

Aplicación del teorema de Gauss en la recuperación secundaria de hidrocarburos

Una tesis presentada a la Universidad de Sonora
para la obtención del título de
Licenciado en Física

por

Patricia Moreno Wong



Departamento de Física
Universidad de Sonora
Agosto de 2011

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

Aplicación del teorema de Gauss en la recuperación secundaria de hidrocarburos

Una tesis presentada a la Universidad de Sonora como requisito parcial

para la obtención del grado de Licenciado en Física por

Patricia Moreno Wong

Agosto de 2011

COMITÉ DE TESIS

Dr. Ezequiel Rodríguez Jáuregui

Presidente

Dr. Mario Enrique Álvarez Ramos

Secretario

Dr. Roberto Pedro Duarte Zamorano

Vocal

Dr. Martín Díaz Viera

Suplente

Agradecimientos

Primeramente quiero agradecer al Departamento de Física de la Universidad de Sonora por el apoyo que me brindó durante mi larga estadía en la licenciatura, también quiero agradecer el apoyo del Instituto Mexicano del Petróleo por brindarme la oportunidad de realizar la estancia estudiantil en sus instalaciones.

Agradezco a mi asesor de tesis Ezequiel Rodriguez por su paciencia y sus consejos durante el trayecto que me llevó a realizar este trabajo. Agradezco a mis profesores por compartir sus conocimientos y poner parte de sus vivencias en mi camino hacia la formación profesional que ahora tengo. De igual manera agradezco al Dr. Martín Díaz por su apoyo y su disposición a enseñarme parte de su conocimiento en mi corto pero muy importante viaje a la ciudad de México.

Debo hacer evidente que agradezco a mis papás y a mi familia completa por su apoyo incondicional en cualquier o todos los días de mi vida. Y sin duda alguna también debo mencionar que agradezco a mis compañeros de estudios por brindarme o no conocimientos, vivencias y apoyo a lo largo de mi carrera.

Tö, Enrique... Rosquillo... Tnx :)

Contenido

Introducción	1
1 Descripción general	4
1.1. El Proceso de inyección de aire	5
2 Combustión en medios porosos	9
2.1. Medios porosos	9
2.2. Descripción física y matemática de la transferencia de masa y calor en medios porosos	11
2.2.1. Conceptos y definiciones	12
2.3. Mecanismos de transferencia de calor	15
2.4. Mecanismos de transporte de masa	21
2.5. Aplicación del método	27
2.5.1. Petróleo muerto	27
2.5.2. Inyección de vapor con tres fases y dos componentes	30
3 Método sistemático para la formulación de modelos de sistemas continuos	34
3.1. Concepto de sistema continuo	34
3.2. Cinemática de los sistemas continuos	35
3.3. Propiedades extensivas e intensivas	36
3.4. Representación euleriana y lagrangiana	36
3.5. Postulado fundamental: Balance de propiedades extensivas	37
3.6. Ecuaciones de balance local	38
3.6.1. Ecuaciones de salto	38
3.7. Sistemas de varias fases	42

4	Modelo de frentes de combustión	44
4.1.	Arreglo de fases y componentes	47
4.2.	Ecuaciones de balance del sistema	48
4.3.	Resumen del sistema de ecuaciones del modelo	56
	Conclusiones	59
A	Leyes y teoremas	61
A.1.	Ley de Darcy	61
A.2.	Ley de Fick	62
A.3.	Ley de Dalton	62
B	Reacciones químicas	64
	Bibliografía	70

Introducción

Entender y anticiparse a los acontecimientos es una necesidad natural del ser humano. El medio más efectivo para predecir el comportamiento de la naturaleza es el método científico. La física es una ciencia que estudia, en general, a la naturaleza con el fin de entender cómo se comportan el mundo y el universo. El método de investigación de esta rama de la ciencia se caracteriza por tener claridad, generalidad, sencillez y exactitud.

Para la predicción científica se adopta un método también muy general: la modelación, en la cual se entiende por modelo como un sustituto del sistema original, de cuyo comportamiento es posible derivar el del sistema de interés. En particular, en este trabajo, se estudiarán modelos físicos y matemáticos en ciencias del petróleo. Los modelos de los sistemas continuos de la física macroscópica, tales como los yacimientos petroleros y muchos sistemas ambientales, contienen un gran número de grados de libertad. Se entiende que un yacimiento petrolero es un área que está constituida por medios porosos, generalmente de origen sedimentario, en cuyos poros se almacenan fluidos, los cuales contienen hidrocarburos. Frecuentemente, en los poros de un yacimiento petrolero coexisten varias fases: agua, petróleo y gas. Todo esto se toma como parámetros para la presente propuesta de modelo.

Este trabajo está dedicado a la descripción física de los procesos que se llevan a cabo en la recuperación secundaria en yacimientos petroleros, como lo es el método de inyección de aire, haciendo un enfoque en la sección del frente de combustión y con el uso de las herramientas matemáticas para obtener un modelo que describa este fenómeno. En particular se utilizará el teorema de Gauss para desarrollar las ecuaciones que modelan el frente de combustión.

También se observará el modelo utilizado por Michael Prats [1] el cual, durante años, se ha implementado para hacer el modelado de problemas que se refieren a la ciencia del petróleo; aquí se presenta, de una manera más práctica, que haciendo uso del teorema de Gauss se pueden obtener los mismos resultados que los que se obtienen en estudios con el método tradicional para

problemas de ingeniería petrolera.

El propósito de realizar este trabajo es mostrar los procesos por los que pasa un yacimiento durante la inyección de aire para la recuperación de petróleo, se requiere introducir de manera apropiada el análisis de las variables que cambian abruptamente en el frente de combustión. Tradicionalmente, en los libros de ingeniería petrolera se excluye dicho análisis. Además de fundamentar, deducir y analizar de manera clara y precisa el conjunto de ecuaciones que modelan a dicho problema en este trabajo se muestra que, si se plantea adecuadamente el problema, haciendo uso del teorema de Gauss se pueden obtener las ecuaciones que gobiernan a las variables que son discontinuas.

También se hará una descripción general del sistema utilizado; tal información involucra los principios básicos para predecir el comportamiento de un yacimiento petrolero. Los datos del yacimiento pueden presentarse de manera estática y dinámica dependiendo de su relación con el movimiento de las componentes en el yacimiento. La caracterización estática se refiere al desarrollo y adecuación de metodologías integradas que permiten una mayor conceptualización de los yacimientos petroleros en términos físicos y geológicos. Por otro lado, la caracterización dinámica tiene como propósito investigar, desarrollar y adecuar metodologías que expliquen la interacción dinámica del sistema roca-fluido del yacimiento petrolero, tratando de explicar de manera apropiada cómo se desplazan los fluidos a través de las rocas.

Se utilizarán fundamentos de la física macroscópica y se presentará una introducción de la formulación de los modelos matemáticos. La base para la construcción de estos modelos está constituida por ecuaciones de balance que son aplicables a cualquier sistema continuo independientemente de su naturaleza. A partir de la ecuación de balance global se derivan las ecuaciones de balance local las cuales se constituyen, por si mismas, los modelos básicos de los sistemas continuos.

La estructura del presente trabajo está dada de la siguiente manera:

En el capítulo 1 se muestra de manera general un yacimiento petrolero y los problemas a los que nos conduce el tratar con este tema, también se plantea el modelo a trabajar en esta tesis,

que es una descripción de lo que pasa en el yacimiento y lo que se hace para provocar el frente de combustión y cómo interactúa éste con el medio que lo rodea.

En el capítulo 2 se definen conceptos importantes del yacimiento, la roca, el fluido y los procesos, así como las propiedades de los componentes que afectan el comportamiento del yacimiento petrolero. En este capítulo se derivan también las ecuaciones para el transporte de masa y energía y se muestra un ejemplo resuelto de manera tradicional.

En el capítulo 3, la formulación de los modelos de sistemas continuos presenta, de manera general las bases para hacer los modelos y, al final de este capítulo, se hace referencia a las ecuaciones de salto que modelan las discontinuidades.

En el capítulo 4, Modelo de frentes de combustión, se habla de el tratamiento de la región de reacción como una superficie de discontinuidad en las variables apropiadas, las cuales incluyen los flujos de calor y de masa. Se derivan las condiciones de salto que relacionan el cambio de las variables a través del frente; se habla también de los cambios en la morfología del espacio de poro y la transferencia de masa y calor en la zona de reacción. Esta metodología permite incorporar de manera explícita los efectos de heterogeneidad de la permeabilidad en la descripción del proceso.

Capítulo 1

Descripción general

El petróleo (del griego: *πετρέλαιον*, aceite de roca) es una mezcla heterogénea de compuestos orgánicos, principalmente hidrocarburos. También es conocido como petróleo crudo o simplemente crudo. Es un recurso natural no renovable y actualmente es la principal fuente de energía en los países desarrollados.

Es de origen fósil, fruto de la transformación de materia orgánica. La transformación química de esta materia (craqueo natural) debida al calor y a la presión durante la compactación de sedimentos produce, en sucesivas etapas, desde betún o coque hasta hidrocarburos cada vez más ligeros los cuales ascienden hacia la superficie, por su menor densidad, gracias a la porosidad de las rocas sedimentarias. Sin embargo, cuando se dan las circunstancias geológicas que impiden dicho ascenso (rocas impermeables, estructuras anticlinales, márgenes de diapiros salinos, etc.) se forman los yacimientos petrolíferos.

