

UNIVERSIDAD DE SONORA

ESCUELA DE ALTOS ESTUDIOS



APLICACIONES DEL EFECTO DOPPLER

T E S I S

que para obtener el título de

LICENCIADO EN FISICA

p r e s e n t a

JOSE MARTINEZ ROCHA

Hermosillo, Son.

Dic. 1974

A MIS PADRES:

APLICACIONES DEL EFECTO DOPPLER

CONTENIDO

INTRODUCCION.

CAPITULO 1 Efecto Doppler.

1.1 Efecto Doppler.

1.2 Tipos de corrimiento en la frecuencia en el efecto doppler.

1.3 Aplicaciones en Astrofísica.

a) Medición de la velocidad de la tierra.

b) Medición de la rotación del sol.

c) Medición de la velocidad radial de las estrellas.

d) Medición de velocidad de rotación de galaxas.

CAPITULO 2 Velocimetría Doppler con laser.

2.1 Introducción.

2.2 Teoría clásica de coherencia.

2.3 Detección heterodina.

2.4 Velocimetría doppler con laser.

a) Oscilador heterodino local.

b) Arreglo heterodino diferencial.

c) Arreglo diferencial heterodino simétrico.

1.5 Discusión.

1.6 Conclusiones.

CAPITULO 3 Efecto doppler en un interferometro de michelson.

Apéndices.

INTRODUCCION.

El objeto de este trabajo es para conocer algunas aplicaciones del fenómeno físico llamado "efecto doppler". Se hace una breve revisión de las aplicaciones en astrofísica y mas recientemente en velocimetría doppler en optica, y además se analiza el fenómeno cuando uno de los espejos de un interferómetro de Michelson está sujeto a desplazamientos longitudinales.

En el primer capítulo describiremos brevemente el fenómeno de "efecto doppler" conocido también como corrimiento doppler, deduciendo la fórmula para dicho corrimiento en una forma sencilla.

En este mismo capítulo daremos a conocer también como se ha empleado dicho efecto doppler para hacer mediciones en astrofísica tales como la velocidad de rotación de la tierra, el sol las, galaxias y el ya muy conocido corrimiento al rojo que presenta en general el universo.

En el capítulo segundo se describe como es posible medir velocidades de partículas utilizando la teoría de la interacción de dos haces luminosos la cual nos permite que medio del efecto doppler producido se pueden medir dichas velocidades.

En el capítulo tercero haremos una aplicación especial del efecto doppler al interferómetro de Michelson, para determinar la velocidad de algún objeto en movimiento que en este caso será el espejo de uno de los brazos de dicho interferómetro, y se obtienen resultados numéricos para ver la factibilidad de lograrlos experimentalmente.

Deseo agradecer sinceramente al Dr.Chandrasekhar Roychoudhuri, por haberme sugerido el tema de tesis y por su gran interés que siempre mostró por esclarecer las dudas y dificultades que en el desarrollo de mi trabajo se presentaron, al M. en C. Alejandro Cornejo quien siempre mostró gran entusiasmo y dedicación en orientar y revisar mi trabajo en todo su desarrollo, sin lo cual me hubiera sido muy difícil llegar a terminar mi trabajo.

Deseo también manifestar mi agradecimiento al Dr.Guillermo Haro B. por haberme permitido desarrollar mi trabajo en el I.N. A.O.E. del cual es Director General. Y en forma muy especial a todas aquellas personas de este Instituto que de alguna u otra manera se interesaron en colaborar conmigo en el desarrollo de dicho trabajo.

CAPITULO I

1.1 EFECTO DOPPLER.

Si tenemos una fuente Emisora de señales y un receptor de señales; podemos asegurar que si el movimiento relativo de ambos es cero, entonces:

a) Si la fuente envía señales con cierta frecuencia, estas señales serán recibidas por el receptor con la misma frecuencia con que la fuente las envió.



FIG. 1.1

La frecuencia de las señales emitidas por la fuente F en A es ν_F .

La frecuencia de las señales recibidas por el receptor R en B es también $\nu_F = \nu_R$

b) Si la fuente se desplaza en dirección del receptor con una velocidad v_s y el receptor está en reposo, entonces las señales tienen una velocidad constante v_s en el medio en que se propagan, estarán espacialmente más cerca una de otra debido al movimiento de la fuente.

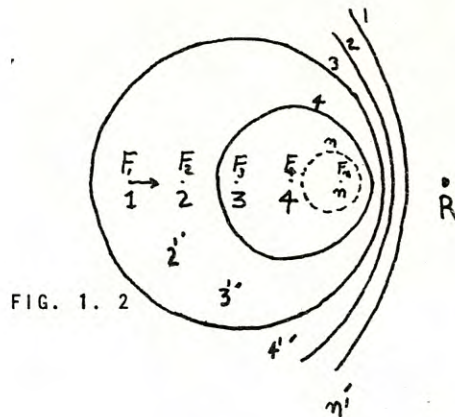


FIG. 1. 2

Donde

Distancia recorrida por la fuente en un intervalo de tiempo t puede ser expresada como

$$\Delta F = F_{(n+1)} - F_n$$

si ΔS es la distancia que recorre la señal en un tiempo t entonces $\Delta S = S_{(n+1)} - S_n$, entonces

$$\Delta S = v_s t \quad \text{y} \quad \Delta F = v_f t$$

Como vemos en la figura 1.2, las distancias entre las señales en la dirección del movimiento son más cortas que en la dirección contraria, por lo tanto recibirá más señales en el mismo intervalo t de tiempo, ya que la velocidad de la señal es constante en el medio transmisor. Por lo tanto el receptor detectará más señales en un intervalo de tiempo t , y la frecuencia con que recibe las señales aumentará o sea que será mayor que la frecuencia de la fuente.

Si por el contrario la fuente se está alejando del receptor, entonces las distancias que separan a las señales en dirección al receptor aumentarán y por lo tanto el tiempo entre señal y señal son recibidas disminuirá. Como se ve en la figura 1.3.

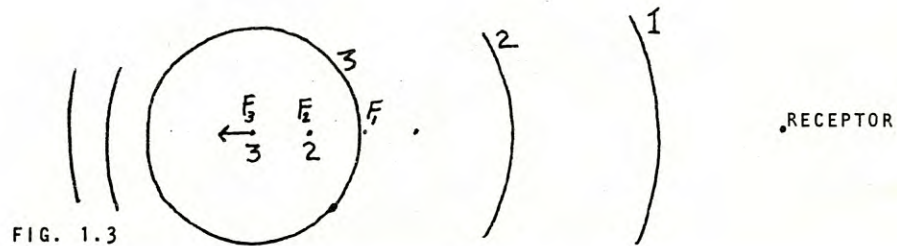


FIG. 1.3

Donde 1, 2, y 3 son las señales enviadas por F, F, y F respectivamente cuando se encontraban en los puntos 1, 2, y 3.

Este fenómeno se conoce en física con el nombre de "Efecto Doppler" y le fué asignado por haber sido Christian Doppler, un físico checoslovaco, quien lo descubrió (y vivió en los años 1803-1853) y lo aplicó primeramente al sonido. Dicho fenómeno tiene las siguientes explicaciones cualitativa y cuantitativa.

Enseguida deduciremos para los casos mas sencillos las fórmulas correspondientes al efecto Doppler en términos de la longitud de onda y de la frecuencia.

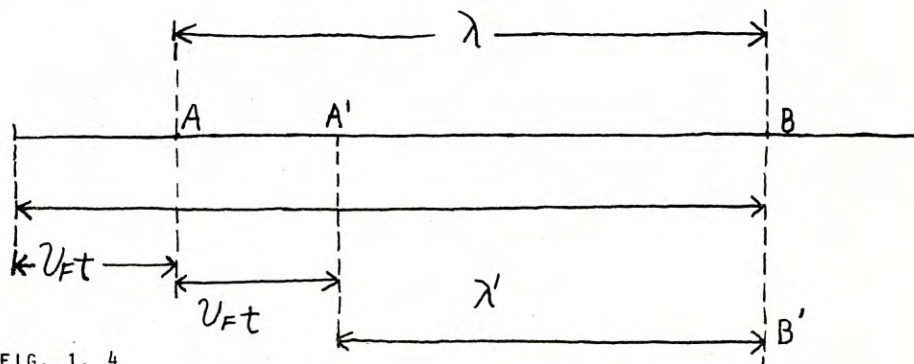


FIG. 1. 4

Supongamos que de A se manda una señal luminosa de longitud de onda λ , tal que cuando esa señal llega a B, la fuente se comienza a mover con una velocidad v_F . Entonces la siguiente señal mandada se encuentra inicialmente en A' y tendrá que recorrer una distancia λ' menor que λ si se está acercando y mayor si se está alejando, por lo tanto:

$$\lambda' = \lambda \pm v_F t$$

Donde t es el periodo de emisión de la fuente, como $\lambda = v_s t$, $t = \frac{\lambda}{v_s}$

$$\lambda' = \lambda \pm \frac{\lambda v_F}{v_s}; \quad \lambda' = \lambda \left(1 \pm \frac{v_F}{v_s}\right) \quad 1.1$$

Si aplicamos dicha formula a una fuente puntual luminosa entonces la velocidad de la fuente será $v_F = v$, y la velocidad de la señal $v_s = c$, donde c es la velocidad de la luz.

Entonces, λ será la longitud de onda de la luz enviada por la fuente y λ' la longitud de onda de la luz recibida por el receptor. Por lo tanto:

$$\lambda' = \lambda \left(1 \pm \frac{v}{c}\right) \quad 1.2$$

Esta sera la formula del efecto Doppler para una señal luminosa.

