



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES PROGRAMA DE LICENCIATURA EN FÍSICA

"Oscilador Armónico en Segunda Cuantización"

T E S I S

Que para obtener el título de:
Licenciado en Física

Presenta:

Doribel Corral López

Director de Tesis:

Dr. Rodrigo Arturo Rosas Burgos

Hermosillo, Sonora

Enero, 2015

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

Contenido

Introducción	1
Capítulo 1. Oscilador Armónico Simple	3
Capítulo 2. Segunda Cuantización	9
2.1 Formulación lagrangiana clásica	9
2.2 Formulación lagrangiana para campos	10
2.3 Procedimiento de segunda cuantización	13
2.4 Ejemplo de Segunda Cuantización	16
Capítulo 3. Osciladores armónicos acoplados	22
3.1 Oscilador armónico simple	22
3.2 Osciladores Acoplados	28
Conclusiones	42
Apéndices	44
A.1 Relación de Baker-Campbell-Hausdorff	44
A.2 Obtención de la expresión para el operador de compresión	45
A.3 Ejemplos adicionales	46
Bibliografía	52

Introducción

En mecánica cuántica se estudian problemas en donde se encuentran soluciones a la ecuación de Schrödinger para encontrar funciones propias que contienen información relevante del sistema, como es la energía y la posición de la partícula. Los valores de la energía son llamados “valores propios” y cuando el espectro de energía es discreto se dice que la energía está cuantizada; a este formalismo se le conoce como “Primera Cuantización”. Esto es válido cuando tenemos problemas de una sola partícula tales como el oscilador armónico simple, una partícula confinada en un pozo de potencial infinito, etc.

Ahora, es también importante e interesante estudiar sistemas de muchas partículas idénticas, un campo de partículas con presencia de interacciones arbitrarias, etc. Para abordar este tipo de sistemas resulta conveniente considerar a la función de onda como un operador, el cual nos permita conocer cuántas partículas hay en un estado determinado, así como su energía. A este formalismo se le conoce como “Segunda Cuantización”.

En el primer capítulo de este trabajo se hace una revisión breve del oscilador armónico cuántico, donde se expresa el hamiltoniano en función de operadores, que son llamados operadores de creación y aniquilación. Se presentan las propiedades y la forma de actuar sobre los estados cuánticos de un sistema.

Ya que hemos recordado estos operadores, en el segundo capítulo estudiamos lo que es la segunda cuantización en la mecánica cuántica, donde se parte de la formulación lagrangiana clásica, después se pasa a la formulación lagrangiana para campos, donde se consideran campos fermiónicos y campos bosónicos, para posteriormente hacer la cuantización de estos campos. Para concluir este capítulo se presenta un ejemplo de cómo se puede utilizar la teoría de segunda cuantización para estudiar una línea elástica donde escribimos el hamiltoniano del sistema en función de operadores.

En el tercer capítulo se presenta un sistema de dos osciladores acoplados, introduciéndose la definición de dos operadores interesantes, el operador de desplazamiento y el operador de compresión. Se estudian luego dos casos específicos, el primero es un sistema optomecánico con acoplamiento lineal y el segundo es un sistema optomecánico con acoplamiento cuadrático.

Finalmente se incluyen las conclusiones de este trabajo.

Capítulo 1. Oscilador Armónico Simple

En mecánica cuántica se estudian problemas como el de una partícula sujeta a un potencial y el problema del Oscilador Armónico, entre otros. Se resuelve la ecuación de Schrödinger para encontrar las funciones propias y el espectro de energía del sistema. Para la mecánica cuántica, se manejan operadores para resolver la ecuación de Schrödinger y así poder encontrar el espectro de energía del sistema, estos operadores son llamado operadores de creación y aniquilación, los cuales nos indican cuando en un estado se “crea” o se “aniquila” una partícula.

La mayoría de los problemas con un potencial, que presentan un mínimo, se pueden modelar como un problema de potencial del oscilador armónico, que es uno de los problemas más comunes o más estudiados en la mecánica cuántica.

Empecemos por considerar un oscilador de masa m y frecuencia ω_m , que es descrito por el hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_m^2\hat{q}^2$$

donde \hat{q} y \hat{p} son los operadores de posición y momento, respectivamente, los cuales cumplen con la siguiente relación de conmutación:

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \tag{1.1}$$

Una forma de estudiar este problema es utilizando el método de factorización, para lo cual es necesario realizar las siguientes transformaciones:

$$\hat{q} = q_0(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \quad ; \quad \hat{p} = ip_0(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \tag{1.2}$$

donde

$$q_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_m}}; \quad p_0 = \sqrt{\frac{1}{2}\hbar m\omega_m} \tag{1.3}$$

Si se introduce la ecuación (1.2) en la ecuación (1.1), se obtiene una relación de

conmutación para los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger (descenso y ascenso)

$$\begin{aligned}
 [\hat{q}, \hat{p}] &= [q_0(\hat{a}^\dagger + \hat{a}), ip_0(\hat{a}^\dagger - \hat{a})] = \frac{i\hbar}{2} [(\hat{a}^\dagger + \hat{a}), (\hat{a}^\dagger - \hat{a})] \\
 &= \frac{i\hbar}{2} ([\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] - [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] + [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] - [\hat{a}, \hat{a}]) \\
 &= i\hbar [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = i\hbar
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

por lo tanto,

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

(que se conoce como operador identidad). Estos operadores actúan sobre un espacio de Fock que consiste en una colección de kets dados por $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots\}$ para cada frecuencia, tal que $|0\rangle$ es el estado de cero partículas y $|n\rangle$ el estado de n partículas. Los operadores \hat{a}^\dagger y \hat{a} ya no se interpretan como operadores de ascenso y descenso, sino como operadores de creación y aniquilación de partículas.

Usando la ecuación (1.2) el hamiltoniano puede reescribirse en función de los operadores de creación y aniquilación:

$$\begin{aligned}
 \hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_m^2\hat{q}^2 \\
 &= \frac{1}{2m} \left[-\frac{1}{2}\hbar m\omega_m(\hat{a}^\dagger - \hat{a})^2 \right] + \frac{1}{2}m\omega_m^2 \left[\frac{\hbar}{2m\omega_m}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})^2 \right] \\
 &= \frac{1}{4}\hbar\omega_m(2\hat{a}\hat{a}^\dagger + 2\hat{a}^\dagger\hat{a}) = \frac{1}{2}\hbar\omega_m(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a})
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

y como

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1 \implies \hat{a}\hat{a}^\dagger = 1 + \hat{a}^\dagger\hat{a} \tag{1.6}$$

entonces

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega_m(1 + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}) = \frac{1}{2}\hbar\omega_m(1 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a}) \tag{1.7}$$

por lo que

$$\hat{H} = \hbar\omega_m \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right) \tag{1.8}$$

Los operadores de creación \hat{a}^\dagger y aniquilación \hat{a} no son auto-adjuntos, pero sí son adjuntos uno del otro, es decir,

$$\begin{aligned}
 (\hat{a}^\dagger)^\dagger &= \hat{a} \\
 (\hat{a})^\dagger &= \hat{a}^\dagger
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

El efecto de estos dos operadores cuando actúan sobre un estado propio $|n\rangle$ del hamiltoniano es:

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad \hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (1.10)$$

de aquí puede verse que los elementos de matriz de los operadores \hat{a}^\dagger y \hat{a} son

$$\begin{aligned} \langle m | \hat{a}^\dagger | n \rangle &= \sqrt{n+1} \delta_{m,n+1} \\ \langle m | \hat{a} | n \rangle &= \sqrt{n} \delta_{m,n-1} \end{aligned} \quad (1.11)$$

ya que

$$\langle m | n \rangle = \delta_{m,n} \quad (1.12)$$

Al aplicar el producto de los operadores de creación y aniquilación, $\hat{a}^\dagger \hat{a}$, sobre un estado propio $|n\rangle$ se obtiene

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = \hat{a}^\dagger \sqrt{n} |n-1\rangle = \sqrt{n} \hat{a}^\dagger |n-1\rangle = n |n\rangle \quad (1.13)$$

donde $\hat{a}^\dagger \hat{a} = \hat{N}$ es llamado operador de número.

Ahora, si consideramos dos operadores \hat{a}_j y \hat{a}_i tales que actúan sobre los estados j e i , respectivamente, entonces, la relación de conmutación es

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_i^\dagger] = \delta_{j,i} \quad (1.14)$$

Se necesita una expresión distinta de (1.14) cuando se trata de un sistema donde las partículas son fermiones, ya que estas partículas cumplen con el principio de exclusión de Pauli, el cual establece que no pueden existir dos fermiones idénticos en un mismo estado cuántico.

Vamos a considerar los estados $|n\rangle$ en los cuales las partículas están en el nivel más bajo de energía, con spin "hacia arriba". Por el principio de exclusión de Pauli, los únicos estados posibles son $|1\rangle$ y $|0\rangle$.

Los operadores de creación y aniquilación actúan sobre los estados $|1\rangle$ y $|0\rangle$ de la siguiente manera:

$$\hat{a} |0\rangle = 0, \quad \hat{a}^\dagger |0\rangle = |1\rangle \quad (1.15)$$

$$\hat{a} |1\rangle = |0\rangle, \quad \hat{a}^\dagger |1\rangle = 0 \quad (1.16)$$

La condición $\hat{a}^\dagger |1\rangle = 0$, nos garantiza que se cumpla el principio de exclusión de

Pauli.

Además se cumple que

$$\begin{aligned}\hat{a}^2 |1\rangle &= \hat{a}\hat{a} |1\rangle = \hat{a} |0\rangle = 0 \\ (\hat{a}^\dagger)^2 |0\rangle &= 0\end{aligned}\tag{1.17}$$

Al aplicar el operador de número \hat{N} sobre estos estados resulta:

$$\begin{aligned}\hat{N} |1\rangle &= \hat{a}^\dagger \hat{a} |1\rangle = \hat{a}^\dagger |0\rangle = |1\rangle \\ \hat{N} |0\rangle &= 0\end{aligned}\tag{1.18}$$

Análogamente, para bosones, los cuales no están obligados a cumplir con el principio de exclusión de Pauli, los operadores de creación y aniquilación actúan de la manera indicada en (1.10), es decir,

$$\begin{aligned}\hat{a} |n\rangle &= \sqrt{n} |n-1\rangle \\ \hat{a}^\dagger |n\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle\end{aligned}\tag{1.19}$$

para cualquier estado propio.

Así, la propiedad de identidad de los operadores para el caso de bosones queda como

$$\begin{aligned}[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= 1 \\ [\hat{a}, \hat{a}] &= [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0\end{aligned}\tag{1.20}$$

Mientras que para fermiones se tiene

$$\begin{aligned}\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} &= 1 \\ \{\hat{a}, \hat{a}\} &= \{\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger\} = 0\end{aligned}\tag{1.21}$$

donde

$$\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} = \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}$$

es llamado el anticonmutador.

Consideraremos partículas que son bosones, que puedan ocupar más de un nivel de energía. Supongamos dos niveles, ϕ_0 y ϕ_1 ; tenemos n_0 partículas en el nivel ϕ_0 y n_1 partículas en el nivel ϕ_1 . Denotemos este estado como $|n_0, n_1\rangle$.

Introducimos ahora los operadores de creación y aniquilación \hat{a}_0 y \hat{a}_0^\dagger que actúan sobre

las n_0 partículas, y los operadores \hat{a}_1 y \hat{a}_1^\dagger que actúan sobre las n_1 partículas; entonces

$$\hat{a}_0 |n_0, n_1\rangle = \sqrt{n_0} |n_0 - 1, n_1\rangle, \quad \hat{a}_0^\dagger |n_0, n_1\rangle = \sqrt{n_0 + 1} |n_0 + 1, n_1\rangle \quad (1.22)$$

$$\hat{a}_1 |n_0, n_1\rangle = \sqrt{n_1} |n_0, n_1 - 1\rangle, \quad \hat{a}_1^\dagger |n_0, n_1\rangle = \sqrt{n_1 + 1} |n_0, n_1 + 1\rangle \quad (1.23)$$

Como para bosones no existe diferencia de cómo se agregan o se eliminan partículas, entonces los operadores \hat{a}_0 , \hat{a}_0^\dagger , \hat{a}_1 y \hat{a}_1^\dagger conmutan.

El estado $|n_0, n_1\rangle$ puede obtenerse a partir del "vacío" $|0, 0\rangle$ si se aplican los operadores \hat{a}_0^\dagger y \hat{a}_1^\dagger n_0 y n_1 veces, respectivamente, por lo que

$$|n_0, n_1\rangle = \frac{(\hat{a}_0^\dagger)^{n_0} (\hat{a}_1^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_0!} \sqrt{n_1!}} |0, 0\rangle \quad (1.24)$$

Como tenemos dos estados cuánticos, definiremos los operadores de número para cada estado como sigue:

$$\hat{N}_0 = \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \quad ; \quad \hat{N}_1 = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \quad (1.25)$$

Por lo que el operador de número total es

$$\hat{N} = \hat{N}_0 + \hat{N}_1 = \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \quad (1.26)$$

Para el caso de fermiones que ocupan los niveles ϕ_0 y ϕ_1 los únicos estados $|n_0, n_1\rangle$ posibles son

$$|0, 0\rangle \quad ; \quad |1, 0\rangle \quad ; \quad |0, 1\rangle \quad ; \quad |1, 1\rangle \quad (1.27)$$

Al aplicar los operadores de creación y aniquilación sobre estos estados se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{a}_0^\dagger |0, 0\rangle &= |1, 0\rangle, & \hat{a}_0 |0, 0\rangle &= 0 \\ \hat{a}_0^\dagger |1, 0\rangle &= 0, & \hat{a}_0 |1, 0\rangle &= |0, 0\rangle \\ \hat{a}_0^\dagger |0, 1\rangle &= -|1, 1\rangle, & \hat{a}_0 |0, 1\rangle &= 0 \\ \hat{a}_0^\dagger |1, 1\rangle &= 0, & \hat{a}_0 |1, 1\rangle &= -|0, 1\rangle \end{aligned} \quad (1.28)$$

y

$$\begin{aligned} \hat{a}_1^\dagger |0, 0\rangle &= |0, 1\rangle \quad ; \quad \hat{a}_1 |0, 0\rangle = 0 \\ \hat{a}_1^\dagger |1, 0\rangle &= |1, 1\rangle \quad ; \quad \hat{a}_1 |1, 0\rangle = 0 \\ \hat{a}_1^\dagger |0, 1\rangle &= 0 \quad ; \quad \hat{a}_1 |0, 1\rangle = |0, 0\rangle \\ \hat{a}_1^\dagger |1, 1\rangle &= 0 \quad ; \quad \hat{a}_1 |1, 1\rangle = |1, 0\rangle \end{aligned} \quad (1.29)$$

Los dos signos negativos que aparecen en las expresiones anteriores se deben al hecho de que al intercambiar dos fermiones el estado que los describe debe cambiar de signo (antisimetría).

El estado $|n_0, n_1\rangle$ también se puede obtener a partir del estado $|0, 0\rangle$

$$|n_0, n_1\rangle = \left(\hat{a}_1^\dagger\right)^{n_1} \left(\hat{a}_0^\dagger\right)^{n_0} |0, 0\rangle \quad (1.30)$$

donde \hat{a}_0^\dagger actúa primero.

