



UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

MOVIMIENTO CLÁSICO DE UNA PARTÍCULA  
EN UN CAMPO COULOMBIANO Y EN UN CAMPO  
UNIFORME

TESIS PRESENTADA POR LUIS ALFREDO URIAS RUÍZ  
PARA OBTENER EL GRADO DE LICENCIADO EN FÍSICA

2016

Departamento de Física

# Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

---

# Agradecimientos

Este trabajo no habría sido posible sin el apoyo y el estímulo de mi colega y amigo, Maestro en Ciencias Sergio Gutiérrez, bajo cuya supervisión escogí este tema y comencé la tesis. L.L.H. Jimena Mendoza, mi consejera en las etapas finales del trabajo, también ha sido generosamente servicial, y me ha ayudado de numerosos modos, en especial en términos de redacción, y en particular por su paciencia infinita.

También me gustaría agradecer a mis amigos José Luis Ibarra, Adrián Zepeda, Gustavo Moraga, Maura Ramírez y Hanz Araujo quienes me apoyaron durante estos cinco años de estudio, aunque nuestros caminos se separen siempre estaremos juntos.

No puedo terminar sin agradecer a mi familia, en cuyo estímulo constante y amor he confiado a lo largo de mis años de universidad. Estoy agradecido en especial con mi madre Milagros Ruíz quien a base de mucho esfuerzo logró sacar adelante a mí y a mis hermanos. Su coraje y convicción siempre me inspirarán, y espero seguir, a mi propio y pequeño modo, con todo lo que me enseñó. Es a ellos a quien dedico este trabajo.

---

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>2</b>
<b>Introducción</b>	<b>4</b>
<b>1. Movimiento de una partícula en un campo central coulombiano</b>	<b>6</b>
1.1. Constantes de movimiento y solución del problema . . . . .	6
1.2. Trayectorias elípticas . . . . .	10
1.3. Vector de Runge-Lenz . . . . .	13
<b>2. Movimiento de una partícula en un campo central coulombiano y un campo uniforme</b>	<b>17</b>
2.1. Constantes de movimiento . . . . .	17
2.2. Movimiento en el caso de campo uniforme pequeño . . . . .	21
<b>3. Estudio del movimiento para valores arbitrarios del campo uniforme</b>	<b>36</b>
3.1. Coordenadas Parabólicas . . . . .	36
3.2. Constantes de movimiento en coordenadas parabólicas . . . . .	38
3.3. Análisis del movimiento. . . . .	42
<b>Bibliografía</b>	<b>52</b>

---

# Introducción

En Mecánica Clásica existen problemas en los que el número de constantes de movimiento excede al número de grados de libertad del sistema, tales problemas se llaman superintegrables (Romero et al., 1992). En algunos casos cuando un problema superintegrable es perturbado deja de ser superintegrable, pero el problema que resulta sigue siendo integrable (Cardona et al., 1995).

El movimiento de una partícula en un campo coulombiano es un ejemplo de problema superintegrable que al ser perturbado por un campo uniforme sigue siendo integrable, de ahí su importancia en Mecánica Clásica. En el caso del campo coulombiano puro existen siete constantes de movimiento: la energía total  $E$ , las tres componentes del momento angular  $\mathbf{L}$  y las tres componentes del vector de Runge-Lenz  $\mathbf{A}$ ; de estas siete constantes de movimiento, cinco son independientes (Goldstein et al., 2002), así éste es un ejemplo de problema superintegrable (Romero et al., 1993). En el problema de un campo coulombiano perturbado por un campo uniforme  $\mathbf{F}$ , existen tres constantes de movimiento independientes: la energía total  $E$ , la componente  $\mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{F}}$  del momento angular en la dirección del campo uniforme y una tercera constante de movimiento  $\beta$  que es una cantidad escalar (Kotkin y Serbo, 1980). Aunque el problema perturbado ya no es superintegrable, sigue siendo un problema integrable debido a la existencia de tres constantes de movimiento independientes. Este problema ha sido estudiado por algunos autores, con un punto de vista clásico (Cardona et al., 1995) con el propósito de entender cualitativamente algunos aspectos del correspondiente problema cuántico.

El problema de una partícula que se mueve en un campo coulombiano y un campo uniforme se ha resuelto mediante métodos aproximados para valores del campo uniforme pequeños en comparación con el campo coulombiano usando la formulación

Newtoniana de la Mecánica Clásica (Kotkin y Serbo, 1980). Para valores arbitrarios del campo uniforme, la solución de este problema se ha obtenido resolviendo la correspondiente ecuación de Hamilton-Jacobi en coordenadas parabólicas (Kotkin y Serbo, 1980), (Landau y Lifshitz, 1978).

El propósito de este trabajo es estudiar el movimiento de una partícula en un campo coulombiano y un campo uniforme desde un punto de vista clásico, usando la formulación Newtoniana de la Mecánica Clásica. El trabajo muestra la utilidad de las constantes de movimiento del problema.

En el primer capítulo se estudia el movimiento de una partícula en un campo central coulombiano, la solución del problema se obtiene mediante dos constantes de movimiento, la energía total  $E$  y el momento angular  $\mathbf{L}$ ; se analiza el caso particular de trayectorias elípticas. Finalmente se presenta una derivación simple del vector de Runge-Lenz  $\mathbf{A}$  mostrando la relación entre sus características geométricas y las propiedades de la trayectoria.

En el segundo capítulo se estudia el movimiento de una partícula sometida a un campo coulombiano y un campo uniforme, se muestra mediante una derivación simple la existencia de una tercera constante de movimiento  $\beta$ , además de la energía total y la componente del momento angular en la dirección del campo uniforme. Se obtienen dos ecuaciones para la evolución del momento angular  $\mathbf{L}$  y del vector de Runge-Lenz  $\mathbf{A}$  (que en este problema no son constantes de movimiento); estas ecuaciones se resuelven mediante una aproximación analítica para campos uniformes pequeños; de las soluciones, conocidas como perturbaciones del movimiento de Kepler (Hestenes, 1999), (Stahlhofen, 1994), se obtienen las propiedades más importantes del movimiento.

Finalmente en el tercer capítulo se hace un estudio del movimiento de la partícula válido para valores arbitrarios del campo uniforme, a partir de las tres constantes de movimiento  $E$ ,  $\mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{F}}$  y  $\beta$  expresadas en coordenadas parabólicas. Los resultados obtenidos con este enfoque (que no requiere la solución de ninguna ecuación diferencial) coinciden con los obtenidos por otros autores (Kotkin y Serbo, 1980) a partir de la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi.

---

# Capítulo 1

## Movimiento de una partícula en un campo central coulombiano

### 1.1. Constantes de movimiento y solución del problema

La fuerza que actúa sobre la partícula en un campo central coulombiano está dada por

$$\vec{f} = -\frac{k}{r^2} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) = -\frac{k}{r^3} \vec{r}, \quad (1.1)$$

donde  $k$  es constante,  $\vec{r}$  es el vector de posición de la partícula referido al centro de fuerza y  $r \equiv |\vec{r}|$  es la distancia de la partícula al centro de fuerza.

De (1.1) se sigue

$$\begin{aligned} \vec{f} &= -\nabla \left( -\frac{k}{r} \right) \\ &= -\nabla V(r), \end{aligned} \quad (1.2)$$

donde

$$V(r) = -\frac{k}{r} \quad (1.3)$$

es la energía potencial de la partícula; así  $\vec{f}$  es una fuerza conservativa, por lo que

la energía total

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} \quad (1.4)$$

es una constante de movimiento.

La torca ejercida por  $\vec{f}$  sobre la partícula, referida al centro de fuerza, ésta dada por

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{f} = \vec{r} \times \left( -\frac{k}{r^3} \vec{r} \right) = 0. \quad (1.5)$$

De la ecuación de evolución del momento angular

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (1.6)$$

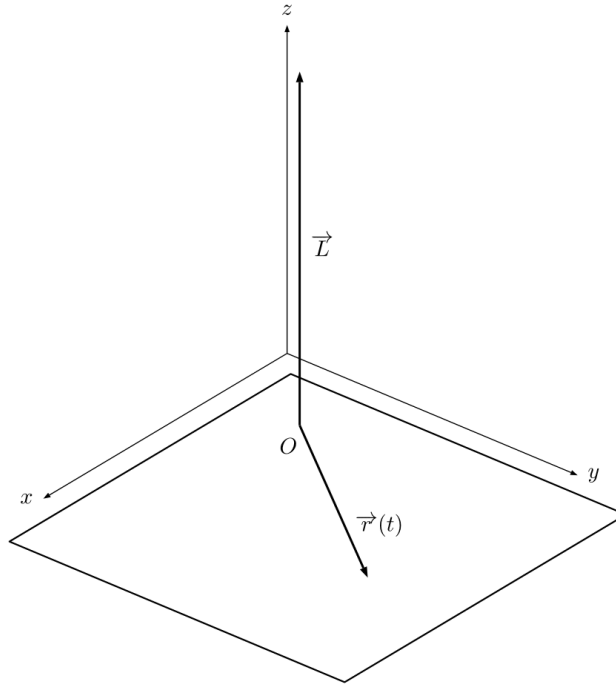
y de la ecuación (1.5) concluimos que el momento angular

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} \quad (1.7)$$

referido al centro de fuerza, es una constante de movimiento. Debido a la conservación del momento angular, la trayectoria de la partícula está contenida en el plano perpendicular a la dirección fija de  $\vec{L}$ , que pasa por el centro de fuerza; así el movimiento es bidimensional.

A continuación obtenemos la solución del problema a partir de las constantes de movimiento  $E$  y  $\vec{L}$  (Landau y Lifshitz, 1978). Introducimos un sistema de coordenadas cilíndricas  $r, \phi, z$  con el origen en el centro de fuerza y eje  $z$  en la dirección del momento angular  $\vec{L}$ , así  $z = 0$  y el movimiento se realiza en el plano  $xy$ .





En estas coordenadas la energía total (1.4) queda

$$E = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) - \frac{k}{r}. \quad (1.8)$$

En tanto que el momento angular referido al centro de fuerza (1.7) está dado por

$$\vec{L} = \left( mr^2 \dot{\phi} \right) \hat{k}, \quad (1.9)$$

de (1.9) obtenemos la magnitud del momento angular

$$L \equiv |\vec{L}| = mr^2 \dot{\phi}, \quad (1.10)$$

de aquí se sigue

$$\dot{\phi} = \frac{L}{mr^2}; \quad (1.11)$$

sustituyendo en (1.8) queda

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}, \quad (1.12)$$

de esta ecuación obtenemos

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left( E + \frac{k}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}, \quad (1.13)$$

resolviendo por separación de variables obtenemos

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E + \frac{k}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}} + c \quad (1.14)$$

donde  $c$  es una constante de integración; esta ecuación nos da  $r$  como una función implícita del tiempo.

Si expresamos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} \frac{dr}{d\phi} \quad (1.15)$$

y usamos la ecuación (1.11) obtenemos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\phi} \quad (1.16)$$

sustituyendo en (1.13) queda

$$\frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\phi} = \sqrt{\frac{2}{m} \left( E + \frac{k}{r} - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}$$

de aquí obtenemos

$$\phi = \int \frac{\frac{L}{r^2} dr}{\sqrt{2m \left( E + \frac{k}{r} \right) - \frac{L^2}{r^2}}} + \phi' \quad (1.17)$$

donde  $\phi'$  es una constante de integración; esta ecuación nos da la relación entre  $r$  y  $\phi$ , esto es, la trayectoria de la partícula.

Evaluando en términos elementales la integral en (1.17) obtenemos

$$\phi = \phi' - \arccos \frac{\frac{L^2}{mk} \frac{1}{r} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}}, \quad (1.18)$$

orientando el eje  $x$  de modo que  $\phi' = 0$  y definiendo las cantidades

$$p = \frac{L^2}{mk}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}; \quad (1.19)$$

de la ecuación (1.18) obtenemos

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \phi \quad (1.20)$$

esta es la ecuación general de las secciones cónicas con el origen (centro de fuerza) en uno de los focos, con parámetro  $p$  y excentricidad  $e$ .