La frecuencia de dicha luz estara dada por

$$\lambda = ct = \frac{c}{\nu} \quad \text{Donde } t \text{ es el periodo y } \nu \text{ la frecuencia, y analogamente.}$$

$$\lambda' = ct' = \frac{c}{\nu'} \quad \text{Sustituyendo en la ecuación 1.2 tendremos:}$$

$$\frac{c}{\nu'} = \frac{c}{\nu} \left(1 \pm \frac{v}{c}\right) \quad 1.3$$

De aquí deducimos que $\nu' = \frac{\nu}{\left(1 \pm \frac{v}{c}\right)}$

Una expresión matemática que exprese el fenómeno denominado corrimiento al rojo puede ser obtenido a partir de la ecuación 1.3 desarrollando en serie el denominador y considerando los dos primeros terminos se obtiene: $\nu' - \nu = \mp \nu \frac{v}{c}$

es decir

$$\Delta \nu = \mp \nu \frac{v}{c} \quad 1.4$$

1.2 Algunas aplicaciones del efecto doppler en problemas

de astrofísica y que en forma breve estudiaremos a continuación.

- a) Medición de la velocidad de la tierra en su órbita.
- b) Medición de la rotación del sol.
- c) Medición de la velocidad radial de las estrellas.
- d) Medición de velocidad de rotación de galaxias*.

* ver apéndice al final del capítulo.

2. Tipos de corrimientos en la frecuencia en el efecto doppler.

Antes de explicar los fenómenos anteriores queremos definir los términos corrimiento al rojo y al azul como lo habíamos explicado en los párrafos anteriores cuando la velocidad relativa de una fuente luminosa era diferente de cero, producía cambios en la frecuencia de la luz emitida, de acuerdo con la ecuación 1.4

$$\Delta \nu = \mp \nu \frac{v}{c}$$

Donde la frecuencia aumentara, si la fuente se mueve en dirección del observador y habrá en dicho espectro un desplazamiento hacia el azul (corrimiento al azul), en comparación con un espectro conocido del laboratorio.

La frecuencia disminuirá, si la fuente se está alejando del observador produciéndose en el espectro un desplazamiento hacia el rojo (corrimiento al rojo) en comparación con un espectro del laboratorio ya conocido.

Estos dos desplazamientos hacia el azul y hacia el rojo nos podrán servir para determinar con gran precisión la magnitud de

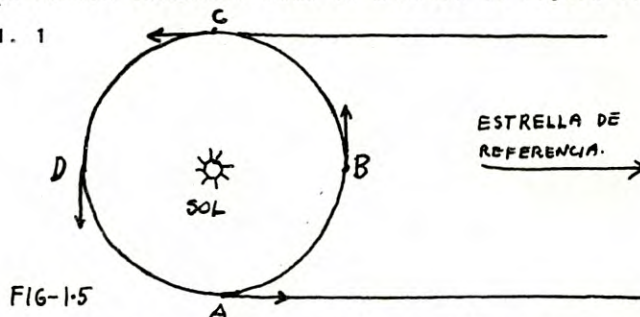
la velocidad relativa de la fuente y el observador. Entonces en lo siguiente entenderemos que corrimiento al rojo equivale a una velocidad de alejamiento y corrimiento al azul a una velocidad de acercamiento.

1. 3 Aplicaciones en astroffsica.

a) Velocidad de la tierra en su órbita

En nuestra primera aplicación utilizaremos el efecto doppler para medir la velocidad de la tierra en su órbita.

Tomemos¹ como referencia una estrella que se encuentra en el plano de la órbita terrestre como lo muestra la figura 1.5 1 ver apendice 1. 1



1. En el punto A habrá un corrimiento del espectro de la estrella hacia el azul debido a la velocidad de acercamiento de la tierra hacia la estrella.

2. En el punto B y D se observara corrimiento apreciable.

3. Sin embargo en el punto C se observara un desplazamiento al rojo lo que indica que se esta alejando.

Midiendo dichos desplazamientos en A y C se puede calcular la velocidad orbital de acercamiento en A y de alejamiento en C

conocida la velocidad, se multiplica por el tiempo en que tarda en una órbita y se obtiene exactamente la dimensión de dicha órbita y por lo tanto el diámetro y su radio (ver apéndice 1.2)

b) Velocidad de rotación del sol.

Si se desea medir la velocidad de rotación del sol se observa la luz solar como se indica en la figura 1.6 se aplica un método semejante al descrito en el caso de la rotación de la tierra.

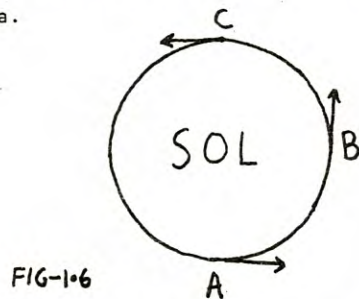


FIG-1.6

Se observa el espectro en A, B y C y se observan datos semejantes al de la tierra o sea corrimiento al rojo en C en B no se observa corrimiento apreciable.

c) Medición de la velocidad radial de las estrellas² la velocidad radial de las estrellas puede ser medida encontrando el desplazamiento de las líneas espectrales de las estrellas y también puede ser usado para medir su rotación (semejante al sol). Es fácil de aplicar este método si el desplazamiento doppler es pequeño y si es grande puede ser difícil para localizar las líneas correspondientes al espectro que se tome como referencia. Así si observamos que el espectro se corre hacia el azul y se determina dicho desplazamiento en la frecuencia, se puede entonces calcular la velocidad radial de acercamiento. Si se observa corrimiento al rojo y se determina dicho corrimiento se puede determinar la velocidad radial de alejamiento, y como en el caso del sol también se puede

medir la rotación de dicha estrella.

d) El corrimiento al rojo de las galaxias³

Las estrellas se mueven en todas direcciones en el universo y el efecto doppler puede ser observado encontrándose que en algunas ocasiones existe corrimiento al violeta y en otras al rojo y en general las estrellas que apenas se observan se desplazan al rojo.

Estas observaciones se conocen como desplazamiento galáctico al rojo.

Habría que hacernos una pregunta ¿porqué predominantemente al rojo?

Esta fue tratada de contestar de muchas maneras pero la más contundente de todas es que, si todas las galaxias ofrecen un espectro con desplazamiento al rojo, entonces dichas galaxias se están alejando tal vez, de algún centro común donde quizá toda la masa del universo estuvo concentrada; siguiendo dicho desplazamiento al rojo se podrá encontrar tal vez el centro de donde comenzó el universo a expandirse.

Por medio del mismo efecto doppler se supone la teoría de que el universo está en expansión, y el origen del universo es considerado entonces como explosión de esta concentración de materia; en la cual la tierra y en general nuestro sistema solar no tiene ninguna posición privilegiada.

También se supone que el universo se expande y se contrae y que posiblemente se está expandiendo y después volverá a concentrarse. La medición de los espectros en los bordes de las galaxias

nos dan muestras de corrimiento al rojo en un borde y en el otro extremo corrimiento al violeta. Indicando con esto que tal vez existe un movimiento de rotación de dichas galaxias.

El principio físico es simple, la instrumentación es bastante difícil para determinar el efecto doppler, ya que muchas veces es necesario, determinar pequeños corrimientos con grandes precisiones.

* Ejemplos de desplazamientos doppler

Nebulosa en	Distancia en años luz	Velocidad medida en kilometros/seg.
Virgo	43,000,000	1 200
Osa Mayor	560,000,000	14 880
Corona Borientalis	728,000,000	21 440
Botero	1,290,000,000	49 040
Hydra	1,960,000,000	60 800

1.- Modern Astronomy (segunda edición)

D.Scott Birney

Allyn an Bacon 1974 pag. 54

2.- Modern Astronomy 1974 psh. 225,377,378,379

3.- Optical Physics

S.G.Lipson y H.Lipson

Cambridge university press pag. 407,408 apendice 1.1,

1. 2

Si la luz observada tiene una frecuencia de 10^{14} y el desplazamiento $\Delta\nu \approx 10^{10}$ entonces $\Delta\nu = \nu \frac{v_T}{c}$

$$v_T = \frac{c \Delta\nu}{\nu} = \frac{3 \times 10^5 \times 10^{10} \frac{\text{km}}{\text{seg}}}{10^{14}} = 30 \frac{\text{km}}{\text{seg}}$$

Velocidad de la tierra v_t en su órbita

$$v_t = 30 \frac{\text{km}}{\text{seg}}$$

CAPITULO 2

VELOCIMETRIA DOPPLER CON LASER

INTRODUCCION

Esta tecnica se dio a conocer en los últimos años de la decada de los sesentas y se a ido perfeccionando en los primeros años de la presente, dicho metodo nos permite conocer las velocidades de partículas, que se mueven en flujo turbulento, laminar y vertice, pero para ello es necesario medir la fotocorriente proveniente de la mezcla de dos haces luminosos que cruzan por una misma región del flujo de partículas.

El objeto de este capitulo es dar los fundamentos teóricos y experimentales en que se basa dicha tecla.

Su funcionamiento esta basado en la detección heterodina de dos señales, y dicha detección posee su fundamento en la teoría clásica de coherencia.