Ahora, consideremos el caso en que las partículas pueden tomar todos los estados cuánticos. En tal caso tendremos n_i partículas en el estado ϕ_i , por lo que el estado será

$$|n_0, n_1, n_2, \dots\rangle \quad (1.31)$$

y los operadores de creación y aniquilación serán \hat{a}_i^\dagger y \hat{a}_i , para cada estado de partícula individual. Entonces los estados se pueden obtener del estado $|0\rangle = |0, 0, 0, \dots\rangle$ de la siguiente manera:

$$|n_0, n_1, n_2, \dots\rangle = \dots \left(\hat{a}_2^\dagger\right)^{n_2} \left(\hat{a}_1^\dagger\right)^{n_1} \left(\hat{a}_0^\dagger\right)^{n_0} |0\rangle \quad (1.32)$$

Para el caso de bosones, tenemos

$$\left[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\right] = \delta_{i,j} \quad (1.33)$$

$$\left[\hat{a}_i, \hat{a}_j\right] = \left[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\right] = 0 \quad (1.34)$$

Para fermiones

$$\left\{\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\right\} = \delta_{i,j} \quad (1.35)$$

$$\left\{\hat{a}_i, \hat{a}_j\right\} = \left\{\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\right\} = 0 \quad (1.36)$$

El estado $|n_0, n_1, n_2, \dots\rangle$ lo escribimos como

$$|n_0, n_1, n_2, \dots\rangle = \dots \frac{\left(\hat{a}_2^\dagger\right)^{n_2} \left(\hat{a}_1^\dagger\right)^{n_1} \left(\hat{a}_0^\dagger\right)^{n_0}}{\sqrt{n_2!} \sqrt{n_1!} \sqrt{n_0!}} |0\rangle \quad (1.37)$$

Tanto para fermiones como para bosones el operador de número es

$$\hat{N} = \sum_i \hat{N}_i = \sum_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$$

También

$$\left[\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j\right] = 0$$

Capítulo 2. Segunda Cuantización

Lo más común es construir la Teoría de Schrödinger en segunda cuantización a partir de la experiencia adquirida con el uso de los operadores de creación y aniquilación del oscilador armónico. Vamos a construir esta teoría partiendo de algunas consideraciones de carácter general y que enriquecerá nuestra visión sobre ella. El punto de partida será la observación de que la ecuación de Schrödinger puede derivarse de una lagrangiana, es decir, que existe una densidad lagrangiana cuyas ecuaciones de movimiento son las ecuaciones de Schrödinger y su adjunta.

2.1 Formulación lagrangiana clásica

En mecánica clásica, un sistema físico está caracterizado por una lagrangiana $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ que está en función de las coordenadas generalizadas del sistema (q_i), de sus derivadas temporales ($\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$) y del tiempo t . La trayectoria clásica del sistema físico para el movimiento desde el punto $q_i(t_1)$ en el tiempo t_1 hasta $q_i(t_2)$ en el tiempo t_2 se obtiene al definir una acción clásica

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$$

Pediremos que esta acción sea estacionaria, esto es, $\delta S = 0$ en un trayecto donde $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$. Así, se obtiene

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L(q_i, \dot{q}_i, t) = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d \delta q_i}{dt} \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, entonces

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta q_i = 0$$

Esta igualdad se cumple para todo δq_i , siempre y cuando se cumpla que

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

que la conocemos como la ecuación de Euler-Lagrange, la cual es la ecuación de movimiento del sistema.

La lagrangiana del sistema está dada por

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_i \left[\frac{1}{2} m \dot{q}_i^2 - V(q_i, t) \right]$$

donde $V(q_i, t)$ es la energía potencial del sistema.

Ahora, considerando que $p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ es la variable canónica conjugada de q_i , puede construirse la hamiltoniana del sistema como

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = \sum_i \left[\frac{p_i^2}{2m} + V(q_i, t) \right]$$

de modo que las ecuaciones de movimiento en su forma hamiltoniana son

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad ; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad ; \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

2.2 Formulación lagrangiana para campos

De forma análoga al caso clásico, y refiriéndonos al campo descrito por la función de onda ψ , introducimos la densidad lagrangiana $\mathcal{L}(\psi, \nabla\psi, \dot{\psi}, t)$, la cual utilizaremos para definir la lagrangiana del sistema, mediante la expresión.[1]

$$L = \int d^3r \mathcal{L}(\psi, \nabla\psi, \dot{\psi}, t)$$

La dependencia sobre $\nabla\psi$ en el argumento de \mathcal{L} es una consecuencia de la variación continua del campo ψ en la variable de posición \mathbf{r} .

Tomando la ecuación de la acción, utilizada en el caso clásico, ésta toma la forma

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \mathcal{L}(\psi, \nabla\psi, \dot{\psi}, t)$$

De igual forma, se pide que la acción sea estacionaria en el intervalo de t_1 y t_2 , con

la condición de frontera $\delta\psi(t_1) = \delta\psi(t_2) = 0$, tenemos

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \delta\mathcal{L} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} \delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} \delta\dot{\psi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla\psi} \delta\nabla\psi \right] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} \delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} \frac{d}{dt} \delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla\psi} \delta\nabla\psi \right] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} \delta\psi + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} \delta\psi \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla\psi} \delta\psi \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} \right) \delta\psi - \left(\nabla \cdot \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla\psi} \right) \delta\psi \right] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} \right) - \left(\nabla \cdot \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla\psi} \right) \right] \delta\psi
\end{aligned}$$

para llegar a la última expresión hemos considerado que

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \int d^3r \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} \delta\psi \right] = \int d^3r \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} \delta\psi \Big|_{t_1}^{t_2}$$

y como se pidió que la acción sea estacionaria, el término anterior se anula.

Así mismo, usando el Teorema de Gauss del cálculo integral el término

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \nabla \cdot \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla\psi} \delta\psi \right] = \int_{t_1}^{t_2} dt \oint d\mathbf{S} \cdot \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla\psi} \delta\psi \right]$$

se anula ya que la integral es sobre una esfera de radio infinito, y los campos deben anularse en el infinito, es decir,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [\delta\psi(\mathbf{r})] = 0$$

Así, considerando que la acción debe de ser estacionaria, el integrando en δS debe anularse, de modo que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} - \nabla \cdot \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla\psi} = 0$$

Esta ecuación debe reproducir la ecuación de movimiento del sistema físico, es decir, reproducir la ecuación de Schrödinger para la función de onda ψ .

De esta manera la densidad lagrangiana la podemos tomar de la forma

$$\mathcal{L} = i\hbar\psi^*\dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi - V(\mathbf{r}, t)\psi^*\psi \quad (2.1)$$

la variable canónica conjugada a $\psi(\mathbf{r}, t)$ será entonces

$$\pi(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = i\hbar\psi^*(\mathbf{r}, t)$$

estas dos expresiones nos sirven para obtener la densidad hamiltoniana a través de la

transformación de Legendre, así

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \pi\dot{\psi} - \mathcal{L} = -\frac{i\hbar}{2m}\nabla\pi \cdot \nabla\psi - \frac{i}{\hbar}V(\mathbf{r},t)\pi\psi \\ &= \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^* \cdot \nabla\psi + V\psi^*\psi\end{aligned}$$

de aquí, obtenemos la hamiltoniana del sistema

$$H = \int d^3r\mathcal{H} = \int d^3r \left[\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^* \cdot \nabla\psi + V\psi^*\psi \right] = \int d^3r\psi^* \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V \right] \psi$$

La expresión final resulta después de realizar una integración por partes en el primer término.

Las ecuaciones de movimiento en su forma hamiltoniana toman la forma

$$\dot{\psi}(\mathbf{r},t) = \frac{\partial H(\psi, \dot{\psi}, \nabla\psi, t)}{\partial \pi(\mathbf{r},t)} \quad ; \quad \dot{\pi}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial H(\psi, \dot{\psi}, \nabla\psi, t)}{\partial \psi(\mathbf{r},t)}$$

Como ψ es una función compleja, es equivalente a dos funciones reales y hay en las ecuaciones dos grados de libertad. Así, tanto ψ como ψ^* son independientes y existen dos ecuaciones de Euler-Lagrange, las cuales son

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \psi} = 0$$

que corresponde a ψ , y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \psi^*} = 0$$

para ψ^* .

Para comprobar si lo que hemos hecho es correcto, usaremos la densidad lagrangiana de la ecuación (2.1), así, usando la ecuación de Euler-Lagrange para ψ^* obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} &= i\hbar\dot{\psi} - V\psi \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \psi^*} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi\end{aligned}$$

Por lo que, sustituyendo en la ecuación de Euler-Lagrange para ψ^* , llegamos a

$$i\hbar\dot{\psi} - V\psi + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla \cdot \nabla\psi = 0$$

o bien

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = i\hbar\dot{\psi} = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

que es la ecuación de Schrödinger.

De manera similar, pero ahora usando la ecuación de Euler-Lagrange para ψ , tenemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -V\psi^* \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\hbar\psi^* \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \psi} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi^*$$

y sustituyendo obtenemos

$$-V\psi^* - i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^* + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^* = 0$$

o bien

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^* + V\psi^* = -i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t}$$

la cual es el complejo conjugado de la ecuación de Schrödinger.

2.3 Procedimiento de segunda cuantización

Al utilizar el procedimiento anterior, se encuentra que al tomar al campo escalar $\psi(\mathbf{r}, t)$ como coordenada generalizada, la densidad del momento canónico conjugado resulta $\pi(\mathbf{r}, t) = i\hbar\psi^*(\mathbf{r}, t)$. El método de segunda cuantización transforma el campo escalar en operador, entonces resulta

$$\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) \quad ; \quad \pi(\mathbf{r}, t) = i\hbar\psi^*(\mathbf{r}, t) \rightarrow \hat{\pi}(\mathbf{r}, t) = i\hbar\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)$$

El punto de partida será la regla de conmutación que satisface la pareja de variables canónicas conjugadas $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$ y $\hat{\pi}(\mathbf{r}, t)$. Como estas reglas de conmutación son diferentes para campos bosónicos y fermiónicos, vamos a estudiarlos por separado.

2.3.1 Cuantización del campo de Schrödinger para bosones

Las reglas de conmutación entre variables canónicas para un campo bosónico son

$$\begin{aligned} \left[\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\pi}(\mathbf{r}', t) \right] &= i\hbar\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ \left[\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) \right] &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ \left[\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}(\mathbf{r}', t) \right] &= \left[\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) \right] = 0 \end{aligned}$$

Hay que tomar en cuenta que los campos están calculados al mismo tiempo, ya que, de no ser así, puede suceder que unos pasen a depender de los otros.

Los campos $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$ satisfacen la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) + V \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathcal{H}} \hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$$

donde $\hat{\mathcal{H}}$ lo consideraremos como una densidad hamiltoniana.

Consideraremos a $u_k(\mathbf{r})$ como los estados propios de $\hat{\mathcal{H}}$, por lo que

$$\hat{\mathcal{H}} u_k(\mathbf{r}) = E_k u_k(\mathbf{r})$$

estos estados constituyen una base ortonormal y nos permiten desarrollar el estado $\hat{\psi}$ en la forma

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_k \hat{a}_k u_k(\mathbf{r}) e^{-iE_k t}$$

Los coeficientes \hat{a}_k tenemos que tomarlos como operadores para dar al campo la estructura de operador. Los \hat{a}_k están dados por

$$\hat{a}_k = \int u_k^*(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) e^{iE_k t} d\mathbf{r}$$

Usamos esto para determinar las reglas de conmutación de los coeficientes \hat{a}_k , tomando en cuenta la ortogonalidad de la base $\{u_k\}$, así

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' u_k^*(\mathbf{r}) u_{k'}(\mathbf{r}') e^{i(E_k - E_{k'})t} [\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', t)]$$

considerando que

$$[\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', t)] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

entonces

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \int u_k^*(\mathbf{r}) u_{k'}(\mathbf{r}) e^{i(E_k - E_{k'})t} d\mathbf{r}$$

y como la base es ortonormal

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}$$

De manera similar

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' u_k^*(\mathbf{r}) u_{k'}^*(\mathbf{r}') e^{i(E_k + E_{k'})t} [\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}(\mathbf{r}', t)]$$

como

$$[\hat{\psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}(\mathbf{r}', t)] = 0$$

entonces

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = 0$$

y de igual manera

$$\left[\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger \right] = 0.$$

El hamiltoniano del sistema lo definimos como

$$\hat{H} \equiv \int \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\mathcal{H}} \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}$$

usando las expresiones para los operadores de campo resulta

$$\hat{H} = \sum_{kk'} \int d\mathbf{r} e^{i(E_k - E_{k'})} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'} u_k^*(\mathbf{r}) \hat{\mathcal{H}} u_{k'}(\mathbf{r}) = \sum_{kk'} e^{i(E_k - E_{k'})} E_{k'} \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k'} \int d\mathbf{r} u_k^*(\mathbf{r}) u_{k'}(\mathbf{r})$$

por la ortonormalidad de los estados propios

$$\int d\mathbf{r} u^*(\mathbf{r}) u_{k'}(\mathbf{r}) = \delta_{kk'}$$

entonces

$$\hat{H} = \sum_k E_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$$

Este hamiltoniano es válido para cualquier potencial externo; describe la energía de $n_k = \langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle$ partículas independientes, cada una con energía propia E_k . Así, obtuvimos una descripción en términos de los estados del sistema.

Introducimos ahora el operador de número

$$\hat{n}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$$

Los conmutadores de \hat{n}_k con \hat{H} y $\hat{n}_{k'}$ son, respectivamente,

$$\left[\hat{n}_k, \hat{H} \right] = 0 \quad ; \quad \left[\hat{n}_k, \hat{n}_{k'} \right] = 0$$

Los operadores \hat{H} y $\{\hat{n}_k\}$ constituyen un conjunto de operadores conmutativos y los podemos utilizar para construir una base completa para la descripción del sistema.

Esta base es el conjunto de vectores propios simultáneos del hamiltoniano y de los operadores de número. El espacio construido con esta base es llamado *Espacio de Fock* o *Espacio de número de ocupación* y cada uno de sus vectores tienen la forma

$$|n_1, n_2, n_3, \dots\rangle = \frac{1}{(n_1! n_2! n_3! \dots)^{1/2}} \left(\hat{a}_1^\dagger \right)^{n_1} \left(\hat{a}_2^\dagger \right)^{n_2} \dots |0\rangle$$

donde $|0\rangle$ es el estado del vacío. Los estados $|n_1, n_2, n_3, \dots\rangle$ especifican sólo el número de ocupación en cada estado propio de energía.

Como no puede ser posible reducir ningún número ocupacional del estado de vacío,

debe cumplirse que

$$\hat{a}_k|0\rangle = 0$$

El ket

$$|n_k\rangle = \left(\frac{1}{n_k!}\right)^{1/2} (\hat{a}_k^\dagger)^{n_k} |0\rangle$$

es un estado propio normalizado de \hat{H} que corresponde al valor propio de la energía E_k , lo que conduce a interpretar este estado del campo como el estado que contiene n_k partículas con energía E_k .

Usando las propiedades de los operadores de creación y aniquilación se sigue que

$$\begin{aligned} \hat{a}_k |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots, n_s, \dots\rangle &= \sqrt{n_k} |n_1, n_2, \dots, n_k - 1, \dots, n_s, \dots\rangle \\ \hat{a}_k^\dagger |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots, n_s, \dots\rangle &= \sqrt{n_k + 1} |n_1, n_2, \dots, n_k + 1, \dots, n_s, \dots\rangle \\ \langle n_1, n_2, \dots, n_k, \dots, n_s, \dots | \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k |n_1, n_2, \dots, n_k, \dots, n_s, \dots\rangle &= n_k \end{aligned}$$

2.4 Ejemplo de Segunda Cuantización

Cuando se estudian sistemas de muchas partículas idénticas con interacciones arbitrarias, o para describir procesos de la mecánica cuántica en los que el número de excitación de una partícula individual no se conserva, se utiliza el formalismo de Segunda Cuantización.

