recíprocamente. Para pasar de la escritura algebraica de una relación ($y = x$, $y = x^2$) a la representación de una recta o de una curva, la regla de codificación permite marcar tantos puntos como se quiera y unirlos, pero el trazo continuo realizado de una recta o de una parábola por la simple codificación efectuada, no permite tener ninguna idea global del comportamiento de la curva. El ejemplo ilustra que la codificación puede ser confundida con la conversión entre los registros algebraico y gráfico por el hecho de cambiar de registro.

Para ilustrar la confusión de la actividad de conversión con la codificación se tiene la siguiente relación $y \geq x$, si se utiliza la vía del punteo y se unen los puntos obtenidos para trazar la gráfica de la desigualdad, no se obtiene la representación gráfica global de la relación. Recíprocamente, si se diera la gráfica de esa desigualdad y se quisiera representar algebraicamente el problema sería mayor, ¿cuántos puntos tendrían que dibujarse para darse cuenta que corresponde a todos los puntos del plano que se encuentran por encima y sobre la recta $y = x$?. Por lo que la actividad de codificación no sería suficiente para un cambio de registro de la representación. Para Duval este paso recíproco exige que las *unidades significativas* de cada registro sean bien discriminadas, esto es, que en la representación gráfica sean discriminadas las *variables visuales* pertinentes con sus diferentes *valores* en el registro gráfico; así como en la representación algebraica se identifiquen cada una de sus diferentes opciones que dan un significado con los respectivos símbolos de la expresión algebraica.

3.3.3 Unidades significativas del registro gráfico y algebraico

Si se analiza la conversión del registro gráfico al algebraico, se puede observar la diversidad de casos que se presentan para la línea recta. Para discriminar las propiedades de una figura en la representación gráfica se requiere de lo siguiente:
Primero: discriminar 2 variables generales en la figura:

- Si es un trazo o una zona
- En caso de ser un trazo: si es recto o curvo
- En caso de ser un trazo curvo: si es abierto o cerrado

Segundo: discriminar 3 variables relativas a la línea recta, ver Figura 1.

La primera de las tres variables toma dos valores, la segunda puede tomar tres y la tercera otros tres, para cada uno de estos valores visuales corresponde una unidad significativa simbólica en la expresión algebraica. En la ecuación de la línea recta $y = mx + b$ lo que interesa son el coeficiente *m* y la constante *b*, ver Figura 2.

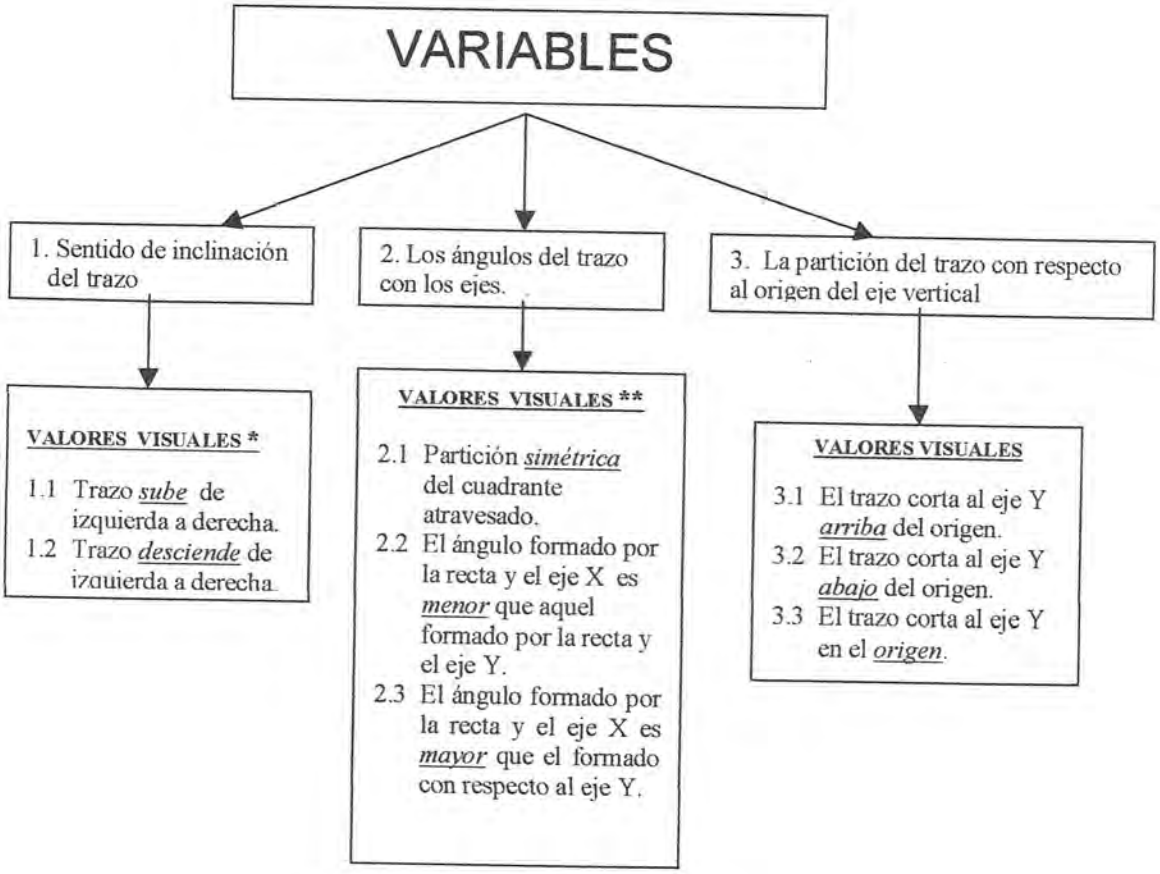


Figura 1

* La referencia de izquierda a derecha es el sentido normal del recorrido visual de una página escrita en caracteres latinos.

** Cuando la recta trazada no pasa por el origen, es suficiente desplazar el eje vertical, por ejemplo, hasta el punto de intersección de la recta con el eje horizontal.

VARIABLES VISUALES	VALORES	UNIDADES SIMBÓLICAS
Sentido de inclinación	Trazo subiendo	$m > 0$ ausencia del signo positivo
	Trazo descendiendo	$m < 0$ presencia del signo negativo
II. Ángulos con los ejes	Partición simétrica	$m = 1$
	Ángulo menor	$m < 1$
	Ángulo mayor	$m > 1$
III. Partición sobre el eje Y	Corta arriba	Se tiene que $b > 0$
	Corta abajo	Se tiene que $b < 0$
	Corta en el origen	Se tiene que $b = 0$

Figura 2

De acuerdo a la tabla anterior se hacen las siguientes observaciones:

- El concepto de pendiente. En la escritura algebraica corresponde al coeficiente m en el cual se discriminan dos unidades simbólicas diferentes: el signo y el valor con respecto al entero 1. Donde estas dos, se corresponden a dos variables visuales diferentes: el sentido de inclinación y el ángulo respectivamente. Entonces no existe congruencia entre la dirección de la recta y el valor que se tiene en la escritura algebraica, porque hay que discriminar dos propiedades distintas, relacionadas al cero y al uno.
- Las diferencias que existen del registro de salida y de llegada cuando van de la expresión simbólica de la recta a la gráfica y viceversa. Para el primer caso, es posible realizarla por la vía del punteo, mientras el ir de la gráfica a la algebraica implica discriminar cada uno de los valores visuales e integrarlos, lo que implica considerar un conjunto de propiedades.
- Para las rectas no paralelas a los ejes coordenados existen 18 representaciones gráficas distintas visualmente de manera significativa, donde a cada una de estas gráficas corresponde una ecuación, ver Figura.3.

Sentido de inclinación	Ángulo con los ejes	Posición con el eje Y	Ejemplo de escritura
Trazo subiendo	Partición simétrica	Corte en el origen Corte por arriba Corte por abajo	y = x y = x + 1 y = x - 1
	Ángulo más grande	Corte en el origen Corte por arriba Corte por abajo	y = 2x y = 2x +1 y = 2x - 1
	Ángulo más pequeño	Corte en el origen Corte por arriba Corte por abajo	y = 1/2 x y = 1/2x + 1 y = 1/2x - 1
Trazo bajando	Partición simétrica	Corte en el origen Corte por arriba Corte por abajo	y = -x y = -x + 1 y = -x - 1
	Ángulo más grande	Corte en el origen Corte por arriba Corte por abajo	y = -1/ 2x y = -1/2x +1 y = -1/2x - 1
	Ángulo más pequeño	Corte en el origen Corte por arriba Corte por abajo	y = -2 x y = -2x + 1 y = -2x - 1

Figura 3

3.3.4 Coordinación de registros de representación

Parece característico en el funcionamiento del pensamiento humano el recurso a varios registros de representación que comparado con la inteligencia animal y artificial, estos hacen uso de un solo sistema de representación para su funcionamiento.

Tres razones pueden ofrecerse para el uso de distintos registros de representación semiótica relacionados con el pensamiento humano:
1) Los costos de tratamiento, 2) Las limitaciones específicas de cada registro y 3)

La relación existente entre conceptualización y coordinación de registros de representación.

La primera razón está relacionada con los diferentes costos de tratamiento de los diferentes registros, la diversidad de registros brinda la oportunidad de usar un registro en lugar de otro con la finalidad de efectuar tratamientos de una manera más económica y más poderosa, por ejemplo cuando tienen que realizarse operaciones de tipo cálculo con funciones el tratamiento es mejor en el registro algebraico que en el gráfico; la segunda tiene que ver con el hecho que los cambios modifican las características representadas del objeto, Duval (1998, pp. 185) lo señala en la siguiente forma: "toda representación es cognitivamente parcial en referencia a lo que ella representa...".. Por ejemplo, identificar si una función es lineal o no, se facilita más en su representación gráfica que tabular; la pendiente de una recta se puede identificar con mayor facilidad de su forma algebraica que de su forma gráfica. Y la tercera razón el porqué de la diversidad de registros, es que de acuerdo a Duval la conceptualización de los objetos matemáticos guarda una relación estrecha con la coordinación de por lo menos, dos registros de representación. Esto se puede entender de la siguiente manera, para que una representación funcione verdaderamente como una representación, es necesario que no se confunda el objeto con su representación y para lograr esto se deben cumplir las siguientes dos condiciones: que existan al menos dos sistemas semióticos diferentes para la representación del objeto y que puedan convertir los estudiantes las representaciones de un sistema a otro en forma rápida y espontánea, esto último es lo que Duval reconoce como una *coordinación entre registros de representación* y es la actividad que señala como necesaria para la aprehensión conceptual de los objetos matemáticos y que no significa más que la noesis.

La tercera razón dada para el uso de varios registros, no se considera usualmente relevante por otros porque se parte del supuesto "Si se selecciona bien el registro de representación, las representaciones en él son suficientes para permitir la comprensión del contenido conceptual representado." (ibid, pp.185). Bajo este supuesto se justifica en gran medida que la conversión no sea un recurso importante para la conceptualización, pero hay que reconocer que puede ser válido para matemáticos o maestros que tienen un buen manejo de esta disciplina, pero no para personas que están en proceso de aprendizaje. Por lo que bajo este supuesto no se permite reconocer que la ausencia de conversión puede ser la causa de las dificultades o fracasos de los estudiantes, considerando entonces que el problema proviene de la noesis no de la semiosis.

Existe un segundo supuesto sobre como se logra una conceptulaización de los objetos matemáticos en los estudiantes: "La comprensión (integradora) de un contenido conceptual, reposa en la coordinación de al menos, dos registros de representación, y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión.". El siguiente esquema muestra este proceso (Figura 4).

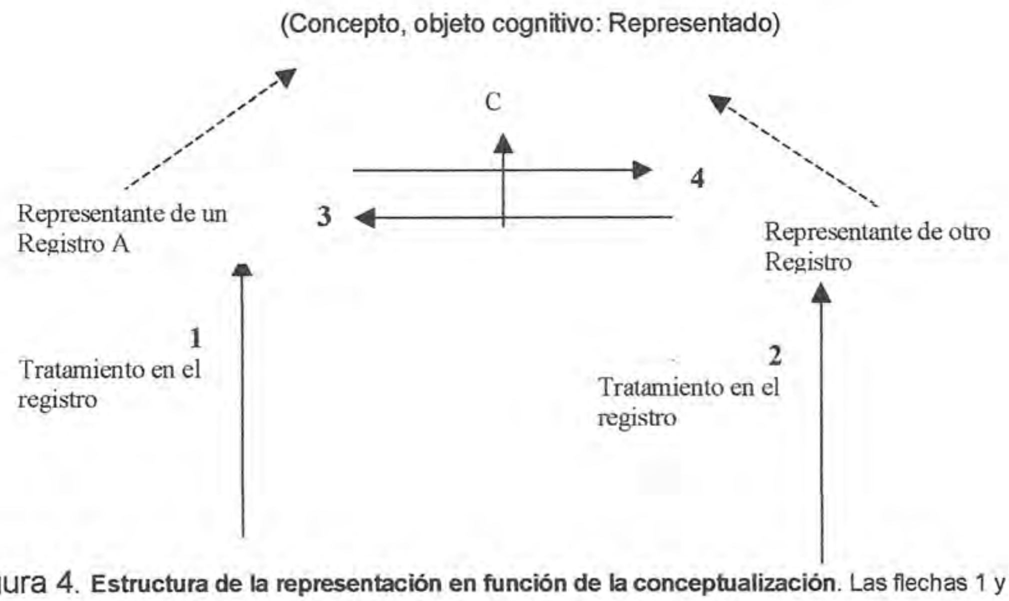


Figura 4. **Estructura de la representación en función de la conceptualización**. Las flechas 1 y 2 indican los tratamientos propios de cada registro; la 3 y 4 las conversiones de un registro a otro; la flecha C indica la comprensión integradora de una representación y presupone una coordinación de dos registros; las flechas punteadas indican la diferencia entre representante y representado.

A pesar del uso de los diferentes registros (algebraico y gráfico) utilizados en la enseñanza sobre el concepto de función lineal, se reconoce que no se da de manera natural la coordinación entre esos dos registros, el alumno no distingue el mismo objeto entre sus distintas representaciones (Duval, 1988) y esta deficiencia resulta del "encasillamiento de los registros de representación", esto significa que se trabaja con un registro y otro pero sin establecerse conversiones entre ellos. Se reconoce que la conversión favorece la coordinación entre registros, pero esa ausencia de coordinación no impide toda comprensión, al hacer uso de un solo registro se limita la transferencia de los conocimientos adquiridos a otros contextos donde deberían ser utilizadas por lo que esta comprensión monoregistro no da posibilidades de contrastar los resultados obtenidos con otro registro, como lo señala Duval "... esta comprensión monoregistro conduce a un trabajo a ciegas"...

Este fenómeno de encasillamiento que se da en los registros de representación, puede ser explicado en términos de la *incongruencia* entre los registros debido a la gran diferencia semiótica que puede existir entre ellos. Cuando existe congruencia entre la representación del registro de partida con la de llegada la conversión se muestra casi inmediata, se parece casi a una codificación

Por lo que si la conceptualización implica una coordinación entre registros, será necesario que la enseñanza no se centre sólo en la automatización de ciertos tratamientos o la comprensión de ciertas nociones. Además se debe reconocer que la coordinación no se da por si sola debido a la falta de reglas de conversión que puedan existir entre los registros, esto se observa desde el hecho de cómo en la enseñanza, se introducen distintos registros y no necesariamente se da esa coordinación.

Por lo que el profesor deberá centrarse en un aprendizaje que considere la relación estrecha que existe entre la noesis y la semiosis para colocar a los alumnos en condiciones que permitan una toma de conciencia más global entre los diferentes registros, y esto se puede dar a partir de presentarle tareas específicas.

3.3.5 Repercusiones de la teoría

Las propuestas didácticas que se han diseñado en los últimos años alrededor del aprendizaje de las funciones han enfatizado la coordinación entre distintos registros de representación, por ejemplo el trabajo realizado por Monzoy (1997) titulado " el estudio de la función polinomial en la interacción de tres registros", haciendo uso del software educativo FUNPOLRR. En la misma dirección Hitt (1997) desarrolla un software educativo llamado "Botellas" junto con un libro de texto titulado "Funciones en Contexto", donde promueve la articulación entre los registros gráfico y algebraicos.

Capítulo 4

METODOLOGÍA Y DISEÑO

4.1 Introducción

Una vez revisado los fundamentos teóricos en los que se basa el presente trabajo y teniendo en cuenta el tipo de problema que se aborda, relacionado con los procesos de enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos, resulta factible el hacer uso de los métodos cualitativos que se utilizan preferentemente en aquellos estudios centrados en el análisis de formación de conceptos y que en general, tratan de indagar sobre como se desarrolla un proceso cognitivo, (Johnson, 1986). La investigación que se aborda en el presente trabajo esta relacionada con la identificación de dificultades de aprendizaje del concepto de la función lineal y la identificación de ciertas tareas que pudieran ayudar a los estudiantes a superar esas dificultades, por lo que este tipo de investigaciones son de corte cualitativo y se consideró pertinente entre los diferentes tipos de métodos cualitativos el "estudio de casos" para tener una descripción más detallada de los objetivos de la investigación.

cuestionario.

4.3 Descripción de la muestra

El cuestionario fue aplicado a nueve estudiantes universitarios del área económico-administrativo, del segundo semestre de su carrera en el Instituto Tecnológico de Sonora, (semestre agosto-diciembre de 2001). Los nueve en mayor o menor grado habían mostrado un bajo rendimiento al resolver problemas de oferta y demanda de mercado, utilizando como modelo la función lineal.

Los estudiantes que participaron en la implementación de la secuencia de actividades didácticas estuvo formado por otro grupo de ocho estudiantes universitarios del semestre agosto-diciembre de 2002, quienes también habían mostrado tener serias dificultades al enfrentarse con la resolución de problemas de oferta y demanda de mercado.

