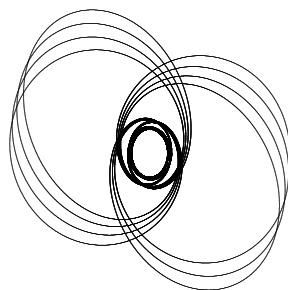


# Descripción de la métrica de Kerr y órbitas en el plano ecuatorial



Una tesis presentada a la Universidad de Sonora  
para la obtención del Título de  
Licenciado en Física

por

*José Abraham Arvizu Valenzuela*



Departamento de Física  
Universidad de Sonora  
Junio 2015

# Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

# Dedicatoria

*Con gran afecto a mis padres, quienes me han apoyado a través de los estudios de manera incondicional.*

*A mis hermanos y familia.*

*A mis amigos, por las horas de esparcimiento y recreación.*

# Agradecimientos

*A los profesores M. Elena Tejeda, Antonio Jáuregui, Carlos Calcáneo y Dupret Santana, quienes con paciencia esperaron un periodo prolongado de tiempo para ayudarme a concluir este trabajo.*

*En especial, a Carlos Calcáneo y Angelina Uribe, quienes me brindaron su valioso apoyo y amistad, horas de charla y espacio de trabajo cuales han sido de gran utilidad en desarrollo del presente.*

*A tí, por dedicar tu espaciotiempo a leer esta Tesis.*

# Contenido

<b>Lista de Figuras</b>	<b>IV</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>0 Conceptos preliminares de Relatividad y convenciones</b>	<b>3</b>
<b>1 Dinámica en el espaciotiempo</b>	<b>8</b>
1.1. Dinámica en el espaciotiempo a partir de la métrica . . . . .	8
1.2. Simetría y dinámica en el espaciotiempo . . . . .	10
1.3. La métrica es la solución a las ecuaciones de Einstein. . . . .	12
<b>2 La métrica en la vecindad de cuerpos masivos</b>	<b>13</b>
2.1. La métrica de Kerr . . . . .	14
2.2. Características de la métrica . . . . .	15
2.2.1. Horizontes y singularidad . . . . .	15
2.2.2. Arrastre de marcos inerciales . . . . .	16
2.2.3. Límite de superficies estacionarias . . . . .	17
2.3. Proceso de Penrose . . . . .	19
2.4. Movimiento en el plano ecuatorial . . . . .	22
2.5. Singularidad desnuda en la métrica de Kerr . . . . .	24
<b>3 Cálculo de órbitas en la métrica de Kerr</b>	<b>26</b>
3.1. Ecuaciones para una solución numérica en el plano ecuatorial . . . . .	26
3.2. Solución numérica . . . . .	27
3.3. Algunas órbitas en el plano ecuatorial . . . . .	28
<b>Conclusiones</b>	<b>36</b>

<b>Apéndices</b>	<b>38</b>
<b>A Desarrollo de la ecuación geodésica</b>	<b>38</b>
<b>B Ecuaciones de movimiento y componentes contravariantes de g</b>	<b>39</b>
<b>C Integración numérica en la métrica de Kerr</b>	<b>43</b>
C.1. main.f90 . . . . .	43
C.2. Biseccion.f90 . . . . .	45
C.3. RK4.f90 . . . . .	45
C.4. Error.f90 . . . . .	46
C.5. Funciones externas dr.f90, vel.f90 y sgn.f90 . . . . .	47
<b>Bibliografía</b>	<b>48</b>

# Lista de Figuras

0.	Comparación del tiempo propio entre dos eventos medido por observadores distintos.	5
1.	Clasificación de cuadvectores . . . . .	7
2.1.	Horizontes de eventos en la métrica de Kerr . . . . .	16
2.2.	Estructura del espaciotiempo en la métrica de Kerr . . . . .	18
2.3.	Conos de luz en la ergorregión . . . . .	20
2.4.	Creación de singularidad desnuda . . . . .	25
3.1.	Partícula cayendo del reposo en infinito a un agujero negro de Kerr extremo . . . . .	28
3.2.	Partícula con órbita parabólica $a = 0.64$ , $k = 1.13$ y $h = 4.87$ . . . . .	29
3.3.	Órbitas inestables ( $k \geq 1$ ) . . . . .	30
3.4.	Dependencia de $a$ en órbitas inestables con $h = 4$ y $k = 1$ . . . . .	30
3.5.	Órbitas ligadas para una partícula con $h = 2$ , $a = 0.995$ . . . . .	32
3.6.	Órbitas ligadas para una partícula con $h = 2$ , $a = 0.995$ . . . . .	33
3.7.	Partícula con momento angular negativo . . . . .	35

# Introducción

La Teoría de la Relatividad ha llevado a la descripción y predicción de fenómenos que no se puede lograr con una teoría clásica, así ésta forma parte de la Física Moderna. Sin embargo, aún continua siendo cuestionada y probada en un alto rango de precisión.

Existen diversas soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein, la primera solución fué presentada por Karl Schwarzschild en 1915 considerando la geometría del espaciotiempo fuera de una distribución de masa esférica sin carga ni rotación. Esta solución permitió explicar la precesión del perihelio en la órbita de Mercurio[9, 10]. También permitió en los treinta a Oppenheimer y Snyder dar las ideas básicas sobre el final de una estrella según su cantidad de masa. Estas ideas fueron recalculadas con más detalle veinticinco años después por Stirling Colgate, Richard White y Michael May concluyendo resultados similares[8]. Uno de los posibles finales es que cuando la masa de la estrella es varias veces la masa solar, ésta colapsa y entonces crea un agujero negro.

En la actualidad existen varios candidatos a ser agujeros negros en nuestra galaxia, pues estos sistemas cuentan con una masa estimada de más de tres masas solares (Límite Oppenheimer Volkoff.)[3, 9, 10], y si bien, la deformación del espaciotiempo es descrita con precisión al considerarlos como agujeros negros, se espera que futuras pruebas puedan medir otras características de los sistemas que derminarán si son agujeros negros, por ejemplo la observación de discos de acreción[18].

A pesar de que la solución de Schwarzschild ha tenido éxito en el desarrollo de predicciones teóricas y mejora de la tecnología, en 1963 Roy Kerr dió un paso más hacia la descripción real de objetos astrofísicos al encontrar una solución más general a las ecuaciones de campo de Einstein, en ésta obtiene la geometría del espaciotiempo fuera de una distribución de masa sin carga y con rotación sobre alguno de sus ejes. Uno de los puntos principales de esta solución es que en el límite de cero rotación corresponde a la solución de Schwarzschild. A la mayoría de los objetos astrofísicos encontrados se les atribuye una rotación sobre alguno de sus ejes y aunque sea mínima ésta puede ser descrita por la solución de Kerr.



En el año 2011 se concluyó el proyecto *Gravity Probe B* en el cual se midió el arrastre de marcos de referencia inerciales en una órbita alrededor de la Tierra, éste es uno de los fenómenos predichos por la solución de Kerr y los resultados están dentro del rango de precisión esperada según la relatividad[15]. Por estas razones, la difusión y estudio de la solución de Kerr es importante para un mayor grado en la comprensión de fenómenos que ocurren dentro del universo.

A través del trabajo se encuentra la lagrangiana y las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange, también se prueba que estas ecuaciones corresponden a la ecuación geodésica y que la ausencia de una coordenada implica la conservación de su componente asociada del cuadrimomento. Por medio de la dinámica en el espaciotiempo se intenta mostrar la importancia de la métrica como solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío, entonces calculamos dos ejemplos en la métrica de Schwarzschild y emigramos a la solución de Roy Kerr. Aunque la tesis está dirigida a la métrica de Kerr, no se desarrollan los cálculos para obtenerla, pues si bien podrían caber dentro de nuestro interés, también podrían ser un trabajo por sí solo, tal como es el caso de[17], sin embargo en la introducción al capítulo dos se describe el método clásico para encontrarla.

En el Capítulo 2. Hacemos una descripción de las características relevantes en la métrica de Kerr; singularidad, horizontes de eventos y la producción de una región en el espacio tiempo llamada ergorregión debida al elemento fuera de la diagonal en la métrica. Entonces nos limitamos al movimiento en el plano ecuatorial y encontramos las ecuaciones de movimiento de  $t$ ,  $r$  y  $\phi$ . De la ecuación para  $r$  definimos un potencial efectivo y resaltamos que a diferencia del que se encuentra en la métrica de Schwarzschild éste depende de la energía de la partícula en estudio y es sensible al sentido de su momento angular.

Finalmente en el Capítulo 3. Encontramos la solución numérica a las ecuaciones de movimiento para  $r$  y  $\phi$ . Primero en una sola ecuación, la ecuación de órbita  $\frac{dr}{d\phi} = f(t, r, \phi; h, k, a)$ , y después como un sistema de ecuaciones para valores negativos del momento angular de una partícula material. Estas soluciones son comparadas con las presentes en la bibliografía con la intención de corroborar el desarrollo teórico realizado en el trabajo.

# Capítulo 0

## *Conceptos preliminares de Relatividad y convenciones*

“Desde Francis Bacon, se creía que las leyes de la naturaleza estaban ahí a ser ‘descubiertas’, solamente hacía falta el experimento correcto. Einstein nos enseñó diferente. Hizo hincapié en el papel fundamental en el proceso de invención humana. Newton ‘inventó’ la fuerza de gravedad para explicar el movimiento de los planetas. Einstein ‘inventó’ el espaciotiempo curvo y la ley geodésica; en su teoría no hay fuerza de gravedad. Si dos modelos matemáticos completamente diferentes pueden describir las mismas observaciones, seguramente se debe admitir que las teorías físicas no nos dicen lo que la naturaleza es, solamente como es. Lo maravilloso es que la naturaleza parece estar de acuerdo con algunos de los modelos más ‘simples’ que pueden ser construidos...”

Wolfgang Rindler

La Teoría de la Relatividad descansa en que la rapidez de la luz en el vacío es la misma en todos los marcos de referencia inerciales. Esto llevó a Einstein a plantear la estructura del espaciotiempo, la *invariancia del intervalo* y el *principio de máximo envejecimiento*.

La manera de medir un intervalo espaciotemporal  $ds$  está dada por la definición del tensor métrico  $g$ , que en algún marco de referencia tiene componentes  $g_{\alpha\beta}$

$$ds^2 = dx^\alpha dx^\beta g_{\alpha\beta} \quad (0)$$

éste representa la geometría del espaciotiempo y facilita la descripción de la dinámica en él sin necesidad de especificar ningún conjunto de coordenadas. En (0) se usa una de las siguientes convenciones; mismas que se emplean a lo largo del trabajo

- **Suma sobre índices repetidos.** La notación de suma es reemplazada por una suma sobre el índice  $\alpha$  cuando éste se repite en pares, una vez arriba y otra abajo

$$\sum_{\alpha=0}^3 A^\alpha B_\alpha \equiv A^\alpha B_\alpha = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3$$

con índices griegos y latinos en el rango de 0 a 3 y 1 a 3 respectivamente. En esta notación le asociamos a la coordenada temporal el índice 0. En esta notación, el índice cero es reservado para la coordenada temporal.

- **Unidades geometrizadas.** Unidades donde la velocidad de la luz  $c$ , constante de gravitación universal  $G$  y constante de Boltzman  $k$  tienen el valor de la unidad. Una de las ventajas de usar esta convención es que se puede ir de una unidad a otra por factores de conversión[3], por ejemplo de masa y energía a distancia

$$\frac{G}{c^2} = 1.0 = 0.7425 \times 10^{-28} \frac{cm}{g} \quad \text{y} \quad \frac{G}{c^4} = 1.0 = 0.826 \times 10^{-49} \frac{cm}{erg}.$$

La métrica  $g$  es un tensor tipo  $\binom{0}{2}$ . En general, un tensor tipo  $\binom{0}{N}$  es un objeto matemático que acepta linealmente  $N$  cuadvectores como argumento resultando un número real[3]

$$g(V_1, V_2, V_3, \dots, V_N) = g_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N} V^{\alpha_1} V^{\alpha_2} \dots V^{\alpha_N} = \text{Escalar real.}$$

Entonces de (0) se sigue que

$$ds^2 = dx^\alpha dx^\beta g_{\alpha\beta} = g(dx, dx)$$

donde  $dx = dx^\gamma e_\gamma$  es el cuadvector de desplazamiento, y  $e_\gamma$  el cuadvector que apunta en la dirección de la componente  $x^\gamma$ . Así se tiene

$$g_{\alpha\beta} = g(e_\alpha, e_\beta) = \begin{pmatrix} e_0 \cdot e_0 & e_0 \cdot e_1 & e_0 \cdot e_2 & e_0 \cdot e_3 \\ e_1 \cdot e_0 & e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 & e_1 \cdot e_3 \\ e_2 \cdot e_0 & e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 & e_2 \cdot e_3 \\ e_3 \cdot e_0 & e_3 \cdot e_1 & e_3 \cdot e_2 & e_3 \cdot e_3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

donde notamos que  $g$  es un tensor simétrico.

En Relatividad Especial  $g$  es la métrica de Minkowski, ésta es

$$g_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

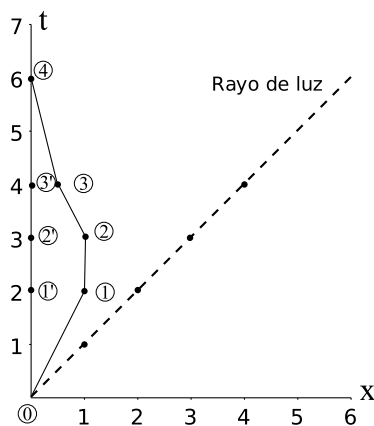
algunos autores usan la firma  $Diag(-1, 1, 1, 1)$  pero en este trabajo se usará (2).

La invariancia del intervalo  $ds$  significa que esta cantidad tiene el mismo valor numérico independientemente del marco de referencia que se use para comparar pares de eventos. Una manera de usar el intervalo para describir fenómenos físicos es que un observador esté en reposo respecto a otros, entonces sus desplazamientos espaciales valen cero mientras que el temporal es continuo y corresponde al intervalo de espaciotiempo. El tiempo medido en el marco de referencia del propio observador se le nombra tiempo propio y se denota comúnmente con  $\tau$ , en este trabajo así se usará. Lo anterior puede ser escrito en ecuaciones con ayuda de la métrica como sigue

$$ds^2 = dx^\alpha dx^\beta g_{\alpha\beta} = d\tau^2 \quad (3)$$

ya que no existen cambios espaciales.

El principio de máximo envejecimiento (PME) expresa que la trayectoria en el espaciotiempo entre dos eventos que recorre un sistema sin la necesidad de proporcionar energía corresponde a aquella que extremiza el tiempo propio entre dichos eventos[5]



$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - dx^2$$

Entre los eventos  $\{0, 4\}$

$$ds^2_{04} = dt^2 = d\tau^2$$

$$ds'^2_{01} > ds^2_{01}$$

$$ds'^2_{23} > ds^2_{23}$$

$$ds'^2_{34} > ds^2_{34}$$

Figura 0: Comparación del tiempo propio entre dos eventos medido por observadores distintos.

En la Figura 0, para ilustrar el PME, calculamos el tiempo propio entre los eventos  $\{0\}$  y  $\{4\}$  que toman dos observadores distintos: uno pasa por los eventos  $\{1', 2', 3'\}$ , mientras que el otro por  $\{1, 2, 3\}$ . Como vemos del cálculo, cualquier trayectoria que se desvíe de la línea más recta, implica un tiempo propio menor entre los eventos.