Para ilustrar el uso de este formalismo estudiaremos el movimiento transversal de una línea elástica sometida a una tensión que representa un ejemplo simple de un campo bosónico[2]. A continuación se muestra el hamiltoniano de una línea compuesta de puntos discretos de masa unidad con espacio de separación unidad y bajo tensión unidad. Los parámetros apropiados serán restaurados más tarde, después de haber resuelto la matemática preliminar. Posteriormente se impondrán condiciones de frontera periódica, con periodicidad N .

Sea p_i el momento transversal y q_i el desplazamiento transversal de la masa en un

punto i . Entonces, para desplazamientos pequeños se tiene que

$$H = \frac{1}{2} \sum_i [p_i^2 + (q_{i+1} - q_i)^2] \quad (2.2)$$

Esta forma puede obtenerse de la lagrangiana

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_i \dot{q}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_i (q_{i+1} - q_i)^2 \quad (2.3)$$

mediante el uso del momento canónico

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{q}_i \quad (2.4)$$

en la expresión para la función hamiltoniana:

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \quad (2.5)$$

La teoría se cuantiza mediante la condición usual, que es

$$[\hat{q}_r, \hat{p}_s] = i\delta_{rs} \quad (2.6)$$

en unidades de $\hbar = 1$.

Ahora encontraremos las frecuencias propias y vectores propios del hamiltoniano de la ecuación (2.2). Transformamos a coordenadas fonónicas Q_k :

$$q_r = N^{-1/2} \sum_k Q_k e^{ikr} \quad ; \quad Q_k = N^{-1/2} \sum_s q_s e^{-iks} \quad (2.7)$$

Estas transformaciones son consistentes, ya que $\sum_k e^{ik(s-r)} = N\delta_{sr}$. Las coordenadas q_r deber ser variables hermitianas en la mecánica cuántica, de modo que \hat{q}_r debe ser igual a su adjunto hermitiano:

$$\hat{q}_r = \hat{q}_r^\dagger \implies N^{-1/2} \sum_k \hat{Q}_k e^{ikr} = N^{-1/2} \sum_k \hat{Q}_k^\dagger e^{-ikr} \quad (2.8)$$

esta relación se satisface si

$$\hat{Q}_k = \hat{Q}_{-k}^\dagger \quad (2.9)$$

con \hat{Q}^\dagger el operador adjunto hermitiano de \hat{Q} ; podemos escribir

$$\hat{q}_r = \frac{1}{2} N^{-1/2} \sum_k \left(\hat{Q}_k e^{ikr} + \hat{Q}_k^\dagger e^{-ikr} \right) \quad (2.10)$$

donde la suma se realiza sobre todos los valores permitidos para el vector de onda k , positivos y negativos.

Para determinar los valores permitidos para k usaremos la condición de frontera

periódica, de modo que

$$\hat{q}_{r+N} = \hat{q}_r \quad (2.11)$$

por lo cual

$$e^{ikN} = 1 \quad (2.12)$$

que se satisface si

$$k = 2\pi \frac{n}{N} \quad ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(\frac{1}{2}N - 1), \pm \frac{1}{2}N$$

Esta no es la única opción posible para k , pero sí es la más usada.

Es conveniente hacer la transformación de coordenadas de (2.7) en la lagrangiana, ya que podemos encontrar la componente del momento canónico \hat{P}_k de \hat{Q}_k .

Para ello necesitamos las relaciones

$$\begin{aligned} \sum_r (\dot{q}_r)^2 &= N^{-1} \sum_k \sum_{k'} \sum_r \dot{Q}_k \dot{Q}_{k'} e^{i(k+k')r} = \\ &= \sum_k \dot{Q}_k \dot{Q}_{k'} N^{-1} \sum_r e^{i(k+k')r} \\ &= \sum_k \dot{Q}_k \dot{Q}_{-k} \end{aligned} \quad (2.13)$$

además

$$\begin{aligned} \sum_r (q_{r+1} - q_r)^2 &= N^{-1} \sum_k \sum_{k'} \sum_r Q_k Q_{k'} e^{ikr} (e^{ik} - 1) e^{ik'r} (e^{ik'} - 1) \\ &= \sum_k \sum_{k'} Q_k Q_{k'} (e^{ik} - 1) (e^{ik'} - 1) N^{-1} \sum_r e^{i(k+k')r} \\ &= 2 \sum_k Q_k Q_{-k} (1 - \cos k) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Así

$$L = \frac{1}{2} \sum_k \dot{Q}_k \dot{Q}_{-k} - \sum_k (1 - \cos k) Q_k Q_{-k} \quad (2.15)$$

y de aquí

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} = \dot{Q}_{-k} = P_{-k}^\dagger$$

por lo que

$$H = \frac{1}{2} \sum_k P_k P_{-k} + \sum_k (1 - \cos k) Q_k Q_{-k} \quad (2.16)$$

En términos de las nuevas coordenadas

$$P_k = N^{-1/2} \sum_s \hat{q}_s e^{iks} = N^{-1/2} \sum_s p_s e^{iks} \quad (2.17)$$

$$p_r = N^{-1/2} \sum_k P_k e^{-ikr} \quad (2.18)$$

La relación de conmutación es ahora

$$\begin{aligned} [\hat{Q}_k, \hat{P}_{k'}] &= N^{-1} \left[\sum_r \hat{q}_r e^{-ikr}, \sum_s \hat{p}_s e^{ik's} \right] \\ &= N^{-1} \sum_{rs} [\hat{q}_r, \hat{p}_s] e^{-i(kr-k's)} \\ &= N^{-1} \sum_r e^{-i(k-k')r} = i\delta_{kk'} \end{aligned} \quad (2.19)$$

El índice del vector de onda k se refiere a coordenadas internas, excepto para $k = 0$, y no tiene conexión con el momento total del sistema. El momento total es $\sum p_r$ y de la ecuación (2.17) puede verse que

$$\hat{P}_0 = N^{-1/2} \sum_r \hat{p}_r \quad (2.20)$$

El momento total implica sólo el modo $k = 0$, que es una traslación uniforme del sistema. Muchos de los procesos de interacción en cristales se desarrollan como si el vector de onda total, $\sum \mathbf{k}$, se conservara para las partículas interactuantes, y por esta razón es muy frecuente llamar a \mathbf{k} el *momento del cristal* o como *el cuasimomento*. Si el sistema es invariante bajo una traslación infinitesimal, entonces el vector de onda total rigurosamente se conserva. Una red cristalina no es invariante bajo una traslación infinitesimal, pero sí lo es bajo una traslación que es un múltiplo de los vectores bas \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} de la celda primitiva.

La ley de conservación se mantiene

$$\sum \mathbf{k} = \mathbf{G} \quad (2.21)$$

donde \mathbf{G} es cualquier vector de la red recíproca, pero esta ley de conservación es distinta de la ley de conservación del momento del centro de masa.

El hamiltoniano de la ecuación (2.16) no está del todo en la forma de un conjunto de osciladores armónicos, debido a la mezcla de términos en k y $-k$. Nuestro objetivo

debe ser el obtener el hamiltoniano en la forma del oscilador armónico

$$\hat{H} = \sum \omega_k \hat{n}_k = \sum \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \quad (2.22)$$

donde \hat{n}_k es el operador de número de fonones y \hat{a}_k^\dagger , \hat{a}_k los operadores de creación y aniquilación de fonones, con el conmutador

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'} \quad (2.23)$$

Hagamos la transformación lineal

$$\hat{a}_k^\dagger = (2\omega_k)^{-1/2}(\omega_k \hat{Q}_{-k} - i\hat{P}_k) ; \hat{a}_k = (2\omega_k)^{-1/2}(\omega_k \hat{Q}_k + i\hat{P}_{-k}) \quad (2.24)$$

tomando en cuenta las condiciones (2.9) y (2.15); aquí ω_k se define como

$$\omega_k = [2(1 - \cos k)]^{\frac{1}{2}} \quad (2.25)$$

Las ω_k son las frecuencias del oscilador armónico clásico. Para valores pequeños de k tenemos que $\omega \propto k$, de modo que no hay dispersión. La dispersión se presenta cuando la longitud de onda $2\pi/k$ se aproxima a la separación interatómica, de tal manera que las ondas ven la naturaleza discreta de la red. Nótese que ω es una función periódica de k .

Ahora

$$\begin{aligned} [\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] &= (2\omega_k)^{-1} \left(-i\omega_k [\hat{Q}_k, \hat{P}_{k'}] + i\omega_k [\hat{P}_{-k}, \hat{Q}_{-k'}] \right) \\ &= \delta_{kk'} \end{aligned} \quad (2.26)$$

como se requiere.

Formemos las sumas sobre $\pm k$ en el hamiltoniano de la ecuación (2.16)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\hat{P}_k \hat{P}_{-k} + \hat{P}_{-k} \hat{P}_k) + (1 - \cos k)(\hat{Q}_k \hat{Q}_{-k} + \hat{Q}_{-k} \hat{Q}_k) \\ = \frac{1}{2}\omega_k(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_{-k}^\dagger \hat{a}_{-k} + \hat{a}_{-k} \hat{a}_{-k}^\dagger) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Así el hamiltoniano puede ser reescrito como

$$\hat{H} = \sum_k \omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) ; \quad \omega_k = [2(1 - \cos k)]^{\frac{1}{2}}.$$

Esta ecuación contiene al operador de número de bosones que hay en el estado k

$$\hat{n}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$$

Si el estado Φ está especificado por los valores propios de ocupación n_k , entonces la ecuación de Schrödinger es

$$\hat{H}\Phi = E\Phi = \left(\sum_k \hat{n}_k \omega_k \right) \Phi$$

Un incremento de uno en n_k es descrito como la excitación de un fonón de energía ω_k .

La transformación inversa para (2.24) es

$$\hat{P}_k = i \left(\frac{\omega_k}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\hat{a}_k^\dagger - \hat{a}_{-k} \right) \quad ; \quad \hat{Q}_k = (2\omega_k)^{-\frac{1}{2}} \left(\hat{a}_k + \hat{a}_{-k}^\dagger \right) \quad (2.28)$$

Si sustituimos (2.28) para Q_k en (2.10) obtenemos

$$\hat{q}_r = \sum_k (N\omega_k)^{-\frac{1}{2}} \left(\hat{a}_k e^{ikr} + \hat{a}_k^\dagger e^{-ikr} \right) \quad (2.29)$$

Los modos de oscilación que hemos cuantizado son idénticos a los modos de oscilación clásicos del sistema.

Capítulo 3. Osciladores armónicos acoplados

La segunda cuantización es una técnica poderosa para describir procesos de mecánica cuántica en los que el número de excitación de una partícula individual no se conserva.[3]

Un ejemplo de segunda cuantización común en los libros de texto de mecánica cuántica es la presentación del oscilador armónico simple en términos de los operadores de creación y aniquilación los cuales representan, respectivamente, la adición y eliminación de cuantos de energía para el oscilador.

Haremos a continuación un estudio de osciladores armónicos acoplados usando segunda cuantización, lo cual, además de reforzar el caso del oscilador armónico simple, permitirá realizar una discusión de la conexión de la física clásica de osciladores acoplados con sistemas empleados en la frontera de la investigación en física contemporánea.

3.1 Oscilador armónico simple

El hamiltoniano de un oscilador armónico simple de masa m y frecuencia ω_m en una dimensión está dado por

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_m^2\hat{q}^2$$

donde q y p son los operadores de posición y momento, respectivamente, los cuales cumplen con la relación de conmutación

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$$

3.1.1 Estados de número

Recordemos que el hamiltoniano puede expresarse en términos de los operadores de

creación, a^\dagger , y aniquilación, a , como:

$$\hat{H} = \hbar\omega_m \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (3.1)$$

El operador $a^\dagger a$ es el *Operador de Número* y representa la medida del número de cuantos que contiene el oscilador. Los estados propios del operador de número son los estados de número $|n\rangle$, con $n = 1, 2, 3, \dots$, que corresponden a la presencia de exactamente n cuantos en el oscilador:

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = n |n\rangle \quad (3.2)$$

Estos estados son también estados propios del hamiltoniano (3.1), que tiene como valores propios

$$E_n = \hbar\omega_m \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (3.3)$$

Los operadores de creación y aniquilación incrementan o disminuyen en la unidad, respectivamente, el número de cuantos presentes en un estado de número dado:

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad \hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

Además, estos operadores tienen la siguiente relación de conmutación:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

3.1.2 Desplazamiento del oscilador

Una de las operaciones físicas más simple que puede efectuarse sobre un oscilador implica desplazarlo en la posición. Tales desplazamientos pueden generarse matemáticamente por la exponencial del operador de momento:

$$D(\alpha) = e^{\alpha(\hat{a}^\dagger - \hat{a})} \quad (3.4)$$

donde α es un número real que determina la cantidad de desplazamiento. El efecto de $D(\alpha)$ en otros operadores puede obtenerse usando la relación de Baker-Campbell-Hausdorff (ver apéndice A1), la cual establece que para dos operadores A y B

$$e^{i\lambda A} B e^{-i\lambda A} = B + i\lambda[A, B] + \frac{(i\lambda)^2}{2!} [A, [A, B]] + \dots \quad (3.5)$$

con λ cualquier número complejo.

Tomando $A = \alpha(a^\dagger - a)$, $B = a$ y $\lambda = i$, obtenemos

$$e^{-\alpha(\hat{a}^\dagger - \hat{a})} a e^{\alpha(\hat{a}^\dagger - \hat{a})} = D^\dagger(\alpha) \hat{a} D(\alpha)$$

Con esta forma para A y B se tiene que

$$[A, B] = [\alpha(\hat{a}^\dagger - \hat{a}), \hat{a}] = \alpha [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] = -\alpha$$

de modo que al sustituir en la ecuación (3.5) podemos ver que sólo sobreviven los dos primeros términos, esto es,

$$D^\dagger(\alpha) \hat{a} D(\alpha) = \hat{a} + \alpha$$

y si tomamos el adjunto de esta expresión obtenemos

$$D^\dagger(\alpha) \hat{a}^\dagger D(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha \quad (3.6)$$

Aplicemos ahora la transformación dada por (3.4) a la posición. Así, recordando (1.2) y usando los dos resultados anteriores, tenemos que

$$\begin{aligned} D^\dagger(\alpha) \hat{q} D(\alpha) &= D^\dagger(\alpha) [q_0(\hat{a}^\dagger + \hat{a})] D(\alpha) = q_0 D^\dagger(\alpha) \hat{a}^\dagger D(\alpha) + q_0 D^\dagger(\alpha) \hat{a} D(\alpha) \\ &= q_0(\hat{a}^\dagger + \alpha) + q_0(\hat{a} + \alpha) = q_0(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) + 2q_0\alpha \end{aligned} \quad (3.7)$$

o bien,

$$D^\dagger(\alpha) \hat{q} D(\alpha) = \hat{q} + 2q_0\alpha \quad (3.8)$$

que indica precisamente un desplazamiento en la posición por la cantidad $2q_0\alpha$.