## 1.2. Trayectorias elípticas

A continuación consideramos el caso de trayectorias elípticas, en este caso se cumple  $0 < e < 1$ ; de acuerdo a la ecuación (1.19) los valores que toma  $E$  deben de cumplir con la condición  $-\frac{mk^2}{2L^2} < E < 0$ . Sabemos que los semiejes mayor y menor de la elipse están dados por

$$a = \frac{p}{1 - e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}; \quad (1.21)$$

debido a (1.19) queda

$$a = \frac{k}{2|E|}, \quad b = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}}. \quad (1.22)$$

Ahora calculamos el período de revolución  $T$  de la partícula en una trayectoria elíptica, esto es el tiempo que tarda en recorrer una vez la elipse. La ecuación (1.10) admite la siguiente interpretación geométrica: la cantidad  $(\frac{1}{2}r)(rd\phi)$  es el área de la

región formada por dos vectores de posición muy cercanos y el correspondiente arco de la trayectoria; denotando esta área por  $dA$  podemos expresar la ecuación (1.10) en la forma

$$L = 2m \frac{dA}{dt} = cte, \quad (1.23)$$

donde  $\frac{dA}{dt}$  se conoce velocidad areolar. Ahora es fácil determinar el período de revolución  $T$ : integrando respecto al tiempo de 0 a  $T$  en ambos lados de la ecuación (1.23) obtenemos

$$2mA = LT \quad (1.24)$$

donde  $A$  es el área encerrada por la trayectoria, para una elipse  $A = \pi ab$ , así

$$T = \frac{2m\pi ab}{L}, \quad (1.25)$$

usando las ecuaciones (1.21) y la expresión para  $p$  (ec. 1.19) en (1.25) obtenemos

$$T = 2\pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1.26)$$

que podemos reescribir usando las ecuaciones (1.22) como

$$T = \pi k \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}} \quad (1.27)$$

esta es la expresión del período de revolución en una órbita elíptica.

Apartir de la ecuación (1.14) y de la ecuación (1.20), podemos obtener las coordenadas cartesianas  $x, y$  de la partícula. Reescribimos la ecuación (1.14) en la forma

$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{r dr}{\sqrt{-r^2 + \frac{k}{|E|}r - \frac{L^2}{2m|E|}}} + c, \quad (1.28)$$

y usando la expresión para el semieje mayor (ec. 1.22) queda

$$t = \sqrt{\frac{ma}{k}} \int \frac{r dr}{\sqrt{-r^2 + 2ar - \frac{L^2}{2m|E|}}} + c; \quad (1.29)$$

ahora reescribimos la cantidad subradical

$$\begin{aligned} -r^2 + 2ar - \frac{L^2}{2m|E|} &= -r^2 + 2ar - a^2 + a^2 - \frac{L^2}{2m|E|} \\ &= -(r - a)^2 + a^2 - \frac{2L^2|E|}{mk^2} \left( \frac{k^2}{4|E|^2} \right) \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$= -(r - a)^2 + a^2e^2 \quad (1.31)$$

(en el ultimo paso se usó la ecuación (1.22) para  $a$  y la ecuación (1.19) para  $e$  con  $E = -|E|$  para una elipse); así la ecuación (1.29) queda

$$t = \sqrt{\frac{ma}{k}} \int \frac{rdr}{\sqrt{a^2e^2 - (r - a)^2}} + c; \quad (1.32)$$

haciendo el cambio de variable

$$r - a = -ae \cos \xi \quad 0 < \xi \leq 2\pi, \quad (1.33)$$

la ecuación (1.32) queda

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{k}} \int (1 - e \cos \xi) d\xi + c \quad (1.34)$$

$$= \sqrt{\frac{ma^3}{k}} (\xi - e \sin \xi) + c \quad (1.35)$$

escogiendo el origen de tiempo de modo que  $c = 0$ , obtenemos

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{k}} (\xi - e \sin \xi), \quad (1.36)$$

así las relaciones paramétricas entre la coordenada radial  $r$  y el tiempo  $t$  son

$$r = a(1 - e \cos \xi) \quad , \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{k}} (\xi - e \sin \xi); \quad (1.37)$$

para  $\xi = 0$ , se cumple  $r = r_{min}$ ,  $t = 0$  (la partícula está en el perihelio en  $t = 0$ ).

Las ecuaciones de transformación entre las coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  y las

coordenadas  $r$ ,  $\phi$  son

$$x = r \cos \phi \quad , \quad y = r \sin \phi; \quad (1.38)$$

de (1.20) se sigue

$$\cos \phi = \frac{1}{e} \left( \frac{p}{r} - 1 \right), \quad (1.39)$$

así la coordenada  $x$  queda dada por

$$x = \frac{1}{e}(p - r); \quad (1.40)$$

usando las ecuación (1.21) para  $a$  y (1.37) para  $r$  queda

$$x = a(\cos \xi - e). \quad (1.41)$$

De las ecuaciones de transformación (1.38) se sigue

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad (1.42)$$

usando la ecuación (1.37) para  $r$  y la ecuación (1.41) para  $x$  obtenemos

$$y = a\sqrt{1 - e^2} \sin \xi \quad (1.43)$$

A una revolución completa sobre la elipse corresponde una variación del parámetro  $\xi$  de 0 a  $2\pi$ .

### 1.3. Vector de Runge-Lenz

Además de las constantes de movimiento energía total  $E$  y momento angular  $\vec{L}$  que caracterizan a todo campo central, en el caso del campo central coulombiano existe otra constante de movimiento llamada vector de Runge-Lenz. A continuación se presenta una derivación simple de esta constante de movimiento. De acuerdo a la segunda ley de Newton, la ecuación del movimiento de una partícula en un campo

central coulombiano es

$$\dot{\vec{P}} = -\frac{k}{r^2} \begin{pmatrix} \vec{r}' \\ r \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

Tomando el producto cruz con  $\vec{L} = \vec{r}' \times m\vec{v}$  en ambos lados de (1.44) obtenemos

$$\dot{\vec{P}} \times \vec{L} = -\frac{k}{r^3} \vec{r}' \times (\vec{r}' \times m\vec{v}), \quad (1.45)$$

como  $\dot{\vec{L}} = 0$  se cumple

$$\frac{d(\vec{P} \times \vec{L})}{dt} = \dot{\vec{P}} \times \vec{L}, \quad (1.46)$$

así la ecuación (1.45) queda

$$\frac{d}{dt} (\vec{P} \times \vec{L}) = -\frac{k}{r^3} \vec{r}' \times (\vec{r}' \times m\vec{v}); \quad (1.47)$$

usando la identidad  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ , reescribimos el lado derecho de (1.47)

$$\begin{aligned} -\frac{k}{r^3} \vec{r}' \times (\vec{r}' \times m\vec{v}) &= -\frac{mk}{r^3} \left( (\vec{r}' \cdot \dot{\vec{r}}) \vec{r}' - (\vec{r}' \cdot \vec{r}') \dot{\vec{r}} \right) \\ &= -\frac{mk}{r^3} \left[ (r\dot{r}) \vec{r}' - r^2 \dot{\vec{r}} \right] \\ &= mk \left( \frac{-\dot{r}}{r^2} \vec{r}' + \frac{\dot{\vec{r}}}{r} \right) \\ -\frac{k}{r^3} \vec{r}' \times (\vec{r}' \times m\vec{v}) &= \frac{d}{dt} \left( mk \frac{\vec{r}'}{r} \right), \end{aligned} \quad (1.48)$$

de modo que la ecuación (1.47) queda

$$\frac{d}{dt} (\vec{P} \times \vec{L}) = \frac{d}{dt} \left( \frac{mk\vec{r}'}{r} \right) \quad (1.49)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{P} \times \vec{L} - \frac{mk\vec{r}'}{r} \right) = 0; \quad (1.50)$$

esta ecuación establece que en el campo central que varía con el inverso del cuadrado de la distancia, existe una constante de movimiento llamada vector de Runge-Lenz

definido por

$$\vec{A} = \vec{P} \times \vec{L} - mk \frac{\vec{r}}{r}. \quad (1.51)$$

Usando el vector de Runge-Lenz (1.51) podemos obtener en forma directa sin necesidad de resolver ninguna ecuación diferencial, la ecuación de la trayectoria de la partícula. Tomando el producto escalar con el vector  $\vec{r}$  en ambos lados de la ecuación (1.51) obtenemos

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = (\vec{P} \times \vec{L}) \cdot \vec{r} - mk \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r}, \quad (1.52)$$

ahora reescribimos el primer termino del lado derecho de esta ecuación

$$(\vec{P} \times \vec{L}) \cdot \vec{r} = \vec{L} \cdot (\vec{r} \times \vec{P}) = L^2, \quad (1.53)$$

sustituyendo en (1.52) queda

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = L^2 - mkr; \quad (1.54)$$

si denotamos con  $\phi$  el ángulo formado por el vector de posición  $\vec{r}$  y la dirección fija de  $\vec{A}$ , la ecuación (1.54) queda

$$Ar \cos \phi = L^2 - mkr, \quad (1.55)$$

de aquí se sigue

$$r = \frac{L^2/mk}{\left(1 + \frac{A}{mk} \cos \phi\right)}. \quad (1.56)$$

Esta es la ecuación general de las secciones cónicas en coordenadas polares, con el origen (centro de fuerza) en uno de los focos y excentricidad

$$e = \frac{A}{mk} \quad (1.57)$$

De la ecuación (1.56) se sigue que  $\phi(r_{min}) = 0$ , así el vector de Runge-Lenz tiene la dirección de  $\vec{r}_{min}$ . Por otra parte, de (1.57) obtenemos que la magnitud del vector



de Runge-Lenz está dada por

$$A = mke \tag{1.58}$$

esto es,  $A$  es proporcional a la excentricidad de la órbita.

De las ecuaciones (1.58) y (1.19) se sigue

$$A^2 = m^2k^2 + 2mEL^2, \tag{1.59}$$

esta ecuación establece una relación entre la magnitud del vector de Runge-Lenz y la energía total de la partícula.

Por otra parte, de la ecuación (1.51) se sigue

$$\vec{A} \cdot \vec{L} = 0, \tag{1.60}$$

esta ecuación expresa que el vector de Runge-Lenz está en el plano de la órbita.

En el campo central coulombiano, la trayectoria queda completamente determinada por el momento angular  $\vec{L}$ , que determina el plano de la órbita, y por el vector de Runge-Lenz  $\vec{A}$ , que determina la orientación de la órbita en este plano.

---

## Capítulo 2

# Movimiento de una partícula en un campo central coulombiano y un campo uniforme

### 2.1. Constantes de movimiento

La fuerza total que actúa sobre la partícula es

$$\vec{f} = -\frac{k}{r^3} \vec{r} + \vec{F}, \quad (2.1)$$

el primer término de (2.1) es el campo coulombiano que estudiamos en el capítulo 1 y el segundo término es el campo uniforme  $\vec{F}$ .

Expresamos la fuerza  $\vec{f}$  en la forma

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \nabla \left( \frac{k}{r} + \vec{F} \cdot \vec{r} \right) \\ &= -\nabla V, \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde

$$V(\vec{r}) = -\frac{k}{r} - \vec{F} \cdot \vec{r} \quad (2.3)$$

es la energía potencial de la partícula.

De la ecuación (2.2) se sigue que la fuerza  $\vec{f}$  es conservativa, por lo tanto la

energía total de la partícula

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} - \vec{F} \cdot \vec{r} \quad (2.4)$$

es una constante de movimiento.

Por otra parte, la torca total sobre la partícula, referida al origen (centro de fuerza del campo coulombiano) es

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{f} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (2.5)$$

de aquí se sigue que

$$\vec{N} \cdot \hat{F} = 0, \quad (2.6)$$

donde  $\hat{F}$  es un vector unitario que tiene la dirección del campo uniforme  $\vec{F}$ .

De la ecuación para la evolución del momento angular  $\vec{L}$  de la partícula

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (2.7)$$

se sigue

$$\vec{N} \cdot \hat{F} = \frac{d}{dt}(\vec{L} \cdot \hat{F}) \quad (2.8)$$

de esta ecuación y de la ecuación (2.6) obtenemos

$$\vec{L} \cdot \hat{F} = \text{constante} \quad (2.9)$$

esto es, la componente del momento angular en la dirección de  $\vec{F}$  es constante.

A continuación se obtiene otra constante de movimiento para este problema.