En condiciones normales es un líquido y puede variar en diversos parámetros como color, viscosidad, densidad, capacidad calorífica, etc. (Desde amarillentos y poco viscosos, como la gasolina, hasta líquidos negros y tan viscosos que apenas fluyen). Estas variaciones se deben a la diversidad de concentraciones de los hidrocarburos que componen la mezcla.

Las estructuras geológicas de los yacimientos se componen principalmente por poros, en ellas coexisten varias fases agua, petróleo y gas. La distribución de los fluidos en un yacimiento depende de la densidad, así como de las propiedades de la roca. Si los poros son de tamaño uniforme y uniformemente distribuidos, entonces la parte superior de los poros estará ocupada por la fase del gas y la parte media de los poros será ocupada por petróleo o petróleo con gas disuelto y en la zona baja de los poros estará llena por agua.

La exploración de un yacimiento petrolero requiere conocimientos de la estructura subte-

rránea de la tierra, así como los tipos de formaciones de los yacimientos y los métodos para obtener datos acerca de la formación subterránea. Los yacimientos petroleros se pueden clasificar de acuerdo al tipo de roca y de acuerdo a los rasgos geológicos.

El ciclo de vida de un yacimiento petrolero inicia con la extracción mediante un pozo, hasta que la producción alcanza su punto máximo y entonces inicia su declinación hasta alcanzar un determinado limite económico y entonces el pozo es cerrado.

El petróleo puede ser producido por un flujo natural, inducido por el flujo, o por mecanismos de extracción. En muchos casos la energía es suficiente durante las primeras fases de la producción, la fuerza del petróleo dentro de los pozos lo lleva a la superficie. Mientras que, en algunos campos, inicialmente tienen que ser producidos con ayuda desde la superficie. Cuando en un yacimiento ha disminuido considerablemente la presión y se desea seguir obteniendo petróleo de ese pozo, es necesario utilizar el método de recuperación secundaria.

1.1. El Proceso de inyección de aire

La producción primaria en los pozos petroleros esta limitada a una pequeña fracción del hidrocarburo que contiene el yacimiento, es por eso que generalmente se recurre a metodos de recuperación asistida.

El primer paso o etapa inicial del procesamiento del petróleo comienza con el descubrimiento del yacimiento, utilizando los mismo recursos que la naturaleza provee para facilitar la extracción y la salida del crudo a la superficie. Cuando se produce una considerable disminución de esta energía, la producción declina y se ingresa en la etapa secundaria donde energía adicional es administrada al reservorio y si ésta deja de ser efectiva, se considera de mayor provecho el tratamiento del pozo. El pozo se encuentra en la etapa final de su historia utilizable y por lo tanto se comienza a entregarle al mismo energía química y térmica con el fin de aprovecharlo y recuperar al máximo la producción.

Antes de iniciar la recuperación asistida, el operador debe recoger tanta información como le

sea posible acerca del pozo, de su estatus y de las condiciones de saturación éste. Este estudio se realiza mediante ensayos que involucran técnicas analíticas y geológicas acerca de la morfología del terreno. Toda esta cadena de información fundamenta las bases racionales para la predicción de reservas recuperables de petróleo mediante las distintas técnicas que puede involucrar una recuperación asistida. Los procedimientos de recuperación involucran la inyección de compuestos químicos disueltos en agua, inyección de gases miscibles en alternación con las aplicaciones de agua, la inyección de vapor y la combustión in-situ.

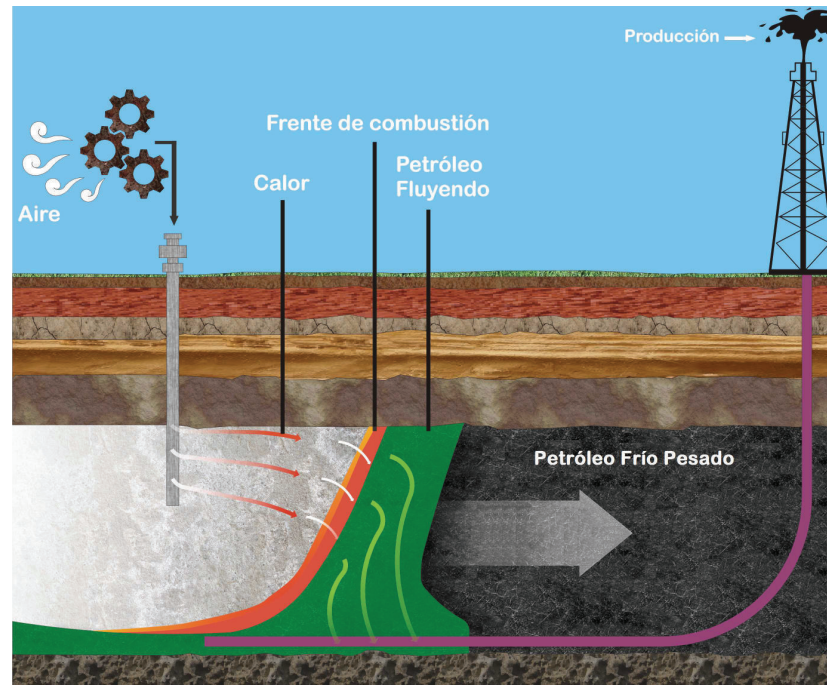


Figura 1.1: El proceso de inyección de aire.*

En el presente trabajo se estudió el método de combustión in-situ para mejorar la recuperación de petróleo, ver figura 1.1, éste es un método convencional térmico que se basa en la generación de calor en el yacimiento para seguir recuperando hidrocarburo una vez culminada la producción primaria. Consiste básicamente en quemar una porción del petróleo presente en el yacimiento para generar calor.

*A.C. thanks for collaborate

El proceso se inicia bajando un calentador o quemador en el pozo inyector, posteriormente se inyecta aire hacia el fondo del pozo y se pone en marcha el calentador hasta lograr el encendido. Los alrededores del fondo son calentados, entonces se saca el calentador y se continúa la inyección de aire para mantener el avance del frente de combustión. Debido a la disponibilidad ilimitada del aire y el costo nulo de éste, las aplicaciones potenciales de este proceso de recuperación mejorada de hidrocarburos son muy prometedoras.

Cuando se inyecta aire en un yacimiento, el oxígeno contenido en el aire reacciona con los hidrocarburos produciendo varias reacciones de oxidación. De los estudios de oxidación de aceite en un medio poroso, [4], se sabe que los hidrocarburos experimentan dos reacciones de oxidación sucesivas, la primera tiene un pico de reacción aproximadamente a los 482° F (250° C) y se le llama oxidación de baja temperatura (LTO). La segunda reacción, llamada reacción de alta temperatura (HTO) tiene un pico de reacción aproximadamente a los 725° F (400° C).

En un proceso de combustión in-situ, la oxidación se inicia en el pozo de inyección de aire y la zona de oxidación se propaga de manera subterránea del pozo inyector a los pozos productores. El calor generado reduce la viscosidad del petróleo, vaporiza los componentes ligeros, fragmenta y degrada el petróleo y proporciona una fuerza de conducción que moviliza y desplaza el petróleo hacia los pozos productores.

Generalmente este proceso se aplica mediante una de tres técnicas existentes: combustión seca con avance frontal, combustión húmeda con avance frontal o combustión seca en reverso. La técnica más comúnmente aplicada es la que genera una combustión seca con avance frontal. Los datos para simular los procesos que ocurren en un yacimiento cuando se inyecta aire, se obtienen generalmente de los experimentos en los que se simula la combustión in-situ en tubos cilíndricos (tubos de combustión) en los que se empaca arena e hidrocarburos, aire o gas oxidante se suministra desde cilindros presurizados y se inyecta en los tubos de combustión, estos arreglos experimentales están adecuados para medir y controlar los diferentes parámetros que se requieren dependiendo del experimento específico y todos los datos obtenidos en los laboratorios suministran un conjunto de datos necesarios para la simulación numérica con un modelo térmico para el yacimiento de un proceso de inyección de aire a escala de campo.

En este trabajo, se estudia el problema de la modelación de la dinámica del frente de combustión, presentando el frente como dos regiones con una discontinuidad y sin hacer grandes consideraciones en las reacciones químicas que surgen durante el proceso.

Capítulo 2

Combustión en medios porosos

El propósito de este capítulo es hacer una breve y clara descripción de la física de la transferencia de calor y masa en medios porosos. La mayoría de este capítulo no se dirige a las aplicaciones, sin embargo se limita a proporcionar el apoyo de carácter general. También se hablará sobre las leyes de la física relacionadas con la transferencia de energía y masa y cómo se puede hacer uso de sus representaciones matemáticas para desarrollar las ecuaciones diferenciales que interpretan los balances de energía y masa.

Aquí, el término balance se usa, esencialmente, en un sentido contable. En la contabilidad que se realiza para fines financieros, la diferencia de las entradas menos las salidas nos da el aumento, o cambio, de capital. En forma similar, en la mecánica de los medios continuos se realiza, en cada cuerpo del sistema continuo, un balance de las propiedades extensivas en que se basa el modelo.

Para realizar tales balances es necesario, en primer lugar, identificar las causas por las que las propiedades extensivas pueden cambiar, en la mecánica de los medios continuos, la lista exhaustiva de las causas por las que una propiedad extensiva de cualquier cuerpo puede cambiar, contiene solamente dos motivos: por producción en el interior del cuerpo y por transporte a través de la frontera.

2.1. Medios porosos

Un medio poroso está compuesto por dos fases: una matriz sólida y, en su interior, un sistema de huecos (poros) que pueden o no estar interconectados entre sí. Estos últimos pueden tener geometrías, tamaños y topologías variadas, dependiendo del origen de su formación.