Asimismo, al aplicar esta transformación a p , dado por la ecuación (1.2), obtenemos que permanece invariante. Veamos:

$$\begin{aligned} D^\dagger(\alpha) \hat{p} D(\alpha) &= ip_0 D^\dagger(\alpha) (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) D(\alpha) = ip_0 D^\dagger(\alpha) \hat{a}^\dagger D(\alpha) - ip_0 D^\dagger(\alpha) \hat{a} D(\alpha) \\ &= ip_0(\hat{a}^\dagger + \alpha) - ip_0(\hat{a} + \alpha) = ip_0(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) = \hat{p} \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.1.3 Compresión del oscilador

Otra operación que puede realizarse en el oscilador es el de un incremento en su frecuencia ω_m . Esto puede imaginarse como un aumento en la rigidez del potencial parabólico que confina la partícula oscilante, lo que lleva a una disminución en la dispersión de la posición (o "compresión") y un aumento de la dispersión en el momento.

Este proceso puede llevarse a cabo matemáticamente con el operador de compresión[4]

$$S(\xi) = e^{\frac{\xi}{2}(\hat{a}^2 - \hat{a}^\dagger{}^2)} \quad (3.10)$$

donde ξ es un número real mayor que cero, el cual determina el grado de compresión. Los efectos de la compresión en las variables dinámicas de interés pueden obtenerse utilizando la ec.(3.5). Después de realizar un cálculo similar al utilizado para la obtención de la ecuación (3.6) (ver apéndice A2), obtenemos

$$\begin{aligned} S^\dagger(\xi)aS(\xi) &= a \cosh \xi - a^\dagger \sinh \xi \\ S^\dagger(\xi)a^\dagger S(\xi) &= a^\dagger \cosh \xi - a \sinh \xi \end{aligned} \quad (3.11)$$

Consideremos el estado base comprimido $|\psi\rangle = S(\xi)|0\rangle$, donde $S(\xi)$ es el operador dado en (3.10). Definiendo la dispersión en la posición como $\langle(\delta\hat{q})^2\rangle = \langle\hat{q}^2\rangle - \langle\hat{q}\rangle^2$, donde $\langle q\rangle = \langle\psi|q|\psi\rangle$, demostraremos que $\langle(\delta\hat{q})^2\rangle^{\frac{1}{2}} = e^{-\xi}q_0$. Similarmente, demostraremos que $\langle(\delta p)^2\rangle^{\frac{1}{2}} = e^{-\xi}p_0$.

Recordemos que

$$S(\xi) = e^{\frac{\xi}{2}(\hat{a}^2 - \hat{a}^\dagger{}^2)} \quad ; \quad \hat{q} = q_0(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \quad (3.12)$$

y que

$$\begin{aligned} \langle\hat{q}\rangle &= \langle\psi|\hat{q}|\psi\rangle = q_0 \langle\psi|(\hat{a}^\dagger + \hat{a})|\psi\rangle = q_0 \langle 0|S^\dagger(\xi)(\hat{a}^\dagger + \hat{a})S(\xi)|0\rangle \\ &= q_0 \langle 0|S^\dagger(\xi)\hat{a}^\dagger S(\xi)|0\rangle + q_0 \langle 0|S^\dagger(\xi)\hat{a}S(\xi)|0\rangle \end{aligned} \quad (3.13)$$

usando (3.11) resulta

$$\begin{aligned} \langle\hat{q}\rangle &= q_0 \cosh \xi \langle 0|\hat{a}^\dagger|0\rangle - q_0 \sinh \xi \langle 0|\hat{a}|0\rangle + q_0 \cosh \xi \langle 0|\hat{a}|0\rangle - q_0 \sinh \xi \langle 0|\hat{a}^\dagger|0\rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

ya que $\langle n|\hat{a}^\dagger|n\rangle = \langle n|\hat{a}|n\rangle = 0$, para cualquier n .

De manera similar

$$\begin{aligned} \langle\hat{q}^2\rangle &= \langle\psi|\hat{q}^2|\psi\rangle = q_0^2 \langle\psi|(\hat{a}^\dagger + \hat{a})^2|\psi\rangle = q_0^2 \langle\psi|(\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^2)|\psi\rangle \\ &= q_0^2 \langle 0|S^\dagger(\xi)(\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^2)S(\xi)|0\rangle \end{aligned} \quad (3.15)$$

Desarrollamos cada uno de los términos tomando en cuenta que $S(\xi)S^\dagger(\xi) = 1$:

$$\begin{aligned}
S^\dagger(\xi)\hat{a}^{\dagger 2}S(\xi) &= S^\dagger(\xi)\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger S(\xi) = [S^\dagger(\xi)\hat{a}^\dagger S(\xi)] [S^\dagger(\xi)\hat{a}^\dagger S(\xi)] \\
&= (\hat{a}^\dagger \cosh \xi - \hat{a} \sinh \xi)(\hat{a}^\dagger \cosh \xi - \hat{a} \sinh \xi) \\
&= \hat{a}^{\dagger 2} \cosh^2 \xi + \hat{a}^2 \sinh^2 \xi - (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) \cosh \xi \sinh \xi
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
S^\dagger(\xi)\hat{a}^2S(\xi) &= S^\dagger(\xi)\hat{a}\hat{a}S(\xi) = [S^\dagger(\xi)\hat{a}S(\xi)] [S^\dagger(\xi)\hat{a}S(\xi)] \\
&= (\hat{a} \cosh \xi - \hat{a}^\dagger \sinh \xi)(\hat{a} \cosh \xi - \hat{a}^\dagger \sinh \xi) \\
&= \hat{a}^2 \cosh^2 \xi + \hat{a}^{\dagger 2} \sinh^2 \xi - (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) \cosh \xi \sinh \xi
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
S^\dagger(\xi)\hat{a}^\dagger\hat{a}S(\xi) &= [S^\dagger(\xi)\hat{a}^\dagger S(\xi)] [S^\dagger(\xi)\hat{a}S(\xi)] \\
&= (\hat{a}^\dagger \cosh \xi - \hat{a} \sinh \xi)(\hat{a} \cosh \xi - \hat{a}^\dagger \sinh \xi) \\
&= \hat{a}^\dagger \hat{a} \cosh^2 \xi + \hat{a} \hat{a}^\dagger \sinh^2 \xi - (\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2) \cosh \xi \sinh \xi
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
S^\dagger(\xi)\hat{a}\hat{a}^\dagger S(\xi) &= [S^\dagger(\xi)\hat{a}S(\xi)] [S^\dagger(\xi)\hat{a}^\dagger S(\xi)] \\
&= (\hat{a} \cosh \xi - \hat{a}^\dagger \sinh \xi)(\hat{a}^\dagger \cosh \xi - \hat{a} \sinh \xi) \\
&= \hat{a} \hat{a}^\dagger \cosh^2 \xi + \hat{a}^\dagger \hat{a} \sinh^2 \xi - (\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2) \cosh \xi \sinh \xi
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Con esto, tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle \hat{q}^2 \rangle &= q_0^2 \cosh^2 \xi \langle 0 | (\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 + \hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a}) | 0 \rangle \\
&\quad + q_0^2 \sinh^2 \xi \langle 0 | (\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 + \hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a}) | 0 \rangle \\
&\quad - 2q_0^2 \cosh \xi \sinh \xi \langle 0 | (\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 + \hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a}) | 0 \rangle
\end{aligned} \tag{3.20}$$

y como

$$\langle 0 | \hat{a}^2 | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}^{\dagger 2} | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}^\dagger \hat{a} | 0 \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle 0 | \hat{a} \hat{a}^\dagger | 0 \rangle = \sqrt{1} \langle 0 | 0 \rangle = 1 \tag{3.21}$$

entonces

$$\langle \hat{q}^2 \rangle = q_0^2 (\cosh^2 \xi + \sinh^2 \xi - 2 \cosh \xi \sinh \xi) \tag{3.22}$$

Recordando que

$$\cosh \xi = \frac{e^\xi + e^{-\xi}}{2} \quad ; \quad \sinh \xi = \frac{e^\xi - e^{-\xi}}{2} \tag{3.23}$$

vemos que

$$\begin{aligned}
\langle \hat{q}^2 \rangle &= \frac{1}{4} q_0^2 \left[(e^\xi + e^{-\xi})^2 + (e^\xi - e^{-\xi})^2 - 2(e^\xi + e^{-\xi})(e^\xi - e^{-\xi}) \right] \quad (3.24) \\
&= \frac{1}{4} q_0^2 [e^{2\xi} + e^{-2\xi} + 2 + e^{2\xi} + e^{-2\xi} - 2 - 2(e^{2\xi} - 1 + 1 - e^{-2\xi})] \\
&= \frac{1}{4} q_0^2 (2e^{2\xi} + 2e^{-2\xi} - 2e^{2\xi} + 2e^{-2\xi}) = \frac{1}{4} q_0^2 (4e^{-2\xi}) \\
&= q_0^2 e^{-2\xi}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\langle (\delta \hat{q})^2 \rangle = \langle \hat{q}^2 \rangle - \langle \hat{q} \rangle^2 = q_0^2 e^{-2\xi} \Rightarrow \langle (\delta \hat{q})^2 \rangle^{1/2} = e^{-\xi} q_0 \quad (3.25)$$

Como puede verse, la acción del operador de "compresión" reduce la dispersión en la posición del oscilador, pasando de q_0 a $e^{-\xi} q_0$.

Procediendo de manera similar para $\hat{p} = ip_0(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$, tenemos

$$\begin{aligned}
\langle \hat{p} \rangle &= \langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle = ip_0 \langle \psi | (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) | \psi \rangle = ip_0 \langle 0 | S^\dagger(\xi) (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) S(\xi) | 0 \rangle \\
&= ip_0 \langle 0 | S^\dagger(\xi) \hat{a}^\dagger S(\xi) | 0 \rangle - ip_0 \langle 0 | S^\dagger(\xi) \hat{a} S(\xi) | 0 \rangle \quad (3.26) \\
&= 0
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\langle \hat{p}^2 \rangle &= \langle \psi | \hat{p}^2 | \psi \rangle = -p_0^2 \langle \psi | (\hat{a}^\dagger - \hat{a})^2 | \psi \rangle = -p_0^2 \langle 0 | S^\dagger(\xi) (\hat{a}^\dagger - \hat{a})^2 S(\xi) | 0 \rangle \\
&= -p_0^2 \langle 0 | S^\dagger(\xi) (\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 - \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger) S(\xi) | 0 \rangle \quad (3.27)
\end{aligned}$$

Usando los resultados obtenidos líneas arriba nos queda

$$\begin{aligned}
\langle \hat{p}^2 \rangle &= -p_0^2 \cosh^2 \xi \langle 0 | (\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 + \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) | 0 \rangle \\
&\quad - p_0^2 \sinh^2 \xi \langle 0 | (\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 + \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) | 0 \rangle \\
&\quad + 2p_0^2 \cosh \xi \sinh \xi \langle 0 | (\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 + \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) | 0 \rangle \quad (3.28) \\
&= -p_0^2 (\cosh^2 \xi + \sinh^2 \xi + 2 \cosh \xi \sinh \xi) \\
&= -\frac{1}{4} p_0^2 = -\frac{1}{4} p_0^2 (4e^{2\xi}) = -p_0^2 e^{2\xi}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\langle (\delta \hat{p})^2 \rangle = \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2 = p_0^2 e^{2\xi} \Rightarrow \langle (\delta \hat{p})^2 \rangle^{1/2} = e^\xi p_0 \quad (3.29)$$

se observa un incremento en la dispersión del momento del oscilador debido al efecto

del operador de compresión.

3.2 Osciladores Acoplados

Con los instrumentos presentados en la sección anterior, podemos introducir varios problemas de valores propios que involucran el uso de la segunda cuantización en osciladores acoplados. La estrategia para resolver el problema de valores propios puede ser la siguiente. Primero, describimos la física subyacente del hamiltoniano correspondiente. Luego utilizamos ese conocimiento para construir una constante de movimiento para el problema, cuyo operador correspondiente conmuta con el hamiltoniano de interés, y por tanto no cambia con el tiempo. Por último, incorporamos los estados propios de la constante de movimiento y calculamos los valores propios deseados.

3.2.1 Efecto Cross-Kerr

Como un ejercicio de calentamiento, empecemos con el hamiltoniano Cross-Kerr de la Óptica Cuántica:

$$\hat{H}_{CK} = \hbar\omega_a\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_b\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hbar g_{CK}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{b}^\dagger\hat{b} \quad (3.30)$$

La interpretación física es bastante sencilla, ya que simplemente implica un acoplamiento de la energía de los osciladores.

La ecuación (3.30) puede reescribirse como

$$\hat{H}_{CK} = \hbar\left(\omega_a + g_{CK}\hat{b}^\dagger\hat{b}\right)\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_b\hat{b}^\dagger\hat{b} \quad (3.31)$$

considerando que \hat{a} y \hat{b} conmutan.

El efecto del oscilador \hat{b} puede pensarse como el causante de un corrimiento en la frecuencia de resonancia del oscilador \hat{a} , la magnitud del corrimiento dependerá del número de cuantos en el oscilador \hat{b} . Por lo tanto, el hamiltoniano Cross-Kerr ofrece una manera de medir el número de cuantos en el oscilador como un corrimiento de la frecuencia de resonancia del otro oscilador.

No es sorprendente que el efecto descrito por el hamiltoniano Cross-Kerr forme la base de varias aplicaciones en la medición y en la información cuántica; en la práctica el efecto se puede realizar por dos haces de luz monocromática de frecuencias ω_a y ω_b , respectivamente, interactuando dentro de un sólido cristalino que proporciona el acoplamiento g_{CK} requerido.

Ahora trataremos de encontrar las constantes de movimiento para el problema. La inspección de la ecuación (3.30) muestra inmediatamente que se conserva el número de cuantos en ambos osciladores, esto es,

$$[\hat{a}^\dagger \hat{a}, H_{CK}] = [\hat{b}^\dagger \hat{b}, \hat{H}_{CK}] = 0$$

Por lo tanto, se podría esperar que un estado propio del sistema sería, simplemente, el producto de los respectivos estados de número, es decir,

$$|n_a\rangle |n_b\rangle$$

En efecto, si usamos esta suposición para un estado propio con la ecuación (3.30), obtenemos que los correspondientes valores propios definidos por

$$\hat{H}_{CK} [|n_a\rangle |n_b\rangle] = E_{n_a, n_b} [|n_a\rangle |n_b\rangle]$$

son

$$E_{n_a, n_b} = \hbar\omega_a n_a + \hbar\omega_b n_b + \hbar g_{CK} n_a n_b \quad (3.32)$$

3.2.2 Sistema optomecánico con acoplamiento lineal

Nuestro siguiente ejemplo se compone de un oscilador óptico (de frecuencia ω_a y representado por los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger) acoplado a un oscilador mecánico (de frecuencia ω_b , masa m , y representado por los operadores \hat{b} y \hat{b}^\dagger) y se describe por el hamiltoniano

$$\hat{H}_l = \hbar\omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} - \hbar g_l \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \quad (3.33)$$

donde g_l representa el acoplamiento entre los dos osciladores.

Podemos justificar el hamiltoniano de la ecuación (3.33) y derivar una ecuación para g_l de una manera sencilla con referencia a la figura 1, que muestra un resonador

óptico formado por dos espejos altamente reflejantes. Uno de los espejos está fijo en su posición, mientras que el otro está suspendido como un péndulo.