Se consideró que la cantidad de estudiantes que participaron en ambas fases era suficiente para poder hacer una mejor descripción y análisis de sus respuestas y sobre todo por el tipo de problema que se abordaba relacionado con los procesos de enseñaza y aprendizaje de la función lineal. Ambos grupos presentaban características muy similares: pertenecían a la misma institución, estudiantes de la misma área, cursaban la misma materia solo que en semestres distintos y mostraban deficiencias para resolver problemas de ese tipo.

4.4 Instrumentos y su diseño

4.4.1 El cuestionario

El instrumento utilizado en la Fase 1 fue un cuestionario escrito formado por cuatro preguntas, cuyo fin era identificar si las dificultades de aprendizaje de la función lineal tenían que ver con las actividades de conversión al cambiar de un registro a otro: tabular, gráfico y algebraico.

Las tareas diseñadas en el cuestionario fueron las siguientes:

I. Identificación de la actividad cognitiva de conversión entre los registros de representación algebraico al grafico: Relacionado con la noción de pendiente.

II. Identificación de la actividad cognitiva de formación en el registro tabular: Identificar la linealidad cuando en una tabla aparecen los valores que toma la variable "x" contra los valores de "y".

III. Identificación de la actividad cognitiva de conversión entre los registros de representación gráfica al algebraico: Se proporciona la gráfica de una función lineal y se pide la ecuación algebraica.

IV. Identificación de la actividad cognitiva de conversión entre los registros de representación algebraica al gráfico: Se presenta la ecuación de la recta y un conjunto de cuatro gráficas para que identifique.

A continuación se presenta y describe el cuestionario diseñado, ver Anexo I.

La primera pregunta tiene que ver con la noción de pendiente, en ella se pretende identificar las herramientas utilizadas por el estudiante para relacionar el signo algebraico de la pendiente con la gráfica de la recta obtenida a partir de dos puntos dados.

Pregunta I.

a. Dibuja la recta que pasa por los puntos (2,3) y (4,5).
b. ¿Qué signo tiene la pendiente de esta recta?______
c. ¿Por qué?____________________________________
d. ¿Qué entiendes por pendiente de una recta?____________

En la segunda se trata de poner a prueba la habilidad del estudiante para identificar la linealidad en una tabla en la que aparecen los valores que toma la variable x contra los valores de y; esta pregunta no requiere de un cambio de registro y está relacionada más bien con la actividad cognitiva de formación en el registro tabular.

Pregunta II.

Analice la siguiente tabla de valores y determine cómo se relacionan las variables x *e* y.

x	y
0	9
2	8
4	7
6	6
8	5
10	4

Tabla 1

x	y
-4	16
-2	4
0	0
4	16
7	49
13	169

Tabla 2

x	y
-2	2
-1	1
0	0
2	2
3	3
4	4

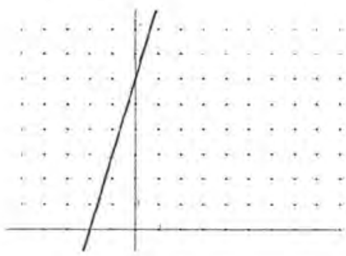
Tabla 3

a. Tabla 1. ¿Representan esos valores una relación lineal?______¿Por qué?____________
b. Tabla 2. ¿Representa esos valores una relación lineal?______¿Por qué?_____________
c. Tabla 3. ¿Representa esos valores una relación lineal?______¿Por qué?____________

La tercera se relaciona con la actividad de conversión del registro gráfico al algebraico de una función lineal, en ella se proporciona la gráfica de una función lineal que contiene los datos suficientes para que la expresión algebraica pueda ser determinada.

Pregunta III

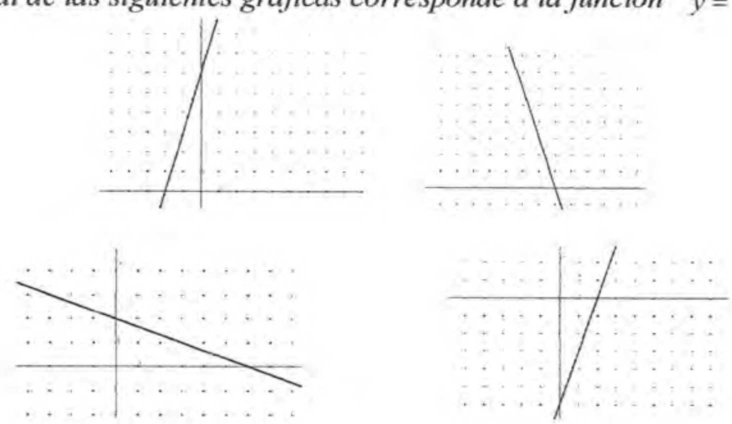
Determine la expresión algebraica cuya gráfica es la siguiente:



En la cuarta pregunta se presentan la función $y=-3x+6$ y un conjunto de cuatro gráficas que corresponden a funciones lineales, y se le pide al estudiante que identifique cuál de las gráficas se corresponde con la expresión algebraica dada; en esta última pregunta se trata de ver si el estudiante puede identificar directamente las variables visuales con los parámetros de la expresión algebraica, y si no es así, de qué herramientas se vale para convertir la expresión algebraica en la gráfica.

Pregunta IV.

Identifique cual de las siguientes gráficas corresponde a la función $y=-3x+6$



Si considera que ninguna de las gráficas anteriores corresponde a $y=-3x+6$, *trace la gráfica correcta.*

4.4.2 Las Prácticas: Secuencia de actividades

A partir de las dificultades encontradas y relacionadas con la actividad de conversión entre registros, se realizó el diseño de una secuencia de actividades, cuyo propósito fue profundizar en algunos aspectos de la función lineal y remediar en lo posible algunas de las deficiencias mostradas por los estudiantes en el cuestionario. En la secuencia de actividades también se consideraron actividades que tuvieran que ver con el sistema cartesiano.

La secuencia de actividades propuestas fueron:

I. Familiarizarse con el sistema coordenado rectangular, promoviendo la actividad de "codificación" del registro gráfico al algebraico y viceversa.

II. Actividad de la línea recta que promueve la actividad de conversión del registro gráfico al algebraico y viceversa.

III. Actividad de la línea recta que promueve la actividad de conversión del registro tabular al algebraico.

La recogida de datos en esta segunda fase de la experimentación se realizó a través de diez Prácticas etiquetadas de la 1-10 (ver Anexo II), las cuales se elaboraron en hojas de trabajo, el objetivo de esta segunda fase fue hacer una exploración de las actividades, para lo cual tuvieron que se aplicadas a los estudiantes para luego ser analizadas a través de las respuestas que ellos debían dar en cada una de las tareas asignadas. Siete de las prácticas fueron diseñadas con apoyo de software y tres solo utilizaron las hojas de trabajo. El software utilizado en el diseño fue el de geometría interactiva *Cabri Géomètra II*.

A continuación se pasa a describir cada una de las prácticas que forman la secuencia de actividades didácticas. Las primeras cuatro prácticas se refieren al sistema cartesiano y las seis restantes a conceptos relacionados con la función lineal.

4.4.2.1 Sistema cartesiano

Las prácticas diseñadas para el sistema cartesiano, tienen como propósito que el estudiante se familiarice con él, de tal manera que asocie la dirección del movimiento de un punto con la variación en sus coordenadas. Esta actividad pretende promover la "codificación" del registro gráfico al algebraico y viceversa. Las primeras cuatro prácticas corresponden a este tema, ver Anexo II.

Práctica # 1.

El propósito de esta práctica es familiarizar al estudiante con el sistema coordenado rectangular, a través de la representación dinámica de las coordenadas de un punto P y su representación gráfica. Esta actividad pretende promover además la actividad de codificación del registro gráfico al algebraico y viceversa.

En la práctica el estudiante encontrará las coordenadas de un punto a partir de la posición que tiene este en el sistema cartesiano. La práctica se realizará con apoyo del archivo PUNTOS.fig., el cual muestra en pantalla las coordenadas de un punto P y su posición en el sistema rectangular, en pantalla aparecen las coordenadas iniciales (5, -3), las que podrán hacerse variar para modificar la posición de P. No es posible en el archivo manipular P directamente. La hoja de trabajo muestra ocho figuras cada una con una posición distinta de P y solicita al estudiante que manipule las coordenadas de P hasta que el punto P de la pantalla coincida aproximadamente con el punto P en la hoja de trabajo. El archivo PUNTOS.fig., así como el resto de los archivos utilizados en las prácticas ha sido elaborado con Cabri-Gèométre II.

Práctica # 2.

El propósito de la segunda práctica es familiarizar al estudiante con la representación dinámica de las coordenadas de un punto P cuando describe una trayectoria sobre los ejes coordenados o bien cuando se mueve sobre rectas paralelas a ellos. Cuando el estudiante manipula la representación numérica para describir la trayectoria solicitada se espera que encuentre el patrón numérico que siguen las coordenadas del punto. En esta práctica se promueve la conversión del registro gráfico al numérico y viceversa.

Se utiliza también aquí el archivo PUNTOS.fig. Se presentan en la hoja de trabajo cuatro trayectorias que el estudiante debe describir cambiando las coordenadas del punto P, cada una de estas trayectorias tienen la característica de ser paralelas a los ejes coordenados. Además toman cinco puntos sobre uno de los segmentos de la trayectoria y se registran en una tabla las coordenadas de estos punto Se espera que pueda encontrar el patrón numérico presente en estos puntos y lo generalice a todo el segmento.

Práctica # 3.

Se pretende aquí analizar el comportamiento de las coordenadas de un punto al desplazarlo sobre una trayectoria poligonal. En esta práctica se espera que el estudiante asocie la dirección del movimiento del punto P con el cambio en sus coordenadas e identifique el comportamiento de las coordenadas en una trayectoria poligonal, que de acuerdo a la dirección del movimiento una de las coordenadas permanecerá fija y la otra variará. Con esta actividad se intenta promover la actividad de conversión del registro numérico al gráfico y viceversa.

La práctica tiene como apoyo el archivo TRAYECTORIAS1.fig, en él aparece dibujada una trayectoria y un punto P sobre ella, el punto P muestra sus coordenadas en pantalla. El software permite desplazar el punto por toda la trayectoria, cuya forma es escalonada, compuesta por segmentos horizontales y verticales. El estudiante deberá ir reconociendo qué coordenada del punto cambia y cual se mantiene constante, cuando P recorre cada segmento de la trayectoria. Se le pide que escriba sobre la hoja de trabajo una descripción del conjunto de puntos que conforman el segmento.

Práctica # 4.

La intención de esta práctica es de que el estudiante reproduzca trayectorias sobre el sistema cartesiano, a través de manipular solo las coordenadas del punto P. Al llegar a esta actividad se espera que pueda reproducir trayectorias, en virtud de que ha realizado actividades referidas al tema. El estudiante dibujará la trayectoria sólo a través de manipular las coordenadas del punto, esta práctica pudiera ser un indicador del dominio que puede tener él sobre el sistema cartesiano. La actividad cognitiva que se intenta promover es la de conversión del registro numérico al gráfico y viceversa.

En esta práctica han sido dibujadas dos trayectorias en la hoja de trabajo y se han señalado dos puntos A y B sobre cada una de ellas; estas trayectorias deberán ser reproducidas por el estudiante en pantalla con ayuda del archivo en Cabri PUNTOS.fig. y con la activación de la herramienta denominada "Traza", cuya función es ir dejando huella de la trayectoria recorrida por el punto P cuando este se desplaza. El primer paso del estudiante al empezar con la actividad será ubicar el punto P en la posición del punto A señalado en la hoja, luego accionará la herramienta "Traza" y empezará a manipular las coordenadas del punto para ir formando la trayectoria mostrada en la Figura 1 de la hoja, al terminar se le solicita una segunda trayectoria. En ambas casos las trayectorias son polígonos formados por segmentos verticales y horizontales. Las dos actividades incluidas en esta práctica son similares y solo se distinguen una de la otra, por la forma de la trayectoria.

4.4.2.2 La función lineal: Conversión gráfico-algebraica

Las siguientes cuatro prácticas se diseñaron para el estudio de la función lineal en los registros gráfico-algebraico. Las prácticas numeradas de la 5-7 (ver anexo II) se realizan con apoyo del software Cabrì-Géomètre II y la Práctica # 8 solo se apoya en la hoja de trabajo. Estas prácticas pretenden promover la conversión gráfico-algebraica a través de la manipulación de los parámetros de la expresión algebraica $f(x)=ax+b$ y los efectos producidos en la recta.

Se había mencionado que en el diseño de algunas actividades se apoyaron con la computadora, que para este caso es el software interactivo Cabri-Géomètre II. Las ventajas que se tienen con este software por una parte, es de que se puede construir una recta y relacionarla con su ecuación a través de su programa interactivo, se pueden establecer relaciones más rápidas y eficientes entre ambas representaciones. Con Cabri es posible realizar modificaciones en pantalla y observar los efectos inmediatamente, lo que abre muchas posibilidades para la propia actividad del estudiante, Fritzler (1997). Es necesario puntualizar que los trabajos de Duval se refieren a representaciones estáticas y la naturaleza de estas es diferente a las representaciones dinámicas

Práctica # 5

Esta práctica consiste en una serie de actividades cuyo propósito es promover la conversión del registro algebraico al gráfico. En particular, se pretende centrar la atención del estudiante en la relación que guarda el parámetro *b* de la expresión $f(x)=ax+b$ con el punto de intersección de la recta con el eje Y.

La práctica se apoya en una hoja de trabajo y un archivo en Cabrí (RECTAS 1.fig). El archivo muestra en pantalla la expresión $f(x)=ax+b$ seguida del valor de cada parámetro y la gráfica correspondiente a los parámetros asignados. Los parámetros podrán ser manipulados directamente para cambiar su valor, por medio del "Editor Numérico" que contiene el software. Es importante puntualizar que la gráfica representada no podrá ser manipulada directamente sino como consecuencia de modificar sus parámetros.

Se diseñaron nueve actividades en esta práctica, que van desde la 5.1 hasta la 5.9. La actividad 5.1 tiene como propósito verificar si el estudiante comprende la forma de funcionamiento del archivo, esto es, si relaciona los parámetros con la expresión algebraica que resulta y su respectiva gráfica. Las actividades propuestas desde la 5.2 hasta la 5.4 están pensadas para que el estudiante diferencie el efecto que produce en la gráfica la manipulación de cada parámetro. Enseguida se proponen las actividades 5.5 y 5.6, ambas con la misma intención, esto es, que el estudiante identifique la relación que tiene el parámetro *b* con el punto de intersección de la recta y el eje Y. El diseño propone fijar un valor para el parámetro *a* y cinco valores distintos para *b,* por medio de la gráfica que muestra cada parámetro el estudiante tratará de identificar los puntos donde la recta interseca a ambos ejes y determinará con qué puntos de intersección está relacionado el parámetro *b*. La actividad 5.7 se diseñó para realizarse sin apoyo del software, solo a lápiz y papel, se proponen en una tabla distintas expresiones algebraicas lineales de las cuales el estudiante tratará de determinar el punto de intersección con el eje Y para cada una de ellas. Esta actividad es el caso contrario a las dos anteriores, trata de promover la conversión del registro algebraico al gráfico. La siguiente actividad 5.8 solicita al estudiante cinco expresiones algebraicas distintas que pasen por el mismo punto que interseca al eje Y (0,5), tratando de promover la conversión del registro gráfico al algebraico, pero sin hacer uso del software. En la última actividad 5.9 se presenta la gráfica de varias funciones lineales para que el estudiante identifique en cada una de ellas el valor que tendría el parámetro *b* en la expresión algebraica, aquí tampoco se usa el software.

Práctica # 6

La práctica 6 pretende promover la conversión del registro algebraico al gráfico de la función lineal, centrando las actividades en el parámetro *a* de la representación $f(x) = ax + b$. Se pretende que el estudiante realice la discriminación de uno de los parámetros de la expresión algebraica contra los valores de las variables visuales del registro gráfico.

Para llevar a cabo la práctica se cuenta con el apoyo del archivo RECTAS 2.fig., construido en Cabrì. El archivo muestra en pantalla dos representaciones de la función lineal $f(x) = ax + b$, por un lado la representación algebraica que incluye el valor de los parámetros y por otro la representación gráfica, que se distingue por una recta gruesa en pantalla.

Los valores numéricos de los parámetros constituyen la única parte manipulable del archivo y pueden hacerse variar directamente con el "Editor numérico" para observar el efecto de esta variación en la representación gráfica. Para facilitar la observación de los cambios en la representación gráfica esta incluye algunos elementos de referencia: una recta paralela al eje X que pasa por el punto (0, *b*), el ángulo formado por $f(x) = ax + b$ y la recta antes mencionada y un segmento punteado sobre la recta $f(x) = ax + b$.

La actividad 6.1 intenta centrar la atención del estudiante en el parámetro *b* y el ángulo marcado, para llevarlo a cabo el estudiante tendrá que hacer variar los valores de *b* sin mover el parámetro a.

Las siguientes actividades de esta práctica se centran en el análisis del parámetro *a* y la relación que guarda con el ángulo marcado. En la actividad 6.2 el estudiante tendrá que manipular los valores de a (dejando fijo el valor de *b*) para observar los movimientos que muestra la recta, y luego dar una descripción del comportamiento de la representación gráfica.

La actividad 6.3 es muy breve, se trata solamente de analizar un caso particular problemático, a saber aquel donde el valor de la a, y establecer el efecto que produce sobre el ángulo este valor particular de la a. La actividad 6.4 tiene como punto de partida la situación a la que se ha llegado en la actividad 6.3. Se trata de hacer variar el parámetro a en forma creciente a partir de cero, con la intención de que se establezcan los cambios que se producen en el ángulo, la dirección en la que gira la recta y el intervalo de variación del ángulo, cuando el parámetro varía entre cero e infinito.