A pesar de invariancia del intervalo, la magnitud de éste puede ser positiva, nula o negativa; por ejemplo una partícula con velocidad  $\vec{v}$  respecto a un observador, en Relatividad Especial se describe como

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = dt^2 (1 - \vec{v} \cdot \vec{v})$$

donde  $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ . Entonces si  $|\vec{v}| = 1 \Rightarrow ds^2 = 0$  y el intervalo de espaciotiempo es llamado nulo o *lightlike*, sin embargo para una partícula material  $|\vec{v}| < 1$  y  $ds^2 > 0$ . Debido a que siempre existe una transformación tal que nos lleve a un marco de referencia donde la partícula permanezca en reposo[2], y el movimiento sea sólo en la dirección del tiempo,  $ds$  es llamado temporaloide o *timelike*. Cuando  $ds^2 < 0$  implica que la velocidad entre esos dos eventos es mayor a 1 y uno de ellos está fuera del cono de luz del otro. Intervalos  $ds^2 < 0$  son llamados espacialoides o *spacelike*.

En la figura 1 se muestra el cono de luz y un cuadvivector  $\chi$  con la componente  $\chi^3 = 0$ . Si la magnitud de  $\chi^\alpha \chi^\beta g_{\alpha\beta}$  es mayor a cero se encuentran dentro del cono y si es menor a cero fuera

$$\chi \text{ es } \begin{cases} \text{Temporaloide} & \text{si } \chi^\alpha \chi^\beta g_{\alpha\beta} > 0 \\ \text{Nulo} & \text{si } \chi^\alpha \chi^\beta g_{\alpha\beta} = 0 \\ \text{Espacialoide} & \text{si } \chi^\alpha \chi^\beta g_{\alpha\beta} < 0 \end{cases} \quad (4)$$

Un ejemplo de (4) es la cuadvivelocity  $u$  con su  $\mu$ -ésima componente definida como

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (5)$$

entonces de (5), (0) y (3) la magnitud de  $u$  es invariante

$$u^2 = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} g_{\alpha\beta} = \left( \frac{ds}{d\tau} \right)^2 = 1 \quad (6)$$

así  $u$  es un cuadvivector timelike. El cuadvivivemento  $p$  se define a partir de  $u$ , para partículas materiales la  $\mu$ -ésima componente es el producto de la masa de la partícula y su cuadvivivelocity, la magnitud de  $p$  también es invariante

$$p^\mu = m u^\mu, \quad p^2 = m^2 \quad (7)$$

la segunda ecuación se sigue de (6). Debido a que la masa de la partícula es positiva  $p$  es timelike.

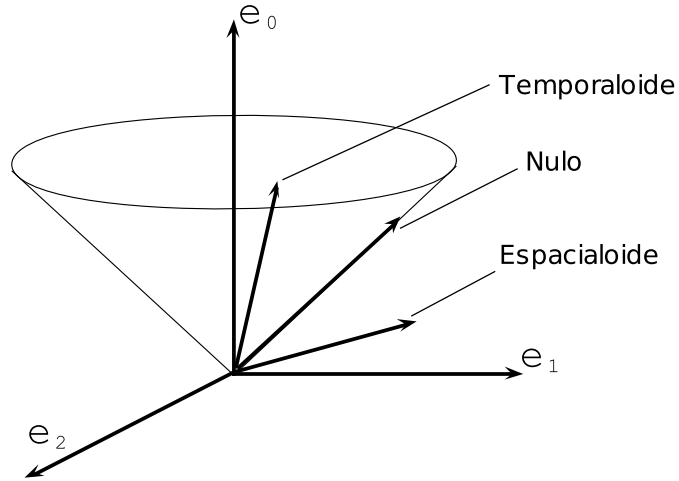


Figura 1: Clasificación de  $\chi$  según su magnitud. La componente  $\chi^3$  es elegida a cero para la visualización.

Aunque la métrica permita desarrollar la teoría sin especificar un sistema coordenado, al elegir uno para la “mejor” representación de un fenómeno físico las coordenadas seleccionadas pueden tener mal comportamiento en ciertas regiones del espaciotiempo. Por ejemplo en la métrica de Schwarzschild al usar las coordenadas de observador lejano  $(t, r, \theta, \phi)$   $t$  tiende a infinito cuando un observador se acerca al radio de Schwarzschild  $r_s$  (dos veces la masa del atractor). Entonces para una partícula que cae hacia el atractor le toma un intervalo de tiempo infinito cruzar la superficie  $r_s(\theta, \phi)$ . Esta superficie es una singularidad de las coordenadas y se remueve mediante un cambio de ellas[9, 2, 3], así la partícula logra cruzar la superficie  $r_s(\theta, \phi)$ .

Sin embargo existe un tipo de singularidad intrínseca en el espaciotiempo donde sin importar el sistema coordenado que se elija no se puede obtener información de los eventos ocurridos ahí. Tal singularidad se encuentra donde las coordenadas hacen que el escalar invariante de curvatura  $(R_{\mu\nu\sigma\rho}R^{\mu\nu\sigma\rho})$  se indetermina[9].  $R_{\mu\nu\sigma\rho}$  es el tensor de Riemann, éste expresa la curvatura del espaciotiempo y está relacionado con derivadas de la métrica hasta segundo orden[2, 9, 3].

Uno de los fenómenos que predice la Relatividad es el horizonte de eventos, éste es una superficie en el espaciotiempo alrededor del atractor donde incluso a un rayo de luz le toma infinito tiempo salir. Las simetrías de la métrica de Kerr permiten caracterizar a los horizontes de eventos en regiones donde[9]

$$g^{rr} \rightarrow 0 \quad \text{ó} \quad g_{rr} \rightarrow \infty \quad (8)$$

En los siguientes capítulos usaremos el contenido de este capítulo para desarrollar el tema del trabajo.

# Capítulo 1

## *Dinámica en el espaciotiempo*

No one is free, even the birds are chained to the sky.

Bob Dylan

### 1.1. Dinámica en el espaciotiempo a partir de la métrica

Si consideramos la parametrización de una curva en el espaciotiempo por un parámetro  $\lambda$  real, de manera que el tiempo propio es reescrito como

$$d\tau^2 = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} g_{\alpha\beta} d\lambda^2$$

entonces el intervalo de espaciotiempo entre dos eventos  $a$  y  $b$  sería

$$\tau_{ab} = \int_a^b \left( g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \right)^{\frac{1}{2}} d\lambda \quad (1.1)$$

donde  $\dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$ .

Podemos usar el principio de máximo envejecimiento, el cual nos asegura que el tiempo propio es un extremal[5] y de manera similar a lo que ocurre en Mecánica Clásica, como la lagrangiana extremiza la acción, el integrando de la ecuación anterior debe extremizar el tiempo propio. A las curvas que cumplen con éste requerimiento se les nombra *geodésicas*. El procedimiento es similar al de minimizar la acción para obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange. El desarrollo de lo anterior se encuentra en el apéndice A, el resultado es la lagrangiana

$$L(\dot{x}^\alpha, x^\alpha) = \left( g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.2)$$

y con ello las ecuaciones de movimiento debido a la métrica son

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\gamma} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\gamma} = 0 \quad (1.3)$$

donde el subíndice  $\gamma$  indica la cantidad de ecuaciones de movimiento, en el caso del espaciotiempo son cuatro. Introduciendo la forma explícita de la lagrangiana (1.2) en (1.3) y calculamos para el primer término

$$\frac{\partial (g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta)^{\frac{1}{2}}}{\partial \dot{x}^\gamma} = \frac{g_{\alpha\beta}}{2L} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\gamma} (\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta) = \frac{g_{\alpha\gamma} \dot{x}^\alpha}{L}$$

donde se ha usado  $\frac{\partial \dot{x}^\sigma}{\partial \dot{x}^\gamma} = \delta_\gamma^\sigma$ , sumado y cambiado los índices mudos. De (1.1) tenemos

$$\frac{d\tau}{d\lambda} = L = (g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta)^{\frac{1}{2}}$$

de aquí se sigue que

$$\frac{d}{d\lambda} = L \frac{d}{d\tau} \quad (1.4)$$

y con ello

$$\frac{\dot{x}^\alpha}{L} = \frac{1}{L} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$$

por lo que el primer término de (1.3) es

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial (g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta)^{\frac{1}{2}}}{\partial \dot{x}^\gamma} \right) = L \frac{d}{d\tau} \left( g_{\alpha\gamma} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right)$$

mientras que el segundo término

$$\frac{\partial L}{\partial x^\gamma} = \frac{\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}{2L} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}$$

sustituyendo las últimas expresiones y desarrollando la derivada con respecto a  $\tau$ , (1.3) queda

$$\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} + g_{\alpha\gamma} \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} = 0$$

donde podemos reescribir

$$\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} \right) \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau}$$

factorizando  $\frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau}$ , multiplicando por  $g^{\gamma\theta}$  y usando el resultado  $g^{\gamma\theta} g_{\alpha\gamma} = \delta_\alpha^\theta$  tenemos finalmente la ecuación geodésica

$$\frac{d^2 x^\theta}{d\tau^2} + \frac{1}{2} g^{\gamma\theta} \left( \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \right) \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} = 0 \quad (1.5)$$

si renombramos la cantidad

$$\frac{1}{2} g^{\gamma\theta} \left( \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \right) = \Gamma_{\alpha\beta}^\theta \quad (1.6)$$

queda la ecuación geodésica de la forma comúnmente expresada

$$\frac{d^2 x^\theta}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\theta \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (1.7)$$



donde  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\theta}$  son los símbolos de Christoffel o coeficientes de conexión[2]. De (1.6) se observa que son simétricos ante el intercambio de índices covariantes ( $\Gamma_{\alpha\beta}^{\theta} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\theta}$ ); éstos representan la variación de los vectores base usados para describir el espaciotiempo y expresan, de forma general, una medida de su curvatura por lo que localmente valen cero ya que siempre existe un sistema de referencia inercial local; la manera de calcularlos es mediante la expresión (1.6). Así en (1.7) se ve explícitamente la importancia de la métrica en las ecuaciones de movimiento.

## 1.2. Simetría y dinámica en el espaciotiempo

De manera similar a que las ecuaciones de Newton describen el movimiento de los cuerpos en un sistema de referencia inercial (mediante un análisis de fuerzas) en la Relatividad se usan geodésicas para describir el movimiento en el espaciotiempo.

Clásicamente la trayectoria de un cuerpo sobre el cual no actúan fuerzas es representado por una línea recta. El análisis mediante geodésicas implica que las trayectorias, ahora en el espaciotiempo, conservan la misma dirección que la cuadrivelocidad del movimiento y tienen la máxima longitud del intervalo de espaciotiempo. Similar a las cantidades conservadas en la Mecánica Clásica, existen las cantidades conservadas en la trayectoria de la geodésica y se observan de la métrica: cuando  $g_{\alpha\beta}$  no depende de alguna coordenada  $x^{\sigma}$  tenemos que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\sigma}} = \frac{\partial (g_{\alpha\beta} \dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta})^{\frac{1}{2}}}{\partial \dot{x}^{\sigma}} = \frac{1}{2} \frac{g_{\alpha\beta}}{L} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^{\sigma}} (\dot{x}^{\alpha} \dot{x}^{\beta}) = \text{Constante}$$

usando que  $\frac{\partial \dot{x}^{\omega}}{\partial \dot{x}^{\kappa}}$  se comporta como  $\delta_{\kappa}^{\omega}$ , sumando con la Delta y renombrando uno de los índices en la expresión resultante tenemos

$$\frac{1}{L} g_{\alpha\sigma} \dot{x}^{\alpha} = \frac{1}{L} \dot{x}_{\sigma} = \text{Constante}$$

y de (1.4) tenemos que

$$\frac{dx_{\sigma}}{d\tau} \propto p_{\sigma} = \text{Constante} \quad (1.8)$$

por lo tanto,  $\frac{dx_{\sigma}}{d\tau}$  se mantiene constante en la geodésica y nos sirve para simplificar la descripción del fenómeno como una constante de movimiento.

Por ejemplo la métrica de Schwarzschild[9]

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

describe la geometría alrededor de un objeto masivo y de simetría esférica. Las coordenadas son las esféricas excepto por  $r$ , aquí es la circunferencia del círculo respecto al origen dividida entre  $2\pi$ , o *radio reducido*.  $M$  es la masa del objeto. Debido a la simetría esférica esperamos que se conserve el momento angular; de (1.8) tenemos

$$p_\phi = \text{Constante}$$

pero,

$$p_\phi = g_{\phi\beta}p^\beta = g_{\phi\phi}p^\phi = mg_{\phi\phi}\frac{dx^\phi}{d\tau} = -mr^2\sin^2\theta\frac{dx^\phi}{d\tau}$$

con  $\omega = \frac{dx^\phi}{d\tau}$  y para el plano ecuatorial ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) la componente angular del cuádrimomento queda

$$p_\phi = -m\omega r^2 \quad (1.10)$$

cual es la definición en mecánica clásica para el momento angular alrededor de un eje de rotación, el signo es debido a la elección de la métrica. Además la métrica no depende de  $t$ , entonces  $\frac{dt}{d\tau}$  es constante, de (1.2) y (1.3) tenemos que

$$L = \left[ g_{00}(\dot{x}^0)^2 + g_{11}(\dot{x}^1)^2 + g_{22}(\dot{x}^2)^2 + g_{33}(\dot{x}^3)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} \right) = 0$$

o bien

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} = \frac{1}{2L} 2g_{00}\dot{x}^0 = \text{Constante} \equiv k$$

$$g_{00}\frac{dx^0}{d\tau} = p_0 = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} = k$$

cuando  $r \rightarrow \infty$  se recupera la métrica del espaciotiempo plano ( $k = \frac{E}{m}$ ) y entonces se identifica

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{m} = \text{Constante}$$

y así

$$\frac{E}{m} = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} \quad (1.11)$$

donde se observa que la ausencia de la coordenada temporal en la métrica conlleva a la conservación de la energía en la métrica de Schwarzschild.

Como vimos en los resultados anteriores, las cantidades conservadas son por unidad de masa, y esto es debido a que  $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\nu}$  corresponde a la  $\nu$ -ésima componente del cuádrimomento. Es por ello que de aquí en adelante usaremos los cuádrimomentos por unidad de masa, eso nos facilitará el cálculo y la manipulación algebraica.

### 1.3. La métrica es la solución a las ecuaciones de Einstein.

Las secciones anteriores están centradas en la dinámica desde la métrica con el fin de notar su importancia, sin embargo no se ha dicho nada acerca de cómo se conoce. La métrica se obtiene al resolver las ecuaciones de Einstein

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = -8\pi T^{\mu\nu} \quad (1.12)$$

donde  $G^{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein.  $R^{\mu\nu}$  y  $R$  son contracciones del tensor de Riemann  $R^{\alpha}_{\rho\lambda\sigma}$ , éste expresa la curvatura del espaciotiempo y está relacionado con derivadas de la métrica hasta segundo orden[9]. El tensor de Riemann posee simetrías en la contracción sobre ciertos pares de índices que conllevan a la simetría de  $G^{\mu\nu}$ . Además el tensor de Einstein tiene divergencia por construcción[2, 9, 10]

$$\nabla_{\mu}G^{\mu\nu} = 0$$

donde  $\nabla_{\mu}$  es la derivada covariante, ésta lleva no sólo información del cambio en las componentes en los cuadvectores sino también en sus vectores base[2, 9, 3].

