



UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE FISICA

Movimiento clásico de una partícula cargada en el campo de
un dipolo puntual

Tesis Profesional
Que para obtener el titulo de:

LICENCIADO EN FÍSICA

Presenta:

Rubén Aurelio Estrella Ceron

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

Agradecimientos

Doy gracias a todos aquellos profesores y compañeros que estuvieron allí para darme su apoyo, consejo y paciencia durante el desarrollo de la presente Tesis.

Agradezco al profesor Sergio Gutiérrez por su apoyo, confianza y dirección de este trabajo.

Agradezco a los profesores Adalberto Corella, Arnulfo Castellanos y Rodrigo Arturo Rosas por sus consejos, correcciones y comentarios durante los seminarios.

Agradezco a la profesora Laura Yeomans y al profesor Jáuregui Díaz Antonio por haber confiado en mi persona y por el apoyo brindado durante el transcurso de la Licenciatura.

Índice

Índice de figuras	iv
Introducción	1
Capítulo 1. Formulación Lagrangiana.	4
1.1 Ecuaciones de Lagrange de una partícula cargada en el campo de un dipolo puntual.	8
1.2 Movimientos sobre la superficie de una esfera.	17
Capítulo 2. Formulación Newtoniana.	21
2.1 Constantes de movimiento de una partícula cargada en el campo de un dipolo puntual.	21
2.2 Trayectorias acotadas y no acotadas	26
2.3 Movimiento sobre una esfera.	30
2.4 Análisis de la parte angular.	38
2.5 Regiones del movimiento.	40
2.6 Trayectorias.	45
Capítulo 3. Formulación de Hamilton-Jacobi.	55
3.1 Función Hamiltoniana de una partícula cargada en el campo de un dipolo puntual.	55
3.2 Ecuación de Hamilton-Jacobi de una partícula cargada en el campo de un dipolo puntual.	56
3.3 Análisis del movimiento.	59
3.4 Trayectorias en el espacio fase.	65
3.5 Órbitas de la partícula.	70
Conclusiones.	75
Bibliografía.	77

Índice de figuras

Figura	Pág.
1.1 Partícula cargada que se mueve en el campo de un dipolo puntual.	4
1.2 Gráfica $r(t)$ contra t , para el caso $E < 0$ y $\dot{r}_0 < 0$.	8
1.3 Gráfica $r(t)$ contra t , para el caso $E < 0$ y $\dot{r}_0 > 0$.	9
1.4 Gráfica $r(t)$ contra t , para el caso $E < 0$ y $\dot{r}_0 = 0$.	10
1.5 Gráfica $r(t)$ contra t , para el caso $E > (1/2)m\dot{r}_0^2$ y $\dot{r}_0 < 0$.	11
1.6 Gráfica $r(t)$ contra t , para el caso $E < (1/2)m\dot{r}_0^2$ y $\dot{r}_0 < 0$.	12
1.7 Gráfica $r(t)$ contra t , para el caso $E = (1/2)m\dot{r}_0^2$ y $\dot{r}_0 < 0$.	13
1.8 Gráfica $r(t)$ contra t , para el caso $E > 0$ y $\dot{r}_0 \geq 0$.	14
1.9 Gráfica $r(t)$ contra t , para el caso $E = 0$ y $\dot{r}_0 < 0$.	15
1.10 Gráfica $r(t)$ contra t , para el caso $E = 0$ y $\dot{r}_0 > 0$.	16
1.11 Gráfica $r(t)$ contra t , para el caso $E = 0$ y $\dot{r}_0 = 0$.	17
1.12 Gráfica de $y(x) = -k - x + x^3$ en el intervalo de $[-1, 1]$.	19
2.1 Gráfica del potencial efectivo $V_{ef}(r)$ contra r para $\beta > 0$.	27
2.2 Gráfica del potencial efectivo $V_{ef}(r)$ contra r para $\beta < 0$.	28
2.3 Gráfica del potencial efectivo $V_{ef}(\theta)$ contra θ para $q > 0$.	31
2.4 Gráfica de $y(x) = -x^3 + x + C$.	33
2.5 Trayectoria de una partícula sobre una esfera para $V_{ef}(\theta_c) < 0$, $L_z \neq 0$ y $q > 0$.	35
2.6 Gráfica de la función $f(\theta)$ contra θ .	38
2.7 Región del movimiento en el caso $\beta \leq 0$, $E > 0$ y $\dot{r}(0) > 0$.	40
2.8 Región del movimiento en el caso $\beta \leq 0$, $E > 0$ y $\dot{r}(0) < 0$.	41

2.9 Región del movimiento en el caso $\beta=0, E=0, r(0) = 0$ y $L_z \neq 0$.	42
2.10 Región del movimiento en el caso $\beta < 0$ y $E < 0$.	43
2.11 Región del movimiento en el caso $\beta \rightarrow \infty$ y $E > 0$.	44
2.12 Trayectoria para $\beta > 0, E > 0, L_z = 0, \dot{r}(0) < 0$.	46
2.13 Trayectoria para $\beta > 0, E > 0, L_z \neq 0, \dot{r}(0) < 0$.	47
2.14 Trayectoria para $\beta > 0, E > 0, L_z \neq 0, \dot{r}(0) > 0$.	48
2.15 Trayectoria para $\beta < 0, E < 0, \dot{r}(0) > 0$ y $L_z \neq 0$.	49
2.16 Trayectoria para $\beta < 0, E < 0, \dot{r}(0) < 0$ y $L_z \neq 0$.	50
2.17 Trayectoria para $\beta < 0, E > 0, \dot{r}(0) < 0$ y $L_z \neq 0$.	51
2.18 Trayectoria para $\beta < 0, E > 0, \dot{r}(0) > 0$ y $L_z \neq 0$.	52
2.19 Trayectoria para $\beta = 0, E = 0, \dot{r}_0 = 0$ y $L_z = 0$.	53
2.20 Trayectoria para $\beta = 0, E = 0, \dot{r}_0 = 0$ y $L_z \neq 0$.	54
3.1 Gráfica de $f(r)$ contra r , con $\beta > 0$.	60
3.2 Gráfica de $f(r)$ contra r , con $\beta < 0$.	61
3.3 Gráfica de $g(\theta)$ contra θ .	63
3.4 Órbita en el plano p_r, r para el caso $\beta > 0$ y $E > 0$.	66
3.5 Órbita en el plano p_θ, θ para el caso $\beta > 0$ y $E > 0$.	66
3.6 Órbita en el plano p_φ, φ para el caso $p_\varphi > 0$.	67
3.7 Órbita en el plano p_r, r para el caso $\beta < 0$ y $E > 0$.	67
3.8 Órbita en el plano p_θ, θ para el caso $\beta < 0$ y $E > 0$.	68
3.9 Órbita en el plano p_φ, φ para el caso $\beta < 0$.	68
3.10 Órbita en el plano p_r, r para el caso $\beta < 0$ y $E < 0$.	69
3.11 Órbita en el plano p_θ, θ para el caso $\beta < 0$ y $E < 0$.	69
3.12 Órbita en el plano p_φ, φ para el caso $\beta < 0$.	70
3.13 Órbitas de β en el plano p_r, r , para diferentes valores de $E \geq 0$ y $\beta > 0$.	71

3.14 Órbitas de β en el plano p_r, r , para diferentes valores de $E \geq 0$ y $\beta < 0$.	72
3.15 Órbitas de β en el plano p_r, r , para diferentes valores de $E < 0$ y $\beta < 0$.	73
3.16 Órbitas en el plano p_θ, θ para diferentes valores de $\beta > 0$ y p_φ .	74

Introducción

El movimiento de una carga eléctrica en el campo de un dipolo puntual es un problema de interés intrínseco en Mecánica Clásica. Es un ejemplo de movimiento de una partícula en un campo conservativo que no es central.

Este problema fue estudiado por Fox¹ en el año de 1969, motivado por el interés de entender los estados ligados en el correspondiente problema de Mecánica Cuántica. En su trabajo, Fox utilizó la formulación Lagrangiana de la Mecánica Clásica.

En años recientes en algunas publicaciones se ha retomado este problema^{2,3}. Mediante la solución numérica de las ecuaciones de movimiento se determina la trayectoria de la partícula para diferentes valores de las condiciones iniciales; pero estos trabajos carecen de una clasificación sistemática de las trayectorias.

La versión cuántica de este problema fue estudiada recientemente por Connolly y Griffiths⁴. Ellos investigaron la existencia de valores críticos del momento dipolar para obtener estados ligados. En este mismo trabajo hacen notar que en 1947 Fermi y Teller descubrieron que un dipolo puntual admite estados ligados si y sólo si el momento dipolar excede un valor crítico.

El propósito de este trabajo es estudiar el movimiento clásico de una partícula cargada en el campo de un dipolo puntual, resaltando la importancia de las constantes de movimiento de este sistema. Además de las dos constantes de movimiento conocidas, la energía total y la componente del momento angular a lo largo del dipolo, se obtiene otra constante de

movimiento β ; ésta representa una herramienta adicional que permite estudiar las propiedades básicas del movimiento⁵.

En el primer capítulo se presenta en forma detallada el trabajo de K. Fox⁽¹⁾. El movimiento se analiza mediante las ecuaciones de Lagrange de la partícula y el teorema de conservación de la energía. Se muestra que el único caso en el que la partícula no se aleja indefinidamente del dipolo o bien cae a éste es aquel en el que la distancia r de la partícula al dipolo es constante y la energía es cero. Además, se concluye que un valor mínimo del momento dipolar es condición necesaria para los movimientos con r constante cuando las condiciones iniciales están dadas.

En el segundo capítulo se aborda el problema con la formulación Newtoniana de la Mecánica Clásica. Mediante una derivación simple se obtiene la constante de movimiento β y se establece una relación entre ésta y la energía total. Se obtiene una clasificación de las trayectorias, reproduciendo los resultados obtenidos por Fox y agregando otros. En el caso particular de las trayectorias en las cuales la partícula se mueve permaneciendo a una distancia fija del dipolo, se establece la equivalencia mecánica con el péndulo esférico y con el trompo simétrico con precesión monótona. Con base en la clasificación de las trayectorias, éstas se obtienen en los casos más importantes mediante la solución numérica de las ecuaciones de movimiento.

En el tercer capítulo, el movimiento de la partícula se estudia mediante la formulación de Hamilton-Jacobi de la Mecánica Clásica. La ecuación de Hamilton-Jacobi de la partícula se resuelve con el método de separación de variables. La integral completa que se obtiene contiene a las tres constantes de movimiento. Como consecuencia de la separación de variables de la ecuación de Hamilton-Jacobi, el espacio fase de seis dimensiones se desdobra en tres subespacios de dos dimensiones, de modo que el estudio del

movimiento se realiza mediante el análisis de las órbitas en estos subespacios, considerando los valores posibles de las constantes de movimiento.

Capítulo 1

Formulación Lagrangiana.

1.1 Ecuaciones de Lagrange de una partícula cargada en el campo de un dipolo puntual.

Consideremos el movimiento de una partícula con carga q y masa m que se mueve en el campo de un dipolo eléctrico puntual \vec{d} fijo en el espacio. El origen del sistema de referencia está colocado en el dipolo, y \vec{r} denota el vector de posición de la partícula (figura 1.1). El estudio de este problema mediante la formulación Lagrangiana de la Mecánica Clásica fue realizado por K. Fox¹.

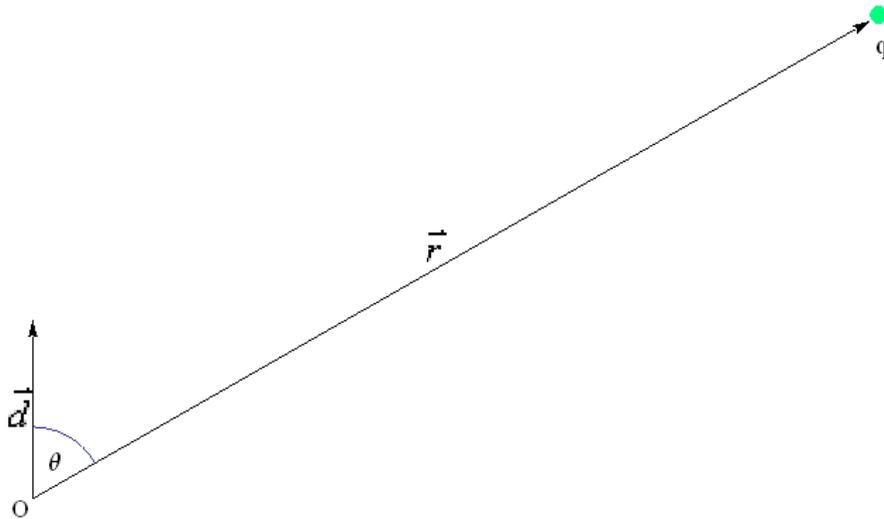


Figura 1.1. Partícula cargada que se mueve en el campo de un dipolo puntual.

La función Lagrangiana de la partícula, está dada por:

$$L = T - V, \tag{1.1}$$

donde T es la energía cinética de la partícula y V su energía potencial dada por:

$$V(r, \theta) = \frac{qd \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2}, \quad (1.2)$$

con $r = |\vec{r}|$ y θ el ángulo formado entre \vec{r} y \vec{d} .

En coordenadas esféricas, con el eje z orientado en la dirección del dipolo, la lagrangiana queda expresada como

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \text{Sen}^2 \theta) - \frac{qd \text{Cos} \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2}. \quad (1.3)$$

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange de la partícula son

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{d}{dt} (m\dot{r}) - mr(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \text{Sen}^2 \theta) - \frac{qd \text{Cos} \theta}{2\pi \epsilon_0 r^3} = 0, \quad (1.4)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\theta}) - mr^2 \dot{\phi}^2 \text{Sen} \theta \cdot \text{Cos} \theta - \frac{qd \text{Sen} \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} = 0, \quad (1.5)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\phi} \cdot \text{Sen}^2 \theta) = 0. \quad (1.6)$$

De la ecuación (1.6) se sigue que la componente del momento angular de la partícula a lo largo del dipolo

$$L_z = mr^2 \dot{\phi} \cdot \text{Sen}^2 \theta, \quad (1.7)$$

es una constante de movimiento.

Como la función Lagrangiana (1.3) no contiene explícitamente el tiempo y la energía potencial (1.2) no depende de la velocidad, la energía total

$$E = T + V = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \text{Sen}^2 \theta) + \frac{qd \text{Cos} \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2}, \quad (1.8)$$

es una constante de movimiento.

Multiplicando la ecuación (1.4) por r y la ecuación (1.8) por dos obtenemos

$$mr\ddot{r} - mr^2\dot{\theta}^2 - mr^2\dot{\phi}^2 \text{Sen}^2\theta - \frac{qd\text{Cos}\theta}{2\pi\epsilon_0 r^2} = 0$$

$$m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \text{Sen}^2\theta) + \frac{qd\text{Cos}\theta}{2\pi\epsilon_0 r^2} = 2E;$$

sumando estas dos ecuaciones se obtiene

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{m\ddot{r}r}{2}. \quad (1.9)$$

Reescribiendo (1.9) queda

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \ddot{r}r) = \frac{m}{2} \frac{d}{dt}(\dot{r}r),$$

de aquí, integrando:

$$E \int_0^t dt' = \frac{m}{2} \int_0^t \frac{d(\dot{r}'r')}{dt'} dt',$$

esto es

$$Et = \frac{m}{2}(\dot{r}r - \dot{r}_0 r_0)$$

donde $r_0 = r(0)$ y $\dot{r}_0 = \dot{r}(0)$; así

$$\dot{r}(t) = \left(\frac{2Et}{m} + \dot{r}_0 r_0 \right) \frac{1}{r}, \quad (1.10)$$

esto es

$$\frac{dr}{dt} = \left(\frac{2Et}{m} + \dot{r}_0 r_0 \right) \frac{1}{r}.$$

Resolviendo esta ecuación por separación de variables obtenemos $r(t)$

$$\int_{r_0}^r r' dr' = \int_0^t \left(\frac{2Et}{m} + \dot{r}_0 r_0 \right) dt$$

$$r^2 = \frac{2Et^2}{m} + 2\dot{r}_0 r_0 t + r_0^2$$

$$r(t) = \sqrt{\frac{2Et^2}{m} + 2\dot{r}_0 r_0 t + r_0^2} . \quad (1.11)$$

Elevando al cuadrado la ecuación (1.10) y obtenemos

$$\dot{r}^2 = \left(\frac{4E^2 t^2}{m^2} + \frac{4E\dot{r}_0 r_0 t}{m} + \dot{r}_0^2 r_0^2 \right) \frac{1}{r^2} ,$$

y sumando $r_0^2 - r_0^2$ dentro del paréntesis queda

$$\dot{r}^2 = \frac{2E}{mr^2} \left(\frac{2Et^2}{m} + 2\dot{r}_0 r_0 t + \frac{m\dot{r}_0^2 r_0^2}{2E} + r_0^2 - r_0^2 \right) \quad (1.12)$$

Elevando al cuadrado la ecuación (1.11) y comparando con la ecuación (1.12) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 &= \frac{2E}{mr^2} \left(r^2 + \frac{m\dot{r}_0^2 r_0^2}{2E} - r_0^2 \right) \\ \dot{r}^2 &= \frac{2E}{m} \left(1 + \frac{m\dot{r}_0^2 r_0^2}{2Er^2} - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (1.13)$$

que expresa \dot{r} como función de r .

1.1 Análisis del movimiento.

Caso $E < 0$.

Para $\dot{r}_0 < 0$, de (1.10) se sigue que $\dot{r}(t) < 0$ para todo t , por lo que r siempre decrece, de modo que $r(t) \rightarrow 0$, así que la partícula cae al dipolo con $\dot{r}(t) \rightarrow -\infty$ (figura 1.2). El tiempo t_1 que tarda en caer al dipolo se puede obtener de la ecuación (1.11) haciendo $r(t_1)=0$, así:

$$t_1 = \frac{mr_0}{2E} \left(-\dot{r}_0 + \sqrt{\dot{r}_0^2 - \frac{2E}{m}} \right) \quad (1.14)$$

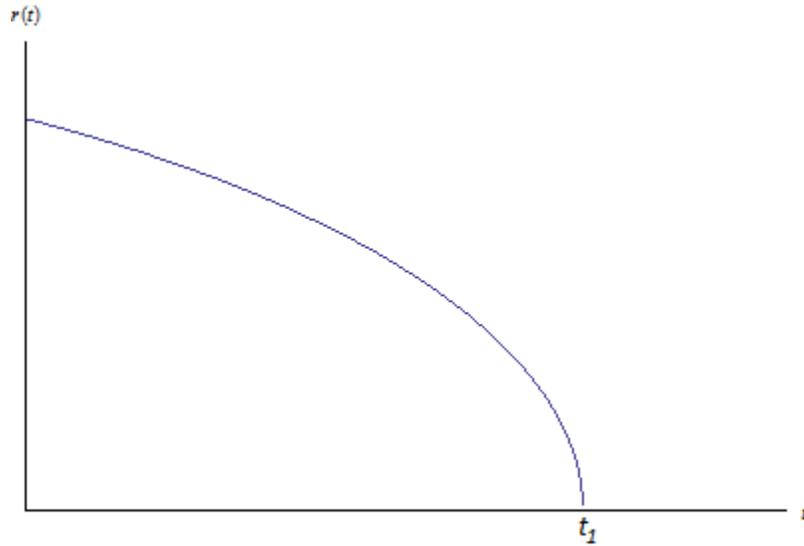


Figura 1.2: Gráfica $r(t)$ contra t para el caso $E < 0$ y $\dot{r}_0 < 0$. La partícula cae al dipolo con $\dot{r} \rightarrow -\infty$.

Para $\dot{r}_0 > 0$, de acuerdo a (1.10) inicialmente la partícula se mueve alejándose del dipolo, hasta el instante:

$$t_R = -\frac{mr_0\dot{r}_0}{2E}, \quad (1.15)$$

en el que $\dot{r}(t)$ se anula, en este instante el valor de r es:

$$r_R = r_0 \sqrt{1 - \frac{m\dot{r}_0^2}{2E}}; \quad (1.16)$$

a partir de este instante $\dot{r}(t) < 0$ (hay un punto de retorno), por lo que r decrece, hasta que $r(t) \rightarrow 0$. Así la partícula cae al dipolo con $\dot{r}(t) \rightarrow -\infty$ (figura 1.3). El tiempo que tarda en caer al dipolo, según la ecuación (1.11), es

$$t_1 = -mr_0 \left(\dot{r}_0 + \sqrt{\dot{r}_0^2 - (2E/m)} \right) / 2E.$$

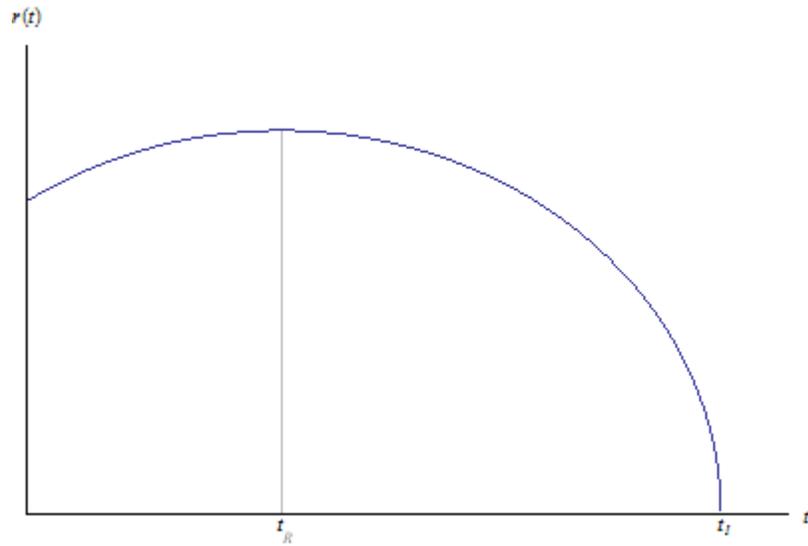


Figura 1.3: Gráfica $r(t)$ contra t para el caso $E < 0$ y $\dot{r}_0 > 0$. Inicialmente la partícula se aleja del dipolo, pero finalmente cae a éste con $\dot{r} \rightarrow -\infty$.

Para $\dot{r}_0 = 0$, de acuerdo a (1.10), $\dot{r}(t) < 0$ para toda t , por lo que $r(t) \rightarrow 0$ con $\dot{r}(t) \rightarrow -\infty$, la partícula cae al dipolo, (figura 1.4). De (1.11) se sigue que el tiempo que tarda en caer al dipolo, es $t_1 = r_0 \left(\sqrt{-m/2E} \right)$

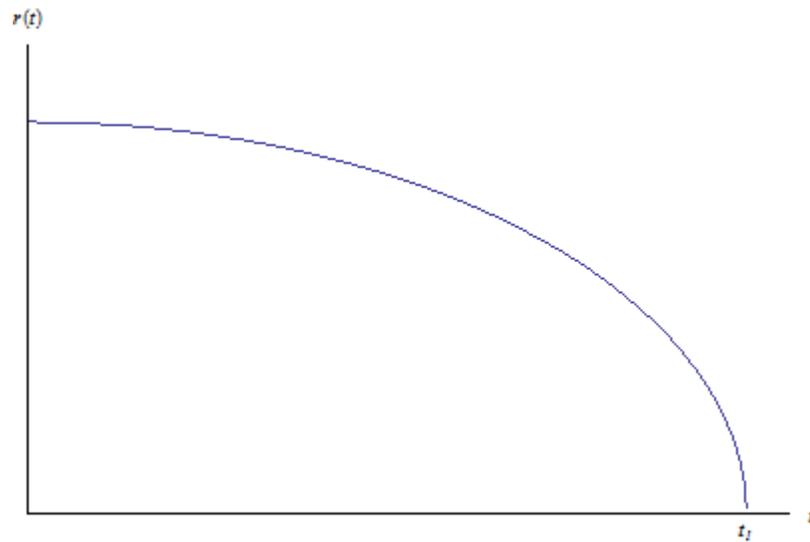


Figura 1.4: Gráfica $r(t)$ contra t para el caso $E < 0$ y $\dot{r}_0 = 0$. La partícula cae al dipolo con $\dot{r} \rightarrow -\infty$.