La actividad 6.5 es muy similar a la 6.4 al igual que esta parte de la situación generada en 6.3 pero ahora se trata de analizar los cambios que produce en la recta la variación del parámetro *a* entre menos infinito y cero.

Práctica # 7

Con esta práctica se intente promover la articulación gráfico-algebraico de la noción de pendiente de la función lineal.

La práctica se apoya en el archivo Cabri RECTAS 3.fig., de que en esencia es el mismo que el de RECTAS 2.fig., excepto porque el archivo usado en esta práctica tiene un elemento de referencia adicional, a saber la gráfica de la función $f(x) = ax + b$. A partir de la manipulación de los valores de a en la expresión $f(x) = ax + b$ el estudiante tendré que estimar en la gráfica el comportamiento del ángulo de inclinación de la recta y a partir de diferentes gráficas él tendrá que estimar el valor de a.

En la actividad 7.1 se intenta que el estudiante pueda estimar la medida del ángulo de inclinación de una recta en su representación gráfica. Se pretende de esta manera verificar cual es el significado gráfico que tienen los estudiantes sobre la medida de un ángulo.

En esta actividad 7.1 aparece una tabla de dos columnas, la primera contiene una serie de valores para el parámetro a y la segunda aparece en blanco para que el estudiante registre los valores correspondientes del ángulo de inclinación de la recta. Para registrar estos valores el estudiante tendrá que sustituir en el archivo los valores de a indicados en la primera columna y basado en la gráfica estimará el valor del ángulo en cada caso.

Para llevar a cabo la actividad 7.2 se esperaría que la actividad 7.1 pudiera servir como preparación. La intención de esta actividad es que el estudiante pueda establecer el ángulo de inclinación de la recta a partir de ciertos intervalos de variación del parámetro dado de antemano. En esta actividad aparece una tabla con dos columnas, en la primera se muestran cuatro intervalos distintos de variación del parámetro a y en la segunda las casillas aparecen en blanco, se espera que el estudiante las llene con los rangos de variación correspondientes. Se esperaría que la actividad 7.1 sirva de preparación para esta segunda actividad.

Para llevar a cabo la actividad el estudiante hará variar el parámetro *a* con valores pertenecientes al intervalo indicado y deberá observar en la gráfica de la recta la variación del ángulo de inclinación para establecer el intervalo de variación del ángulo a partir de observarlo en la gráfica.

La actividad 7.3 no requiere el uso de la computadora. El propósito de la actividad es promover la actividad de conversión gráfico-algebraica. Esta actividad es similar a la actividad 7.1 donde se presentan distintos valores del ángulo de la recta pero en forma gráfica y se solicita un valor estimado del parámetro a.

En la actividad se presentan seis gráficas con una recta cada una, pero todas incluyen las mismas referencias ya mostradas en archivo RECTAS 3.fig., salvo que el ángulo de inclinación marcado por la recta no aparece.

Observando las gráficas el estudiante deberá estimar el valor del parámetro a tomando como base las referencias señalas.

Práctica # 8

La práctica # 8 es una evaluación sobre las habilidades de articulación gráfico-algebraica, desarrollados hasta este momento. Consta de seis actividades que el estudiante tendré que realizar a lápiz y papel.

La actividad 8.1 es de opción múltiple y tiene como propósito verificar si el estudiante ha reunido elementos suficientes para identificar la representación gráfica de una función lineal a partir de una representación algebraica. En el cuestionario se había observado la tendencia a asociar los parámetros a y *b* con los puntos de intersección de la recta con los ejes. Esta tendencia se tomó en cuenta para diseñar los distractores de este ejercicio.

La actividad 8.2 tiene como propósito verificar si el estudiante puede bosquejar un conjunto dado de funciones en las que el parámetro a es el mismo. En todas las funciones el valor de *a* es uno se ha graficado la función $f(x) = x$ en el plano para que el estudiante tome esta función como referencia para realizar la tarea.

La actividad 8.3 tiene el mismo propósito que el anterior, bosquejar un conjunto de funciones que difieren entre si solamente por el valor de a. Todas las funciones tienen el valor de *b* = *0* y de nueva cuenta se proporciona la gráfica de $f(x) = x$ para que el estudiante pueda tomarla como referencia.

La actividad 8.4 está muy ligada al dos, de hecho se ha diseñado a partir de este, intercambiando el registro de partida y el de llegada; se pretende entonces promover la conversión gráfico-algebraica, para el caso particular en el cual la a permanece constante. Dadas tres rectas paralelas en un plano el estudiante tiene que escribir sus respectivas expresiones algebraicas.

En la actividad 8.5 se presentan al estudiante tres rectas que concurren en un punto sobre el eje Y, para que escriba la expresión algebraica de cada una de ellas. Esta actividad es similar al anterior solo que ahora se ha dejado constante el valor de b y se ha variado el valor de a.

Por último en la actividad 8.6 se da la gráfica de dos rectas y el estudiante tendrá que encontrar las expresiones algebraicas, sin más referencia que las intersecciones de estas rectas con los ejes.

4.4.2.3 La función lineal: Conversión tabular al algebraico

Las siguientes dos prácticas tienen como propósito promover la conversión del registro tabular al algebraico.

Práctica # 9

Esta práctica es de tipo preparatoria para iniciar al estudiante en la lectura de tablas numéricas y reconocer ciertos criterios para identificar su linealidad. En la Práctica se intenta promover también la actividad de conversión del registro tabular al algebraico, a partir de que el estudiante haya identificado la linealidad en la tabla y establezca su representación algebraica.

La actividad 9.1 muestra una tabla que representa una relación lineal y tiene como propósito que el estudiante identifique cierto patrón de comportamiento en los valores, calcule los incrementos consecutivos de *x* e *y* a partir de allí deducir un primer criterio de linealidad.

En la segunda actividad 9.2 se muestra una tabla que representa una relación lineal y tiene como propósito ilustrar el hecho de que el criterio dado antes no pueda aplicarse si los incrementos en *x* son distintos. Se pretende aquí motivar la formulación de un criterio más general (que se ha llamado criterio II) y que está formulado en términos de la igualdad entre cocientes de incrementos. El estudiante tendrá que calcular los incrementos en x y los incrementos en y para llegar a la conclusión de que la linealidad de la relación en este caso depende del comportamiento de los cocientes de incrementos.

En la actividad 9.3 se retoma la tabla de la actividad anterior para aplicarle el nuevo criterio y llegar a la conclusión de que se trata de una función lineal.

En la actividad 9.4 se proporciona una representación tabular y se pide al estudiante decidir sobre la linealidad de la relación representada en ella. Se pretende aquí que el estudiante decida cuál es el tipo de representaciones tabulares en las que el criterio II se vuelve indispensable.

En la actividad 9.5 se pretende discutir con el estudiante el papel que juegan en la representación algebraica los cocientes de incrementos calculados y cómo se pueden identificar los parámetros de la expresión algebraica a partir de la representación tabular. Se trabaja con las tablas proporcionadas en esta misma actividad para establecer en cada caso el valor de los parámetros a y b de la expresión $f(x)= ax+b$, pero no se pide llegar a esta expresión.

Por último en la actividad 9.6 se solicita al estudiante encontrar la expresión algebraica para cada una de las tablas incluidas en esta Práctica como una manera de evaluar las habilidades adquiridas para convertir representaciones tabulares en algebraicas.

Práctica # 10

Esta Práctica tiene como propósito ejercitar la identificación de una relación lineal en una tabla a partir de los criterios I y II señalados, y además promover la conversión tabular-algebraica.

En ella se presentan al estudiante ocho representaciones tabulares para que distinga las lineales de aquellas que no lo son. La actividad incluye dos tablas en las que el incremento en las x no es constante a efecto de que el estudiante pueda poner a prueba el criterio II. E la segunda actividad se trabaja con las tablas proporcionadas de la primera actividad para que establezca en cada caso la el valor de cada parámetro de la expresión algebraica $f(x)= ax+b$ y llegue así a establecer la expresión algebraica de la relación tabular.

Capítulo 5

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

5.1 Introducción

En el presente Capítulo se reportan y se analizan las dificultades encontradas en los estudiantes relacionadas con la función lineal, que se obtuvieron a partir del cuestionario, presentando un resumen de los resultados arrojados pregunta por pregunta y en la cual se incluyen algunas observaciones. Por otra parte se presenta también un reporte sobre los resultados obtenidos en cada una de las actividades, analizando hasta que punto las dificultades arrojadas por el cuestionario pudieron superarse , incluyendo además algunas observaciones que pudieran servir para futuras investigaciones.

5.2 Resultados del cuestionario

Pregunta I: Noción de pendiente.

Todos los estudiantes trazan la recta que pasa por los puntos señalados y le asignan a la pendiente el signo positivo, las justificaciones ofrecidas son del tipo: "porque la recta se encuentra en el primer cuadrante", "porque al hacer el cálculo de la pendiente me da positivo" o bien "porque corta al eje Y en un positivo". Ninguno de los estudiantes asocia el signo de la pendiente con la inclinación de la recta. El siguiente cuadro muestra las respuestas a esta pregunta.

Inciso	correctas	incorrectas	abstenciones
a.	9	*0*	*ninguno*
b	9	*0*	*ninguno*
c.	0	9	*ninguno*
d.	0	1	8

Pregunta I

A pesar de que todos los estudiantes han podido calcular la pendiente solicitada, es evidente que ninguno de ellos tiene un significado claro de esta noción, pareciera que ellos asocian la noción de pendiente con la aplicación de la fórmula para calcularla. En estas condiciones es difícil que puedan convertir las representación gráfica de una función lineal en algebraica o viceversa, en tanto que el parámetro a en la expresión $y = ax + b$ aparece completamente desconectado de la inclinación de la recta. La pregunta del inciso *d* no fue contestada, por lo que se concluye que para el estudiante no tiene sentido la pregunta después de haber calculado él la pendiente.

Pregunta II. La linealidad en una representación tabular.

En las respuestas a estas preguntas puede observarse que todos los estudiantes recurren al registro gráfico sin solicitarlo la pregunta, por lo que grafican una por una las parejas de números mostradas por cada tabla; y a partir del dibujo obtenido determinan si la relación entre las variables es lineal o no. Cuando el trazo obtenido es una recta concluyen que la relación es lineal y en caso contrario que no lo es. Enseguida se muestran las respuestas dadas por los estudiantes para cada una de las tablas.

Inciso	correctas	incorrectas	Grafica	abstenciones
a.	9	*0*	*9*	*ninguno*
b	9	*0*	*9*	*ninguno*
c.	8	1	*9*	*ninguno*

Pregunta II

Esta estrategia de traducir la tabla punto por punto al registro gráfico, conduce a errores, sobre todo en los casos en los que la tabla no representa una función lineal. Uno de los estudiantes, por ejemplo, después de graficar la Tabla 3 llega a la conclusión de que la gráfica corresponde a una parábola. Este caso es interesante porque ilustra muy bien el hecho de que la atención del estudiante durante la tarea, se ha centrado en la "forma" que van adquiriendo los puntos en el plano y no en la naturaleza de la relación entre las columnas. A pesar de que en las Tablas 2 y 3 las relaciones entre las columnas guardan patrones esencialmente distintos, este estudiante concluye que ambas pueden representarse gráficamente mediante una parábola. La ausencia del registro algebraico, que hubiera podido evidenciar esta inconsistencia, es notoria.

La utilización de una representación algebraica se observó apenas en un estudiante, que la estableció correctamente para la Tabla 2, una vez que percibió que los puntos no parecían configurar una recta.

Pregunta III. Determinación de la ecuación de la recta cuando se tiene su gráfica. Al respecto de este problema, las respuestas ofrecidas por los nueve estudiantes pueden clasificarse como sigue:

- Cinco de ellos han partido de que la gráfica corresponde a la expresión algebraica $y = ax + b$ e identifican correctamente el parámetro *b* con la ordenada al origen, llegando a la conclusión de que *b* = 6, Pero cuando tratan de extraer de la gráfica el valor de la pendiente, dos de ellos identifican la pendiente con la intersección de la recta con el eje X, llegando a la conclusión de que $a = -2$ y por lo tanto deducen que la ecuación de la recta es $y = -2x + 6$. Los tres restantes recurren a los puntos de intersección de la recta con los ejes coordenados para calcular la pendiente y dos de ellos lo hacen correctamente, pero el tercero obtiene como puntos de intersección (-2, 0) y (6, 0) y sus cálculos obviamente son incorrectos.

- Cuatro estudiantes intentaron utilizar la fórmula $y - y_1 = m(x - x_1)$ para determinar la ecuación de la recta, pero solo uno de ellos logró calcular la ecuación correctamente. Los tres restantes tuvieron problemas para obtener de la gráfica las coordenadas de los puntos que se requerían o bien se extraviaron en la manipulación algebraica.

En el siguiente cuadro se resumen las respuestas obtenidas por los alumnos

Herramientas empleadas	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
Identifican dos puntos: (x, y)	5	4
$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$	5	4
$y = ax + b$	2	3
$y - y_1 = m(x - x_1)$	1	3

Pregunta III

Pregunta IV. Conversión del registro algebraico al gráfico

Aunque el propósito de la pregunta era que el estudiante identificara la gráfica de la recta $y = -3x + 6$ a partir de sus parámetros, sus respuestas muestran que el camino tomado ha sido el de la graficación punto por punto. Solamente uno de los nueve estudiantes identificó las variables visuales con los parámetros de la expresión $y = -3x + 6$ para llegar a la respuesta correcta. Los ocho restantes, aunque también obtuvieron una respuesta correcta, graficaron punto por punto la expresión $y = -3x + 6$ y localizaron la respuesta correcta comparando la gráfica obtenida con las opciones propuestas.

5.3 Conclusiones del cuestionario

Nuestro estudio revela que cuando se trata de la función lineal, la noción de pendiente representa un serio obstáculo para la articulación entre registros. Esta dificultad se revela con mayor fuerza en cierto tipo de conversiones, por ejemplo cuando el registro de partida es el gráfico.

Los errores registrados no solo revelan un descuido notorio de las actividades de conversión por parte de la enseñanza, sino además una confianza excesiva de los estudiantes en los procedimientos que han logrado mecanizar y de los que no manifiestan tener una significación clara.

En el problema IV del cuestionario por ejemplo donde se pedía seleccionar la gráfica que correspondía a la función $y=-3x+6$ los estudiantes han eludido el análisis de las gráficas presentadas como opciones y han graficado la función por separado para seleccionar después la respuesta correcta, este tipo de respuestas son interesantes, porque revelan que los estudiantes han encontrado en la graficación punto por punto de la función lineal, una manera de llegar a la respuesta correcta omitiendo por completo las significaciones gráficas de los parámetros presentes en la expresión algebraica.

A pesar del éxito aparente logrado por los estudiantes, el registro tabular utilizado como registro de partida ha resultado desconcertante. Las causas de este desconcierto parecieran asociadas con la utilización de la tabulación, solamente como una herramienta intermedia que permite localizar puntos en un plano, a partir de una representación algebraica y no como una representación por sí misma.

Puede decirse en lo general que los estudiantes, no han mostrado una aprehensión conceptual del objeto bajo estudio, en el sentido de que no han mostrado una articulación espontánea y libre de contradicciones de sus diversas representaciones. En estas condiciones es muy difícil que los estudiantes puedan utilizar con éxito la función lineal como herramienta para resolver problemas de *oferta* y *demanda*.

5.4 Respuestas de las actividades

5.4.1 Respuestas a las actividades de familiarización con el sistema cartesiano.

El diseño de las Prácticas 1, 2, 3 y 4 tuvo dos intenciones: una era familiarizar al estudiante con el software que utilizaría en el transcurso de las demás actividades y la otra que mejorara su orientación sobre el sistema cartesiano, cubriendo en parte algunas de las deficiencias detectadas en el diagnóstico.

Los archivos en Cabri utilizados en esta primera parte han sido diseñados para que puedan conducir la acción del estudiante hacia una respuesta aceptable; esto significa que ante una respuesta incorrecta, el estudiante pueda percatarse rápidamente que no es la respuesta solicitada.

A continuación se presenta un reporte de las primeras cuatro prácticas que fueron aplicadas a ocho estudiantes en un tiempo aproximado de hora y media.