El lado derecho de (1.12) es el tensor de esfuerzo energía, expresa la generalización del tensor de esfuerzo de mecánica clásica y es simétrico. Las componentes  $T^{\mu\nu}$  contienen información de la relación entre los vectores de momento y flujo el de energía en algún marco de referencia. Además, de forma local, las leyes de conservación llevan a la conclusión de que el tensor  $T^{\mu\nu}$  tiene divergencia nula[2]

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}} = 0 \quad (1.13)$$

donde  $\mu = 0$  implica la conservación de la energía y  $\mu = 1, 2, 3$  refiere a la conservación del momento. La constante  $8\pi$  en (1.12) es elegida para que las ecuaciones de Einstein concuerden con la ley de gravitación de Newton en una aproximación de campo débil y el signo es debido a la firma de la métrica[2][9][3].

La divergencia  $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$  en (1.13) es generalizada a espacios curvos mediante la cuatridivergencia  $\nabla_{\mu}$ , pero ahí no hay una conservación de cuatrimomentos en general, sino que  $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$  implica cómo la materia se debiese mover. Así la propuesta de Einstein (1.12) es que cúmulos de masa o fuentes de energía deforman el espaciotiempo y a la vez éste les dicta como moverse en él. Es por ello que tales ecuaciones son acopladas, para resolverlas y encontrar las componentes de la métrica, uno debe hacer suposiciones del tensor  $T^{\mu\nu}$  en el lado derecho, es decir, intuir características de la materia o energía contenida en esa región del espaciotiempo.

## Capítulo 2

# *La métrica en la vecindad de cuerpos masivos*

Dos soluciones a las ecuaciones de Einstein son las métricas obtenidas por Karl Schwarzschild y Roy Kerr, ambas, aunque difieren en los fenómenos físicos que describen, implementan simetrías en el espaciotiempo.

Por ejemplo, la solución de Schwarzschild considera una simetría esférica en un régimen permanente (dos simetrías espaciales y una temporal) del espaciotiempo fuera de un cuerpo masivo con masa  $M$  sin carga y que no rota sobre alguno de sus ejes. Entonces esperamos que  $g_{\alpha\beta}$  no dependan de  $t$ , de manera que

$$g = g(\vec{x}) \quad (2.1)$$

con  $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ .

Si utilizamos coordenadas esféricas,  $(t, r, \theta, \phi)$ , el intervalo de espaciotiempo más general que se puede tener es[9]

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

con  $A(r)$  y  $B(r)$ , dos funciones arbitrarias de la coordenada radial. Así, la métrica es diagonal. Después de considerar a (2.1) como una solución en el vacío ( $T^{\mu\nu} = 0$ ) y que debe tender al espaciotiempo plano en un punto lejano,  $g \rightarrow \eta$ , es posible encontrar el escalar y tensor de Ricci para conseguir un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas de los elementos  $g_{\alpha\beta}$  que al resolver dejan la solución de Schwarzschild[2, 9]

$$g = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Con todo lo anterior, el elemento de línea correspondiente a la solución de Swcharzschild (que fue usada en los ejemplos de la sección 1.2) es

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.2)$$

## 2.1. La métrica de Kerr

Esta métrica describe el espaciotiempo que rodea un objeto con distribución de materia constante, eléctricamente neutro y con rotación en régimen permanente. Aquí las simetrías que emergen son debido a la ausencia tanto de la coordenada asociada al eje de giro ( $\phi$ ) como al tiempo ( $t$ ). Éstas nos llevan a la conservación de la componente  $\phi$  del momento angular y la energía, respectivamente. El desarrollo para encontrar la solución en el vacío ( $T_{\mu\nu} = 0$ ) de (1.12) con tales características es análogo al planteado en la sección previa, pero la condición de régimen permanente implica que tras invertir la coordenada  $t$  por  $-t$ , la rotación del objeto también cambia de dirección. Para los propósitos de este trabajo sólo plantearemos el elemento de línea de la métrica de Kerr ( $t, r, \theta, \phi$ )

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 + \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.3)$$

donde

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad y \quad \Delta = a^2 + r^2 - 2Mr \quad (2.4)$$

el parámetro  $a$  está relacionado al momento angular del cuerpo a lo largo de su eje de rotación mediante

$$a = \frac{J}{M} \quad (2.5)$$

con  $J$  el momento angular y  $M$  la masa del objeto atractor. El desarrollo explícito para encontrar (2.3) se encuentra en [17]. Por razones de conveniencia en esta sección usaremos indistintamente números o letras en los índices, por ejemplo  $g_{tt} = g_{00}$ . La correspondencia es

$$(t, r, \theta, \phi) \quad \rightarrow \quad (0, 1, 2, 3).$$

Notamos que (2.3) tiende a la expresión de Schwarzschild cuando  $a$  tiende a cero. Además es necesario que cuando la masa del cuerpo tienda a cero la solución cumpla con ser la del espaciotiempo plano. Tomando el límite cuando  $M$  tiende a cero tenemos

$$ds^2 = dt^2 - \frac{\rho^2}{r^2 + a^2} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2$$

donde se identifica el espaciotiempo plano mediante el cambio de las coordenadas espaciales  $(r, \theta, \phi) \mapsto (x, y, z)$

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \phi \\y &= \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \phi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}$$

con el dominio de las variables

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad y \quad 0 \leq \phi < 2\pi,$$

la variable  $z$  está orientada a lo largo del eje de rotación,  $x$  e  $y$  pertenecen al plano ecuatorial. El cambio anterior corresponde a las coordenadas elipsoidales oblatas, esto se ve de las ecuaciones de transformación ya que pueden reescribirse como una ecuación explícita de las coordenadas espaciales

$$\begin{aligned}\frac{x^2 + y^2}{a^2 + r^2} &= \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{z^2}{r^2} \\ \frac{x^2 + y^2}{a^2 + r^2} + \frac{z^2}{r^2} &= 1\end{aligned}$$

donde  $a^2 \geq 0$  concluyendo con superficies elipsoidales oblatas. Cuando el parámetro  $a$  tiende a cero se recuperan las superficies esféricas tal como en la métrica de Schwarzschild.

Por lo anterior, podemos interpretar a estas coordenadas como aquellas que mide un observador lejano, en las que  $t$ , corresponde al tiempo,  $r$  al *radio reducido*, y  $\theta, \phi$  corresponden a los ángulos cenital y acimutal. Se denominan coordenadas *Boyer-Lindquist* para diferenciarlas de las coordenadas esféricas ordinarias que tendrían un elemento de línea mucho más simple.

## 2.2. Características de la métrica

### 2.2.1. Horizontes y singularidad

Debido a la simetría de la métrica (2.3), observamos que los horizontes se encuentran cuando  $\Delta = 0$ . Entonces de (2.4) existen dos horizontes de eventos localizados en

$$r_{\pm} = M \pm (M^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.6)$$

así cuando el momento angular del atractor es nulo, se tienen los horizontes de eventos en  $r_- = 0$  y  $r_+ = r_s$  recuperando el resultado de Schwarzschild. De (2.6) observamos que si  $a > M$

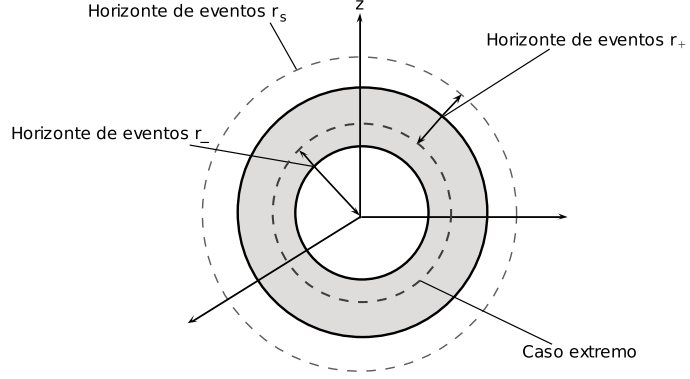


Figura 2.1: Los horizontes de eventos en la métrica de Kerr  $r_{\pm}$  varían en un rango acotado por los de la métrica de Schwarzschild ( $a = 0$ ) y se reducen a uno solo cuando se presenta  $a = M$  (Métrica extrema de Kerr).

entonces no existirían horizontes de eventos, pero como  $r$  es una variable con sentido físico, debe ser real, por lo que  $a \leq M$ . Cuando  $a = M$  los horizontes se reducen a uno solo en  $r = M$ , este caso es llamado *métrica extrema de Kerr* (Figura 2.1).

Con el escalar de curvatura se conoce la existencia de una singularidad intrínseca en la métrica de Kerr[14]

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{48M^2 [r^2 - a^2 \cos^2 \theta (\rho^4 - 16r^2 a^2 \cos^2 \theta)]}{\rho^{12}} \quad (2.7)$$

así con  $\rho = 0$  en (2.4) vemos que la singularidad se encuentra en

$$r = 0 \quad y \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad (2.8)$$

pero de la sección anterior concluimos que la singularidad no es un punto, a diferencia de la métrica de Schwarzschild ésta es un disco de radio  $a$  centrado en  $r = 0$  dentro del plano ecuatorial.

### 2.2.2. Arrastre de marcos inerciales

Debido a que la métrica es independiente de  $\phi$ , la componente del momento angular asociada a la coordenada,  $p_{\phi}$  se conserva a lo largo de una geodésica. Entonces cuando una partícula tiene momento angular nulo se sigue que las componentes  $p^{\phi}$  y  $p^t$  son

$$\begin{aligned} p^{\phi} &= g^{\phi\mu} p_{\mu} = g^{\phi t} p_t + g^{\phi\phi} p_{\phi} = g^{\phi t} p_t \\ p^t &= g^{t\mu} p_{\mu} = g^{tt} p_t + g^{t\phi} p_{\phi} = g^{tt} p_t \end{aligned}$$

usando las componentes contravariantes de la métrica  $g_{t\phi} = -\text{Det}(g)g^{t\phi}$  y  $g_{\phi\phi} = \text{Det}(g)g^{t\phi}$  vemos que aún hay velocidad angular de arrastre

$$\omega(r, \theta) \equiv \frac{d\phi}{dt} = \frac{g^{\phi t}}{g^{tt}} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} = \frac{2aMr}{2a^2Mr \sin^2\theta + (r^2 + a^2)\rho^2} \quad (2.9)$$

donde usamos

$$\frac{p^\phi}{p^t} = \frac{\frac{dx^\phi}{d\tau}}{\frac{dx^t}{d\tau}} = \frac{\frac{dx^\phi}{d\tau} d\tau}{\frac{dx^t}{d\tau} d\tau} = \frac{dx^\phi}{dx^t} \quad (2.10)$$

entonces una velocidad angular aparece por el elemento  $g_{t\phi} \neq 0$  creando un arrastre en los marcos inerciales. En el capítulo 3 se calcula una órbita para una partícula con momento angular nulo, ahí se aprecia el arrastre debido a (2.9). Notamos que este resultado es general para métricas con simetría axial que contengan el elemento mixto  $g_{t\phi}$ , sin embargo para (2.9) con un campo gravitacional débil o un radio suficientemente grande  $\omega \sim \frac{1}{r^3}$  y es posible medir el arrastre de marcos inerciales[15].

### 2.2.3. Límite de superficies estacionarias

El arrastre debido al espaciotiempo es inevitable en ciertas regiones, y las superficies que dividen a tales regiones son llamadas superficies de límite estacionario. Para asentar lo anterior consideremos un observador estacionario (en su marco de referencia sólo  $dt \neq 0$ ), éste tiene el elemento de línea

$$ds^2 = g_{tt}dt^2$$

implicando que los observadores estacionarios sólo existen en regiones donde  $g_{tt} \geq 0$ , o bien

$$\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) \geq 0$$

$$r^2 + a^2 \cos^2\theta - 2Mr \geq 0$$

donde se usó (2.4). Entonces las superficies de estos observadores están en

$$r = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2\theta} \quad (2.11)$$

coincidiendo con el horizonte de eventos  $r_+$  en  $\theta = 0$ . La figura 2.2 muestra las diferentes regiones que rodean un agujero negro de Kerr. Las superficies (2.11) también son llamadas superficies de corrimiento al rojo infinito ( $S^+$  y  $S^-$ ). Las frecuencias de un emisor  $E$  y receptor  $R$  están relacionadas por ([9], ec. (9.55))

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \left[ \frac{g_{tt}(A)}{g_{tt}(B)} \right]^{\frac{1}{2}}$$



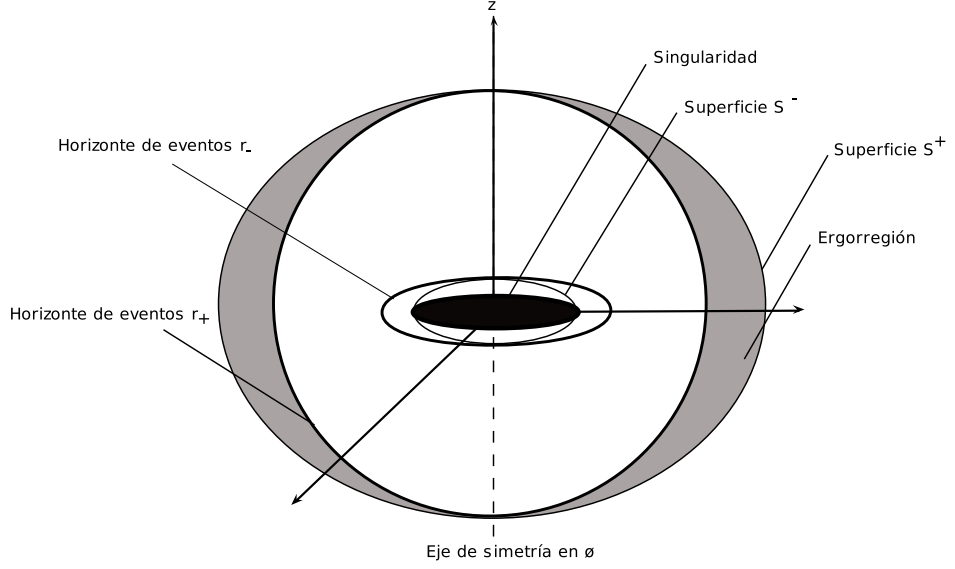


Figura 2.2: Estructura del espaciotiempo en la métrica de Kerr.

cuando la métrica es independiente del tiempo y los observadores  $E$  y  $R$  están fijos. Donde  $A$  es el evento de emisión y  $B$  el de recepción. Así cuando  $r$  tiende a (2.11) entonces  $g_{tt}(A) \rightarrow 0$ , en el límite  $\nu_R \rightarrow 0$  obteniendo un corrimiento al rojo infinito.