Resumiendo, para energías negativas, no importa cuáles sean las condiciones iniciales, la partícula cae al dipolo con $\dot{r}(t) \rightarrow -\infty$.

Caso $E > 0$

Para $\dot{r}_0 < 0$, inicialmente la partícula se acerca al dipolo, hasta que en el instante t_R se anula $\dot{r}(t)$, de acuerdo a la ecuación (1.10), también en este caso $t_R = -mr_0\dot{r}_0/2E$, en este instante $r = r_R = r_0\sqrt{1-(m\dot{r}_0^2/2E)}$; después de ese instante $\dot{r}(t) > 0$, esto es, hay un punto de retorno.

Sin embargo, según la ecuación (1.11) también es posible que la partícula caiga al dipolo ($r = 0$) en el instante $t_1 = -mr_0(\dot{r}_0 - \sqrt{\dot{r}_0^2 - (2E/m)})/2E$.

Es necesario distinguir los tres casos: $E > \frac{m\dot{r}_0^2}{2}$, $E < \frac{m\dot{r}_0^2}{2}$ y $E = \frac{m\dot{r}_0^2}{2}$.

Cuando $E > (1/2)m\dot{r}_0^2$, la partícula no alcanza el origen en ningún instante. En este caso se presenta un punto de retorno; después $\dot{r} > 0$, $r(t) \rightarrow +\infty$ y de acuerdo a la ecuación (1.13), $\dot{r} \rightarrow \sqrt{2E/m}$ (figura 1.5).

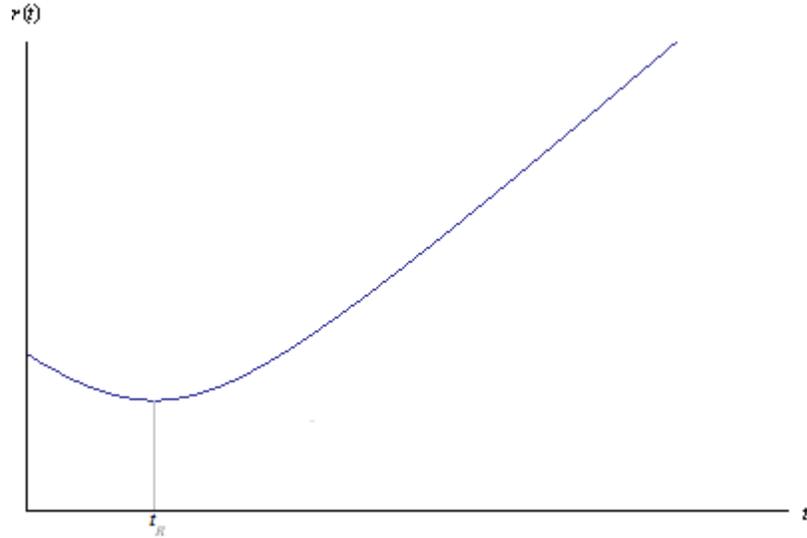


Figura 1.5: Gráfica $r(t)$ contra t para el caso $E > (1/2)m\dot{r}_0^2$ y $\dot{r}_0 < 0$. Inicialmente la partícula se acerca al dipolo, pero finalmente se aleja indefinidamente con $\dot{r} \rightarrow \sqrt{2E/m}$.

Cuando $E < (1/2)m\dot{r}_0^2$, no hay un punto de retorno. En este caso la partícula cae al dipolo, con $\dot{r}(t) \rightarrow -\infty$, según la ecuación (1.13) (figura 1.6).

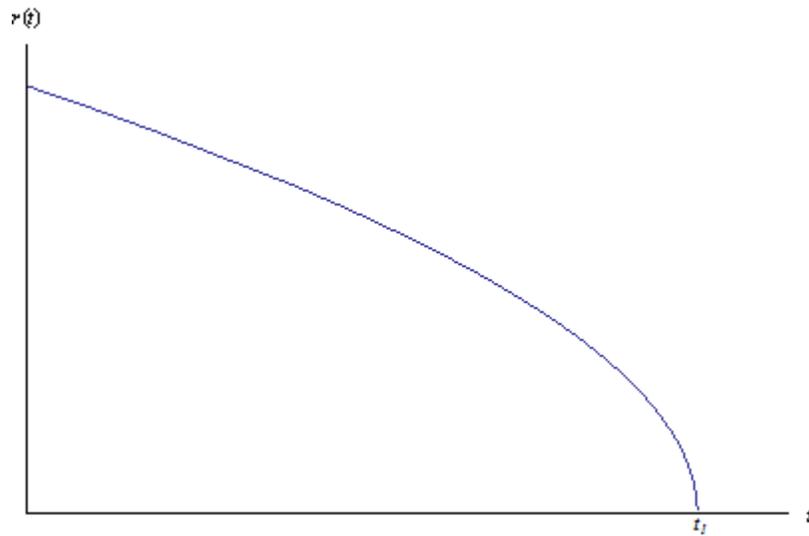


Figura 1.6: Gráfica $r(t)$ contra t para el caso $E < (1/2)m\dot{r}_0^2$ y $\dot{r}_0 < 0$. La partícula se acerca desde el inicio al dipolo, hasta caer a este con $\dot{r} \rightarrow -\infty$.

Cuando $E = (1/2)m\dot{r}_0^2$, la partícula se mueve hacia el origen con velocidad radial constante $\dot{r} = \dot{r}_0 = -\sqrt{2E/m}$ de acuerdo a la ecuación (1.13). En este caso la partícula cae al dipolo (figura 1.7).

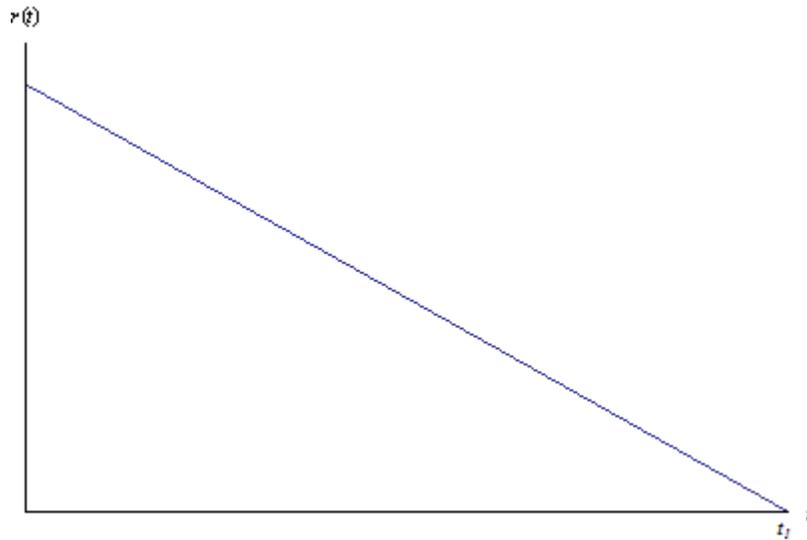


Figura 1.7: Gráfica $r(t)$ contra t para el caso $E = (1/2)m\dot{r}_0^2$ y $\dot{r}_0 < 0$. La partícula se acerca al dipolo desde el inicio hasta caer en éste, con velocidad radial constante $\dot{r} = \dot{r}_0 = -\sqrt{2E/m}$.

Para $\dot{r}_0 \geq 0$ según la ecuación (1.10) la partícula se aleja del dipolo, $r(t) \rightarrow +\infty$, y de acuerdo a (1.13) $\dot{r} \rightarrow \sqrt{2E/m}$ (figura 1.8).

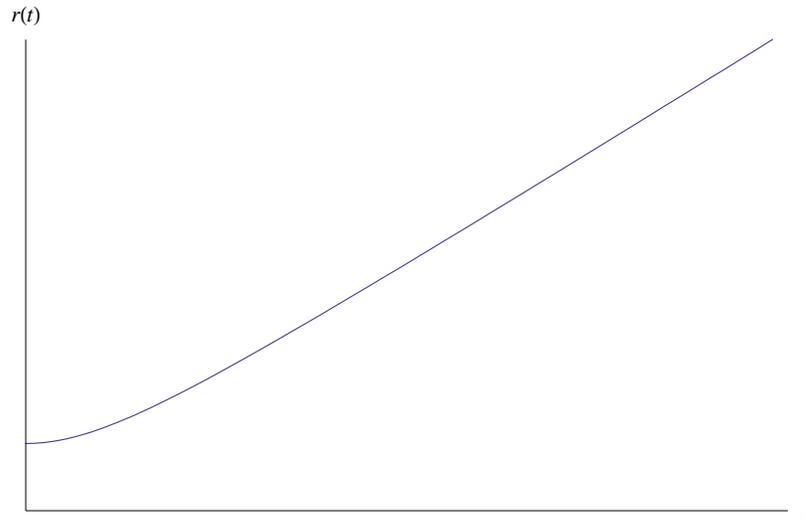


Figura 1.8: Gráfica $r(t)$ contra t para el caso $E > 0$ y $\dot{r}_0 \geq 0$. La partícula se aleja del dipolo con $\dot{r} \rightarrow \sqrt{2E/m}$.

Resumiendo, para $E > 0$, dependiendo de las condiciones iniciales, la partícula cae al dipolo con $\dot{r}(t) \rightarrow -\infty$ o $\dot{r} \rightarrow -\sqrt{2E/m}$; o la partícula se aleja del dipolo de modo que $r(t) \rightarrow \infty$ y $\dot{r} \rightarrow \sqrt{2E/m}$.

Caso $E = 0$

Para $\dot{r}_0 < 0$, de acuerdo a la ecuación (1.10), $\dot{r}(t) < 0$, así la partícula cae al dipolo en un tiempo $t_1 = -r_0 / (2\dot{r}_0)$, de acuerdo a la ecuación (1.11), y $\dot{r}(t) \rightarrow -\infty$ de acuerdo a la ecuación (1.13) (figura 1.9).

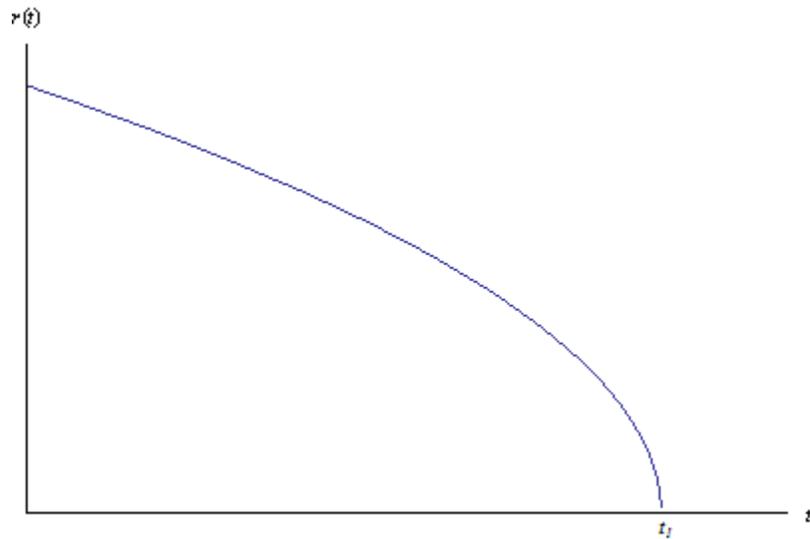


Figura 1.9: Gráfica $r(t)$ contra t para el caso $E=0$ y $\dot{r}_0 < 0$. La partícula se acerca al dipolo hasta que cae a éste con $\dot{r} \rightarrow -\infty$.

Para $\dot{r}_0 > 0$, de acuerdo a (1.10) $\dot{r}(t) > 0$ para toda t , así la partícula se aleja del dipolo, de modo que $r(t) \rightarrow \infty$ y $\dot{r}(t) \rightarrow 0$ según la ecuación (1.13) (figura 1.10).



Figura 1.10: Gráfica $r(t)$ contra t para el caso $E=0$ y $\dot{r}_0 > 0$. La partícula se aleja indefinidamente del dipolo con $\dot{r} \rightarrow 0$

Para $\dot{r}_0 = 0$, de acuerdo a la ecuación (1.10) $\dot{r}(t) = 0$ para toda t , así que $r(t) = r_0$. En este caso la partícula se mueve sobre una esfera de radio r_0 con centro en el dipolo (figura 1.11).

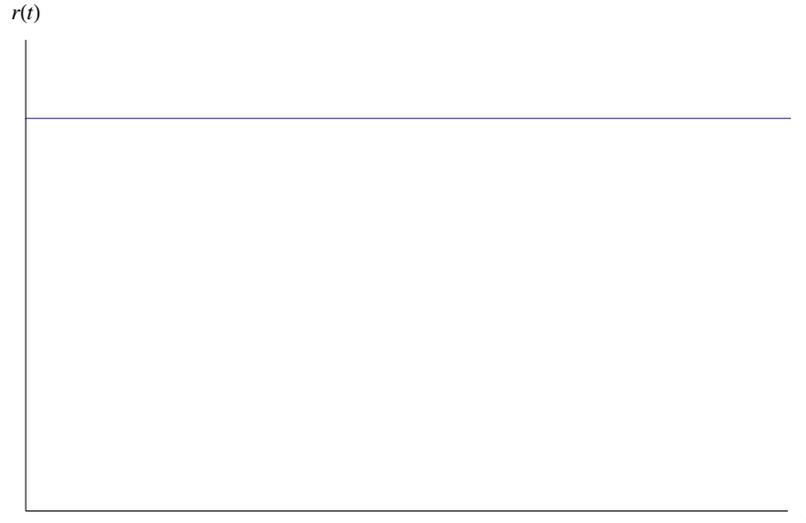


Figura 1.11: Gráfica $r(t)$ contra t para el caso $E=0$ y $\dot{r}_0 = 0$. La partícula se mueve sobre la superficie de una esfera de radio r_0 .

1.2 Movimientos sobre la superficie de una esfera

De acuerdo a los resultados de la sección anterior, el único caso en el que la partícula no cae al dipolo o se aleja indefinidamente de éste, se presenta cuando $E=0$ y $\dot{r}(0) = 0$; en este caso $r(t) = r_0$.

De la ecuación (1.8), con $E=0$, $\dot{r}(t) = 0$, y con $\dot{\phi}$ obtenida de (1.7), se obtiene:

$$\frac{1}{2}mr_0^2\dot{\theta}^2 + \frac{L_z^2}{2mr_0^2\text{Sen}^2\theta} + \frac{qd\text{Cos}\theta}{4\pi\epsilon_0r_0^2} = 0 \quad (1.17)$$

Realizando el cambio de variable $x = \text{Cos}\theta$, la ecuación (1.17) puede ser rescrita en la forma

$$\frac{mr_0^2 \dot{x}^2}{2(1-x^2)} + \frac{L_z^2}{2mr_0^2(1-x^2)} + \frac{xqd}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} = 0$$

de aquí se sigue

$$\dot{x}^2 = \frac{qd}{2\pi\epsilon_0 mr_0^4} \left(-\frac{2\pi\epsilon_0 L_z^2}{mqd} - x + x^3 \right),$$

esto es

$$\dot{x}^2 = \frac{qd}{2\pi\epsilon_0 mr_0^4} (-k - x + x^3), \quad (1.18)$$

donde

$$k = \frac{2\pi\epsilon_0 L_z^2}{mqd} > 0 \quad (1.19)$$

De la ecuación (1.18) se obtiene

$$t = \int_0^t dt = \sqrt{\frac{2\pi\epsilon_0 mr_0^4}{qd}} \int_{x_0}^x (-k - x + x^3)^{-\frac{1}{2}} dx \quad (1.20)$$

Aunque la ecuación (1.20) conduce a una integral elíptica, es posible en principio, obtener $x(t)$. Así, es posible obtener $\theta(t)$.

De (1.7) se sigue que

$$\phi(t) = \frac{L_z}{mr_0^2} \int_0^t \frac{dt}{\text{Sen}^2 \theta(t)}$$

De la ecuación (1.18) se concluye que para que exista una solución real, $y(x) = -k - x + x^3$ debe ser positiva para alguna x que se encuentre en el intervalo de $-1 \leq x \leq 1$. Ahora:

$$y(0) = y(1) = y(-1) = -k, \quad (1.21)$$

$$y(-\infty) = -\infty, \quad y(\infty) = \infty,$$

Los puntos críticos de $y(x)$ se obtienen de

$$\frac{dy(x)}{dx} = 3x^2 - 1 = 0, \quad (1.22)$$

de aquí $x = \pm\sqrt{1/3}$, evaluando $y(x)$ tenemos:

$$y\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} - k \quad (1.23)$$

$$y\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} - k \quad (1.24)$$

Por lo tanto $y(\sqrt{1/3})$ es mínimo y $y(-\sqrt{1/3})$ es máximo. En el intervalo $0 < x < 1$, $y(x)$ es negativa. Así, para que $y(x)$ sea positiva en algún intervalo de $-1 < x < 0$ (figura 1.12), el máximo debe ser positivo, por lo tanto

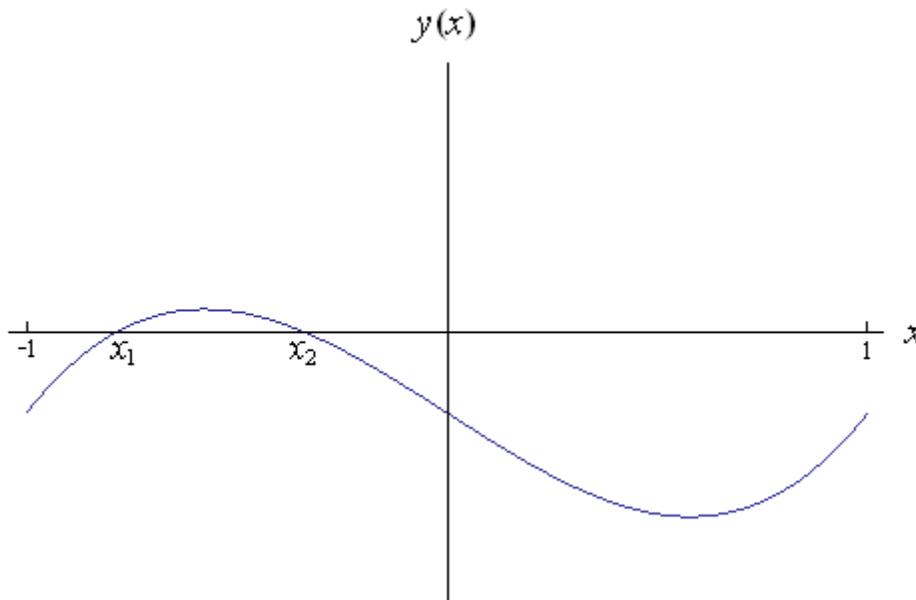


Figura 1.12. Gráfica de $y(x) = -k - x + x^3$ en el intervalo de $[-1, 1]$

$$k < \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad (1.25)$$

usando la ecuación (1.19) obtenemos

$$0 < \frac{3\sqrt{3}\pi\epsilon_0 L_z^2}{mq} < d, \quad (1.26)$$

Las raíces x_1 y x_2 del polinomio $y(x) = -k - x + x^3$ se encuentran en el intervalo $-1 < x < 0$ como se muestra en la figura 1.12. A los valores x_1, x_2 de x le corresponden los valores θ_1, θ_2 de la coordenada θ comprendidos en el intervalo $\pi/2 < \theta < \pi$ de modo que la partícula se mueve en el hemisferio inferior, para $q > 0$. En los puntos x_1, x_2 se cumple $\dot{x} = 0$ (ecuación (1.18)) y en consecuencia se cumple $\dot{\theta} = 0$ en los puntos θ_1, θ_2 , es decir θ_1 y θ_2 son puntos de retorno. Para L_z dado por las condiciones iniciales, la ecuación (1.26) establece una condición sobre el valor de d para que existan trayectorias sobre la superficie de una esfera. Recíprocamente, para un valor dado del momento dipolar, siempre es posible encontrar un conjunto de condiciones iniciales que satisfagan (1.26).

Capítulo 2

Formulación Newtoniana

2.1 Constantes de movimiento de una partícula cargada en el campo de un dipolo puntual.

La fuerza ejercida por un dipolo puntual cuyo momento dipolar es \vec{d} , sobre una carga q está dada por

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{d}}{r^3}, \quad (2.1)$$

El origen está colocado en el dipolo y \vec{r} denota la posición de la carga (como se muestra en la figura 1).

Aunque esta fuerza no es un campo central, es posible derivarla de un potencial en la forma usual

$$\vec{F} = -\nabla V,$$

donde

$$V(r, \theta) = \frac{qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (2.2)$$

$$V(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r} \cdot \vec{d}}{r^2} \quad (2.3)$$

esto es, \vec{F} es una fuerza conservativa, por lo que la energía total E es una constante de movimiento.

La torca sobre la carga es

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} \times \vec{r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \vec{r} \times \vec{d}$$

$$\vec{N} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \vec{r} \times \vec{d}. \quad (2.4)$$

La evolución temporal del momento angular está dada por

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}. \quad (2.5)$$

De la ecuación (2.4) se obtiene que la componente de la torca en dirección de \vec{d} es cero ($\vec{N} \bullet \vec{d} = 0$), por lo que la componente del momento angular en esta dirección es constante (ecuación (2.5)).

Tomando el producto escalar de la ecuación (2.5) con el momento \vec{L} obtenemos:

$$\vec{L} \bullet \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{L} \bullet \vec{N} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \vec{L} \bullet (\vec{r} \times \vec{d}). \quad (2.6)$$

Usando la identidad

$$\vec{L} \bullet \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dL^2}{dt},$$

queda:

$$\frac{dL^2}{dt} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \vec{L} \bullet (\vec{r} \times \vec{d}). \quad (2.7)$$

Expresando $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$, obtenemos

$$\frac{dL^2}{dt} = -\frac{qm}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [(\vec{r} \times \vec{v}) \bullet (\vec{r} \times \vec{d})],$$

usando la identidad

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \bullet (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \bullet \vec{C})(\vec{B} \bullet \vec{D}) - (\vec{A} \bullet \vec{D})(\vec{C} \bullet \vec{B}) \quad (2.8)$$

queda

$$\frac{dL^2}{dt} = -\frac{qm}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [(\vec{r} \bullet \vec{r})(\vec{v} \bullet \vec{d}) - (\vec{r} \bullet \vec{d})(\vec{v} \bullet \vec{r})] \quad (2.9)$$

$$\frac{dL^2}{dt} = -\frac{qm}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{v} \cdot \vec{d}}{r} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{d})(\vec{v} \cdot \vec{r})}{r^3} \right]. \quad (2.10)$$

Si usamos la identidad

$$\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = r \frac{dr}{dt}$$

en (2.10), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dL^2}{dt} &= -\frac{qm}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{d}}{r} - \frac{dr}{dt} \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{r^2} \right) \\ \frac{dL^2}{dt} &= -\frac{qm}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{dr}{dt} \frac{\vec{r}}{r^2} \right) \cdot \vec{d} \\ \frac{dL^2}{dt} &= -\frac{qm}{2\pi\epsilon_0} \vec{d} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

De aquí se sigue:

$$\frac{d}{dt} \left(L^2 + \frac{qm}{2\pi\epsilon_0} \vec{d} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) = 0, \quad (2.12)$$

lo cual implica que la cantidad

$$\beta = L^2 + \frac{qmd \cos \theta}{2\pi\epsilon_0} \quad (2.13)$$

es una constante de movimiento. Así, aunque el momento angular no se conserva, existe otra constante de movimiento β característica del movimiento de una carga en el campo de un dipolo puntual.