Uno de los conceptos más útiles para caracterizar la topología de un medio poroso es el número de coordinación z (conectividad), que es el número de sitios que son inmediatamente vecinos a un poro, es decir, los canales que desembocan en una cavidad dada del medio. Quizás la propiedad más simple de un sistema poroso sea su porosidad ϕ , la cual se define como la fracción de volumen ocupada por los poros. El método más simple para medir la porosidad es el método directo, en el cual el volumen total del sistema es medido y, posteriormente, la muestra es compactada para remover todo el espacio poroso, luego la diferencia de estos volúmenes nos da la porosidad total del sistema. La porosidad incrementa la velocidad de propagación del frente, disminuye la concentración de oxígeno no quemado e incrementa ligeramente la temperatura del frente.

También es importante mencionar la conductividad hidráulica κ o permeabilidad del medio, que es la capacidad de una roca de conducir fluidos a través de sus poros interconectados, además, siempre es constante para cada material. Otra característica importante de un medio poroso es la tortuosidad τ , la cual es usualmente definida como la razón entre la longitud real que debe recorrer una partícula de fluido para unir dos puntos en el seno del medio poroso y la distancia en línea recta entre dichos puntos. Como es de esperar, la tortuosidad depende de la porosidad. Si ϕ es muy baja, τ es muy grande. Generalmente la tortuosidad no puede ser medida experimentalmente y, en la mayoría de los modelos clásicos de flujo y transporte en medios porosos, la tratan como un parámetro ajustable.

Las hipótesis básicas en las que se sustenta el modelo de flujo en medios porosos son:

1. El fluido es compresible, es decir, puede haber variación de la densidad como función de la presión.
2. El sólido poroso, conocido también como matriz, es elástico, es decir, la porosidad depende de la presión.
3. No hay difusión del fluido, ni radiación.
4. La velocidad del fluido está dada por la ley de Darcy*, que es una ecuación constitutiva que relaciona a la velocidad de las partículas del fluido con la presión.

*Ver apéndice A

5. La matriz es no reactiva, estacionaria y sus propiedades termodinámicas no cambian durante el proceso.
6. Localmente, el espacio del poro y la matriz sólida, están en equilibrio térmico.

La propagación sostenida de los frentes de combustión en medios porosos es una condición necesaria para el éxito de un proyecto de combustión in-situ para la recuperación de hidrocarburos. La combustión in-situ involucra la complejidad de reacciones químicas exotérmicas y la cinética química dependiente de la temperatura. Esto conduce a zonas de reacción de un ancho espacialmente estrecho, dentro del cual las velocidades de liberación de calor, las temperaturas y las concentraciones varían significativamente. Esta variación abrupta hace difícil la simulación de los procesos de combustión mediante la implementación de métodos a escala real.

En este trabajo se estudia un método para la solución de este problema mediante el tratamiento de la región de reacción como una superficie de discontinuidad en las variables apropiadas, las cuales incluyen, por ejemplo, los flujos de calor y de masa, se derivan las condiciones apropiadas de salto que relacionan el cambio de estas variables a través del frente. Estas condiciones toman en cuenta la cinética de reacción entre el oxidante y el combustible, los cambios en la morfología del espacio de poro y la transferencia de masa y calor en la zona de reacción. Entonces, la modelación del problema se reduce a la modelación de la dinámica del frente de combustión en las regiones de cada lado. Las propiedades de las dos regiones son acopladas usando las condiciones de salto derivadas. Esta metodología permite incorporar de manera explícita los efectos de heterogeneidad de la permeabilidad en la descripción del proceso sin la complejidad de las reacciones químicas acopladas.

2.2. Descripción física y matemática de la transferencia de masa y calor en medios porosos

La descripción matemática del flujo de un fluido en un medio permeable se obtiene de tres leyes o principios:

1. La ley de conservación de masa.
2. Las leyes que describen el transporte del fluido.

3. La ecuación de estado.

Las cuales se estudiarán de manera breve tomando en cuenta que, como condición se asume que en todos los procesos del yacimiento, cada punto dentro del mismo está en equilibrio termodinámico. Otra condición es que, en cualquier elemento pequeño de volumen, los fluidos y los minerales en la roca del yacimiento están a la misma temperatura.

2.2.1. Conceptos y definiciones

En esta sección se estudiará el problema de la transferencia de calor y masa en un medio poroso. Se presentarán las definiciones de algunos conceptos así como la discusión de algunas de las hipótesis más importantes que se hacen cuando se estudian procesos de recuperación térmica.

Es necesario y se requiere entender los mecanismos de transferencia de calor y el flujo de fluidos en un medio permeable así como tener el conocimiento de las leyes físicas y de las reacciones químicas que gobiernan la transferencia de calor para poder derivar las ecuaciones diferenciales que gobiernan el fenómeno de combustión in-situ. Más aun, se requiere tener una solución numérica del conjunto de ecuaciones diferenciales que represente apropiadamente al fenómeno que estamos estudiando. El problema de recuperación de petróleo por procesos térmicos es un problema complejo por esta razón se harán muchas simplificaciones cuidando que el sistema de ecuaciones diferenciales siga representando apropiadamente al sistema en estudio.

Antes de discutir acerca de los mecanismos de transferencia de masa y energía es importante introducir, los principios físicos fundamentales que están relacionados con la transferencia de masa y de energía con ellos se construirán las ecuaciones diferenciales que representan el balance de masa y de energía.

En la sección siguiente se presenta una versión simplificada de estas ecuaciones diferenciales para poder entender el fenómeno de transferencia de calor aplicado a problemas de yacimientos petroleros. Una condición que se asume generalmente en todos los procesos de yacimientos es que cada punto dentro del yacimiento está en equilibrio termodinámico. Por ejemplo, la presión parcial del vapor (p_s) está relacionada termodinámicamente a la temperatura (T_s) del vapor a

través de la relación de Clausius-Clapeyron, la cual se expresa de manera simbólica diciendo que la presión es función de la temperatura:

$$p_s = p_s(T_s) \tag{2.1}$$

La presión parcial de vapor es igual a la presión de la fase gas multiplicada por la fracción de moles de la fase gas ocupada por el vapor. Aún cuando la presión y la temperatura varían de punto a punto dentro del yacimiento (de tal manera que desde el punto de vista global no hay equilibrio térmico ni mecánico), se supondrá que localmente hay equilibrio térmico y mecánico así que aun cuando estén presentes las fases de agua y vapor de agua, la presión parcial del vapor de agua y la temperatura del agua están relacionadas por la ecuación Clausius-Clapeyron. Se dice que existe equilibrio termodinámico a escala local en el yacimiento aunque éste no sea siempre el caso a escala global.

Otra condición que se impone es que los fluidos y los minerales de la roca del yacimiento, en cualquier elemento de volumen pequeño, están a la misma temperatura. Esto implica que no hay ningún retardo entre la temperatura del fluido en el poro y la temperatura promedio de los minerales que lo rodean, de tal manera que el flujo de calor por contacto entre los minerales y los fluidos no tiene ninguna resistencia. Esta hipótesis es válida solo en el caso en el que el tamaño de los granos del mineral es relativamente pequeño en relación al poro. Esta hipótesis no se aplica si el yacimiento es altamente fracturado en cuyo caso se debe considerar por separado la temperatura de los minerales y la del fluido en el poro.

Como se mencionó anteriormente, antes de discutir los mecanismos de transferencia de calor, es importante definir algunos conceptos y variables físicas para estudiar las propiedades térmicas.

Entalpía H : Es la cantidad de energía térmica en una masa dada de material, medida respecto a una temperatura y presión de referencia.

Entalpía específica h : Es el contenido de entalpía por unidad de masa del material.

$$h = e + \frac{P}{J\rho} - e_r + \frac{P_r}{J\rho_r}$$

es igual a su energía interna por unidad de masa e mas el término del flujo de energía que es proporcional al cociente de la presión (P) por la densidad ρ . El subíndice r en esta

expresión denota un estado de referencia del sistema y J es el equivalente mecánico del calor.

Capacidad calorífica a presión constante C : Es la razón entre la cantidad de calor transferido a un sistema, en un proceso cualquiera y el cambio de temperatura que experimenta. Expone la cantidad de calor que se requiere para aumentar un grado Celsius la temperatura de una unidad de masa, mientras se mantiene constante la presión.

$$C = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P$$

Lejos del punto crítico, la capacidad calorífica de una fase es una función débil de la temperatura y, en ese caso, se puede expresar la ecuación para la entalpía como

$$h = C(T - T_r)$$

Capacidad calorífica a volumen constante C_V : Es la cantidad de calor que se requiere para aumentar un grado la temperatura de una unidad de masa de material a volumen constante.

$$C_V = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_V$$

de aquí se sigue que, fuera del punto crítico,

$$e = C_V(T - T_r)$$

Conductividad térmica λ : Es una propiedad del material que indica la cantidad de calor transferido a través del material por unidad de tiempo y por unidad de área de la sección transversal, normal al gradiente de temperatura unitario, en condiciones de estado estacionario y en ausencia de cualquier movimiento de fluido o de partículas.

Coefficiente de difusión térmica α : Es la razón de conductividad térmica a la capacidad calorífica volumétrica.

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho C}$$

Calor latente de vaporización L_v : Es la cantidad de calor necesaria para cambiar una unidad de masa de líquido a vapor, sin cambiar la temperatura.

Calor de reacción Δh_r : Es la cantidad de calor liberado o absorbido durante una reacción química por unidad de masa de reactante.