Aún podemos puntualizar más este resultado, consideremos el elemento de línea de un fotón y de (2.3) podemos calcular la velocidad angular  $\Omega = \frac{d\phi}{dt}$  con la que un observador en infinito ve rotar al fotón

$$g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + 2g_{t\phi}d\phi dt + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2 = 0$$

usando (2.10) se tiene una ecuación de segundo grado en  $\Omega(r, \theta)$  que al resolver nos queda

$$\Omega_{\pm} = \omega(r, \theta) \pm \sqrt{\omega^2(r, \theta) - \frac{1}{g_{\phi\phi}} \left[ g_{tt} + g_{rr} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + g_{\phi\phi} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]} \quad (2.12)$$

así observamos que para  $r$  cercanas a (2.11) la velocidad angular  $\Omega$  puede variar según el discriminante de (2.12). La forma general de  $\Omega_{\pm}$  no es fácil de analizar, pero si se toma el caso de un fotón que sólo tiene velocidad angular ( $\dot{r} = \dot{\theta} = 0$ ) tenemos

$$\Omega^*(r, \theta) = \omega(r, \theta) \pm \sqrt{\omega^2(r, \theta) - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}} \quad (2.13)$$

debido a que en las coordenadas Boyer-Lindquist  $g_{\phi\phi}$  siempre es negativo existen resultados relevantes dependiendo de la región donde se encuentre el fotón. Cuando

- $g_{tt} = 0$

$$\Omega^*(r, \theta) = \begin{cases} 2\omega(r, \theta) & \text{Fotón corrotante} \\ 0 & \text{Fotón contrarrotante} \end{cases} \quad (2.14)$$

- $g_{tt} > 0$ . (Por lo tanto  $-\frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}$  siempre es positivo)

$$\Omega^*(r, \theta) = \begin{cases} \omega(r, \theta) + \sqrt{\omega^2(r, \theta) - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}} > 2\omega(r, \theta) & \text{Fotón corrotante} \\ \omega(r, \theta) - \sqrt{\omega^2(r, \theta) - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}} < 0 & \text{Fotón contrarrotante} \end{cases} \quad (2.15)$$

- $g_{tt} < 0$ . (Por lo tanto  $-\frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}$  siempre es negativo)

$$\Omega^*(r, \theta) = \begin{cases} \omega(r, \theta) + \sqrt{\omega^2(r, \theta) - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}} < 2\omega(r, \theta) & \text{Fotón corrotante} \\ \omega(r, \theta) - \sqrt{\omega^2(r, \theta) - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}} > 0 & \text{Fotón contrarrotante} \end{cases} \quad (2.16)$$

así  $g_{tt} = 0$  implica que para partículas materiales ( $ds^2 \neq 0$ ) el movimiento es obligatorio sin importar la cantidad de movimiento angular que éstas posean.

En la región entre  $S^+$  y  $r_+$ , el elemento  $g_{tt}$  toma valores menores a cero y el movimiento en dirección de la rotación en  $\phi$  es obligatorio incluso para fotones contrarrotantes. De manera particular, si  $\frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}} = \omega^2$  entonces una partícula ahí está constreñida a rotar con una velocidad angular  $\omega$ . El hecho de que el límite de rotación en sentido opuesto al del cuerpo sea cero en  $S^+$  es precisamente la definición de las superficies de límite estacionario, puesto que en el interior de ellas cualquier observador debe rotar en la misma dirección del cuerpo que deforma el espaciotiempo.

### 2.3. Proceso de Penrose

La región donde  $g_{tt} < 0$  es llamada ergorregión (*ergo* significa trabajo en griego), y es debido a que el arrastre de marcos inerciales puede considerarse como trabajo realizado por el agujero negro sobre las partículas o cuerpos en tal región.

Un proceso por el cual puede extraerse energía en la ergorregión es el de Penrose, en éste se considera un observador que envía una partícula A hacia la región, la energía de la partícula medida por el observador en infinito es

$$E^{(A)} = p^{(A)} \cdot u$$

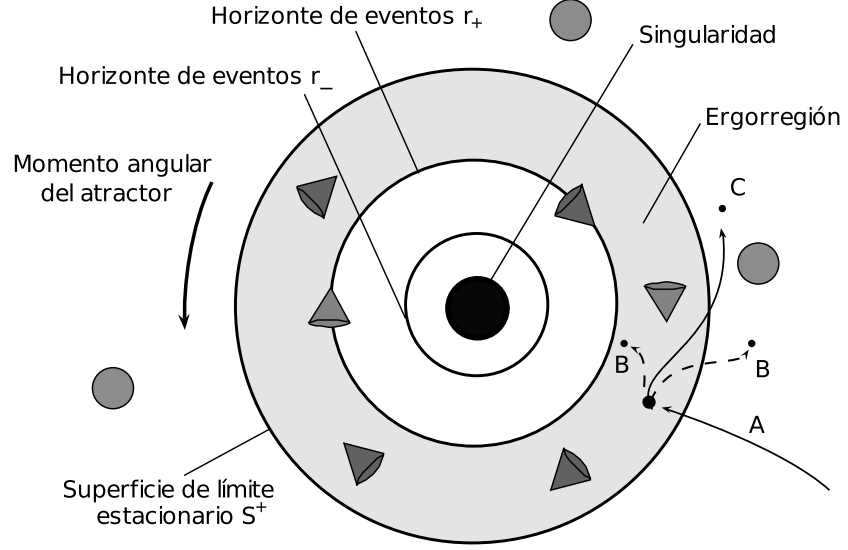


Figura 2.3: Conos de luz en la ergorregión del plano ecuatorial vistos desde el eje de simetría,  $e_t$  ya no apunta en la dirección temporal sino que debido al arrastre de los marcos inerciales este vector ahora es espacialoide.

con  $u = (1, 0, 0, 0)$ . Si una vez en la ergorregión A decae en dos partículas B y C en un evento  $\mathcal{D}$

$$p^{(A)}(\mathcal{D}) = p^{(B)}(\mathcal{D}) + p^{(C)}(\mathcal{D})$$

y la partícula C escapa de la ergorregión, la energía de esta última puede ser expresada como

$$\begin{aligned} E^{(C)} &= E^{(A)} - p_t^{(B)}(\mathcal{D}) \\ E^{(C)} &= E^{(A)} - e_t \cdot p^{(B)}(\mathcal{D}) \end{aligned} \quad (2.17)$$

pues cada una de estas cantidades se conserva en las geodésicas porque la métrica es estacionaria.

Si B saliera fuera de la ergorregión se cumple  $g_{tt} > 0$  y entonces de (1)  $e_t$  es temporaloide

$$(e_t)^2 = e_t \cdot e_t = g_{tt} > 0$$

implicando que  $p_t^{(B)}(\mathcal{D})$  es la energía. Como  $p_t^{(B)}(\mathcal{D}) = E^{(B)}$  debe ser positiva concluimos

$$E^{(C)} < E^{(A)}$$

por lo que la energía de la partícula que entra es mayor a la energía de la que sale. En el caso que B permanezca en la ergorregión o caiga al horizonte de eventos  $g_{tt}$  es menor que cero y  $e_t$  es espacialoide. Entonces  $e_t$  ya no apunta en la dirección temporal, sino en alguna espacial y

$e_t \cdot p^{(B)}$  no corresponde a la energía sino a alguna componente espacial del momento  $p^{(B)}$ , ésta puede ser positiva o negativa. Cuando  $p_t^{(B)}$  ( $\mathcal{D}$ ) es negativa, entonces la energía de la partícula que salió es mayor a la energía de la que entró, extrayendo así energía de la ergorregión

$$E^{(C)} > E^{(A)}$$

concluyendo así el proceso de Penrose.

Mediante la extracción de energía en el proceso de Penrose, un agujero negro de Kerr puede ser reducido a uno de Schwarzschild pues la masa y momento angular del agujero negro cambian como[9]

$$M \rightarrow M + mk$$

$$J \rightarrow J + mh$$

y en consecuencia  $\delta M = mk$  y  $\delta J = mh$ .

Por ejemplo, un observador en la ergorregión con  $r$  y  $\theta$  fijos que ve a B caer al horizonte de eventos mide la energía de B como

$$E^{(B)} = p^{(B)} \cdot u = u^t p_t^{(B)} + u^\phi p_\phi^{(B)}$$

donde  $u = (u^t, 0, 0, u^\phi)$  es la velocidad del observador porque en la ergorregión éste debe rotar en dirección de  $a$  (Sección 2.2.3). Usando

$$u^\phi = \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{d\tau} = u^t \Omega$$

$E^{(B)}$  queda

$$E^{(B)} = u^t \left( p_t^{(B)} + p_\phi^{(B)} \Omega \right)$$

aquí  $u^t$  está dada por (6) y (2.3)

$$u^t = \frac{1}{\sqrt{g_{00} + 2\Omega g_{03} + \Omega^2 g_{33}}} = \frac{1}{\Omega^*(r, \theta)}$$

y debe ser positiva ya que en infinito se debe recuperar que  $u^\phi$  sea cero y  $(u^t) = 1$ . En la segunda igualdad se usó (2.13) pero la energía de B debe ser positiva, con ello se sigue la condición

$$\begin{aligned} p_t^{(B)} + p_\phi^{(B)} \Omega &> 0 \\ -p_\phi^{(B)} &< \frac{p_t^{(B)}}{\Omega} \\ h &< \frac{p_t^{(B)}}{\Omega} \end{aligned}$$

en el tercer renglón se usó que en general la componente espacial del momento asociada al eje de rotación es menos el momento angular, justo como en (B.2). Debido a que  $p_t^{(B)}$  es negativo para el proceso de Penrose y  $\Omega$  es positiva en la ergorregión entonces la componente del momento angular  $h$  debe ser negativa y de ahí el cambio en  $J$  también. Así, el proceso de Penrose puede llevarse a cabo para extraer energía rotacional del agujero negro y reducirlo a uno de Schwarzschild.

## 2.4. Movimiento en el plano ecuatorial

La característica principal de la métrica de Kerr es que el atractor posee momento angular, así ésta no tiene simetría esférica sino axial y el movimiento de una partícula en el espaciotiempo sólo conserva la componente del momento angular asociada a la coordenada  $\phi$  (en coordenadas Boyer-Lindquist). Por ello una órbita en general no permanece fija en algún plano  $\theta$  de movimiento. Sin embargo debido a la simetría de la métrica, una partícula en el plano ecuatorial ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) es atraída en la misma cantidad por ambos hemisferios y el movimiento permanece en el plano ecuatorial[4]. Además de la razón anterior, describir el movimiento fuera del caso particular  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , implica cálculos más extensos y se recomienda usar un formalismo distinto al que se presenta en este trabajo[13][12]; por ello nos quedaremos con el movimiento en el plano ecuatorial.

Para encontrar la ecuaciones de movimiento podemos recurrir a la conservación de las componentes 0 y 3 en  $p$

$$p_t = g_{at}\dot{x}^\alpha = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t} + \frac{2Ma}{r}\dot{\phi} = k$$

$$p_\phi = g_{\alpha\phi}\dot{x}^\alpha = \frac{2Ma}{r}\dot{t} - \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right)\dot{\phi} = -h$$

si resolvemos el sistema de ecuaciones anterior para  $\dot{t}$  y  $\dot{\phi}$  obtenemos

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{2Ma}{r}k + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)h \right] \quad (2.18)$$

$$\dot{t} = \frac{1}{\Delta} \left[ \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right)k - \frac{2Ma}{r}h \right] \quad (2.19)$$

notemos que las coordenadas  $t$  y  $\phi$  son “malas coordenadas” ya que  $\{t, \phi\} \rightarrow \infty$  cuando  $r \rightarrow r_+$ , como veremos en el capítulo 3 esto implica que un observador en infinito ve caer a una partícula hacia el atractor por tiempo indefinido mientras rota en dirección del momento angular en una región cerca de  $r_+$ .

La ecuación de movimiento para  $r$  requiere de un cálculo más extenso ya que no se conserva  $p_1$ , pero podemos usar la invariancia de la magnitud del cuádrimomento (7)

$$g^{tt} (p_t)^2 + 2g^{t\phi} p_t p_\phi + g^{\phi\phi} (p_\phi)^2 + g^{rr} (p_r)^2 = \epsilon^2 \quad (2.20)$$

donde  $\epsilon$  es un parámetro a elegir dependiendo si se trata de una partícula material o un fotón, 1 ó 0 respectivamente. Introduciendo las cantidades conservadas  $h$  y  $k$  podemos resolver (2.20) para  $\dot{r}$  como

$$\dot{r}^2 = g^{rr} \left( \epsilon^2 - k^2 g^{tt} + 2hk g^{t\phi} - h^2 g^{\phi\phi} \right)$$

y con las componentes contravariantes de la métrica la ecuación de movimiento para  $\dot{r}$  queda

$$\dot{r}^2 = k^2 - \epsilon^2 + \frac{2M\epsilon^2}{r} + \frac{a^2 (k^2 - \epsilon^2) - h^2}{r^2} + \frac{2M(h - ak)^2}{r^3}. \quad (2.21)$$

Esta ecuación coincide con la misma forma funcional en  $r$  que  $\dot{r}$  en la métrica de Schwarzschild y de hecho las ecuaciones de movimiento (2.16), (2.17) y (2.21) coinciden con las de una partícula en tal métrica cuando  $a \rightarrow 0$ , donde  $\phi$  es una “buena coordenada”. Las ecuaciones (2.16), (2.17), (2.21) y las componentes contravariantes de la métrica son desarrolladas explícitamente en el apéndice B.

De (2.21) suele definirse un potencial efectivo de una partícula ( $\epsilon = 1$ ) como

$$V_{ef}(r; h, k) = -\frac{M}{r} + \frac{h^2 - a^2 (k^2 - 1)}{2r^2} - \frac{M(h - ak)^2}{r^3} \quad (2.22)$$

que, a diferencia del potencial efectivo en la métrica de Schwarzschild, ahora depende de la energía  $k$  y orientación del momento angular  $h$ . La primera diferencia implica que el método de graficar  $V_{ef}$  para un momento angular dado y trazar diferentes niveles de energía como se hace en Schwarzschild no funciona. La segunda diferencia implica que el potencial efectivo para una partícula tiene diferente forma dependiendo si esta rota en dirección de  $a$  o en su contra. A pesar de lo anterior, la definición de  $V_{ef}$  permite reescribir (2.21) de manera similar a la ec. radial para Schwarzschild

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = \frac{1}{2}(k^2 - 1) - V_{ef}(r; h, k) \quad (2.23)$$

de aquí se pueden encontrar los valores característicos de  $h$  y  $k$  por medio de un tratamiento clásico, por ejemplo para órbitas circulares estables se requiere que la aceleración en  $r$  sea nula ( $\ddot{r} = 0$ ) y las desviaciones en  $r$  sean pequeñas oscilaciones alrededor del radio orbital[9]

$$\frac{dV_{ef}}{dr} = 0 \quad y \quad \frac{d^2V_{ef}}{dr^2} > 0$$

En el capítulo 3, usaremos (2.23) para clasificar órbitas, visualizar la velocidad radial en ellas y conocer sus puntos de retorno.

## 2.5. Singularidad desnuda en la métrica de Kerr

En la sección 2.2.1 se comentó que para un atractor con momento angular  $a > M$  los horizontes de eventos serían removidos y lo mismo ocurre para las superficies de límite estacionario, entonces el disco de singularidad quedaría accesible para un observador en infinito. Una singularidad visible para cualquier observador es llamada *desnuda*. Esto significa que existe un punto accesible donde las leyes de la física no son válidas.