A continuación obtenemos una relación entre la energía total E y la constante de movimiento β .

La energía total es:

$$E = \frac{1}{2} mv^2 + V, \quad (2.14)$$

donde la energía potencial V esta dada por (2.2), esto es

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{qd\text{Cos}\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (2.15)$$

De las ecuaciones (2.13) y (2.15) se obtiene:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{\beta}{2mr^2} - \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (2.16)$$

El cuadrado del momento angular está dado por

$$L^2 = (\vec{r} \times m\vec{v}) \cdot (\vec{r} \times m\vec{v}) = m^2[r^2v^2 - (\vec{r} \cdot \vec{v})^2], \quad (2.17)$$

donde hemos utilizado la identidad (2.8). Sustituyendo (2.17) en (2.16) se obtiene:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{\beta}{2mr^2} - \frac{m^2[r^2v^2 - (\vec{r} \cdot \vec{v})^2]}{2mr^2} = \frac{m^2(\vec{r} \cdot \vec{v})^2}{2mr^2} + \frac{\beta}{2mr^2},$$

$$E = \frac{(\vec{r} \cdot \vec{p})^2}{2mr^2} + \frac{\beta}{2mr^2}. \quad (2.18)$$

la ecuación (2.18) establece una relación entre la energía total y la constante de movimiento β .

Si introducimos un sistema de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) orientando el eje z en la misma dirección que el momento dipolar \vec{d} , las constantes de movimiento $E, \vec{L} \cdot \hat{d}$ (\hat{d} es un vector unitario en la misma dirección que \vec{d}) quedan expresadas como:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \text{Sen}^2\theta) + \frac{qd\text{Cos}\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.19)$$

$$L_z = \vec{L} \cdot \hat{d} = mr^2\dot{\phi}\text{Sen}^2\theta, \quad (2.20)$$

$$\beta = \frac{L_z^2}{\text{Sen}^2\theta} + m^2r^4\dot{\theta}^2 + \frac{mqd\text{Cos}\theta}{2\pi\epsilon_0}. \quad (2.21)$$

Usando la ecuación (2.20), podemos reescribir la ecuación (2.19) en la forma:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2mr^2} \left(m^2 r^4 \dot{\theta}^2 + \frac{L_z^2}{\text{Sen}^2 \theta} + \frac{mqd \text{Cos} \theta}{2\pi\epsilon_0} \right), \quad (2.22)$$

ahora, usando la ecuación (2.21) obtenemos

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\beta}{2mr^2}, \quad (2.23)$$

que es la forma que toma la ecuación (2.18) en coordenadas esféricas. La ecuación (2.23) muestra que la constante β desacopla la coordenada radial de las angulares.

Este resultado también puede ser obtenido aplicando la segunda ley de Newton

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}},$$

a la carga q , usando la ecuación (2.1) queda

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{d}}{r^3} = m\ddot{\vec{r}}; \quad (2.24)$$

en coordenadas esféricas,

$$\ddot{\vec{r}} = \begin{bmatrix} (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \text{Sen}^2 \theta) \hat{r} \\ + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \text{Sen} \theta \text{Cos} \theta) \hat{\theta} \\ + (2\dot{r}\dot{\phi} \text{Sen} \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \text{Cos} \theta + r\ddot{\phi} \text{Sen} \theta) \hat{\phi} \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

así (2.24) queda

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{d}}{r^3} = m \begin{bmatrix} (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \text{Sen}^2 \theta) \hat{r} \\ + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \text{Sen} \theta \text{Cos} \theta) \hat{\theta} \\ + (2\dot{r}\dot{\phi} \text{Sen} \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \text{Cos} \theta + r\ddot{\phi} \text{Sen} \theta) \hat{\phi} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Tomando el producto escalar de (2.26) con \hat{r} obtenemos

$$\frac{qd}{2\pi\epsilon_0} \frac{\text{Cos} \theta}{r^3} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \text{Sen}^2 \theta), \quad (2.27)$$

que podemos reescribir como:

$$m\ddot{r} = \frac{1}{mr^3} \left(m^2 r^4 \dot{\theta}^2 + m^2 r^4 \dot{\phi}^2 \text{Sen}^2 \theta + \frac{mqd \text{Cos} \theta}{2\pi\epsilon_0} \right),$$

usando la ecuación (2.21) obtenemos

$$m\ddot{r} = \frac{\beta}{mr^3} \quad (2.28)$$

Al igual que la ecuación (2.23), esta ecuación muestra que la constante β permite desacoplar la coordenada radial de las angulares; así β juega el mismo papel en el problema del dipolo, que L^2 en el caso de un campo central.

2.2 Trayectorias acotadas y no acotadas

La ecuación (2.23) es equivalente a la ecuación de conservación de la energía de una partícula de masa m que se mueve en una dimensión con energía potencial efectiva

$$V_{ef}(r) = \frac{\beta}{2mr^2}. \quad (2.29)$$

En tanto que la ecuación (2.28) es similar a la ecuación de movimiento obtenida al aplicar la segunda ley de Newton a una partícula de masa m que se mueve en una dimensión, sometida a la fuerza efectiva

$$F_{ef} = \frac{\beta}{mr^3}. \quad (2.30)$$

De la ecuación (2.23) y (2.29) obtenemos:

$$\frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = E - V_{ef} \geq 0, \quad (2.31)$$

por lo tanto los valores permitidos de r se obtienen de la condición

$$V_{ef} \leq E. \quad (2.32)$$

Caso $\beta > 0$

En este caso $F_{ef}(r) > 0$, la fuerza es repulsiva. La energía potencial se muestra en la figura 2.1, donde puede verse que sólo se permiten energías mayores a cero. Hay un punto de retorno en r_1 . De acuerdo a (2.32), $r \geq r_1$; debido a que la fuerza es repulsiva, $r \rightarrow \infty$, independientemente de la dirección de la velocidad radial inicial de la partícula, por lo tanto, en este caso, todas las trayectorias son no acotadas.

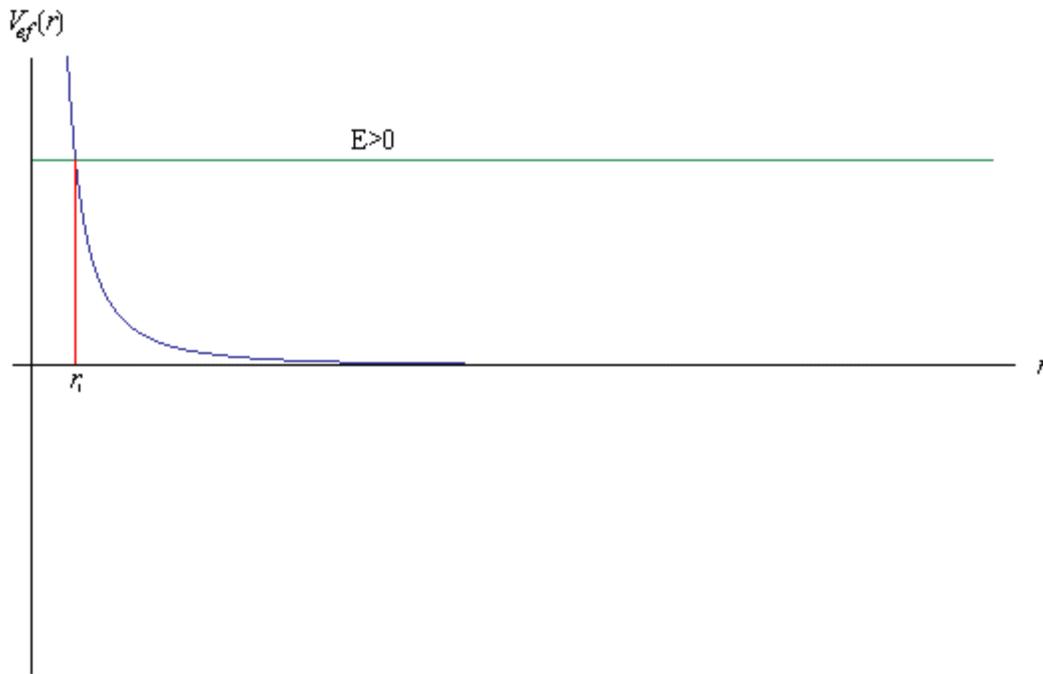


Figura 2.1. Gráfica del potencial efectivo $V_{ef}(r)$ contra r para $\beta > 0$. Hay un punto de retorno r_1 , son admisibles sólo valores positivos de E . Las trayectorias son no acotadas.

Caso $\beta < 0$

En este caso $F_{ef}(r) < 0$, la fuerza es atractiva. La energía potencial se muestra en la figura 2.2. Para energías mayores o iguales a cero como se observa en la figura 2.2, no hay punto de retorno y se tienen las siguientes posibilidades: si $\dot{r}(0) > 0$, $r \rightarrow \infty$, en este caso la trayectoria es no acotada, pero si $\dot{r}(0) < 0$, entonces $r \rightarrow 0$, si r_0 es finito la trayectoria es acotada. El caso en el que $\dot{r}(0) = 0$, no es compatible con las condiciones $\beta < 0$ y $E \geq 0$, de acuerdo a la ecuación (2.23). Para $E < 0$ hay un punto de retorno r_1 . De acuerdo a la ecuación (2.32), $r \leq r_1$; para cualquier valor de $\dot{r}(0)$, $r \rightarrow 0$; la trayectoria es acotada.

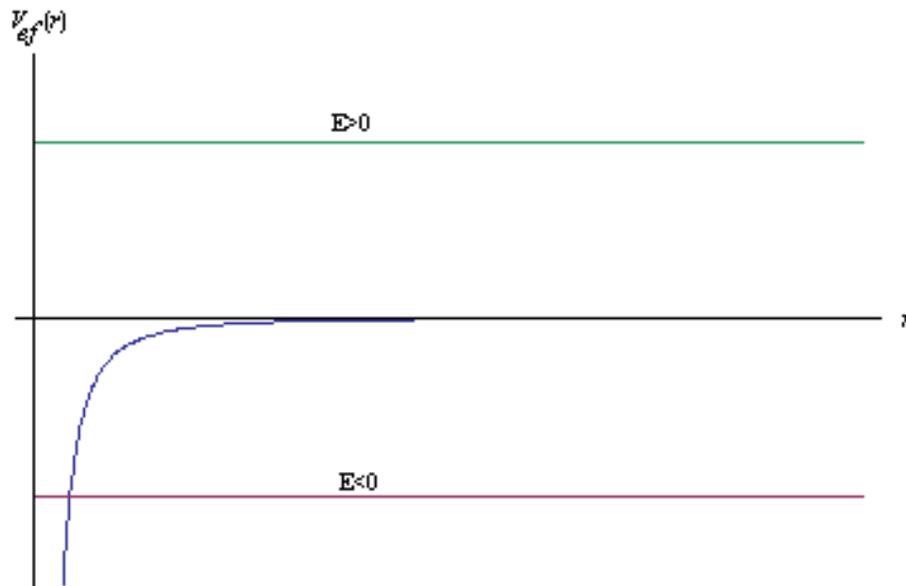


Figura 2.2. Gráfica del potencial efectivo $V_{ef}(r)$ contra r para $\beta < 0$. Son posibles todos los valores de la energía. Se presentan trayectorias acotadas y no acotadas.

Caso $\beta = 0$

Para este caso $F_{ef}(r) = 0$, $V_{ef}(r) = 0$ y

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \geq 0, \quad (2.33)$$

de aquí se sigue que \dot{r} es constante. Para $E > 0$, $r \rightarrow \infty$ si $\dot{r}(0) > 0$, la trayectoria es no acotada; y $r \rightarrow 0$ si $\dot{r}(0) < 0$, en este caso, si r_0 es finito la trayectoria es acotada.

Para $E=0$, debido a (2.33) se cumple $\dot{r}=0$, esto es $r=r_0$ constante. La trayectoria de la partícula se encuentra sobre la superficie de una esfera de radio r_0 , con centro en el dipolo. Este es el único caso en el que la distancia entre la partícula y el dipolo es constante. En los otros casos la partícula se separa del dipolo o cae a éste. Entonces, $E=0$ y $\beta=0$ es condición necesaria y suficiente para obtener trayectorias con r constante.

Esta condición también puede ser obtenida de la ecuación (2.23). Si $E=0$ y $\beta=0$, entonces $\dot{r}=0$, así $r=r_0$ constante. Si $r=r_0$, de la ecuación (2.23) obtenemos:

$$E = \frac{\beta}{2mr_0^2} \quad (2.34)$$

y de la ecuación (2.28) se sigue $\beta=0$ y también $E=0$.

Al evaluar la ecuación (2.23) en $t=0$, se observa que las condiciones $E=0$ y $\beta=0$ son equivalentes a las condiciones iniciales $E=0$ y $\dot{r}(0)=0$. Este último resultado muestra que para tener trayectorias sobre la superficie de una esfera, la velocidad inicial \vec{v}_0 debe estar contenida en un plano perpendicular al vector de posición inicial. De la ecuación (2.15) se sigue:

$$v_0^2 = \frac{d |q \cos \theta_0|}{2\pi \epsilon_0 m r_0^2} \quad (2.35)$$

Los resultados anteriores son equivalentes a los que se obtuvieron mediante la formulación Lagrangiana del problema (Sección de trayectorias acotadas del capítulo 1).

2.3 Movimiento sobre una esfera

Como se ha visto en la sección anterior, una condición necesaria y suficiente para tener trayectorias sobre una esfera ($r=r_0$ constante) es $E=0$, $\beta=0$. La energía potencial para esta trayectoria es:

$$V(\theta) = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \text{Cos } \theta \quad (2.36)$$

El potencial en este caso es similar al del péndulo esférico. Para estas trayectorias, de la ecuación (2.21) obtenemos:

$$\frac{L_z^2}{\text{Sen}^2 \theta} + m^2 r_0^4 \dot{\theta}^2 + \frac{mqd \text{Cos } \theta}{2\pi\epsilon_0} = 0, \quad (2.37)$$

así

$$\frac{1}{2} m r_0^2 \dot{\theta}^2 + \frac{L_z^2}{2m r_0^2 \text{Sen}^2 \theta} + \frac{qd \text{Cos } \theta}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} = 0 \quad (2.38)$$

La ecuación (2.38) es similar a la ecuación para un péndulo esférico con energía total cero. Esta ecuación es idéntica a la ecuación (1.17) del capítulo 1.

Siguiendo el tratamiento usual podemos estudiar el movimiento angular sobre la esfera analizando el movimiento unidimensional de una partícula de masa m en el potencial efectivo:

$$V_{ef}(\theta) = \frac{L_z^2}{2m r_0^2 \text{Sen}^2 \theta} + \frac{qd \text{Cos } \theta}{4\pi\epsilon_0 r_0^2}. \quad (2.39)$$

De la ecuación (2.38) y (2.39), se sigue

$$\frac{1}{2}mr_0^2\dot{\theta}^2 + V_{ef}(\theta) = 0 \quad (2.40)$$

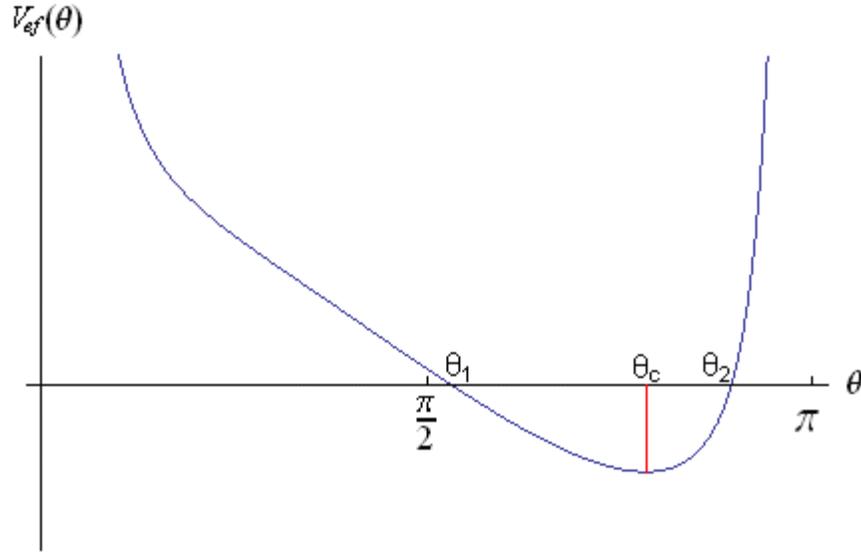


Figura 2.3. Gráfica del potencial efectivo $V_{ef}(\theta)$ contra θ para $q>0$.

La figura 2.3 muestra una gráfica del potencial efectivo $V_{ef}(\theta)$ contra θ en el intervalo $0<\theta<\pi$ para una carga q positiva. Ahora obtenemos el valor mínimo de $V_{ef}(\theta)$ que ocurre en θ_c , de (2.39) se sigue:

$$\left. \frac{dV_{ef}(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_c} = -\frac{L_z^2 \text{Cos} \theta_c}{mr_0^2 \text{Sen}^3 \theta_c} - \frac{qd \text{Sen} \theta_c}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} = 0,$$

de aquí obtenemos

$$\text{Cos} \theta_c = -\frac{mqd}{4\pi\epsilon_0 L_z^2} \text{Sen}^4 \theta_c \leq 0 \quad (\text{para } q>0), \quad (2.41)$$

así $\text{Cos} \theta_c \leq 0$, por lo tanto se cumple $\pi/2 \leq \theta_c \leq \pi$.

De la ecuación (2.40) se sigue que los valores permitidos de θ se obtienen de la condición:

$$V_{ef}(\theta) \leq 0, \quad (2.42)$$

en particular

$$V_{ef}(\theta_c) \leq 0, \quad (2.43)$$

En el caso $V_{ef}(\theta_c) < 0$, se cumple $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$; según (2.40) en estos puntos se cumple $\dot{\theta} = 0$, ya que $V_{ef}(\theta_1) = V_{ef}(\theta_2) = 0$ (figura 2.3), así θ_1 y θ_2 son puntos de retorno. La trayectoria se encuentra entre dos círculos contenidos en planos perpendiculares al eje del dipolo. Los valores de θ_1 y θ_2 se obtienen de la condición:

$$V_{ef}(\theta) = 0. \quad (2.44)$$

esto es

$$\frac{L_z^2}{2mr_0^2 \text{Sen}^2 \theta} + \frac{qd \text{Cos} \theta}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} = 0, \quad (2.45)$$

que podemos reescribir como

$$\frac{L_z^2}{\text{Sen}^2 \theta} + \frac{mqd}{2\pi\epsilon_0} \text{Cos} \theta = 0. \quad (2.46)$$

Para determinar las raíces de la ecuación (2.46) hacemos el cambio de variable $x = \text{Cos} \theta$, así la ecuación (2.46) queda:

$$\frac{L_z^2}{1-x^2} + \frac{mqdx}{2\pi\epsilon_0} = 0, \quad (2.47)$$

esto es

$$-x^3 + x + \frac{2\pi\epsilon_0 L_z^2}{mqd} = 0. \quad (2.48)$$

Introduciendo la constante

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L_z^2}{mqd} > 0 \quad \text{para } q > 0 \quad (2.49)$$

en la ecuación (2.48) obtenemos

$$-x^3 + x + C = 0 \quad (2.50)$$

Si denotamos $y(x) = -x^3 + x + C$, entonces

$$y(0) = y(1) = y(-1) = C, \quad (2.51)$$

$$y(-\infty) = \infty, \quad y(\infty) = -\infty$$

Ahora obtenemos los puntos críticos de $y(x)$

$$\frac{dy(x)}{dx} = -3x^2 + 1 = 0, \quad (2.52)$$

de aquí se obtiene $x = \pm\sqrt{1/3}$, evaluando $y(x)$ obtenemos:

$$y\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} + C \quad (2.53)$$

$$y\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} + C \quad (2.54)$$

Por lo tanto $y(\sqrt{1/3})$ es máximo y $y(-\sqrt{1/3})$ es mínimo.

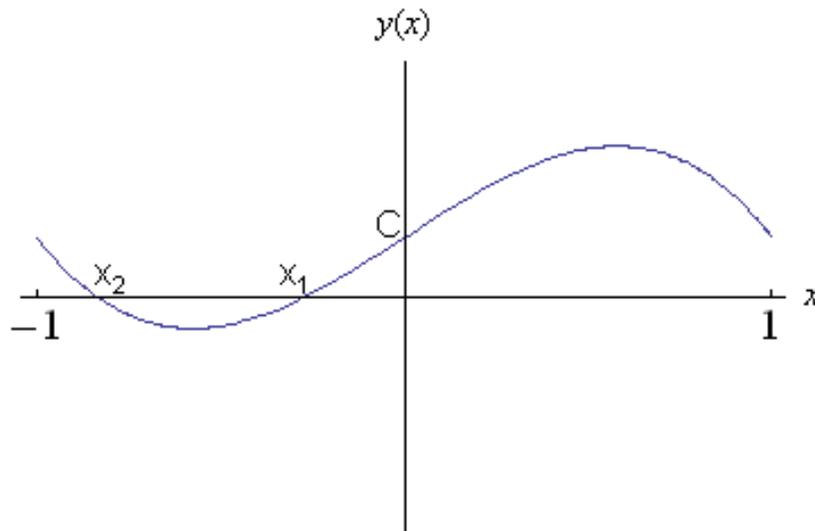


Figura 2.4. Gráfica de $y(x) = -x^3 + x + C$

En el intervalo $0 < x < 1$, $y(x)$ es positiva, así que para obtener dos raíces reales x_1 y x_2 dentro del intervalo de $-1 < x_1, x_2 < 1$ ($0 \leq \theta \leq \pi$), éstas deben cumplir ($-1 < x_1, x_2 < 0$). Por lo tanto, el mínimo de $y(x)$ debe ser negativo (ver figura 2.4), así:

$$-\frac{2}{3\sqrt{3}} + C < 0,$$

esto es

$$C < \frac{2}{3\sqrt{3}} \quad (2.55)$$

Usando la ecuación (2.49) en (2.55) obtenemos:

$$d > \frac{3\sqrt{3}\pi\epsilon_0 L_z^2}{mq} > 0, \quad (2.56)$$

la cual coincide con los resultados obtenidos de la ecuación (1.26) en la sección de movimiento sobre una esfera del capítulo 1.

Debido a que $-1 < x_1, x_2 < 0$, los correspondientes ángulos θ_1 y θ_2 se encuentran en el intervalo $\pi/2 < \theta < \pi$. Por lo tanto, para $q > 0$ la partícula se moverá en el hemisferio inferior. Para L_z dado por las condiciones iniciales, la ecuación (2.56) establece una condición sobre el valor de d para que existan trayectorias sobre la superficie de una esfera. Recíprocamente, para un valor dado del momento dipolar, siempre es posible encontrar un conjunto de condiciones iniciales para las cuales la ecuación (2.56) se satisface. Este es el resultado obtenido por Fox⁽¹⁾ (Capítulo 1).

De acuerdo a la ecuación (2.20) $\dot{\phi}$ no cambia de signo, así las trayectorias de la carga sobre la superficie de una esfera son similares a la curva que se obtiene al proyectar sobre una esfera unitaria el eje de simetría de un trompo simétrico que tiene precesión monótona, como se muestra en la figura 2.5⁶.