Energía potencial gravitacional: Es la energía por unidad de masa que resulta de la posición de un elemento de masa en el campo gravitacional medida con respecto a un plano de referencia. Esta dada por

$$\frac{gZ}{Jg_c}$$

Donde J es el equivalente mecánico del calor, Z es la distancia medida con respecto al punto de referencia de un sistema de coordenadas en el que la coordenada z esta orientada en la dirección vertical, g es la constante gravitacional y g_c recibe el nombre de *factor gravitacional de conversión*, Este factor toma distintos valores numéricos según el sistema de unidades empleado.

Energía cinética: Es la energía de un elemento de masa debida al movimiento. Para una unidad de masa, se aproxima por

$$\frac{|u|^2}{2\phi^2 Jg_c}$$

Donde u es la magnitud del flujo volumétrico y ϕ es la porosidad. Contribuciones de la energía cinética son usualmente más grandes cerca del pozo, donde las velocidades del líquido son mayores. Pero la contribución de la energía cinética al equilibrio de la energía de una reserva es, para propósitos prácticos, insignificante.

Energía total: Es la suma de las contribuciones de todas las formas de energía.

Energía total por unidad de masa e_t : Para procesos de recuperación térmica está formada por la componente entálpica y la potencial, como sigue

$$e_t = h + \frac{gZ}{Jg_c}$$

2.3. Mecanismos de transferencia de calor

Consideraremos solo tres mecanismos de transferencia de calor: conducción, convección y radiación.

Calor por conducción: Es el proceso por el cual se transfiere calor de una región de alta temperatura a otra de baja temperatura, por colisiones moleculares a través de materia que no fluye. La conducción térmica está determinada por la ley de Fourier. Establece que la tasa de transferencia de calor en una dirección dada, es proporcional al área normal a la dirección del flujo de calor y al gradiente de temperatura en esa dirección.

$$u_{\lambda x} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.2)$$

donde $u_{\lambda x}$ es la razón de calor transferido por conducción en la dirección positiva x por unidad de área de sección transversal normal a la dirección x ; λ es la conductividad térmica del material y $\frac{\partial T}{\partial x}$ es la componente en la dirección x del gradiente de temperatura.

Calor por convección: Es el proceso por el cual se transfiere energía por el flujo de un fluido. El flujo total u_t de energía por convección está dado por

$$u_t = u\rho \left(h + \frac{gz}{Jg_c} + \frac{|u|^2}{2\phi^2 Jg_c} \right) \quad (2.3)$$

en esta expresión, u es el flujo volumétrico del fluido y la expresión entre paréntesis es la energía del sistema por unidad de masa.

El flujo de calor por convección, cuya dirección es paralela a la del flujo del fluido, se aproxima como

$$u_t \approx u\rho h \approx u\rho C(T - T_r) \quad (2.4)$$

Transferencia de calor por radiación: Es el proceso por el cual se transfiere calor por medio de ondas electromagnéticas, sin necesidad de contacto físico. La ley de Stefan-Boltzmann establece que un cuerpo emite radiación térmica superficial proporcional a la cuarta potencia de su temperatura, ésto nos proporciona la razón de calor radiado que se transfiere de una superficie caliente por unidad de área de superficie

$$u_r = \sigma\epsilon(460 + T)^4 \quad (2.5)$$

donde $\sigma = 1.713 \times 10^{-9} \frac{Btu}{ft^2 hr R^4}$ * es la constante de Stefan-Boltzmann, T es la temperatura en grados Fahrenheit y ϵ es la emisividad de la superficie. La emisividad en rocas porosas es muy pequeña, por esta razón el término de flujo de calor por radiación no contribuye a la transferencia de calor en los yacimientos.

El *flujo de energía total* es entonces:

$$\begin{aligned} u_{e,x} &= u_{\lambda,x} + u_{T,x} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + u_x \rho_f h_f \\ u_{e,y} &= u_{\lambda,y} + u_{T,y} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + u_y \rho_f h_f \\ u_{e,z} &= u_{\lambda,z} + u_{T,z} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} + u_z \rho_f \left(h_f + \frac{gz}{Jg_c} \right) \end{aligned} \tag{2.6}$$

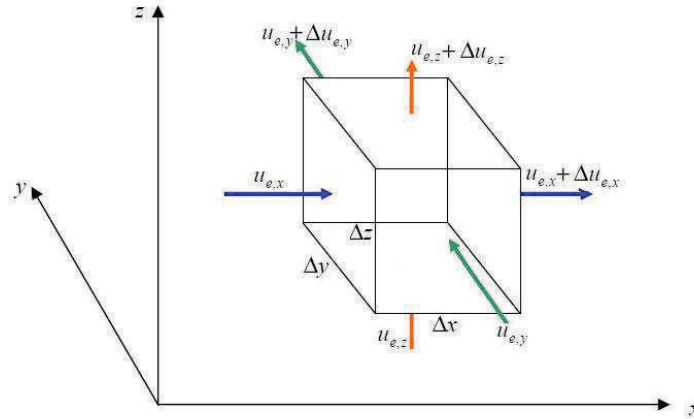
Balance general de energía

La primera ley de la termodinámica afirma que la cantidad total de energía en cualquier sistema aislado permanece invariable con el tiempo, aunque dicha energía puede transformarse en otra forma de energía, es decir, establece que la energía no se crea ni se destruye sólo se puede cambiar de una forma a otra.

Dado que son despreciables la energía cinética y el trabajo mecánico hecho en los alrededores por la expansión térmica del yacimiento, para un volumen base unitario la primera ley se puede enunciar de la manera siguiente:

$$\text{Transferencia neta de energía} + \text{Energía que entra de las fuentes} = \text{Energía interna ganada} \tag{2.7}$$

*Las unidades en esta expresión, (2.5), están dadas conforme al sistema inglés. Btu es la abreviatura de *British Thermal Unit*, un Btu representa la cantidad de energía que se requiere para elevar un grado Fahrenheit la temperatura de una libra de agua en condiciones atmosféricas normales. Ft es la abreviatura de *Foot*, una unidad de longitud de origen natural (basada en el pie humano). Y R es el símbolo utilizado para los denominados grados *Rankine*, el grado Rankine tiene su punto de cero absoluto a $-459,67^\circ F$, y los intervalos de grado son idénticos al intervalo de grado Fahrenheit.

Figura 2.1: Elemento de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$

Para desarrollar las ecuaciones diferenciales que describen la conservación de la energía se hace uso de un cubo estacionario de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$, ver figura 2.1, en el cual se introdujo un sistema de coordenadas cartesiano con la componente z en la dirección horizontal.

Los lados del elemento infinitesimal de volumen son de longitud Δx , Δy y Δz y la energía se transfiere a través de cada una de las seis caras. La energía total transferida al elemento de volumen a través de la cara de área $\Delta y \Delta z$ es el período de tiempo Δt ,

$$\text{energía transferida por } \Delta y \Delta z = u_{e,x} \Delta y \Delta z \Delta t \quad (2.8)$$

La energía total transferida fuera del elemento de volumen a través de la cara opuesta es

$$\text{energía transferida fuera } \Delta y \Delta z = (u_{e,x} + \Delta u_{e,x}) \Delta y \Delta z \Delta t \quad (2.9)$$

La energía neta transferida al elemento de volumen en un período de tiempo Δt se obtiene sumando las contribuciones paralelas a los tres ejes coordenados:

$$\begin{aligned}
\text{Transferencia neta de energía} &= (u_{e,x}\Delta y\Delta z + u_{e,y}\Delta x\Delta z + u_{e,z}\Delta x\Delta y)\Delta t \\
&\quad - [(u_{e,x} + \Delta u_{e,x})\Delta y\Delta z + (u_{e,y} + \Delta u_{e,y})\Delta x\Delta z + (u_{e,z} + \Delta u_{e,z})\Delta x\Delta y] \Delta t \\
&= - (\Delta u_{e,x}\Delta y\Delta z + \Delta u_{e,y}\Delta x\Delta z + \Delta u_{e,z}\Delta x\Delta y)\Delta t \quad (2.10)
\end{aligned}$$

La tasa de energía que entra de las fuentes por unidad de volumen se denota por \dot{Q} . La cantidad de energía que entra de las fuentes al elemento infinitesimal de volumen se puede expresar como

$$\text{Energía que entra de las fuentes} = \dot{Q} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \quad (2.11)$$

En esta expresión \dot{Q} es la razón de entrada de energía de las fuentes por unidad de volumen, incluye contribuciones tales como el calor producido por los pozos de inyección y de producción, el calor de combustión y de reacción y los calores endotérmicos de la descomposición mineral. La energía interna del elemento de volumen a cualquier tiempo t está dada por $\rho e \Delta x \Delta y \Delta z$. Como el elemento de volumen es estacionario, la ganancia de energía interna en el elemento de volumen es independiente de las variables espaciales y solo es función del tiempo. La energía interna al tiempo $t + \Delta t$ está dada por $(\rho e + \Delta(\rho e)) \Delta x \Delta y \Delta z$.