En este capítulo expondremos primero brevemente la teoría clásica de coherencia, en relación a parametros experimentales de medición tales como la intensidad de la corriente, la frecuencia, y despues la teoría de detección heterodina nos interesa sobre velocímetro doppler. Puesto que en el experimento la cantidad a medir es el poder espectral en función de ω , donde el poder espectral

de la fotocorriente esta dado por el teorema de Winer-Khinchine¹.

$$P_i(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} C_i(\tau) d\tau \quad 2.1$$

Donde la función de auto correlación $C_i(\tau)$ de la corriente es igual a:

$$C_i(\tau) = \langle i(t)i(t+\tau) \rangle = e^2 \langle W^{(1)}(t)W^{(1)}(t+\tau) \rangle \quad 2.2$$

Donde τ es el intervalo de tiempo en que ocurre una detección, i es la fotocorriente, $W(t)$ es la probabilidad de que ocurra una detección.

Como en este caso la fotocorriente $i(t)$ consiste de una serie de pulsos discretos y supondremos que ellos son infinitamente angostos.

Como $C_i(\tau)$ tendra dos contribuciones distintas en t y $t+\tau$ si los electrones son distintos.

$$\langle W^{(1)}(t)W^{(1)}(t+\tau) \rangle = \langle W^{(2)}(t,t+\tau) \rangle = \sigma^2 \langle I \rangle^2 g^{(2)}(t) \quad 2.3$$

Si el mismo electron ocurre en $t+\tau$ tendremos

$$\langle W^{(1)}(t)W^{(1)}(t+\tau) \rangle = \langle W^{(1)}(t) \rangle \delta(\tau) = \sigma \langle I \rangle \delta(\tau) \quad 2.4$$

y entonces

$$C_i(\tau) = e^2 \sigma \langle I \rangle \delta(\tau) + e^2 \sigma^2 \langle I \rangle^2 g^{(2)}(\tau) \quad 2.5$$

$$C_i(\tau) = e \langle i \rangle \delta(\tau) + \langle i \rangle^2 g^{(2)}(\tau)$$

Estos parametros pueden ser expresados de acuerdo a la teoría clásica de coherencia.

2. Teoría clásica de coherencia.

Si definimos un campo eléctrico $E(t)$, la probabilidad por unidad de tiempo de una emisión fotoelectrónica de el fotocátodo iluminado por dicho campo² es igual a:

$$W^{(1)}(t) = \sigma E^*(t) E(t)$$

Donde $E^*(t) E(t)$ es definida como la intensidad instantánea $I(t)$ y σ es la eficiencia cuantica clasica del fotocátodo.

$$\text{La fotocorriente } i(t) = eW(t) = e\sigma E^*(t) E(t)$$

donde e es la carga del electron; y la probabilidad de que en un intervalo de tiempo comprendido entre t y $t+\tau$ sea emitido otro fotoelectron es:

$$W^{(2)}(t, t+\tau) = \sigma^2 E^*(t) E(t) E^*(t+\tau) E(t+\tau) \quad 2.7$$

Necesitaremos conocer también la corriente promedio $i(t)$ y el promedio de $W^{(2)}(t, t+\tau)$ los cuales para un campo estacionario pueden ser expresadas como:

$$\langle i(t) \rangle = e \langle W^{(1)}(t) \rangle = e\sigma \langle E^*(t) E(t) \rangle = e\sigma \langle I \rangle \quad 2.8 \text{ a)}$$

$$\langle W^{(2)}(t, t+\tau) \rangle = \sigma^2 \langle E^*(t) E(t) E^*(t+\tau) E(t+\tau) \rangle = \sigma^2 \langle I \rangle^2 g^{(2)}(\tau) \quad 2.8$$

$$\text{DONDE } g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle E^*(t) E(t) E^*(t+\tau) E(t+\tau) \rangle}{\langle E^* E \rangle^2} \quad 2.9$$

3. Deteccion Heterodina.

Anteriormente consideramos el espectro de la fotocorriente producido por un campo. Enseguida estudiaremos la interacción entre el campo producido por la luz dispersada por las partículas en movimiento y un campo local coherente conocido que servirá de referencia.

Sea el campo local producido por un oscilador expresado como: $E_{L_0}(t) = E_{L_0}^0 \exp\{-i\omega_{L_0} t\}$ y EL CAMPO AFECTADO POR LAS PARTICULAS E_s

Las fotocorrientes producidas por cada uno de ellos seran

$$\langle i_s(t) \rangle = e\sigma \langle E_s^*(t) E_s(t) \rangle \quad 2.10$$

$$\langle i_{L_0}(t) \rangle = e\sigma \langle E_{L_0}^*(t) E_{L_0}(t) \rangle = e\sigma |E_{L_0}|^2 \quad 2.11$$

$$\text{DONDE } |E_{L_0}|^2 = cT\tau. \quad 2.12$$

La función de autocorrelación de la corriente es de acuerdo con las ecuaciones 2. 5 es:

$$C_i(\tau) = e^2 \sigma \langle E^*(t) E(t) \rangle + e^2 \sigma^2 \langle E^*(t) E(t) E^*(t+\tau) E(t+\tau) \rangle \quad 2.13$$

$$\text{Si sustituimos los campos } E(t) = E_s(t) + E_{L_0}(t) \quad 2.14$$

$$E(t) = E_s(t) + E_{L_0}^0 \exp\{-i\omega_{L_0} t\} \quad 2.15$$

En la ecuación 2. 5 tendremos el resultado siguiente

$$C_i(\tau) = e^2 \sigma \langle (E_{L_0}^*(t) + E_s^*(t))(E_s(t) + E_{L_0}(t)) \rangle +$$

$$e^2 \sigma^2 \langle (E_s^*(t) + E_{L_0}^*(t))(E_s(t) + E_{L_0}(t))(E_s^*(t+\tau) + E_{L_0}^*(t+\tau))(E_s(t+\tau) + E_{L_0}(t+\tau)) \rangle \quad 2.16$$

Al desarrollar cada uno de los terminos, se eliminarán algunos de ellos y nos quedará solamente: (ver apendice 2. 1)

$$C_i(\tau) = e^2 \sigma \delta(\tau) \langle I_{L_0} + I_s \rangle + e^2 \sigma^2 \langle I_{L_0}^2 + 2I_{L_0} I_s + I_{L_0} \left\{ e^{i\omega_{L_0} \tau} E_s^*(t) E_s(t+\tau) + e^{-i\omega_{L_0} \tau} E_s(t) E_s^*(t+\tau) \right\} \rangle \quad 2.17$$

Si despreciamos I_s considerando que $I_{L_0} \gg I_s$ entonces

$$C_i(\tau) = e^2 \sigma \delta(\tau) I_{L_0} + e^2 \sigma^2 \langle I_{L_0}^2 \rangle + e^2 \sigma^2 I_{L_0} \langle I_s \rangle \left\langle e^{i\omega_{L_0} \tau} g_s^{(1)}(\tau) + e^{-i\omega_{L_0} \tau} g_s^{(1)*}(\tau) \right\rangle \quad 2.18$$

$$\text{por donde } g_s^{(1)}(\tau) = \frac{E_s^*(t) E_s(t+\tau) E_s(t) E_s^*(t)}{\langle E_s^*(t) E_s(t) \rangle^2} \quad 2.19$$

por lo tanto

$$C_i(\tau) = e^2 I_{L_0} \delta(\tau) + i_{L_0}^2 + i_{L_0} \langle i_s \rangle \left\{ e^{i\omega_{L_0} \tau} g_s^{(1)}(\tau) + e^{-i\omega_{L_0} \tau} g_s^{(1)*}(\tau) \right\} \quad 2.20$$

Sustituyendo en 2.1 tendremos

$$P_i(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} C_i(\tau) d\tau = \frac{e^{i\omega_0}}{2\pi} + \omega_0 \delta(\omega) + \frac{\omega_0 \langle i \rangle}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi\tau} \left\{ e^{i\omega_0\tau} g_s^{(i)}(\tau) + e^{-i\omega_0\tau} g_s^{*(i)}(\tau) \right\} d\tau \quad 2.21$$

Esta expresión es la que nos interesa pues la aplicaremos en la técnica de velocimetría.

4. Velocimetría Doppler con Laser.

Midiendo la fotocorriente de la luz que proviene del flujo o de partículas iluminadas por un Laser es posible medir la velocidad de dichas partículas.

Entonces para determinar la velocidad de las partículas se hace incidir sobre ellas un haz de luz la cual es dispersada por las partículas debido a que las partículas se están moviendo dicho haz sufrirá una variación en su frecuencia de acuerdo con el efecto doppler. Por lo tanto, necesitaremos otra señal de la misma frecuencia que doppler de la frecuencia de la luz dispersada y poder determinar así la velocidad de las partículas dispersadas.

Existen tres arreglos ópticos fundamentales para la medición del fenómeno anterior: el oscilador heterodino local, el heterodino diferencial y el heterodino diferencial simétrico.

Aquí desarrollaremos la teoría del primero, siguiendo a Durst y Whitelaw (apendice 2. 2) los mismos procedimientos se utilizaran para resolver los otros dos.

a) Oscilador Heterodino Local.

El arreglo optico del oscilador heterodino local es mostrado en la fig. 2.1, la emisión de la fuente de luz del Laser es dividido inicialmente por un espejo semiplatado (divisor de haz), en dos componentes los cuales son enfocados posteriormente en una pequeña región de dispersión, donde se interceptan.