Cuando una partícula de masa  $m$  cae al atractor los parámetros  $M$  y  $J$  de éste pueden ser modificados como (Sección 2.3)

$$M = M' + km \quad (2.24)$$

$$J = J' + mh \quad (2.25)$$

donde el primado indica el valor original de los parámetros. Debido a (2.5) se sigue que  $a$  varía de manera

$$\delta a = \frac{\delta J - a\delta M}{M}$$

pero  $\delta J = mh$  y  $\delta M = km$ , entonces

$$\delta a = \frac{m}{M}(h - ak) \quad (2.26)$$

Así, para remover el horizonte  $r_+$  y la superficie  $S^+$  la condición  $a > M$  debe cumplirse, pero ésta delimita los valores de  $h$  y  $k$  ya que  $\delta a > \delta M$  y por lo tanto

$$\frac{m}{M}(h - ak) > km \quad \text{ó} \quad h > (M + a)k$$

y para un atractor con la métrica de Kerr extrema es

$$h > 2Mk \quad (2.27)$$

pero si en (2.22) usamos  $a = M$  y  $h = 2Mk$  tenemos

$$V_{ef}^* = -\frac{M}{r} + \frac{M^2}{2r^2}(3k^2 + 1) - \frac{M^3}{r^3}k^2 \quad (2.28)$$

para ver cual es el valor máximo del potencial calculamos los puntos de inflexión, resulta ser que éste tiene un máximo en  $r = M$  y un mínimo en  $r = 3Mk^2$ . Así el valor máximo del potencial es

$$\begin{aligned} V_{ef,max}^* &= V_{ef}^*(r = M; k) = -1 + \frac{1}{2}(3k^2 + 1) - k^2 \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}k^2 \\ V_{ef,max}^* &= \frac{1}{2}(k^2 - 1) \end{aligned} \quad (2.29)$$

y de (2.23) observamos que  $V_{ef,max}^*$  tiene justo el valor necesario para evitar que la partícula caiga al agujero negro de Kerr extremo y se produzca una singularidad desnuda(Figura 2.4).

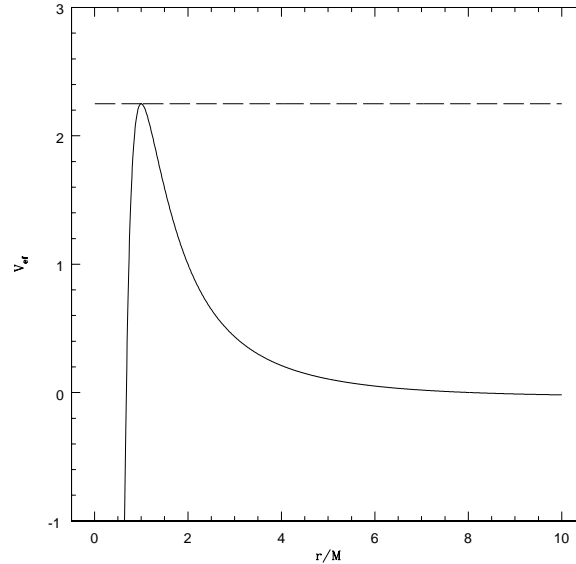


Figura 2.4: La curva sólida es  $V_{ef,max}$  mientras la punteada es  $\frac{1}{2}(k^2 - 1)$ . El valor de  $V_{ef}$  es el valor justo para que la partícula quede orbitando inestablemente. En esta gráfica el valor de  $k$  es arbitrario.

La órbita correspondiente a (2.29) es circular e inestable en el horizonte de eventos. Aunque se probó para el caso particular de  $\theta = \frac{\pi}{2}$  y  $a = M$  este resultado es general para la métrica de Kerr[9, 10]. Entonces (2.3) describe un espaciotiempo sin singularidades alrededor de cualquier atractor masivo y con rotación sobre alguno de sus ejes, por lo que funciona como un buen modelo para el espaciotiempo alrededor de objetos astrofísicos reales. En el siguiente capítulo se calculan órbitas similares a (2.29) y con distintos valores de  $h$  y  $k$  por medio de integración numérica.



# Capítulo 3

## *Cálculo de órbitas en la métrica de Kerr*

De 1974 a 1981 J.H. Taylor y M. Weisberg comprobaron la existencia del sistema PSR 1913+16, un pulsar binario, al cual midieron la frecuencia de sus pulsos electromagnéticos emitidos. Tal frecuencia no es constante y cambia según el estado del sistema dentro de las posibles órbitas de éste predichas por la Relatividad General[16]. Desde entonces, sistemas como PSR 1913+16 son una elección regular para intentar medir el cambio en la frecuencia de los pulsos debido a la pérdida de energía del sistema por radiación gravitacional[12, 16]. Por ello el cálculo de las órbitas no es sólo un problema académico sino una parte necesaria para la verificación de la Relatividad.

Durante el desarrollo de este trabajo usamos unidades geometrizadas, a partir de este capítulo es conveniente tomar como referencia el valor de la masa del atractor

$$r' = \tilde{r}M \quad a' = \tilde{a}M \quad h' = \tilde{h}M \quad y \quad \tau' = \tilde{\tau}M$$

donde  $\tilde{r}$ ,  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{h}$  y  $\tilde{\tau}$  son números reales. La tilde se usa para denotar una variable adimensional. Para facilitar la visualización en este capítulo tomaremos todas las variables adimensionales y dejaremos la notación sin tilde. A estas unidades les llamaremos *unidades del sistema*.

### 3.1. Ecuaciones para una solución numérica en el plano ecuatorial

El potencial efectivo (2.22) proporciona un método para encontrar el movimiento de una partícula en la métrica de Kerr que no se puede explotar de manera plena como en la métrica de Schwarzschild debido a su dependencia en la energía. Sin embargo aún es posible calcular el comportamiento de algunas órbitas.

De (2.21) y (B.3) podemos encontrar una ecuación diferencial de la forma  $\frac{dr'}{d\phi} = f(r'; k, h', a')$  para resolver y encontrar las órbitas de una partícula en el espaciotiempo

$$dr' = \pm \Delta' \left[ k^2 - 1 + \frac{2M}{r'} + \frac{a'^2 (k^2 - 1) - h'^2}{r'^2} + \frac{2M (h' - a'k)^2}{r'^3} \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{2Ma'k}{r'} + \left( 1 - \frac{2M}{r'} \right) h' \right]^{-1} d\phi$$

donde  $\Delta' = a'^2 + r'^2 - 2Ma'$ . Reescribiendo lo anterior en las unidades del sistema tenemos la ecuación diferencial que usaremos en este trabajo para encontrar las órbitas

$$dr = \pm \left[ k^2 - 1 + \frac{2}{r} + \frac{a^2 (k^2 - 1) - h^2}{r^2} + \frac{2(h - ak)^2}{r^3} \right]^{\frac{1}{2}} (r^2 + a^2 - 2r) \left[ \frac{2ak}{r} + \left( 1 - \frac{2}{r} \right) h \right]^{-1} d\phi \quad (3.1)$$

y debido a su no linealidad usaremos el método Runge Kutta de cuarto orden (RK4) para resolverla numéricamente. El signo  $\pm$  en (3.1) es importante en trabajos donde se usa un potencial efectivo para calcular órbitas, pues representa el cambio de signo de la velocidad en los puntos de retorno  $(r, \phi)$  tales que  $V_{ef} = \frac{1}{2} (k^2 - 1)$ , pero de (2.21) y (2.23) esta condición implica

$$k^2 - 1 + \frac{2}{r} + \frac{a^2 (k^2 - 1) - h^2}{r^2} + \frac{2(h - ak)^2}{r^3} = 0 \quad (3.2)$$

esta ecuación puede ser resuelta analíticamente ya que es un polinomio de tercer grado, sin embargo, por el método computacional que usaremos para resolver (3.1) resulta más práctico usar un método numérico para encontrar las raíces de (3.2).

## 3.2. Solución numérica

En el apéndice C se muestra el código del programa en FORTRAN 90 usado para resolver (3.2), éste contiene un método de bisección para encontrar las raíces dados los valores de los parámetros  $(h, k, a)$  hasta quince cifras de precisión. Entonces las raíces se usan en el RK4 para evaluar los cambios de signo en la velocidad, dar la condición inicial del problema (debido a que RK4 es un método de condición inicial es importante conocer con precisión el valor de la coordenada radial inicial,  $r_0$ ) y encontrar  $r$  dada una diferencia en  $\phi$  como sugiere (3.1).

Ahora bien, las soluciones numéricas dependen de dos fuentes de error en su exactitud, truncamiento y redondeo ( $\epsilon_t$  y  $\epsilon_r$  respectivamente). La segunda fuente de error se minimiza usando un tamaño de paso mayor que las cifras de precisión[6], para nosotros es suficiente un paso de 0.0001 ya que la precisión usada en las variables del programa es de  $10^{-15}$ . La primera depende, para el RK4, de las soluciones a la ecuación diferencial y tiene la forma[6]

$$\epsilon_t = \frac{16}{15} (r_{n+1,2} - r_{n+1,1}) \quad (3.3)$$

donde  $r_{n+1,1}$  y  $r_{n+1,2}$  son las soluciones con un tamaño de paso 1 y 2. Con tamaños de paso 0.001 y 0.0001 las soluciones tienen un error máximo de truncamiento local

$$\epsilon_t \sim 10^{-5} \quad (3.4)$$

si bien, el error puede ser disminuido usando un tamaño de paso menor, la cantidad de iteraciones de RK4 vuelve los resultados imprácticos para el trabajo presentado.

### 3.3. Algunas órbitas en el plano ecuatorial

En esta sección mostraremos las gráficas de (2.23) y las órbitas obtenidas de (3.1). La curva en todas las gráficas del potencial son sólidas para  $V_{ef}$  y punteadas para  $\frac{1}{2}(k^2 - 1)$ .

Como un primer caso de las soluciones a (3.1). Una partícula que cae desde reposo en infinito, aquí es suficiente  $r_0 = 8$ , a un agujero negro de Kerr extremo en el origen[4]; entonces los valores de los parámetros son  $h = 0$ ,  $k = 1$  y  $a = 1$ . En la figura de la izquierda no se observan puntos de retorno, la única solución está en infinito, y la diferencia  $\frac{1}{2}(k^2 - 1) - V_{ef}$  siempre es positiva, por ello la partícula se observa caer y rotar infinitamente en  $r_+ = 1$ . De (2.9) vemos que la velocidad angular con que esta partícula es arrastrada mientras cae es

$$\omega(r) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}r(1 + r^2)}$$

teniendo un valor límite de  $\omega(r) = 0.5$  en el horizonte  $r_+$ . Con distintos valores de los parámetros

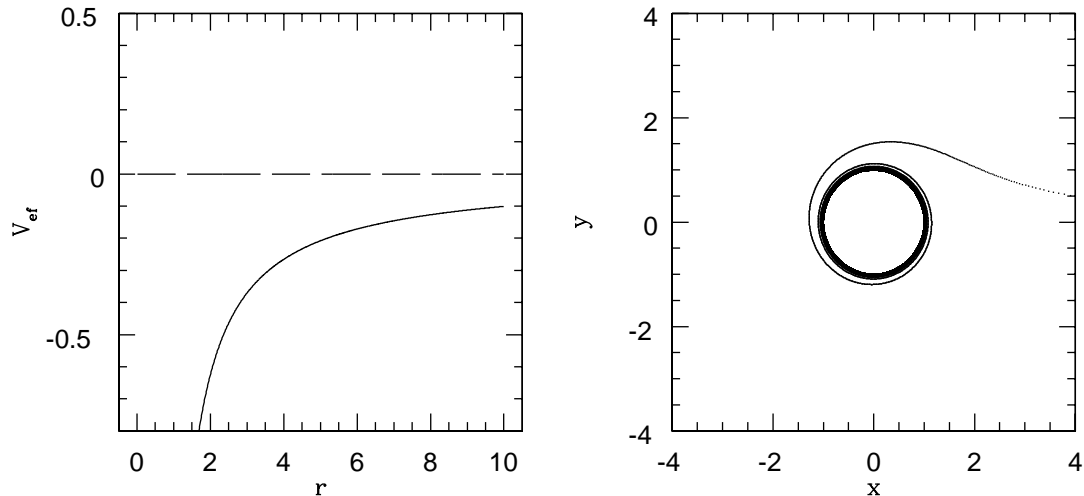


Figura 3.1: Una partícula cae hacia un agujero negro de Kerr extremo mientras es arrastrada alrededor de éste en dirección de  $a$  por el espaciotiempo, incluso estando afuera de la ergorregión.

es posible obtener gran cantidad de órbitas exóticas, ya que ahora son tres parámetros para clasificarlas, a diferencia del problema de campo central donde son dos. Por ejemplo una partícula con  $a = 0.64$ ,  $k = 1.13$  y  $h = 4.87$  no cae al atractor sino que es arrastrada hasta un radio mínimo  $r_{min} \approx 4.94126$  donde tiene la velocidad radial mínima como se ve a la izquierda de la Figura 3.2 y después escapa en una órbita parabólica.

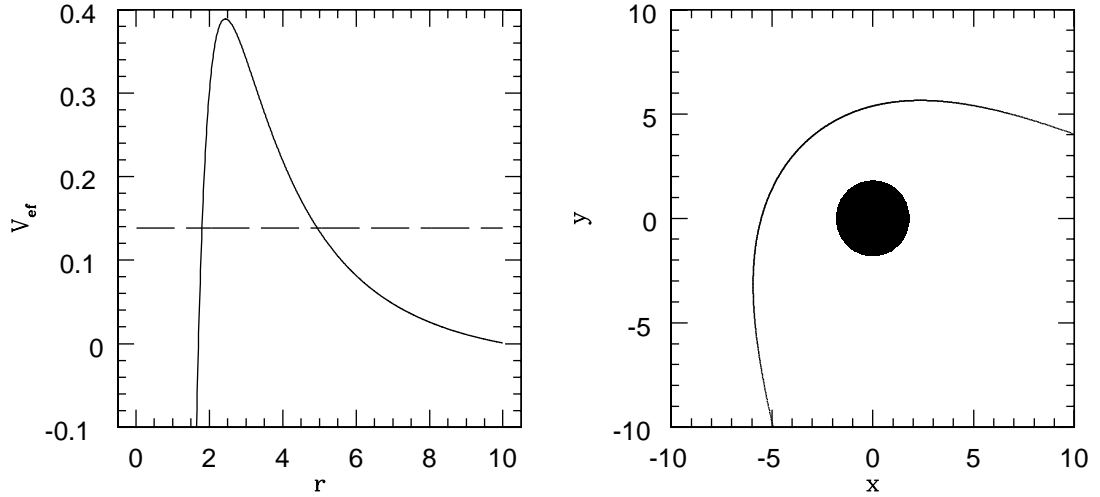


Figura 3.2: Una partícula con radio inicial  $r_0 = 20$  y momento angular diferente de cero no cae al atractor sino que se desacelera (velocidad radial) hasta llegar a un radio mínimo y después va a infinito (órbita parabólica). El disco negro representa la región acotada por el horizonte de eventos  $r_+$ .

Hasta el momento hemos presentado órbitas parabólicas (Figura 3.2), partículas que caen sin orbitar (Figura 3.1), u órbitas inestables como el caso discutido en la sección 2.5; de hecho todas estas últimas, con valores de  $h$  y  $k$  tales que se cumple (2.27), tendrían órbitas inestables similares a la Figura 3.3, ahí, aún con el parecido geométrico a la Figura 3.1 difieren en que al inicio éstas no caen radialmente y después empiezan a rotar en dirección de  $a$  sino que ya poseen momento angular y la dirección inicial de la órbita es distinta de  $\phi = \pi$ . A pesar de que en la Figura 3.3 la partícula no cae, la órbita inestable se encuentra justo fuera del horizonte en  $r_+ = 1$  lo cual no permite distinguir la geometría de las Figuras 3.1 y 3.3 en la región cercana al horizonte  $r_+$ .