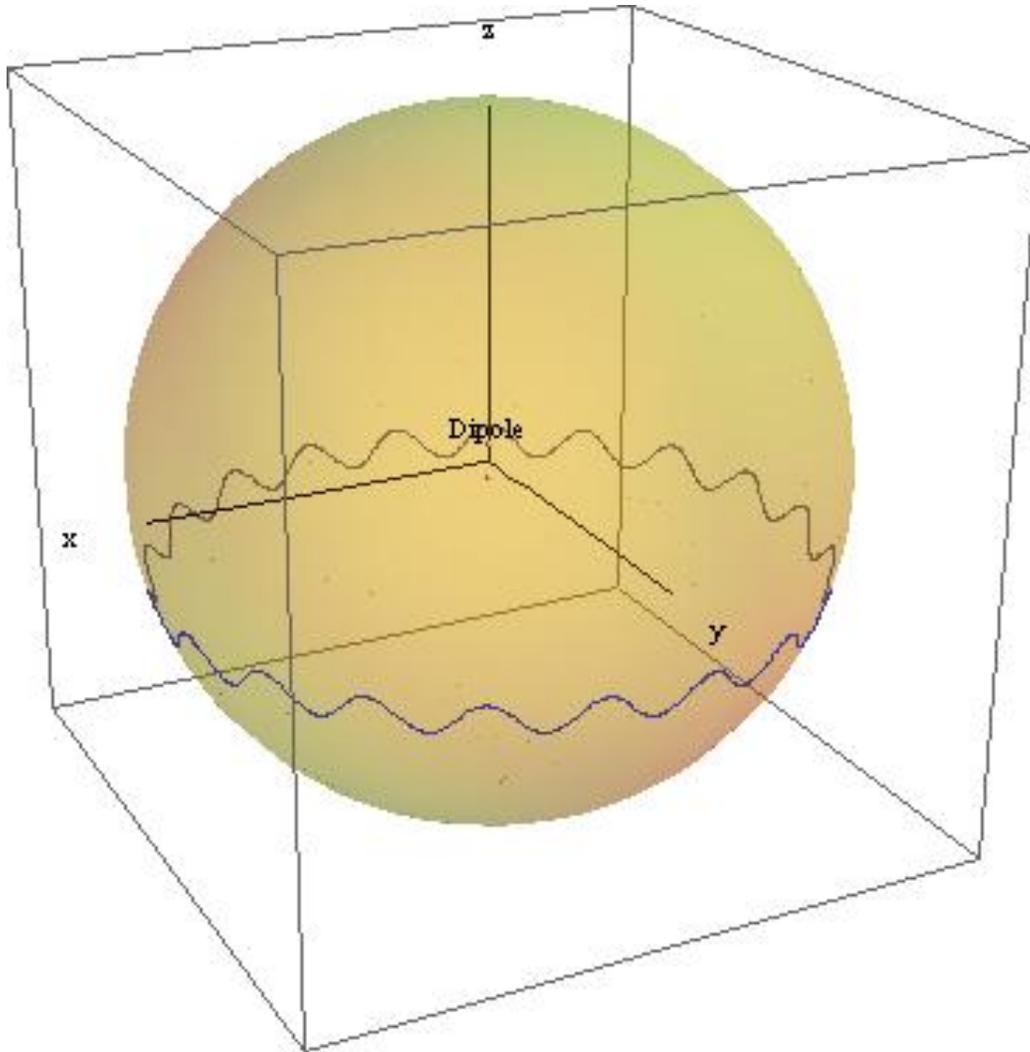


Figura 2.5. Trayectoria de una partícula sobre una esfera para $V_{ef}(\theta_c) < 0$, $L_z \neq 0$ y $q > 0$

De la ecuación (2.1) se sigue que un cambio en el signo de la carga es equivalente a un cambio en la orientación del dipolo o una inversión del eje z sin cambiar la orientación del dipolo. Por lo tanto, el movimiento para q negativa es idéntico al movimiento para q positiva, pero en el hemisferio superior.

Para el caso $V_{ef}(\theta_c) = 0$, el único valor permitido de θ es θ_c y la trayectoria es una circunferencia contenida en un plano perpendicular a \vec{d} .

Como $L_z = mr_0^2 \dot{\phi} \text{Sen}^2 \theta_c$ se conserva, el movimiento es circular uniforme. De la ecuación (2.39) se sigue:

$$V_{ef}(\theta_c) = \frac{L_z^2}{2mr_0^2 \text{Sen}^2 \theta_c} + \frac{qd \text{Cos} \theta_c}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} = 0, \quad (2.57)$$

y de la ecuación (2.41):

$$\frac{1}{\text{Sen}^2 \theta_c} = -\frac{mqd}{4\pi\epsilon_0 L_z^2} \frac{\text{Sen}^2 \theta_c}{\text{Cos} \theta_c}, \quad (2.58)$$

sustituyendo en el primer término del lado derecho de (2.57) queda:

$$V_{ef}(\theta) = \frac{qd}{8\pi\epsilon_0 r_0^2} \left(\frac{3\text{Cos}^2 \theta_c - 1}{\text{Cos} \theta_c} \right) = 0, \quad (2.59)$$

por lo tanto

$$\text{Cos} \theta_c = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad (2.60)$$

sustituyendo este valor en (2.41) obtenemos

$$\pm \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{mqd}{4\pi\epsilon_0 L_z^2} \text{Sen}^4 \theta_c. \quad (2.61)$$

De la ecuación (2.61) se obtiene:

$$\mp \frac{4\pi\epsilon_0 L_z^2}{\sqrt{3}mqd} = (1 - \text{Cos}^2 \theta_c)^2$$

$$\mp \frac{4\pi\epsilon_0 L_z^2}{\sqrt{3}mqd} = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2$$

$$\mp \frac{4\pi\epsilon_0 L_z^2}{\sqrt{3}mqd} = \frac{4}{9}.$$

De aquí obtenemos

$$d = \mp \frac{3\sqrt{3}\pi\epsilon_0 L_z^2}{mq}. \quad (2.62)$$

Como ocurre en el péndulo esférico, cuando la energía es ligeramente mayor que el mínimo del potencial efectivo, la coordenada θ oscila armónicamente alrededor de θ_c con frecuencia angular⁷

$$\omega^2 = \frac{1}{mr_0^2} \left. \frac{d^2 V_{ef}(\theta)}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_c}. \quad (2.63)$$

Usando la ecuación (2.39) obtenemos

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{1}{mr_0^2} \left(\frac{L_z^2}{mr_0^2 \text{Sen}^2 \theta_c} + \frac{3L_z^2 \text{Cos}^2 \theta_c}{mr_0^2 \text{Sen}^4 \theta_c} - \frac{qd \text{Cos} \theta_c}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \right) \\ \omega^2 &= \frac{1}{mr_0^2} \left(\frac{L_z^2 \text{Sen}^2 \theta_c}{mr_0^2 \text{Sen}^4 \theta_c} + \frac{3L_z^2 \text{Cos}^2 \theta_c}{mr_0^2 \text{Sen}^4 \theta_c} - \frac{qd \text{Cos} \theta_c}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \right), \\ \omega^2 &= \frac{1}{mr_0^2} \left(\frac{L_z^2}{mr_0^2 \text{Sen}^4 \theta_c} (1 + 2\text{Cos}^2 \theta_c) - \frac{qd \text{Cos}^2 \theta_c}{4\pi\epsilon_0 r_0^2 \text{Cos} \theta_c} \right), \end{aligned}$$

usando (2.41) del lado derecho queda:

$$\omega^2 = -\frac{qd}{4\pi\epsilon_0 mr_0^4} \left(\frac{1 + 3\text{Cos}^2 \theta_c}{\text{Cos} \theta_c} \right). \quad (2.64)$$

Si L_z es cero, de la ecuación (2.38) se sigue:

$$\frac{1}{2} mr_0^2 \dot{\theta}^2 + \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \text{Cos} \theta = 0. \quad (2.65)$$

Esta ecuación es como la de un péndulo simple plano cuya energía es cero. La trayectoria es una semicircunferencia contenida en plano paralelo a \vec{d} , que contiene al dipolo; para $q>0$ ($q<0$) la trayectoria está en el hemisferio inferior (superior).

Este último resultado ha sido obtenido por otros autores^{3,8}, para las condiciones iniciales $\vec{v}_0 = \vec{0}$, \vec{r}_0 contenido en el plano dado por $\theta=\pi/2$, y para las condiciones $\vec{r}_0, \vec{v}_0 = v_0 \hat{e}_\theta$ y v_0 tal que $E=0$; esto es:

$$v_0^2 = -\frac{dq}{2\pi\epsilon_0 mr_0^2} \text{Cos } \theta_0 \quad (2.66)$$

En todos estos casos $E=0$, $\beta=0$, y $L_z=0$.

2.4 Análisis de la parte angular

En la sección anterior analizamos la parte angular del movimiento para trayectorias sobre una esfera; en esta sección extendemos este análisis al resto de las trayectorias.

De la ecuación (2.21) se sigue

$$m^2 r^4 \dot{\theta}^2 = \beta - \left(\frac{L_z^2}{\text{Sen}^2 \theta} + \frac{mqd \text{Cos } \theta}{2\pi\epsilon_0} \right) \geq 0 \quad (2.67)$$

Introduciendo la función

$$f(\theta) = \frac{L_z^2}{\text{Sen}^2 \theta} + \frac{mqd \text{Cos } \theta}{2\pi\epsilon_0}, \quad (2.68)$$

obtenemos que los valores permitidos de θ satisfacen la condición

$$f(\theta) \leq \beta \quad (2.69)$$

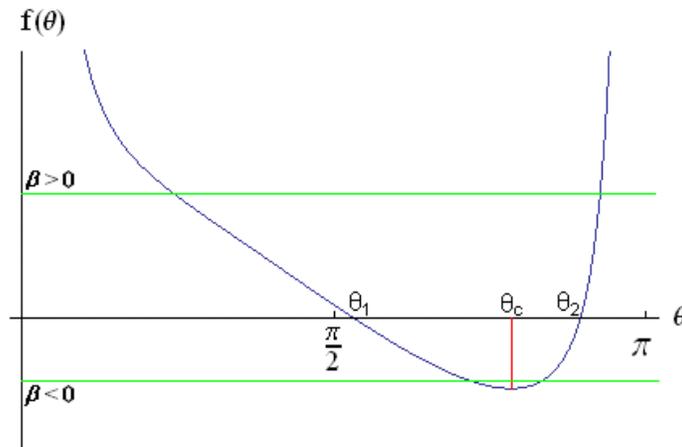


Figura 2.6 Gráfica de la función $f(\theta)$ contra θ . Esta gráfica es similar a la figura 2.3 para el potencial efectivo $V_{ef}(\theta)$ vista en la sección anterior.

Caso $\beta = 0$

De la ecuación (2.69) se sigue que los valores permitidos de θ se obtienen de la condición:

$$f(\theta) \leq 0, \quad (2.70)$$

y por lo tanto

$$f(\theta_c) \leq 0 \quad (2.71)$$

donde θ_c es el mínimo de $f(\theta)$.

Caso $f(\theta_c) < 0$. En este caso $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, donde θ_1 y θ_2 son puntos de retorno. Los valores de θ_1 y θ_2 se pueden obtener de (2.68), haciendo

$$\frac{L_z^2}{\text{Sen}^2\theta} + \frac{mqd\text{Cos}\theta}{2\pi\epsilon_0} = 0,$$

la cual es idéntica a la ecuación (2.46). Como se vió con anterioridad, θ_1 y θ_2 se encuentran en el intervalo $\pi/2 < \theta < \pi$ y además:

$$d > \frac{3\sqrt{3}\pi\epsilon_0 L_z^2}{mq} > 0 \quad (2.72)$$

Caso $f(\theta_c) = 0$, para este caso θ sólo puede tomar el valor θ_c .

Caso $\beta < 0$

De la figura 2.6 concluimos que $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$; también en este caso los ángulos θ_1 y θ_2 están en el intervalo $\pi/2 < \theta < \pi$.

Caso $\beta > 0$

Conforme aumenta el valor de β , tendremos $0 < \theta < \pi$.

2.5 Regiones del movimiento

Del análisis de la parte radial (Capítulo 1) y del análisis de la parte angular obtenemos las regiones en las que se realiza el movimiento para las condiciones iniciales más representativas (figuras 2.7 – 2.11).

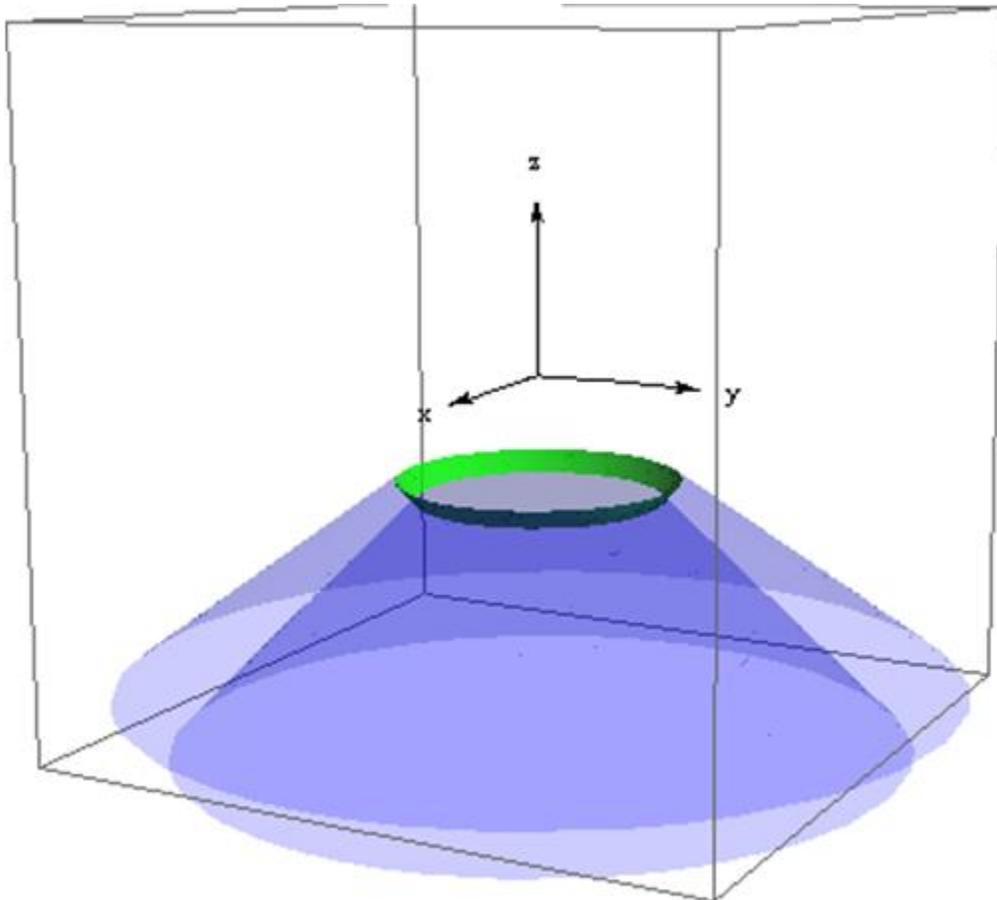


Figura 2.7: Región del movimiento en el caso $\beta \leq 0$, $E > 0$ y $\dot{r}(0) > 0$. En este caso la partícula se mueve en la región comprendida entre dos conos truncados y su distancia al dipolo se extiende desde r_0 hasta infinito ($q > 0$).

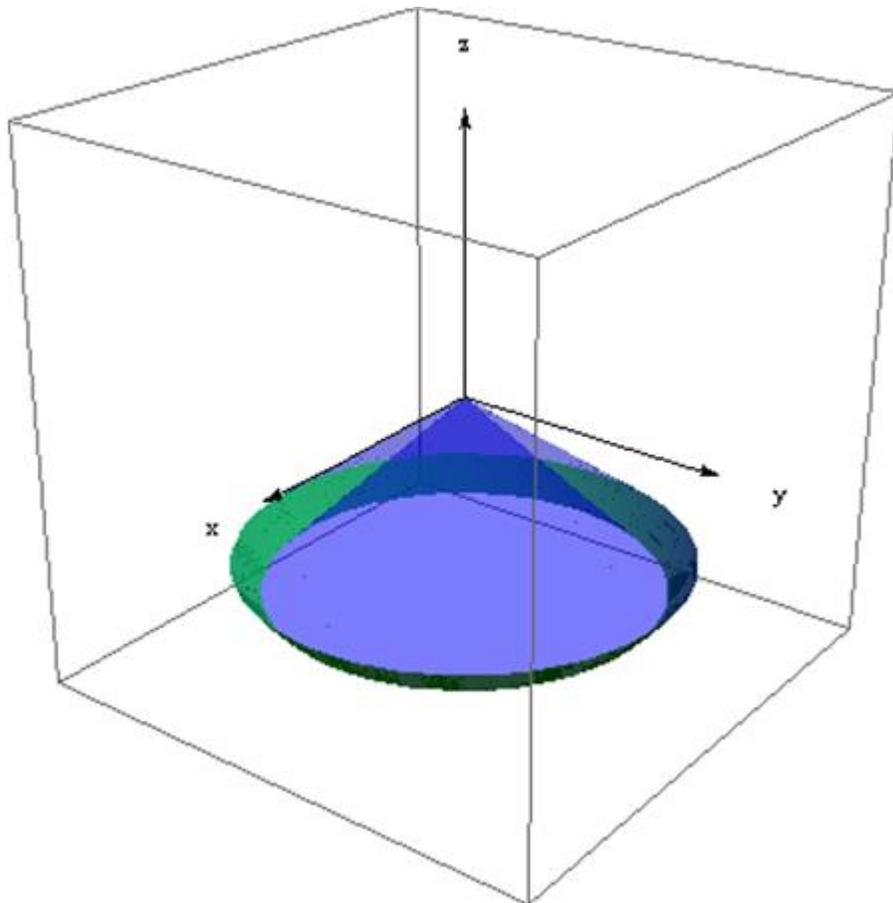


Figura 2.8: Región del movimiento en el caso $\beta \leq 0$, $E > 0$ y $\dot{r}(0) < 0$. En este caso la partícula se mueve en la región acotada entre los dos conos. La distancia de la partícula al dipolo varía entre 0 y r_1 ($q > 0$).

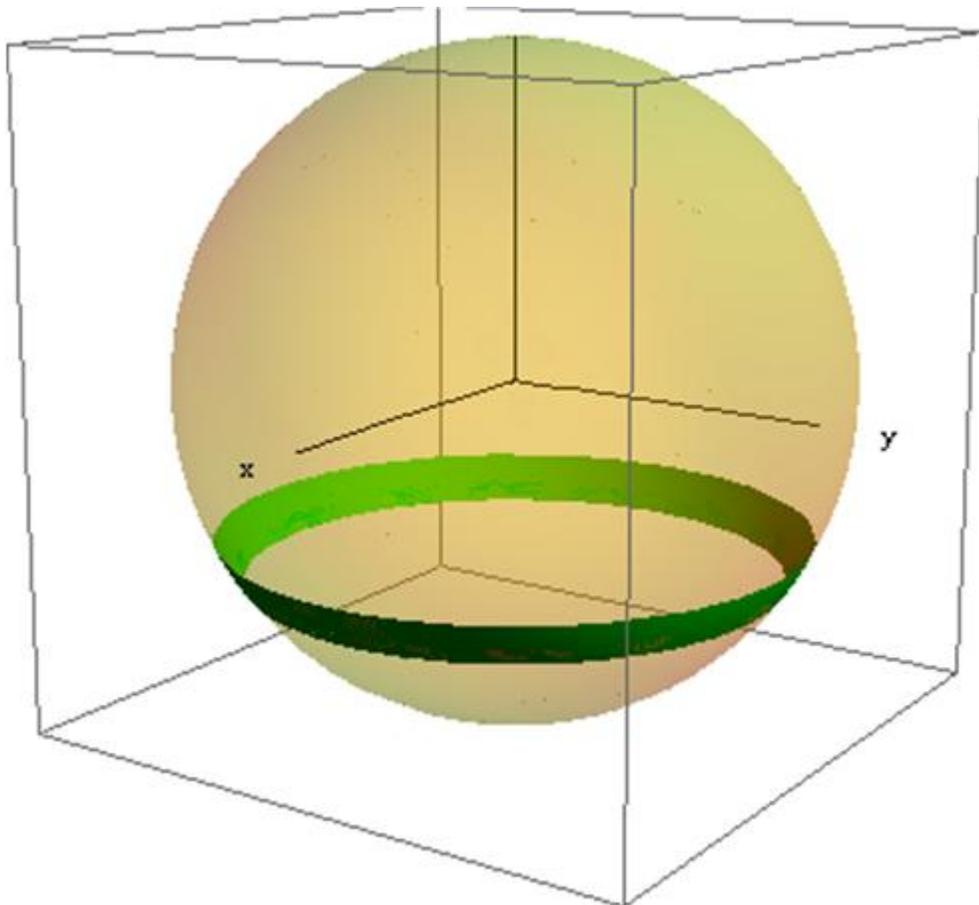


Figura 2.9: Región del movimiento en el caso $\beta=0$, $E=0$, $\dot{r}(0)=0$ y $L_z \neq 0$. El movimiento de la partícula se realiza en la región marcada sobre la esfera ($q>0$).

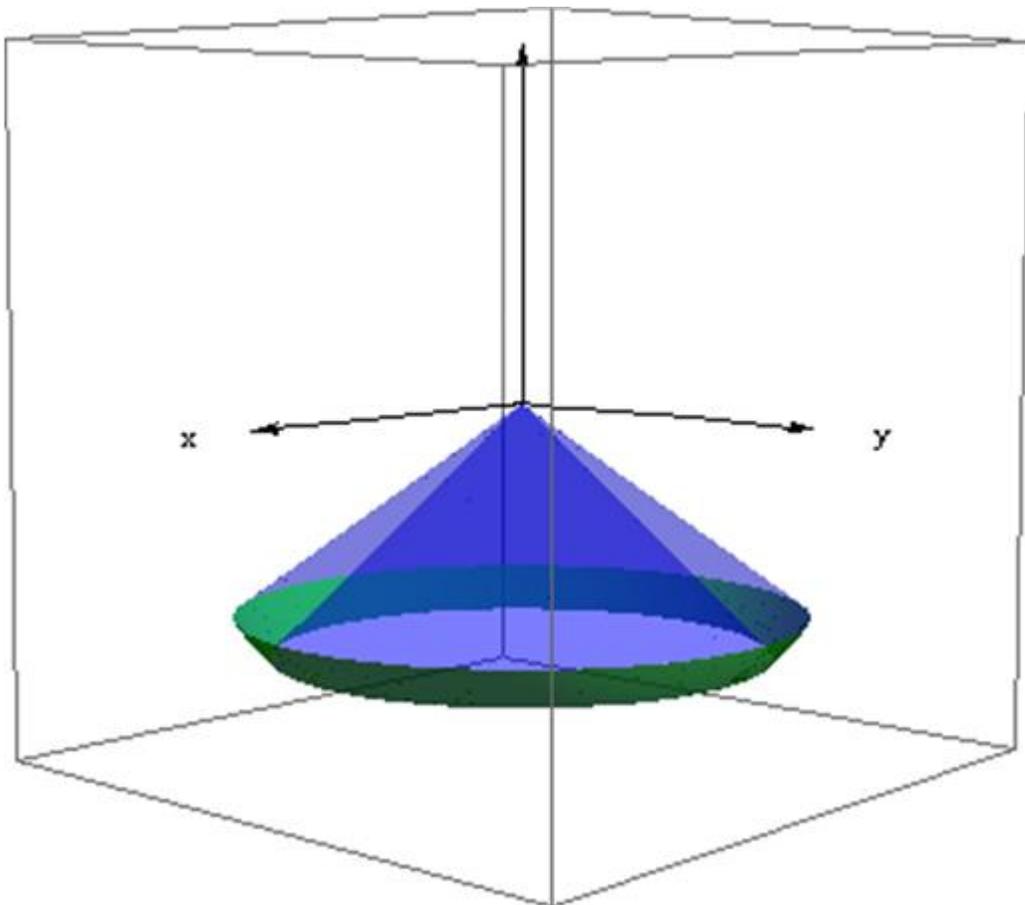


Figura 2.10 Región del movimiento en el caso $\beta < 0$ y $E < 0$. En este caso la partícula se mueve en la región acotada entre los dos conos. La distancia de la partícula al dipolo varía entre 0 y r_1 ($q > 0$).