Si un laser (monocromatico) es usado como fuente, de frecuencia ω y cuyo vector de onda es K_1 , E incidiendo en n partículas en la región dispersora. Entonces, el campo electrico dispersado hacia el fotoconductor el cual esta lejos de la región dispersora puede ser aproximadamente (wang 1971)³

$$E_s(t) = \sum_{p=1}^m A_p \exp \left\{ -i\omega_{L_0} \tau + i(K_2 - K_1) \cdot v_p t + i\phi_p \right\} \quad 2.22$$

Donde A_p es una constante que depende de la intensidad de la luz, de la sección de dispersión, etc., es el factor de fase dependiendo de la posición de la partícula, v_p es la velocidad de la partícula la cual se supone constante mientras cruza la región dispersora, y K_2 es el vector de la onda dispersada. En dirección del fotodetector el campo eléctrico de la onda de referencia u oscilador local, a el fotodetector es entonces

$$E_{L_0} = A_0 \exp \left\{ -i\omega_{L_0} t + i\phi_0 \right\}$$

Donde A_0 es la amplitud, y ϕ_0 es el factor de fase. Mezclando este campo dispersado sobre una pequeña área A del fotodetector será expresado como:

$$P_i(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} C_i(\tau) d\tau \quad 2.24$$

De la ecuación 2.1 donde

$$C_i(\tau) = e^2 \sigma \delta(\tau) \langle I_{i0} + I_s \rangle + e^2 \sigma^2 \langle I_{i0}^2 + 2I_{i0}I_s + I_{i0} \left\{ e^{i\omega_0\tau} E_s^*(t) E_s(t+\tau) + e^{-i\omega_0\tau} E_s(t) E_s^*(t+\tau) \right\} \rangle$$

y sustituyendo en esta última expresión los valores de

$$I_{i0}, I_s, E_s^*(t), E_s(t+\tau), E_s(t) \text{ y } E_s^*(t+\tau) \text{ SE OBTIENE}$$

(VER APENDICE 2.2)

$$C_i(\tau) = e^2 \sigma \delta(\tau) \left\langle A_0^2 + \sum_{p=1}^m A_p^2 \right\rangle + e^2 \sigma^2 \left(A_0^2 + \sum_{p=1}^m A_p^2 \right) + e^2 \sigma^2 A_0^2 \sum_{p=1}^m A_p^2 \left(\frac{e^{i(k_2-k_1) \cdot v_p \tau} - e^{-i(k_2-k_1) \cdot v_p \tau}}{(k_2-k_1) \cdot v_p} \right) + 2\sigma^2 \sum_{p=1}^m \sum_{\substack{j=1 \\ p \neq j}}^m A_p^2 A_j^2 e^{-i\{(k_2-k_1) \cdot (v_p - v_j)\} \tau} \quad 2.25$$

Integrando la ecuación 2.24 después de sustituir en ella

$$\text{la ec 2.25 tendremos } P_i(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} C_i(\tau) d\tau = e^2 \sigma \left(A_0^2 + \sum_{p=1}^m A_p^2 \right) +$$

$$e^2 \sigma^2 \left(A_0^2 + \sum_{p=1}^m A_p^2 \right) \delta(\omega) + \frac{e^2 \sigma^2 A_0^2}{(k_2-k_1)} \sum_{p=1}^m A_p^2 \delta\{\omega \pm (k_2-k_1) \cdot v_p\} +$$

$$\frac{2e^2 \sigma^2}{(k_2-k_1)(v_p - v_j)} \sum_{p=1}^m \sum_{\substack{j=1 \\ p \neq j}}^m A_p^2 A_j^2 \delta\{\omega + (k_2-k_1) \cdot (v_p - v_j)\} \quad 2.26$$

En la ecuación 2.26 consideramos que $A_0^2 \gg \sum_{p=1}^m A_p^2$ Nos QUEDA

$$P_d(\omega) = e^2 \sigma^2 A_0^4 \delta(\omega) + \frac{e^2 \sigma^2 A_0^2}{(K_2 - K_1)} \sum_{p=1}^m A_p^2 \delta\{\omega \pm (K_2 - K_1) \cdot v_p\} + e^2 \sigma^2 A_0^2$$

Aquí el primer término es la componente DC, la cual es fácilmente bloqueada; el segundo término es el de la señal mezclada; y el último término es el de ruido de choque.

Sea $v_p^k = (K_2 - K_1) \cdot v_p$ la velocidad de la dirección

de $(K_2 - K_1)$ u en unidades de longitud de onda por segundo. El corrimiento de la frecuencia medido entonces es:

$$\omega = v_p^k \quad 2.28$$

Si conocemos el corrimiento de la frecuencia de esta Ec 2.28, entonces podremos determinar la velocidad de las partículas, que es lo que deseamos determinar.

b) Arreglo Heterodino Diferencial.

Si consideramos ahora dos fuentes incidentes de la misma frecuencia ω_{L0} pero en diferentes direcciones, con vectores de onda K_1 y K_2 como se muestra en la figura 2.2. La luz dispersada es entonces colectada en un gran ángulo sólido Ω . El campo eléctrico dispersado en la dirección de K el cual está dentro de Ω es entonces (ver apéndice 2.3)

$$E_s(t) = \sum_{p=1}^m A_p \exp(-i \omega_{L0} t) \left[\exp\{-i(K - K_1) \cdot v_p t + i \phi_p\} + \exp\{-i(K - K_2) \cdot v_p t + i \phi_p\} \right] \quad 2.29$$

La densidad espectral heterodina diferencial sera entonces (desarrollando los mismos pasos que en 2.25) tendremos.

$$P_i(\omega) = \sigma e^2 \sum_{p=1}^m A_p^2 + e^2 \sigma^2 \sum_{p=1}^m A_p^4 \delta \left\{ \omega \mp (k_1 - k_2) \cdot v_p \right\} + e^2 \sigma^2 \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^m \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^m A_p^2 A_q^2 \left[\delta \left\{ \frac{\omega \mp (k_1 - k_2) \cdot v_p}{C_1} \right\} + \delta \left\{ \frac{\omega \pm (k_1 - k_2) \cdot (v_p - v_q)}{C_2} \right\} + \delta \left\{ \frac{\omega \mp (k_1 - k_2) \cdot v_p}{C_3} - \frac{\pm (k_1 - k_2) \cdot (v_p - v_q)}{C_4} \right\} + \delta \left\{ \frac{\omega \mp (k_1 - k_2) \cdot v_p \pm (k_1 - k_2) \cdot (v_p - v_q)}{C_5} \right\} \right] \quad 2.30$$

Donde las C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 , son constantes de integración.

Si las partículas se mueven con la misma velocidad tendremos:

$$P_E^2(\omega) = e^2 \sigma^2 \sum_{p=1}^m A_p^2 \delta \left\{ \omega \mp (k_1 - k_2) \cdot v_p \right\} + 2e^2 \sigma^2 \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^m \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^m A_p^2 A_q^2 \left[\delta \left\{ \frac{\omega \mp (k_1 - k_2) \cdot v_p}{C_3} \right\} \right] + e^2 \sigma \sum_{p=1}^m A_p^2 \quad 2.31$$

La anterior ecuación (2.31) muestra que la medida de la pulsación de la frecuencia, el desplazamiento doppler; es debido a la velocidad de la partícula en dirección $(k_1 - k_2)$, por lo tanto depende solo de la dirección de k_1 y k_2 de las fuentes incidentes y es independiente de la dispersada en dirección k

c) El arreglo diferencial heterodino simétrico.

La figura 2.3 muestra la luz dispersada colectada en dos direcciones diferentes k_1 y k_2 , y mezcladas en el fotodetector, para una fuente Laser incidente de frecuencia ω_0 y vector de onda k . El campo eléctrico total dispersado en dirección k_1 y k_2 está dado por:

$$E_s(t) = \sum_{p=1}^m A_p \exp(-i\omega_0 t) \left[\exp\{-i(k_1 - k) \cdot v_p t + i\phi_p\} + \right.$$

$$\exp\{-i(k_2 - k) \cdot v_p t + i\phi_p\} \quad 2.32$$

La densidad espectral heterodina obtenida es exactamente igual a la obtenida en la ecuación (2.30) sin embargo este es un heterodino diferencial inverso o sea aquí k_1 y k_2 son dos vectores dispersados y k es el vector de onda incidente. Si suponemos que todas las partículas tienen la misma velocidad, entonces la ecuación que obtendremos será la misma EC 2.31. De aquí que el heterodino diferencial y el heterodino simétrico diferencial son esencialmente el mismo, excepto por las consideraciones del cociente señal a ruido lo cual discutiremos después.

5. DISCUSION.

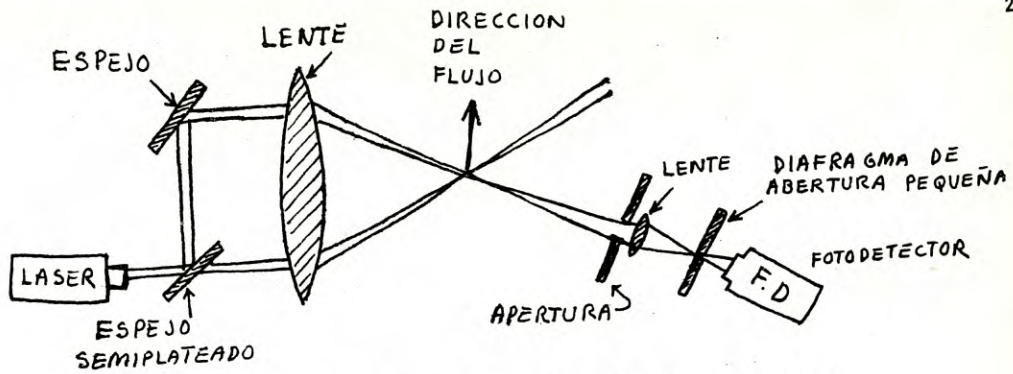
Comparando la EC 2.27 y 2.31, se tiene que los tres arreglos anteriores dan la misma desviación de la frecuencia, es decir

$$\omega = (k_2 - k_1) \cdot v_p = v_p^k \quad 2.33$$

De aquí que pueden servir de base para medir la velocidad. Sus ventajas dependen de su aplicación particular y de su cociente señal a ruido.