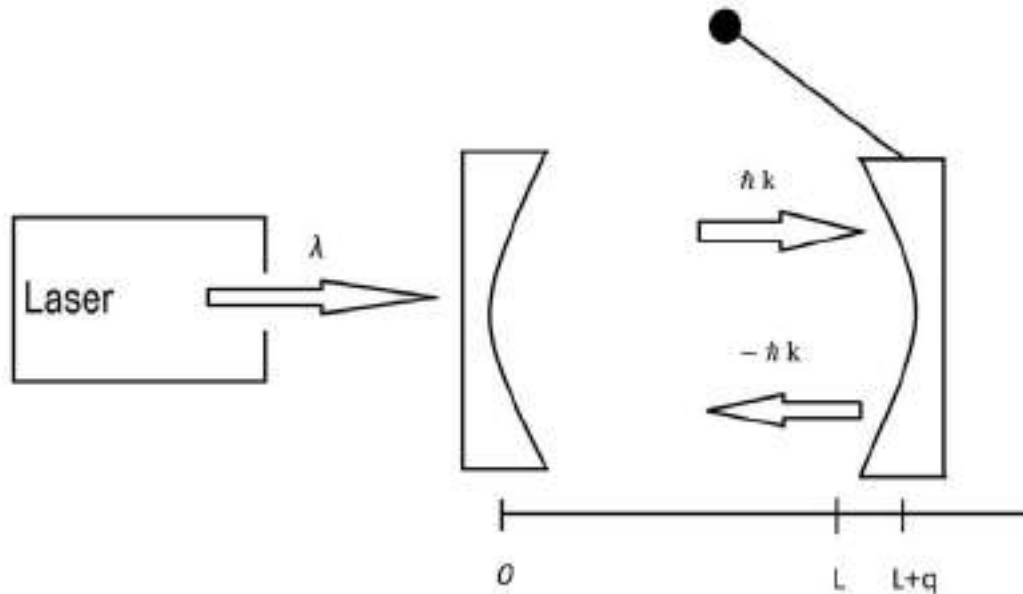


Figura 1. Esquema del sistema optomecánico estudiado en la sección 3.2.2. Esencialmente el arreglo involucra una cavidad construida con dos espejos casi perfectamente reflejantes.

En ausencia de radiación en el resonador, el segundo espejo ocupa una posición de equilibrio en L . Sin embargo, si se inyecta luz en la cavidad, la fuerza de radiación correspondiente, en conjunto con la fuerza de restauración del péndulo, generalmente mueven el espejo a una posición $L + q$, donde $q \ll L$. [5]

El movimiento mecánico es considerado lo suficientemente lento para evitar dispersión de fotones hacia otros modos ópticos admitidos por la cavidad, y por lo tanto consideramos sólo una única cavidad resonante. Asumiremos también que no hay disipación (tal como fotones saliendo de la cavidad), ni hay ruido en el sistema, lo cual debería tomarse en cuenta para tener modelos más realistas.

Siguiendo adelante, notamos que el primer y segundo término de la ecuación (3.33)

corresponden a las energías de los osciladores óptico y mecánico, respectivamente. El tercer término representa la interacción optomecánica entre los dos osciladores, la cual puede describirse como sigue. Cada fotón en la cavidad lleva un momento $\hbar k$, donde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, siendo λ la longitud de onda de la luz. Asumiendo una perfecta reflexión del espejo en movimiento, la reflexión de un solo fotón invierte completamente el movimiento del fotón, por lo tanto, la transferencia de momento es de $2\hbar k$ al espejo en movimiento.

Asumiendo que también el espejo fijo es perfectamente reflector, esta transferencia de momento ocurre una vez cada viaje redondo con tiempo $2L/c$. La fuerza (promedio) sobre el espejo en movimiento debida a un solo fotón está dada por la tasa de cambio del momento

$$\frac{2\hbar k}{2L/c} = \frac{\hbar\omega_a}{L}$$

donde hemos considerado que $\omega_a = ck$; la fuerza total debida a todos los fotones en la cavidad es, por tanto, $\hbar\omega_a\hat{a}^\dagger\hat{a}/L$.

El trabajo extraído por el oscilador óptico en el movimiento del elemento mecánico de L a $L + q$ resulta ser $-\hbar\omega_a\hat{a}^\dagger\hat{a}q/L$.

Usando $\hat{q} = q_0(\hat{b}^\dagger + \hat{b})$, este trabajo finalmente da el tercer término de la ecuación (3.33) con

$$-\hbar g_l \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) = -\hbar \omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} \frac{\hat{q}}{L} = -\frac{\hbar}{L} \omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} q_0 (\hat{b}^\dagger + \hat{b})$$

$$g_l = \frac{\omega_a}{L} q_0 \quad (3.34)$$

Notamos que la derivación de g_l es bastante intuitiva. Esto es así porque hemos utilizado conceptos de mecánica clásica, tal como la fuerza, para derivar una expresión que es claramente mecánica cuántica, como se indica por la presencia de \hbar en el tercer término de la ecuación (3.33). También estamos asumiendo que la fuerza óptica se mantiene constante a medida que el elemento mecánico se mueve. Esto no es del todo correcto, ya que el movimiento del segundo espejo cambia la longitud del resonador óptico y, por tanto, el número de fotones en la cavidad. Una derivación

extensiva y rigurosa de los resultados anteriores, libre de los defectos mencionados, puede encontrarse en la literatura.[12]

El sistema físico que se muestra en la figura 1 puede ser utilizado como un sensor óptico ultrapreciso del desplazamiento mecánico del espejo móvil, y versiones más sofisticadas que las aquí descritas se emplean actualmente en la búsqueda de ondas gravitacionales predichas por la Teoría de la Relatividad General de Einstein. El mismo sistema físico se ha utilizado recientemente para enfriar ópticamente un voladizo (tipo viga) nanomecánico oscilante hasta llevarlo a su estado base mecánico cuántico, marcando el comienzo de una nueva dirección en la exploración de la física cuántica a escalas macroscópicas de longitud y masa.

Ahora trataremos de encontrar una constante de movimiento para la ecuación (3.33). En primer lugar, nos damos cuenta que para $g_l = 0$ tenemos que

$$\left[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{H}_l \right] = \left[\hat{b}^\dagger \hat{b}, \hat{H}_l \right] = 0$$

Por lo tanto, en este caso el estado propio del sistema es simplemente $|n_a\rangle |n_b\rangle$. Para $g_l \neq 0$, constatamos que $\left[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{H}_l \right] = 0$ mientras que $\left[\hat{b}^\dagger \hat{b}, \hat{H}_l \right] \neq 0$; esto implica que la contribución óptica al estado propio del sistema seguirá siendo $|n_a\rangle$, pero la contribución mecánica no será $|n_b\rangle$. Recordemos que el tercer término de la ecuación (3.33) describe el desplazamiento del oscilador mecánico debido a una fuerza óptica. Así, podríamos suponer que la contribución mecánica al estado propio del sistema consistirá de estados de números desplazados $D(\alpha) |n_b\rangle$, donde $D(\alpha) = e^{\alpha(\hat{b}^\dagger - \hat{b})}$, con el parámetro de desplazamiento α posiblemente dependiente de n_a . Por lo tanto, consideremos la siguiente propuesta para el estado propio:

$$|n_a, n_b\rangle = |n_a\rangle D(\alpha) |n_b\rangle \quad (3.35)$$

donde α se determinará mediante la aplicación de la ecuación de valores propios

$$\hat{H}_l [|n_a\rangle D(\alpha) |n_b\rangle] = E_{n_a, n_b} |n_a\rangle D(\alpha) |n_b\rangle$$

Así, la aplicación del hamiltoniano dado por (3.33) sobre el estado (3.35) nos da

$$\begin{aligned}
\hat{H}_I |n_a, n_b\rangle &= H_I |n_a\rangle D(\alpha) |n_b\rangle \\
&= \left[\hbar\omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} - \hbar g_I \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \right] |n_a\rangle D(\alpha) |n_b\rangle \\
&= \left[\hbar\omega_a n_a + \hbar\omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} - \hbar g_I n_a (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \right] |n_a\rangle D(\alpha) |n_b\rangle \quad (3.36) \\
&= |n_a\rangle \left[\hbar\omega_a n_a + \hbar\omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} - \hbar g_I n_a (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \right] D(\alpha) |n_b\rangle
\end{aligned}$$

donde hemos usado $\hat{a}^\dagger \hat{a} |n_a\rangle = n_a |n_a\rangle$.

Para obtener la acción de los operadores restantes, \hat{b} y \hat{b}^\dagger , sobre $|n_b\rangle$, tendremos que pasarlos sobre el operador $D(\alpha) = e^{\alpha(\hat{b}^\dagger - \hat{b})}$. Sin embargo, $[\hat{b}, D(\alpha)] \neq 0$ debido a la presencia de \hat{b}^\dagger en $D(\alpha)$. De igual manera $[\hat{b}^\dagger, D(\alpha)] \neq 0$, debido a la presencia de \hat{b} en $D(\alpha)$. No obstante, se puede realizar la maniobra deseada usando las ecuaciones (3.6) y considerando que $D(\alpha)D^\dagger(\alpha) = 1$. Por ejemplo multiplicando por $D(\alpha)$ la primera de las ecuaciones (3.6) obtenemos que

$$\hat{b}D(\alpha) = D(\alpha)(\hat{b} + \alpha)$$

y de manera similar, usando la segunda de las ecuaciones (3.6) podemos obtener que

$$\hat{b}^\dagger D(\alpha) = D(\alpha)(\hat{b}^\dagger + \alpha)$$

Ahora, considerando que

$$D^\dagger(\alpha)\hat{b}^\dagger\hat{b}D(\alpha) = \left[D^\dagger(\alpha)\hat{b}^\dagger D(\alpha) \right] \left[D^\dagger(\alpha)\hat{b}D(\alpha) \right] = (\hat{b}^\dagger + \alpha)(\hat{b} + \alpha)$$

entonces

$$\hat{b}^\dagger\hat{b}D(\alpha) = D(\alpha)(\hat{b}^\dagger + \alpha)(\hat{b} + \alpha)$$

Usando estas relaciones en la ecuación (3.36), obtenemos

$$\begin{aligned}
\hat{H}_I |n_a, n_b\rangle &= |n_a\rangle (\hbar\omega_a n_a) D(\alpha) |n_b\rangle + |n_a\rangle \left[\hbar\omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} - \hbar g_I n_a \hat{b}^\dagger - \hbar g_I n_a \hat{b} \right] D(\alpha) |n_b\rangle \\
&= |n_a\rangle D(\alpha) (\hbar\omega_a n_a) |n_b\rangle \\
&\quad + |n_a\rangle [\hbar\omega_b D(\alpha)(\hat{b}^\dagger + \alpha)(\hat{b} + \alpha) - \hbar g_I n_a D(\alpha)(\hat{b}^\dagger + \hat{b} + 2\alpha)] |n_b\rangle
\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
\hat{H}_I |n_a, n_b\rangle &= |n_a\rangle D(\alpha) [\hbar\omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + (\hbar\omega_b \alpha - \hbar g_I n_a)(\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \\
&\quad + (\hbar\omega_a n_a + \hbar\omega_b \alpha^2 - 2\hbar g_I n_a \alpha)] |n_b\rangle \quad (3.37)
\end{aligned}$$

La ecuación (3.37) puede tomar la forma de una ecuación de valores propios si el término $(\hat{b}^\dagger + \hat{b})$ se remueve, porque $|n_b\rangle$ es un estado propio de los dos términos restantes. Así, haciendo igual a cero el coeficiente del término $(\hat{b}^\dagger + \hat{b})$ se obtiene la solución para α :

$$\hbar\omega_b\alpha - \hbar g_l n_a = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{g_l n_a}{\omega_b}$$

Así, sustituyendo (3.37) en la ecuación de valores propios correspondiente se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{H}_l |n_a, n_b\rangle &= E_{n_a, n_b} [|n_a\rangle D(\alpha) |n_b\rangle] \\ &= \left[\hbar\omega_b n_b + \hbar\omega_a n_a + \hbar\omega_b \left(\frac{g_l^2 n_a^2}{\omega_b^2} \right) - 2\hbar g_l n_a \left(\frac{g_l n_a}{\omega_b} \right) \right] [|n_a\rangle D(\alpha) |n_b\rangle] \\ &= \left[\hbar\omega_a n_a + \hbar\omega_b n_b - \hbar \frac{g_l^2 n_a^2}{\omega_b} \right] [|n_a\rangle D(\alpha) |n_b\rangle] \end{aligned}$$

por lo que la energía resulta ser

$$E_{n_a, n_b} = \left[\hbar\omega_a n_a + \hbar\omega_b n_b - \hbar \frac{g_l^2 n_a^2}{\omega_b} \right] \quad (3.38)$$

Si el último término de esta ecuación es escrito como $\hbar g_l n_a (g_l n_a / \omega_b)$, puede ser intuitivamente entendido usando la descripción del tercer término de la ecuación (3.33). Este término, por lo tanto, puede ser pensado como la energía perdida por el oscilador óptico que ejerce una fuerza $\hbar g_l n_a$ la cual desplaza la posición de equilibrio del oscilador mecánico por una distancia $g_l n_a / \omega_b$. [6]

3.2.3 Convertidor paramétrico degenerado

El siguiente ejemplo consiste de un convertidor reductor degenerado de la óptica cuántica, con el hamiltoniano

$$\hat{H}_{DC} = \hbar\omega_b b^\dagger b + \hbar g_{DC} (\hat{b}^{\dagger 2} + \hat{b}^2) \quad (3.39)$$

Aunque este hamiltoniano parece involucrar únicamente un solo oscilador armónico, el mecanismo subyacente requiere la participación de dos osciladores. Una descripción más precisa del sistema relevante está dada por

$$\hat{H}'_{DC} = \hbar\omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar \frac{\omega_a}{2} \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hbar g'_{DC} (\hat{a} \hat{b}^{\dagger 2} + \hat{a}^\dagger \hat{b}^2) \quad (3.40)$$

Nótese la relación entre las frecuencias de los dos osciladores ($\omega_b = \frac{\omega_a}{2}$). El término

$\hat{a}\hat{b}^{\dagger 2}$ en el hamiltoniano de la ecuación (3.40) representa un proceso en el que un fotón óptico de frecuencia ω_a es "destruido" por un sólido cristalino y dos fotones son "creados", cada uno con exactamente la mitad de la frecuencia.

Usualmente se usa luz intensa de frecuencia ω_a y el proceso de conversión descendente resulta ineficiente, produciéndose pocos fotones de frecuencia $\omega_a/2$ (la mayoría de los fotones ω_a simplemente pasan a través del cristal pero no interactúan con él).

En tal situación, es razonable pensar en el oscilador con frecuencia ω_a desde el punto de vista clásico; esto significa que el operador \hat{a} puede ser sustituido por un campo clásico A , a lo cual se le llama con frecuencia *Aproximación Paramétrica*. En general A es un número complejo, pero en este caso en particular es posible elegir que sea real simplemente estableciendo que la fase del campo clásico correspondiente sea cero. Sustituyendo $\hat{a} \rightarrow A$ en la ecuación (3.40) dará entonces la ecuación (3.39) si se elimina el término constante $\hbar\omega_a A^2$ y escribimos $g_{DC} = Ag'_{DC}$.

Con algunas modificaciones, el sistema físico descrito por el hamiltoniano de la ecuación (3.39) puede ser utilizado para las pruebas fundamentales de la mecánica cuántica, tales como las ideadas por Bell. También se puede incorporar en arreglos que generan radiación óptica de bajo nivel de ruido para mejorar la sensibilidad de dispositivos de medición.

Ahora buscamos las constantes de movimiento del problema. La inspección de la ecuación (3.39) muestra que para $g_{DC} = 0$ tenemos que $[\hat{b}^{\dagger}\hat{b}, \hat{H}_{DC}] = 0$ y por lo tanto los estados propios de \hat{H}_l están dados por los estados de número $|n_b\rangle$. Sin embargo $[\hat{b}^{\dagger}\hat{b}, \hat{H}_{DC}] \neq 0$ cuando $g_{DC} \neq 0$, por lo que no parece ser una obvia constante de movimiento para este problema.