De acuerdo a la segunda ley de Newton, la ecuación del movimiento de la partícula es

$$\dot{\vec{P}} = -\frac{k}{r^3}\vec{r} + \vec{F} \quad (2.10)$$

Tomando el producto cruz con  $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$  en los dos lados de la ecuación (2.10) queda

$$\dot{\vec{P}} \times \vec{L} = \left( -\frac{k}{r^3}\vec{r} + \vec{F} \right) \times (\vec{r} \times m\vec{v}), \quad (2.11)$$

usando la identidad

$$\frac{d}{dt} (\vec{P} \times \vec{L}) = \dot{\vec{P}} \times \vec{L} + \vec{P} \times \frac{d}{dt} \vec{L} \quad (2.12)$$

en el lado izquierdo de (2.11) queda

$$\frac{d}{dt} (\vec{P} \times \vec{L}) - \vec{P} \times \frac{d}{dt} \vec{L} = \left( -\frac{k}{r^3} \vec{r} + \vec{F} \right) \times (\vec{r} \times m \vec{v}),$$

esto es

$$\frac{d}{dt} (\vec{P} \times \vec{L}) - \vec{P} \times \frac{d}{dt} \vec{L} = -\frac{k}{r^3} \vec{r} \times (\vec{r} \times m \vec{v}) + \vec{F} \times (\vec{r} \times m \vec{v}), \quad (2.13)$$

ahora, usando la ecuación (1.48) en el primer término del lado derecho de (2.13) queda,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{P} \times \vec{L}) - \vec{P} \times \frac{d}{dt} \vec{L} &= \frac{d}{dt} \left( mk \frac{\vec{r}}{r} \right) + \vec{F} \times (\vec{r} \times m \vec{v}), \\ \frac{d}{dt} \left( \vec{P} \times \vec{L} - mk \frac{\vec{r}}{r} \right) &= \vec{P} \times \frac{d}{dt} \vec{L} + \vec{F} \times (\vec{r} \times m \vec{v}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

De de la ecuación (2.5) para la torca y de la ecuación (2.7) para la evolución del momento angular se sigue

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{f} = \vec{r} \times \left( -\frac{k}{r^3} \vec{r} + \vec{F} \right) = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (2.15)$$

sustituyendo en el primer término del lado derecho de la ecuación (2.14) obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{P} \times \vec{L} - mk \frac{\vec{r}}{r} \right) = \vec{P} \times (\vec{r} \times \vec{F}) + \vec{F} \times (\vec{r} \times m \vec{v}), \quad (2.16)$$

tomando el producto escalar con  $\vec{F}$  en ambos lados de la ecuación (2.16) queda

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \vec{F} \cdot \left( \vec{P} \times \vec{L} - mk \frac{\vec{r}}{r} \right) \right] &= m \vec{F} \cdot \left[ \dot{\vec{r}} \times \left( \vec{r} \times \vec{F} \right) \right] \\ &= m \vec{F} \cdot \left[ \left( \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F} \right) \vec{r} - \left( \dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} \right) \vec{F} \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$= m \left[ \left( \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F} \right) \left( \vec{F} \cdot \vec{r} \right) - r \dot{r} F^2 \right]. \quad (2.18)$$

Usando las identidades

$$\frac{d}{dt} (F^2 r^2) = 2F^2 r \dot{r}$$

y

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{F} \cdot \vec{r} \right)^2 = 2 \left( \vec{F} \cdot \vec{r} \right) \frac{d}{dt} \left( \vec{F} \cdot \vec{r} \right) = 2 \left( \vec{F} \cdot \vec{r} \right) \left( \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} \right)$$

en la ecuación (2.18) obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left[ \vec{F} \cdot \left( \vec{P} \times \vec{L} - mk \frac{\vec{r}}{r} \right) \right] = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} \left[ \left( \vec{F} \cdot \vec{r} \right)^2 - F^2 r^2 \right]; \quad (2.19)$$

ahora, de la identidad  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$  se sigue que

$$\left( \vec{r} \times \vec{F} \right)^2 = \left( \vec{r} \times \vec{F} \right) \cdot \left( \vec{r} \times \vec{F} \right) = F^2 r^2 - \left( \vec{F} \cdot \vec{r} \right)^2,$$

así la ecuación (2.19) queda

$$\frac{d}{dt} \left[ \vec{F} \cdot \left( \vec{P} \times \vec{L} - mk \frac{\vec{r}}{r} \right) \right] = -\frac{d}{dt} \frac{m}{2} \left( \vec{r} \times \vec{F} \right)^2, \quad (2.20)$$

esto es

$$\frac{d}{dt} \left[ \vec{F} \cdot \left( \vec{P} \times \vec{L} - mk \frac{\vec{r}}{r} \right) + \frac{m}{2} \left( \vec{r} \times \vec{F} \right)^2 \right] = 0 \quad (2.21)$$

Por lo tanto la cantidad

$$\beta \equiv \vec{F} \cdot \left( \vec{P} \times \vec{L} - mk \frac{\vec{r}}{r} \right) + \frac{m}{2} \left( \vec{r} \times \vec{F} \right)^2 \quad (2.22)$$

es una constante de movimiento en el problema de una partícula que está sometida

a un campo coulombiano y un campo uniforme  $\vec{F}$ .

Resumiendo, en el movimiento de una partícula sometida a un campo coulombiano y a un campo uniforme, existen tres constantes de movimiento: energía total  $E$ , la componente del momento angular  $\vec{L} \cdot \hat{F}$  en la dirección del campo uniforme, y la constante  $\beta$ .

## 2.2. Movimiento en el caso de campo uniforme pequeño

En el capítulo 1 obtuvimos la trayectoria de una partícula que se mueve en un campo central coulombiano y analizamos en particular la trayectoria elíptica.

Existen algunos problemas importantes en los que al campo coulombiano se le superpone una fuerza  $\vec{F}$  pequeña, tal que  $|\vec{F}| \ll \frac{k}{r^2}$ . En los casos en que no es posible obtener la solución analítica exacta se recurre a métodos de aproximación.

Las soluciones aproximadas a estos problemas en mecánica celeste se llaman perturbaciones al movimiento de Kepler (Hestenes, 1999); la fuerza  $\vec{F}$  se conoce como fuerza perturbadora. En el presente trabajo nos referiremos a estas soluciones aproximadas como perturbaciones al movimiento de Kepler.

En lugar de resolver directamente la ecuación de movimiento

$$-\frac{k}{r^3} \vec{r} + \vec{F} = m \ddot{\vec{r}} \quad (2.23)$$

se aprovecha la solución del movimiento en el campo coulombiano y se analiza a partir de esta el efecto de la fuerza perturbadora.

Como vimos en el capítulo 1 la órbita o trayectoria de la partícula queda completamente determinada por el momento angular  $\vec{L}$  y por el vector de Runge-Lenz  $\vec{A}$ ; por esta razón podemos referirnos a  $\vec{L}$  y  $\vec{A}$  como los elementos orbitales. Aunque la energía total  $E$  resulta útil para clasificar las trayectorias, su valor queda determinado por  $\vec{L}$  y  $\vec{A}$  (ec. (1.59)).

A los elementos orbitales  $\vec{L}$  y  $\vec{A}$  les corresponden valores únicos en cada instante, aun con la presencia de la fuerza perturbadora  $\vec{F}$ . Los elementos orbitales especifican en cada instante una trayectoria coulombiana, que en ese instante es tangente a la

trayectoria perturbada en el punto  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  (figura (1)).

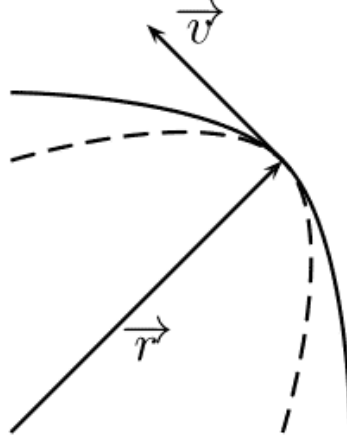


Figura (1). La órbita coulombiana (línea punteada) es tangente instantáneamente a la trayectoria perturbada en el punto  $\vec{r} = \vec{r}(t)$

Cuando  $\vec{F} \neq 0$ ,  $\vec{L}$  y  $\vec{A}$  no son constantes, así la órbita coulombiana debe cambiar continuamente en el tiempo. Podemos imaginar que el movimiento de la partícula se realiza en una órbita coulombiana que está deformándose continuamente con la fuerza perturbadora.

Para describir la deformación de la órbita coulombiana usaremos las ecuaciones de evolución de  $\vec{L}$  y  $\vec{A}$  en el movimiento perturbado:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2.24)$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{F} \times \vec{L} + \vec{P} \times (\vec{r} \times \vec{F}) \quad (2.25)$$

La primera de éstas es la ecuación (2.15) y la segunda se sigue de las ecuaciones (2.16) y (1.51).

Para fuerzas perturbadoras pequeñas, es razonable considerar que el cambio que sufren los elementos orbitales  $\vec{L}$  y  $\vec{A}$  en un intervalo de tiempo igual a un período de revolución del movimiento no perturbado es muy pequeño, así es posible simplificar

la solución de las ecuaciones (2.24) y (2.25) del movimiento perturbado, promediando sobre un periodo del movimiento no perturbado, manteniendo constantes los elementos orbitales  $\vec{L}$ ,  $\vec{A}$ .

El promedio  $\langle f \rangle$  de una cantidad física  $f = f(t)$  durante un período de revolución del movimiento no perturbado, está dado por

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (2.26)$$

con los elementos orbitales  $\vec{L}$  y  $\vec{A}$  (y con éstos  $E$  y  $e$ ) mantenidos constantes al integrar. Después de promediar se toma en cuenta la variación (lenta) de los elementos orbitales de modo que  $\langle f \rangle$  es ahora una función del tiempo que representa a  $f(t)$

A continuación estudiamos el caso de campo uniforme  $\vec{F}$  muy pequeño (fuerza perturbadora) mediante perturbaciones al movimiento coulombiano (Kotkin y Serbo, 1980).

Consideremos primero el caso en el que el campo  $\vec{F}$  está en el plano de la órbita del movimiento coulombiano; introducimos un sistema de coordenadas cartesianas  $x, y, z$  con el eje  $z$  en la dirección del momento angular  $\vec{L}$  y el eje  $x$  en dirección del vector de Runge-Lenz  $\vec{A}$ .

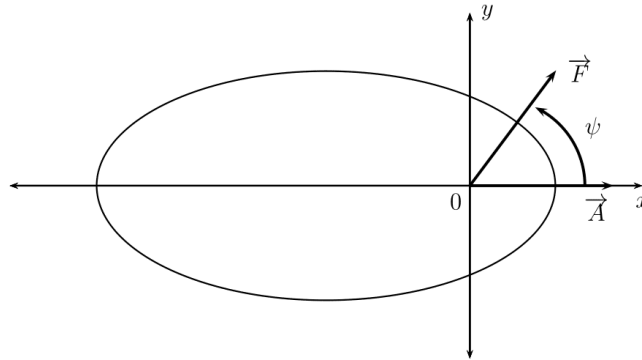


Figura (2). El eje  $x$  se encuentra en la dirección del vector de Runge-Lenz y la fuerza  $\vec{F}$  se encuentra en el mismo plano con un ángulo  $\psi$  respecto a  $x$

De la ecuación (2.15) para la evolución del momento angular se sigue que  $\dot{\vec{L}}$  es perpendicular al plano de la órbita (eje  $z$ ) así que también en este caso la trayectoria es una curva plana contenida en el plano  $xy$ .



El promedio temporal de  $\vec{L}$  durante un período  $T$  del movimiento está dado por

$$\langle \vec{L} \rangle = \langle \vec{r} \rangle \times \vec{F}. \quad (2.27)$$

Ahora usando la solución para el movimiento en un campo coulombiano calculamos  $\langle \vec{r} \rangle$ :

$$\langle \vec{r} \rangle = \langle x \rangle \hat{1} + \langle y \rangle \hat{j}, \quad (2.28)$$

donde

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad (2.29)$$

usando las ecuaciones (1.36) y (1.41)

$$\langle x \rangle = \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos \xi - e)(1 - e \cos \xi) d\xi = -\frac{3ea}{2}; \quad (2.30)$$

en forma similar calculamos el promedio de la coordenada  $y$

$$\langle y \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt, \quad (2.31)$$

usando (1.36) y (1.43) obtenemos

$$\langle y \rangle = \frac{a}{2\pi} \sqrt{1 - e^2} \int_0^{2\pi} \sin \xi (1 - e \cos \xi) d\xi = 0. \quad (2.32)$$

Sustituyendo (2.30) y (2.32) en (2.28) obtenemos

$$\langle \vec{r} \rangle = -\frac{3ea}{2} \hat{1}, \quad (2.33)$$

usando la ecuación (1.58) que relaciona la magnitud  $A$  del vector de Runge-Lenz con la excentricidad de la órbita, (2.33) queda

$$\langle \vec{r} \rangle = -\frac{3aA}{2mk} \hat{1} = -\frac{3a}{2mk} \vec{A} \quad (2.34)$$

(el eje  $x$  está en dirección de  $\vec{A}$ ).

Tomando  $\langle \vec{L} \rangle$  y  $\langle \vec{r} \rangle$  como valores representativos de  $\vec{L}(t)$  y  $\vec{r}(t)$  respectiva-

mente, de las ecuaciones (2.27) y (2.34) se sigue

$$\dot{\vec{L}} = -\frac{3a}{2mk} \vec{A} \times \vec{F} = \frac{3}{2} \frac{a}{mk} \vec{F} \times \vec{A}. \quad (2.35)$$

Así, en la dirección perpendicular al plano de movimiento se tiene

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \frac{3a}{2mk} AF \sin \psi \\ \dot{L} &= \frac{3}{2} aeF \sin \psi \end{aligned} \quad (2.36)$$

donde  $\psi$  es el ángulo entre  $\vec{F}$  y  $\vec{A}$  (en el último paso se usó (1.57)).