Enseguida trataremos de explicar basandonos, en el cociente de señal a ruido, cuales son las ventajas y desventajas de los tres arreglos.

En el experimento de mezcla optica el ruido térmico y el de corrientes oscuras puede ser despreciado ya que no producen corrientes comparables con la señal por lo que solo tomaremos en



ARREGLO DEL OSCILADOR HETERODINO LOCAL
FIG-2.1

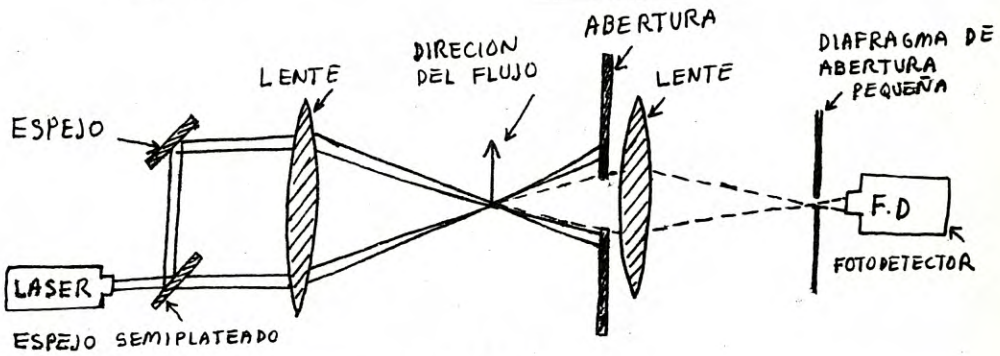
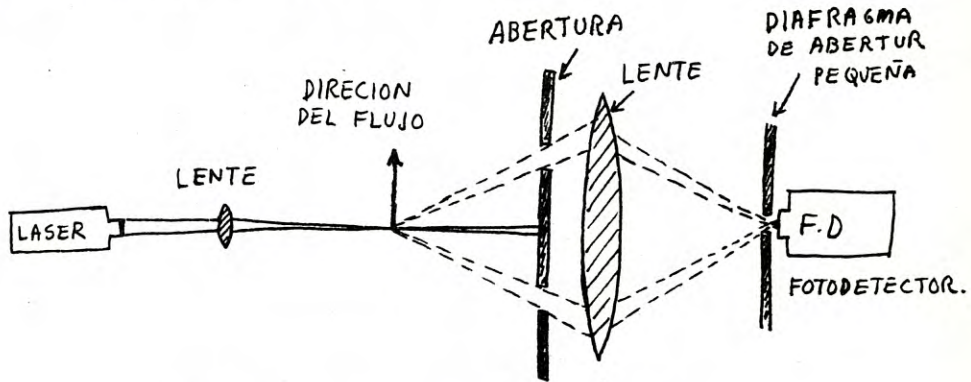


FIG-2.2 ARRELO HETERODINO LOCAL



ARREGLO HETERODINO SIMETRICO
FIG-2.3

cuenta el ruido producido por la fotocorriente de los pulsos fotoelectricos, entonces el cociente del espectro de la señal al del ruido producido por la fotocorriente, es llamado señal de predetección del cociente señal a ruido y es expresado como

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{PRED}} = \frac{P_i \text{ SEÑAL}(\omega) \Delta\omega}{P_i \text{ RUIDO}(\omega) \Delta\omega} \quad 2.34$$

Donde $\Delta\omega$ es el ancho del filtro de predetección. Para el espectro Homodino el cociente señal a ruido es máxima a $\omega=0$, para el caso de una línea gausiana en la mitad del ancho Γ , el $\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{PRED}}$ A $\omega=0$ ES¹

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{PRED}} = \frac{1}{N} \frac{i}{e} \frac{\epsilon^2}{\Gamma}; \quad 2.35$$

DONDE ϵ ES LA EFICIENCIA DE LA MEZCLA OPTICA

CON η EFICIENCIA CUANTICA,

$\left(\frac{d\eta}{dt}\right)_A$ ES EL NUMERO DE FOTONES POR SEGUNDO QUE CRUZAN POR EL AREA A COHERENTE.

DONDE $i = e\eta \left(\frac{d\eta}{dt}\right)_A N$

ENTONCES

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{PRED}} = \eta \epsilon^2 \left(\frac{d\eta}{dt}\right)_A \frac{1}{\Gamma} \quad 2.36$$

De esta ecuación es facil concluir que una colección de muchas áreas coherentes usando un sistema de colección de gran apertura en ningún modo mejora el cociente señal de ruido sobre la obtenida sobre una simple area coherente.

En un caso simple de una región cúbica de dispersión y de arista , el area coherente en el campo de dispersión es (cumins and swinney 1970)

$$A \simeq R^2 \left(\frac{\lambda_L^2}{\lambda^2}\right), \quad \Omega = \frac{A}{R^2} \simeq \frac{\lambda_L^2}{\lambda^2} \quad 2.37$$

Donde λ_L^2 es la longitud de la onda, Ω es el ángulo sólido coherente y R es la distancia del detector y el dispersor.

Para el oscilador heterodino local (fig.2.2) el mayor ángulo sólido de colección de la luz está limitado por la magnitud de la región dispersora, es decir

$$\Omega_{L_0} \leq \frac{\lambda_L^2}{\lambda_s^2} \quad 2.38$$

Donde λ_s es la dimensión lineal de la región dispersora, de aquí que la señal de predetección del cociente señal a ruido es entonces;

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{PRED}}^{LO} \simeq \eta_p \sigma_p \frac{\lambda_L^2}{\lambda_s^2} \quad 2.39$$

Donde η_p y σ_p son la densidad y la sección transversal de las partículas respectivamente. En otras palabras, aumentando la concentración de las partículas η_p y decreciendo la región dispersora λ_s , aumentará el cociente señal a ruido. Esto es notado por que la fuente de referencia es más intensa que la luz dispersada. La EC 2.38 es aplicable a velocidades uniformes y no uniformes de las partículas.

Para el arreglo diferencial heterodino (Fig.22) y debido a que el término de la señal está formado por las mismas partículas pero en diferente dirección de la luz incidente, el término máximo del ángulo sólido de colección está limitado por la magnitud promedio de las partículas λ_p es decir.

$$\Omega_d \leq \frac{\lambda_L^2}{\lambda_p^2} \quad \text{DE AQUI QUE} \quad \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{PRED}}^P \simeq \eta_p \sigma_p \left(\frac{\lambda_L^2}{\lambda_p^2}\right) \quad 2.40$$

Esto es, el ángulo sólido es (λ_L^2/l_p^2) veces más grande que el arreglo del oscilador local heterodino. De aquí que, en general, este arreglo es superior al heterodino local, cuando todas las partículas se mueven en la misma velocidad tales como un disco rotando o un flujo laminar. Para velocidades no uniformes tales como flujos turbulentos, el tercer término de la ecuación (2.30) puede contribuir al término de ruido, como es mostrado por Wan (1971). Entonces la señal de predetección cociente señal a ruido es:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{PRED}} \approx \frac{1}{\eta_P^{5/3}} \sigma_f \frac{\lambda_L^2}{l_p^2} \quad 2.41$$

Esto es s/n es independiente de la magnitud de la región dispersora, pero depende de la magnitud de las partículas. También decreciendo la concentración de las partículas y su magnitud, aumentará s/n, se provee que un mínimo de σ_f es requerido para vencer la corriente oscura.

1.6 CONCLUSIONES.

En general los tres arreglos; el oscilador local, el diferencial y el simétrico heterodino pueden ser usados para medir velocidades de flujos. Para una velocidad uniforme de partículas dispersoras tales como un disco rotando y flujo laminar, el arreglo diferencial heterodino es definitivamente superior a los otros dos, debido principalmente al gran ángulo sólido de colección. Cuando se consideran flujos turbulentos con velocidad de distribución no uniforme, la utilidad del arreglo usado dependerá de la aplicación particular, y podrá ser calculado por las fórmulas anteriores.

REFERENCIAS

- 1 - Cummins hz and Swinney hl 1970 Progress
in optics Vol.VIII (Amsterdam:North-Holland) P.P.135 - 200
- 2 - Durtf and Shitelaw jh 1971 Proc.R.Soca 324 157 - 81
Wang c.p.
- 3 - Journal of Physics E:Scientific Instruments 1972 Volume 5,763
(Printed in great Britain 1972)
- 4 - Principle in Optics
Ed, Born an Wolf
pag. 509
- 5 - Optical Interferometry 1966
Francon
Academic Press
PP. 18 al 25

CAPITULO 3

EFFECTO DOPPLER EN UN INTERFEROMETRO DE MICHELSON

Utilizando como instrumento un interferometro de Michelson y como fenomeno a observar, el efecto doppler producido por el movimiento de uno de los espejos del interferometro, se derivan las ecuaciones que permitan determinar la frecuencia con que se desplaza por un punto dado de observación de las franjas de un patron de interferencia producido por los haces de luz procedentes del interferometro.