La ganancia en la energía interna al tiempo Δt está dada por

$$\text{Ganancia en la energía interna} = \Delta(\rho e) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.12)$$

De las ecuaciones (2.7) y (2.12), dividiendo por $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$ se obtiene la ecuación diferencial para la conservación de la energía:

$$- \left(\frac{\Delta u_{e,x}}{\Delta x} + \frac{\Delta u_{e,y}}{\Delta y} + \frac{\Delta u_{e,z}}{\Delta z} \right) + \dot{Q} = \frac{\Delta(\rho e)}{\Delta t} \quad (2.13)$$

Si se toma el límite en el que $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ y Δt se aproximan a cero, se obtiene

$$\left(\frac{\partial u_{e,x}}{\partial x} + \frac{\partial u_{e,y}}{\partial y} + \frac{\partial u_{e,z}}{\partial z} \right) = \dot{Q} - \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} \quad (2.14)$$

En el caso en el que hay n_p fases presentes, la energía interna por unidad de volumen de bulto (ρe) está dada por:

$$\rho e = (1 - \phi)M_\sigma \Delta T + \phi \sum_{i=1}^{n_p} S_i \rho_i e_i \quad (2.15)$$

En esta expresión M_σ es la capacidad calorífica volumétrica de los sólidos del yacimiento, S_i es la saturación de la fase i -ésima, ρ_i es la densidad de dicha fase y e_i es la energía interna por unidad de masa.

El flujo total de las componentes de la energía en las direcciones x , y y z son la suma del flujo de energía de convección y del flujo de calor por conducción para cada fase que fluye.

La componente del flujo total en la dirección z está dada por:

$$u_{e,z} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} + \sum_{i=1}^{n_p} u_{i,z} \rho_i \left[h_i + \frac{gz}{jg_c} \right] \quad (2.16)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.15) y (2.16) en la ecuación (2.14) se obtiene la ecuación de balance de energía.

$$\frac{\partial u_{e,x}}{\partial x} + \frac{\partial u_{e,y}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} + \sum_{i=1}^{n_p} u_{i,z} \rho_i \left[h_i + \frac{gz}{jg_c} \right] \right) = \dot{Q} - \frac{\partial}{\partial t} \left((1 - \phi)M_\sigma \Delta T + \phi \sum_{i=1}^{n_p} S_i \rho_i e_i \right) \quad (2.17)$$

Por último cabe mencionar que las fuentes de calor pueden ser funciones del espacio y el tiempo, como es el caso de un frente de combustión móvil. La magnitud de una fuente también puede verse afectada por variables dependientes del sistema, tales como la temperatura y la concentración y puede variar con el tiempo, por ejemplo si se hace una variación en la tasa de inyección de aire.

2.4. Mecanismos de transporte de masa

Una componente particular de un fluido puede ser transportada por difusión molecular y por flujo de bulto. Aún cuando la difusión por sí sola puede hacer que una componente estática empiece a fluir, lo mas usual es que ocurran ambas, es decir, difusión y flujo de bulto. Al fluir una componente, ya sea por difusión o por flujo de bulto, ocurre paralelo a éstas una transferencia de calor por conducción y convección respectivamente, en la que, la difusión y la conducción son el resultado de las interacciones moleculares en tanto que el flujo de bulto y la convección son fenómenos macroscópicos. Es bien sabido que la ley de Darcy gobierna el flujo en bulto de un fluido en un medio poroso permeable.

Para sistemas no isotérmicos, es necesario definir un potencial para el cual, la tasa volumétrica del flujo o velocidad de Darcy por unidad de área de la sección transversal es proporcional al gradiente del potencial.

Forma generalizada de la ley de Darcy:

$$\begin{aligned}
 u_{i,x} &= -\frac{k_i \partial p_i}{\mu_i \partial x} \\
 u_{i,y} &= -\frac{k_i \partial p_i}{\mu_i \partial y} \\
 u_{i,z} &= -\frac{k_i}{\mu_i} \left(\frac{\partial p_i}{\partial z} + \rho_i \frac{g}{g_c} \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

es válida en la presencia de un gradiente de temperatura. En estas expresiones las funciones de la temperatura son las siguientes: k_i es la permeabilidad efectiva, μ_i es la viscosidad y ρ_i es la densidad, i es el índice que denota a la fase i - ésima.

Se puede modificar la ley de Darcy para incluir turbulencia y otros efectos inerciales que se consideran validos en la presencia de variaciones de la temperatura.

Además del flujo de bulto, la transferencia de masa por difusión dentro de una fase es importante en algunos procesos de recuperación.

El flujo de masa por difusión $u_{n,x}$ en la dirección x o razón del flujo de masa por unidad de área de la sección transversal, está dada por la ley de Fick*:

$$u_{n,x} = -D \frac{\partial c}{\partial x} \quad (2.19)$$

D es el coeficiente de difusión (o coeficiente de difusión efectiva) y c es la concentración de la componente en difusión.

Ejemplo. En una interfase de quemado o cerca de una interfase de quemado el gradiente de concentración de oxígeno generalmente es grande. La difusión puede proporcionar el flujo de oxígeno a la zona de combustión además de la contribución del flujo de bulto de una fase de gas que contenga oxígeno. El flujo total de masa del oxígeno $(u_{m,x})_{O_2}$ en la fase de gas en la dirección x está dada por la ley de Darcy y la ley de Fick:

$$(u_{m,x})_{O_2} = -\frac{k_g}{\mu_g} \frac{\partial p_g}{\partial x} c_{O_2} - D \frac{\partial c_{O_2}}{\partial x} \quad (2.20)$$

la concentración del oxígeno esta dada en masa del oxígeno por unidad de volumen de la fase de gas. Como los coeficientes de difusión para gases son del orden de 100 a 1000 veces mayores que los de los líquidos, incluiremos en todos nuestros análisis únicamente el transporte de difusión de masa en gases.

Ecuación de continuidad

La descripción del flujo de un fluido en un medio permeable se obtiene de tres leyes o principios:

1. La ley de conservación de la masa
2. Las leyes que describen el transporte del fluido
3. Y las ecuaciones de estado.

La ley de conservación de masa cuando se aplica a un volumen arbitrario requiere que:

$$\text{Masa neta transferida} + \text{masa que entra de otras fuentes} = \text{masa acumulada} \quad (2.21)$$

*Ver apéndice A

Este balance de masa se debe de cumplir para cada componente de los fluidos del yacimiento. El número total de moléculas de cualquier componente en un pequeño elemento de volumen del yacimiento se separara en la fase gas, fase petróleo y fase agua. La fracción molar de cualquier componente j en las fases de gas, petróleo (Oil) y agua (Water) se denotará como y_j , $x_{o,j}$ y $x_{w,j}$ respectivamente, así que se pueden escribir las condiciones de equilibrio siguientes:

$$\begin{aligned} y_j &= x_{oj}k_{oj}(p, T, \text{otras componentes}) \\ y_j &= x_{wj}k_{wj}(p, T, \text{otras componentes}) \end{aligned} \tag{2.22}$$

k es la razón de equilibrio o factor- k y representa la razón de la fracción molar de la componente j en la fase de gas a la fracción molar de la componente j en la fase de petróleo. k_{wj} denota la razón de equilibrio y representa la razón de la fracción molar de la componente j en la fase de gas a la fracción molar de la componente j en la fase de agua.

Para agua vapor, se usa una razón de equilibrio derivada de la ley de Dalton* de las presiones parciales:

$$y_w = \frac{p_s(T)}{p_g} \tag{2.23}$$

donde p_s es la presión de saturación del vapor y p_g es la presión de la fase de gas.

Otra condición de equilibrio para la fase de agua es:

$$y_w = x_{ow}k_{ow} \tag{2.24}$$

en este caso, $0 \leq y_w \leq 1$.

El flujo total de masa $(u_{m,x})_j$ de la componente j en la dirección x está dado por la ecuación (2.25) la cual se sigue directamente de la ecuación (2.20) y las definiciones de y_j , x_{oj} y x_{wj}

*Ver apéndice A

$$(u_{m,x})_j = M_j \left(u_{g,x} \frac{\rho_g}{M_g} y_j + u_{o,x} \frac{\rho_o}{M_o} x_{o,j} + u_{w,x} \frac{\rho_w}{M_w} x_{w,j} - D_j \frac{\partial}{\partial x} \frac{\rho_g y_j}{M_g} \right) \quad (2.25)$$

Una aproximación totalmente análoga a la utilizada en derivar las ecuaciones (2.7)-(2.14) del balance de energía nos permite obtener el primer término de la ecuación (2.21)

$$- \left(\frac{\partial}{\partial x} (u_{m,x})_j + \frac{\partial}{\partial y} (u_{m,y})_j + \frac{\partial}{\partial z} (u_{m,z})_j \right) \quad (2.26)$$

La contribución debido a las fuentes de masa de componente j por volumen unitario del yacimiento, que corresponde al segundo término de la ecuación (2.21) es w_j . Y finalmente, el tercer término de la ecuación (2.21), la contribución que representa la acumulación de masa de la componente j es

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(M_j \phi \left(\frac{\rho_g S_g y_j}{M_g} + \frac{\rho_o S_o x_{oj}}{M_o} + \frac{\rho_w S_w x_{wj}}{M_w} \right) \right) \quad (2.27)$$

donde ϕ es la porosidad ρ_i es la densidad de la fase i , M_i es el peso molecular promedio de la fase i , S_i es la saturación de la fase i donde $i = g, o, w$, x_{oj} , y_j y x_{wj} son las fracciones molares de la componente j en la fase de petróleo, gas y agua, M_j es el peso molecular de la componente j .