Para un campo uniforme  $\vec{F}$  pequeño tal que  $|F| \ll \frac{k}{r^2}$  podemos despreciar los términos de orden  $F^2$ ; en estos casos la constante de movimiento  $\beta$  (ec. (2.22)) queda

$$\begin{aligned} \beta &= \vec{F} \cdot \left( \vec{P} \times \vec{L} - mk \frac{\vec{r}'}{r} \right), \\ &= \vec{F} \cdot \vec{A} \\ &= FA \cos \psi \\ &= Fmke \cos \psi, \end{aligned}$$

que reescribimos como

$$e \cos \psi = \beta' \quad (2.37)$$

donde hemos introducido la constante  $\beta' \equiv \frac{\beta}{Fmk}$ .

De (2.37) se sigue

$$\sin \psi = \frac{1}{e} \sqrt{e^2 - \beta'^2} \quad (2.38)$$

sustituyendo en (2.36) obtenemos

$$\dot{L} = \frac{3aF}{2} \sqrt{e^2 - \beta'^2}, \quad (2.39)$$

usando la ecuación (1.19) para la excentricidad (en el caso de una elipse), la ecuación (2.39) queda

$$\dot{L} = \frac{3aF}{2} \sqrt{1 - \frac{2|E|L^2}{mk^2} - \beta'^2}, \quad (2.40)$$

ahora, como  $2|E| = k/a$  (ec. (1.22)), la ecuación (2.40) queda

$$\dot{L} = \frac{3aF}{2} \sqrt{1 - \frac{L^2}{amk} - \beta'^2}, \quad (2.41)$$

de aquí se sigue

$$\dot{L}^2 = \left(\frac{3aF}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{L^2}{amk} - \beta'^2\right), \quad (2.42)$$

tomando la derivada con respecto al tiempo en ambos lados de la ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} 2\dot{L}\ddot{L} &= -\left(\frac{3aF}{2}\right)^2 \frac{2L\dot{L}}{amk}, \\ \ddot{L} + \left(\frac{3F}{2}\right)^2 \frac{a}{mk} L &= 0 \quad , \quad (\dot{L} \neq 0); \end{aligned} \quad (2.43)$$

haciendo

$$\Omega \equiv \frac{3F}{2} \sqrt{\frac{a}{mk}}, \quad (2.44)$$

la ecuación (2.43) queda

$$\ddot{L} + \Omega^2 L = 0 \quad (2.45)$$

cuya solución es

$$L(t) = L_0 \cos(\Omega t + \delta) \quad (2.46)$$

donde  $L_0$  y  $\delta$  son constantes por determinar.

Para obtener  $L_0$  sustituimos (2.46) en (2.41), obteniendo

$$\begin{aligned} -L_0\Omega \sin(\Omega t + \delta) &= \frac{3aF}{2} \sqrt{1 - \beta'^2 - \frac{L_0^2 \cos^2(\Omega t + \delta)}{mak}}, \\ L_0^2\Omega^2 \sin^2(\Omega t + \delta) &= \left(\frac{3aF}{2}\right)^2 \left(1 - \beta'^2 - \frac{L_0^2 \cos^2(\Omega t + \delta)}{mak}\right), \end{aligned}$$

usando la expresión para  $\Omega$  (ec. (2.44)) en el coeficiente del lado izquierdo queda

$$\frac{L_0^2}{mak} \sin^2(\Omega t + \delta) = 1 - \beta'^2 - \frac{L_0^2 \cos^2(\Omega t + \delta)}{mak},$$

esto es

$$\frac{L_0^2}{mak} (1 - \cos^2(\Omega t + \delta)) = 1 - \beta'^2 - \frac{L_0^2 \cos^2(\Omega t + \delta)}{mak}$$

de aquí se sigue

$$L_0 = \sqrt{mak(1 - \beta'^2)} \quad (2.47)$$

sustituyendo (2.47) en (2.46) obtenemos

$$L(t) = \sqrt{mak(1 - \beta'^2)} \cos(\Omega t + \delta). \quad (2.48)$$

Para determinar la excentricidad sustituimos (2.46) en (2.39), obteniendo

$$-L_0 \Omega \sin(\Omega t + \delta) = \frac{3aF}{2} \sqrt{e^2 - \beta'^2},$$

usando la expresión para  $\Omega$  (ec. (2.44)) obtenemos

$$e = \sqrt{1 - (1 - \beta'^2) \cos^2(\Omega t + \delta)} \quad (2.49)$$

Del análisis anterior se concluye que la trayectoria de la partícula es una elipse cuya excentricidad cambia periódicamente con el tiempo (ec. (2.49)); también el sentido del movimiento de la partícula sobre la elipse cambia debido a las oscilaciones en  $L$  (ec. (2.48)), y la orientación de la elipse varía periódicamente, al cambiar el ángulo  $\psi$  entre  $\vec{F}$  y  $\vec{A}$  (ec. (2.37)).

El período de las oscilaciones en las propiedades de la trayectoria es

$$\tau = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\frac{3F}{2} \sqrt{\frac{a}{mk}}} \quad (2.50)$$

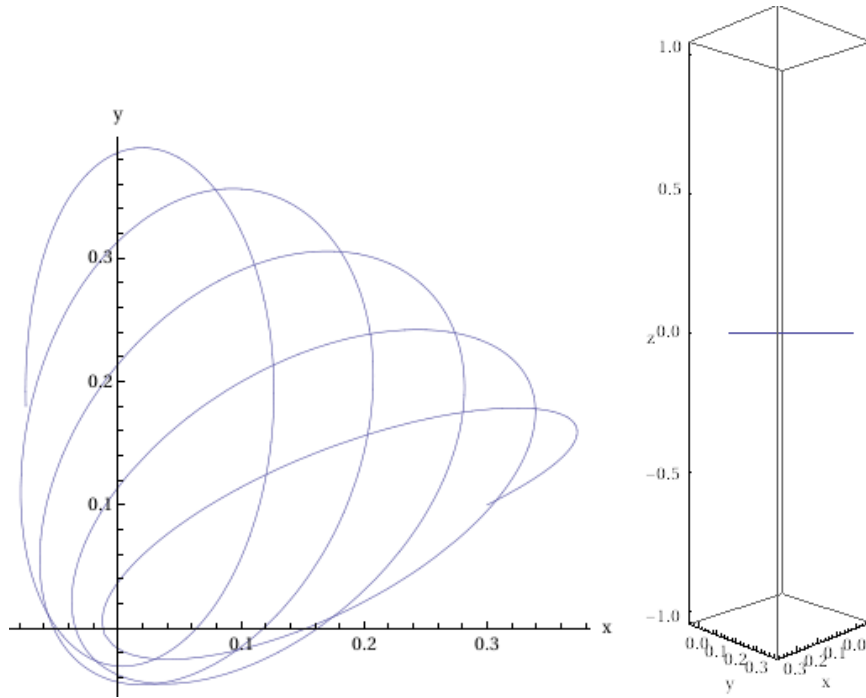
De esta ecuación y de la ecuación (1.27) que da el período en el movimiento no perturbado, se sigue

$$\frac{\tau}{T} = \frac{2}{3} \frac{1}{F} \frac{k}{a^2}; \quad (2.51)$$

en el método de perturbaciones de Kepler se cumple  $F \ll k/r^2 \approx k/a^2$ , así en esta aproximación, de la ecuación (2.51) se sigue que  $\tau \gg T$ , esto es, el período de los cambios en los parámetros de la órbita es mucho mayor que el período del

movimiento no perturbado.

En la *figura (3)* se muestra la trayectoria de la partícula, esta trayectoria se obtuvo a partir de la solución numérica de la ecuación del movimiento de la partícula (2.22), usando la versión 7 del programa *Mathematica*. Las propiedades de la trayectoria obtenida mediante la solución numérica coinciden con las obtenidas usando perturbación al movimiento de Kepler.



*Figura (3). Trayectoria de la partícula cuando el campo uniforme está en el plano de la trayectoria, con  $F/(k/a^2) = 0.0627$  a) la trayectoria en el plano  $xy$ , se aprecia el cambio en la excentricidad y la orientación de la órbita. b) una vista lateral muestra que la coordenada  $z$  no cambia.*

A continuación estudiamos el caso en el que la orientación de la fuerza perturbadora  $\vec{F}$  es arbitraria.

Tomando el promedio temporal durante un período de tiempo  $T$  del movimiento no perturbado, en ambos lados de la ecuación (2.25) obtenemos

$$\langle \dot{\vec{A}} \rangle = \langle \vec{F} \times \vec{L} \rangle + \langle \vec{P} \times (\vec{r} \times \vec{F}) \rangle, \quad (2.52)$$

usando la identidad  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$ , reescribimos el

segundo término del lado derecho

$$\vec{P} \times (\vec{r} \times \vec{F}) = m \left[ (\vec{v} \cdot \vec{F}) \vec{r} - (\vec{v} \cdot \vec{r}) \vec{F} \right]. \quad (2.53)$$

En el movimiento no perturbado (campo coulombiano), la trayectoria de la partícula está contenida en el plano  $xy$ , así el vector de posición  $\vec{r}$  y el vector de velocidad  $\vec{v}$  están dados por

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\hat{i} + y\hat{j}, \\ \vec{v} &= \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

En el caso de orientación arbitraria de  $\vec{F}$ , su expresión es

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} \quad (2.55)$$

sustituyendo (2.54) y (2.55) en el lado derecho de (2.53) y tomando el promedio temporal obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \vec{P} \times (\vec{r} \times \vec{F}) \rangle &= m[F_x\langle \dot{x}x \rangle\hat{i} + F_x\langle \dot{x}y \rangle\hat{j} + F_y\langle \dot{y}x \rangle\hat{i} + F_y\langle \dot{y}y \rangle\hat{j} \\ &\quad - F_x\langle \dot{x}x \rangle\hat{i} - F_y\langle \dot{x}x \rangle\hat{j} - F_z\langle \dot{x}x \rangle\hat{k} \\ &\quad - F_x\langle \dot{y}y \rangle\hat{i} - F_y\langle \dot{y}y \rangle\hat{j} - F_z\langle \dot{y}y \rangle\hat{k}], \end{aligned} \quad (2.56)$$

ahora usando las ecuaciones (1.36), (1.41) y (1.43) para  $x(t)$  y  $y(t)$  del movimiento no perturbado, y las ecuaciones (1.22), (1.26) para el semieje mayor  $a$  y el periodo

$T$  respectivamente obtenemos

$$\begin{aligned}
 \langle x\dot{x} \rangle &= \frac{a^2}{3} \frac{1}{2\pi a^2 \sqrt{\frac{m}{k}}} \int_0^{2\pi} \sin \xi (\cos \xi - e) d\xi = 0, \\
 \langle y\dot{y} \rangle &= \frac{a^2(1-e^2)}{3} \frac{1}{2\pi a^2 \sqrt{\frac{m}{k}}} \int_0^{2\pi} \cos \xi \sin \xi d\xi = 0, \\
 \langle x\dot{y} \rangle &= \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{3} \frac{1}{2\pi a^2 \sqrt{\frac{m}{k}}} \int_0^{2\pi} \cos \xi (\cos \xi - e) d\xi = \frac{L}{2m}, \\
 \langle y\dot{x} \rangle &= \frac{-a^2\sqrt{1-e^2}}{3} \frac{1}{2\pi a^2 \sqrt{\frac{m}{k}}} \int_0^{2\pi} \sin^2 \xi d\xi = -\frac{L}{2m}, \tag{2.57}
 \end{aligned}$$

así la ecuación (2.56) queda

$$\langle \vec{P} \times (\vec{r} \times \vec{F}) \rangle = \frac{1}{2} (F_y \hat{i} - F_x \hat{j}) L; \tag{2.58}$$

en el movimiento no perturbado,  $L = L_z$ ,  $\vec{L} = L_z \hat{k}$ , así podemos reescribir (2.58) como

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{P} \times (\vec{r} \times \vec{F}) \rangle &= \frac{1}{2} (F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}) \times (L_z \hat{k}) \\
 &= \frac{1}{2} \vec{F} \times \vec{L}. \tag{2.59}
 \end{aligned}$$

Como  $\vec{L}$  se considera constante al promediar en un periodo  $T$  del movimiento no perturbado, se cumple

$$\langle \vec{F} \times \vec{L} \rangle = \vec{F} \times \vec{L} \tag{2.60}$$

sustituyendo (2.59) y (2.60) en (2.52) obtenemos

$$\langle \vec{A} \rangle = \frac{3}{2} \vec{F} \times \vec{L}; \tag{2.61}$$

tomando  $\langle \dot{\vec{A}} \rangle$  como valor representativo de  $\vec{A}(t)$  queda

$$\dot{\vec{A}} = \frac{3}{2} \vec{F} \times \vec{L}. \quad (2.62)$$

Las ecuaciones (2.62) y (2.35) (que es válida para cualquier orientación de  $\vec{F}$ ) nos dan la evolución de  $\vec{A}$  y  $\vec{L}$ , respectivamente, en el movimiento perturbado.