Reporte # 1
Como se recordará, en la Práctica #1, el estudiante utilizó el archivo PUNTOS.fig. mostrado en la figura siguiente

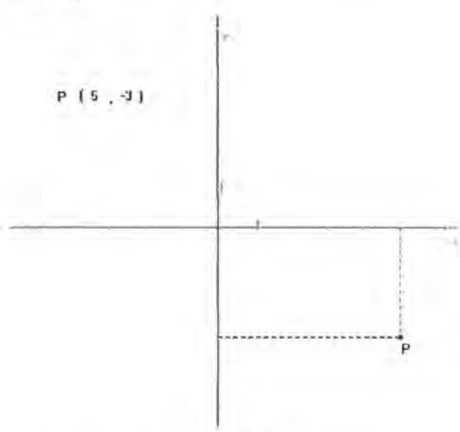


Figura 1

Y en su hoja de actividades se presentaron ocho gráficas como la siguiente

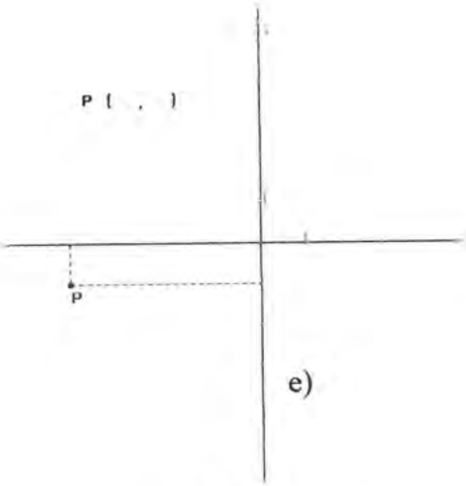


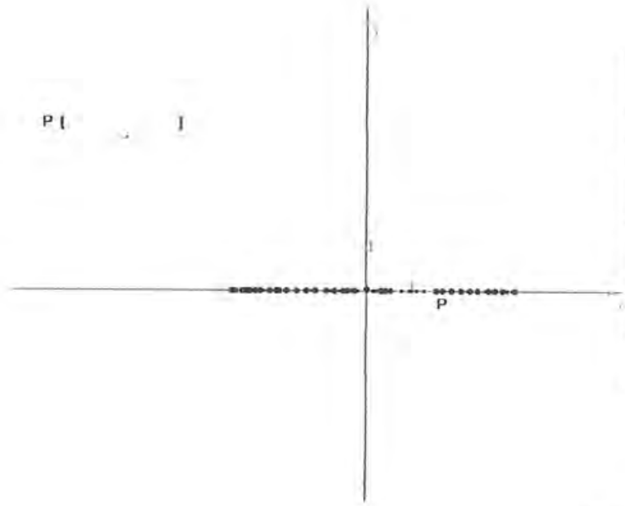
Figura 2

En cada una de ellas el estudiante escribiría las coordenadas del punto mostrado en la figura; para ello solamente ha tenido que hacer variar las coordenadas del punto P mostrado en pantalla para obtener una gráfica similar a la que tiene en su hoja de actividades. Esto explica porqué los estudiantes no han tenido dificultades para responder esta práctica de manera aceptable.

En el inciso e) por ejemplo, (ver Figura 2) se muestra un punto de coordenadas (-5,-1). En general estas coordenadas han sido bien identificadas por el estudiante en lo que se refiere a los signos de las coordenadas, pero han tenido algunos problemas para percibir las escalas de la figura. Dos estudiantes dieron como respuesta (-7,-1) lo cual ilustra que no han puesto atención en la escala de la gráfica. La ausencia de errores en los signos de las coordenadas es explicable, porque cualquier respuesta incorrecta dada en la pantalla mostrará un punto P ubicado en un cuadrante distinto al que muestra la hoja de actividades, lo cual permite al estudiante reconsiderar su respuesta.

Reporte # 2

La Práctica # 2 se apoya en el mismo archivo PUNTOS.fig. (ver Fifura 1). En la hoja de trabajo aparece como primera actividad el siguiente ejercicio



x	y	(x, y)

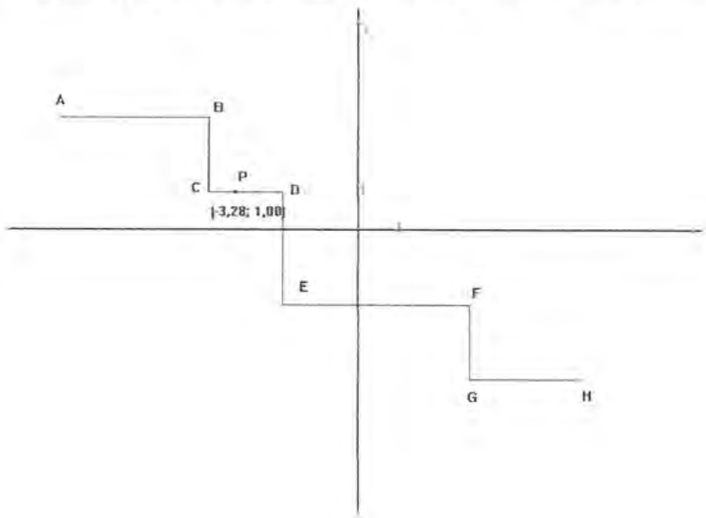
Figura 3

El estudiante debe manipular las coordenadas de P hasta observar que este se mueve en el plano sobre el eje X y anotar en la tabla cinco parejas de coordenadas del puntos P. Al igual que en la práctica anterior el estudiante manipulará las coordenadas de P hasta observar en pantalla una gráfica similar a la que tiene en su hoja de trabajo. El apoyo que da el archivo puede justificar porqué la mayoría de los estudiantes no tuvieron dificultad para responder adecuadamente sobre la tabla.

De los ocho estudiantes que realizaron las actividades dos de ellos mostraron serios errores en el registro de las coordenadas, uno de ellos en esta primer actividad y el otro en la actividad tres. Las respuestas del estudiante en la actividad uno fueron las siguientes: (4,-3), (2,-3), (1,-3), etc. , pareciera no tener idea de lo que hizo y que tal vez ni el software utilizó en esta primer actividad; en las siguientes actividades realizadas por él no se encontraron errores de este tipo. El segundo estudiante inicio muy bien la práctica solo que entre los datos anotados dos de esos fueron erróneos, la característica de esos puntos es que el valor de *x* es constante y es igual a tres para cualesquiera de esos puntos y el registra en dos de sus respuestas de las cinco que aparecen (-3,-3) y (-3,-3.5) estos dos último surgen cuando la coordenada *y* toma valores negativos, entonces supone él que cambia también el signo de la coordenada *x*, lo cual induce a pensar que no se apoyaron en el archivo porque hubiera saltado a la vista este tipo de error.

Reporte # 3

La Práctica # 3 tiene de apoyo el archivo TRAYECTORIAS 1 .fig. el cual muestra en pantalla la siguiente imagen. El estudiante deberá responder a siete preguntas que muestra la Práctica a partir de que manipule el punto P por cada segmento de la trayectoria escalonada. Un ejemplo del tipo de pregunta (pregunta 3. de la Práctica) que se plantean es la que se muestra en el lado derecho de la Figura 4.



3. Describe el conjunto de TODOS los puntos **P** que están entre los puntos C y D.

Figura 4

Las respuestas dadas por el estudiante describen de una manera aceptable de lo que sucede con las coordenadas del punto P cuando se desplaza por cada uno de los segmentos. De nuevo el archivo muestra en pantalla las variaciones que muestra cada una de las coordenadas del punto P cuando se desplaza por cada segmento, difícilmente pudieran no tenerse respuestas aceptables de los estudiantes en esta actividad. Los problemas que se evidencian se relacionan más bien con la manera de describir la variación que presenta una de las coordenadas. Por ejemplo, para hacer una descripción de los puntos P cuando se desplazan de acuerdo a la pregunta 3 (ver Figura 4) la descripción de un estudiante es la siguiente: "varía en el eje de las X de –4 hasta –2 y el eje de las Y se mantiene fijo en 1", un segundo estudiante responde " (- 4 → -2, 1) ". Estas respuestas reflejan que el estudiante ha percibido cuales son las trayectorias recorridas por el punto pero no tiene un lenguaje técnico para describirlas.

Reporte # 4

Por último la Práctica # 4 referida también al sistema cartesiano, implica que el estudiante reproduzca dos trayectorias dadas en la actividad. Para reproducir en pantalla las trayectorias se utilizó el archivo anterior PUNTOS fig. (ver Figura 1), en el cual el estudiante tuvo que activar un comando del software para iniciar con la actividad. Una de las trayectorias que tenía que reproducir era la siguiente

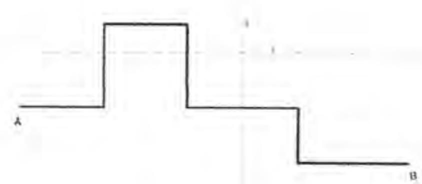


Figura 5

Las trayectorias reproducidas por ellos muestran características muy similares a las pedidas en la actividad con excepción de que si se quiere ser muy exigente en los tamaños de los segmentos que se muestran en la Figura 5 con respecto a los que ellos obtienen difieren un poco, esto posiblemente se debe a que trataban de dar un acercamiento sin fijarse en detalles muy particulares. Dos estudiantes dibujaron sus trayectorias con problemas de este tipo. Pero los demás estudiantes realizaron satisfactoriamente sus dibujos teniendo mayor precisión.

5.4.2 Respuestas a las actividades relacionadas con la función lineal: conversión gráfico-algebraica.

En el Capítulo 4 se hizo una descripción de las Prácticas # 5, 6, 7 referidas a la función lineal las cuales utilizan archivos diferentes en Cabri pero que en esencia son el mismo. A continuación se analizan las respuestas de los ocho estudiantes que participaron en las actividades. Estas tres prácticas fueron realizadas en un tiempo de hora y media en el centro de cómputo.

Reporte # 5.
Como se mencionó esta práctica se apoya en el archivo RECTAS 1.fig. el cual muestra en pantalla la siguiente imagen.

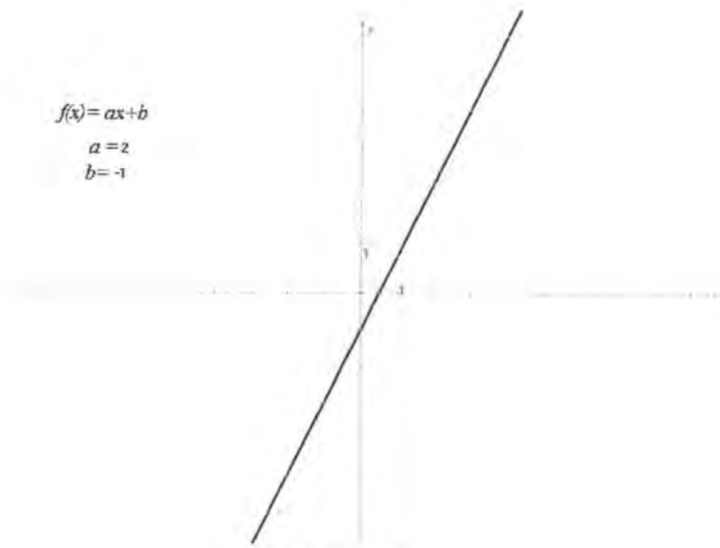


Figura 6

A pesar de que la primer actividad de la práctica tuviera como único fin en el archivo, que la recta de partida era f(x) = $ax + b$ y verificar que los valores de los parámetros se asociaban a distintas funciones, la mayoría de los estudiantes tuvieron serias dificultades para contestar la actividad, hubo necesidad de que el maestro interviniera para escribir la expresión algebraica solicitada. Lo que no garantiza que haya quedado claro para el estudiante con la ayuda del profesor.

En las actividades 5.2, 5.3, y 5.4 de esta práctica el estudiante debía identificar la diferencia entre los movimientos de la recta cuando se hacia variar el parámetro a y cuando se hacía variar b. La siguiente tabla muestra cuantos de ellos dieron una respuesta precisa de los dos tipos de movimientos:

	Descripción aceptable cuando mueve el parámetro a	Descripción aceptable Cuando mueve el parámetro b
SI	6	2
NO	2	6

Cuando decimos que el estudiante da una descripción aceptable del movimiento de la recta al mover el parámetro a de la expresión $f(x) = ax + b$ significa haber dado una respuesta de la siguiente forma: "Al mover a gira" y una respuesta no aceptable se refiere a una respuesta como la siguiente: "cuando movemos la recta a si es positiva se inclina hacia la derecha y negativa hacia la izquierda". Lo mismo sucede con respecto al parámetro b es aceptable cuando el estudiante responde: " se traslada paralelamente" y no aceptable como la siguiente: "al mover b la recta tiende a moverse de izquierda a derecha". Resulta interesante observar que el estudiante percibe los dos movimientos pero la manera de describirlos no coincide con lo que se espera que conteste, es decir él no percibe lo que uno cree que debería percibir.

Las observaciones tomadas de las actividades 5.5 y 5.6 de la Práctica muestran que la mitad de los estudiantes identifican la relación estrecha que guarda el parámetro b con la intersección de la recta y el eje Y. Cuando se pide al estudiante el punto de intersección entre la recta y el eje Y casi todos (a excepción de uno de ellos) se limitan a escribir la ordenada del punto en lugar de escribir el punto como una pareja ordenada. Una vez que el estudiante llenaba la tabla se preguntaba por la relación del parámetro b con alguna de las columnas que indicaban los puntos de intersección con los ejes, pero como los puntos no fueron escritos como parejas ordenadas, la posibilidad de buscar un patrón entre la columna de los valores de b y la columna de los puntos de intersección tuvo poco sentido. Algo importante de mencionar es que la pregunta fue confusa para el estudiante porque la mayoría preguntaba a que se refería.

Las respuestas obtenidas en la actividad 5.7 ponen en evidencia que los estudiantes han detectado la relación que existe entre los valores de b en la expresión $f(x) = ax + b$ y la altura a la que corta la recta al eje Y. La mayor parte de los estudiantes sin embargo insisten en caracterizar esa altura utilizando solamente la ordenada del punto de intersección. Aunque esta actividad está diseñada para contestar a lápiz y papel solamente, es importante resaltar que algunos estudiantes utilizaron el archivo RECTAS 1. fig. aprovechando que lo tenían abierto en pantalla. Las respuestas indicaron que los estudiantes han podido identificar el punto de intersección de la recta con el eje Y para las primeras cuatro expresiones cuando lo utilizan y cuando no lo hacen; pero aquellos que utilizaron el software no pudieron identificar el punto de intersección con el eje Y de la recta en la última expresión ($f(x) = ax + r$), esta dificultad puede explicarse fácilmente porque los parámetros a y r no son aceptados como tales en el software.

Seis de los estudiante han realizado con éxito la actividad 5.8, mientras que dos de ellos han ofrecido respuestas que no corresponden a las preguntas. Las respuestas correctas pudieran dar la impresión de que los estudiantes han asociado perfectamente las rectas que pasan por el punto (0,5) con funciones lineales que tienen las forma $f(x) = ax + 5$, pero la manera utilizada para llegar a estas expresiones hacen el balance menos optimista. De nueva cuenta y fuera de lo previsto los estudiantes utilizan el software para realizar esta actividad, alimentando el archivo con los datos a = 0 y b = 5 (tomados probablemente del punto (0,5) dado), esto les permitió obtener en pantalla la gráfica de $f(x) = 0x + 5$ para luego variar la a y obtener todas las expresiones pedidas.

La variación exclusiva del parámetro a pareciera una evidencia de que el punto de intersección con el eje Y depende exclusivamente del parámetro b, pero los valores iniciales utilizados para los parámetros hacen que esta conclusión no sea suficientemente clara.

En el reporte de la actividad 5.9 las respuestas observadas fueron correctas prácticamente en todos los casos, el único caso en el que puede verse una confusión, está relacionada con la interpretación del signo de b.

Reporte # 6.
Se reporta de la actividad 6.1 de esta práctica que en lo general los estudiantes perciben (siete de ocho estudiante) en la gráfica que el ángulo permanece invariante cuando el parámetro b se mueve. El estudiante que no contestó de una manera favorable a la pregunta respondió de la siguiente manera " se mueve de lado a lado paralelamente", esto significa dos cosas: o bien se hizo una lectura deficiente de la pregunta o bien, el registro gráfico muestra diversas variables visuales que cambian y el estudiante no necesariamente percibe lo que se pretende.

En la actividad 6.2 las respuestas a esta pregunta permiten ver de nuevo que el movimiento de la recta percibida por los estudiantes no es fácil de describir, aunque casi todos los estudiantes (seis de ocho estudiantes) asocian el movimiento de a con la rotación, la diversidad de sus respuestas muestran que han centrado su atención sobre diferentes aspectos de esta rotación. Uno de los estudiantes por ejemplo escribe " la recta cambia su ángulo, es decir cambia la dirección", este tipo de respuesta señala que el estudiante no percibe un movimiento completo de la recta.

En la actividad 6.3 se reporta que los estudiantes han tenido problemas para contestar correctamente esta pregunta, si bien es cierto la mayoría (seis de ocho) han contestado que el ángulo vale cero esta respuesta se ha dado una vez que los estudiantes han discutido sus respuestas con el profesor. Estas dificultades pueden explicarse por las limitaciones que el registro gráfico tiene para representar situaciones límite. A pesar de las intervenciones del profesor un estudiante decidió dejar como respuesta " el ángulo desaparece", mientras que el otro en "ausencia" del ángulo asoció al ángulo el valor tomado por el parámetro b que estaba viendo en pantalla.

Para la actividad 6.4 a) se reporta que cinco de los estudiantes han descrito de manera aceptable el crecimiento del ángulo cuando a se hace crecer a partir de cero. Por las respuestas que dieron lo estudiantes restantes parecieran haber entendido que la pregunta se refería a la posición final del ángulo al concluir la variación de a , por ejemplo uno escribe "va trasladándose hacia la vertical eje Y en un ángulo de 90°".

La pregunta de la actividad 6.4 b) fue contestada por un solo estudiante con precisión , el resto de las respuestas presentan una serie de deficiencias posiblemente relacionadas con la imposibilidad de tomar un giro de referencia. Un estudiante contesta por ejemplo: " hacia Y o sea hacia 90° ". Otra respuesta que resulta verdaderamente incoherente es la hecha por otro estudiante: " vertical al eje y ", sus respuestas parecieran un intento por describir el movimiento de la recta como un movimiento que se aproxima al eje Y.

La tarea de establecer el rango de variación del ángulo en la actividad 4 c) ha resultado problemático, tres de los estudiantes han encontrado este rango de variación de manera aceptable, aunque uno de ellos asegura que el rango es de " 1° ...90° " que no es completamente precisa; pero la percepción de que el valor inicial del ángulo es de 1° podría tener su origen en la idea que el ángulo de 0° no es un ángulo. En el resto de las respuestas incorrectas se observa una dificultad adicional, a saber aquella relacionada con la cuantificación de la medida del ángulo; por ejemplo dos estudiantes contestan: " entre 0° y 160°" otro entre 45° y 90°.