Sustituyendo las ecuaciones (2.18) y las ecuaciones (2.26)-(2.27) en la ecuación (2.21) se obtiene la ecuación diferencial que surge de la ley de la conservación de la masa para cada componente j

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(x_{oj} \frac{k_o \rho_o}{\mu_o M_o} \frac{\partial p_o}{\partial x} + D_j \frac{\partial}{\partial x} \frac{\rho_g y_j}{M_g} + y_j \frac{k_g \rho_g}{\mu_g M_g} \frac{\partial p_g}{\partial x} + x_{wj} \frac{k_w \rho_w}{\mu_w M_w} \frac{\partial p_w}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(x_{oj} \frac{k_o \rho_o}{\mu_o M_o} \frac{\partial p_o}{\partial y} + D_j \frac{\partial}{\partial y} \frac{\rho_g y_j}{M_g} + y_j \frac{k_g \rho_g}{\mu_g M_g} \frac{\partial p_g}{\partial y} + x_{wj} \frac{k_w \rho_w}{\mu_w M_w} \frac{\partial p_w}{\partial y} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(x_{oj} \frac{k_o \rho_o}{\mu_o M_o} \left(\frac{\partial p_o}{\partial z} + \frac{g \rho_o}{g_c} \right) + D_j \frac{\partial}{\partial z} \frac{\rho_g y_j}{M_g} + y_j \frac{k_g \rho_g}{\mu_g M_g} \left(\frac{\partial p_g}{\partial z} + \frac{g \rho_g}{g_c} \right) + x_{wj} \frac{k_w \rho_w}{\mu_w M_w} \left(\frac{\partial p_w}{\partial z} + \frac{g \rho_w}{g_c} \right) \right) \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \left(x_{oj} \frac{\rho_o}{M_o} S_o + y_j \frac{\rho_g}{M_g} S_g + x_{wj} \frac{\rho_w}{M_w} S_w \right) \right) - \frac{w_j}{M_j} \end{aligned} \quad (2.28)$$

el término w_j puede ser una función de la posición, el tiempo, la temperatura, la presión y las composiciones. Puede representar la inyección de una componente con una localización fija del pozo o la componente que se genera en cualquier parte del yacimiento como resultado de las reacciones in-situ. En estas ecuaciones solo se incluye la difusión para la fase gas.

Es importante mencionar que las ecuaciones (2.17 y 2.29) son el sistema de ecuaciones que describen el problema, en ausencia de variables que cambian abruptamente. Para resolverlas existen algunos métodos numéricos como el elemento finito.

La ecuación de balance de energía es, ecuación(2.17):

$$\frac{\partial u_{e,x}}{\partial x} + \frac{\partial u_{e,y}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} + \sum_{i=1}^{n_p} u_{i,z} \rho_i \left[h_i + \frac{gz}{jg_c} \right] \right) = \dot{Q} - \frac{\partial}{\partial t} \left((1 - \phi) M_\sigma \Delta T + \phi \sum_{i=1}^{n_p} S_i \rho_i e_i \right)$$

Entonces, en el caso de un yacimiento con n_c componentes, hay n_c ecuaciones diferenciales de conservación de masa, una para cada componente.

Adicionalmente, tenemos la ecuación de balance de energía, lo que da un total de $n_c + 1$ ecuaciones diferenciales. Hay también $2n_c$ ecuaciones independientes que representan las *tasas* de equilibrio. Lo que da un total de $3n_c + 1$ ecuaciones.

Las variables desconocidas son y_j , x_{oj} y x_{wj} para cada una de las ecuaciones de continuidad. Se desconoce además, la temperatura T , las presiones y las saturaciones de cada fase.

Para tres fases, el número total de variables desconocidas es $3n_c + 7$, las seis relaciones adicionales para determinar el sistema son:

$$\begin{aligned}
S_o + S_g + S_w &= 1 \\
P_{c,wo} &= p_o - p_w \\
P_{c,og} &= p_g - p_o \\
\sum_{j=1}^{n_c} y_j &= 1 \\
\sum_{j=1}^{n_c} x_{oj} &= 1 \\
\sum_{j=1}^{n_c} x_{wj} &= 1
\end{aligned}
\tag{2.29}$$

donde $P_{c,wo}$ y $p_{c,og}$ son las presiones capilares entre las fases agua y aceite y entre las fases aceite y gas.

COMPONENTE	Fase Gas $i = g$	Fase Aceite $i = o$	Fase Agua $i = w$	Fase i-ésima	Fase n-ésima
$J=1=W$	y_w	x_{ow}	x_{ww}	x_{iw}	x_{nw}
2	y_2	x_{o2}	x_{w2}	x_{i2}	x_{n2}
j-ésima	y_j	x_{oj}	x_{wj}	x_{ij}	x_{nj}
n_c -ésima	y_{n_c}	x_{on_c}	x_{wn_c}	x_{in_c}	x_{nn_c}
$\sum_{j=1}^{n_c}$	1	1	1	1	1

Figura 2.2: Tabla para el caso de n_c componentes.

Este sistema de ecuaciones, están idealizadas para representar las propiedades isotrópicas y la difusión en la fase de gas únicamente. Sin embargo, pueden simplificarse aún más, dependiendo del problema que se estudie.

2.5. Aplicación del método

En esta sección se derivarán las ecuaciones del balance de masa de las fases que son de uso general en la Ingeniería de Yacimientos, a partir de las ecuaciones de continuidad más generales, expuestas anteriormente.

2.5.1. Petróleo muerto

Ecuaciones de continuidad para las fases aceite, gas y agua.

En las ecuaciones de continuidad, para estas fases, se harán las siguientes consideraciones:

- El agua y el gas son fases puras y por lo tanto constan de una sola componente cada una.
- La fase de aceite tiene gas disuelto por lo que tiene dos componentes.
- El gas disuelto tiene una composición fija y la cantidad de gas disuelto en el petróleo, es una función conocida de la presión y la temperatura.

La base para todos los balances de masa es el volumen de la fase aceite en condiciones de tanque de almacenamiento. Una vez que se fijaron las condiciones de presión y temperatura con condiciones de tanque de almacenamiento, los balances de volumen del agua, el aceite y el gas se pueden convertir en balances de masa si usamos las densidades de las fases en las condiciones de tanque de almacenamiento.

Para la fase aceite tenemos que el número de moles (N_o) de la fase aceite es la suma del número de moles de gas ($N_{g,r}$) y aceite ($N_{o,r}$) del tanque de almacenamiento presentes en él:

$$\frac{\rho_{o,r}}{M_{o,r}} + \frac{R_s \rho_{g,r}}{M_{g,r}} = B_o \frac{\rho_o}{M_o} \quad (2.30)$$

donde:

$\rho_{o,r}$ = Densidad de masa de la fase aceite en condiciones de tanque de almacenamiento.

$M_{o,r}$ = Peso molecular de la fase aceite en condiciones de tanque de almacenamiento.

R_s = Volumen de gas disuelto en la fase aceite por unidad de volumen de aceite (ambos volúmenes referidos en condiciones de tanque de almacenamiento).

$\rho_{g,r}$ = Densidad de masa de la fase gas en condiciones de tanque de almacenamiento.

$M_{g,r}$ = Peso molecular de la fase gas en condiciones de tanque de almacenamiento.

B_o = Factor de formación del volumen de aceite, definido como la razón del volumen de la fase

aceite a cualquier presión y temperatura respecto al volumen que ocupará en condiciones de tanque de almacenamiento.

ρ_o = Densidad de masa de la fase gas.

M_o = Peso molecular de la fase gas.

La ecuación (2.30), se puede escribir de la manera siguiente:

$$\frac{1}{B_o} \frac{M_o \rho_{o,r}}{M_{o,r} \rho_o} + \frac{R_s M_o \rho_{g,r}}{B_o M_{g,r} \rho_o} = 1 \quad (2.31)$$

El primer término de esta expresión es la fracción molar de aceite en tanque, χ_{oo} , presente en la fase aceite, el segundo término es la fracción molar de gas en tanque, χ_{og} , presente en la fase aceite y, en este caso, no está presente la fracción molar de agua en tanque, χ_{ow} , en la fase aceite.

$$\begin{aligned} \chi_{oo} &= \frac{1}{B_o} \frac{M_o \rho_{o,r}}{M_{o,r} \rho_o} \\ \chi_{og} &= \frac{R_s M_o \rho_{g,r}}{B_o M_{g,r} \rho_o} \\ \chi_{ow} &= 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (2.28), junto con

$$\begin{aligned} y_o &= y_w = x_{wo} = x_{wg} = 0. \\ y_g &= x_{ww} = 1. \end{aligned}$$

Se tiene

COMPONENTES	FASE: Gas $i = g$	FASE: Aceite $i = o$	FASE: Agua $i = w$
$j = 1 = w$ (water)	$y_w = 0$	$x_{ow} = 0$	$x_{ww} = 1$
$j = 2 = o$ (stock-tank oil)	$y_o = 0$	$x_{oo} = \frac{1}{B_o} \frac{M_o \rho_{o,r}}{M_{o,r} \rho_o}$	$x_{wo} = 0$
$j = 3 = g$ (stock-tank gas)	$y_g = 1$	$x_{og} = \frac{1}{B_o} \frac{M_o \rho_{o,r}}{M_{o,r} \rho_o}$	$x_{wg} = 0$
$\sum_{j=1}^{n_c=3}$	1	1	1