De las ecuaciones (2.35) y (2.62) se sigue

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} \cdot \vec{F} &= 0, \\ \dot{\vec{A}} \cdot \vec{F} &= 0; \end{aligned} \quad (2.63)$$

así

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{L} \cdot \vec{F}) &= 0 \\ \frac{d}{dt} (\vec{A} \cdot \vec{F}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.64)$$

por lo tanto

$$\vec{L} \cdot \vec{F} = cte \quad (2.65)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{F} = cte \quad (2.66)$$

esto es, las componentes de  $\vec{L}$  y  $\vec{A}$  en la dirección  $\vec{F}$  son constantes.

Ahora, la componente de  $\vec{L}$  perpendicular a  $\vec{F}$ , que denotaremos  $\vec{L}_\perp$  está dada por

$$\vec{L}_\perp = \vec{L} - (\hat{F} \cdot \vec{L}) \hat{F}, \quad (2.67)$$

que reescribimos como

$$\vec{L}_\perp = \vec{L} - \frac{(\vec{L} \cdot \vec{F})}{F^2} \vec{F}; \quad (2.68)$$

de aquí obtenemos

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{L}_\perp = \frac{d^2}{dt^2} \vec{L} - \frac{\vec{F}}{F^2} \frac{d^2}{dt^2} (\vec{L} \cdot \vec{F}), \quad (2.69)$$



debido a la ecuación (2.65) el segundo término del lado derecho de (2.69) se anula, así

$$\ddot{\vec{L}}_{\perp} = \ddot{\vec{L}} \quad (2.70)$$

usando (2.35) queda

$$\ddot{\vec{L}}_{\perp} = \frac{3a}{2mk} \frac{d}{dt} (\vec{F} \times \vec{A}) \quad (2.71)$$

$$= \frac{3a}{2mk} \vec{F} \times \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{3a}{2mk} \vec{F} \times \dot{\vec{A}}, \quad (2.72)$$

debido a (2.62) en el lado derecho queda

$$\ddot{\vec{L}}_{\perp} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{a}{km} \vec{F} \times (\vec{F} \times \vec{L}); \quad (2.73)$$

ahora de (2.73) y de (2.68) se sigue

$$\ddot{\vec{L}}_{\perp} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{a}{mk} \vec{F} \times \left[ \vec{F} \times \left( \vec{L}_{\perp} + \frac{\vec{L} \vec{F}}{F^2} \vec{F} \right) \right] \quad (2.74)$$

$$\ddot{\vec{L}}_{\perp} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{a}{mk} \vec{F} \times (\vec{F} \times \vec{L}_{\perp}), \quad (2.75)$$

usando la identidad  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a}) = a^2 \vec{b} - \vec{a} (\vec{a} \cdot \vec{b})$  en el lado derecho queda

$$\ddot{\vec{L}}_{\perp} = - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{a}{mk} F^2 \vec{L}_{\perp} \quad (2.76)$$

esto es

$$\ddot{\vec{L}}_{\perp} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{a}{mk} F^2 \vec{L}_{\perp} = 0, \quad (2.77)$$

así

$$\ddot{\vec{L}}_{\perp} + \Omega^2 \vec{L}_{\perp} = 0, \quad (2.78)$$

donde

$$\Omega^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{a}{km} F^2; \quad (2.79)$$

la ecuación (2.78) tiene la misma forma matemática que la de un oscilador isotrópico bidimensional.

Si introducimos un sistema de coordenadas  $OX_1X_2X_3$  con el eje  $X_3$  paralelo a  $\vec{F}$ , y resolvemos (2.78) obtenemos las componentes  $L_1$  y  $L_2$  del momento angular a lo largo de esos ejes:

$$\begin{aligned} L_1 &= B_1 \cos \Omega t + C_1 \sin \Omega t, \\ L_2 &= B_2 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t; \end{aligned} \quad (2.80)$$

donde  $B_1, B_2, C_1, C_2$  son constantes.

Ahora determinamos las componentes  $A_1, A_2$  de  $\vec{A}$  en el sistema de ejes  $OX_1X_2X_3$ , en este sistema

$$\dot{\vec{L}} = \dot{L}_1 \hat{e}_1 + \dot{L}_2 \hat{e}_2 + \dot{L}_3 \hat{e}_3 \quad (2.81)$$

de (2.65) se sigue que  $L_3 = \vec{L} \cdot \frac{\vec{F}}{F}$  es constante, así  $\dot{L}_3 = 0$  y (2.81) queda

$$\dot{\vec{L}} = \dot{L}_1 \hat{e}_1 + \dot{L}_2 \hat{e}_2 \quad (2.82)$$

debido a (2.80), la ecuación (2.82) queda

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} &= (-B_1 \Omega \sin \Omega t + C_1 \Omega \cos \Omega t) \hat{e}_1 \\ &+ (-B_2 \Omega \sin \Omega t + C_2 \Omega \cos \Omega t) \hat{e}_2, \end{aligned} \quad (2.83)$$

sustituyendo esta expresión en la ecuación (2.35) para la evolución de  $\vec{A}$  obtenemos

$$\begin{aligned} &\Omega (-B_1 \sin \Omega t + C_1 \cos \Omega t) \hat{e}_1 + \Omega (-B_2 \sin \Omega t + C_2 \cos \Omega t) \hat{e}_2 \\ &= \frac{3}{2} \frac{a}{mk} F \hat{e}_3 \times (A_1 \hat{e}_1 + A_2 \hat{e}_2 + A_3 \hat{e}_3), \end{aligned} \quad (2.84)$$

de aquí sigue

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{2mk}{3aF}\Omega(B_2 \sin \Omega t - C_2 \cos \Omega t), \\ A_2 &= \frac{2mk}{3aF}\Omega(B_1 \sin \Omega t - C_1 \cos \Omega t); \end{aligned} \quad (2.85)$$

usando la expresión de  $\Omega$  dada por (2.79) reescribimos (2.85)

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{3F}{2\Omega}(B_2 \sin \Omega t - C_2 \cos \Omega t), \\ A_2 &= \frac{3F}{2\Omega}(B_1 \sin \Omega t - C_1 \cos \Omega t). \end{aligned} \quad (2.86)$$

Las constantes  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $B_2$  y  $C_2$  de las ecuaciones (2.80) y (2.86) se determinan a partir de los valores iniciales de  $\vec{A}$  y  $\vec{L}$ .

Las ecuaciones (2.80) representan una elipse contenida en el plano  $\Pi_1$  paralelo al plano  $X_1X_2$ , cuyo centro está sobre el eje  $X_3$ ; además, la componente  $L_3$  (en la dirección de  $\vec{F}$ ) es constante según la ecuación (2.65); así el extremo del vector  $\vec{L}$  describe una elipse contenida en el plano  $\Pi_1$ , con centro en un punto sobre el eje  $X_3$ . En forma similar, a partir de las ecuaciones (2.86) y de la ecuación (2.66), se concluye que el extremo del vector  $\vec{A}$  describe una elipse contenida en un plano  $\Pi_2$  paralelo al plano  $X_1X_2$ , con centro en un punto sobre el eje  $X_3$ . Así, tanto  $\vec{L}$  como  $\vec{A}$  presentan precesión alrededor del eje  $X_3$ , esto es, alrededor del campo uniforme  $\vec{F}$ .

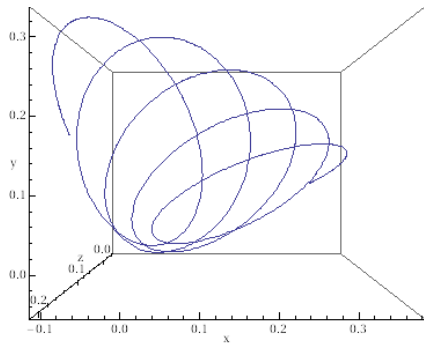
En todo instante el momento angular  $\vec{L}$  es perpendicular al plano  $\Pi_3$  de la órbita, por lo tanto también este plano presenta precesión alrededor de  $\vec{F}$ ; en tanto que el vector de Runge-Lenz  $\vec{A}$  determina en cada instante la orientación de la órbita en el plano  $\Pi_3$ .

De las ecuaciones (2.65) y (2.80) se sigue que en general la magnitud  $L$  del momento angular no es constante, en consecuencia el ángulo entre  $\vec{L}$  y  $\vec{F}$  cambia en el tiempo (ec. 2.65), así el ángulo formado por  $\vec{F}$  y el plano  $\Pi_3$  cambia en el tiempo.

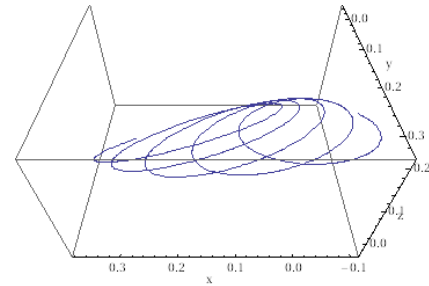
En forma similar, de las ecuaciones (2.66) y (2.86) se concluye que la magnitud del vector de Runge-Lenz y con ésta la excentricidad de la órbita cambia con el tiempo; también cambia el ángulo formado por el vector de Runge-Lenz y la proyección de  $\vec{F}$  sobre el plano de la órbita.

Todos estos cambios se realizan con frecuencia  $\Omega$ , y periodo  $\tau = 2\pi/\Omega$  mucho menor que el período  $T$  del movimiento no perturbado.

En la *figura (4)* se muestra la trayectoria obtenida mediante la solución numérica de la ecuación de movimiento de la partícula (2.22).



*Punto de vista (0,0,1)*



*Punto de vista (0,1,1)*

Figura (4). Trayectoria de la partícula para una orientación arbitraria del campo uniforme  $\vec{F}$  obtenida mediante la solución numérica de la ecuación de movimiento de la partícula. a) Se aprecia el cambio en la excentricidad y la orientación de la órbita.  
 b) se aprecia cómo el ángulo formado entre  $\vec{L}$  y  $\vec{F}$  cambia respecto al tiempo.

---

## Capítulo 3

# Estudio del movimiento para valores arbitrarios del campo uniforme

### 3.1. Coordenadas Parabólicas

Las coordenadas parabólicas  $\varepsilon$ ,  $\eta$ ,  $\phi$  están relacionadas con las coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  mediante las ecuaciones de transformación

$$x = \sqrt{\varepsilon\eta} \cos \phi \quad y = \sqrt{\varepsilon\eta} \sin \phi \quad z = \frac{1}{2}(\varepsilon - \eta) \quad (3.1)$$

donde  $\varepsilon \geq 0$ ,  $\eta \geq 0$ ,  $0 < \phi \leq 2\pi$

Las ecuaciones de transformación entre las coordenadas parabólicas y las coordenadas cilíndricas son

$$\rho = \sqrt{\varepsilon\eta} \quad z = \frac{1}{2}(\varepsilon - \eta) \quad \phi = \phi \quad (3.2)$$

De estas ecuaciones obtenemos

$$z = \frac{1}{2} \left( \frac{\rho^2}{\eta} - \eta \right) \quad (3.3)$$

$$z = \frac{1}{2} \left( \varepsilon - \frac{\rho^2}{\varepsilon} \right) \quad (3.4)$$

De las ecuaciones (3.3) y (3.4) se sigue que las superficies  $\eta = \text{constante}$ ,  $\varepsilon = \text{constante}$  representan familias de paraboloides de revolución con concavidad positiva y negativa respectivamente.

El vector posición de la partícula, en coordenadas cartesianas, está dado por

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \quad (3.5)$$

utilizando las ecuaciones de transformación (3.1) en esta expresión obtenemos

$$\vec{r} = \sqrt{\varepsilon\eta} \cos \phi \hat{i} + \sqrt{\varepsilon\eta} \sin \phi \hat{j} + \frac{1}{2} (\varepsilon - \eta) \hat{k} \quad (3.6)$$

Ahora usamos la ecuación (3.6) para construir los vectores base (normalizados)  $\hat{b}_\varepsilon$ ,  $\hat{b}_\eta$ ,  $\hat{b}_\phi$ , para las coordenadas parabólicas

$$\begin{aligned} \hat{b}_\varepsilon &= \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varepsilon}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varepsilon} \right|}, \\ \hat{b}_\eta &= \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right|}, \\ \hat{b}_\phi &= \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right|}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

De la ecuación (3.6) y de las ecuaciones (3.7) obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{b}_\varepsilon &= \sqrt{\frac{\eta}{\eta + \varepsilon}} \cos \phi \hat{i} + \sqrt{\frac{\eta}{\eta + \varepsilon}} \sin \phi \hat{j} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon + \eta}} \hat{k} \\ \hat{b}_\eta &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\eta + \varepsilon}} \cos \phi \hat{i} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\eta + \varepsilon}} \sin \phi \hat{j} - \sqrt{\frac{\eta}{\varepsilon + \eta}} \hat{k} \\ \hat{b}_\phi &= -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j} \end{aligned} \quad (3.8)$$

De las ecuaciones (3.8) se sigue

$$\widehat{b}_\varepsilon \cdot \widehat{b}_\eta = \widehat{b}_\varepsilon \cdot \widehat{b}_\phi = \widehat{b}_\eta \cdot \widehat{b}_\phi = 0, \quad (3.9)$$

$$\widehat{b}_\varepsilon \times \widehat{b}_\eta = \widehat{b}_\phi \quad \widehat{b}_\eta \times \widehat{b}_\phi = \widehat{b}_\varepsilon \quad \widehat{b}_\phi \times \widehat{b}_\varepsilon = \widehat{b}_\eta \quad (3.10)$$

esto es,  $(\widehat{b}_\varepsilon, \widehat{b}_\eta, \widehat{b}_\phi)$  es una base ortonormal derecha.