De las respuestas dadas en la actividad 6.5 a) solamente dos se pueden considerar aceptables porque perciben que el ángulo aumenta (en valor absoluto) pero ahora negativamente hasta –90°. Las restantes respuestas son imprecisas, ponen en evidencia las dificultades que tienen los seis estudiantes restantes para describir que sucede con el ángulo cuando el parámetro a toma valores negativos. Por ejemplo un estudiante contesta " el ángulo se traslada hacia abajo en forma vertical al eje Y".

Con respecto a la actividad 6.5 b) sucedió lo mismo que en la actividad 6.4 b) la referencia que se tiene para describir la dirección de giro de un ángulo se mostró evidente en dos estudiantes ellos respondieron que el ángulo gira como las manecillas del reloj. Los demás estudiantes mostraron dificultades en su descripción como la siguiente: "hacia abajo en dirección del eje Y ".

Las respuestas obtenida de la actividad 6.5 c) fueron en lo general imprecisas, solamente un estudiante contestó de " 0° a 90°. En los demás estudiantes les resultó difícil precisar el rango de variación del ángulo cuando a es menor que cero. Por ejemplo uno de los estudiante que había contestado en forma aceptable la actividad 6.4 c) que fue puesto como evidencia en ese reporte, su respuesta para la actividad 6.5. c) fue de " 360° a 270° ", esto muestra dificultades para representar las variaciones de ángulos negativos.

Reporte # 7.

En la actividad 7.1 los estudiantes no estaban obligados a establecer una relación entre las columnas, más bien se trataba de que pudieran estimar la medida del ángulo mostrado en pantalla para cada valor de a solicitado. En general los resultados ofrecidos son consistentes (seis de ocho estudiantes) en el sentido que el ángulo crece cuando la a varía entre –100 y 100. Sin embargo vale la pena comentar algunas particularidades encontradas en las respuestas, por ejemplo seis de los estudiantes consideran que para a igual a 100 la recta tiene un ángulo de inclinación de 90°, lo cual pareciera deberse a que las respuestas efectivamente están basadas en las representaciones gráficas mostradas en pantalla.

En la actividad 7.2 aunque en la pregunta se solicita el intervalo de variación del ángulo solamente tres de los estudiantes dieron como respuesta los intervalos de variación apropiados. Un cuarto estudiante identifica bien los intervalos de variación del ángulo que corresponden al intervalo de variación $-1 < a < 0$ y $0 < a < 1$, pero tiene dificultades cuando intenta establecer para los intervalos de variación de $-\infty < a < -1$ y $1 < a < \infty$, lo cual pareciera ser un indicativo de que los símbolos $-\infty$ y ∞ le han provocado problemas. El hecho de que uno de los estudiantes haya dado como respuesta 45° al intervalo de $1 < a < \infty$ podría deberse ha que entendido que la pregunta se refería a cuántos grados varía el ángulo en este intervalo. Esta interpretación del estudiante y el número de estudiantes que han dejado la pregunta en blanco (tres estudiantes de ocho) podrían tener su explicación en la poca precisión con la que ha sido formulada la pregunta.

En la actividad 7.3 solamente se reportan los resultados de cinco estudiantes, por que tres restantes utilizaron software para contestarla lo cual hace que la actividad pierda su propósito. El siguiente cuadro presenta el número de estudiantes que dieron una estimación aceptable del parámetro a para cada gráfica mostrada

Gráfica 1	3
Gráfica 2	3
Grafica 3	5
Grafica 4	1
Grafica 5	4
Grafica 6	3

Lo cual muestra que no hubo dificultades para estimar el parámetro a de la gráfica 3 cuando la recta es horizontal y cuando el ángulo de inclinación sobrepasa el ángulo de 45° (gráfica 5), pero si hubo problemas con la gráfica 4 porque solamente uno pudo estimar correctamente el parámetro a, posiblemente debido a que la recta mostrada tiene un ángulo de inclinación negativo y en la gráfica no aparece la referencia $f(x) = -x$. Llama la atención que uno de los estudiantes contestó incorrectamente cinco de las preguntas porque asignó al parámetro a su estimación del ángulo de inclinación de la recta.

Reporte # 8

Esta práctica fue aplicada a ocho estudiantes pero solo tres de ellos pudieron concluirla por limitaciones de tiempo. Esta práctica tuvo una duración aproximada de media hora.

La pregunta I de la actividad 8.1 era de opción múltiple, el número de estudiantes que seleccionaron una de las opciones puede verse resumida en la siguiente tabla

Respuestas Actividad 8.1

a)	b)	c)	d)
6	0	2	0

La pregunta ha resultado difícil para los estudiantes que parecieran no alcanzar a identificar el efecto gráfico de ambos parámetros simultáneamente, el hecho de que estas dos opciones hayan sido seleccionadas por los estudiantes parece indicar que la traducción del parámetro b en la gráfica ha resultado claro hasta ahora, sin embargo la identificación del parámetro a con la pendiente de la recta sigue mostrándose como una dificultad persistente. El hecho de que la opción a) haya funcionado como el mejor distractor en el problema pudiera deberse a que en este caso la recta interseca al eje X en el punto (- 4 ,0) y que los estudiantes siguen pensando que el parámetro a tiene que ver con la intersección al eje X.

En la pregunta de la actividad 8.2 todos los estudiantes trazaron las rectas correspondientes a las funciones solicitadas, a pesar de que la pregunta solicitaba explicar el razonamiento seguido por los estudiantes solamente tres de ellos hicieron las explicaciones pedidas en las prácticas, lo que arroja luz acerca de los niveles de comprensión logrados hasta este momento, si bien es cierto que las respuestas revelan una identificación más o menos clara sobre el efecto producido en una gráfica por el parámetro b pero no se encuentran elementos para llevar las conclusiones más allá de eso, es difícil afirmar por ejemplo que el parámetro *a* ha sido traducido a las gráficas. Uno de los estudiantes ofreció como argumento para su respuesta el siguiente: " la recta se mueve hacia la derecha. Solo cambia la posición cuando varía b ".

Respuestas Actividad 8.2

Con éxito	Con deficiencias
8	0

La pregunta de la actividad 8.3 muestra que aunque la actividad anterior pudiera dar margen a pensar que la conversión gráfico-algebraico de la noción de pendiente ha venido mejorando las respuestas dadas por los estudiantes, en esta actividad arrojan serias dudas sobre esta mejoría. Solamente tres de los ocho estudiantes han contestado bien a esta actividad y de ellos hay una argumentación en cada caso, los otros cinco estudiantes han ejecutado la tarea con serias deficiencias, de estos últimos cinco uno solamente hizo pasar todas las rectas por el origen, mientras que los otros cuatro insisten en ofrecer diversas interpretaciones del parámetro a relacionándolo con las intersecciones a los ejes.

Respuestas Actividad 8.3

Con éxito	Con deficiencias
3	5

Como se dijo al principio de esta práctica no todos los estudiantes la concluyeron a partir de la actividad 8.4 solo se exhibirán las respuestas ofrecidas por los tres estudiantes que lograron concluir la práctica. Uno de ellos identificó correctamente las expresiones algebraicas que corresponden a las rectas proporcionadas, mientras que los otros dos llegaron a respuestas incorrectas por diferentes caminos. A pesar de que las tres rectas graficadas son paralelas, uno de estos últimos estudiantes les asoció las expresiones algebraicas f(x) = -4x+3 , f(x) = -3x+1 y f(x) = 1.5x – 1 su respuesta privilegia la conversión del parámetro b pero muestra una gran confusión cuando intenta traducir la conversión gráfico-algebraico del parámetro a.

Respuestas Actividad 8.4

Con éxito	Con deficiencias
1	2

Al igual que en la actividad anterior las respuestas que los estudiantes ofrecieron para la actividad 8.5 solamente uno de ellos la realiza con éxito. En esta actividad se ofrecen tres rectas graficadas intersecándose en un mismo punto sobre el eje Y, el estudiante debe proporcionar la expresión algebraica para cada una de ellas. Los estudiantes que contestaron mal siguen insistiendo que la intersección de la recta con el eje X tiene que ver con el parámetro a de la función $f(x) = ax + b$, pero la intersección de la recta con el eje Y no muestran ningún problema al asociarlo con el parámetro b. La respuesta dada por uno de los estudiantes fue: f(x) = -4x+2 , f(x) = -2x+2 y f(x) = 1.2x + 2.

Respuestas Actividad 8.5

Con éxito	Con deficiencias
1	2

Para la última actividad 8.6 se solicita al estudiante escribir una expresión para cada una de las gráficas mostradas donde la inclinación y punto de intersección con el eje Y es distinta en cada una de ellas. Un estudiante de los tres realizó satisfactoriamente esta actividad, determinando correctamente la expresión algebraica de cada gráfica. Los otros dos estudiantes persistieron en relacionar ambos parámetros con las intersecciones de la recta con los ejes.

Respuestas Actividad 8.6

Con éxito	Con deficiencias
1	2

5.4.3 Respuestas a las actividades relacionadas con la representación tabular y algebraica.

Las siguientes prácticas están dedicadas a trabajar con la representación tabular de la función lineal, ambas pudieron realizarse en un transcurso de hora y media.

Reporte # 9

Las actividades de la 9.1 a la 9.4 se identifican como actividades de entrenamiento que tienen como intención: familiarizar al estudiante con la lectura de tablas, para convenir ciertas notaciones e irlos introduciendo con las nociones a emplear para la identificación de la linealidad de una tabla. Con la Tabla 1 se discute el primer criterio de linealidad cuando los incrementos de x son iguales y con la Tabla 2 el segundo criterio de linealidad cuando los incrementos de x son distintos. Lo que se reporta de estas actividades es que no hubo problema por parte de los alumnos para ir contestando cada una de las actividades a excepción de problemas con la notación empleada.

En la actividad 9.5 se analizan tres tablas numéricas que se han venido discutiendo a lo largo de las actividades de la 9.1 a la 9.4 y se pide resumir los resultados con el fin de discutir cuál es el papel que juegan algunos datos calculados hasta aquí. La primera pregunta que se hace al estudiante es cuáles de las tres representaciones tabulares representan una función lineal; ningún estudiante tuvo problemas para identificar la linealidad en la primera y tercer tabla donde los incrementos en x son constantes, sin embargo en la Tabla 2 donde los incrementos de x son distintos cinco de los estudiantes consideran que la relación es no lineal, por lo menos cuatro de estos cinco la respuesta pareciera contradictoria porque ya habían calculado previamente los cocientes de incrementos de estas tablas y les habían resultado constantes. Esta confusión pudiera tener dos orígenes uno de ellos la poca familiaridad observada en los estudiantes para trabajar con representaciones tabulares y la otra podría deberse a que el segundo criterio para detectar la linealidad no ha resultado suficientemente claro. El trabajo realizado por los estudiantes deja entrever que estos criterios son vistos como ajenos y no se logra percibir uno como caso particular del otro.

En la pregunta dos cuando se pidió a los estudiantes cuál de los dos criterios estaban empleando para detectar la linealidad ninguno de ellos tuvo problemas con las Tablas 1 y 3. La Tabla 2 resultó conflictiva, dos estudiantes que no declararon el criterio empleado respondieron que la relación no era lineal, mientras que tres de ellos habiendo declarado que utilizaban el criterio dos consideraban que la relación es no lineal, estos últimos parecieron haber entendido que la utilización del criterio dos los conducía directamente a la no linealidad, uno de ellos inclusive calcula correctamente el cociente de incrementos y determina bien el valor de la ordenada al origen.

En la pregunta 3 de esta actividad se pide al estudiante calcular el cociente de incrementos de y con respecto a x, para cada una de las tablas, las respuestas ofrecidas por los estudiantes aquí reflejan una significación muy pobre de este cociente, en la Tabla 1 por ejemplo cuatro estudiantes lo han calculado correctamente, mientras que otros han calculado en su lugar el incremento x con respecto y (en forma inversa) y otros dos se han limitado a ofrecer como respuesta la notación de incrementos. Los resultados dados en la Tabla 3 son muy similares a los de la Tabla 1: cuatro respuestas correctas, dos estudiantes que se equivocan en el signo del cociente y dos que se limitan a contestar la notación del cociente de incrementos y sobre x. El análisis de la Tabla 2 les sigue acarreando problemas a cuatro de ellos que han dejado en blanco la respuesta y de los cuatro que han contestado correctamente, por lo menos uno muestra evidencias en el resto de sus respuestas de que no entiende a que se refiere este cociente.

En la pregunta 4 de la siguiente actividad se pide al estudiante identificar en cada una de las tablas la ordenada al origen de la expresión $f(x) = ax + b$, todos los estudiantes han contestado bien esta pregunta en las tres tablas, excepto los cuatro que han mostrado claras dificultades para trabajar con la Tabla 2 y que en este caso han dejado la respuesta en blanco. La gran cantidad de respuestas correctas a esta pregunta no asegura que los estudiantes puedan calcular la ordenada al origen cuando una función lineal está representada tabularmente porque en las tres tablas aparece el valor de cero para la variable x.

En la última pregunta a esta actividad había la intención de que los estudiantes especificaran el crecimiento o decrecimiento de la función lineal en cada una de las tablas con el fin de relacionar el signo de cociente de incrementos con sus respuestas, sin embargo la pregunta resultó poco importante por la gran cantidad de errores cometidos al calcular los cocientes.

En la última actividad 9.6 de esta práctica se ha pedido a los estudiantes que escriban la relación algebraica de cada una de las tablas de esta práctica, en la Tabla 1 seis de ellos han obtenido la respuesta y = 8x que es la respuesta correcta, mientras que otros dos han ofrecido la respuesta y = 1/8 x. La consistencia entre el cálculo del cociente de incrementos de y con respecto a x y la expresión algebraica pareciera indicar que las respuestas se han dado de manera mecánica, pues los dos estudiantes que han equivocado su respuesta sostienen que la relación representada en la tabla tiene la representación algebraica y = 1/8 x a pesar de que en la tabla la y claramente crece de 8 en 8.

La expresión algebraica para la tabla 2 ha sido respondida correctamente por 3 estudiantes que dan como respuesta y = 2x + 1, los cinco restantes habían contestado con anterioridad que la relación de la Tabla 2 era no lineal pero a pesar de ello 2 dieron la expresión algebraica para la tabla, los 3 restantes la dejaron en blanco. De los 2 estudiantes que dieron la expresión algebraica a pesar de haber respondido que la Tabla 2 representa una relación no lineal muestran evidencias claras de la falta de indicadores para corroborar sus respuestas.

Los mismos problemas resultan evidentes con la expresión algebraica que ellos asignan para la Tabla 3, dos de los estudiantes que omitieron el signo del cociente de incrementos que era igual a –0.5, dieron como respuesta y = 0.5x + 9.

Reporte # 10

Esta práctica incluye dos actividades; la primera que consiste en identificar cuales de las ocho tablas proporcionadas representan una función lineal aplicando los criterios dados y una segunda actividad en la que se le solicita al estudiante la representación algebraica de aquellas relaciones identificadas como lineales.

En la siguiente tabla se reportan las respuestas de la primer actividad, en la cual se han sombrado las celdas que corresponden a la respuesta correcta. Tal como se esperaba el mayor número de respuestas correctas se corresponden con las tablas en las que el incremento en x es constante. Un solo estudiante pudo identificar como lineales las relaciones presentadas por las Tablas D y H donde los incrementos en x no son constantes, mientras que cinco de ellos llegaron a una conclusión errónea y dos estudiantes la dejaron en blanco.

Respuestas	Tabla A	Tabla B	Tabla C	Tabla D	Tabla E	Tabla F	Tabla G	Tabla H
Es Lineal	**8**	**0**	**0**	**1**	**8**	**0**	**8**	**1**
No Lineal	**0**	**7**	**6**	**5**	**0**	**6**	**0**	**5**
No contestaron	**0**	**1**	**2**	**2**	**0**	**2**	**0**	**2**

Los errores observados en esta práctica podrían tener como explicación las confusiones en la comprensión de los criterios ya mencionados en la práctica anterior. Uno de ellos escribió todas las expresiones algebraicas correctamente, excepto la representada por la Tabla F en la que escribió " y = 1x " mientras que la relación representada en la tabla era y = |x|. El otro estudiante arribó a la expresión algebraica correcta en las Tablas A, E y G en las que los incrementos en x son constantes, pero incluyó erróneamente entre las no lineales las tablas D y

H, en la que los incrementos en x no son constantes.

5.5 Conclusiones de las actividades

Las prácticas de la 1- 4 solo tenían el propósito de familiarizar al estudiante con el software y mejorar su orientación en el plano cartesiano. Estas cuatro prácticas se realizaron en un tiempo de una hora y media y durante su ejecución se observó a los estudiantes motivados en dichas actividades. La autonomía mostrada por los estudiantes en el resto de las actividades han dejado en claro que las prácticas de la 1 – 4 resultaron suficientes para familiarizar al estudiante con el manejo del software. Esta autonomía desde luego no es ajena a la amigabilidad del paquete utilizado.

Al respecto de la posible mejoría en la orientación sobre el plano cartesiano, no se tiene una conclusión firme debido a que no se hizo una evaluación específica sobre el tema; pero las confusiones entre las coordenadas x e y detectadas en el diagnóstico no se volvieron a observar en el resto de las prácticas.

Las de las prácticas de la 5 – 8 fueron diseñadas con el propósito de adelantar una propuesta de enseñanza que tome en cuenta la conversión entre representaciones. La modalidad de trabajar con actividades escritas y con apoyo computacional ha resultado novedoso y estimulante para los estudiantes.

Los resultados, tal como se han reportado en el Capítulo anterior, no han sido del todo alentadores. Las razones ofrecidas por Duval acerca de la incorporación de actividades de enseñanza orientadas a promover la conversión son muy convincentes, pero el diseño de estas actividades dentro de una propuesta innovadora, enfrenta las resistencias naturales alimentadas en los estudiantes por una enseñanza bastante tradicional.