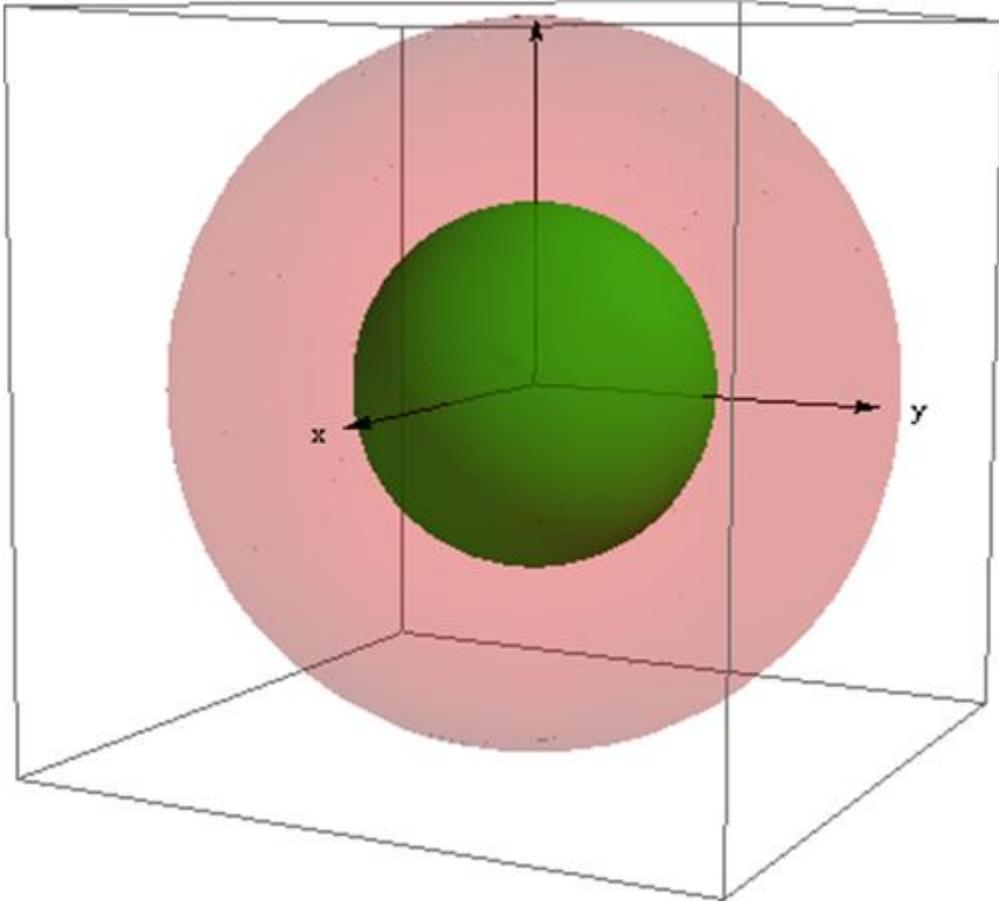


Figura 2.11. Región del movimiento en el caso $\beta \rightarrow \infty$ y $E > 0$. La región de movimiento es todo el espacio excluyendo el volumen de la esfera interior.

2.6 Trayectorias

En esta sección se muestran las trayectorias de la partícula en los casos más representativos (figuras 2.12–2.20); la selección de estos casos se basa en el análisis realizado en las secciones 2.2 - 2.4. Las trayectorias se obtuvieron a partir de la solución numérica de la ecuación de movimiento de la partícula (ecuación (2.24)), usando la versión 7 del programa *Mathematica*.

La ecuación (2.24) es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones escalares:

$$m\ddot{x} = \frac{3kqxd}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$m\ddot{y} = \frac{3kqyd}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$m\ddot{z} = \frac{3kqzd}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{kqd}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

donde x, y, z son las coordenadas cartesianas de la partícula y k es la constante de Coulomb.

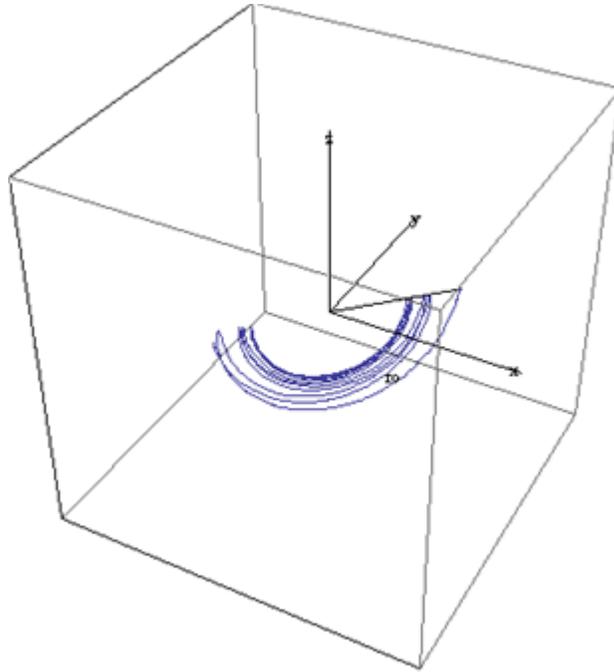
En términos de x, y, z , las constantes de movimiento quedan expresadas como:

$$E = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} + \frac{kqzd}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

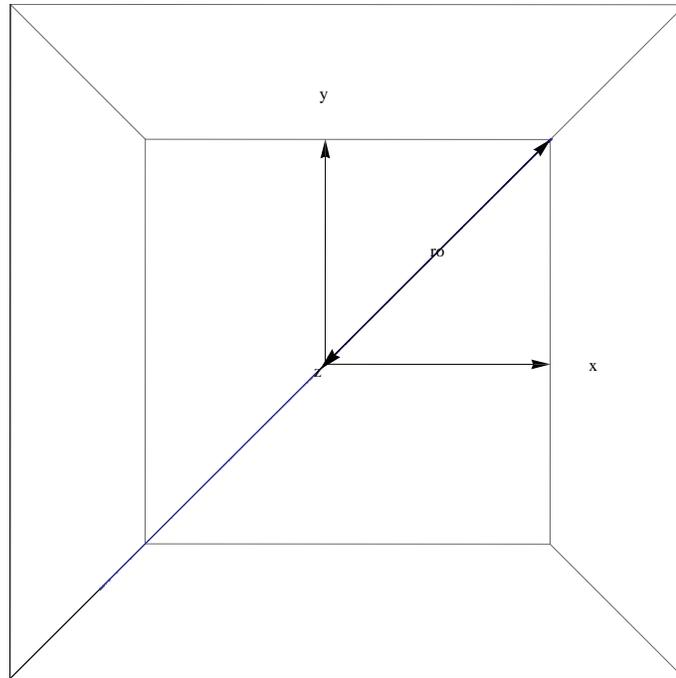
$$\beta = m^2 \left[(y^2 \dot{z}^2 - z^2 \dot{y}^2)^2 + (x^2 \dot{z}^2 - z^2 \dot{x}^2)^2 + (x^2 \dot{y}^2 - y^2 \dot{x}^2)^2 \right] + \frac{2mkqzd}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$$

Los valores de E, β, L_z correspondientes a las diferentes trayectorias se obtienen escogiendo apropiadamente las condiciones iniciales $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ para la posición y velocidad de la partícula.

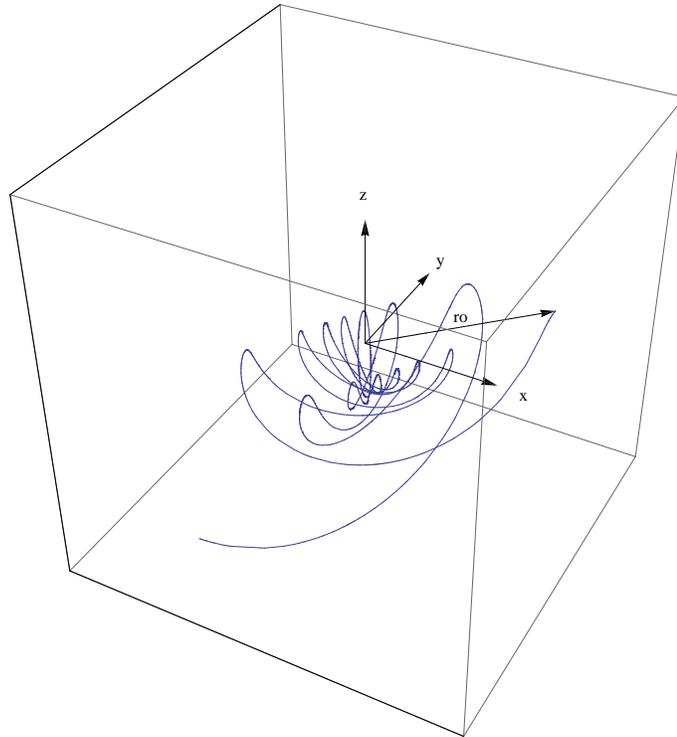


a)

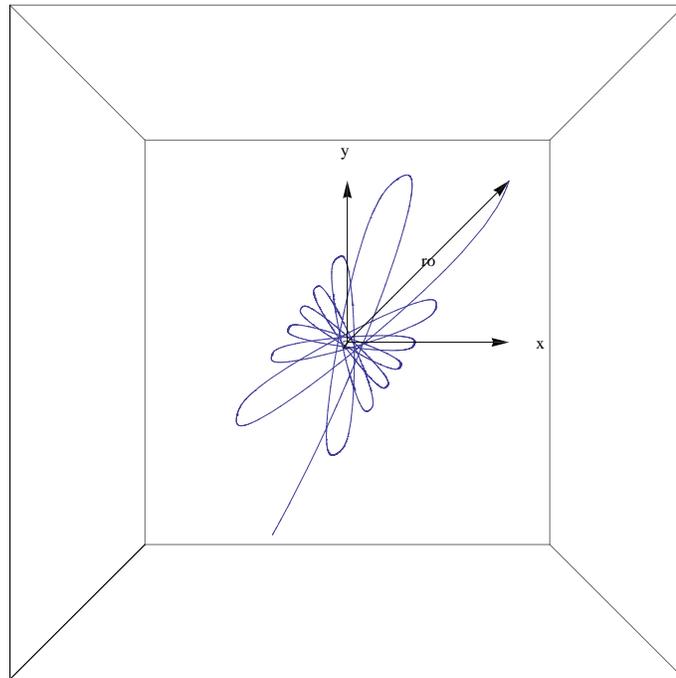


b)

Figura 2.12. a) Trayectoria para $\beta > 0$, $E > 0$, $L_z = 0$, $\dot{r}(0) < 0$: el movimiento de la partícula se encuentra sobre un plano, acercándose al dipolo hasta una distancia mínima y después se aleja ($r \rightarrow \infty$), la trayectoria es no acotada. b) Vista superior de la misma gráfica. El movimiento sobre un plano ocurre cuando $L_z = 0$.



a)



b)

Figura 2.13 a) Trayectoria para $\beta > 0$, $E > 0$, $L_z \neq 0$, $\dot{r}(0) < 0$: la partícula se acerca al dipolo hasta una distancia mínima y después se aleja ($r \rightarrow \infty$), la trayectoria es no acotada. b) Vista superior.

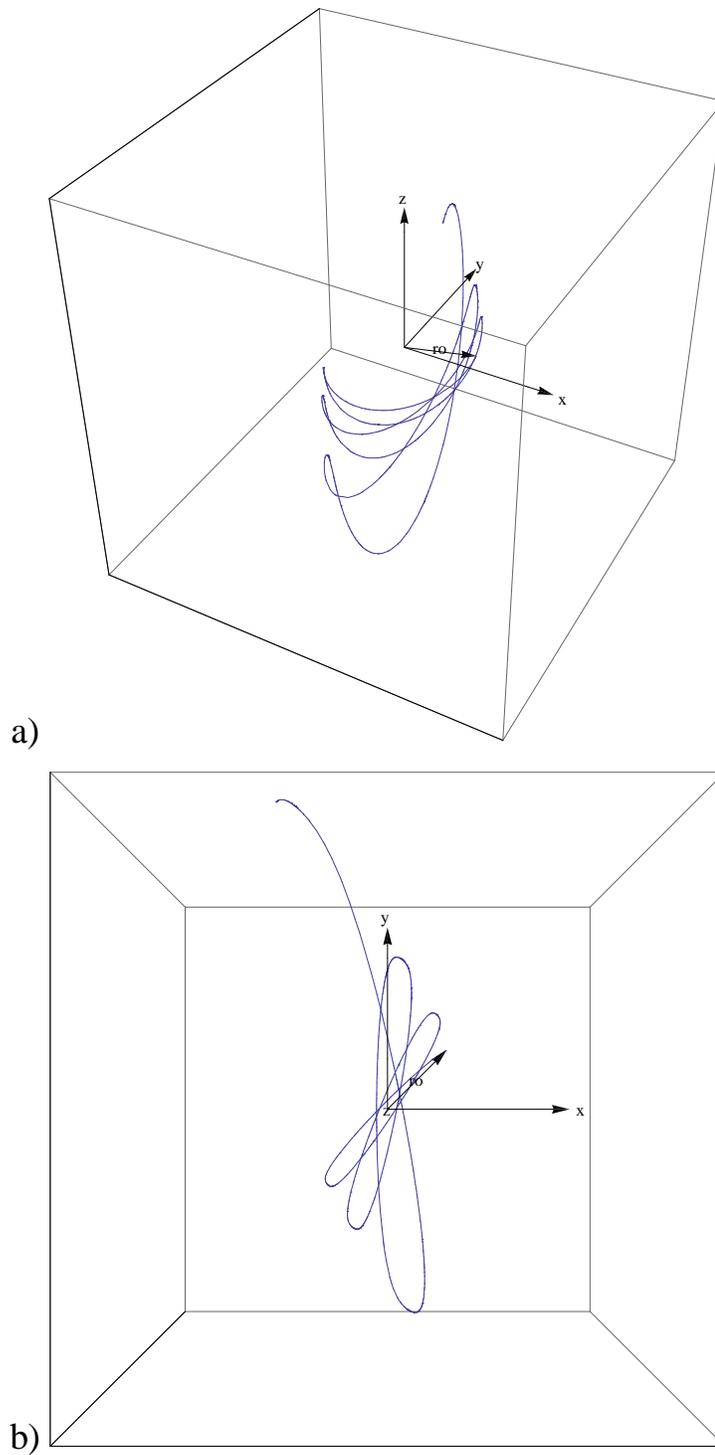
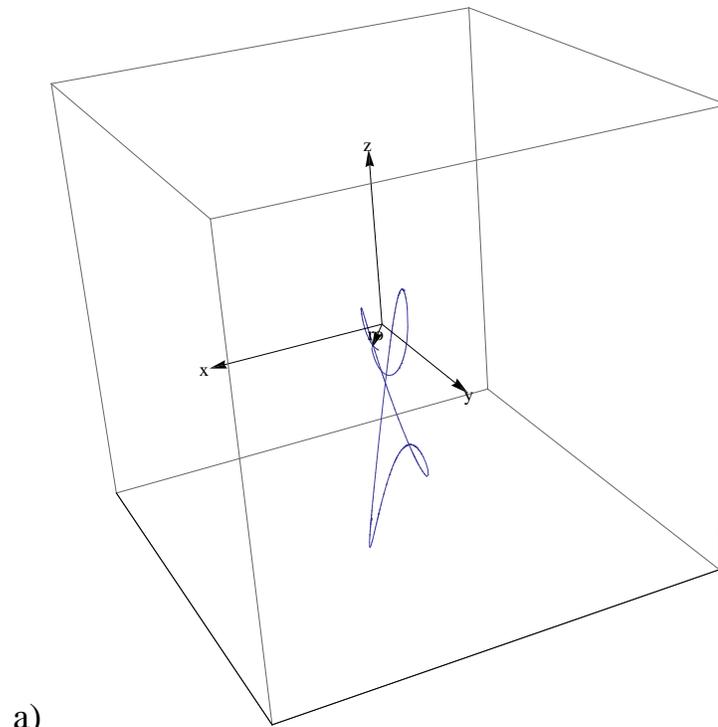
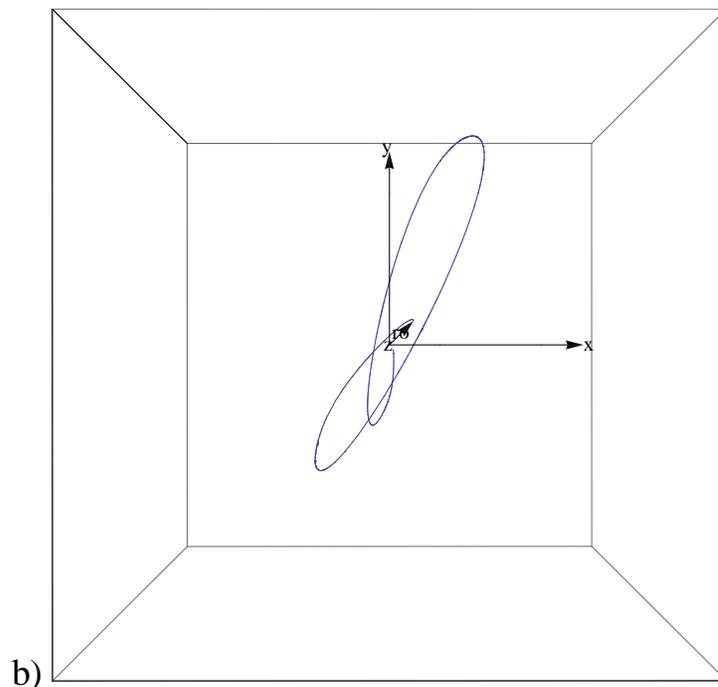


Figura 2.14 a) Trayectoria para $\beta > 0$, $E > 0$, $L_z \neq 0$, $\dot{r}(0) > 0$: la partícula se aleja del dipolo ($r \rightarrow \infty$), la trayectoria es no acotada. b) Vista superior

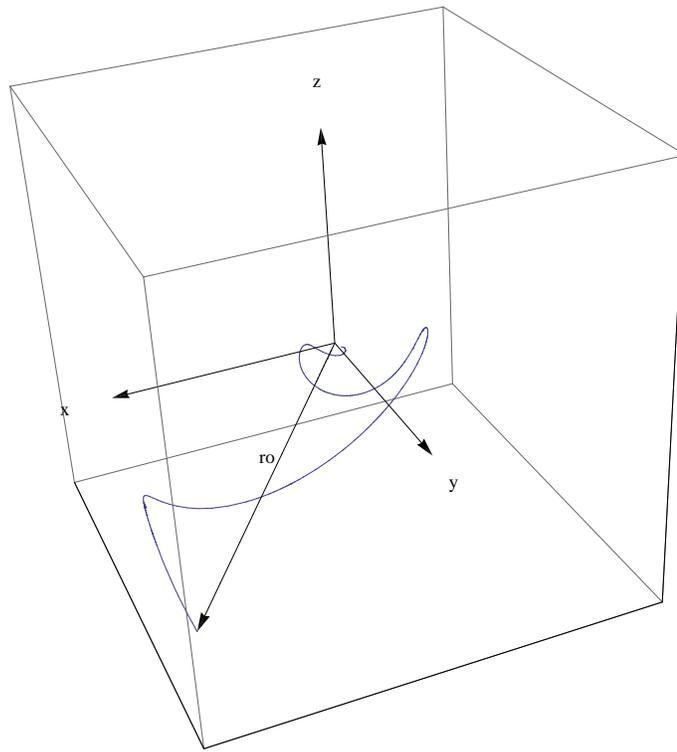


a)

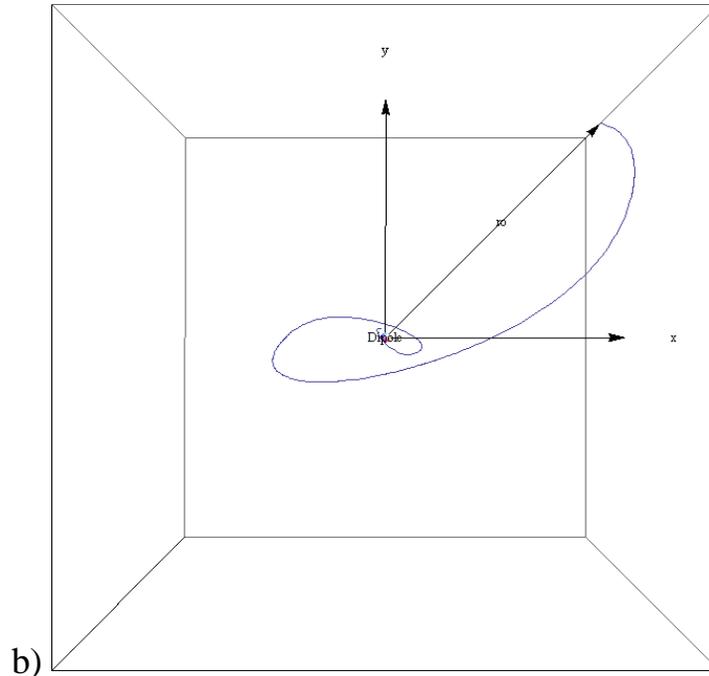


b)

Figura 2.15 a) Trayectoria para $\beta < 0$, $E < 0$, $\dot{r}(0) > 0$ y $L_z \neq 0$: la partícula se aleja del dipolo hasta una distancia máxima y después cae al dipolo ($r \rightarrow 0$), la trayectoria es acotada. b) Vista superior.