Se obtienen las ecuaciones para el transporte de masa para cada componente, si se toma primero el caso $j = o$ (aceite),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(x_{oo} \frac{k_o \rho_o \partial p_o}{\mu_o M_o \partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(x_{oo} \frac{k_o \rho_o \partial p_o}{\mu_o M_o \partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(x_{oo} \frac{k_o \rho_o}{\mu_o M_o} \right) \left(\frac{\partial p_o}{\partial z} + \frac{g \rho_o}{g_c} \right) \\ = \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(x_{oo} \frac{\rho_o}{M_o} S_o \right) \right] - \frac{w_o}{M_o} \end{aligned} \quad (2.33)$$

para $j = w$ (agua) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(x_{ww} \frac{k_w \rho_w \partial p_w}{\mu_w M_w \partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(x_{ww} \frac{k_w \rho_w \partial p_w}{\mu_w M_w \partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(x_{ww} \frac{k_w \rho_w}{\mu_w M_w} \right) \left(\frac{\partial p_w}{\partial z} + \frac{g \rho_w}{g_c} \right) \\ = \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(x_{ww} \frac{\rho_w}{M_w} S_w \right) \right] - \frac{w_w}{M_w} \end{aligned} \quad (2.34)$$

para $j = g$ (gas) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left(x_{og} \frac{k_o \rho_o \partial p_o}{\mu_o M_o \partial x} + y_g \frac{k_g \rho_g \partial p_g}{\mu_g M_g \partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(x_{og} \frac{k_o \rho_o \partial p_o}{\mu_o M_o \partial y} + y_g \frac{k_g \rho_g \partial p_g}{\mu_g M_g \partial y} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left(x_{og} \frac{k_o \rho_o}{\mu_o M_o} \left(\frac{\partial p_o}{\partial z} + \frac{g \rho_o}{g_c} \right) + y_g \frac{k_g \rho_g}{\mu_g M_g} \left(\frac{\partial p_g}{\partial z} + \frac{g \rho_g}{g_c} \right) \right) \\
& = \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(x_{og} \frac{\rho_o}{M_o} S_o + y_{og} \frac{\rho_g}{M_g} S_g \right) \right] - \frac{w_g}{M_g}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Las hipótesis que se hicieron en esta fase son que la composición del gas es constante, lo que significa que el peso molecular del gas es independiente de la presión y de la temperatura, y que el factor del volumen de formación para el gas está dado por:

$$B_g = \frac{\rho_{g,r}}{\rho_g} \tag{2.36}$$

2.5.2. Inyección de vapor con tres fases y dos componentes

Se considera un proceso de inyección de vapor en el que están presentes la fase de gas, la fase de petróleo muerto (no tiene gas ni otros componentes disueltos) y fases de agua, con componentes de hidrocarburo y agua. En este proceso se desprecia la difusión, entonces se tienen tres fases $n_p = 3$ y dos componentes $n_c = 2$.

Como se está trabajando con petróleo muerto, no puede haber otras componentes disueltas en éste, entonces: $x_{ow} = 0$ y $x_{oo} = 1$. En la fase agua no hay otras componentes disueltas, por lo tanto, se tiene que: $x_{ww} = 1$ y $x_{wo} = 0$. En la fase gas, la única componente es el vapor de agua, así que se obtiene lo siguiente: $y_w = 1$ y $y_o = 0$.

Con los valores dados en la tabla anterior, sustituyendo en las ecuaciones (2.28).

Para la componente del aceite, $j = o$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left(x_{oo} \frac{k_o \rho_o \partial p_o}{\mu_o M_o \partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(x_{oo} \frac{k_o \rho_o \partial p_o}{\mu_o M_o \partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(x_{oo} \frac{k_o \rho_o}{\mu_o M_o} \right) \left(\frac{\partial p_o}{\partial z} + \frac{g \rho_o}{g_c} \right) \\
& = \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(x_{oo} \frac{\rho_o}{M_o} S_o \right) \right] - \frac{w_o}{M_o}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Componente	Fase: $j=g$ (gas)	Fase: $j=o$ (aceite)	Fase: $j=w$ (agua)
$j=1=w$	$y_w = 1$	$x_{ow} = 0$	$x_{ww} = 1$
$j=2=o$	$y_o = 0$	$x_{oo} = 1$	$x_{wo} = 0$
$\sum_{j=1}^2$	1	1	1

y la componente del agua, $j = w$, se reduce a:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left(D_w \frac{\partial \rho_g y_w}{\partial x M_g} + y_w \frac{k_g \rho_g \partial p_g}{\mu_g M_g \partial x} + x_{ww} \frac{k_w \rho_w \partial p_w}{\mu_w M_w \partial x} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_w \frac{\partial \rho_g y_w}{\partial y M_g} + y_w \frac{k_g \rho_g \partial p_g}{\mu_g M_g \partial y} + x_{ww} \frac{k_w \rho_w \partial p_w}{\mu_w M_w \partial y} \right) \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_w \frac{\partial \rho_g y_w}{\partial z M_g} + y_w \frac{k_g \rho_g}{\mu_g M_g} \left(\frac{\partial p_g}{\partial z} + \frac{g \rho_g}{g_c} \right) + x_{ww} \frac{k_w \rho_w}{\mu_w M_w} \left(\frac{\partial p_w}{\partial z} + \frac{g \rho_w}{g_c} \right) \right) \\
& = \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(y_w \frac{\rho_g}{M_g} S_g + x_{ww} \frac{\rho_w}{M_w} S_w \right) \right] - \frac{w_w}{M_w}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Nótese que el peso molecular de la componente gas M_g es igual al peso molecular de la componente agua M_w y que son constantes los pesos moleculares del aceite M_o y del agua M_w .

Las ecuaciones que faltan por escribir son la ecuación de saturación,

$$S_o + S_w + S_g = 1,$$

la ecuación de la presión de capilaridad entre la fase aceite y la fase agua $P_{c,wo}$

$$P_{c,wo} = p_o - p_w$$

y la ecuación de la presión de capilaridad entre la fase gas y la fase aceite $P_{c,og}$

$$P_{c,og} = p_g - p_o,$$

Estas ecuaciones y la ecuación de balance de energía

$$\frac{\partial u_{e,x}}{\partial x} + \frac{\partial u_{e,y}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} + \sum_{i=1}^{n_p=3} u_{i,z} \rho_i \left[h_i + \frac{gz}{Jg_c} \right] \right) = \dot{Q} - \frac{\partial}{\partial t} \left((1 - \phi) M_\sigma \Delta T + \phi \sum_{i=1}^{n_p=3} S_i \rho_i e_i \right) \quad (2.39)$$

en conjunto forman un sistema de seis ecuaciones y siete incógnitas, estas son, las tres saturaciones S_o , S_w , S_g , las tres presiones p_o , p_w , p_g y la temperatura T .

En el caso en el que no hay vapor presente, se tiene que la saturación del gas es nula, $S_g = 0$ y se obtiene un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas.

Pero cuando hay vapor presente, haciendo uso de la Ley de Dalton de las presiones parciales expresada por la ecuación (2.23), con $y_w = 1$ para obtener la ecuación faltante

$$p_g = p_s(T)$$

con p_s la presión de saturación del vapor.

En el caso de tener un vapor-supercaliente, se tiene que la saturación del agua es nula, $S_w = 0$ y el número de ecuaciones también se reduce a seis. Si las contribuciones de la energía potencial son despreciables, la ecuación de balance de energía se reduce a:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n_p=3} u_{i,x} \rho_i [h_i] \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \sum_{i=1}^{n_p=3} u_{i,y} \rho_i [h_i] \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} + \sum_{i=1}^{n_p=3} u_{i,z} \rho_i [h_i] \right) \\ & = \dot{Q} - \frac{\partial}{\partial t} \left((1 - \phi) M_\sigma \Delta T + \phi \sum_{i=1}^{n_p=3} S_i \rho_i e_i \right) \end{aligned} \quad (2.40)$$

con el flujo de energía total en la dirección x , y y z dados por:

$$\begin{aligned}
u_{e,x} &= u_{\lambda,x} + u_{T,x} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n_p=3} u_{i,x} \rho_i [h_i] \\
u_{e,y} &= u_{\lambda,y} + u_{T,y} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \sum_{i=1}^{n_p=3} u_{i,y} \rho_i [h_i] \\
u_{e,z} &= u_{\lambda,z} + u_{T,z} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} + \sum_{i=1}^{n_p=3} u_{i,z} \rho_i [h_i]
\end{aligned}
\tag{2.41}$$

Hasta aquí se ha presentado el método tradicionalmente usado por las ingenierías en petróleo, a continuación se hará una introducción a un nuevo método para obtener las ecuaciones de manera más sencilla y sistemática, de esta manera también se obtendrán las ecuaciones para la región de la discontinuidad.

Capítulo 3

Método sistemático para la formulación de modelos de sistemas continuos

La modelación es la técnica general que se utiliza para realizar la predicción, es decir, en ella se construyen modelos y con ellos se predice el comportamiento del fenómeno que interesa.

En la actualidad, los modelos matemáticos y las leyes físicas y químicas, así como la simulación numérica, nos permiten estudiar sistemas complejos de fenómenos naturales que serían muy costosos, peligrosos e, incluso, imposibles de estudiar por experimentación directa. En esta perspectiva, los modelos matemáticos en ciencias e ingeniería son absolutamente necesarios porque constituyen el método más efectivo para formular el comportamiento en los sistemas de interés.

En este capítulo, se estudiará la modelación de sistemas físicos macroscópicos como es la recuperación de petróleo, desarrollando un método sencillo y haciendo uso del teorema de Gauss^{*}, con la premisa de que los sistemas que se modelan son continuos.

3.1. Concepto de sistema continuo

Un sistema continuo es aquél que llena todo el espacio que ocupa, tiene correspondencia bi-unívoca. Es decir, cada punto de un sistema continuo está lleno de materia y en cada punto del

^{*}Ver sección 3.6.1

espacio físico hay solamente una partícula. Así, definimos como sistema continuo a un conjunto de partículas.