A lo largo de la implementación se observó que el parámetro b de la función lineal $y = ax + b$ en la conversión gráfico-algebraica ha sido rápidamente asimilado por los estudiantes. Esto es relátivamente fácil de explicar porque la relación b-ordenada al origen entre los registros algebraico gráfico es directa.

En contraste la relación a-pendiente de la recta ha resultado una seria dificultad para los estudiantes. Esta dificultad ha resultado muy persistente y está relacionada posiblemente con varios factores:

a) En primer lugar, las representación gráfica de la b como la magnitud de un segmento sobre el eje Y, pareciera inducir la idea de que el parámetro a debiera corresponder también la magnitud de alguna cantidad directamente observable en la gráfica. Esta conclusión está apoyada en los resultados ofrecidos por aquellos estudiantes que asociaron el parámetro a con la magnitud del ángulo de inclinación o con la abscisa al origen de las recta.

b) En el diseño de las actividades no se incluyó la cuantificación del parámetro a partir de la representación gráfica, porque se partió del supuesto de que los estudiantes podrían establecer el comportamiento del ángulo de inclinación para algunos rangos claves de los valores de a y a la inversa, que podrían prever la variación de a cuando el ángulo de inclinación se mueve en ciertos rangos propuestos de antemano. A pesar de que la representación gráfica ha sido dotada de referencias (ángulo de inclinación y recta y = b) para facilitar la detección de esta relación; la experimentación ha evidenciado que esta relación entre los rangos de variación de a y del ángulo de inclinación ha resultado muy difícil de establecer. Bajo esta interpretación, la inclusión de un artificio en la representación gráfica, que muestre el parámetro a como la magnitud de un segmento, pereciera la única manera de mejorar la conversión gráfico-algebraica.

c) En la ejecución de las tareas han aparecido otras dificultades que se revelan como inherentes al registro gráfico, a saber las limitaciones que tiene este registro para representar las situaciones límite. En lo que se refiere específicamente al parámetro a , estas limitaciones son evidentes cuando se intenta representar a igual a cero y a igual a infinito. Las respuestas " el ángulo es recto" cuando a = 80 son suficientemente elocuentes.

Por último, la experimentación ha revelado que los estudiantes no siempre han podido discriminar en una representación gráfica, los elementos más importantes para la actividad de los menos importantes. Aunque el diseño de las actividades ha resuelto parcialmente este problema, han quedado vacíos en las actividades que tendrán que tomarse en cuenta en futuros diseños.

Después de la experimentación ha quedado claro también que la recomendación de utilizar en la enseñanza las actividades aquí presentadas, exigiría un refinamiento a la luz de las observaciones hechas aquí.

Las últimas actividades diseñadas tuvieron que ver con la representación tabular de la función lineal, los resultados obtenidos a través de estas actividades mostraron que el estudiante pudo identificar la linealidad en una tabla siempre y cuando los incrementos en x eran constantes, pero no logró identificarla con incrementos distintos en x. Este logro alcanzado por los estudiantes resulta favorable, porque una de las dificultades encontradas en el cuestionario fue que él no identificaba la linealidad en una tabla. Las actividades que se formularon pretendían también la conversión tabular–algebraica pero las actividades no han resultado suficiente para lograr esa conversión, una recomendación al respecto es que las actividades deberían incluir la conversión tabular–gráfica porque no ha sido fácil dotar de significado en la representación tabular los parámetros a y b.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Duval R., (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II,* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R., (1992), Gráficas y Ecuaciones: la articulación de dos registros. En E. Sánchez (Ed.), *Antología en Educación Matemática*, (pp. 125-139). México: Sección de Matemáticas Educativa del CINVESTAV-IPN.

Gutiérrez R. (1993). La investigación en Didáctica de las Matemáticas. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia.

Guzman, I. y Consigliere (1992). Algunas dificultades de aprendizaje detectadas en alumnos de Cálculo Diferencial. En revista de Educación Matemática, vol. 4 – No 1 (pp. 54-64). México, Sección de Matemática Educativa, Cinvestav.

Hernández R., (1997). La función cúbica, sus raíces, sus tangentes y el software computacional. En F. Hitt (Ed.), Memorias VII Seminario Nacional, Calculadoras y Microcomputadoras en Educación Matemática. (pp. 149-158). México: Cinvestav - IPN.

Hitt, E., (1996). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa*. (pp. 245-264). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hitt. E., (1997). Sistemas semióticos de representación y aplicaciones a Software de matemáticas: Botellas (funciones en contexto) y números poligonales. En F. Hitt (Ed.), Memorias VII Seminario Nacional, Calculadoras y Microcomputadoras en Educación Matemática. (pp. 17-26), México: Cinvestav - IPN.

Hitt, E., y Hernández. (2000). Experimentaciones en educación matemática en los niveles medio superior y universitario. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México, D. F.

Jonhson, D., (1986). Un patrón para la investigación en la clase de matemáticas. En Matemáticas y Enseñanza. Traducido para Mathematics Teacher por Alfino Flores.

Laborde, J.-M. and Bellemain, F. (1994). *Cabrí-Géomètre II* (software), Dallas, Tex.: Texas Instruments.

Moreno, L., y Waldegg, (1992). Constructivismo y educación matemática. En revista de Educación Matemática, vol. 4 – No 2 (pp. 7-15). México, Sección de Matemática Educativa, Cinvestav.

Monzoy, V., (1997). El estudio de la función polinomial en la interacción de tres registros. . En F. Hitt (Ed.), Memorias VII Seminario Nacional, Calculadoras y Microcomputadoras en Educación Matemática. (pp. 195-202), México: Cinvestav - IPN.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Curriculum and evaluation standars for school mathematics.*

Olvera M., (1989). Algunas dificultades en el aprendizaje de las funciones en el nivel secundario. En revista de Educación Matemática, vol. 1 - No 3 (pp. 38-51). México, Sección de Matemática Educativa, Cinvestav.

Ruiz, A., (1992). Las matemáticas modernas en las Américas. En revista de Educación Matemática, vol. 4 – No 1 (pp. 10-20). México, Sección de Matemática Educativa, Cinvestav.

Wadsworth, B., (1991). Teoría de Piaget del desarrollo cognoscitivo y afecto. Editorial Diana, México.

ANEXO I: CUESTIONARIO

Cuestionario

I

a. *Dibuja la recta que pasa por los puntos (2,3) y (4,5).*
b. *¿Qué signo tiene la pendiente de esta recta?______*
c. *¿Por qué?______________________________*
d. *¿Qué entiendes por pendiente de una recta?__________*

II.

Analice la siguiente tabla de valores y determine cómo se relacionan las variables x y y.

x	y
0	9
2	8
4	7
6	6
8	5
10	4

Tabla 1

x	y
-4	16
-2	4
0	0
4	16
7	49
13	169

Tabla 2

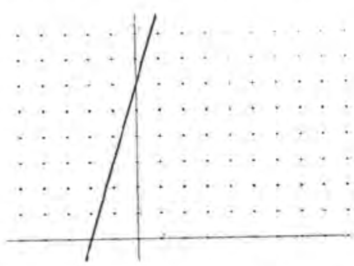
x	y
-2	2
-1	1
0	0
2	2
3	3
4	4

Tabla 3

a. Tabla 1. ¿Representan esos valores una relación lineal?______¿Por qué?____________
b. Tabla 2. ¿Representa esos valores una relación lineal?______¿Por qué?____________
c. Tabla 3. ¿Representa esos valores una relación lineal?______¿Por qué?____________

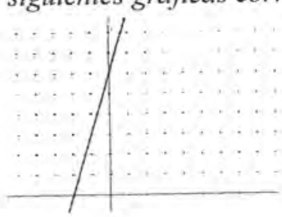
III.

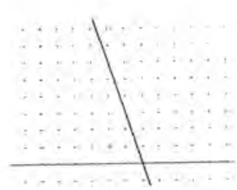
Determine la expresión algebraica cuya gráfica es la siguiente:

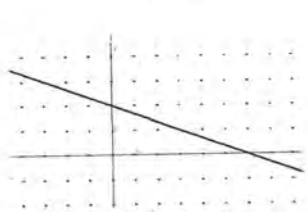


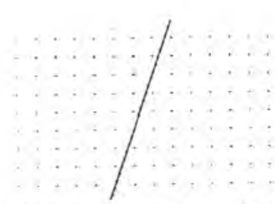
IV.

Identifique cual de las siguientes gráficas corresponde a la función $y=-3x+6$









Si considera que ninguna de las gráficas anteriores corresponde a $y=-3x+6$, *trace la gráfica correcta.*

ANEXO II: PRÁCTICAS

Practica # 1

Siga las indicaciones
1. Abra un archivo en *Cabri* titulado **PUNTOS fig.**
2. En él aparecerá una gráfica como se muestra en la Figura 1. Aparecerán las coordenadas de un punto **P** y su ubicación en el sistema cartesiano.
3. Grabe el archivo como **PUNTOS 1**

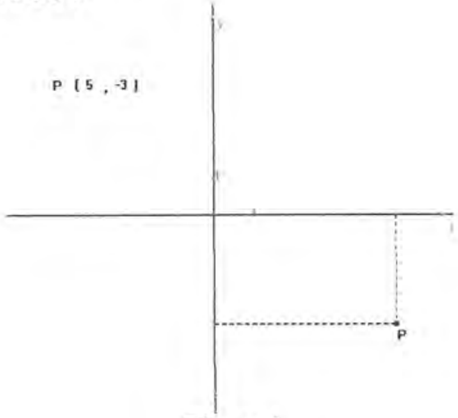
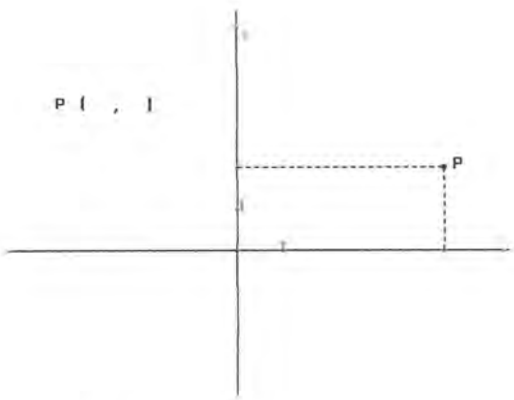


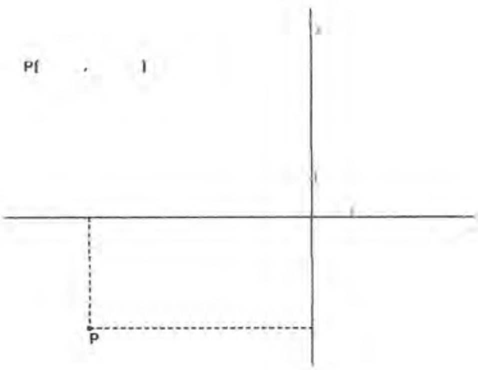
Figura 1

Observaciones
- Para mover el punto **P** basta con cambiar los valores numéricos de las coordenadas del punto, haciendo doble clic en cada uno de los números.
- Si tienes problemas con el archivo cierra y abra de nuevo el archivo **PUNTOS fig**.

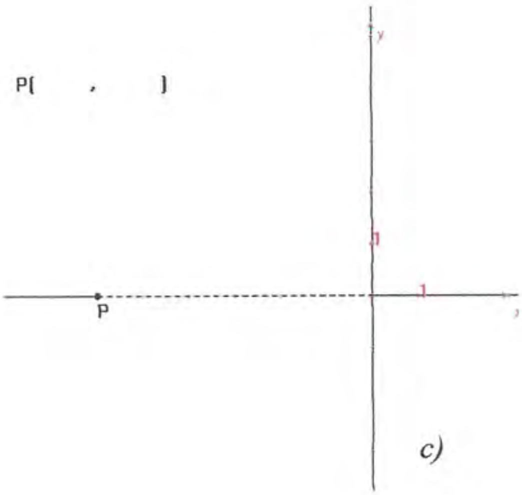
I. Observa las siguientes figuras. En el software localice aproximadamente las coordenadas del punto **P(x , y)** para que éste quede ubicado en los lugares que se observan. Escribe las coordenadas encontradas en cada figura:



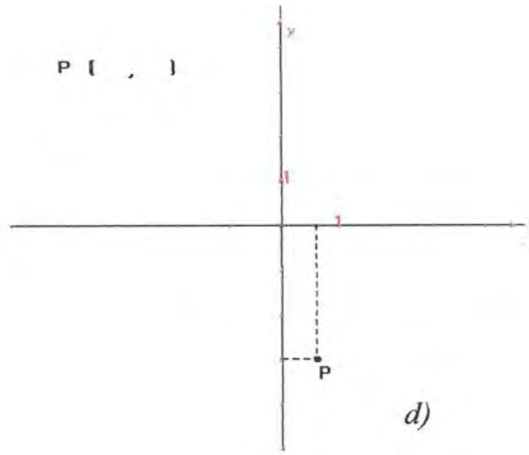
a)



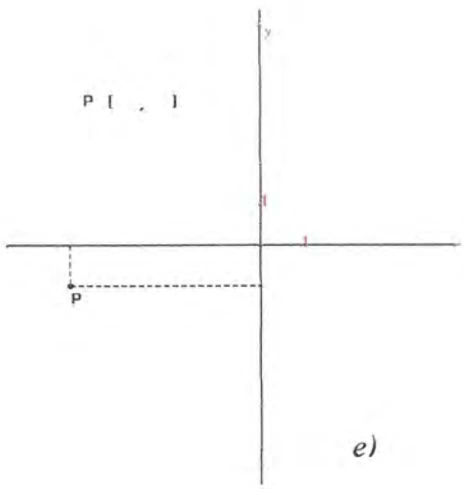
b)



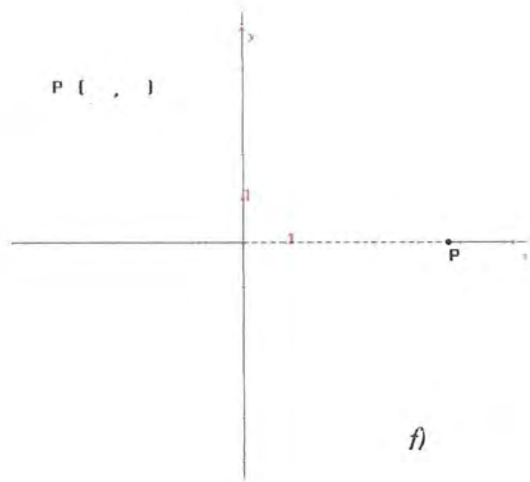
c)



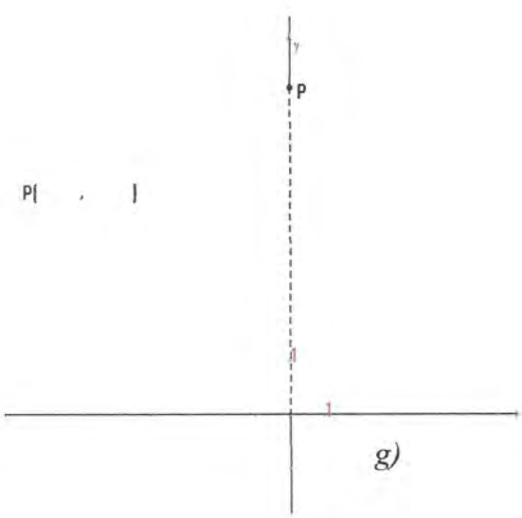
d)



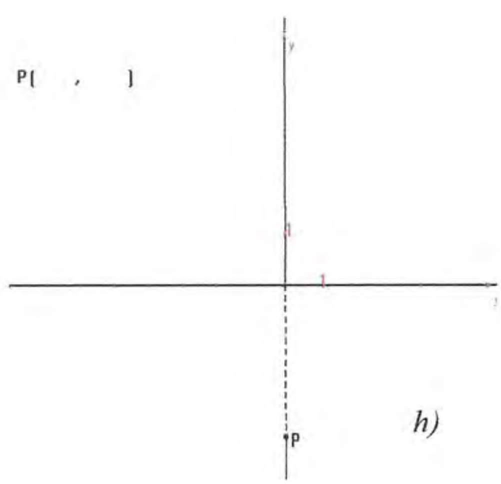
e)



f)



g)

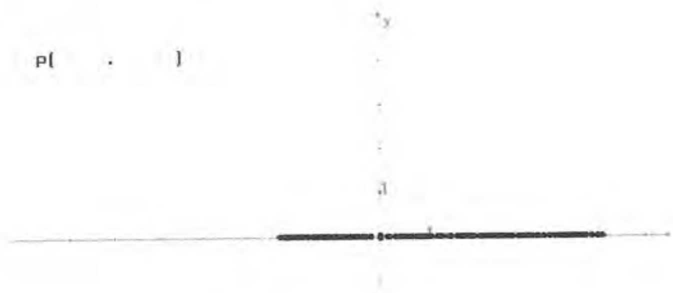


h)

Práctica # 2

Al empezar el siguiente apartado, abra de nuevo el archivo **PUNTOS fig.** y grábelo con el nombre de **PUNTOS 2**.

1. Haga variar las coordenadas de **P** para que el punto recorra una trayectoria como la que se muestra en la Figura 1. Seleccione cinco puntos de esa trayectoria y escriba sus coordenadas en la Tabla 1.