En este caso puede obtenerse una idea notando que la ecuación (3.39) puede ser reescrita como

$$\hat{H}_{DC} = \hbar(\omega_b - 2g_{DC})\hat{b}^{\dagger}\hat{b} + \hbar g_{DC}(\hat{b} + \hat{b}^{\dagger})^2 - \hbar g_{DC} \quad (3.41)$$

El primer término de la ecuación (3.41) muestra que el efecto del acoplamiento g_{DC} es bajar la frecuencia del oscilador. Por otra parte, el segundo término, que es pro-

porcional al cuadrado de la posición del oscilador $\hat{q} = q_0(\hat{b} + \hat{b}^\dagger)$, indica una adición al potencial parabólico y por lo tanto actúa para aumentar la frecuencia del oscilador. El último término simplemente señala un corrimiento general para el espectro de energía y no es físicamente importante.

Con base en estas observaciones, podríamos suponer que el efecto neto del acoplamiento en la ecuación (3.39) es producir algún cambio en la frecuencia del oscilador. Por lo tanto, los estados propios de \hat{H}_{DC} son posiblemente estados de números comprimidos $S(\xi) |n_b\rangle$, donde $S(\xi) = e^{\frac{\xi}{2}(\hat{b}^2 - \hat{b}^{\dagger 2})}$ y ξ se determinará mediante la aplicación de la ecuación de valores propios

$$\hat{H}_{DC} = [S(\xi) |n_b\rangle] = E_{n_b}[S(\xi) |n_b\rangle]$$

Para determinar la solución de ξ usaremos un método similar al que se utilizó para la obtención de las ecuaciones (3.36) y (3.37). Para empezar, consideremos la ecuación (3.41) y la propuesta para el estado propio $S(\xi) |n_b\rangle$.

Entonces

$$\hat{H}_{DC}[S(\xi) |n_b\rangle] = \left[\hbar(\omega_b - 2g_{DC})\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hbar g_{DC} (\hat{b}^\dagger + \hat{b})^2 - \hbar g_{DC} \right] [S(\xi) |n_b\rangle] \quad (3.42)$$

Para obtener la acción de \hat{b} y \hat{b}^\dagger sobre $|n_b\rangle$ tenemos que pasarlos sobre $S(\xi)$. Sin embargo, $[\hat{b}, S(\xi)] \neq 0$ debido a la presencia de \hat{b}^\dagger en $S(\xi)$. De manera similar $[\hat{b}^\dagger, S(\xi)] \neq 0$ debido a la presencia de \hat{b} en $S(\xi)$. No obstante, podemos lograr la maniobra deseada usando la ecuación (3.11) combinada con el hecho de que $S(\xi)S^\dagger(\xi) = 1$.

Así

$$\begin{aligned} S^\dagger(\xi)\hat{b}^\dagger\hat{b}S(\xi) &= [S^\dagger(\xi)\hat{b}^\dagger S(\xi)][S^\dagger(\xi)\hat{b}S(\xi)] \\ &= (\hat{b}^\dagger \cosh \xi - \hat{b} \sinh \xi)(\hat{b} \cosh \xi - \hat{b}^\dagger \sinh \xi) \end{aligned}$$

puede ser usado para manipular $\hat{b}^\dagger\hat{b}S(\xi)$ en la ecuación (3.42).

Desarrollando

$$(\hat{b}^\dagger \cosh \xi - \hat{b} \sinh \xi)(\hat{b} \cosh \xi - \hat{b}^\dagger \sinh \xi) = \hat{b}^\dagger\hat{b} \cosh^2 \xi + \hat{b}\hat{b}^\dagger \sinh^2 \xi - \cosh \xi \sinh \xi (\hat{b}^{\dagger 2} + \hat{b}^2)$$

Usando el conmutador

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = \hat{b}\hat{b}^\dagger - \hat{b}^\dagger\hat{b} = 1 \Rightarrow \hat{b}\hat{b}^\dagger = \hat{b}^\dagger\hat{b} + 1$$

obtenemos

$$\begin{aligned} (\hat{b}^\dagger \cosh \xi - \hat{b} \sinh \xi)(\hat{b} \cosh \xi - \hat{b}^\dagger \sinh \xi) &= (\cosh^2 \xi + \sinh^2 \xi) \hat{b}^\dagger \hat{b} \\ &\quad - \cosh \xi \sinh \xi (\hat{b}^{\dagger 2} + \hat{b}^2) + \sinh^2 \xi \end{aligned}$$

y ahora usando las identidades

$$\cosh 2\xi = \cosh^2 \xi + \sinh^2 \xi \quad (3.43)$$

$$\sinh 2\xi = 2 \cosh \xi \sinh \xi \quad (3.44)$$

obtenemos

$$(\hat{b}^\dagger \cosh \xi - \hat{b} \sinh \xi)(\hat{b} \cosh \xi - \hat{b}^\dagger \sinh \xi) = (\cosh 2\xi) \hat{b}^\dagger \hat{b} - \frac{1}{2} \sinh 2\xi (\hat{b}^{\dagger 2} + \hat{b}^2) + \sinh^2 \xi$$

Tenemos también que

$$\begin{aligned} S^\dagger(\xi)(\hat{b}^\dagger + \hat{b})^2 S(\xi) &= [S^\dagger(\xi)(\hat{b}^\dagger + \hat{b})S(\xi)][S^\dagger(\xi)(\hat{b}^\dagger + \hat{b})S(\xi)] \\ &= [S^\dagger(\xi)(\hat{b}^\dagger + \hat{b})S(\xi)]^2 \\ &= [S^\dagger(\xi)\hat{b}^\dagger S(\xi) + S^\dagger(\xi)\hat{b}S(\xi)]^2 \\ &= (\hat{b}^\dagger + \hat{b})^2 (\cosh \xi - \sinh \xi)^2 \end{aligned}$$

puede ser utilizada para procesar $(\hat{b}^\dagger + \hat{b})^2 S(\xi)$ en la ecuación (3.42).

Procediendo de manera similar

$$\begin{aligned} (\hat{b}^\dagger + \hat{b})^2 (\cosh \xi - \sinh \xi)^2 &= (\hat{b}^{\dagger 2} + \hat{b}^2 + \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hat{b} \hat{b}^\dagger)(\cosh^2 \xi + \sinh^2 \xi - 2 \cosh \xi \sinh \xi) \\ &= (\hat{b}^{\dagger 2} + \hat{b}^2)(\cosh 2\xi - \sinh 2\xi) \\ &\quad + (2\hat{b}^\dagger \hat{b} + 1)(\cosh 2\xi - \sinh 2\xi) \\ &= (\cosh 2\xi - \sinh 2\xi)(\hat{b}^{\dagger 2} + \hat{b}^2) + 2(\cosh 2\xi - \sinh 2\xi)\hat{b}^\dagger \hat{b} \\ &\quad + (\cosh 2\xi - \sinh 2\xi) \end{aligned}$$

De esta manera obtenemos que

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{DC}[S(\xi) |n_b\rangle] &= S(\xi) \left\{ [\hbar(\omega_b - 2g_{DC}) \cosh 2\xi + 2\hbar g_{DC} (\cosh 2\xi - \sinh 2\xi)] \hat{b}^\dagger \hat{b} \right. \\
&\quad + \left[\hbar g_{DC} (\cosh 2\xi - \sinh 2\xi) - \frac{1}{2} \hbar(\omega_b - 2g_{DC}) \sinh 2\xi \right] (\hat{b}^{\dagger 2} + \hat{b}^2) \\
&\quad \left. + [\hbar g_{DC} (\cosh 2\xi - \sinh 2\xi) + \hbar(\omega_b - 2g_{DC}) \sinh^2 \xi - \hbar g_{DC}] \right\} |n_b\rangle \\
&= S(\xi) \left\{ [\hbar\omega_b \cosh 2\xi - 2\hbar g_{DC} \sinh 2\xi] \hat{b}^\dagger \hat{b} \right. \\
&\quad + \left[(\hbar g_{DC} \cosh 2\xi - \frac{1}{2} \hbar\omega_b \sinh 2\xi) (\hat{b}^{\dagger 2} + \hat{b}^2) \right. \\
&\quad \left. + \hbar g_{DC} (\cosh 2\xi - \sinh 2\xi) + \hbar(\omega_b - 2g_{DC}) \sinh^2 \xi - \hbar g_{DC} \right] |n_b\rangle \\
&= S(\xi) [M_1 \hat{b}^\dagger \hat{b} + M_2 (\hat{b}^{\dagger 2} + \hat{b}^2) + M_3] |n_b\rangle \tag{3.45}
\end{aligned}$$

donde

$$M_1 = \hbar\omega_b \cosh 2\xi - 2\hbar g_{DC} \sinh 2\xi \tag{3.46}$$

$$M_2 = \hbar g_{DC} \cosh 2\xi - \frac{1}{2} \hbar\omega_b \sinh 2\xi \tag{3.47}$$

$$M_3 = \hbar g_{DC} (\cosh 2\xi - \sinh 2\xi) + \hbar(\omega_b - 2g_{DC}) \sinh^2 \xi - \hbar g_{DC} \tag{3.48}$$

Se puede ver fácilmente que la ecuación (3.45) toma la forma de una ecuación de valores propios si el término $(\hat{b}^{\dagger 2} + \hat{b}^2)$ es eliminado ya que $|n_b\rangle$ es estado propio de los términos restantes. Así, haciendo igual a cero la ecuación (3.47) se obtiene la solución para ξ

$$\xi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2g_{DC}}{\omega_b} \right) \tag{3.49}$$

Considerando que $\hat{b}^\dagger \hat{b} |n_b\rangle = n_b |n_b\rangle$, entonces

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{DC}[S(\xi) |n_b\rangle] &= E_{n_b} [S(\xi) |n_b\rangle] \\
&= [n_b (\hbar\omega_b \cosh 2\xi - 2\hbar g_{DC} \sinh 2\xi) + \hbar g_{DC} (\cosh 2\xi - \sinh 2\xi) \\
&\quad + \hbar(\omega_b - 2g_{DC}) \sinh^2 \xi - \hbar g_{DC}] [S(\xi) |n_b\rangle] \\
&= [\hbar\omega_b (n_b \cosh 2\xi + \sinh^2 \xi) - \hbar g_{DC} (2n_b + 1) \sinh 2\xi \\
&\quad + \hbar g_{DC} \cosh 2\xi - 2\hbar g_{DC} \sinh^2 \xi - \hbar g_{DC}] [S(\xi) |n_b\rangle]
\end{aligned}$$

usando las propiedades trigonométricas (3.43)

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{DC}[S(\xi) |n_b\rangle] &= [\hbar\omega_b(n_b \cosh 2\xi + \sinh^2 \xi) - \hbar g_{DC}(2n_b + 1) \sinh 2\xi + \hbar g_{DC} \cosh^2 \xi \\
&\quad + \hbar g_{DC} \sinh^2 \xi - 2\hbar g_{DC} \sinh^2 \xi - \hbar g_{DC}][S(\xi) |n_b\rangle] \\
&= [\hbar\omega_b(n_b \cosh 2\xi + \sinh^2 \xi) - \hbar g_{DC}(2n_b + 1) \sinh 2\xi \\
&\quad + \hbar g_{DC}(\cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi) - \hbar g_{DC}][S(\xi) |n_b\rangle] \\
&= [\hbar\omega_b(n_b \cosh 2\xi + \sinh^2 \xi) - \hbar g_{DC}(2n_b + 1) \sinh 2\xi][S(\xi) |n_b\rangle]
\end{aligned}$$

Por lo que los valores propios están dados por

$$E_{n_b} = \hbar\omega_b (n_b \cosh 2\xi + \sinh^2 \xi) - \hbar g_{DC}(2n_b + 1) \sinh 2\xi \quad (3.50)$$

3.2.4 Sistema optomecánico con acoplamiento cuadrático

El hamiltoniano del siguiente sistema de interés es[7]-[10]

$$H_q = \hbar\omega_a a^\dagger a + \hbar\omega_b b^\dagger b + \hbar g_q a^\dagger a (b^\dagger + b)^2 \quad (3.51)$$

Este hamiltoniano puede obtenerse modificando ligeramente el arreglo de la figura 1 para pasar a la que se muestra en la figura 2.

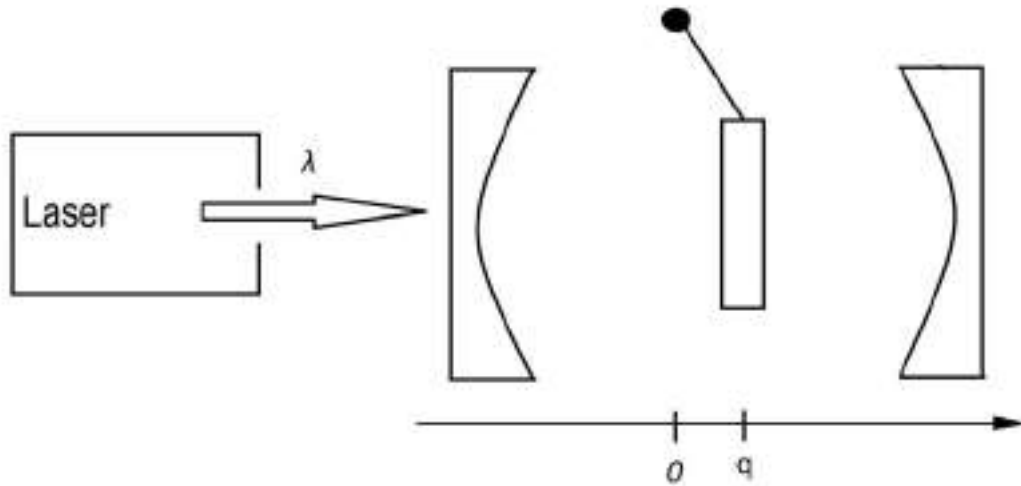


Figura 2. Diagrama del sistema optomecánico discutido en la sección 3.2.4. El arreglo involucra una cavidad óptica hecha de dos espejos, ambos fijos en su posición. Se incluye una membrana óptica parcialmente transparente suspendida con un péndulo dentro del resonador.

En esta nueva disposición, el modo óptico de frecuencia ω_a todavía es permitido por una cavidad hecha de dos espejos reflejantes, pero ahora estos espejos están fijos en su posición. El grado de libertad mecánico es proporcionado por una membrana semi-transparente colocada entre los dos espejos. Sin embargo, el término que representa la interacción entre los modos óptico y mecánico no puede obtenerse por un argumento clásico simple como el usado previo a la ecuación (3.34) en el caso de acoplamiento lineal. Una derivación rigurosa del hamiltoniano de la ecuación (3.51) es sencillo, pero muy largo y no será presentado aquí.