Antes de considerar el interferometro de Michelson, analizaremos el efecto doppler para un espejo en movimiento.

Si consideramos un espejo que se mueve con una velocidad v y hacemos incidir sobre él un haz luminoso y observamos lo que sucede con el haz reflejado; El resultado será exactamente igual si consideramos que los rayos vienen de una fuente S' imagen de S con una velocidad doble del espejo, como se deduce de la figura 3.1

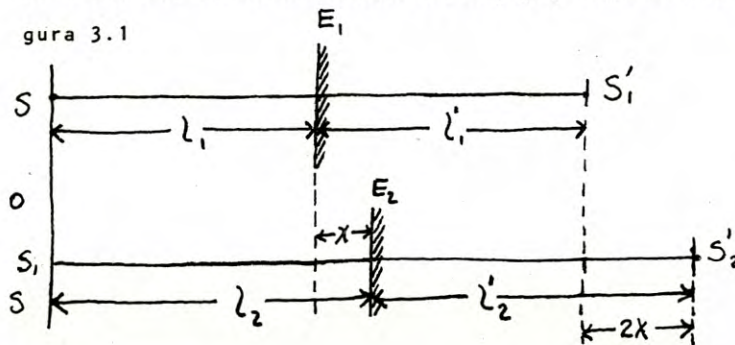
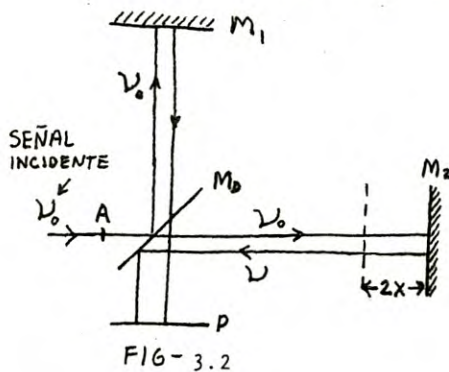


FIG-3.1

Si en 0 se encuentra una fuente S_1 y la imagen producida por un espejo E_1 es S_1' , ésta última está a una distancia L_1' del espejo y el objeto está a una distancia L_1 del espejo E_1 . Si en un tiempo t el espejo E_1 se mueve una distancia x , observaremos que la imagen se movió una distancia $2x$ y quedará a una distancia L_2' del espejo E_2 . Por lo tanto, la velocidad de la imagen será el doble que la del espejo que es v . Consideraremos entonces, que pasamos a los rayos que parecen venir de la fuente S_2' , lo cual se reduce a un desplazamiento doppler ya estudiado en el capítulo 1 y expresado por ecuación 1.4 $\Delta\nu = \mp \nu \frac{v}{c}$, donde en este caso la velocidad será el doble, o sea $\Delta\nu = \mp \nu \frac{2v}{c}$ 3.1 donde se toma el signo positivo si la fuente se acerca y el negativo si se aleja de el detector. Ahora bien, si una señal luminosa se hace incidir sobre un interferómetro de Michelson¹, y si uno de los espejos del interferómetro se mueve con una velocidad v , la frecuencia de la luz que incide sobre dicho espejo cambiara debido al desplazamiento doppler y tendremos de esa manera dos señales luminosas con diferente frecuencia, las cuales interferirán una proveniente del espejo fijo M_1 y otra del espejo móvil M_2 cuya velocidad es v .



Si la señal incidente es de frecuencia ν_0 , se representa

$$E_0 = A_0 e^{2(2\pi\nu_0)t} \quad 3.2$$

La señal de frecuencia proveniente del espejo M_2 será representada por:

$$E = A_0 \left[e^{i2\pi\nu_0 t + i2\pi(\nu_0 \pm \Delta\nu)t} \right] \quad 3.$$

$$\text{DONDE } v = v_0 \pm \Delta v$$

En ambas expresiones t es el tiempo en que un haz de luz tardará para llegar del divisor de haz M_d al espejo M_2 , por lo que el haz de frecuencia recorre una distancia $2M_dM_2$, en un tiempo $2t$; mientras que el de frecuencia empleara igualmente un tiempo $2t$ pero partiendo de A en forma retrasada, siguiendo después a M_d y de aquí a M_1 regresando nuevamente a M_d . En el punto P llegaran dos señales despues de haber empleado el mismo tiempo $2t$ y donde interferiran constructiva o destructivamente.

De las dos señales mezcladas en el punto P , detectaremos la intensidad, la cual estara dada por: $E_m E_m^* = I$ con $E_m = E_0 + E$, sustituyendo las ecuaciones 3.2 y 3.3 tendremos:

$$\begin{aligned} (E_0 + E)(E_0 + E)^* &= A_0^2 \left[e^{i2\pi v_0 2t} + e^{i2\pi v_0 t + i2\pi(v_0 \pm \Delta v)t} \right] \left[e^{i2\pi v_0 2t} + e^{i2\pi v_0 t + i2\pi(v_0 \pm \Delta v)t} \right]^* \\ E_m E_m^* &= A_0^2 \left\{ e^{i2\pi v_0 2t} \left[1 + e^{\pm i2\pi \Delta v t} \right] \right\} \left\{ e^{i2\pi v_0 2t} \left[1 + e^{\pm i2\pi \Delta v t} \right] \right\}^* \end{aligned} \quad 3.4$$

Como $A_0^2 = I_0$, efectuando operaciones nos quedara:

$$I = I_0 \left[2 + \left(e^{\pm i2\pi \Delta v t} + e^{\mp i2\pi \Delta v t} \right) \right] \quad 3.5$$

Que puede ser escrito como:

$$I = 2I_0 \left[1 + \cos 2\pi \Delta v t \right] \quad 3.6$$

De esta ecuación podemos deducir para que los valores de $\cos 2\pi\Delta\nu t$ tendremos la máxima intensidad (ó la mínima)

Entonces si $\cos 2\pi\Delta\nu t = 1$ 3.7

tendremos que I será máxima, esto se cumple si

$$2\pi\Delta\nu t = 2m\pi, \quad 3.8$$

de donde $t_n = \frac{m}{\Delta\nu}$ 3.9

pero sabemos que $\Delta\nu = \frac{2\nu_0\nu}{c}$, por lo tanto

$$t_n = \frac{nc}{2\nu_0\nu} \quad \text{y} \quad t_{n+1} = \frac{(n+1)c}{2\nu_0\nu}$$

tomando la diferencia entre t_{n+1} y t_n tendremos

$$\Delta t = \frac{c}{2\nu_0\nu} \quad 3.10$$

de donde Δt será el período entre dos intensidades máximas (o mínimas) y la denotaremos por T , entonces

$$T = \frac{c}{2\nu_0\nu} \quad 3.11$$

y la frecuencia estará dada por

$$f = \frac{2\nu_0\nu}{c} \quad 3.12$$

Este resultado es el mismo resultado clásico ya conocido y no debe sorprendernos pues ya D. Malacara² lo había derivado con anterioridad basado en principios físicos principalmente, los cuales se describen a continuación y siguiendo el desarrollo ahí propuesto.

Si dos señales con longitudes de ondas λ_0 y λ se mezclan, observaremos trenes de ondas moduladas senoidalmente cuya longitud de onda será $n_0\lambda_0 = n\lambda = L$ donde L es un número entero n_0 de ondas λ_0 lo mismo que de n y λ ; de aquí que cuando estas longitudes coinciden se producirán los trenes de ondas mencionadas y es mostrado en la figura 3.3

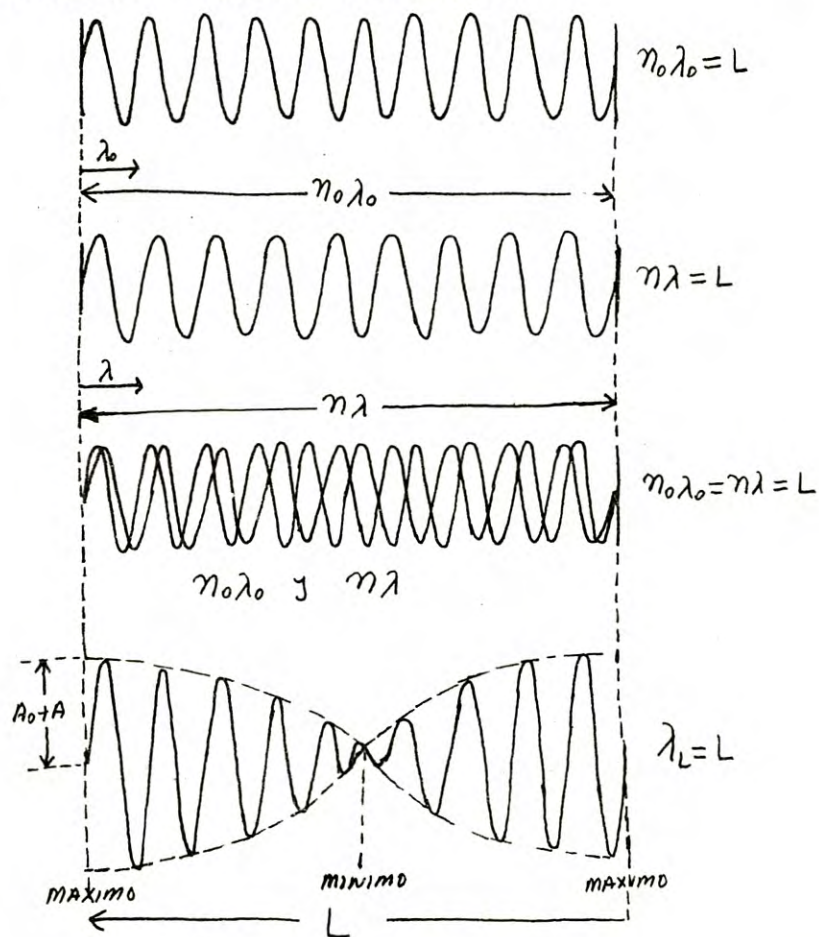


FIG-3.4

o sea, volviendo al caso del interferómetro de Michelson tendremos que la distancia recorrida en un tiempo T será L . Es decir la longitud del tren de ondas que produce por la mezcla de las señales E_0 y E .