Ahora expresamos el vector de posición en la base  $(\widehat{b}_\varepsilon, \widehat{b}_\eta, \widehat{b}_\phi)$ ; debido a la ortonormalidad de la base, la expresión de  $\vec{r}$  es

$$\vec{r} = (\vec{r} \cdot \widehat{b}_\varepsilon)\widehat{b}_\varepsilon + (\vec{r} \cdot \widehat{b}_\eta)\widehat{b}_\eta + (\vec{r} \cdot \widehat{b}_\phi)\widehat{b}_\phi \quad (3.11)$$

usando la ecuación (3.6) y las ecuaciones (3.8) en esta ecuación obtenemos

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon(\varepsilon + \eta)}\widehat{b}_\varepsilon + \frac{1}{2}\sqrt{\eta(\varepsilon + \eta)}\widehat{b}_\eta \quad (3.12)$$

## 3.2. Constantes de movimiento en coordenadas parabólicas

Para expresar las constantes de movimiento en coordenadas parabólicas se requiere además del vector de posición (3.12), la expresión de la velocidad  $\vec{v}$  en estas coordenadas.

El vector velocidad está definido como

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (3.13)$$

debido a que  $\vec{r} = \vec{r}(\varepsilon, \eta, \phi)$ , de la ecuación (3.13) se sigue

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \dot{\phi} \quad (3.14)$$

ahora, de las ecuaciones (3.6) y (3.8) obtenemos

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon + \eta}{\varepsilon}} \widehat{b}_\varepsilon, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon + \eta}{\eta}} \widehat{b}_\eta, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \sqrt{\varepsilon \eta} \widehat{b}_\phi; \quad (3.15)$$

así (3.14) queda.

$$\vec{v} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon + \eta}{\varepsilon}} \dot{\varepsilon} \widehat{b}_\varepsilon + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon + \eta}{\eta}} \dot{\eta} \widehat{b}_\eta + \sqrt{\varepsilon \eta} \dot{\phi} \widehat{b}_\phi. \quad (3.16)$$

Ahora introducimos un sistema de coordenadas con el eje  $z$  en la dirección del campo uniforme  $\vec{F}$ , de modo que

$$\vec{F} = F \widehat{k}, \quad (3.17)$$

en este caso la energía total  $E$  dada por la ecuación (2.4) queda

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{k}{r} - Fz; \quad (3.18)$$

usando las ecuaciones de transformación (3.1) y la ecuación (3.6) para la velocidad, queda

$$E = \frac{1}{8} m (\varepsilon + \eta) \left( \frac{\dot{\varepsilon}^2}{\varepsilon} + \frac{\dot{\eta}^2}{\eta} \right) + \frac{1}{2} m \varepsilon \eta \dot{\phi}^2 - \frac{2k}{\varepsilon + \eta} - \frac{F}{2} (\varepsilon - \eta) \quad (3.19)$$

Para expresar las otras dos constantes de movimiento  $L_z, \beta$  en coordenadas parabólicas, calculamos primero el momento angular

$$\vec{L} = \vec{r} \times (m \vec{v}). \quad (3.20)$$

usando las ecuaciones (3.12) y (3.16) en (3.20) queda

$$\begin{aligned} \vec{L} &= m \left( \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon(\varepsilon + \eta)} \widehat{b}_\varepsilon + \frac{1}{2} \sqrt{\eta(\varepsilon + \eta)} \widehat{b}_\eta \right) \times \\ &\quad \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon + \eta}{\varepsilon}} \dot{\varepsilon} \widehat{b}_\varepsilon + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon + \eta}{\eta}} \dot{\eta} \widehat{b}_\eta + \sqrt{\varepsilon \eta} \dot{\phi} \widehat{b}_\phi \right) \\ \vec{L} &= \frac{m}{2} [\eta \sqrt{\varepsilon(\varepsilon + \eta)} \dot{\phi} \widehat{b}_\varepsilon - \varepsilon \sqrt{\eta(\varepsilon + \eta)} \dot{\phi} \widehat{b}_\eta \\ &\quad + \frac{1}{2} (\varepsilon + \eta) \left( \sqrt{\frac{\varepsilon}{\eta}} \dot{\eta} - \sqrt{\frac{\eta}{\varepsilon}} \dot{\varepsilon} \right) \widehat{b}_\phi]. \end{aligned} \quad (3.21)$$



Para calcular la componente del momento angular en dirección del campo uniforme

$$\vec{L} \cdot \hat{F} = \vec{L} \cdot \hat{k} \equiv L_z \quad (3.22)$$

expresamos el vector  $\hat{k}$  en la base  $(\hat{b}_\varepsilon, \hat{b}_\eta, \hat{b}_\phi)$

$$\begin{aligned} \hat{k} &= (\hat{b}_\varepsilon \cdot \hat{k}) \hat{b}_\varepsilon + (\hat{b}_\eta \cdot \hat{k}) \hat{b}_\eta + (\hat{b}_\phi \cdot \hat{k}) \hat{b}_\phi, \\ \hat{k} &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon + \eta}} \hat{b}_\varepsilon - \sqrt{\frac{\eta}{\varepsilon + \eta}} \hat{b}_\eta; \end{aligned} \quad (3.23)$$

sustituyendo (3.23) y (3.21) en (3.22) obtenemos

$$L_z = m\varepsilon\eta\dot{\phi}. \quad (3.24)$$

Ahora expresamos la constante de movimiento

$$\beta = \vec{F} \cdot \left( \vec{P} \times \vec{L} - mk \frac{\vec{r}}{r} \right) + \frac{m}{2} \left( \vec{r} \times \vec{F} \right)^2 \quad (3.25)$$

dada por la ecuación (2.22), en coordenadas parabólicas.

Primero calculamos el producto  $\vec{P} \times \vec{L}$ , de (3.16) y (3.21) se sigue

$$\begin{aligned} \vec{P} \times \vec{L} &= m^2 \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon + \eta}{\varepsilon}} \dot{\varepsilon} \hat{b}_\varepsilon + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon + \eta}{\eta}} \dot{\eta} \hat{b}_\eta + \sqrt{\varepsilon \eta} \dot{\phi} \hat{b}_\phi \right) \\ &\quad \times \frac{1}{2} [\eta \sqrt{\varepsilon(\varepsilon + \eta)} \dot{\phi} \hat{b}_\varepsilon - \varepsilon \sqrt{\eta(\varepsilon + \eta)} \dot{\phi} \hat{b}_\eta \\ &\quad + \frac{1}{2} (\varepsilon + \eta) \left( \sqrt{\frac{\varepsilon}{\eta}} \dot{\eta} - \sqrt{\frac{\eta}{\varepsilon}} \dot{\varepsilon} \right) \hat{b}_\phi] \\ \vec{P} \times \vec{L} &= m^2 \left[ -\frac{1}{4} \sqrt{\varepsilon \eta} (\varepsilon + \eta) \dot{\varepsilon} \dot{\phi} \hat{b}_\phi - \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\varepsilon + \eta}{\varepsilon}} (\varepsilon + \eta) \left( \sqrt{\frac{\varepsilon}{\eta}} \dot{\eta} - \sqrt{\frac{\eta}{\varepsilon}} \dot{\varepsilon} \right) \dot{\varepsilon} \hat{b}_\eta \right. \\ &\quad - \frac{1}{4} \sqrt{\varepsilon \eta} (\varepsilon + \eta) \dot{\eta} \dot{\phi} \hat{b}_\phi + \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\varepsilon + \eta}{\eta}} (\varepsilon + \eta) \left( \sqrt{\frac{\varepsilon}{\eta}} \dot{\eta} - \sqrt{\frac{\eta}{\varepsilon}} \dot{\varepsilon} \right) \dot{\eta} \hat{b}_\varepsilon \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \eta \varepsilon \sqrt{\eta(\varepsilon + \eta)} \dot{\phi}^2 \hat{b}_\eta + \frac{1}{2} \eta \varepsilon \sqrt{\varepsilon(\varepsilon + \eta)} \dot{\phi}^2 \hat{b}_\varepsilon \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

Ahora

$$\vec{F} \cdot (\vec{P} \times \vec{L}) = F [\hat{k} \cdot (\vec{P} \times \vec{L})], \quad (3.27)$$

usando la ecuación (3.26) en el lado derecho de (3.27) obtenemos

$$\vec{F} \cdot (\vec{P} \times \vec{L}) = Fm^2 \left[ \frac{1}{8} \frac{\varepsilon}{\eta} (\varepsilon + \eta) \dot{\eta}^2 - \frac{1}{8} \frac{\eta}{\varepsilon} (\varepsilon + \eta) \dot{\varepsilon}^2 + \frac{1}{2} (\varepsilon^2 \eta - \varepsilon \eta^2) \dot{\phi}^2 \right] \quad (3.28)$$

(en este ultimo paso se uso las ecuación (3.23). Ahora calculamos  $\vec{F} \cdot \left( -mk \frac{\vec{r}'}{r} \right)$

$$\vec{F} \cdot \left( -mk \frac{\vec{r}'}{r} \right) = -mk \frac{F}{r} (\hat{k} \cdot \vec{r}') \quad (3.29)$$

$$= -\frac{2kmF}{\varepsilon + \eta} \left( \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon + \eta}} \hat{b}_\varepsilon - \sqrt{\frac{\eta}{\varepsilon + \eta}} \hat{b}_\eta \right) \cdot \left( \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon(\varepsilon + \eta)} \hat{b}_\varepsilon + \frac{1}{2} \sqrt{\eta(\varepsilon + \eta)} \hat{b}_\eta \right)$$

$$\vec{F} \cdot \left( -mk \frac{\vec{r}'}{r} \right) = -mkF \frac{\varepsilon - \eta}{\varepsilon + \eta} \quad (3.30)$$

Finalmente calculamos  $\vec{r}' \times \vec{F}$

$$\begin{aligned} (\vec{r}' \times \vec{F}) &= F (\vec{r}' \times \hat{k}) = F \left( \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon(\varepsilon + \eta)} \hat{b}_\varepsilon + \frac{1}{2} \sqrt{\eta(\varepsilon + \eta)} \hat{b}_\eta \right) \\ &\quad \times \left( \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon + \eta}} \hat{b}_\varepsilon - \sqrt{\frac{\eta}{\varepsilon + \eta}} \hat{b}_\eta \right), \\ (\vec{r}' \times \vec{F}) &= -F \sqrt{\varepsilon \eta} \hat{b}_\phi, \end{aligned}$$

de aquí se sigue

$$\left( \vec{r}' \times \vec{F} \right)^2 = F^2 \varepsilon \eta. \quad (3.31)$$

Sustituyendo (3.28), (3.30), (3.31) en la ecuación (3.25) para  $\beta$  obtenemos

$$\begin{aligned} \beta &= Fm^2 \left[ \frac{1}{8} \frac{\varepsilon}{\eta} (\varepsilon + \eta) \dot{\eta}^2 - \frac{1}{8} \frac{\eta}{\varepsilon} (\varepsilon + \eta) \dot{\varepsilon}^2 + \frac{1}{2} (\varepsilon^2 \eta - \varepsilon \eta^2) \dot{\phi}^2 \right] \\ &\quad - mkF \frac{\varepsilon - \eta}{\varepsilon + \eta} + \frac{1}{2} mF^2 \varepsilon \eta \end{aligned} \quad (3.32)$$

### 3.3. Análisis del movimiento.

De la ecuación (3.24) para  $L_z$  obtenemos

$$\dot{\phi} = \frac{L_z}{m\varepsilon\eta}, \quad (3.33)$$

sustituyendo en la expresión para la energía (3.19) queda

$$E = \frac{1}{8}m(\varepsilon + \eta) \left( \frac{\dot{\varepsilon}^2}{\varepsilon} + \frac{\dot{\eta}^2}{\eta} \right) + \frac{L_z^2}{2m\varepsilon\eta} - \frac{2k}{\varepsilon + \eta} - \frac{F}{2}(\varepsilon - \eta). \quad (3.34)$$