La configuración de la figura 2 se ha realizado en un experimento pionero y constituye la base de las propuestas que describen la exploración del comportamiento cuántico

en los pequeños seres vivos como los virus.[11]

En este punto, hemos acumulado suficiente intuición y técnica de las secciones anteriores para indicar la solución del problema de valores propios de la ecuación (3.51) sin dar demasiado detalle. Claramente $[\hat{a}^\dagger \hat{a}, H_q] = 0$ y la energía del oscilador a comprime la posición del oscilador b . Por lo tanto, podemos proponer un estado propio de la forma $|n_a\rangle S(\eta) |n_b\rangle$, donde $S(\eta) = e^{\frac{\eta}{2}(\hat{b}^2 - \hat{b}^{\dagger 2})}$ y η se determinará aplicando la ecuación de valores propios

$$\hat{H}_q[|n_a\rangle S(\eta) |n_b\rangle] = E_{n_a, n_b}[|n_a\rangle S(\eta) |n_b\rangle].$$

Aplicando la técnica utilizada para encontrar ξ , obtenemos

$$\eta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\left(1 + \frac{\omega_b}{2g_q n_a} \right)^2 \right] \quad (3.52)$$

con el valor propio correspondiente dado por

$$E_{n_a, n_b} = \hbar \left(\omega_a n_a - \frac{\omega_b}{2} \right) + \hbar \left(n_b + \frac{1}{2} \right) [\omega_b (\omega_b + 4g_q n_a)]^{\frac{1}{2}} \quad (3.53)$$

En el apéndice A3 hemos incluido un par de ejemplos adicionales donde se utiliza el formalismo de segunda cuantización.

Conclusiones

Como inicio de este trabajo se hizo una revisión breve del problema del oscilador armónico simple en el contexto de la mecánica cuántica. Se expresó el hamiltoniano usando los operadores de creación y aniquilación y de esa manera se obtuvo el espectro de energías del sistema. Luego se tomó en consideración los dos tipos de sistemas: sistemas con partículas bosónicas y sistemas con partículas fermiónicas.

Posteriormente se presentó el formalismo de segunda cuantización partiendo de la formulación lagrangiana para campos. Aquí también se consideraron dos campos, un campo bosónico y un campo fermiónico, y al tomar en cuenta que las partículas de este último cumplen con el principio de exclusión de Pauli se observó que la manera de operar de los operadores de creación y aniquilación es diferente para cada campo. Para ilustrar el uso de este formalismo se presentó su aplicación para el estudio de una línea elástica discreta, en donde se planteó el hamiltoniano y se obtuvo el espectro de energías.

Por último se analizó el caso de dos osciladores acoplados, introduciendo los operadores de desplazamiento y de compresión, con los que se puede encontrar la forma en la que cambia la posición y el momento del oscilador. Se estudiaron específicamente dos casos con diferente tipo de acoplamiento: Primero se estudió un sistema en el que los osciladores tienen un acoplamiento lineal, se estableció el hamiltoniano y se obtuvo el espectro de energías. El otro caso estudiado fue el de un sistema optomecánico con acoplamiento lineal y después donde se considera además un acoplamiento cuadrático, donde también se obtuvo el espectro de energías de los sistemas.

Es conveniente mencionar que el estudio del formalismo de segunda cuantización pocas veces se presenta en los cursos de mecánica cuántica de nivel licenciatura, por lo que este trabajo podría ser de utilidad para aquéllos estudiantes que deseen abundar en este campo.

Finalmente, podríamos concluir afirmando que si se tiene un sistema de muchas partículas idénticas puede ser sencillo, si se conoce el hamiltoniano del sistema, encontrar la energía de cada estado utilizando el formalismo de segunda cuantización.

Apéndices

A.1 Relación de Baker-Campbell-Hausdorff

La relación de Baker-Campbell-Hausdorff establece que para dos operadores A y B se cumple que

$$e^{i\lambda A} B e^{-i\lambda A} = B + i\lambda[A, B] + \frac{(i\lambda)^2}{2!} [A, [A, B]] + \dots$$

con λ cualquier número complejo.

La expresión anterior puede obtenerse desarrollando directamente las exponenciales que tienen como argumento al operador A :

$$\begin{aligned} e^{i\lambda A} B e^{-i\lambda A} &= \left(1 + i\lambda A + \frac{(i\lambda)^2}{2!} A^2 + \dots \right) B \left(1 - i\lambda A + \frac{(i\lambda)^2}{2!} A^2 + \dots \right) \\ &= \left(B + i\lambda AB + \frac{(i\lambda)^2}{2!} A^2 B + \dots \right) \left(1 - i\lambda A + \frac{(i\lambda)^2}{2!} A^2 + \dots \right) \\ &= B + i\lambda(AB - BA) + \frac{(i\lambda)^2}{2!} (AAB + BAA) - (i\lambda)^2 ABA + \dots \\ &= B + i\lambda[A, B] + \frac{(i\lambda)^2}{2!} (AAB - 2ABA + BAA) + \dots \\ &= B + i\lambda[A, B] + \frac{(i\lambda)^2}{2!} (A(AB - BA) + (BA - AB)A) + \dots \\ &= B + i\lambda[A, B] + \frac{(i\lambda)^2}{2!} (A[A, B] + [B, A]A) + \dots \\ &= B + i\lambda[A, B] + \frac{(i\lambda)^2}{2!} (A[A, B] - [A, B]A) + \dots \\ &= B + i\lambda[A, B] + \frac{(i\lambda)^2}{2!} [A, [A, B]] + \dots \end{aligned}$$

A.2 Obtención de la expresión para el operador de compresión

El operador de compresión (3.10) está definido como

$$S(\xi) = e^{\frac{\xi}{2}(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2})}$$

donde ξ es un numero real que determina el grado de compresión. Su efecto sobre los operadores de creación y aniquilación, ecuación (3.11), puede obtenerse de la siguiente manera.

Si definimos al operador A como

$$\hat{A} = \hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2$$

entonces el operador de compresión puede expresarse como

$$S(\xi) = e^{-i\lambda\hat{A}}$$

con $\lambda = -i\xi/2$.

Ahora bien, si $B = \hat{a}$, entonces

$$\begin{aligned} [A, B] &= [\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2, \hat{a}] = [\hat{a}^{\dagger 2}, \hat{a}] - [\hat{a}^2, \hat{a}] = \hat{a}^{\dagger} [\hat{a}^{\dagger}, \hat{a}] + [\hat{a}^{\dagger}, \hat{a}] \hat{a}^{\dagger} = -2\hat{a}^{\dagger} \\ [A, [A, B]] &= [\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2, -2\hat{a}^{\dagger}] = -2 [\hat{a}^{\dagger 2}, \hat{a}^{\dagger}] = -2 [\hat{a}^{\dagger 2}, \hat{a}^{\dagger}] + 2 [\hat{a}^2, \hat{a}^{\dagger}] = 4\hat{a} \end{aligned}$$

Utilizamos ahora estos resultados directamente en la relación de Baker-Campbell-Hausdorff para obtener:

$$S^{\dagger}(\xi) \hat{a} S(\xi) = \hat{a} + \frac{\xi}{2} (-2\hat{a}^{\dagger}) + \frac{(\frac{\xi}{2})^2}{2!} (4\hat{a}) + \dots = \hat{a} - \xi\hat{a}^{\dagger} + \frac{\xi^2}{2!}\hat{a} + \dots = \hat{a} \cosh \xi - \hat{a}^{\dagger} \sinh \xi$$

Si ahora tomamos $B = \hat{a}^{\dagger}$ resulta

$$\begin{aligned} [A, B] &= [\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2, \hat{a}^{\dagger}] = [\hat{a}^{\dagger 2}, \hat{a}^{\dagger}] - [\hat{a}^2, \hat{a}^{\dagger}] = \hat{a} [\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}] + [\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}] \hat{a} = 2\hat{a} \\ [A, [A, B]] &= [\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2, 2\hat{a}] = 2 [\hat{a}^{\dagger 2}, \hat{a}] = 2 [\hat{a}^{\dagger 2}, \hat{a}] + 2 [\hat{a}^2, \hat{a}] = -4\hat{a}^{\dagger} \end{aligned}$$

y usando de nuevo la relación Baker-Campbell-Hausdorff:

$$S^{\dagger}(\xi) \hat{a}^{\dagger} S(\xi) = \hat{a}^{\dagger} + \frac{\xi}{2} (-2\hat{a}) + \frac{(\frac{\xi}{2})^2}{2!} (4\hat{a}^{\dagger}) + \dots = \hat{a}^{\dagger} - \xi\hat{a} + \frac{\xi^2}{2!}\hat{a}^{\dagger} + \dots = \hat{a}^{\dagger} \cosh \xi - \hat{a} \sinh \xi$$

A.3 Ejemplos adicionales

Consideraremos dos ejemplos adicionales que pueden abordarse de manera similar a lo realizado previamente en el Capítulo 3.

A.3.1 Dos osciladores con acoplamiento lineal y cuadrático

Consideremos un sistema de dos osciladores, tanto con acoplamiento lineal como cuadrático, de manera que

$$\hat{H}_{lq} = \hbar\omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hbar g_l \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) + \hbar g_q \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b})^2 \quad (\text{A.1})$$

Para obtener los valores propios de H_{lq} asumiremos que los estados propios del sistema pueden escribirse como

$$|\psi\rangle = |n_a\rangle S(\xi) D(\alpha) |n_b\rangle$$

es decir, como un producto de estados de número óptico y estados de número mecánico desplazados y comprimidos.

Aplicamos el hamiltoniano (A.1) a estos estados:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{lq} |\psi\rangle &= \left[\hbar\omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hbar g_l \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) + \hbar g_q \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b})^2 \right] |n_a\rangle S(\xi) D(\alpha) |n_b\rangle \\ &= \left[\hbar\omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hbar g_l \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \right. \\ &\quad \left. + \hbar g_q \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^{\dagger 2} + \hat{b}^2 + \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hat{b} \hat{b}^\dagger) \right] |n_a\rangle S(\xi) D(\alpha) |n_b\rangle \\ &= \left[\hbar\omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + (\hbar\omega_b + \hbar g_q \hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hbar g_q \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{b} \hat{b}^\dagger \right. \\ &\quad \left. + \hbar g_q \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^{\dagger 2} + \hat{b}^2) + \hbar g_l \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \right] |n_a\rangle S(\xi) D(\alpha) |n_b\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

En el capítulo anterior obtuvimos que

$$\begin{aligned} \hat{b}^\dagger D(\alpha) &= D(\alpha) (\hat{b}^\dagger + \alpha) \\ \hat{b} D(\alpha) &= D(\alpha) (\hat{b} + \alpha) \\ \hat{b}^\dagger S(\xi) &= S(\xi) (\hat{b}^\dagger \cosh \xi - \hat{b} \sinh \xi) \\ \hat{b} S(\xi) &= S(\xi) (\hat{b} \cosh \xi - \hat{b}^\dagger \sinh \xi) \end{aligned}$$

Además, los operadores \hat{a}^\dagger y \hat{a} no afectan a los estados $|n_b\rangle$ y los operadores \hat{b} y \hat{b}^\dagger no

afectan a los estados $|n_a\rangle$.

Con esto en consideración desarrollamos cada uno de los términos en (A.2):

$$\hbar\omega_a\hat{a}^\dagger\hat{a}|\psi\rangle = \hbar\omega_a\hat{a}^\dagger\hat{a}|n_a\rangle S(\xi)D(\alpha)|n_b\rangle = \hbar\omega_a n_a |n_a\rangle S(\xi)D(\alpha)|n_b\rangle$$

$$\begin{aligned} (\hbar\omega_b + \hbar g_q \hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{b}^\dagger \hat{b} |\psi\rangle &= (\hbar\omega_b + \hbar g_q \hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{b}^\dagger \hat{b} |n_a\rangle S(\xi)D(\alpha)|n_b\rangle \\ &= (\hbar\omega_b + \hbar g_q n_a) |n_a\rangle S(\xi) (\hat{b}^\dagger \cosh \xi - \hat{b} \sinh \xi) \\ &\quad (\hat{b} \cosh \xi - \hat{b}^\dagger \sinh \xi) D(\alpha) |n_b\rangle \\ &= (\hbar\omega_b + \hbar g_q n_a) |n_a\rangle S(\xi) \\ &\quad \left[\hat{b}^\dagger \hat{b} \cosh^2 \xi + \hat{b} \hat{b}^\dagger \sinh^2 \xi - \cosh \xi \sinh \xi (\hat{b}^{\dagger 2} + \hat{b}^2) \right] D(\alpha) |n_b\rangle \\ &= (\hbar\omega_b + \hbar g_q n_a) |n_a\rangle S(\xi) D(\alpha) \\ &\quad \left\{ \cosh^2 \xi (\hat{b}^\dagger + \alpha) (\hat{b} + \alpha) + \sinh^2 \xi (\hat{b} + \alpha) (\hat{b}^\dagger + \alpha) \right. \\ &\quad \left. - \sinh \xi \cosh \xi \left[(\hat{b}^\dagger + \alpha)^2 + (\hat{b} + \alpha)^2 \right] \right\} |n_b\rangle \\ &= (\hbar\omega_b + \hbar g_q n_a) |n_a\rangle S(\xi) D(\alpha) \\ &\quad \left[\cosh^2 \xi (\hat{b}^\dagger \hat{b} + \alpha \hat{b}^\dagger + \alpha \hat{b} + \alpha^2) + \sinh^2 \xi (\hat{b} \hat{b}^\dagger + \alpha \hat{b}^\dagger + \alpha \hat{b} + \alpha^2) \right. \\ &\quad \left. - \cosh \xi \sinh \xi (\hat{b}^{\dagger 2} + \hat{b}^2 + 2\alpha \hat{b}^\dagger + 2\alpha \hat{b} + 2\alpha^2) \right] |n_b\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hbar g_q a^\dagger a \hat{b} \hat{b}^\dagger |\psi\rangle &= \hbar g_q a^\dagger a b b^\dagger |n_a\rangle S(\xi)D(\alpha)|n_b\rangle \\ &= \hbar g_q n_a |n_a\rangle S(\xi) (b \cosh \xi - b^\dagger \sinh \xi) (b^\dagger \cosh \xi - b \sinh \xi) D(\alpha) |n_b\rangle \\ &= \hbar g_q n_a |n_a\rangle S(\xi) \\ &\quad \left[b b^\dagger \cosh^2 \xi + b^\dagger b \sinh^2 \xi - \cosh \xi \sinh \xi (b^{\dagger 2} + b^2) \right] D(\alpha) |n_b\rangle \\ &= \hbar g_q n_a |n_a\rangle S(\xi) D(\alpha) \left\{ (b + \alpha) (b^\dagger + \alpha) \cosh^2 \xi + (b^\dagger + \alpha) (b + \alpha) \sinh^2 \xi \right. \\ &\quad \left. - \cosh \xi \sinh \xi \left[b^2 + b^{\dagger 2} + 2\alpha (b^\dagger + b) + 2\alpha^2 \right] \right\} |n_b\rangle \\ &= \hbar g_q n_a |n_a\rangle S(\xi) D(\alpha) \\ &\quad \left\{ \cosh^2 \xi [b b^\dagger + \alpha (b + b^\dagger) + \alpha^2] + \sinh^2 \xi [b^\dagger b + \alpha (b + b^\dagger) + \alpha^2] \right. \\ &\quad \left. - \cosh \xi \sinh \xi \left[b^2 + b^{\dagger 2} + 2\alpha (b + b^\dagger) + 2\alpha^2 \right] \right\} |n_b\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hbar g_q \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^{\dagger 2} + \hat{b}^2) |\psi\rangle &= \hbar g_q \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^{\dagger 2} + \hat{b}^2) |n_a\rangle S(\xi) D(\alpha) |n_b\rangle \\
&= \hbar g_q n_a |n_a\rangle (\hat{b}^{\dagger 2} + \hat{b}^2) S(\xi) D(\alpha) |n_b\rangle \\
&= \hbar g_q n_a |n_a\rangle S(\xi) \left[(\hat{b}^\dagger \cosh \xi - \hat{b} \sinh \xi)^2 + (\hat{b} \cosh \xi - \hat{b}^\dagger \sinh \xi)^2 \right] D(\alpha) |n_b\rangle \\
&= \hbar g_q n_a |n_a\rangle S(\xi) D(\alpha) \left[\left((\hat{b}^\dagger + \alpha)^2 + (\hat{b} + \alpha)^2 \right) (\cosh^2 \xi + \sinh^2 \xi) \right. \\
&\quad \left. - 2 \cosh \xi \sinh \xi \left((\hat{b}^\dagger + \alpha) (\hat{b} + \alpha) + (\hat{b} + \alpha) (\hat{b}^\dagger + \alpha) \right) \right] |n_b\rangle
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\hbar g_l \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) |\psi\rangle &= \hbar g_l \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) |n_a\rangle S(\xi) D(\alpha) |n_b\rangle \\
&= \hbar g_l n_a |n_a\rangle (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) S(\xi) D(\alpha) |n_b\rangle \\
&= \hbar g_l n_a |n_a\rangle S(\xi) \left[\hat{b}^\dagger (\cosh \xi - \sinh \xi) + \hat{b} (\cosh \xi - \sinh \xi) \right] D(\alpha) |n_b\rangle \\
&= \hbar g_l n_a |n_a\rangle S(\xi) D(\alpha) \left[(\hat{b}^\dagger + \alpha) (\cosh \xi - \sinh \xi) \right. \\
&\quad \left. + (\hat{b} + \alpha) (\cosh \xi - \sinh \xi) \right] |n_b\rangle \\
&= \hbar g_l n_a |n_a\rangle S(\xi) D(\alpha) \left[(\hat{b}^\dagger + b) (\cosh \xi - \sinh \xi) \right. \\
&\quad \left. + 2\alpha (\cosh \xi - \sinh \xi) \right] |n_b\rangle
\end{aligned}$$