Debido al efecto Doppler la longitud de onda λ procedente de una fuente en movimiento cambiará una cantidad $\Delta\lambda$, que para nuestro caso estará dado por la ecuación

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{2v}{c} \quad 3.13$$

De modo que la combinación de la luz procedente de una fuente estacionaria y la procedente de una fuente moviéndose con una velocidad $2v$ formarán un haz modulado senoidalmente como ya se explico antes, cuya longitud de cada modulación será L

y dada por³

$$L = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \quad 3.14$$

ya que, en el vacío la máxima velocidad de este haz modulado es siempre c , no importando la velocidad v que la fuente tenga, entonces la intensidad en un punto fijo de terminado cambiara alternativamente de un valor máximo a un mínimo (y de un mínimo a un máximo) debido al movimiento de dichos haces modulados o trenes de ondas.

Si consideramos el desplazamiento de franjas en nuestro patrón de interferencia, mientras el camino óptico de una de las fuentes cambia una distancia $N\lambda$ con una velocidad constante v ; (espejo moviéndose con velocidad v) durante un tiempo t , N franjas pasaran a través del punto fijo en ese tiempo. Por lo tanto siguiendo la interpretación Doppler puede decirse que la razón de

cambio del camino óptico será
$$\nu = \frac{N \lambda / 2}{t} \quad 3.15$$

De esta ecuación y de las ecuaciones 3.13 y 3.14 se puede deducir la relación siguiente²:

$$NL = ct \quad 3.16$$

A este último resultado se le puede dar una interpretación Doppler o sea N grupos pasarán a través de un punto fijo espacialmente en un tiempo t , produciendo el mismo resultado que con el modelo de franjas desplazadas.

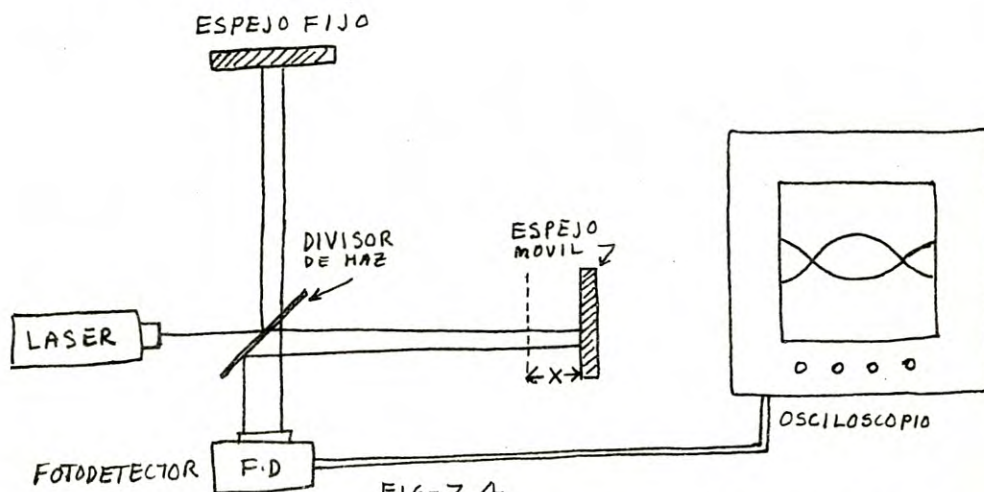


FIG-3.4

Interferómetro de Michelson utilizado para medir la velocidad del espejo móvil, auxiliándose de un fotodetector y de un osciloscopio.

En particular si la velocidad del espejo es de la forma:
 $v = A \cos 2\pi f t$, podremos resolver el problema sustituyendo en la ecuación 3.2 y obtendremos la frecuencia de oscilación de dicho espejo al mismo tiempo.

REFERENCIAS:

- 1.- Optics; Miles V. Klein; John Wiley and Sons. Inc 1970;
pp. 219-223
- 2.- D. Malacara et. al; Applied Optics 8, 1746 (1969)
- 3.- Basic Optics; Daniel Malacara; pp 157-166
- 4.- Ejemplo numérico,

$$\text{si } v = \frac{3 \text{ m}}{\text{seg}} \quad \nu_0 = \frac{10^{14}}{\text{seg}} \quad c = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{seg}} \quad \text{ENTONCES}$$

$$T = \frac{3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{seg}}}{2 \times \frac{3 \text{ m} \cdot 10^{14}}{\text{seg} \cdot \text{seg}}} = 0.5 \times 10^{-6} \text{ seg} \quad \text{y} \quad f = \frac{2 \times 10^6}{\text{seg}}$$

APENDICE 2.1

Como la función de autocorrelación esta definida por

$$C_i(\tau) = e^2 \sigma \delta(\tau) \langle E^*(t) E(t) \rangle + e^2 \sigma^2 \langle E^*(t) E(t) E^*(t+\tau) E(t+\tau) \rangle \quad 1$$

y como $E(t) = E_{L_0}(t) + E_s(t)$ 2

tendremos que: 3

$$E(t+\tau) = E_{L_0}(t+\tau) + E_s(t+\tau)$$

y como $E_{L_0}(t) = E_{L_0}^0 e^{-i\omega_{L_0} t}$ 4

$$E_{L_0}(t+\tau) = E_{L_0}^0 e^{-i\omega_{L_0}(t+\tau)} = E_{L_0}^0 e^{-i\omega_{L_0} t} e^{-i\omega_{L_0} \tau} \quad 5$$

de donde $E_{L_0}(t+\tau) = E_{L_0}(t) e^{-i\omega_{L_0} \tau}$ 6

$$E_{L_0}^*(t+\tau) = E_{L_0}^*(t) e^{i\omega_{L_0} \tau} e^{i\omega_{L_0} t} \quad 7$$

$$E_{L_0}^*(t+\tau) = E_{L_0}^*(t) e^{i\omega_{L_0} \tau} \quad 8$$

$$E_{L_0}^*(t) = E_{L_0}^*(t) e^{i\omega_{L_0} \tau}$$

Entonces calcularemos $\langle E^*(t) E(t) \rangle$ y también

$$\langle E^*(t) E(t) E^*(t+\tau) E(t+\tau) \rangle \quad 9$$

$$E^*(t) E(t) = (E_{L_0}^*(t) + E_s^*(t)) (E_{L_0}(t) + E_s(t)) \quad 10$$

$$= E_{L_0}^*(t) E_{L_0}(t) + E_s^*(t) E_{L_0}(t) + E_{L_0}^*(t) E_s(t) + E_s^*(t) E_s(t) \quad 11$$

$$= I_{L_0} + E_s^*(t) E_{L_0}(t) + E_{L_0}^*(t) E_s(t) + I_s, \quad 12$$

ya que $I = E(t) E^*(t)$

Por otra parte tendremos que:

$$E^*(t)E(t)E^*(t+\tau)E(t+\tau) = \{I_{L_0} + I_S + E_S(t)E_{L_0}^*(t) + E_{L_0}(t)E_S^*(t)\} \times \\ \left\{ (E_{L_0}(t)e^{-i\omega_0\tau} + E_S(t+\tau)) (E_{L_0}^*(t)e^{i\omega_0\tau} + E_S^*(t+\tau)) \right\} \quad 13$$

Desarrollando en primer término el segundo factor de la ecuación

(13) se obtiene

$$\left\{ (E_{L_0}(t)e^{-i\omega_0\tau} + E_S(t+\tau)) (E_{L_0}^*(t)e^{i\omega_0\tau} + E_S^*(t+\tau)) \right\} = I_{L_0} + \\ E_S(t+\tau)E_{L_0}^*(t)e^{i\omega_0\tau} + E_{L_0}(t)E_S^*(t+\tau)e^{-i\omega_0\tau} + E_S(t+\tau)E_S^*(t+\tau) \quad 14$$

luego entonces

$$E^*(t)E(t)E^*(t+\tau)E(t+\tau) = I_{L_0}I_{L_0} + I_{L_0}E_S(t+\tau)E_{L_0}^*(t)e^{i\omega_0\tau} + \\ I_{L_0}E_{L_0}(t)E_S^*(t+\tau)e^{-i\omega_0\tau} + I_{L_0}E_S(t+\tau)E_S^*(t+\tau) + E_S(t)E_{L_0}^*(t)I_{L_0} + \\ E_S(t)E_{L_0}^*(t)E_S(t+\tau)E_{L_0}(t)e^{i\omega_0\tau} + E_S(t)E_{L_0}^*(t)E_{L_0}(t)E_S^*(t+\tau)e^{-i\omega_0\tau} + \\ E_S(t)E_{L_0}^*(t)E_S(t+\tau)E_S^*(t+\tau) + E_{L_0}(t)E_S^*(t)I_{L_0} + \\ E_{L_0}(t)E_S^*(t)E_S(t+\tau)E_{L_0}^*(t)e^{i\omega_0\tau} + E_{L_0}(t)E_S^*(t)E_{L_0}(t)E_S^*(t+\tau)e^{-i\omega_0\tau} + \\ E_{L_0}(t)E_S^*(t)E_S(t+\tau)E_S^*(t+\tau) + E_S(t)E_S^*(t)I_{L_0} + \\ E_S(t)E_S^*(t)E_S(t+\tau)E_{L_0}^*(t)e^{i\omega_0\tau} + E_S(t)E_S^*(t)E_{L_0}(t)E_S(t+\tau)e^{-i\omega_0\tau} + \\ E_S(t)E_S^*(t)E_S(t+\tau)E_S^*(t+\tau)$$