Ahora, sustituyendo (3.33) en la ecuación (3.32) para la constante de movimiento  $\beta$  obtenemos

$$\begin{aligned} \beta = & Fm^2 \left[ \frac{1}{8} \frac{\varepsilon}{\eta} (\varepsilon + \eta) \dot{\eta}^2 - \frac{1}{8} \frac{\eta}{\varepsilon} (\varepsilon + \eta) \dot{\varepsilon}^2 + \frac{1}{2} (\varepsilon^2 \eta - \varepsilon \eta^2) \frac{L_z^2}{m^2 \varepsilon^2 \eta^2} \right] \\ & - mkF \frac{\varepsilon - \eta}{\varepsilon + \eta} + \frac{1}{2} mF^2 \varepsilon \eta. \end{aligned} \quad (3.35)$$

De la ecuación (3.34) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon E}{m} = & \frac{1}{8} (\varepsilon + \eta) \dot{\varepsilon}^2 + \frac{1}{8} (\varepsilon + \eta) \frac{\varepsilon}{\eta} \dot{\eta}^2 + \frac{1}{2} \frac{L_z^2}{m^2 \varepsilon \eta} \\ & - \frac{2k\varepsilon}{m(\varepsilon + \eta)} - \frac{F\varepsilon}{2m} (\varepsilon - \eta), \end{aligned} \quad (3.36)$$

de aquí se sigue

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \frac{\varepsilon}{\eta} (\varepsilon + \eta) \dot{\eta}^2 &= \frac{E}{m} \varepsilon - \frac{1}{8} (\varepsilon + \eta) \dot{\varepsilon}^2 - \frac{L_z^2}{2m^2 \eta} + \frac{2k\varepsilon}{m(\varepsilon + \eta)} \\ &+ \frac{F}{2m} \varepsilon (\varepsilon - \eta) \end{aligned} \quad (3.37)$$

sustituyendo en (3.35) queda

$$\begin{aligned} \beta = & Fm^2 \left[ \frac{E}{m} \varepsilon - \frac{1}{8} (\varepsilon + \eta) \dot{\varepsilon}^2 - \frac{L_z^2}{2m^2 \eta} + \frac{2k\varepsilon}{m(\varepsilon + \eta)} \right. \\ & + \frac{F}{2m} \varepsilon (\varepsilon - \eta) - \frac{1}{8} \frac{\eta}{\varepsilon} (\varepsilon + \eta) \dot{\varepsilon}^2 + \frac{L_z^2}{2m^2} \frac{(\varepsilon - \eta)}{\varepsilon \eta} \\ & \left. - \frac{k}{m} \frac{\varepsilon - \eta}{\varepsilon + \eta} + \frac{F}{2m} \varepsilon \eta \right] \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\beta = Fm^2 \left[ \frac{E}{m} \varepsilon - \frac{1}{8} (\varepsilon + \eta)^2 \frac{\dot{\varepsilon}^2}{\varepsilon} - \frac{L_z^2}{2m^2} \frac{1}{\varepsilon} + \frac{k}{m} + \frac{F}{2m} \varepsilon^2 \right], \quad (3.39)$$

de aquí se sigue

$$\left( \frac{1}{4} m (\varepsilon + \eta) \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} \right)^2 = \frac{m}{2} \left\{ E - \left[ \frac{L_z^2}{2m\varepsilon^2} - \left( k - \frac{\beta}{Fm} \right) \frac{1}{\varepsilon} - \frac{F}{2} \varepsilon \right] \right\} \geq 0. \quad (3.40)$$

Introduciendo la función

$$f(\varepsilon) \equiv \frac{L_z^2}{2m\varepsilon^2} - \left( k - \frac{\beta}{Fm} \right) \frac{1}{\varepsilon} - \frac{F}{2} \varepsilon \quad (3.41)$$

y sustituyendo en (3.40) obtenemos

$$E - f(\varepsilon) \geq 0 \quad (3.42)$$

esto es

$$f(\varepsilon) \leq E; \quad (3.43)$$

así los valores admisibles de la coordenada  $\varepsilon$  deben cumplir la condición (3.43).

Procediendo en forma similar, de la ecuación (3.34) obtenemos

$$\frac{1}{8} \frac{\eta}{\varepsilon} (\varepsilon + \eta) \dot{\varepsilon}^2 = \frac{E}{m} \eta - \frac{1}{8} (\varepsilon + \eta) \dot{\eta}^2 - \frac{L_z^2}{2m^2 \varepsilon} + \frac{2k}{m} \frac{\eta}{\varepsilon + \eta} + \frac{F}{2m} \eta (\varepsilon - \eta) \quad (3.44)$$

sustituyendo en (3.32) obtenemos

$$\beta = Fm^2 \left[ \frac{1}{8} (\varepsilon + \eta)^2 \frac{\dot{\eta}^2}{\eta} - \frac{E}{m} \eta + \frac{L_z^2}{2m^2} \frac{1}{\eta} - \frac{k}{m} + \frac{F}{2m} \eta^2 \right], \quad (3.45)$$

de aquí se sigue

$$\left(\frac{1}{4}m(\varepsilon + \eta)\frac{\dot{\eta}}{\eta}\right)^2 = \frac{m}{2} \left\{ E - \left[ \frac{L_z^2}{2m\eta^2} - \left( k + \frac{\beta}{Fm} \right) \frac{1}{\eta} + \frac{F}{2}\eta \right] \right\} \geq 0 \quad (3.46)$$

introduciendo la función

$$g(\eta) \equiv \frac{L_z^2}{2m\eta^2} - \left( k + \frac{\beta}{Fm} \right) \frac{1}{\eta} + \frac{F}{2}\eta \quad (3.47)$$

y sustituyendo en (3.46) obtenemos

$$E - g(\eta) \geq 0 \quad (3.48)$$

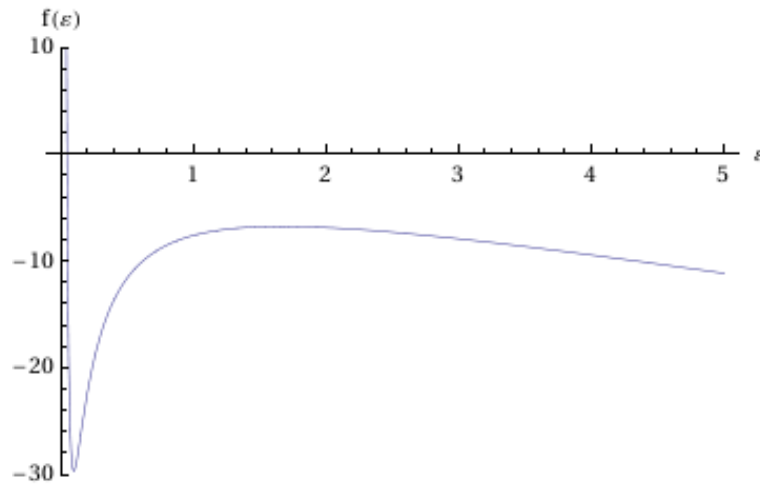
esto es

$$g(\eta) \leq E \quad (3.49)$$

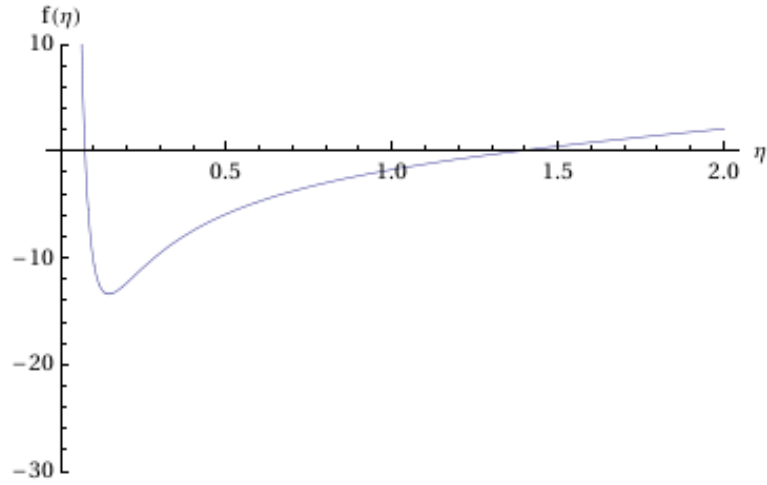
así los valores admisibles de la coordenada  $\eta$  deben cumplir la condición (3.49)

A continuación analizamos el movimiento a partir de las gráficas  $f(\varepsilon)$  contra  $\varepsilon$ ,  $g(\eta)$  contra  $\eta$ , y de las condiciones (3.43) y (3.49) para los valores admisibles de  $\varepsilon$ ,  $\eta$ .

Analizaremos varios casos con los mismos valores de  $L_z$ ,  $\beta$ ,  $k$ , y diferentes valores para el campo uniforme  $\vec{F}$



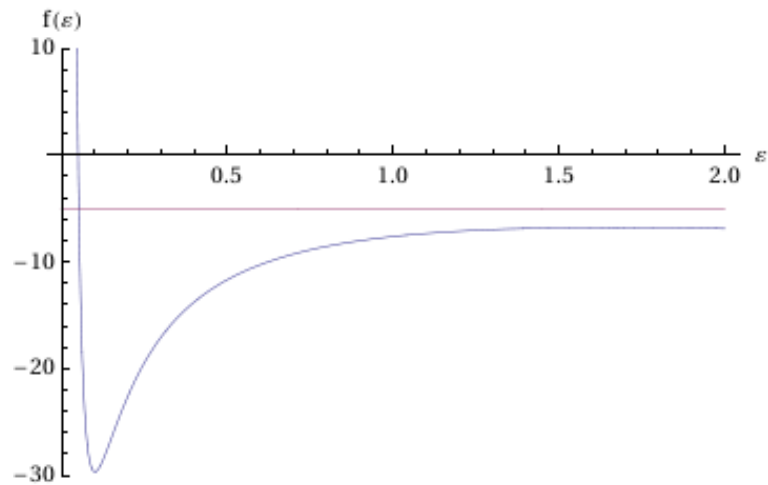
Gráfica  $f(\varepsilon)$  contra  $\varepsilon$  con  $L_z = 0.6$ ,  $\beta = -3.7$ ,  $k = 5$ ,  $F = 4$ ,  $m = 1$ . Hay un mínimo  $\varepsilon_{min}$  y un máximo  $\varepsilon_{max}$ .



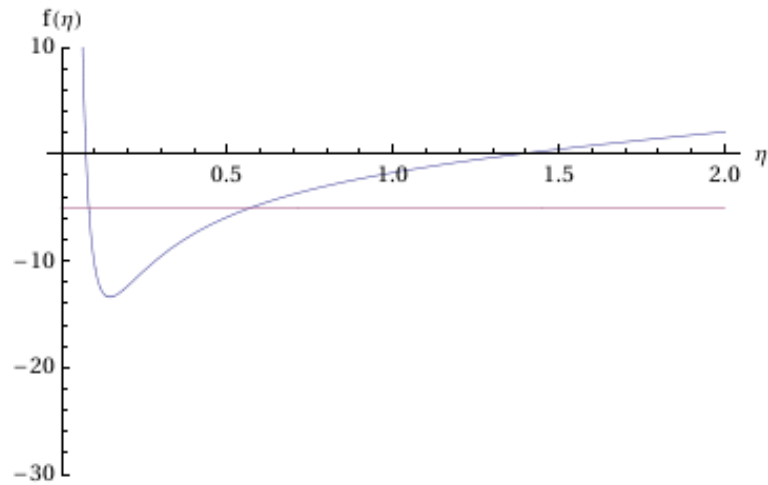
Gráfica  $g(\eta)$  contra  $\eta$ ,  $L_z = 0.6$ ,  $\beta = -3.7$ ,  $k = 5$ ,  $F = 4$ ,  $m = 1$ . Hay un mínimo  $\eta_{min}$ . Se cumple  $g(\eta_{min}) < f(\varepsilon_{max})$ .

Los valores de la energía deben cumplir  $f(\varepsilon_{min}) \leq E$ . Se presentan varios casos para estos valores de la energía:

1. Si  $f(\varepsilon_{max}) < E$  entonces  $\varepsilon \geq \varepsilon_1$  donde  $\varepsilon_1$  corresponde al punto de intersección de la recta  $E = cte$  y la curva  $f = f(\varepsilon)$  (punto de retorno); en tanto que  $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$  donde  $\eta_1, \eta_2$  corresponden a los valores de intersección (puntos de retorno de la recta  $E = cte$  y la curva  $g = g(\eta)$ ). En este caso la trayectoria es no acotada.