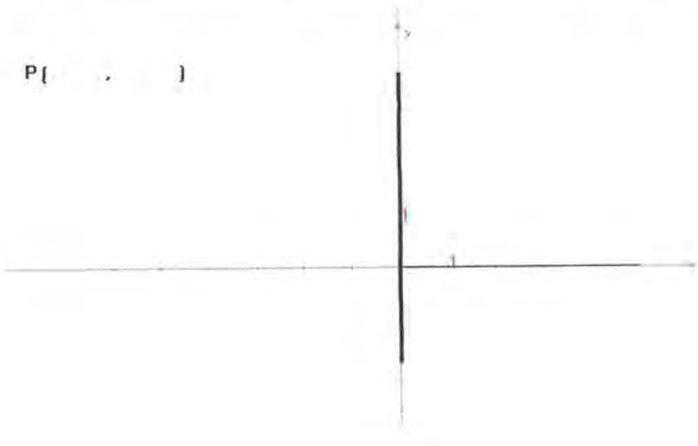


x	y	(x, y)

Tabla 1

Figura 1

2. Repita la actividad anterior pero ahora para la Figura 2.



x	y	(x , y)

Tabla 2

Figura 2

3. Repita la actividad anterior pero ahora para la Figura 3.

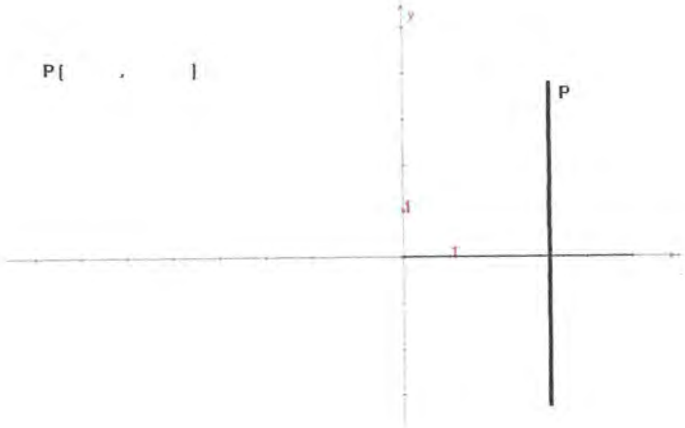


Figura 3

x	y	(x , y)

Tabla 3

4. Repita la actividad anterior pero ahora para la Figura 4.

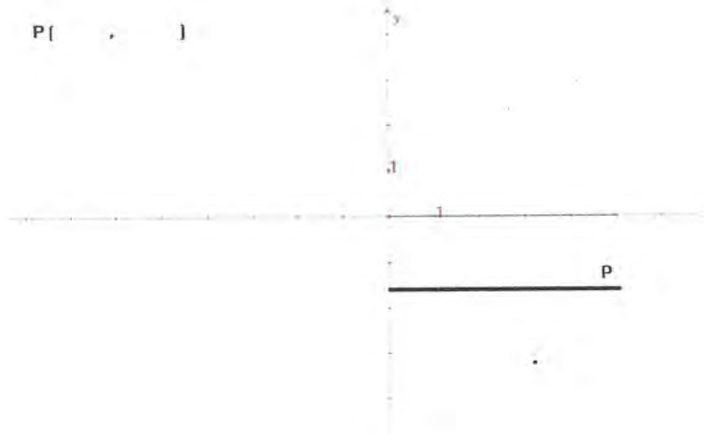


Figura 4

x	y	(x, y)

Tabla 4

Práctica # 3

Abra el archivo **TRAYECTORIAS1.fig**. En él, aparecerá una trayectoria como la mostrada en la Figura 1, así como un punto **P** y sus coordenadas. El software permite desplazar el punto **P** por toda la trayectoria desde A hasta H. Para mover el punto **P** selecciónelo con el cursor, y mantenga seleccionado el botón izquierdo del mouse. Observa que al mover al punto **P** las coordenadas de él también cambian.

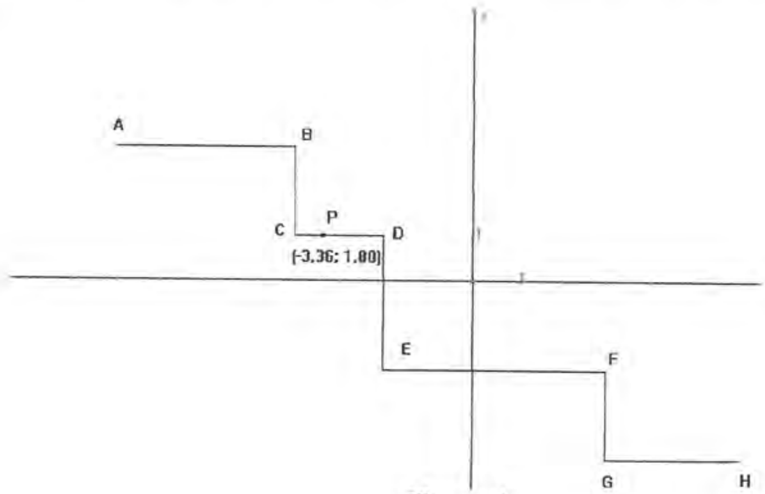


Figura 1

A continuación realiza lo que se te pide:

1. Desplaza el punto **P** sobre el tramo que va desde A hasta B, ¿qué características muestran las coordenadas del punto **P** en ese tramo de la trayectoria?.

2. Ahora, desplazando el punto **P** de B a C, ¿qué características muestran las coordenadas del punto **P**?.

3. Describe el conjunto de TODOS los puntos **P** que están entre los puntos C y D.

4. Describe el conjunto de TODOS los puntos **P** que están entre los puntos D y E.

5. Describe el conjunto de TODOS los puntos **P** que están entre los puntos E y F.

6. Describe el conjunto de TODOS los puntos **P** que están entre los puntos F y G.

7. Describe el conjunto de TODOS los puntos **P** que están entre los puntos G y H.

Práctica # 4

Reproduzca (aproximadamente) las trayectorias mostradas a continuación, empezando desde la posición **A** y terminando en **B**.

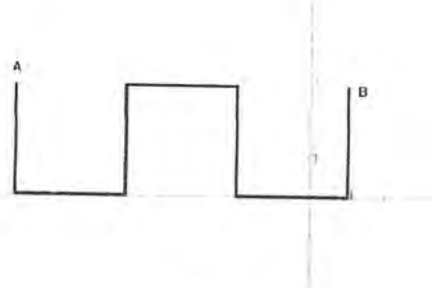


Figura 1

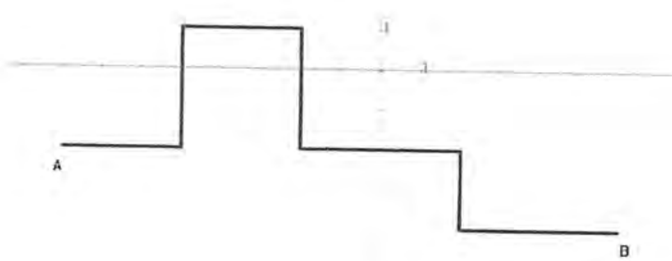


Figura 2

Para obtener trayectorias como las mostradas en la Figura 1 y 2, siga las siguientes instrucciones:

1. Primeramente abra el archivo **PUNTOS fig.** y grabe como **PUNTOS 2.**
2. Enseguida intenta colocar el punto **P** en la posición de **A,** como se muestra en la Figura 1. Esto lo puedes hacer con un doble "clic" del botón derecho del mouse, y cambiando los valores de ambas coordenadas del punto **P**.
3. Después de haber colocado el punto **P** en la posición de **A**, cambia los valores enteros de las coordenadas a decimales, por ejemplo (-5 , 3) a (5,0 , -3,0).
4. Luego, activa la herramienta TRAZA del menú principal, que se encuentra ubicada en la parte superior del penúltimo opción del menú principal. Para activar solo selecciona la herramienta TRAZA con el mouse.
5. Después seleccione el punto **P,** haciendo un "clic" con el botón derecho del mouse, el punto quedará "parpadeando".
6. Coloque el cursor en las coordenadas del punto **P** y con un doble "clic", empiece a cambiar los valores, observe como se va dibujando la trayectoria del punto.
7. Ahora puedes empezar a dibujar la trayectoria.
8. Es importante no hacer un "clic" fuera de las coordenadas del punto porque desaparecerá toda la trayectoria que hayas realizado.

Para dibujar la siguiente trayectoria vuelve abrir el archivo **PUNTOS fig.** y graba con el nombre **PUNTOS 2.**

Práctica # 5

Abre el archivo RECTAS 1.fig. En pantalla aparecerá una gráfica similar a la mostrada en la figura 1.

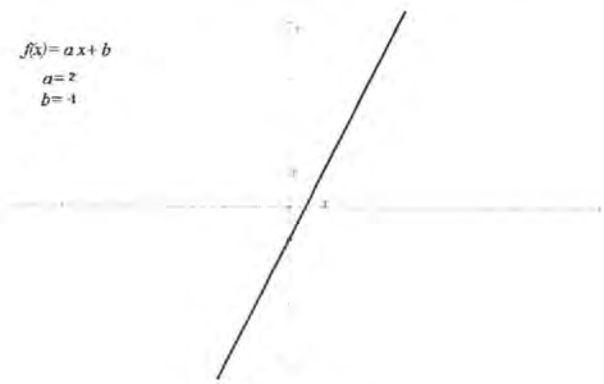


Figura 1

1. En pantalla aparecen las expresiones, $f(x) = ax + b,\ a = 2\ y\ b = -1$, esto significa que la gráfica mostrada en pantalla corresponde a la función $f(x) =$ ____________
2. Haz doble "clic" en el valor de a y hazlo variar. Observe la recta.
3. Haz doble "clic" en el valor de b y hazlo variar. Observe la recta.
4. ¿Cuál es la diferencia entre los movimientos producidos en la recta al mover a y b?. Explique con detalle____

____

____

5. Asigna al parámetro a el valor de 2 y al parámetro b los siguientes valores: - 4, -2, 0, 2, 4, 6. Encuentra las coordenadas de los puntos de intersección de la recta con los ejes coordenados y llena con ellos la tabla siguiente:

b	Punto de Intersección con el eje X	Punto de Intersección con el eje Y
-4		
-2		
0		
2		
4		
6		

¿Con cuál de las otras dos columnas, tiene la primera una relación más estrecha? Escribe la relación entre los valores de b y los puntos de esta columna.

____

6. Haz doble "clic" en el valor de a y hazlo igual a 3. Luego cambia los valores de b por –6, -3, 0, 3, 6. Encuentra las coordenadas de los puntos de intersección de la recta con los ejes coordenados y llena con ellos la tabla siguiente:

b	Punto de Intersección con el eje X	Punto de Intersección con el eje Y
-6		
-3		
0		
3		
6		

¿Con cuál de las otras dos columnas tiene la primera una relación más estrecha? Escribe la relación entre los valores de b y los puntos de esta columna.

____

____

7. Para cada una de las funciones que aparecen en la tabla siguiente, escribe en las casillas en blanco, el punto de intersección con el eje Y.

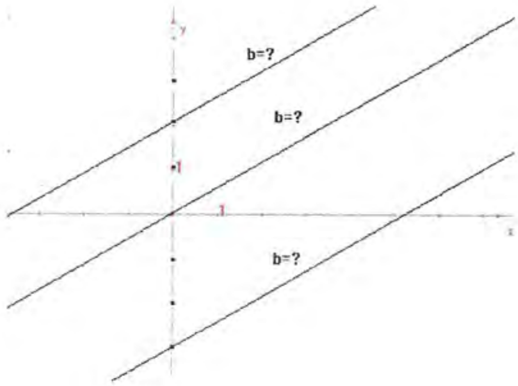
$f(x)$	Punto de Intersección con el eje Y
$f(x)=5x+7$	
$f(x)=-5x-1$	
$f(x)=x-\frac{2}{5}$	
$f(x)=-\frac{2}{3}x+\frac{7}{2}$	
$f(x)=ax+r$	

8. Escribe la expresión algebraica de cinco funciones lineales que pasen por el punto (0, 5).

$f(x)=$ ____________ $f(x)=$ ________________ $f(x)=$ ____________

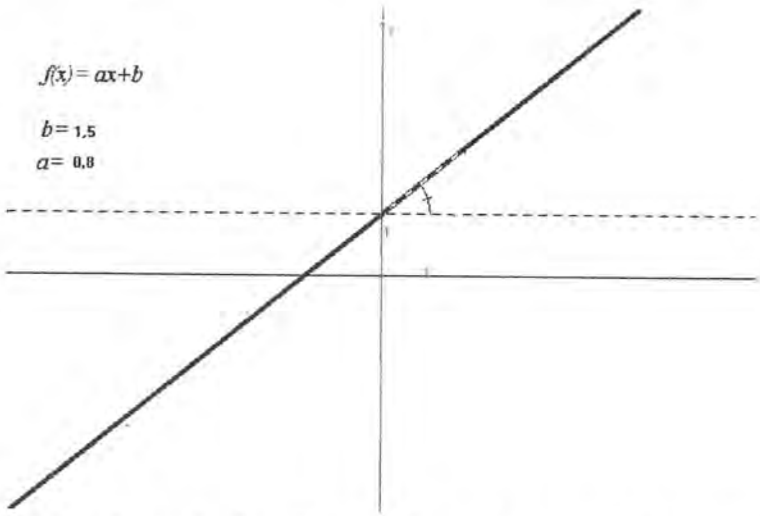
$f(x)=$ ________________ $f(x)=$ ________________

9. Observa la gráfica de las siguientes rectas y encuentre en cada caso el valor del parámetro b correspondiente a la expresión $f(x)=ax+b$.



Práctica # 6

Abre el archivo RECTAS 2.fig, en pantalla aparecerá una figura como la siguiente. La recta bajo estudio es la recta gruesa. La recta punteada, el ángulo marcado y la parte punteada sobre la recta gruesa son solamente una referencia.



1. Haz variar los valores de b. ¿Qué cambios observas en la medida del ángulo marcado?
2. Haz que varíe el valor de a. Describe el movimiento que sufre la recta con esta variación.
3. Si a toma el valor cero. ¿Cuánto mide el ángulo marcado?
4. Partiendo del valor cero para a, haz crecer a todo lo que puedas.
    a) ¿Qué cambios observas en el ángulo marcado, con esta variación de a?
    b) ¿En qué dirección gira la recta cuando a crece indefinidamente a partir del cero?
    c) ¿Entre qué valores varía el ángulo marcado, cuando a es mayor que cero?

5. Partiendo del valor cero para a, disminuye el valor de a todo lo que puedas.
    a) ¿Qué cambios observas en el ángulo marcado, con esta variación de a?
    b) ¿En qué dirección gira la recta cuando a decrece indefinidamente a partir del cero?
    c) ¿Entre qué valores varía el ángulo marcado, cuando a es menor que cero?

Práctica # 7

Para llenar las siguientes tablas, abre primeramente el archivo RECTAS 3. fig. En él aparece una gráfica similar a la mostrada en la Figura 1. Para la recta punteada, por ejemplo, el ángulo de inclinación es de 45°.

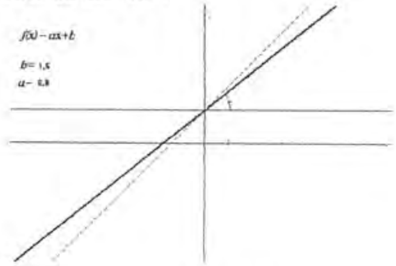


Figura 1

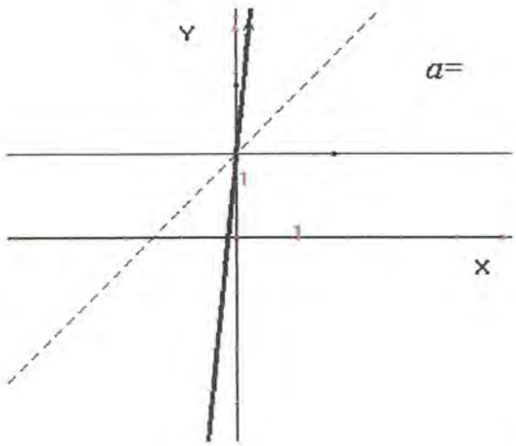
1. Sustituye el parámetro a por cada uno de los valores que aparecen en la tabla siguiente y llena las casillas en blanco con el valor estimado del ángulo.

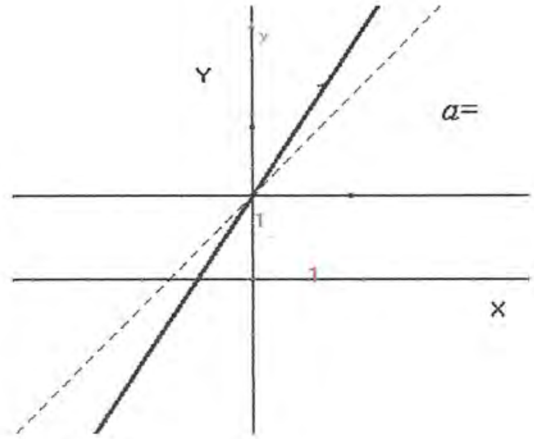
Valor de a	Valor estimado del ángulo
0	
0.2	
0.7	
1	
3	
7	
25	
70	
100	
0	
-0.01	
-0.3	
-0.5	
-1	
-2	
-5	
-10	
-20	
-50	
-100	

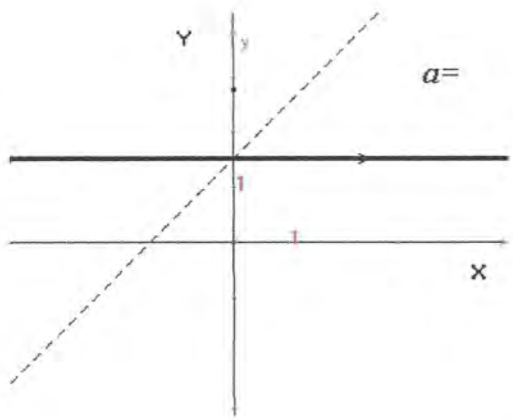
2. Haz variar a, de acuerdo a lo que se indica en la primera columna y llena las casillas en blanco con la variación del ángulo en cada caso.