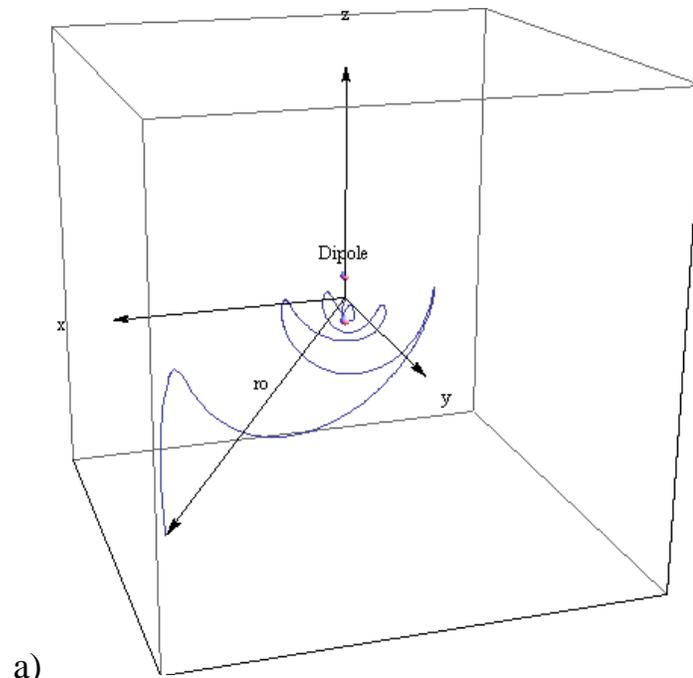


a)

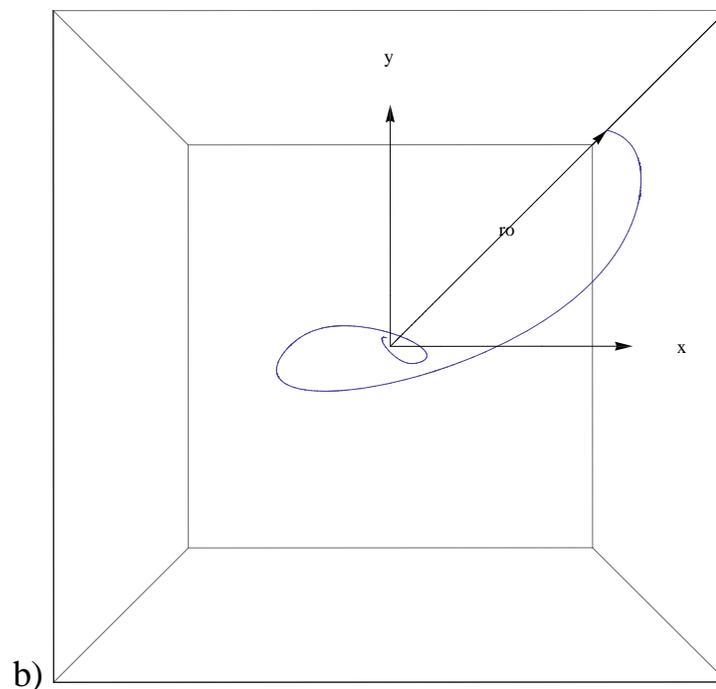


b)

Figura 2.16. a) Trayectoria para $\beta < 0$, $E < 0$, $\dot{r}(0) < 0$ y $L_z \neq 0$: la partícula cae al dipolo ($r \rightarrow 0$), la trayectoria es acotada. b) Vista superior.

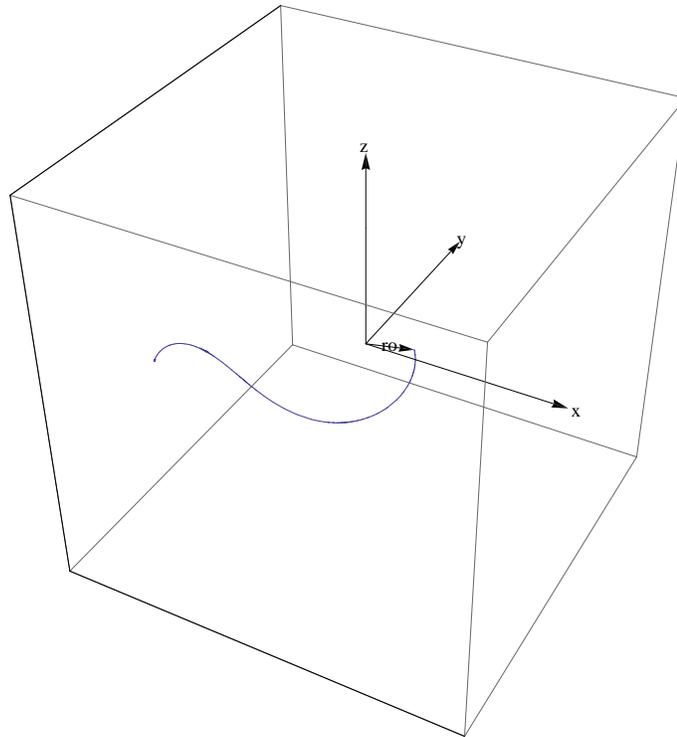


a)

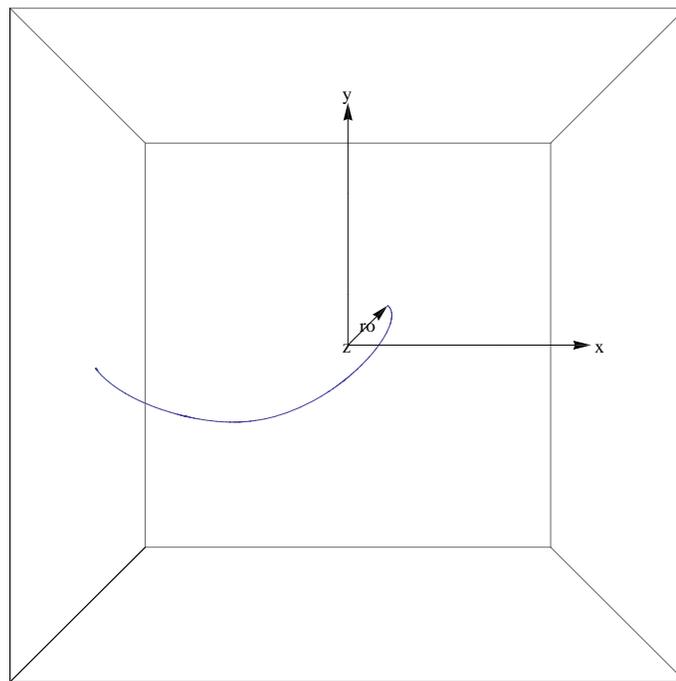


b)

Figura 2.17. a) Trayectoria para $\beta < 0$, $E > 0$, $\dot{r}(0) < 0$ y $L_z \neq 0$: La partícula cae al dipolo ($r \rightarrow 0$), la trayectoria es acotada. b) Vista superior.



a)



b)

Figura 2.18. a) Trayectoria para $\beta < 0$, $E > 0$, $\dot{r}(0) > 0$ y $L_z \neq 0$: la partícula se aleja del dipolo ($r \rightarrow \infty$), la trayectoria es no acotada. b) Vista superior

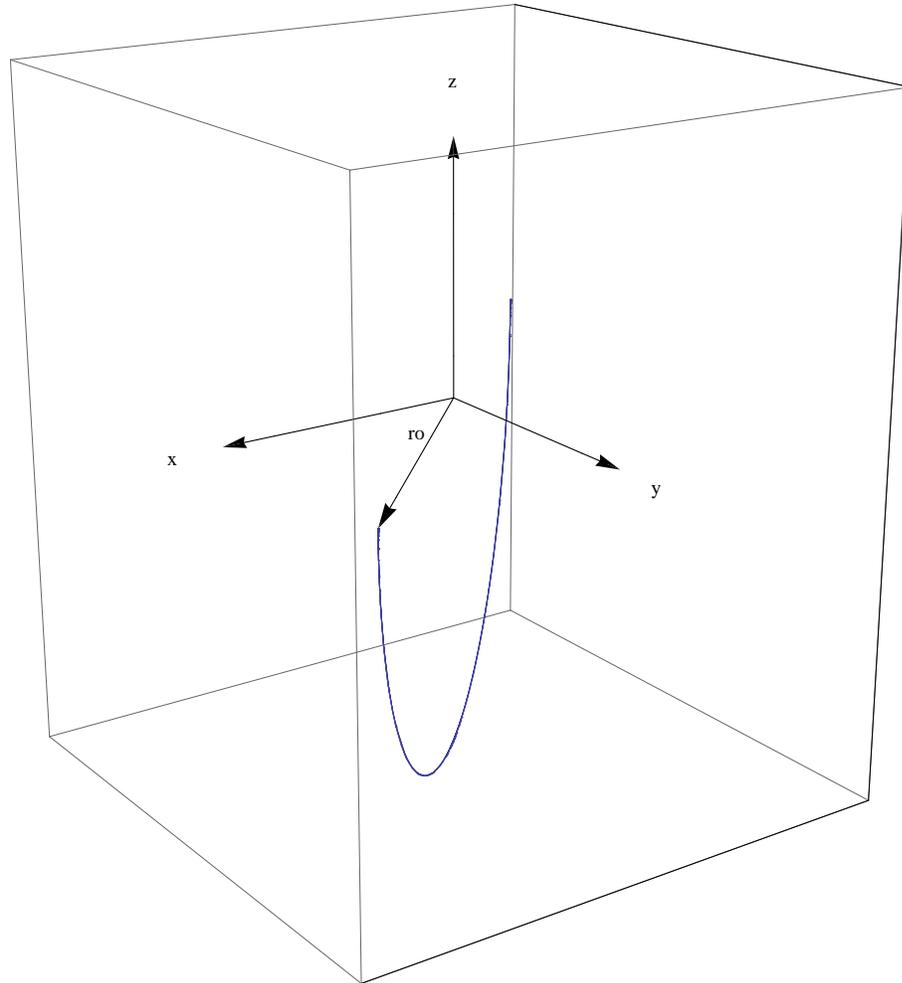


Figura 2.19. Trayectoria para $\beta=0$, $E=0$, $\dot{r}_0=0$ y $L_z=0$: se obtiene una trayectoria con r ; constante el movimiento de la partícula es similar al de un péndulo simple plano.

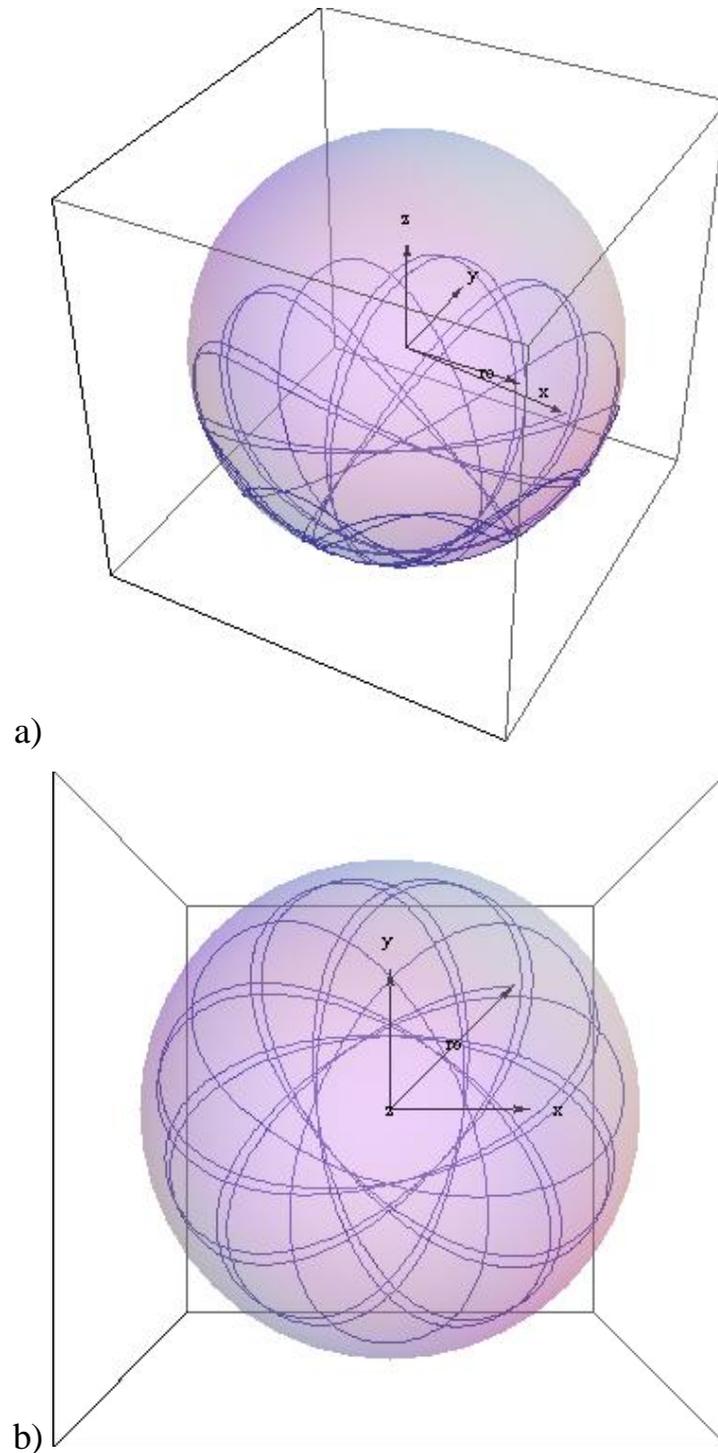


Figura 2.20. a) Trayectoria para $\beta=0$, $E=0$, $\dot{r}_0=0$ y $L_z \neq 0$ se obtiene una trayectoria con r constante sobre una esfera, girando en φ y oscilando en θ . b) Vista superior. El movimiento de la partícula es similar al de un péndulo esférico.

Capítulo 3

Formulación de Hamilton-Jacobi

3.1 Función Hamiltoniana de una partícula cargada en el campo de un dipolo puntual.

La función Hamiltoniana H de la partícula, la podemos obtener a partir de la función Lagrangiana (ecuación (1.3)) mediante la transformación de Legendre:

$$H = \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta + \dot{\phi}p_\phi - L, \quad (3.1)$$

esto es

$$H = \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta + \dot{\phi}p_\phi - \left(\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \text{Sen}^2\theta) - \frac{qd \text{Cos}\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right), \quad (3.2)$$

donde p_r , p_θ y p_ϕ son los momentos generalizados, canónicamente conjugados de las coordenadas generalizadas r , θ y ϕ , los cuales están dados por:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad (3.3)$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad (3.4)$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}\text{Sen}^2\theta. \quad (3.5)$$

Sustituyendo en (3.2) las velocidades generalizadas \dot{r} , $\dot{\theta}$ y $\dot{\phi}$ obtenidas de (3.3), (3.4) y (3.5) respectivamente obtenemos:

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \text{Sen}^2\theta} \right) + \frac{qd \text{Cos}\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (3.6)$$

3.2 Ecuación de Hamilton-Jacobi de una partícula cargada en el campo de un dipolo puntual.

Como H no depende explícitamente del tiempo, una integral completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi⁹

$$H\left(r, \theta, \phi, \frac{\partial S}{\partial r}, \frac{\partial S}{\partial \theta}, \frac{\partial S}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (3.7)$$

tiene la forma

$$S = -Et + S_0(r, \theta, \phi) \quad (3.8)$$

donde E es la energía total constante y S_0 es la acción abreviada, la cual satisface la ecuación

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S_0}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \text{Sen}^2 \theta} \left(\frac{\partial S_0}{\partial \phi} \right)^2 \right] + \frac{qd \text{Cos} \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} = E. \quad (3.9)$$

Para resolver la ecuación (3.9) utilizamos el método de separación de variables; como ϕ es una coordenada cíclica, buscamos una solución de la forma:

$$S_0 = \phi p_\phi + S_1(r) + S_2(\theta), \quad (3.10)$$

donde p_ϕ es constante. Sustituyendo en (3.9) queda

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{dS_1}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dS_2}{d\theta} \right)^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2 \text{Sen}^2 \theta} \right] + \frac{qd \text{Cos} \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} = E, \quad (3.11)$$

que podemos reescribir como

$$r^2 \left[\left(\frac{dS_1}{dr} \right)^2 - 2mE \right] + \left[\left(\frac{dS_2}{d\theta} \right)^2 + \frac{p_\phi^2}{\text{Sen}^2 \theta} + \frac{mqd \text{Cos} \theta}{2\pi \epsilon_0} \right] = 0.$$

De aquí se sigue que

$$r^2 \left[\left(\frac{dS_1}{dr} \right)^2 - 2mE \right] = -\beta \quad (3.12)$$

$$\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 + \frac{p_\phi^2}{\text{Sen}^2\theta} + \frac{mqd\text{Cos}\theta}{2\pi\epsilon_0} = \beta \quad (3.13)$$

donde β es una constante de separación. De la ecuación (3.12) se sigue

$$S_1(r) = \int \sqrt{2mE - \frac{\beta}{r^2}} dr, \quad (3.14)$$

y de (3.13)

$$S_2(\theta) = \int \sqrt{\beta - \frac{p_\phi^2}{\text{Sen}^2\theta} - \frac{mqd\text{Cos}\theta}{2\pi\epsilon_0}} d\theta \quad (3.15)$$

Sustituyendo (3.14) y (3.15) en (3.10), obtenemos la acción abreviada:

$$S_0 = \phi p_\phi + \int \sqrt{2mE - \frac{\beta}{r^2}} dr + \int \sqrt{\beta - \frac{p_\phi^2}{\text{Sen}^2\theta} - \frac{mqd\text{Cos}\theta}{2\pi\epsilon_0}} d\theta \quad (3.16)$$

ahora sustituyendo (3.16) en (3.8) obtenemos una integral completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$S = -Et + \phi p_\phi + \int \sqrt{2mE - \frac{\beta}{r^2}} dr + \int \sqrt{\beta - \frac{p_\phi^2}{\text{Sen}^2\theta} - \frac{mqd\text{Cos}\theta}{2\pi\epsilon_0}} d\theta. \quad (3.17)$$

De esta ecuación se sigue

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r} = \sqrt{2mE - \frac{\beta}{r^2}} \quad (3.18)$$

$$p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = \sqrt{\beta - \frac{p_\phi^2}{\text{Sen}^2\theta} - \frac{mqd\text{Cos}\theta}{2\pi\epsilon_0}}. \quad (3.19)$$

$$p_\phi = \frac{\partial S}{\partial \phi} = p_\phi = \text{Cte} \quad (3.20)$$

De la ecuación (3.19) obtenemos

$$\beta = \frac{p_\phi^2}{\text{Sen}^2\theta} + p_\theta^2 + \frac{mqd\text{Cos}\theta}{2\pi\epsilon_0} \quad (3.21a)$$

$$\beta = L^2 + \frac{mqd \cos \theta}{2\pi\epsilon_0}, \quad (3.21b)$$

donde L^2 es el cuadrado del momento angular. Las ecuaciones (3.21a) o (3.21b) muestran que β es una constante de movimiento. Esta es la constante de movimiento obtenida en el capítulo 2 mediante la formulación Newtoniana (ecuación (2.13)).

De la ecuación (3.18) se sigue

$$\frac{p_r^2}{2m} + \frac{\beta}{2mr^2} = E. \quad (3.22)$$

Esta ecuación establece una relación entre la constante de movimiento β y la energía total E .

Como p_r y p_θ son cantidades reales se sigue de (3.18) y (3.19) que los valores admisibles de las coordenadas r y θ son aquellos para los cuales se cumple:

$$\frac{\beta}{2mr^2} \leq E, \quad (3.23)$$

$$\frac{p_\phi^2}{\text{Sen}^2 \theta} + \frac{mqd \cos \theta}{2\pi\epsilon_0} \leq \beta. \quad (3.24)$$

Podemos determinar las propiedades generales del movimiento utilizando las ecuaciones (3.21), (3.22), (3.23) y (3.24) y las ecuaciones canónicas de Hamilton; estas últimas las obtenemos a continuación:

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \quad (3.25)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \quad (3.26)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2 \text{Sen}^2 \theta}, \quad (3.27)$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{mr^3} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\text{Sen}^2 \theta} + \frac{mqd \text{Cos} \theta}{2\pi\epsilon_0} \right) = \frac{\beta}{mr^3}, \quad (3.28)$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{1}{mr^2} \left(\frac{p_\phi^2 \text{Cos} \theta}{\text{Sen}^3 \theta} + \frac{mqd \text{Sen} \theta}{4\pi\epsilon_0} \right), \quad (3.29)$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0. \quad (3.30)$$

La ecuación (3.30) expresa que p_ϕ es constante de movimiento.

3.3 Análisis del movimiento.

El movimiento de la partícula se realiza en intervalos de r y θ para los cuales las condiciones (3.23) y (3.24) se satisfacen.

Parte radial

Para analizar la parte radial del movimiento introducimos la función

$$f(r) = \frac{\beta}{2mr^2}. \quad (3.31)$$

En términos de $f(r)$ la condición (3.23) queda

$$f(r) \leq E \quad (3.32)$$

Caso $\beta > 0$.

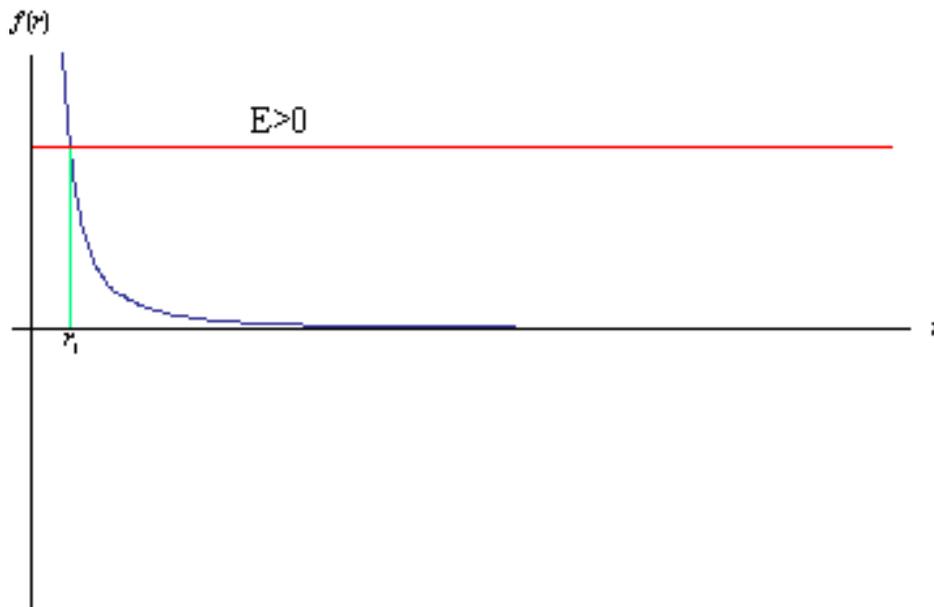


Figura 3.1: Gráfica de $f(r)$ contra r , con $\beta > 0$ y $E > 0$. En este caso $r \geq r_1$.

De la figura 3.1 y de la ecuación (3.32), se sigue que la energía sólo puede ser positiva. En este caso $r \geq r_1$, donde $r_1 = \sqrt{\beta/2mE}$ se obtiene de la condición $f(r_1) = E$. De las ecuaciones (3.22) y (3.25) se sigue que en este punto $p_r = 0$ y $\dot{r} = 0$. De (3.28) obtenemos que $\dot{p}_r > 0$ para todo t , por lo tanto para cualquier valor de $p_r(0)$, $r \rightarrow \infty$ y $p_r \rightarrow \sqrt{2mE}$.

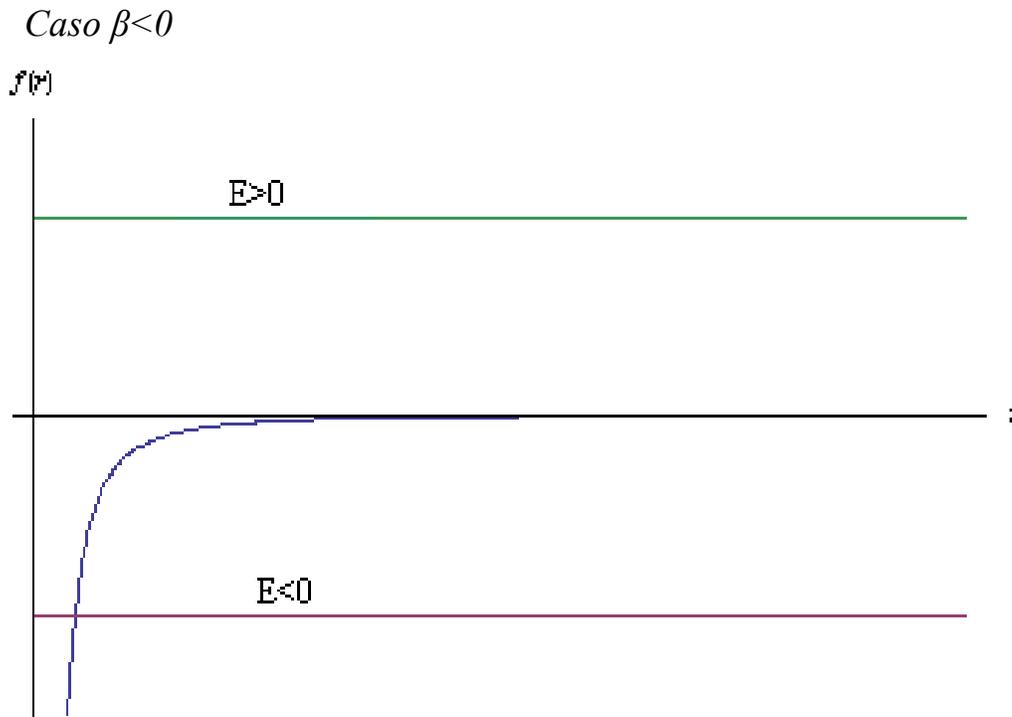


Figura 3.2: Gráfica de $f(r)$ contra r , $\beta < 0$.