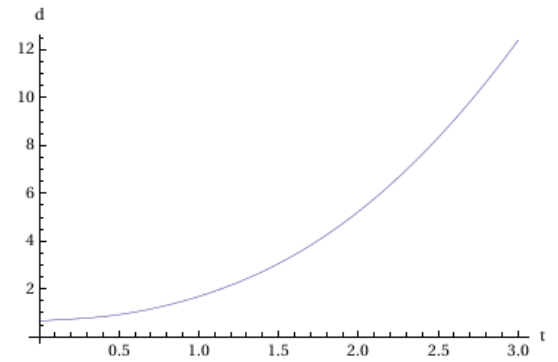
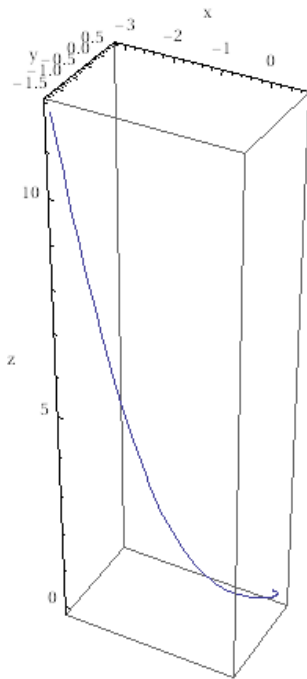


Gráfica  $f(\varepsilon)$  contra  $\varepsilon$  con,  $L_z = 0.6$ ,  $\beta = -3.7$ ,  $k = 5$ ,  $F = 4$ ,  $m = 1$ ,  
 $E = -5.11$ . Se cumple  $f(\varepsilon_{max}) < E$ .



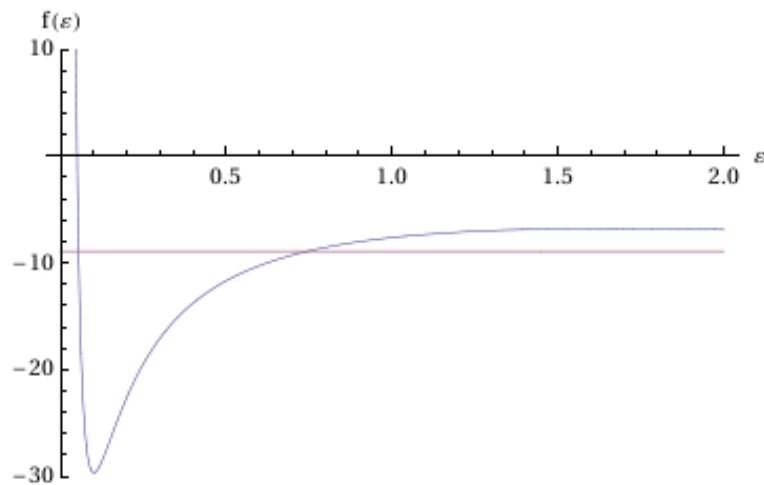
Gráfica  $g(\eta)$  contra  $\eta$ ,  $L_z = 0.6$ ,  $\beta = -3.7$ ,  $k = 5$ ,  $F = 4$ ,  $m = 1$ ,  $E = -5.11$ .

A continuación se muestra la trayectoria de la partícula obtenida mediante la solución numérica de la ecuación 2.22 usando la versión 7 del programa *Mathematica*.



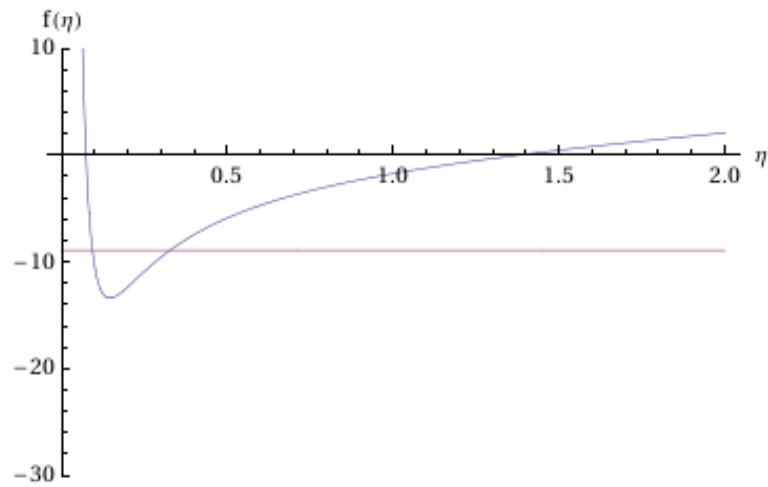
Trayectoria para  $E = -5.11$  distancia de la part'cula al origen (centro de fuerza) contra

2. Si  $f(\varepsilon_{min}) < E < f(\varepsilon_{max})$ , entonces  $\varepsilon_2 < \varepsilon < \varepsilon_3$  donde  $\varepsilon_2, \varepsilon_3$  son los puntos de retorno en la gráfica  $f(\varepsilon)$  contra  $\varepsilon$ ; en tanto que  $\eta_3 < \eta < \eta_4$  son los puntos de retorno de la gráfica  $g(\eta)$  contra  $\eta$ . En este caso la trayectoria es acotada.



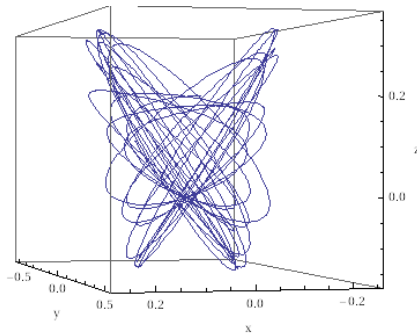
Gráfica  $f(\varepsilon)$  contra  $\varepsilon$  con,  $L_z = 0.6$ ,  $\beta = -3.7$ ,  $k = 5$ ,  $F = 4$ ,  $m = 1$ ,  
 $E = -8.92$ . Se cumple  $f_{\varepsilon_{min}} < E < f_{\varepsilon_{max}}$



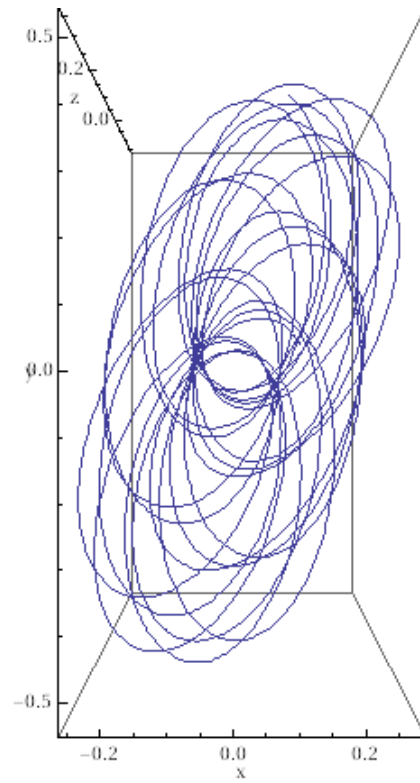


Gráfica  $g(\eta)$  contra  $\eta$ ,  $L_z = 0.6$ ,  $\beta = -3.7$ ,  $k = 5$ ,  $F = 4$ ,  $m = 1$ ,  $E = -8.92$ .

A continuación se muestra la trayectoria de la partícula obtenida mediante la solución numérica de la ecuación 2.22 usando la versión 7 del programa *Mathematica*.



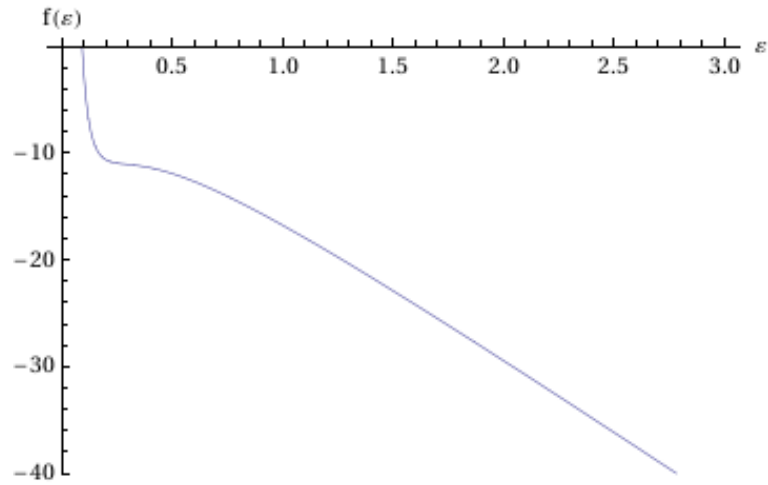
Trayectoria para  $E = -8.92$   
vista de frente



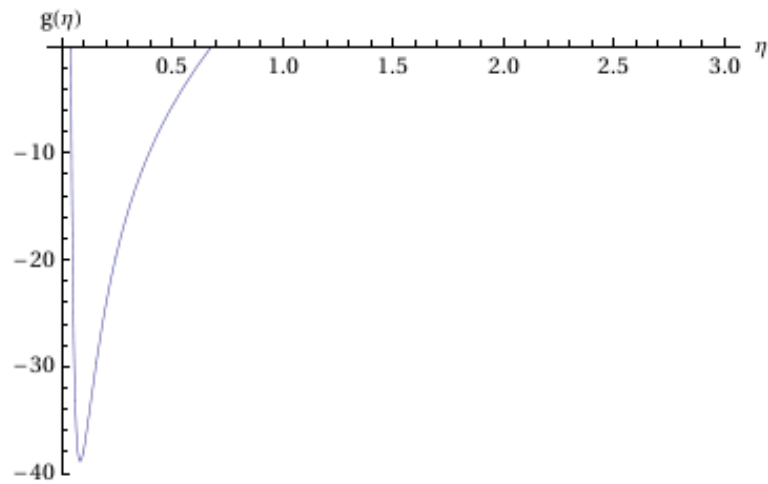
Trayectoria para  $E = -8.92$   
vista desde arriba

3. Si  $F$  aumenta entonces  $f(\varepsilon_{max})$  disminuye y  $g(\eta_{min})$  aumenta; cuando se cumpla  $f(\varepsilon_{max}) < g(\eta_{min})$  la trayectoria será no acotada

Para valores aun más grandes de  $F$  desaparecen el máximo y el mínimo de  $f(\varepsilon)$ .



Gráfica  $f(\varepsilon)$  contra  $(\varepsilon)$ ,  $L_z = 0.6$ ,  $m = 1$ ,  $\beta = 54.15$ ,  $k = 5$ ,  $F = 28$



Gráfica  $g(\eta)$  contra  $\eta$ ,  $L_z = 0.6$ ,  $m = 1$ ,  $\beta = 54.15$ ,  $k = 5$ ,  $F = 28$

En estos casos  $g(\eta_{min}) \leq E$  y todas las trayectorias son no acotadas.

---

## Conclusiones

1. Debido a sus características geométricas, el vector de Runge-Lenz constituye una herramienta útil en el estudio del problema de Kepler; la dirección del vector posición al perihelio y su magnitud proporcional a la excentricidad permiten un análisis simple del problema.
2. El momento angular y el vector de Runge-Lenz, que son constantes de movimiento en el problema de Kepler, también son útiles para analizar el movimiento cuando hay además un campo uniforme pequeño que perturba al potencial coulombiano.
3. Se muestra la existencia de una tercera constante de movimiento para el problema de una partícula sometida a un campo coulombiano y un campo uniforme.
4. Las tres constantes de movimiento en un campo coulombiano y un campo uniforme son suficientes para analizar de forma simple el movimiento de la partícula.
5. Se determinaron las propiedades más importantes del movimiento de una partícula en un campo coulombiano y un campo uniforme utilizando únicamente mecánica newtoniana, los resultados coinciden con la literatura donde se utilizan otros enfoques. En particular se determinaron las condiciones de existencia de órbitas acotadas para valores arbitrarios de  $\vec{F}$ .
6. El enfoque utilizado de un vector de Runge-Lenz no constante para resolver el problema de Kepler perturbado, también puede ser aplicado a otros potenciales coulombianos modificados.

---

# Bibliografía

O J Campuzano Cardona, Nuñez Yépez, y A L Salas Brito. Constant of motion for the hydrogen atom in an external field: a classical view. *European Journal Physics*, 16:220–222, 1995.

Herbert Goldstein, Charles Poole, y John Safko. *Classical mechanics*. Addison-Wesley, 2002.

David Hestenes. *New Foundations for Classical Mechanics*. Kluwer Academic Publisher, 1999.

G.L. Kotkin y V.G. Serbo. *Problemas de mecánica clásica*. MIR, 1980.

Landau y Lifshitz. *Física Teórica, Vol 1 mecánica*. Reverté, 1978.

R P Martínez Romero, H N Nuñez Yépez, y A L Salas Britos. Closed orbits and constantes of motion in classical mechanics. *European Journal Physics*, 13:26–31, 1992.

R P Martínez Romero, H N Nuñez Yépez, y A L Salas Britos. The hamilton vector as an extra constant of motion in the kepler problem. *European Journal Physics*, 14:71–73, 1993.

A.A. Stahlhofen. Once more the pertubed kepler problem. *American Journal Physics*, 62:1145–1147, 1994.