Como los términos $E_s^*(t+\tau)E_{L_0}(t+\tau) = 0$ para $s \neq L_0$ por ser 16

incoherentes 4,5 $E_s^*(t+\tau)E_s(t+\tau) = 0$ 17

$$E_s(t)E_{L_0}^*(t) = 0 \quad 18$$

$$E_s^*(t)E_{L_0}(t) = 0 \quad 19$$

Entonces nos quedarán

$$\begin{aligned} E^*(t)E(t)E^*(t+\tau)E(t+\tau) &= I_{L_0}^2 + I_{L_0}(I_s + E_s(t+\tau)E_s^*(t+\tau) + \\ I_{L_0} \left\{ e^{i\omega_{L_0}\tau} E_s^*(t)E_s(t+\tau) + e^{-i\omega_{L_0}\tau} E_s(t)E_s^*(t+\tau) \right\} + \\ + E_s(t)E_s^*(t)E_s(t+\tau)E_s^*(t+\tau) \end{aligned} \quad 20$$

Sustituyendo la ec(1) y (20) en la ecuación (1) tendremos:

$$\begin{aligned} C_i(t) &= e^{i\sigma t} \langle (I_{L_0} + I_s) \rangle + e^{i\sigma t} \langle I_{L_0} + 2I_{L_0}I_s + I_{L_0} \left\{ e^{i\omega_{L_0}\tau} E_s^*(t)E_s(t+\tau) + \right. \\ &+ \left. e^{-i\omega_{L_0}\tau} E_s(t)E_s^*(t+\tau) \right\} \rangle + \\ &+ \langle E_s(t)E_s^*(t)E_s(t+\tau)E_s^*(t+\tau) \rangle \end{aligned}$$

APENDICE 2.2

Si en la ec. 16 del capítulo 2 (ec. 21 Apéndice 2.1) obtenemos

$$I_{L_0}, I_s, E_s^*(t), E_s(t+\tau), E_s(t), E_s^*(t+\tau)$$

donde:

$$E_{L_0}(t) = A_0 e^{-i\{\omega_0 t - \phi_0\}} \quad (\text{Wang 1971}) \quad 1$$

$$E_s(t) = \sum_{p=1}^m A_p e^{-i\{\omega_0 t - (k_z - k_1) \cdot v_p t - \phi_p\}} \quad 2$$

Entonces

$$E_s(t) E_s^*(t) E_s(t+\tau) E_s^*(t+\tau) = E_s(t) E_s(t) E_s(t) E_s^*(t) e^{-i\{-(k_z - k_1)(v_p - v_q)\tau\}} \quad 3$$

Pero

$$= [E_s(t) E_s^*(t)]^2 e^{-i\{-(k_z - k_1)(v_p - v_q)\tau\}} \quad 4$$

$$E_s(t) E_s^*(t) = \sum_{p=1}^m A_p e^{-i\{\omega_0 t - (k_z - k_1) v_p t - \phi_p\}} \quad 5$$

$$\sum_{q=1}^m A_q^* e^{-i\{\omega_0 t - (k_z - k_1) v_q t - \phi_q\}} \quad 6$$

$$E_s(t) E_s^*(t) = \sum_{p=1}^m A_p A_p^* + \sum_{p=1}^m \sum_{\substack{q=1 \\ p \neq q}}^m A_p A_q^* e^{-i\{-(k_z - k_1)(v_p - v_q)t - (\phi_p - \phi_q)\}} \quad 7$$

Donde el segundo término de la ecuación (6) es cero debido a lo mismo que para las ecuaciones (16), (17), (18), y (19) del Apéndice I del capítulo 2 por lo que el resultado en este caso es igual a

$$E_s(t) E_s^*(t) = \sum_{p=1}^m A_p A_p^* \quad 7$$

Luego entonces

40

$$\begin{aligned} \left[E_s(t) E_s^*(t) \right]^2 &= \left[\sum_{p=1}^m (AA^*)_p \right]^2 = \sum_{p=1}^m (AA^*)_p^2 + 2 \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^m \sum_{q=1}^m (AA^*)_p (AA^*)_q \\ &= \sum_{p=1}^m A_p^4 + 2 \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^m \sum_{q=1}^m A_p^2 A_q^2 \end{aligned}$$

8

9

Sustituyendo (17), (12), (13) y (14) en la ec. (21) del apéndice (2.1) del capítulo 2 tendremos

$$\begin{aligned} C_i(\tau) &= e^2 \sigma \delta(\tau) \left\langle A_0^2 + \sum_{p=1}^m A_p^2 \right\rangle + e^2 \sigma^2 \left\langle \left[A_0^4 + \sum_{p=1}^m A_p^4 \right] \right\rangle + \left\langle A_0^2 \sum_{p=1}^m A_p^2 \times \right. \\ &\left. \left\{ e^{i\{(k_2-k_1)u_p\tau} + e^{-i\{(k_2-k_1)u_p\tau} \right\}} \right\rangle + 2 \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^m \sum_{q=1}^m \left\langle A_p^2 A_q^2 e^{-i\{(k_2-k_1)(u_p-u_q)\tau} \right\rangle} \right\rangle \end{aligned}$$

10

Por lo tanto

$$\begin{aligned} C_i(\tau) &= e^2 \sigma \delta(\tau) \left(A_0^2 + \sum_{p=1}^m A_p^2 \right) + e^2 \sigma^2 \left(A_0^4 + \sum_{p=1}^m A_p^4 \right) + A_0^2 \sum_{p=1}^m A_p^2 \times \\ &\left\langle e^{i\{(k_2-k_1)u_p\tau} + e^{-i\{(k_2-k_1)u_p\tau} \right\rangle} + 2 \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^m \sum_{q=1}^m A_p^2 A_q^2 \left\langle e^{-i\{(k_2-k_1)(u_p-u_q)\tau} \right\rangle} \right\rangle \end{aligned}$$

11

$$\begin{aligned} C_i(\tau) &= e^2 \sigma \delta(\tau) \left(A_0^2 + \sum_{p=1}^m A_p^2 \right) + e^2 \sigma^2 \left(A_0^4 + \sum_{p=1}^m A_p^4 \right) + e^2 \sigma^2 A_0^2 \sum_{p=1}^m A_p^2 \times \\ &\sum_{p=1}^m A_p^2 \left(\frac{e^{i(k_2-k_1)u_p\tau} - e^{-i(k_2-k_1)u_p\tau}}{(k_2-k_1)u_p} \right) + 2e^2 \sigma^2 \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^m \sum_{q=1}^m A_p^2 A_q^2 \frac{e^{-i\{(k_2-k_1)(u_p-u_q)\tau}}}{(k_2-k_1)(u_p-u_q)} \end{aligned}$$

12

Entonces

$$E_s(t)E_s^*(t)E_s(t+\tau)E_s^*(t+\tau) = \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^m A_p^2 + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^m \sum_{\substack{q=1 \\ p \neq q}}^m A_p^2 A_q^2 e^{-i\{(k_2-k_1)(v_p-v_q)\}\tau} \quad 13$$

Sustituyendo en (20) del Apéndice 2.1 del capítulo 2 tendremos:

$$E^*(t)E(t)E^*(t+\tau)E(t+\tau) = I_{L_0}^2 + I_{L_0}(I_s + E_s(t+\tau)E_s^*(t+\tau)) + I_{L_0} \left\{ e^{i\omega_{L_0}\tau} E_s^*(t)E_s(t+\tau) + e^{-i\omega_{L_0}\tau} E_s(t)E_s^*(t+\tau) + \langle E_s(t)E_s^*(t)E_s(t+\tau)E_s^*(t+\tau) \rangle \right\} \quad 14$$

$$\text{Donde: } I_{L_0} = E_{L_0}(t)E_{L_0}^*(t) = A_0^2 \quad 15$$

$$I_s = E_s(t+\tau)E_s^*(t+\tau) = E_s(t)E_s^*(t) \quad 16$$

$$I_s = \sum_{p=1}^m A_p A_p^* = \sum_{p=1}^m A_p^2 \quad 17$$

$$I_{L_0}^2 = A_0^4 \quad 18$$

$$I_s^2 = \sum_{p=1}^m A_p^4 + 2 \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^m \sum_{\substack{q=1 \\ p \neq q}}^m A_p^2 A_q^2 \quad 19$$

Por lo que la ecuación (20) del apéndice (2.1) Capítulo 2 nos quedará

$$E^*(t)E(t)E^*(t+\tau)E(t+\tau) = \left[A_0^4 + \sum_{p=1}^m A_p^4 \right] + A_0^2 \sum_{p=1}^m A_p^2 \left\{ e^{i\{(k_2-k_1)v_p\}\tau} + e^{-i\{(k_2-k_1)v_p\}\tau} \right\} + 2 \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^m \sum_{\substack{q=1 \\ p \neq q}}^m A_p^2 A_q^2 e^{-i\{(k_2-k_1)(v_p-v_q)\}\tau} \quad 20$$