De la figura 3.2 y de la condición (3.32) se sigue que son admisibles valores positivos, negativos y cero para E . En este caso, de (3.28) se concluye que $\dot{p}_r < 0$ para todo t ; de modo que se tienen las siguientes posibilidades:

$$E \geq 0$$

Caso $p_r(0) < 0$, debido a que $\dot{p}_r < 0$, se cumple que $p_r < 0$, por lo tanto de acuerdo a (3.25), $r \rightarrow 0$ y $p_r \rightarrow -\infty$ (ecuación (3.22)), la partícula cae al dipolo.

Caso $p_r(0) > 0$, $r \rightarrow \infty$ y $p_r \rightarrow \sqrt{2mE}$, la partícula se aleja del dipolo.

De la ecuación (3.22), se concluye que la condición $p_r(0) = 0$ no es compatible con $\beta < 0$ y $E \geq 0$.

$$E < 0$$

En este caso $r \leq r_1$, donde $r_1 = \sqrt{\beta/2mE}$. Para cualquier valor de $p_r(0)$, $r \rightarrow 0$ y $p_r \rightarrow -\infty$, la partícula cae al dipolo.

Caso $\beta=0$

En este caso, de la ecuación (3.22) se sigue que $E = p_r^2/(2m) \geq 0$, así que p_r es constante. Consideremos el caso $E > 0$, si $p_r(0) < 0$ entonces de acuerdo con (3.25), $r \rightarrow 0$ y según (3.22), $p_r = -\sqrt{2mE}$, la partícula cae al dipolo. Si $p_r(0) > 0$, entonces, $r \rightarrow \infty$ (ecuación (3.25)) con $p_r = \sqrt{2mE}$, la partícula se aleja del dipolo.

Cuando $E = 0$, se cumple $p_r = 0$, y de acuerdo con la ecuación (3.25) $\dot{r} = 0$, por lo que la partícula se mueve sobre la superficie de una esfera con centro en el dipolo y radio r_0 . Este es el único caso con una separación fija entre el dipolo y la partícula, por lo que $E=0$ y $\beta=0$ es una condición necesaria y suficiente para obtener trayectorias con r constante.

Parte angular

Para analizar la parte angular del movimiento introducimos la función

$$g(\theta) = \frac{p_\phi^2}{\text{Sen}^2 \theta} + \frac{mqd \text{Cos} \theta}{2\pi\epsilon_0}. \quad (3.33)$$

En términos de $g(\theta)$ la condición (3.24) queda:

$$g(\theta) \leq \beta \quad (3.34)$$

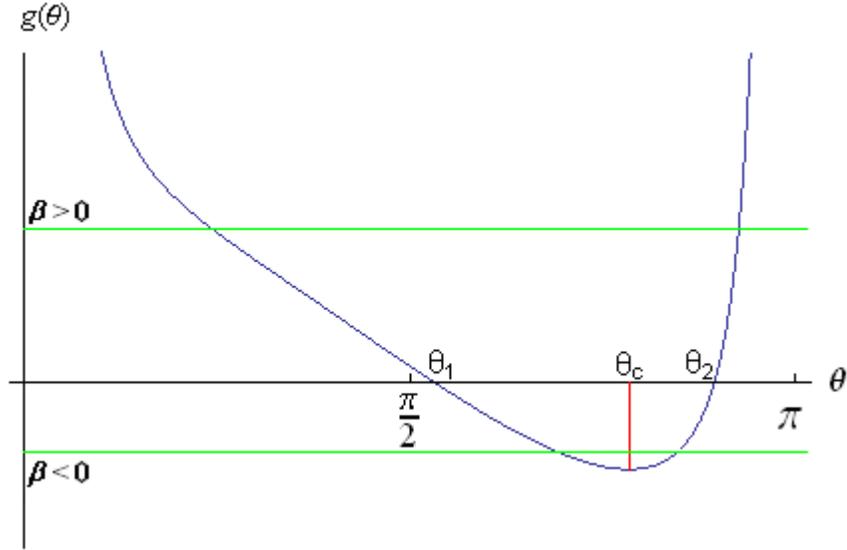


Figura 3.3: Gráfica de $g(\theta)$ contra θ para $q>0$.

La figura (3.3) muestra la gráfica de $g(\theta)$ contra θ en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$ para $q>0$. En esta figura se incluyen rectas correspondientes a diferentes valores de β . El valor mínimo de $g(\theta)$ se presenta en θ_c y está dado por:

$$\text{Cos } \theta_c = -\frac{mqd \text{Sen}^4 \theta_c}{4\pi \epsilon_0 p_\phi^2}. \quad (3.35)$$

Debido a que $\text{Cos } \theta_c \leq 0$, se cumple $\pi/2 \leq \theta_c \leq \pi$.

Consideremos el caso $\beta=0$, de la ecuación (3.34) se sigue que:

$$g(\theta) \leq 0 \quad (3.36)$$

y en particular

$$g(\theta_c) \leq 0, \quad (3.37)$$

en este caso se cumple $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, donde θ_1 y θ_2 se obtienen de la condición

$$g(\theta) = 0, \quad (3.38)$$

esto es

$$\frac{p_\phi^2}{\text{Sen}^2 \theta} + \frac{mqd \text{Cos } \theta}{2\pi \epsilon_0} = 0. \quad (3.39)$$

Haciendo la identificación $p_\phi \equiv L_z$, esta ecuación es formalmente idéntica a la ecuación (2.46) del capítulo 2. Así mediante un análisis similar al realizado en el capítulo 2, concluimos que para $\beta=0$ y $q>0$, los ángulos θ_1 y θ_2 están en el intervalo $\pi/2 < \theta < \pi$ y se cumple que:

$$d > \frac{3\sqrt{3}\pi\epsilon_0 p_\phi^2}{mq} > 0.$$

De este resultado y de la figura 3.3 se concluye que cuando $\beta < 0$, los ángulos θ_1 y θ_2 también quedan en el intervalo $\pi/2 < \theta < \pi$ así que también en este caso el movimiento se realiza en el hemisferio inferior para $q > 0$. Para el caso $\beta > 0$, θ_1 y θ_2 pueden extenderse más allá de este intervalo si el valor de β es suficientemente grande.

3.4 Trayectorias en el espacio fase

En esta sección se representa gráficamente el movimiento de la partícula mediante trayectorias en el espacio fase.

Debido a la separación completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi, cada momento generalizado ha quedado expresado en términos de una sola variable que es la correspondiente coordenada generalizada (ecuaciones (3.18), (3.19), (3.20)). Así el espacio fase de seis dimensiones formado por todos los puntos $(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi)$ se ha desdoblado en tres subespacios, $p_r r$, $p_\theta \theta$ y $p_\varphi \varphi$, cada uno de dimensión dos. Dependiendo de los valores de las constantes de movimiento E, β, p_φ , en cada uno de los subespacios se puede obtener una familia de curvas (llamadas órbitas) que representan el movimiento de la partícula. Las trayectorias en el espacio fase se obtienen mediante la superposición de estas curvas.

A partir de la ecuación (3.18), o de manera equivalente (3.22), podemos obtener las órbitas en el plano $p_r r$ para diferentes valores de E y β . El sentido de las curvas lo obtenemos usando la ecuación (3.25). A partir de la ecuación (3.19), o de manera equivalente (3.21b) podemos obtener las órbitas en el plano $p_\theta \theta$, en este caso el sentido de las curvas lo obtenemos usando la ecuación (3.26). Dado que el momento p_φ se conserva, las órbitas en el plano $p_\varphi \varphi$ resulta ser rectas horizontales.

A continuación, los casos analizados en la sección 3.3 se representan para las correspondientes valores de las constantes de movimiento E, β, p_φ mediante las órbitas correspondientes en los planos $p_r r, p_\theta \theta, p_\varphi \varphi$ (figuras 3.4 – 3.12).

Caso $\beta > 0, E > 0$

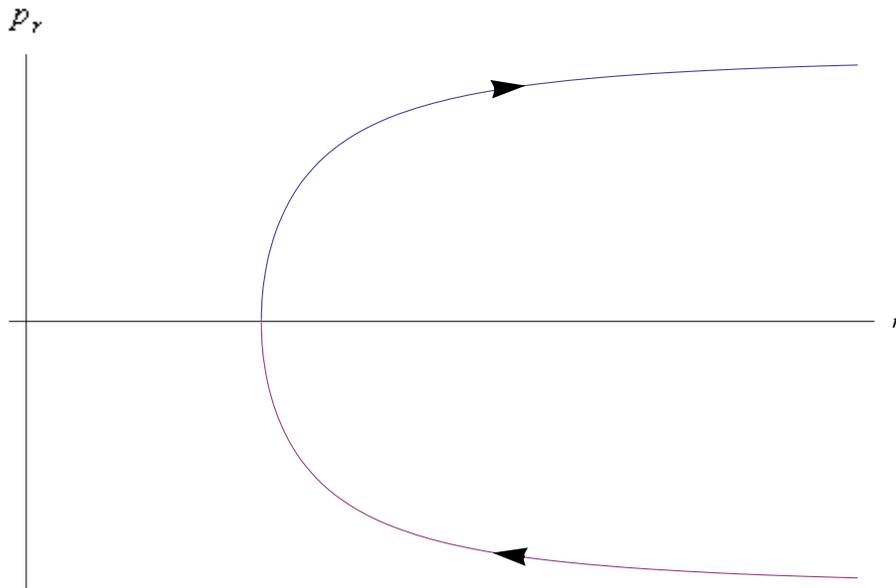


Figura 3.4. Órbita en el plano p_r r para el caso $\beta > 0$ y $E > 0$. Se observa que $r \geq r_1 = \sqrt{\beta/2mE}$. Tanto para $p_r(0) > 0$ como para $p_r(0) < 0$, $r \rightarrow \infty$ y $p_r \rightarrow \sqrt{2mE}$.

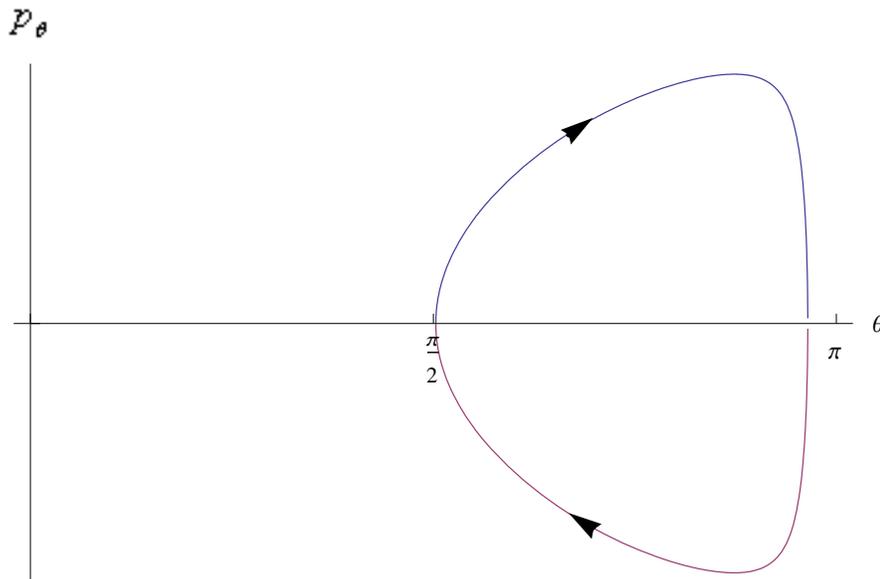


Figura 3.5. Órbita en el plano p_θ θ para el caso $\beta > 0$. La curva es cerrada, el sentido de ésta se obtiene de la ecuación (3.26). Para este valor de β , θ se encuentra en el intervalo $\pi/2 < \theta < \pi$.

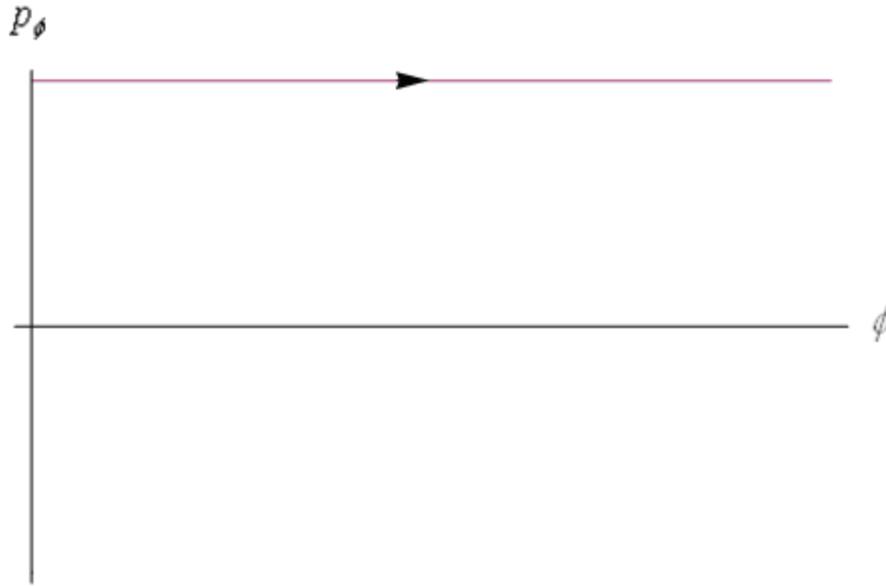


Figura 3.6. Órbita en el plano p_ϕ ϕ para el caso $p_\phi > 0$. El sentido de ésta se obtiene de la ecuación (3.27).

Caso $\beta < 0$, $E > 0$

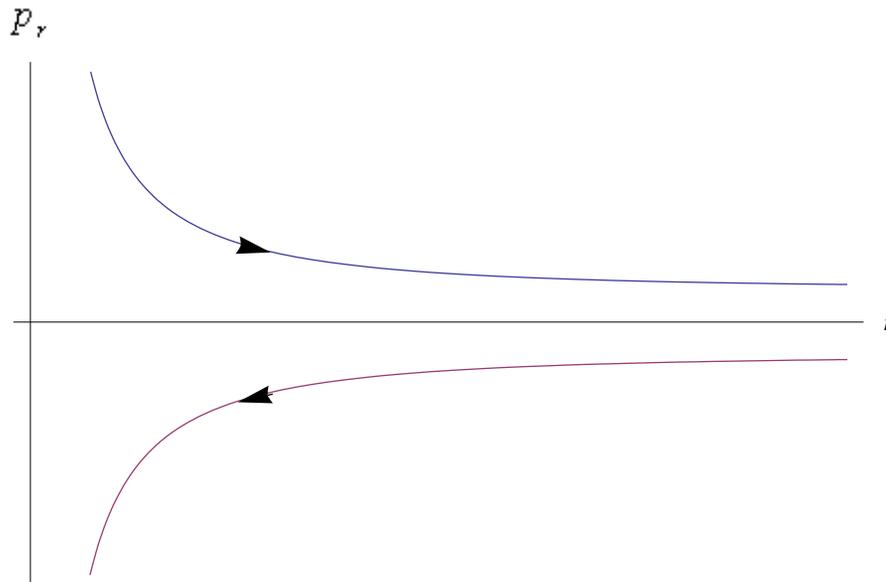


Figura 3.7. Órbita en el plano p_r r para el caso $\beta < 0$ y $E > 0$. Para $p_r(0) > 0$, $r \rightarrow \infty$ y $p_r \rightarrow \sqrt{2mE}$, la partícula se aleja del dipolo. Para $p_r(0) < 0$, $r \rightarrow 0$ y $p_r \rightarrow -\infty$, la partícula cae al dipolo. El momento generalizado debe cumplir $p_r > |\sqrt{2mE}|$.

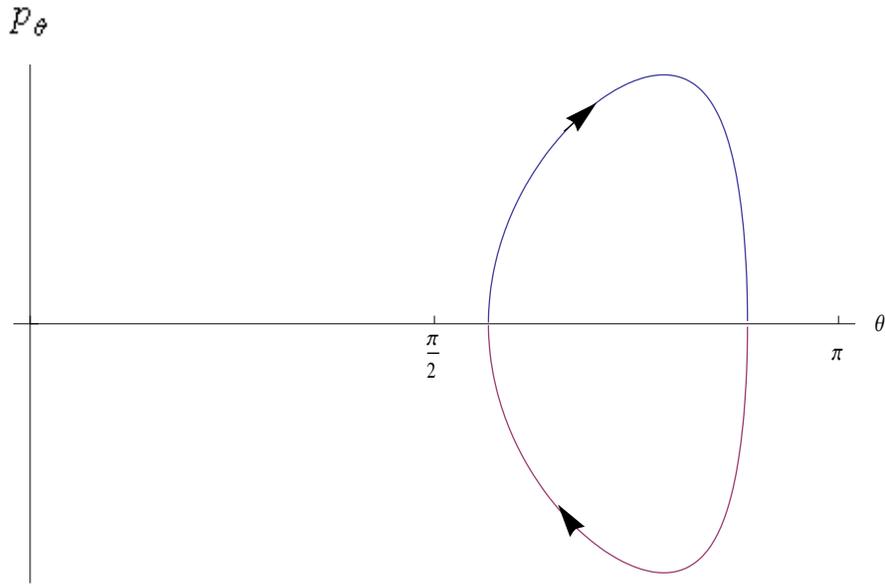


Figura 3.8. Órbita en el plano $p_\theta \theta$ para el caso $\beta < 0$ (el cual corresponde en este caso al mismo valor de β del *Caso* $\beta < 0, E < 0$). La curva es cerrada, el sentido de ésta se obtiene de la ecuación (3.26). Para este valor de β , θ se encuentra en el intervalo $\pi/2 < \theta < \pi$.

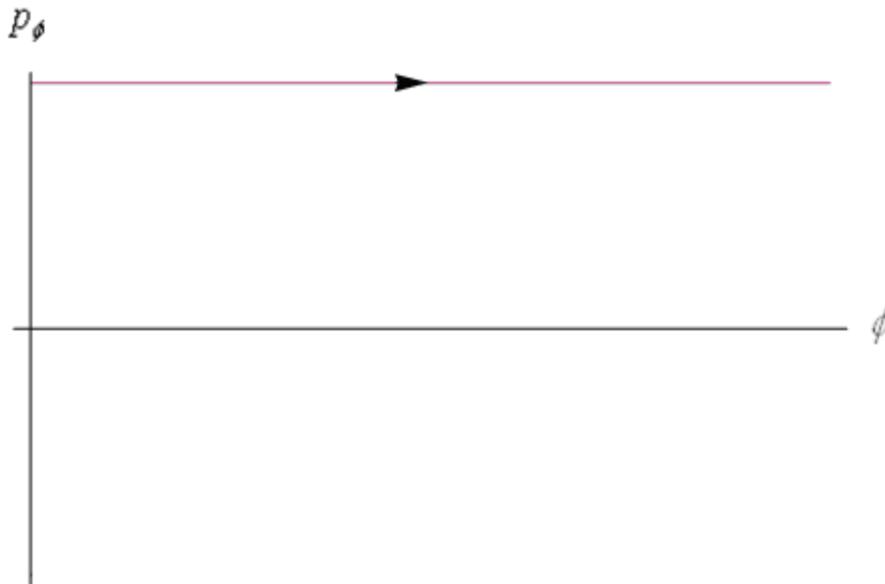


Figura 3.9. Órbita en el plano $p_\phi \phi$ para el caso $\beta < 0$. El sentido de la curva se obtiene de la ecuación (3.27).

Caso $\beta < 0, E < 0$

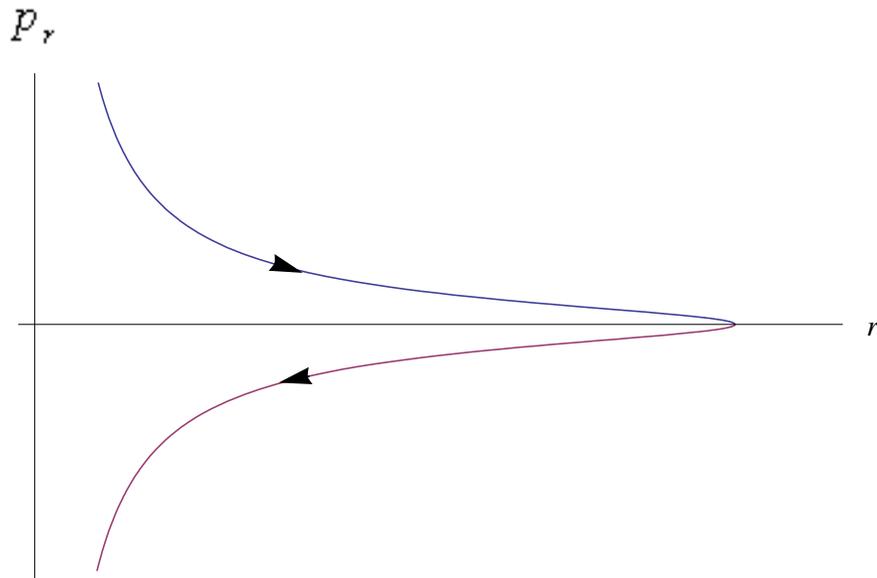


Figura 3.10. Órbita en el plano p_r r para el caso $\beta < 0$ y $E < 0$. Se observa que $r \leq r_1 = \sqrt{\beta/2mE}$. Para cualquier valor de $p_r(0)$, $r \rightarrow 0$ y $p_r \rightarrow -\infty$, la partícula cae al dipolo.

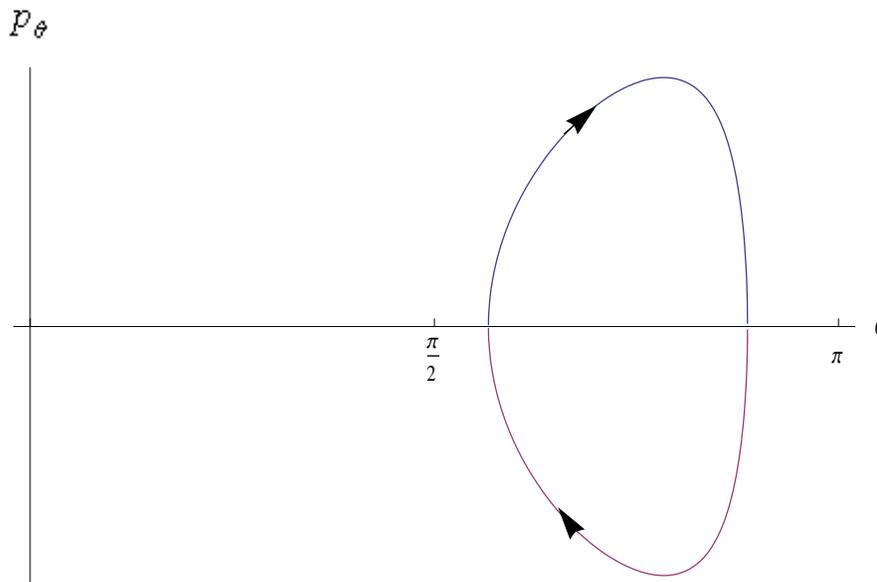


Figura 3.11. Órbita en el plano p_θ θ para el caso $\beta < 0$ (el cual corresponde en este caso al mismo valor de β del *Caso $\beta < 0, E > 0$*). La curva es cerrada, el sentido de ésta se obtiene de la ecuación (3.26). Para este valor de β , θ se encuentra en el intervalo $\pi/2 < \theta < \pi$.