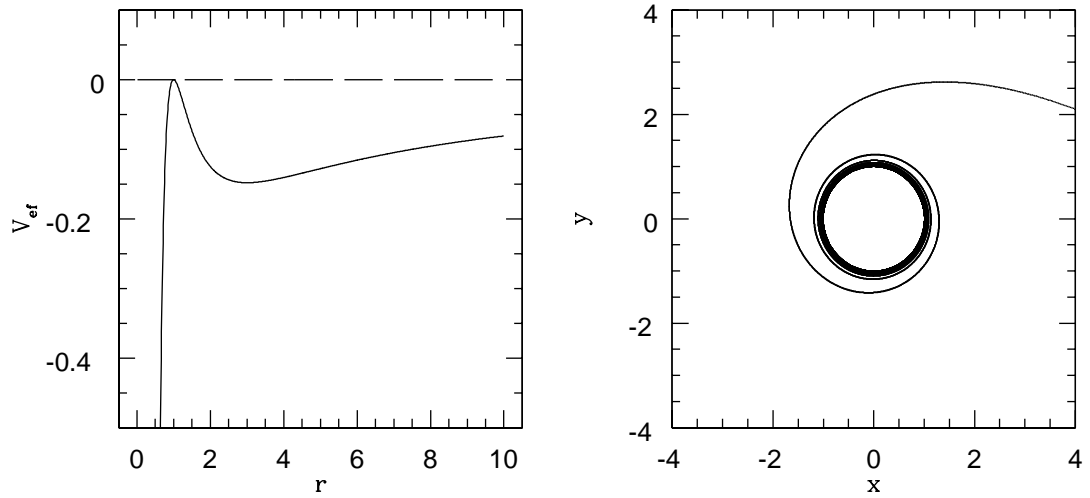


Figura 3.3: Una partícula con  $k \geq 1$  es lanzada con  $h \neq 0$ . La partícula orbita inestablemente justo en el horizonte. En esta figura usamos los valores de  $k = 1$ ,  $h = 2$ ,  $a = 1$  y  $r_0 = 8$ .

En la Figura 3.4 se muestra, mediante distintos potenciales efectivos, cómo una órbita inestable alrededor de un atractor de Schwarzschild pasa a ser parabólica alrededor de uno de Kerr. De manera análoga, podemos concluir que al disminuir  $a$ ; las órbitas parabólicas de una

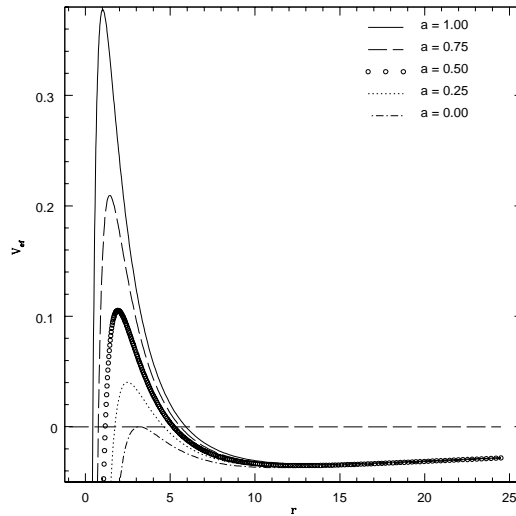


Figura 3.4: Las órbitas circulares estables e inestables varían dependiendo del valor de  $a$  desde un atractor de Schwarzschild a uno de Kerr extremo cada 0.25 con  $h = 4$  y  $k = 1$ .

partícula se vuelven inestables y, después ésta cae al horizonte de eventos sin orbitar. Así, una

partícula con energía y momento angular dados, cae al atractor dependiendo de la magnitud del momento angular que éste posea.

Para las órbitas en las Figuras 3.5 y 3.6 usamos los valores de los parámetros  $a = 0.995$  y  $h = 2$ . Los valores de la energía varían para cada subfigura con la intención de obtener resultados similares a los mostrados en [12]. El potencial efectivo es negativo para cada una de estas órbitas pero la diferencia (2.23) es positiva. Sin embargo, al llegar a los puntos de retorno (mínimo  $r_{min}$  y máximo  $r_{max}$ ) el cambio de signo no está explícito en (3.1) y por ello para calcular  $r(h, k, a)$  introdujimos la condición (3.2) en el programa (Apéndice C). Además, el movimiento está acotado entre órbitas externas e internas, ambas regiones por fuera de los horizontes, lo cual, para el caso de objetos astrofísicos podría dar lugar a concentración de materia alrededor del atractor, dichas concentraciones son observadas como *discos de acreción* [18].

De manera análoga al problema de campo central, se puede asignar una excentricidad a las órbitas [12]

$$\varepsilon = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}}$$

para una órbita parabólica  $r_{max} \rightarrow \infty$  y  $\varepsilon = 1$  como en la figura 3.2. En cada una de las órbitas con  $k < 1$  la excentricidad crece al aumentar la energía y se encuentran dos puntos de retorno (Cuadro 3.1), lo cual está de acuerdo con [12] y [13] donde se encuentra que partículas con  $k \geq 1$  no pueden tener órbitas ligadas.

$k$	$r_{min}$	$r_{max}$	$\varepsilon$
0.911154	1.3756722	9.30264294	0.742
0.915082	1.3368683	10.02153344	0.759
0.916235	1.3071265	10.64221992	0.764

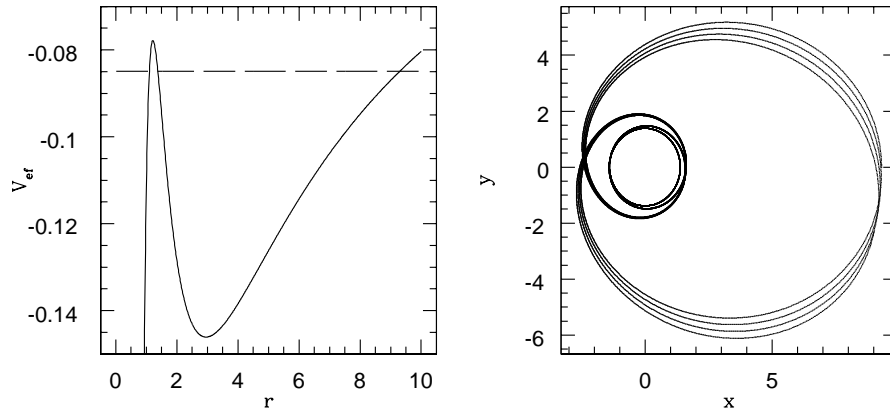
(a) Figuras 3.5

$k$	$r_{min}$	$r_{max}$	$\varepsilon$
0.918339	1.3455810	9.85141163	0.773
0.920204	1.3210669	10.34351559	0.781
0.92105	1.3008100	10.78209717	0.784

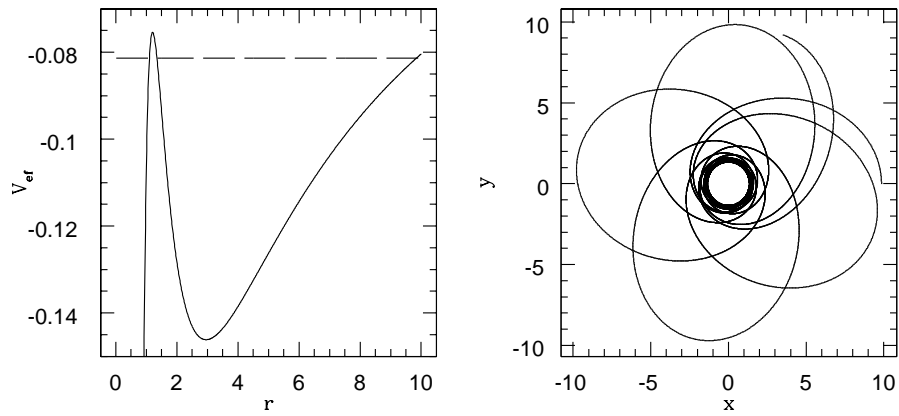
(b) Figuras 3.6

Cuadro 3.1: Radios mínimos, máximos y excentricidad para cada órbita de las Figuras 3.5 y 3.6 en unidades del sistema.

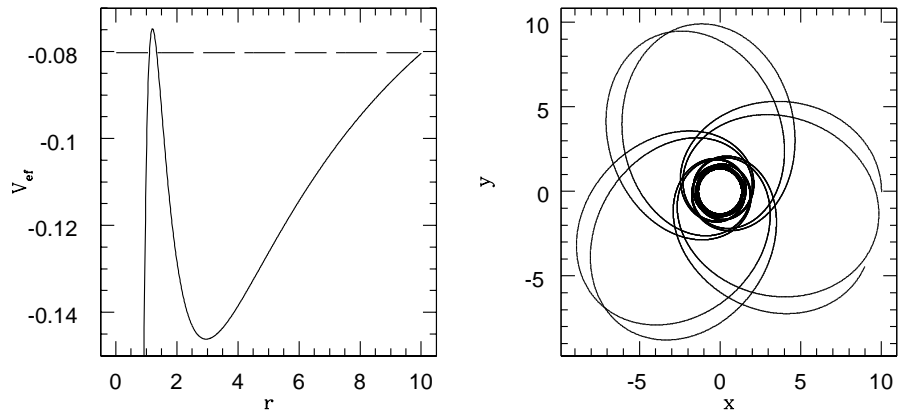
Vemos de la parte izquierda en las Figuras 3.5 y 3.6 que la distancia entre  $v_{ef}$  y  $\frac{k^2-1}{2}$  es proporcional al cuadrado de la velocidad radial y que  $r_{min}$  se encuentra dentro de la ergorregión ( $r = 2$  para el plano ecuatorial), sin embargo la forma funcional de (3.1) no hereda el comportamiento de la “mala coordenada”  $\phi$  como se tiene en (2.19) y al resolverla no se presenta problema alguno a excepción del signo. También hacemos notar que debido a la no linealidad de (3.1) las soluciones obtenidas son altamente sensibles a variaciones de los parámetros  $h$  y  $k$ .



(A)

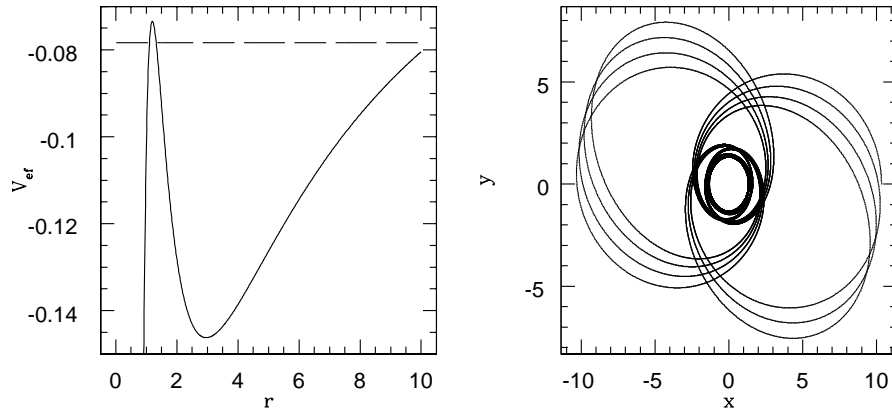


(B)

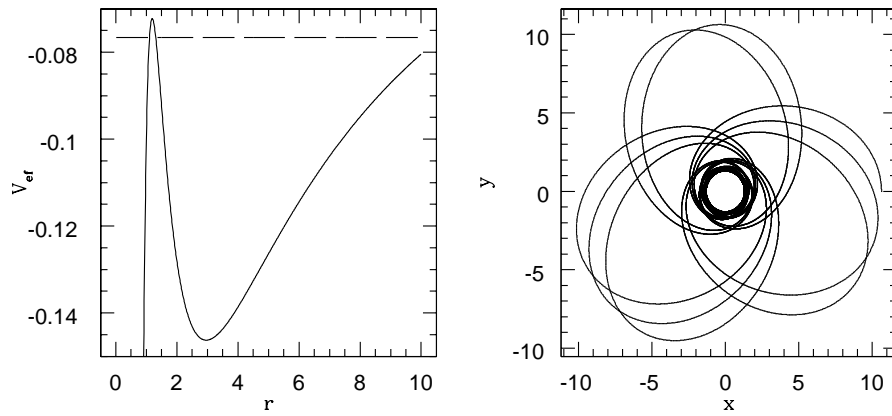


(C)

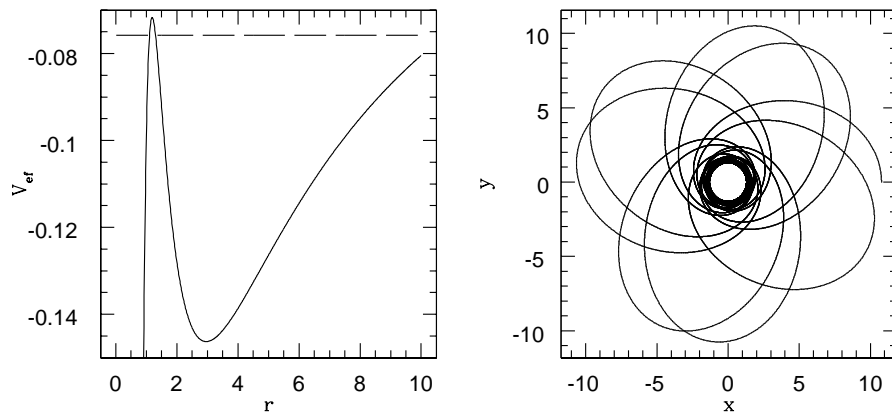
Figura 3.5: Una partícula con energías de (A) 0.911154, (B) 0.915082 y (C) 0.916235, momento angular  $h = 2$  y momento angular del atractor  $a = 0.995$ .



(D)



(E)



(F)

Figura 3.6: Una partícula con energías de (D) 0.918339, (E) 0.920204 y (F) 0.92105, momento angular  $h = 2$  y momento angular del atractor  $a = 0.995$ .



Por último, enfatizamos que las órbitas alrededor de un atractor de Schwarzschild poseen una simetría en la coordenada  $\phi$  que no existe en el espaciotiempo de Kerr, debido a la rotación del atractor se rompe tal simetría produciendo la ergorregión. Un resultado del capítulo 2 es que incluso cuando partículas con movimiento angular negativo entran a la ergorregión éstas deben rotar en sentido del momento angular del atractor. Para observar tales trayectorias no podemos usar (3.1) ya que tiene un punto singular para el valor de  $r$  en el cual  $\dot{\phi}$  cambia de signo.

Para justificar nuestra elección de (2.18), empecemos por recordar que, cuando la coordenada  $r$  se acerca a los horizontes de eventos ( $\Delta = 0$ ), según esta ecuación de movimiento, la coordenada  $\phi$  no tienen un buen comportamiento para la descripción del movimiento ya que tiende a infinito. Sin embargo,  $\frac{d\phi}{d\tau}$  es una combinación de cantidades que miden distintos observadores:  $\tau$  es medida en el marco de referencia de un observador en caída libre, mientras que  $\phi$  es medida por un observador lejano. Así, la combinación  $\frac{d\phi}{d\tau}$  carece de significado de físico, pero, debido a que el intervalo de espaciotiempo es una cantidad invariante, se puede usar como parámetro en las soluciones a las ecuaciones de movimiento, tal que para cada valor de  $\tau$  se hacen corresponder los valores respectivos de  $r$  y  $\phi$ [4]. Así (3.1) si tiene significado físico y corresponde a la medición de un observador lejano. Podríamos repetir esta misma justificación para la coordenada  $t$  y su ecuación correspondiente.