Así, la ecuación (A.2) toma la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{lq} |\psi\rangle &= |n_a\rangle S(\xi) D(\alpha) \left\{ \hbar \omega_a n_a + (\hbar \omega_b + g_q n_a) \left[\alpha (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) (\cosh \xi - \sinh \xi)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \hat{b}^\dagger \hat{b} \cosh^2 \xi + \hat{b} \hat{b}^\dagger \sinh^2 \xi - \cosh \xi \sinh \xi (\hat{b}^{\dagger 2} + \hat{b}^2) + \alpha^2 (\cosh \xi - \sinh \xi)^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + \hbar g_l n_a \left[(\hat{b}^\dagger + \hat{b}) (\cosh \xi - \sinh \xi) + 2\alpha (\cosh \xi - \sinh \xi) \right] \right. \\
&\quad \left. + \hbar g_q n_a \left[\cosh \xi (\hat{b}^{\dagger 2} + 2\alpha \hat{b}^\dagger) + \sinh^2 \xi (\hat{b}^2 + 2\alpha \hat{b}) - \cosh \xi \sinh \xi (\hat{b}^\dagger \hat{b} + \hat{b} \hat{b}^\dagger) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2\alpha (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \cosh \xi \sinh \xi + \alpha^2 (\cosh \xi - \sinh \xi)^2 + \cosh^2 \xi (\hat{b}^2 + 2\alpha \hat{b}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sinh^2 \xi (\hat{b}^{\dagger 2} + 2\alpha \hat{b}^\dagger) - \cosh \xi \sinh \xi (\hat{b}^\dagger \hat{b} + \hat{b} \hat{b}^\dagger) - 2\alpha (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \cosh \xi \sinh \xi \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \alpha^2 (\cosh \xi - \sinh \xi)^2 + \hat{b} \hat{b}^\dagger \cosh^2 \xi + \hat{b}^\dagger \hat{b} \sinh^2 \xi + \alpha (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) (\cosh \xi - \sinh \xi)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \alpha^2 (\cosh \xi - \sinh \xi)^2 - \cosh \xi \sinh \xi (\hat{b}^{\dagger 2} + \hat{b}^2) \right] \right\} |n_b\rangle
\end{aligned}$$

Reacomodando términos

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{lq}|\psi\rangle &= |n_a\rangle S(\xi)D(\alpha) \left\{ [-(\hbar\omega_b + \hbar g_q n_a) \cosh \xi \sinh \xi + \hbar g_q n_a (\cosh \xi - \sinh \xi)^2] \right. \\
&\quad (b^\dagger{}^2 + b^2) + \left. \left\{ \alpha(\hbar\omega_b + \hbar g_q n_a) (\cosh \xi - \sinh \xi)^2 + \hbar g_l n_a (\cosh \xi - \sinh \xi) \right. \right. \\
&\quad + \hbar g_q n_a [-4\alpha \cosh \xi \sinh \xi + \alpha (\cosh \xi - \sinh \xi)^2 + 2\alpha (\cosh^2 \xi + \sinh^2 \xi)] \left. \right\} \\
&\quad (b^\dagger + b) + [\cosh^2 \xi (\hbar\omega_b + \hbar g_q n_a) + \hbar g_l n_a (\sinh^2 \xi - 2 \cosh \xi \sinh \xi)] (b^\dagger b) \\
&\quad + [\sinh^2 \xi (\hbar\omega_b + \hbar g_q n_a) + \hbar g_l n_a (\cosh^2 \xi - 2 \cosh \xi \sinh \xi)] (bb^\dagger) \\
&\quad + [\hbar\omega_a n_a + \alpha^2 (\hbar g_q n_a) (\cosh \xi - \sinh \xi)^2 + 2\alpha \hbar g_l n_a (\cosh \xi - \sinh \xi) \\
&\quad + 3\alpha \hbar g_q n_a (\cosh \xi - \sinh \xi)^2] \left. \right\} |n_b\rangle
\end{aligned}$$

o bien

$$\hat{H}_{lq}|\psi\rangle = |n_a\rangle S(\xi)D(\alpha) \left[M_1(\hat{b}^{\dagger 2} + \hat{b}^2) + M_2(\hat{b}^\dagger + \hat{b}) + M_3\hat{b}^\dagger\hat{b} + M_4\hat{b}\hat{b}^\dagger + M_5 \right] |n_b\rangle$$

donde

$$\begin{aligned}
M_1 &= -(\hbar\omega_b + \hbar g_q n_a) \cosh \xi \sinh \xi + \hbar g_q n_a (\cosh \xi - \sinh \xi)^2 \\
M_2 &= \alpha(\hbar\omega_b + \hbar g_q n_a) (\cosh \xi - \sinh \xi)^2 + \hbar g_l n_a (\cosh \xi - \sinh \xi) \\
&\quad + \hbar g_q n_a [-4\alpha \cosh \xi \sinh \xi + \alpha (\cosh \xi - \sinh \xi)^2 + 2\alpha (\cosh^2 \xi + \sinh^2 \xi)] \\
M_3 &= \cosh^2 \xi (\hbar\omega_b + \hbar g_q n_a) + \hbar g_l n_a (\sinh^2 \xi - 2 \cosh \xi \sinh \xi) \\
M_4 &= (\hbar\omega_b + \hbar g_q n_a) + \hbar g_l n_a (\cosh^2 \xi - 2 \cosh \xi \sinh \xi) \\
M_5 &= \left[\begin{aligned} &\hbar\omega_a n_a + \alpha^2 (\hbar g_q n_a) (\cosh \xi - \sinh \xi)^2 + 2\alpha \hbar g_l n_a (\cosh \xi - \sinh \xi) \\ &+ 3\alpha \hbar g_q n_a (\cosh \xi - \sinh \xi)^2 \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

Para que $|\psi\rangle$ sea estado propio de H_{lq} se requiere que los términos que involucran a $(\hat{b}^{\dagger 2} + \hat{b}^2)$ y $(\hat{b}^\dagger + \hat{b})$ se anulen, esto es, se tomará a M_1 y M_2 como cero, por lo que los valores propios resultan

$$\begin{aligned}
E_{lq} &= [\cosh^2 \xi (\hbar\omega_b + \hbar g_q n_a) + \hbar g_l n_a (\sinh^2 \xi - 2 \cosh \xi \sinh \xi)] n_b \\
&\quad + [(\hbar\omega_b + \hbar g_q n_a) + \hbar g_l n_a (\cosh^2 \xi - 2 \cosh \xi \sinh \xi)] (n_b + 1) \\
&\quad + \hbar\omega_a n_a + \alpha^2 (\hbar g_q n_a) (\cosh \xi - \sinh \xi)^2 + 2\alpha \hbar g_l n_a (\cosh \xi - \sinh \xi) \\
&\quad + 3\alpha \hbar g_q n_a (\cosh \xi - \sinh \xi)^2
\end{aligned}$$

A.3.2 Divisor de haz óptico

El hamiltoniano de un divisor de haz óptico, mostrado en la figura 3, está dado por

$$\hat{H}_{BS} = \hbar\omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hbar g_{BS} (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{a} \hat{b}^\dagger)$$

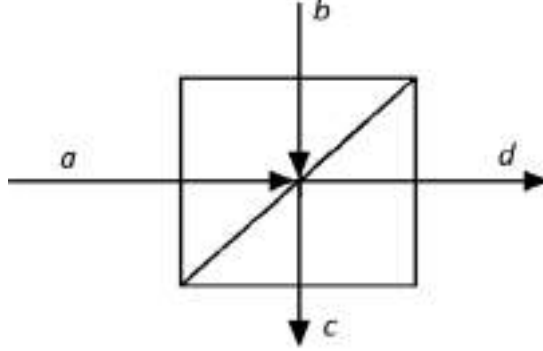


Figura 3. Esquema de un divisor de haz. Haces ópticos, etiquetados por a y b , inciden sobre dos puertos del divisor de haz; los haces transmitidos son etiquetados por c y d .

En este caso vamos a mostrar que los cuantos de los osciladores individuales no se conservan, de modo que $[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{H}_{BS}] \neq 0$ y $[\hat{b}^\dagger \hat{b}, \hat{H}_{BS}] \neq 0$. Sin embargo, el número total de cuantos es una constante de movimiento, esto es,

$$[\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b}, \hat{H}_{BS}] = 0$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{H}_{BS}] &= \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{H}_{BS} - \hat{H}_{BS} \hat{a}^\dagger \hat{a} \\ &= \hbar\omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar\omega_b \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{b}^\dagger \hat{b} + \hbar g_{BS} \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{a} \hat{b}^\dagger) \\ &\quad - \hbar\omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hbar\omega_b \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hbar g_{BS} (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{a} \hat{b}^\dagger) \hat{a}^\dagger \hat{a} \\ &= \hbar\omega_b (\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{b}^\dagger \hat{b} - \hat{b}^\dagger \hat{b} \hat{a}^\dagger \hat{a}) + \hbar g_{BS} [\hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{a} \hat{b}^\dagger) - (\hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{a} \hat{b}^\dagger) \hat{a}^\dagger \hat{a}] \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

como los operadores $\hat{b}^\dagger \hat{b}$ y $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ conmutan, entonces

$$[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{H}_{BS}] = \hbar g_{BS} (\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} \hat{b}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{b} - \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{b}^\dagger) \neq 0 \quad (\text{A.4})$$

De manera similar, obtenemos

$$\begin{aligned}
\left[\hat{b}^\dagger\hat{b}, \hat{H}_{BS}\right] &= \hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{H}_{BS} - \hat{H}_{BS}\hat{b}^\dagger\hat{b} \\
&= \hbar\omega_a\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hbar\omega_b\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{b}^\dagger\hat{b} + \hbar g_{BS}\hat{b}^\dagger\hat{b}(\hat{a}^\dagger\hat{b} + \hat{a}\hat{b}^\dagger) \\
&\quad - \hbar\omega_a\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{b}^\dagger\hat{b} - \hbar\omega_b\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{b}^\dagger\hat{b} - \hbar g_{BS}(\hat{a}^\dagger\hat{b} + \hat{a}\hat{b}^\dagger)\hat{b}^\dagger\hat{b} \\
&= \hbar g_{BS} \left(\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{b}\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{b}^\dagger\hat{b} - \hat{b}\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{a}^\dagger - \hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{a} \right) \neq 0
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Usemos estos resultados para obtener que

$$\begin{aligned}
\left[\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{b}^\dagger\hat{b}, \hat{H}_{BS}\right] &= \left[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{H}_{BS}\right] + \left[\hat{b}^\dagger\hat{b}, \hat{H}_{BS}\right] \\
&= \hbar g_{BS}(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{b} + \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}\hat{b}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{b} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{b}^\dagger) \\
&\quad + \hbar g_{BS} \left(\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{b}\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{b}^\dagger\hat{b} - \hat{b}\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{a}^\dagger - \hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger\hat{b}\hat{a} \right) \\
&= \hbar g_{BS} \left[\hat{b}^\dagger\hat{a}(\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}) + (\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger)\hat{a}\hat{b}^\dagger \right. \\
&\quad \left. + (\hat{b}^\dagger\hat{b} - \hat{b}\hat{b}^\dagger)\hat{b}\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{b}^\dagger(\hat{b}\hat{b}^\dagger - \hat{b}^\dagger\hat{b}) \right]
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Como

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1 \tag{A.7}$$

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = \hat{b}\hat{b}^\dagger - \hat{b}^\dagger\hat{b} = 1 \tag{A.8}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\left[\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{b}^\dagger\hat{b}, \hat{H}_{BS}\right] &= \hbar g_{BS}(\hat{b}\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{b}^\dagger - \hat{b}\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{b}^\dagger) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Bibliografía

- [1] Luis de la Peña, "Introducción a la mecánica cuántica", FCE, UNAM, 2006.
- [2] C. Kittel, "Quantum Theory of Solids", Wiley, 1987.
- [3] M. Bhattacharya, H. Shi, and S. Preble, "Coupled second-quantized oscillators", *Am. J. Phys.* 81, 267, 10.1119/1.4792696 (2013)
- [4] C. C. Gerry and P. L. Knight, "Introductory Quantum Optics" (Cambridge U.P., Cambridge, 2008), Chap. 7.
- [5] S. Bose, K. Jacobs, and P. L. Knight, "Preparation of nonclassical states in cavities with a moving mirror," *Phys. Rev. A* 56, 4175–4186 (1997).
- [6] P. Rabl, "Photon blockade effect in optomechanical systems," *Phys. Rev. Lett.* 107, 063601-1–063601-6 (2011).
- [7] A. Rai and G. S. Agarwal, "Quantum optical spring," *Phys. Rev. A* 78, 013831-1–013831-6 (2008).
- [8] J. D. Thompson, B. M. Zwickl, A. M. Jayich, F. Marquardt, S. M. Girvin, and J. G. E. Harris, "Strong dispersive coupling of a high-finesse cavity to a micromechanical membrane," *Nature* 452, 72–75 (2008).
- [9] M. Bhattacharya, H. Uys and P. Meystre, "Optomechanical trapping and cooling of partially reflective mirrors," *Phys. Rev. A* 77, 033819-1–033819-12 (2008).
- [10] C. Biancofiore, M. Karuza, M. Galassi, R. Natali, P. Tombesi, G. Di Giuseppe, and D. Vitali, "Quantum dynamics of an optical cavity coupled to a thin semitransparent membrane: Effect of membrane absorption," *Phys. Rev. A* 84, 033814-1–033814-12 (2011).
- [11] O. Romero-Isart, M. L. Juan, R. Quidant, and J. I. Cirac, "Toward quantum superposition of living organisms," *New J. Phys.* 12, 033015-1–033015-16 (2010).
- [12] C. K. Law, "Interaction between a moving mirror and radiation pressure: A Hamiltonian formulation," *Phys. Rev. A* 51, 2537–2541 (1995).