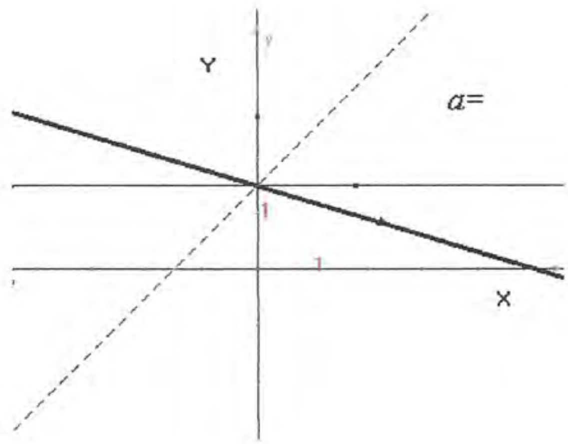
Variación de a	Variación estimada del ángulo
$-\infty < a < -1$	
$-1 < a < 0$	
$0 < a < 1$	
$1 < a < \infty$	

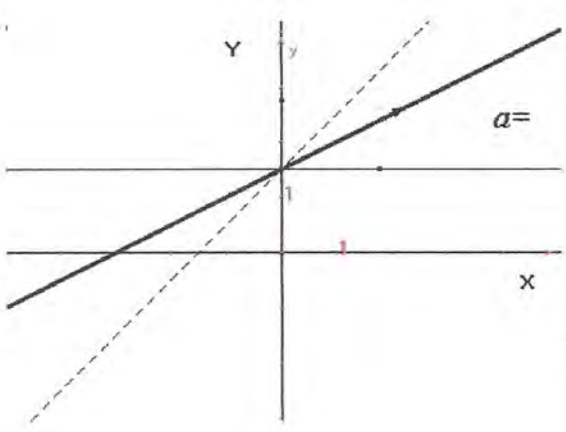
3. En cada una de las figuras siguientes se ha graficado una función de la forma $f(x) = ax + b$. Estima en cada caso el valor del parámetro a.

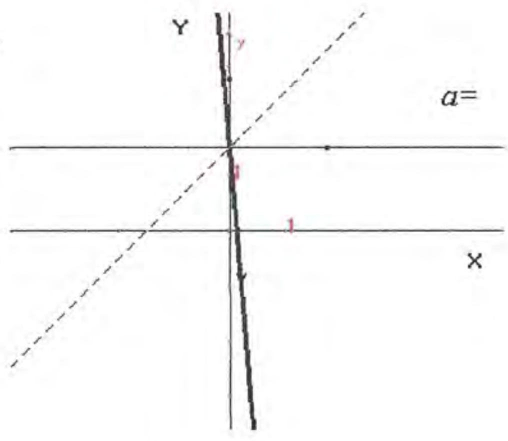






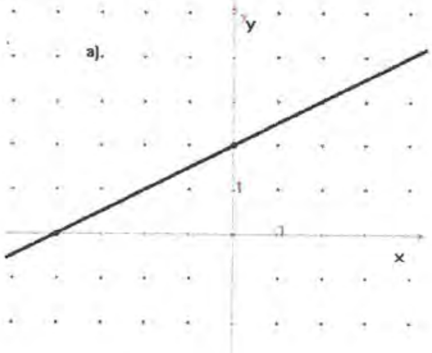


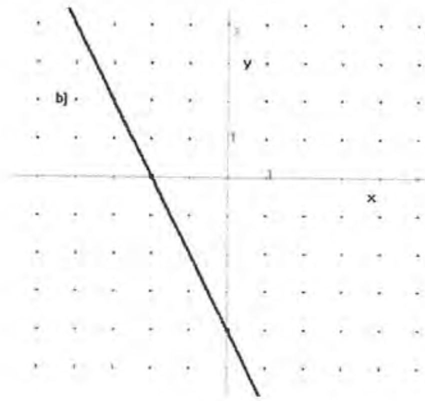


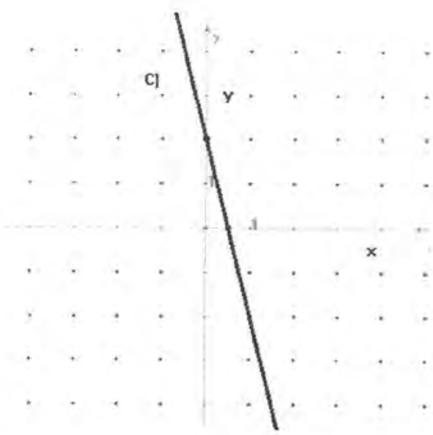


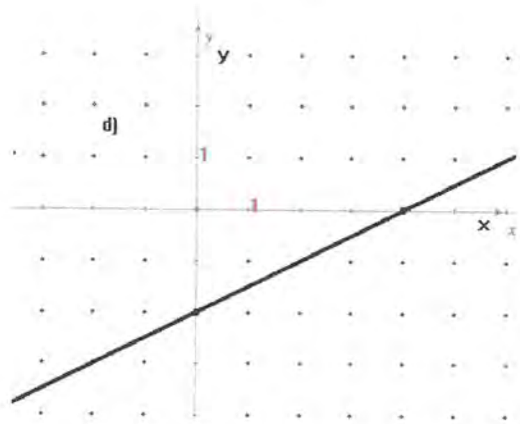
Práctica # 8

1. Identifica cuál de las siguientes rectas representa a la función $f(x) = -4x + 2$

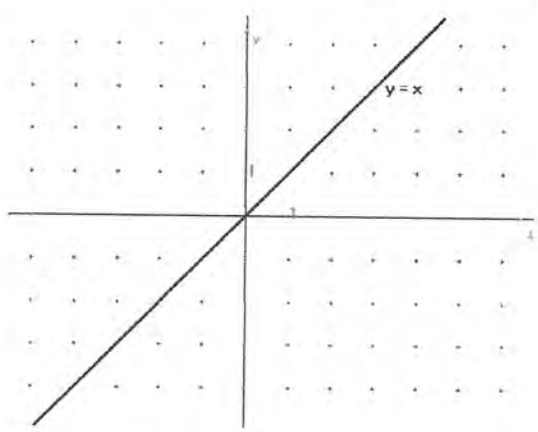




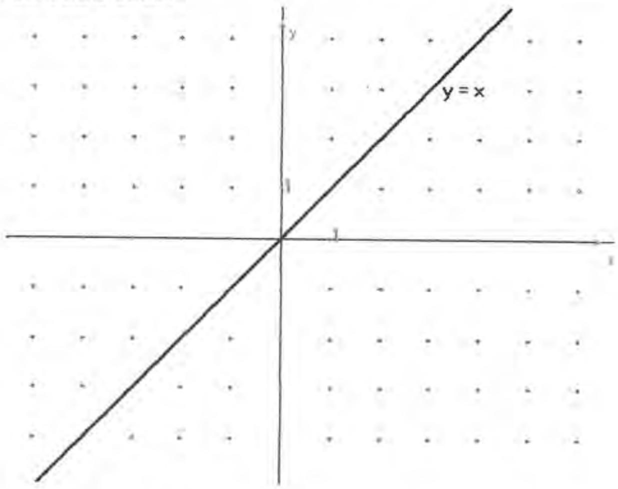




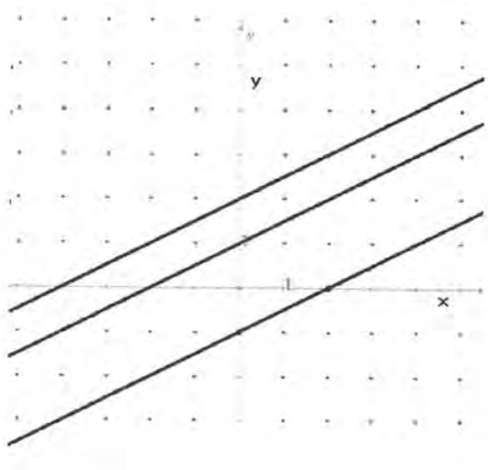
2. Observa la gráfica siguiente y sobre ella traza las rectas que corresponden a las funciones: a) $f(x) = x + 1$, b) $f(x) = x + 2$, c) $f(x) = x - 3$. Explica tu razonamiento en cada caso.



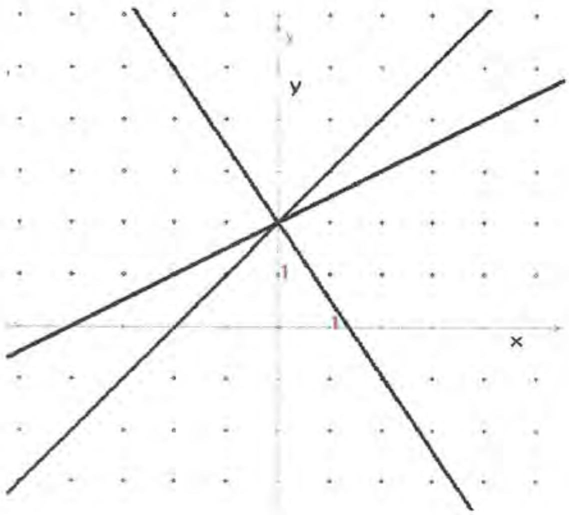
3. Observa la gráfica siguiente y sobre ella traza las rectas que corresponden a las funciones: a) $f(x)=2x$, b) $f(x) =10x$, c) $f(x) = - 2x$ d) $y = 0.25x$. Explica tu razonamiento en cada caso.



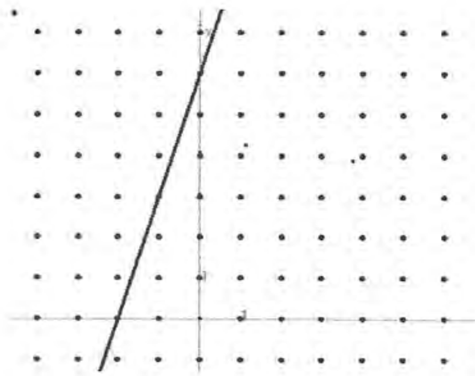
4. Sobre el dibujo escriba la expresión algebraica correspondiente a cada una delas siguientes rectas.

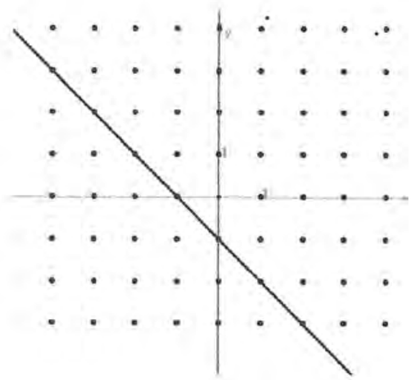


5. Sobre el dibujo escriba la expresión algebraica correspondiente a cada una de las siguientes rectas.



6. En cada una de las gráficas siguientes determine la expresión algebraica de la recta.





Práctica # 9

I. A continuación se presenta la siguiente tabla de valores, observe cuidadosamente sus valores para contestar las preguntas.

x	y
0	0
1	8
2	16
3	24
4	32
5	40

Tabla 1

1. ¿Qué valor toma y cuando $x = 5$?____________
2. ¿Qué valor toma x cuando $y = 24$?____________
3. Los valores de ambas columnas, ¿aumentan o disminuyen?
4. ¿Cuál es el incremento en los valores de x?__________ ¿Es constante este incremento en toda la columna?
5. ¿Cuál es el incremento en los valores de y ?__________ ¿Es constante este incremento en toda la columna?
6. ¿Basándose en la pregunta 4. y 5. ¿Cuál será el valor de y cuando $x = 7$? $y =$ ____
7. Considerando los valores en la tabla, sea $x_1 = 0$, $y_1= 0$, $x_2 = 1$, $y_2= 8$, $x_3=2$, $y_3=16$,... y así sucesivamente.

$\Delta x_1 = x_2 - x_1$ $\qquad$ $\Delta y_1 = y_2 - y_1$

$\Delta x_2 = x_3 - x_2$ $\qquad$ $\Delta y_2 = y_3 - y_2$

$\Delta x_3 = x_4 - x_3$ $\qquad$ $\Delta y_3 = y_4 - y_3$

$\Delta x_4 = x_5 - x_4$ $\qquad$ $\Delta y_4 = y_5 - y_6$

$\Delta x_5 = x_6 - x_5$ $\qquad$ $\Delta y_5 = y_6 - y_5$

Primer criterio para determinar la linealidad de la relación entre x e y en una tabla de valores:

1. Cuando en una tabla de valores, al calcular los incrementos Δx y los de Δy estos son *constantes*, resultando que:

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \ldots \Delta x_n \quad \text{y} \quad \Delta y_1 = \Delta y_2 = \Delta y_3 = \ldots = \Delta y_n .$$

Se dice que los valores de x e y en la tabla se relacionan linealmente. Donde cada pareja de valores x e y pertenecen a una *función lineal* de la forma: $f(x) = ax + b$.

Observe que en la tabla 1. del problemas anterior se cumple este criterio, por lo tanto se dice que los valores de x y y en la tabla de relacionan linealmente.

II. Para la tabla 2, determine si los valores de ambas columnas se relacionan linealmente. Enumere los valores de la tabla con x_1, x_2, ..., x_6, y_1, y_2,...y_6, y calcule los siguientes incrementos. (Sugerencia aplique el criterio 1.) .

x	y
0	1
2	5
3	7
8	17
9	19
20	41

$\Delta x_1 = x_2 - x_1$ $\qquad$ $\Delta y_1 = y_2 - y_1$

$\Delta x_2 = x_3 - x_2$ $\qquad$ $\Delta y_2 = y_3 - y_2$

$\Delta x_3 = x_4 - x_3$ $\qquad$ $\Delta y_3 = y_4 - y_3$

$\Delta x_4 = x_5 - x_4$ $\qquad$ $\Delta y_4 = y_5 - y_6$

$\Delta x_5 = x_6 - x_5$ $\qquad$ $\Delta y_5 = y_6 - y_5$

Segundo criterio para determinar la linealidad en una tabla de valores.

2. Cuando en una tabla de valores el cociente de los incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es *constante* para todos lo cocientes $\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}=\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}=...=\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}$, se dice que los valores están relacionados linealmente y cada pareja de valores x e y pertenecen a una función lineal de la forma: $f(x)=ax+b$.

3. En caso de no cumplirse ninguno de los dos criterios, se dice entonces que la relación entre los valores es no lineal..

III. En la tabla 2 del problema II. no se cumplió el primer criterio de linealidad, pruebe si cumple con el criterio 2., calcules los cocientes $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y ves si son iguales.

$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}=$ $\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}=$ $\frac{\Delta y_3}{\Delta x_3}=$ $\frac{\Delta y_4}{\Delta x_4}=$ $\frac{\Delta y_5}{\Delta x_5}=$

Diga entonces si la relación es lineal o no

IV. Identifique en la siguiente tabla de valores, si existe entre las variables una relación lineal. Utilice los criterio.

x	y
0	9
2	8
4	7
6	6
8	5
10	4

Enumere los valores de la tabla con $x_1, x_2, ..., x_6$, $y_1, y_2, ...y_6$, ..., calcule los siguientes incrementos:

$\Delta x_1 = x_2 - x_1$ $\Delta y_1 = y_2 - y_1$
$\Delta x_2 = x_3 - x_2$ $\Delta y_2 = y_3 - y_2$
$\Delta x_3 = x_4 - x_3$ $\Delta y_3 = y_4 - y_3$
$\Delta x_4 = x_5 - x_4$ $\Delta y_4 = y_5 - y_6$
$\Delta x_5 = x_6 - x_5$ $\Delta y_5 = y_6 - y_5$

Calcule los cocientes, si son necesarios:

$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}=$ $\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}=$ $\frac{\Delta y_3}{\Delta x_3}=$ $\frac{\Delta y_4}{\Delta x_4}=$ $\frac{\Delta y_5}{\Delta x_5}=$

V De acuerdo a las tablas anteriores escriba sus resultados en el siguiente cuadro.

Tabla	¿Es una relación lineal?	¿Criterio 1. ó 2.?	Sí es Lineal escriba $\frac{\Delta y}{\Delta x}$	Sí es Lineal determine El valor de y Cuando $x = 0$	Sí es Lineal ¿aumenta o disminuyen las columnas x, y?
1					
2					
3					

Representación algebraica. Si los valores x e y en la tabla, resultaron estar relacionadas linealmente, entonces existe una expresión algebraica de la forma $f(x) = ax + b$ que los representa,

donde $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ y b *es la ordenada al origen* ($b = y$ cuando $x = 0$)

VI Encuentre la representación algebraica de las tablas de la 1 a la 3, que resultaron tener una relación lineal, utilizando la información proporcionada por la tabla 5 anterior.

Tabla	Expresión algebraica $f(x) = ax + b$
1	
2	
3	

Práctica # 10

I. Identifique cuales de las siguientes tablas representan una relación lineal entre sus valores. Justifique sus respuestas.

x	0	1	2	3	4	5
y	-2	-1	0	1	2	3

Tabla A

x	3	5	6	7	9
y	6	10	12	14	18

Tabla B

x	1	2	3	4	5
y	1.9	2.0	2.2	2.3	2.4

Tabla C

x	0	2	6	8	10
y	2	1	-1	-2	-4

Tabla D

x	0	3	6	9	12
y	0	9	18	27	36

Tabla E

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

Tabla F

X	0	3	6	9	12
Y	0	9	18	27	36

Tabla G

x	0	3	6	9	12
y	0	9	18	27	36

Tabla H

II. Complete el siguiente cuadro utilizando la información de la actividad **I** de la Práctica #10.

Tabla	¿Es una relación lineal?	¿Criterio 1. ó 2?	Sí es Lineal escriba $\frac{\Delta y}{\Delta x}$	Sí es Lineal determine el valor de y cuando x = 0	Sí la relación resultó lineal encuentre la expresión algebraica $f(x) = ax + b$
A					
B					
C					
D					
E					
F					
G					
H					