Por lo anterior, para describir las trayectorias resolvemos el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas (2.18) y (2.21) por medio de un RK4 para un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias[6]. Para valores de  $a = 0.995$ ,  $h = -20$  y  $k = 3$ , en la Figura 3.7 se observa que una partícula empieza la trayectoria orbitando en sentido opuesto a la rotación del atractor pero entre más se acerca a la ergorregión cambia de sentido en la rotación y entonces cae al horizonte de eventos  $r_+ \approx 0.9$ .

Notemos de la Figura 3.7 que la desaceleración en  $r$  no corresponde al mismo punto que la desaceleración en  $\phi$ , ésta última ocurre en  $r \approx 2$ . Para distintos valores de la energía y valores negativos del momento angular  $h$  una partícula puede orbitar de manera similar a las trayectorias producidas con  $h$  positivas (Figuras 3.5 y 3.6).

Sin embargo, es necesario recordar que aunque nos consideremos observadores lejanos, tomamos mediciones en un marco de referencia inercial local, de ahí que tampoco nosotros somos capaces de medir directamente esas coordenadas. Por ello éstas coordenadas suelen ser llamadas *coordenadas bookkeeper* [5, 3, 4]. A pesar de lo anterior, debido a que nos encontramos suficientemente lejos del atractor, nuestras mediciones se acercan a las coordenadas bookkeeper.

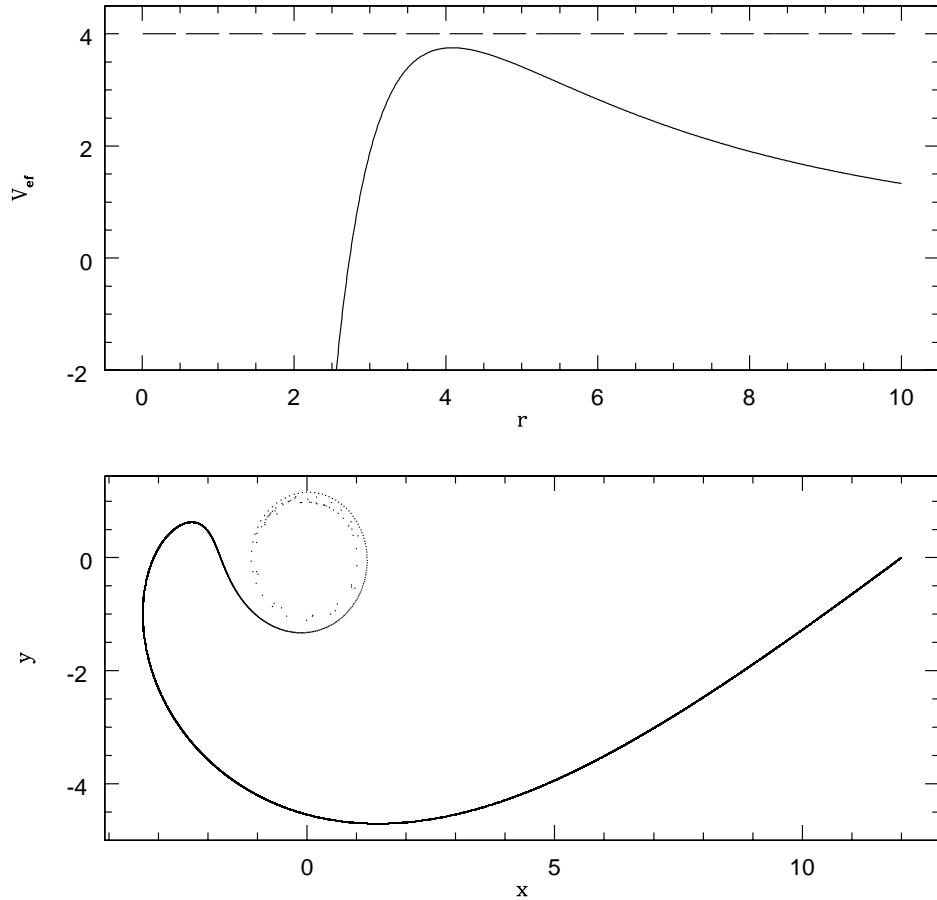


Figura 3.7: Una partícula con parámetros  $a = 0.995$ ,  $h = -20$  y  $k = 3$  es lanzada desde  $r_0 = 12$ . **Arriba.** El potencial efectivo nos permite observar que el fenómeno es una caída al horizonte, pero ocurre una desaceleración en  $r \approx 4$  y entonces una aceleración hasta el final. **Abajo.** La partícula se ve arrastrada en sentido opuesto al original debido a la rotación del atractor y entonces cae al horizonte de eventos  $r_+ \approx 0.9$ .

## Conclusiones

En el desarrollo del presente trabajo se encontró que las ecuaciones geodésicas describen el movimiento más simple de una partícula en el espaciotiempo y el tratamiento es matemáticamente análogo al de las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange en Mecánica Clásica. Aquí la ausencia de una coordenada en la métrica corresponde con la conservación de su respectiva componente contravariante en el cuádrimomento. La descripción del movimiento en el espaciotiempo puede apoyarse en constantes de movimiento para dejar resuelto el problema, al menos hasta cuadraturas.

Cuando un objeto masivo y eléctricamente neutro rota respecto a uno de sus ejes de manera constante, la deformación del espaciotiempo circundante es tal, que el movimiento a lo largo de una geodésica conserva tanto la componente del momento angular paralela al eje de rotación, como la energía; ambas, componentes covariantes del cuádrimomento. La rotación del atractor rompe la simetría esférica, manteniendo una simetría axial, lo cual implica el requerimiento de una métrica distinta a la de Schwarzschild.

El espaciotiempo alrededor del atractor rotante se describe usando la métrica de Kerr. A diferencia de la de Schwarzschild, la métrica de Kerr contiene elementos fuera de la diagonal, depende del momento angular del atractor y predice la existencia de una singularidad intrínseca y dos horizontes de eventos. La singularidad, tiene forma de disco en el plano ecuatorial, pero es invisible para un observador al infinito, ya que se encuentra dentro de los horizontes de eventos. Éstos dependen del momento angular del atractor y están acotados por los de Schwarzschild, además se reducen a uno sólo para el caso extremo.

Aún cuando un cuerpo no posea momento angular, los elementos fuera de la diagonal en la métrica predicen un arrastre de éste en dirección del momento angular del atractor. Existe un sector del espaciotiempo donde el arrastre es obligatorio incluso para la luz. Para esta región la energía rotacional del atractor puede ser extraída por medio del proceso de Penrose, disminuyendo su momento angular, hasta el punto en que el espaciotiempo vuelve a ser descrito por la métrica de Schwarzschild.

En la métrica de Kerr podemos definir un potencial efectivo para la descripción del movimiento

$$V_{ef}(r; h, k) = -\frac{M}{r} + \frac{h^2 - a^2(k^2 - 1)}{2r^2} - \frac{M(h - ak)^2}{r^3}$$

Al caer las partículas contribuyen a aumentar la energía y momento angular del atractor, lo cual puede dar lugar a la existencia de singularidades desnudas. Usando el potencial efectivo pudimos encontrar que, para lograr este efecto, las partículas deben tener momento angular y energía tales que no pueden caer al atractor. Por lo tanto no se pueden lograr singularidades desnudas.

El potencial efectivo nos permitió encontrar numéricamente órbitas circulares, parabólicas y otras formas exóticas. Para encontrar numéricamente las trayectorias con momento angular negativo la ecuación de la órbita encontrada dificulta la tarea, debido a que posee una singularidad cuando la velocidad angular cambia de signo. La integración numérica de las ecuaciones de movimiento, como se usó en este trabajo, requiere un proceso delicado de selección en la magnitud del paso, pues el cambio de signo no está explícito en cada punto de retorno y debe manejarse a mano para cada tamaño de paso. Por ello, para conseguir un mayor número de cifras significativas en la precisión de la solución, uno debe cambiar la magnitud del paso y entonces es necesario seleccionar una nueva condición de cambio de signo.

A pesar de las aproximaciones del procedimiento seguido para describir el movimiento en la vecindad de objetos compactos realistas, como escoger el sistema de coordenadas bookkeeper y los métodos numéricos empleados para la resolución; en un gran número de experimentos se ha observado que la capacidad predictiva de la Teoría de la Relatividad es sorprendente.

# Apéndice A

## *Desarrollo de la ecuación geodésica*

Supongamos que queremos obtener la ecuación de una geodésica entre dos eventos fijos del espaciotiempo. Entonces si consideramos que una curva en el espaciotiempo puede ser parametrizada por algún parámetro  $u$  se sigue de (1.1) y del principio de máximo envejecimiento que

$$\delta s = \delta \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \left( g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{du} \frac{dx^\beta}{du} \right)^{\frac{1}{2}} du = \delta \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} F du = 0 \quad (\text{A.1})$$

donde

$$F = \left( g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad \dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{du}$$

Así se puede trabajar con el método tradicional para obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange del principio de mínima acción. Ahora tomamos una variación a primer orden de  $F$  en la geodésica uniendo a los eventos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  fijos (aquí dejaremos correr los índices  $a$  en  $dx^a$  de 0 a 3 como se dijo de los griegos en el capítulo 0.)

$$\delta s = \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \left( \frac{\partial F}{\partial x^a} \delta x^a + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^a} \delta \dot{x}^a \right) du$$

en la segunda integral integramos por partes para tener

$$\int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^a} \delta \dot{x}^a \right) du = \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^a} \right) \int \delta \dot{x}^a du \right]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} - \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \left[ \left( \int \delta \dot{x}^a du \right) \frac{d}{du} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^a} \right) \right] du$$

el primer término de la derecha desaparece ya que la variación de  $x^a$  en los extremos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  es nula. Con ello

$$\delta s = \int_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \left[ \frac{\partial F}{\partial x^a} - \frac{d}{du} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^a} \right) \right] \delta x^a du = 0$$

y ya que la variación  $\delta x^a$  en la lineamundo es arbitraria, entonces el factor entre los corchetes debe ser cero

$$\frac{\partial F}{\partial x^a} - \frac{d}{du} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^a} \right) = 0 \quad (\text{A.2})$$

así  $F$  es la lagrangiana que buscamos.

## Apéndice B

### *Ecuaciones de movimiento y componentes contravariantes de $g$*

Los momentos conservados a lo largo de una geodésica en la métrica de Kerr son

$$p_t = g_{\alpha t} \dot{x}^\alpha = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} + \frac{2Ma}{r} \dot{\phi} = k \quad (\text{B.1})$$

y

$$p_\phi = g_{\alpha\phi} \dot{x}^\alpha = \frac{2Ma}{r} \dot{t} - \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right) \dot{\phi} = -h \quad (\text{B.2})$$

resolvemos (B.2) para  $\dot{t}$  y sustituimos en (B.1)

$$k = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{r}{2Ma} \left[-h + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right) \dot{\phi}\right] + \frac{2Ma}{r} \dot{\phi}$$

como  $\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right) = \Delta - \left(\frac{2Ma}{r}\right)^2$ , se tiene que la última expresión es

$$\begin{aligned} k &= -\frac{r}{2Ma} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) h + \frac{r}{2Ma} \left[\Delta - \left(\frac{2Ma}{r}\right)^2 + \left(\frac{2Ma}{r}\right)^2\right] \dot{\phi} \\ &= -\frac{r}{2Ma} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) h + \frac{r}{2Ma} \Delta \dot{\phi} \end{aligned}$$

de donde se tiene la ecuación para  $\dot{\phi}$

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{2Ma}{r} k + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) h \right] \quad (\text{B.3})$$

similarmente, resolvemos (B.1) para  $\dot{\phi}$  y sustituimos en (B.2) así obtener la ecuación de  $\dot{t}$  en

términos de  $r$  y los parámetros  $a$ ,  $h$  y  $k$

$$\begin{aligned} -h &= \frac{2Ma}{r}\dot{t} - \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right) \left[k - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}\right] \frac{r}{2Ma} \\ -\frac{2Ma}{r}\dot{h} &= \left(\frac{2Ma}{r}\right)^2 \dot{t} - \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right) \left[k - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}\right] \\ &= \left(\frac{2Ma}{r}\right)^2 \dot{t} - \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right) k + \left[\Delta - \left(\frac{2Ma}{r}\right)^2\right] \dot{t} \end{aligned}$$

de donde se tiene la ecuación para  $\dot{t}$

$$\dot{t} = \frac{1}{\Delta} \left[ \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r}\right) k - \frac{2Ma}{r} h \right] \quad (\text{B.4})$$

Para calcular la ecuación correspondiente a  $r$  usaremos la invariancia de la cantidad  $g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = \epsilon^2$ , donde  $\epsilon$  es un parámetro que convenientemente elegimos como 1 ó 0, dependiendo si la geodésica correspondiente es de una partícula con masa  $m$  o un fotón, respectivamente; para ello ocupamos calcular los elementos contravariantes de la métrica. De (2.3) vemos que

$$g = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & g_{03} \\ 0 & g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & 0 \\ g_{03} & 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

para calcular la inversa de (B.5) usaremos

$$g^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(g)} \text{Adj}(g)$$

ya que la matriz de cofactores es simétrica y real,  $\text{Adj}(g)$  coincide con ésta, entonces

$$\text{Adj}(g) = \begin{pmatrix} g_{11}g_{22}g_{33} & 0 & 0 & -g_{03}g_{11}g_{22} \\ 0 & -(g_{03})^2 g_{22} + g_{00}g_{22}g_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(g_{03})^2 g_{11} + g_{00}g_{11}g_{33} & 0 \\ -g_{03}g_{11}g_{22} & 0 & 0 & g_{00}g_{11}g_{22} \end{pmatrix}$$

y el determinante es

$$\text{Det}(g) = g_{11}g_{22} \left[ g_{00}g_{33} - (g_{03})^2 \right]$$

así de la inversa de (B.5) es

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{g_{33}}{n} & 0 & 0 & -\frac{g_{03}}{n} \\ 0 & \frac{1}{g_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{g_{22}} & 0 \\ -\frac{g_{03}}{n} & 0 & 0 & \frac{g_{00}}{n} \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

donde  $n = g_{00}g_{33} - (g_{03})^2$ .