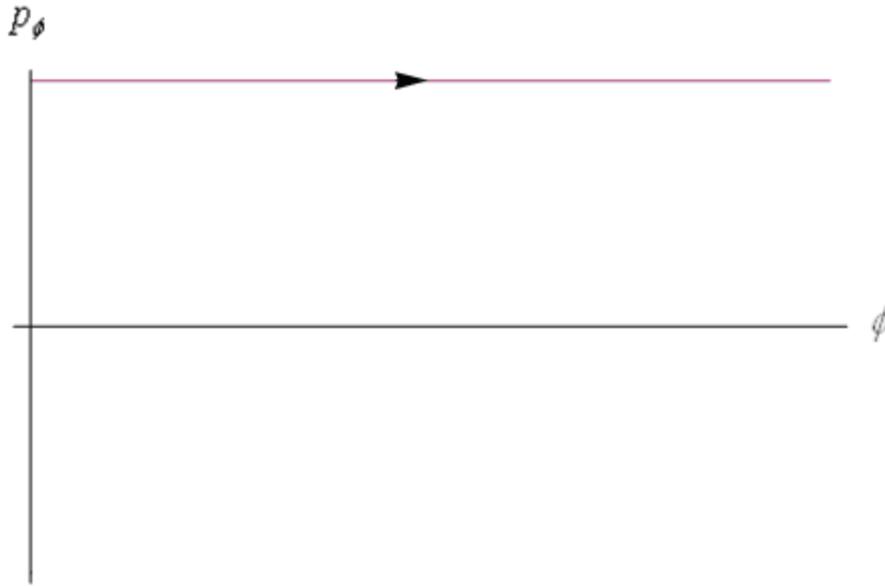


Figura 3.12. Órbita en el plano $p_\phi \phi$ para el caso $\beta < 0$. El sentido se obtiene de la ecuación (3.27).

3.5 Órbitas de la partícula.

A partir de la ecuación (3.18) obtenemos la familia de curvas en el plano $p_r r$ para diferentes valores de las constantes β y E (figuras 3.13 – 3.15) y a partir de la ecuación (3.19) obtenemos la familia de curvas en el plano $p_\theta \theta$ para diferentes valores de las constantes β y p_ϕ (figura 3.16).

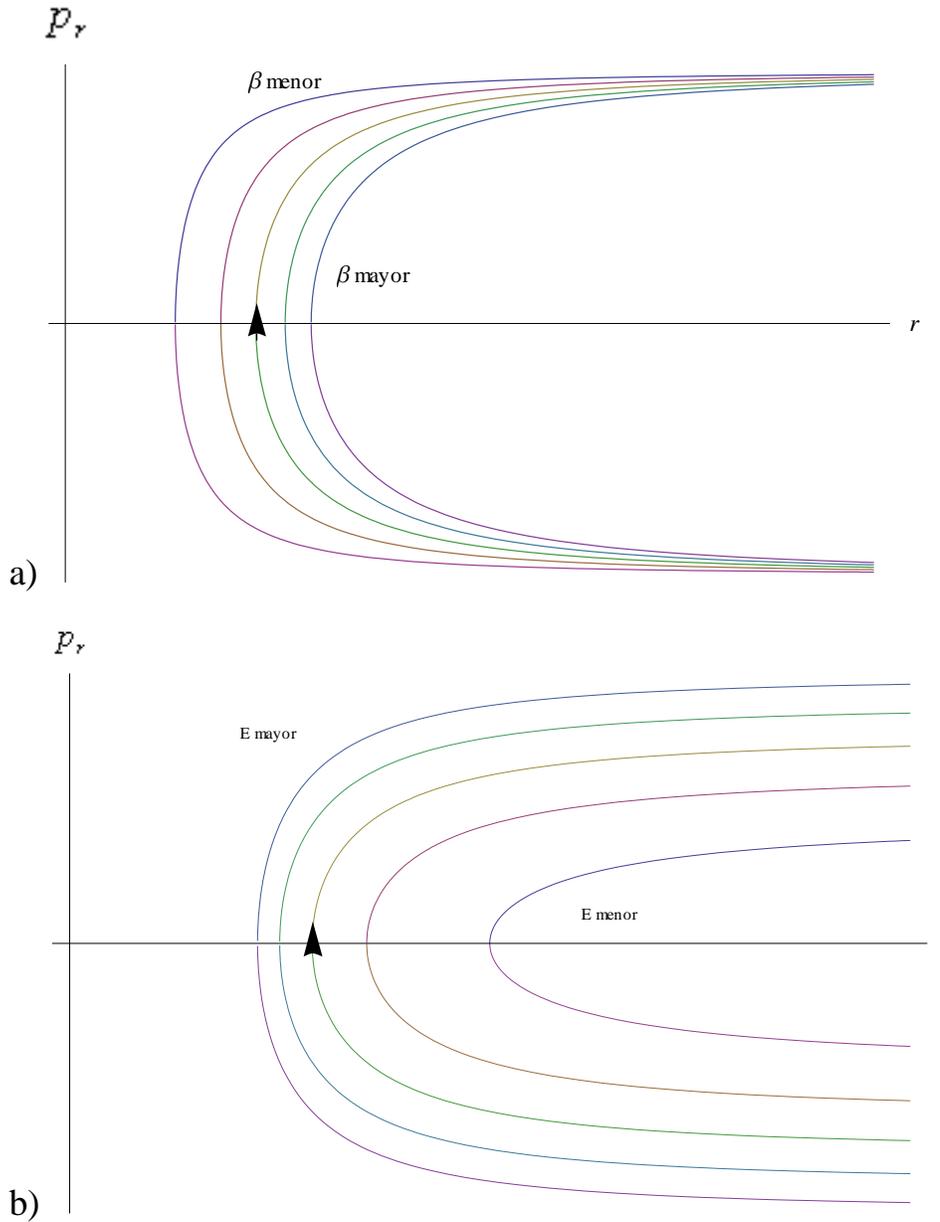


Figura 3.13 a) Órbitas en el plano p_r r con diferentes valores de $\beta > 0$ y un valor fijo de $E > 0$. El valor mínimo de r , $r_1 = \sqrt{\beta/2mE}$, varía con β de curva a curva. El valor límite $p_r = \sqrt{2mE}$ cuando $r \rightarrow \infty$ es el mismo para todas las órbitas. b) Órbitas en el plano p_r r para diferentes valores de $E > 0$ y un valor fijo de $\beta > 0$. El valor mínimo de r , $r_1 = \sqrt{\beta/2mE}$, varía con E de curva a curva. El valor límite $p_r = \sqrt{2mE}$ cuando $r \rightarrow \infty$ varía con E de curva a curva.

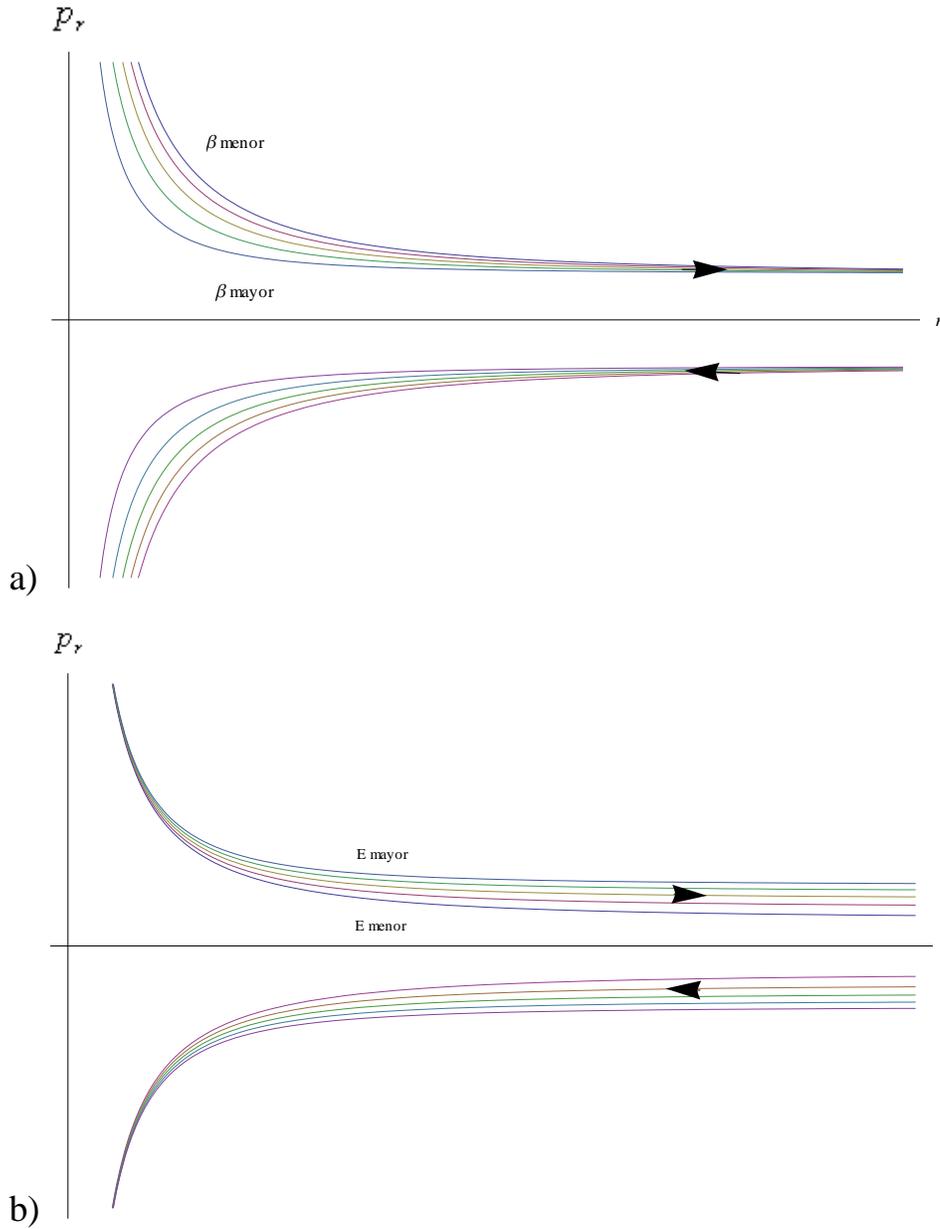


Figura 3.14 a) Órbitas en el plano $p_r r$ con diferentes valores de $\beta < 0$ y un valor fijo de $E \geq 0$. Si $p_r(0) > 0$, $r \rightarrow \infty$, y $p_r \rightarrow \sqrt{2mE}$ es el mismo valor límite para todas las curvas. Si $p_r(0) < 0$, $r \rightarrow 0$, y $p_r \rightarrow -\infty$ para todas las curvas. b) Órbitas en el plano $p_r r$ con diferentes valores de $E \geq 0$ y un valor fijo de $\beta < 0$. Si $p_r(0) > 0$, $r \rightarrow \infty$, y $p_r \rightarrow \sqrt{2mE}$ diferente valor límite para cada curva. Si $p_r(0) < 0$, $r \rightarrow 0$, y $p_r \rightarrow -\infty$ para todas las curvas.

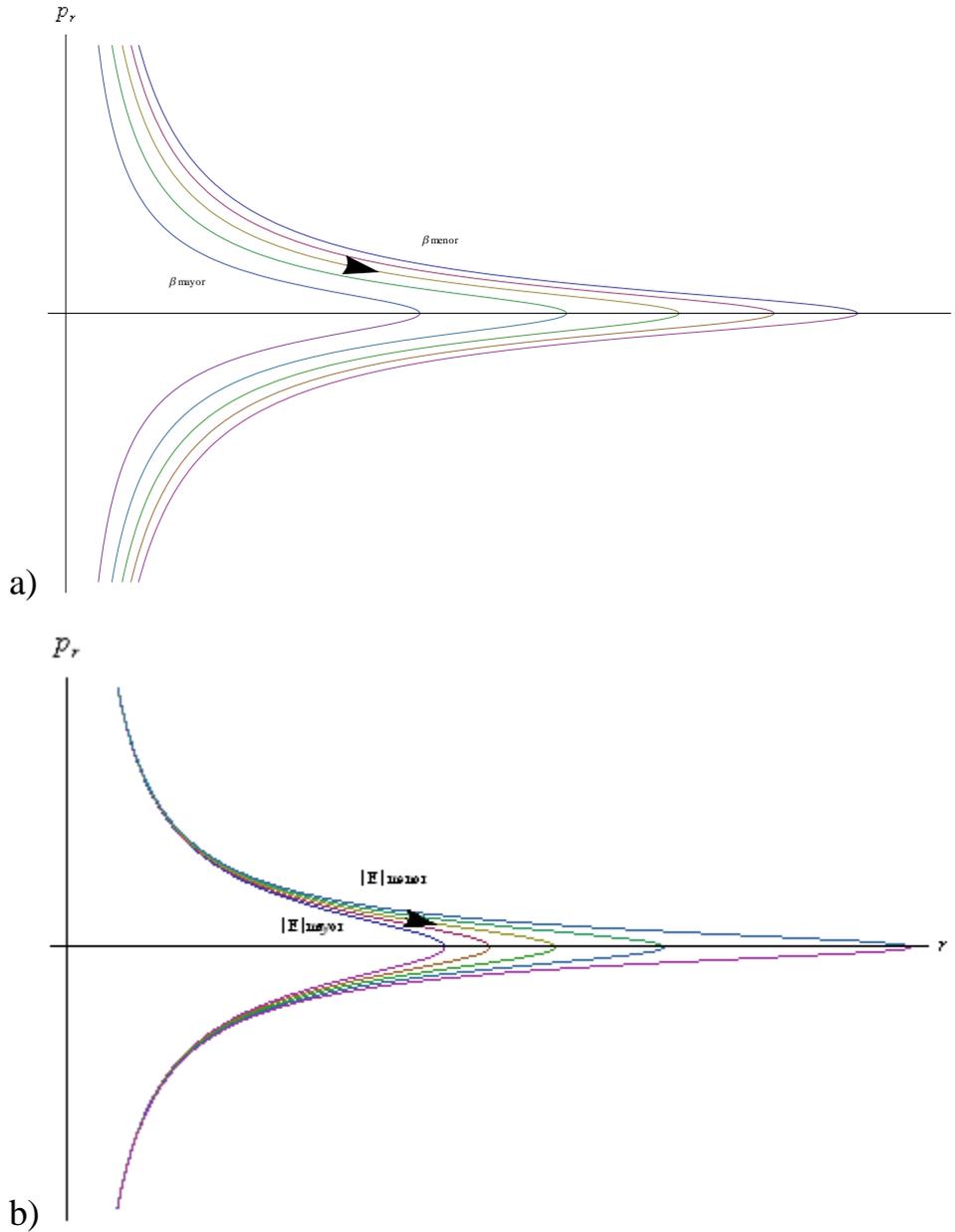


Figura 3.15 a) Órbitas en el plano p_r r con diferentes valores de $\beta < 0$ y un valor fijo de $E < 0$. El valor máximo de r dado por $r_1 = \sqrt{\beta/2mE}$, varía con β de curva a curva. Para todas las curvas $r \rightarrow 0$ y $p_r \rightarrow -\infty$. b) Órbitas en el plano p_r r para diferentes valores de $E < 0$ y un valor fijo de $\beta < 0$. El valor máximo de r dado por $r_1 = \sqrt{\beta/2mE}$, varía con E de curva a curva.

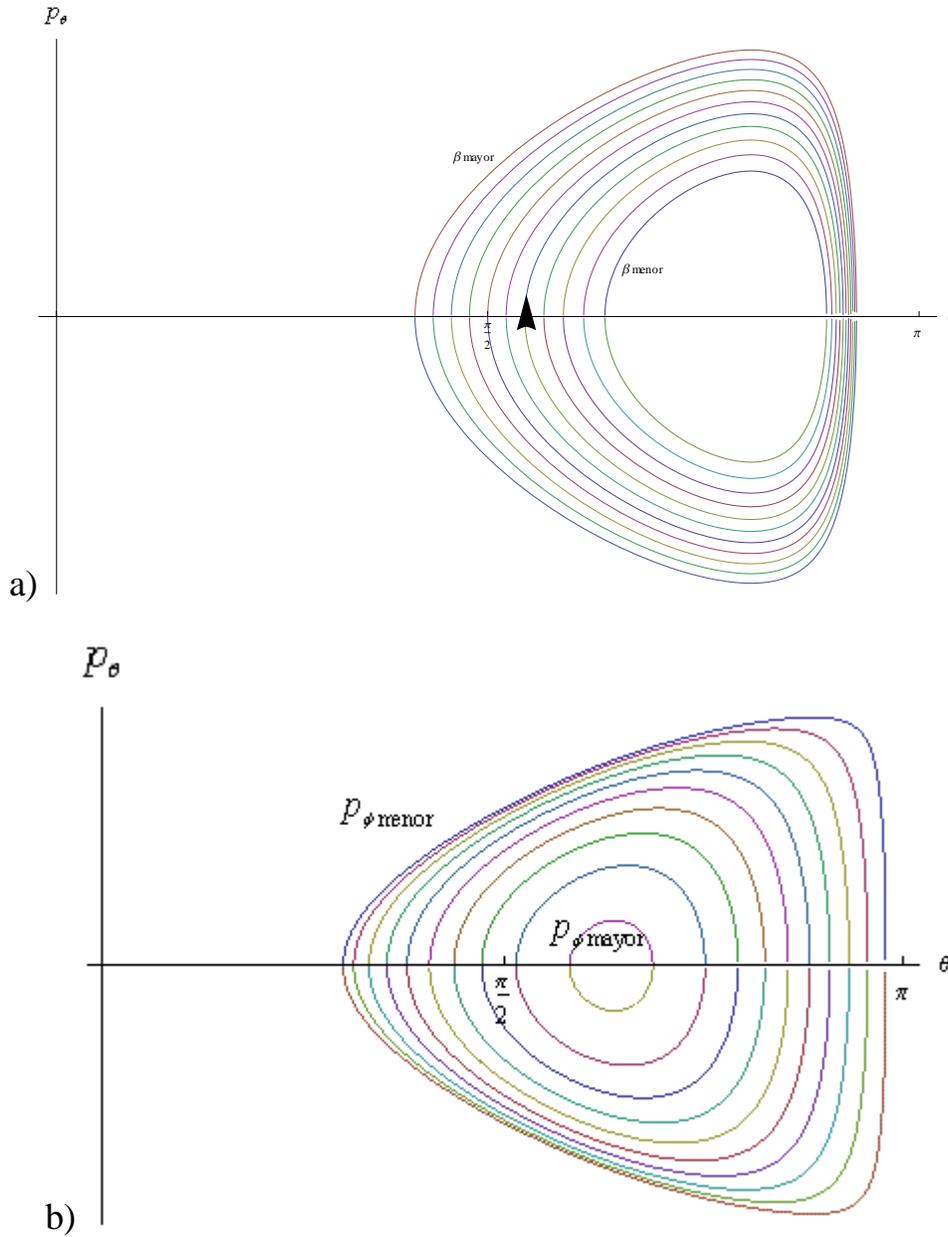


Figura 3.16 a) Órbitas en el plano $p_\theta \theta$ para diferentes valores de β y el mismo valor de p_ϕ . A medida que β aumenta, se amplían los intervalos en los que varían p_θ y θ . Las curvas son cerradas, ésto indica que la parte angular θ del movimiento es oscilatoria. b) Órbitas en el plano $p_\theta \theta$ para diferentes valores de p_ϕ para un valor de β . A medida que p_ϕ aumenta, los intervalos en los que varía θ se hacen más pequeños.

Conclusiones

1. El movimiento de una partícula cargada en el campo de un dipolo puntual, en general se realiza en tres dimensiones, salvo en algunos casos especiales en los cuales la trayectoria de la partícula está contenida en un plano o en la superficie de una esfera; ésto es consecuencia del carácter no central del campo.

2. La existencia de una tercera constante de movimiento β además de la energía total y de la componente del momento angular a lo largo del dipolo, representa una herramienta adicional para determinar las propiedades más importantes del movimiento de una carga en el campo de un dipolo.

3. En la formulación Newtoniana de la Mecánica Clásica, se determinan las regiones clásicas en las que se mueve la partícula, mediante las tres constantes de movimiento, sin necesidad de resolver ninguna ecuación diferencial; los resultados que se obtienen son más completos que los obtenidos en trabajos basados en un enfoque directo con las ecuaciones de movimiento.

4. El único caso en el que la partícula no se aleja indefinidamente del dipolo o bien cae a éste, es aquel en el que la energía y la constante β se anulan. En este caso la distancia entre la partícula y el dipolo permanece constante; la trayectoria de la partícula está contenida en la superficie de una esfera con centro en el dipolo. Si la carga es positiva (negativa) la trayectoria de la partícula está contenida en el hemisferio inferior (superior). Una condición necesaria para la existencia de estas trayectorias es un valor mínimo para el momento dipolar, dadas las condiciones iniciales.

5. En el caso de trayectorias sobre una esfera, el movimiento de la carga es como el de un péndulo esférico con energía cero. Además, la trayectoria de la partícula es similar a la curva que se obtiene al proyectar sobre una esfera unitaria el eje de simetría de un trompo que se mueve con precesión monótona.

6. En la formulación de Hamilton-Jacobi, la constante de movimiento β aparece como una constante de separación al resolver la Ecuación de Hamilton-Jacobi por el método de separación de variables. El espacio fase de seis dimensiones de la partícula, se desdobra en tres subespacios de dos dimensiones cada uno; de modo que se pueden trazar tres familias de curvas (órbitas), una en cada uno de estos subespacios, parametrizadas por las tres constantes de movimiento, la energía E , β y el momento generalizado p_φ . Las propiedades más importantes del movimiento se obtienen a partir de las características geométricas de las órbitas.

Bibliografía

- ¹ K. Fox, “Classical motion of an electron in an electric-dipole field II. Point dipole case,” *J. Phys. A* **1**(1), 124-127 (1968).
- ² George C. McGuire, “Using computer algebra to investigate the motion of an electric charge in magnetic and electric dipole fields,” *Am. J. Phys.* **71**(8), 809-812 (2003).
- ³ Marcelo Alonso, “Motion of an electric charge in the field of an electric dipole,” *Am. J. Phys.* **72**(1), 10 (2004).
- ⁴ Kevin Connolly and David J. Griffiths, “Critical dipoles in one, two and three dimensions,” *Am. J. Phys.* **75**(6), 524-531 (2007).
- ⁵ Sergio Gutiérrez, Arnulfo Castellanos and Rodrigo Arturo Rosas, “A new constant of motion for an electric charge acted on by a point electric dipole,” *Am. J. Phys.* **76**(12), 1141-1146 (2008).
- ⁶ Stephen T. Thornton and Jerry B. Marion, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 5th ed. (Thomson Brooks/Cole, Belmont, CA, 2004), pp. 454-460.
- ⁷ Keith R. Symon, *Mechanics*, 3rd ed. (Addison-Wesley, Reading, MA, 1971), pp. 380-385.
- ⁸ Randall S. Jones, “Circular motion of a charged particle in a electric dipole field,” *Am. J. Phys.* **63**(11), 1042-1043 (1995)
- ⁹ L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Mecánica*, 2a ed. (Reverté, S.A., 1978), pp. 177-181.