De la cantidad  $g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu = \epsilon^2$  y de las ecuaciones (B.1) y (B.2) tenemos (para el plano ecuatorial  $\theta = \frac{\pi}{2}$ )

$$g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu = g^{tt}(p_t)^2 + 2g^{t\phi}p_t p_\phi + g^{\phi\phi}(p_\phi)^2 + g^{rr}(p_r)^2 = \epsilon^2$$

$$g^{tt}k^2 - 2g^{t\phi}kh + g^{\phi\phi}h^2 + g^{rr}(p_r)^2 = \epsilon^2$$

usando  $g_{rr} = \frac{1}{g^{rr}}$  y  $p_r = g_{rr}\dot{r}$  resolvemos para  $\dot{r}$

$$\dot{r}^2 = g^{rr} \left( \epsilon^2 - k^2 g^{tt} + 2hkg^{t\phi} - h^2 g^{\phi\phi} \right) \quad (\text{B.7})$$

para usar los elementos de (B.6) primero veamos que  $n$  se reduce algebraicamente al introducir explícitamente los elementos covariantes de  $g$

$$\begin{aligned} n &= g_{tt}g_{\phi\phi} - (g_{t\phi})^2 = - \left( 1 - \frac{2Mr}{\rho^2} \right) \left( r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2r \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta - \left( \frac{2Mar \sin^2 \theta}{\rho^2} \right)^2 \\ &= - \left( r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2r \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta + \frac{2Mr}{\rho^2} \left( r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2r \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta - \frac{4M^2a^2r^2 \sin^4 \theta}{\rho^4} \\ &= - \sin^2 \theta \left[ r^2 + a^2 - \frac{(r^2 + a^2) 2Mr}{\rho^2} + \frac{2Ma^2r \sin^2 \theta}{\rho^2} \right] \end{aligned}$$

pero

$$- (r^2 + a^2) 2Mr + 2Ma^2r (1 - \cos^2 \theta) = 2Mr^3 - 2Ma^2r \cos^2 \theta = -2Mr (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) = -2Mr\rho^2$$

así

$$\begin{aligned} n &= - \sin^2 \theta \left( r^2 + a^2 + \frac{-2Mr\rho^2}{\rho^2} \right) = - \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - 2Mr) \\ n &= -\Delta \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

con  $\rho^2$  y  $\Delta$  definidas en (2.4). Existen diferentes formas de expresar las coordenadas Boyer-Lindquist[9], por simplicidad algebraica de los subsecuentes cálculos usaremos la siguiente forma

$$ds^2 = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} dt^2 + \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \frac{\Sigma^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi^2 \quad (\text{B.9})$$

donde se define

$$\Sigma^2 = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta \quad (\text{B.10})$$



así de (B.6), (B.8) y (B.9) se sigue que los elementos contravariantes de g son

$$\begin{aligned} g^{tt} &= -\frac{\Sigma^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \frac{1}{-\Delta \sin^2 \theta} \\ g^{tt} &= \frac{\Sigma^2}{\rho^2 \Delta} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} g^{t\phi} &= \frac{2Mar \sin^2 \theta}{\rho^2} \frac{1}{\Delta \sin^2 \theta} \\ g^{t\phi} &= \frac{2Mar}{\Delta \rho^2} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$$g^{rr} = -\frac{\Delta}{\rho^2} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} g^{\phi\phi} &= \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \frac{1}{-\Delta \sin^2 \theta} \\ g^{\phi\phi} &= \frac{a^2 \sin^2 \theta - \Delta}{\Delta \rho^2 \sin^2 \theta} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

entonces la ec. (B.7) queda

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 &= -\frac{\Delta}{\rho^2} \left( \frac{\epsilon^2 \Delta \rho^2}{\rho^2 \Delta} - \frac{k^2 \Sigma^2}{\Delta \rho^2} + \frac{4khMar}{\Delta \rho^2} - h^2 \frac{a^2 - \Delta}{\Delta \rho^2} \right) \\ &= -\frac{1}{r^4} \left[ \epsilon^2 (r^2 - 2Mr + a^2) r^2 - k^2 (r^4 + a^2 r^2 + 2Mra^2) + 4khMar - h^2 (a^2 - r^2 + 2Mr - a^2) \right] \\ &= -\frac{1}{r^4} \left[ (\epsilon^2 - k^2) r^4 - 2M\epsilon^2 r^3 + (a^2 \epsilon^2 - k^2 a^2 + h^2) r^2 + (-2Ma^2 k^2 + 4khMa - 2Mh^2) r \right] \\ &= k^2 - \epsilon^2 + \frac{2M\epsilon^2}{r} + \frac{a^2 (k^2 - \epsilon^2) - h^2}{r^2} + \frac{2M (a^2 k^2 - 2kha + h^2)}{r^3} \end{aligned}$$

y finalmente tenemos la ecuación de movimiento para r

$$\dot{r}^2 = k^2 - \epsilon^2 + \frac{2M\epsilon^2}{r} + \frac{a^2 (k^2 - \epsilon^2) - h^2}{r^2} + \frac{2M (h - ak)^2}{r^3} \quad (\text{B.15})$$

# Apéndice C

## *Integración numérica en la métrica de Kerr*

En este apéndice se encuentran las ideas del código usado para la integración numérica de (3.1) en FORTRAN 90 con los métodos de Bisección y RK4 mediante 3 subrutinas y 3 funciones externas. El código fuente completo se encuentra en <http://capyc.fisica.uson.mx>. Si bien el programa es usado para el cálculo de (3.1) la adaptación a otra integración en este tipo de problemas (potencial efectivo de Schwarzschild y Kerr) es sencilla debido a la forma en que está escrito, basta con modificar las funciones externas `vel.f90` y `dr.f90` y los valores de las variables a introducir en el programa principal.

### C.1. `main.f90`

El programa principal es llamado `main.f90`. Es donde se llaman todas las subrutinas y se usa la condición de valor inicial para conocer los valores de  $r$  que son escritos en un archivo. En `main.f90` es necesario introducir directamente de pantalla una lista de valores que nos sirve para realizar todos los procesos:

- d** Se ocupa para evaluar  $\text{vel}(r, L, E, a)$  en puntos distintos y encontrar el cambio de signo.
- h1** Es el tamaño del paso más grande en la subrutina `Error.90` para calcular el error de truncamiento local en el método Rk4.
- h2** Es el tamaño del paso más pequeño en la subrutina `Error.90` para calcular el error de truncamiento local en el método Rk4. También se usa en el para encontrar el valor de  $r$  con la subrutina `RK4.f90`.
- L** Es el momento angular de la partícula por unidad de masa.
- E** Es la energía de la partícula por unidad de masa.
- a** Es el momento angular del atractor por unidad de masa.

**r0** Es la condición de radio inicial de la partícula usada en el RK4.

Después damos los valores que se usarán en el programa, como el intervalo donde se buscarán las raíces de `vel.f90`, la tolerancia del método de bisección y un contador que nos servirá para nombrar las raíces.

```
I1=d          !Extremo inferior del intervalo, ya que sabemos que r>0 para esta ecuacion
w=20._k      !Extremo superior del intervalo, ya que sabemos que r>0 para esta ecuacion
T=1E-10_dp   !Tolerancia del metodo
q=0          !Contador para nombrar las raices
```

Entonces llamamos a la subrutina `Biseccion` en un intervalo  $[I1, I1+d]$  para encontrar una raíz  $p$ , si la encuentra que la nombre como la  $i$ -ésima ( $p_i$ ) y aumente el contador en uno, sino que  $I1$  sea ahora el nuevo  $I1+d$  y vuelva a llamar a `Biseccion`, así en un ciclo hasta terminar el intervalo  $w$ . Aquí ponemos una señal de salida cuando  $i$  es mayor a 3 ya que sabemos que la velocidad tiene a lo mas tres raíces. Una vez encontradas, las raíces son escritas en un archivo.

```
Do
  If(Abs(I1-w) < d) Then
    Exit
  Else If((vel(I1,L,E,a))*(vel(I1+d,L,E,a))<0._k) Then
    I2=I1+d
    Call Biseccion(I1,I2,L,E,a,T,p)
    q=q+1
    Select Case(q)
      Case(1)
        p1=p
      Case(2)
        p2=p
      Case(3)
        p3=p
    Default Case
      End Do
    End Select
  I1=I2
```

```

    Else
        I1=I1+d
    End If
End Do

```

Con las raíces obtenidas, llamamos a la subrutina `RK4.f90` con los valores necesarios para resolver `dr.f90`:  $E$ ,  $h2$ ,  $L$ ,  $a$ ,  $r0$ ,  $p1$ ,  $p2$  y  $p3$ . Finalmente usamos la subrutina `Error.f90` para generar una lista con valores de  $r$  calculados con distintos tamaños de pasos  $h1$  y  $h2$  (mediante RK4) concluyendo el programa principal.

```

Call Error(E,h1,h2,L,a,r0,p1,p2,p3)
End program main

```

Después la diferencia de las  $r$ 's es evaluada para calcular el error local de truncamiento con (3.3).

## C.2. Biseccion.f90

Mediante la subrutina `Biseccion`, una raíz  $p$  de `vel.f90` es encontrada en el intervalo  $[I1, I1+d]$  a una tolerancia especificada en `main.f90`. En el proceso se evalúa la función  $vel(r, L, E, a)$  en un extremo del intervalo y a la mitad del mismo, se multiplican estos valores y se usa una condición lógica para seguir disminuyendo el intervalo de nuevo a la mitad, moviendo la evaluación del lado izquierdo si el producto de la evaluación es mayor a cero y el derecho en caso contrario. Así, se repite el proceso hasta que la función  $vel$  sea cero, o aproximadamente cero en la tolerancia especificada, cuando es evaluada en este nuevo valor del intervalo. Entonces este último valor del intervalo es identificado como la raíz buscada y se termina el programa con este valor como  $p$ .

## C.3. RK4.f90

Este método usa el valor inicial  $r0$  para calcular el siguiente valor de  $r$  debido a un cambio en  $\phi$  del tamaño del paso  $h2$ , así que es necesario introducir  $r0$  al comienzo del proceso o bien de forma externa (Como se hizo). Con la entrada de los valores  $E$ ,  $h2$ ,  $L$ ,  $a$ ,  $p1$ ,  $p2$  y  $p3$  desde `main` se calculan los valores de los pesos  $k1$ ,  $k2$ ,  $k3$  y  $k4$  en el intervalo  $\phi0+h2$  [6] (Con  $\phi0 = 0$ )

```

k1 = dr(r,L,E,a)
k2 = dr(r+0.5_k*h2*k1,L,E,a)
k3 = dr(r+0.5_k*h2*k2,L,E,a)
k4 = dr(r+h2*k3,L,E,a)

```

donde  $k$  es el kind especificado en `main.f90`, entonces un nuevo valor de  $r$  es calculado

$$r = r + \text{signo} * (h2/6.0\_k) * (k1 + 2.0\_k * k2 + 2.0\_k * k3 + k4) \quad (\text{C.1})$$

la variable *signo* está para alternar el signo en los puntos de retorno, donde el signo de  $r$  debe cambiar y no está explícito en (3.1). El cambio de signo lo hacemos mediante las siguientes condiciones

```

If((abs((vel(r,L,E,a)**(.5_k))<5E-4_k).and.(n>20)) then
    signo =-1._k*signo
Else If((abs(p1-r)<4E-6_k).and.(n>20)) then
    signo =-1._k*signo
Else if((abs(p2-r)<4E-6_k).and.(n>20)) then
    signo =-1._k*signo
Else if((abs(p3-r)<4E-6_k).and.(n>20)) then
    signo =-1._k*signo
Else
End if

```

donde  $n$  es un contador que marca el número de veces que se ha encontrado un nuevo valor de  $r$ , es necesario debido a la forma en que elegimos comenzar nuestro proceso, es decir, elegimos como condición inicial  $r_0$  ser igual a una raíz (la más grande) pero en este valor tanto la velocidad como  $r$  son cercanos a esos puntos donde los efectos de los puntos de retorno se presentan y el programa se vuelve inestable. El problema es evitado ignorando las condiciones anteriores una cierta cantidad de  $\phi$ 's, para nosotros es suficiente  $n = 20$ . Cada nuevo valor de *phi* y  $r$  son escritos en un archivo hasta que una condición sobre el tamaño de  $\phi$  se cumple y la subrutina termina.

#### C.4. Error.f90

Esta subrutina usa dos métodos RK4 para calcular dos distintos valores de  $r$ ,  $r_1$  y  $r_2$ . Para ello usa los mismos valores que la subrutina `RK4.f90` a excepción que aquí se usan dos tamaños

de paso diferentes y entonces los valores calculados de  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $r_1$  y  $r_2$  son escritos en un archivo de manera cíclica hasta que se cumpla una condición sobre  $\phi_1$  ó  $\phi_2$  entonces termina `Error.f90`.

### C.5. Funciones externas `dr.f90`, `vel.f90` y `sgn.f90`

Las funciones externas usadas en el programa son aquellas necesarias para la solución de (3.1), éstas aceptan los valores de las variables declaradas en `main.f90` con la misma precisión. La función `dr.f90` es (3.1) con  $E = k$  y  $L = h$  para evitar problemas con las variables nombradas en el programa

$$\begin{aligned} dr = & - ((E**2 - 1.0_k + 2.0_k/r + ((a**2) * (E**2 - 1.0_k) - L**2)/r**2 \\ & + (2.0_k * (L - a * E)**2)/r**3) ** (.5_k) * (r**2 + a**2 \\ & - 2.0_k * r) / ((2.0_k) * a * E/r + (1.0_k - 2.0_k/r) * L) \end{aligned} \quad (C.2)$$

donde se decidió usar el signo menos de (3.1) ya que la condición inicial es el punto más grande de  $r$ , entonces que los cambios  $dr$  sean menores a cero. La función externa `vel.f90` es precisamente (3.2) con  $E = k$  y  $L = h$ .

$$\begin{aligned} vel = & (E**2 - 1.0_k + 2.0_k/r + ((a**2) * (E**2 - 1.0_k) - L**2)/(r**2) \\ & + (2.0_k * (L - a * E)**2)/(r**3)) \end{aligned} \quad (C.3)$$

Por último `sgn.f90` se usa en `Biseccion` para cargar con el signo del producto  $vel(I1)*vel(I1+d)$  de manera que el programa no se sature.

# Bibliografía

- [1] Goldstein, H. *Classical Mechanics*. Addison Wesley; 3ª edición (2002). ISBN: 0-201-65702-3.
- [2] Schutz, B. *A First Course in General Relativity*. Cambridge; 2ª edición (2009). ISBN: 978-0-521-88705-2.
- [3] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company; 1ª edición (1973). ISBN: 0-7167-0344-0
- [4] Taylor E. F., Wheeler J. A. *Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity*. Addison Wesley Longman; 1ª edición (2000). ISBN: 0-201-38423-X.
- [5] Taylor E. F., Wheeler J. A. *Spacetime Physics*. Freeman; 2ª edición (1992). ISBN: 0-7167-2327-1.
- [6] Carnahan, B., Luther H. A., Wilkes J. *Applied Numerical Methods*. Wiley; 1ª edición (1969). ISBN: 0-471-13507-0.
- [7] Will C.M. *The confrontation between general relativity and experiment. Living reviews in Relativity* 7,8. 2004
- [8] Kip S.Thorne *Black holes and time warps: Einstein's Outrageous Legacy*. W. W. Norton and Company, Nueva York. ISBN: 84-7423-697-5
- [9] M.P.Hobson,G.Efstathiou y A.N.Lasenby *General Relativity. An introduction for Physicist*. Cambridge university press. ISBN: 13 978-0-521-82951-9
- [10] James B. Hartle *Gravity an introduction to Einstein's general relativity*. Addison Wesley. ISBN: 0-8053-8662-9
- [11] Thomas A. Moore *A general relativity workbook*. University Science Books, 2013. ISBN:978-1-891389-82-5

- 
- [12] Janna Levin and Gabe Perez-Giz *A periodic table for black hole orbits*. Art. Physical Review D 77, 103005 (2008).
- [13] Daniel C. Wilkins *Bound geodesics in the Kerr Metric*. Art. Physical Review D Vol.5 No.4. (1972).
- [14] Matt Visser *The Kerr spacetime: A brief introduction*. arXiv: 0706.0622v3 (2008).
- [15] Will C.M. *Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity*. Art. Physical Review Letters 106, 221101 (2011).
- [16] J.H.Taylor and M.Weisberg *A new test of general relativity: gravitational radiation and binary pulsar 1913+16*. Art. The Astrophysical Journal, 253:908-920 (1982).
- [17] S. Chandrasekhar *The Mathematical Theory of BlackHoles*. Clarendon Press, Oxford (1983).
- [18] Marek A. Abramowicz and P. Chris Fragile *Foundations of Black Hole Accretion Disk Theory*. Living Rev. Relativity, 16, (2013).