En los sistemas continuos se trabaja con los promedios de sus propiedades físicas y existe un volumen, llamado representativo, para el cual se calculan y son válidos los promedios de dichas propiedades.

3.2. Cinemática de los sistemas continuos

Los sistemas continuos están constituidos por conjuntos de partículas a los que se le llamaran cuerpos. Se denota por $B(t)$ a la región ocupada por el cuerpo β , en el tiempo t . Dado un cuerpo β , toda subregión $\beta_1 \subset \beta$, constituye a su vez otro cuerpo; en tal caso, se puede decir que β_1 es un subcuerpo de β . Generalmente, el intervalo de tiempo considerado será $[0, \infty)$; es decir, se asume que $0 \leq t < \infty$. Una hipótesis básica que se adopta desde ahora es que, en cualquier tiempo $t \in [0, \infty)$, en cada punto \vec{x} con $\vec{x} \in B(t)$, hay una y solamente una partícula del cuerpo β .

Se designa como \vec{x} a las coordenadas de la posición de la partícula y como \vec{X} a la posición inicial de dicha partícula en el sistema de referencia lo cual sirve para identificar a la misma. A \vec{X} se le conoce también como las coordenadas lagrangianas de la partícula, mientras que \vec{x} son las coordenadas eulerianas de la misma.

Se define a $\vec{p}(\vec{X}, t) \in R^3$ como la posición ocupada por la partícula en el tiempo t , con la propiedad de que las coordenadas $\vec{x} \in B(t)$ de la partícula, están dadas por la expresión:

$$\vec{x} = \vec{r}(\vec{X}, t) \in R^3 \quad (3.1)$$

Nóte que las coordenadas eulerianas se pueden expresar como una función de las coordenadas lagrangianas y del tiempo.

Un concepto muy importante para la descripción del movimiento es la velocidad de las partículas, la cual se define como la derivada parcial con respecto del tiempo de la posición, cuando la partícula se mantiene fija. Su expresión esta dada por:

$$\vec{V}(\vec{X}, t) \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}(\vec{X}, t) \quad (3.2)$$

3.3. Propiedades extensivas e intensivas

Cuando una propiedad puede expresarse como una integral sobre la región $B(t)$ ocupada por el cuerpo, se dice que la propiedad es una propiedad *extensiva*. Dada una función cualquiera $\Psi(\vec{x}, t)$, se define la integral:

$$E(t) \equiv \int_{B(t)} \Psi(\vec{x}, t) d\vec{x} \quad (3.3)$$

Entonces $E(t)$ es una propiedad extensiva y a la función $\Psi(\vec{x}, t)$ se le llama la propiedad *intensiva* asociada a la propiedad extensiva $E(t)$. Así, toda función integrable define una propiedad intensiva.

3.4. Representación euleriana y lagrangiana

Existen dos formas de representar a las propiedades intensivas: la representación euleriana y la representación lagrangiana. La que se ha introducido aquí es la representación euleriana. Utilizando la representación euleriana $\Psi(\vec{x}, t)$, es posible definir a la función $\phi(\vec{X}, t)$, para toda partícula con posición \vec{X} y para todo tiempo t , por medio de la ecuación:

$$\phi(\vec{X}, t) \equiv \Psi(\vec{r}(\vec{X}, t), t) \quad (3.4)$$

La función $\phi(\vec{X}, t)$ es la representación lagrangiana de la misma propiedad intensiva, la cual queda definida unívocamente por la ecuación (3.4).

Como ejemplo, se observa que se cumple la relación para las representaciones euleriana y lagrangiana de la velocidad:

$$\vec{V}(\vec{X}, t) \equiv \vec{v}(\vec{r}(\vec{X}, t), t) \quad (3.5)$$

y, consecuentemente, se puede definir su correspondiente representación euleriana $\vec{v}(\vec{x}, t)$ del siguiente modo:

$$\vec{v}(\vec{x}, t) \equiv \vec{V}\left(\frac{1}{\vec{r}(\vec{x}, t)}, t\right) \quad (3.6)$$

La derivada lagrangiana de una propiedad, también llamada derivada material, se define por $\frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{X}, t)$, es decir, para obtener la derivada material de una propiedad intensiva se mantiene a la partícula fija. Tomando la derivada con respecto al tiempo en la ecuación (3.4) y utilizando la fórmula de la derivada de una función de funciones (regla de la cadena), se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{X}, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\vec{p}(\vec{X}, t), t) + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}(\vec{X}, t) \cdot \nabla \Psi(\vec{r}(\vec{X}, t), t) \quad (3.7)$$

Si se denota por \vec{x} a la posición de la partícula \vec{X} , entonces se puede reescribir la ecuación (3.7) como sigue

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{X}, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\vec{x}, t) + \vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \nabla \Psi(\vec{x}, t) \quad (3.8)$$

La derivada material se presenta en muchos desarrollos de la teoría de los sistemas continuos, por lo que se adoptará la notación

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \quad (3.9)$$

la cual se relaciona con la velocidad de Darcy*. Al operador $\frac{D}{Dt}$ se le llamará representación euleriana de la derivada material.

3.5. Postulado fundamental: Balance de propiedades extensivas

La hipótesis básica para la formulación de las ecuaciones de balance de las propiedades extensivas en la teoría de sistemas continuos se puede enunciar de la siguiente manera: cualquier variación de la propiedad extensiva proviene de lo que se genera o se destruye dentro del cuerpo o de lo que entra o sale a través de su frontera. La expresión matemática de esta hipótesis es:

$$\frac{dE(t)}{dt} \equiv \int_{B(t)} g(\vec{x}, t) dx + \int_{\partial B(t)} \vec{\tau}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} d\vec{x} \quad (3.10)$$

donde $g(\vec{x}, t)$ es lo que se genera o se destruye en el interior del cuerpo $B(t)$ y $\vec{\tau}(\vec{x}, t)$ es lo que entra o sale a través de la frontera del cuerpo $\partial B(t)$.

*Ver apéndice A

3.6. Ecuaciones de balance local

Debido a que cualquier propiedad extensiva es la integral de la intensiva asociada, ecuación (3.3), derivando adecuadamente, se obtiene lo siguiente

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_{B(t)} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\vec{X}, t) + \nabla \cdot (\Psi(\vec{X}, t) \vec{v}(\vec{x}, t)) \right\} \quad (3.11)$$

cuando no existen discontinuidades.

3.6.1. Ecuaciones de salto

En muchas aplicaciones de la teoría de los medios continuos, como en el caso de combustión in-situ, es necesario considerar propiedades intensivas en las cuales su representación euleriana $\Psi(\vec{X}, t)$, tenga discontinuidades de salto, tanto de la función misma como de sus derivadas, en alguna superficie que se representará por $\Sigma(t)$, ver figura 3.1. En el caso de que haya tales discontinuidades, la ecuación (3.11) no es aplicable directamente, por lo que es necesario modificarla. La ecuación aplicable a este caso se puede obtener haciendo un análisis del teorema de Gauss y separando en dos subregiones la región de integración para así poder incluir una discontinuidad.

El teorema de Gauss como consecuencia del teorema de Green

El Teorema de Green es una generalización del *Teorema fundamental del cálculo*, que establece que la integral de la derivada es una función primitiva, para funciones de varias variables.

Sea $f(x_1, \dots, x_n)$ una función de n variables. Considere una región Ω del espacio Euclidiano n -dimensional. Entonces

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\partial\Omega} f(\vec{x}) n_i d\vec{x} \quad (3.12)$$

donde $n_i = (n_1, \dots, n_N)$ es el vector normal unitario que apunta hacia el exterior de Ω . La ecuación (3.12) es el Teorema de Green.

Para enunciar el teorema de Gauss se hace uso del teorema de la divergencia que se deriva fácilmente de la ecuación (3.12).

Sea $\Omega \subset R^n$ una región de R^n y sea $\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}$ una descomposición de Ω ; es decir, Ω_i , $\forall i = 1, \dots, N$, es una subregión $\Omega, \Omega_i \cap \Omega_j$ siempre que $i \neq j$.

Sea $\vec{u}(x_1, \dots, x_n)$ una función vectorial de n -variables; su divergencia se define por

$$\nabla \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (3.13)$$

y el teorema de Gauss establece que

$$\int_{\omega} \nabla \cdot \vec{u} d\vec{x} = \int_{\partial\Omega} \vec{u} \cdot \vec{n} d\vec{x} \quad (3.14)$$

Una versión más general del Teorema de Gauss, aplicable a campos vectoriales continuos por partes y con primeras derivadas también continuas por partes, se presenta a continuación. Más específicamente, se hace la suposición de que la función vectorial \vec{u} y su primera derivada, son continuas en cada una de las subregiones $\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}$, separadamente.

Por sencillez y para implementar una representación gráfica del problema de estudio en este trabajo, se considera solamente el caso en que la descomposición consta de dos subregiones; es decir, $N = 2$.

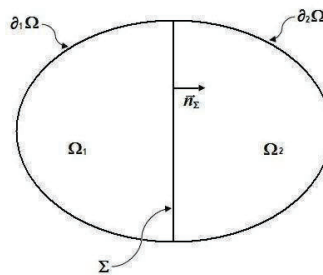


Figura 3.1: Representación gráfica del yacimiento

De acuerdo con la figura 3.1 se tiene una partición de la región, donde la parte inactiva del problema, es decir la región quemada del pozo, está dada por Ω_1 y la parte activa o región no quemada está dada por Ω_2 se denota a la frontera del problema como $\partial\Omega$ y el frente de combustión, quien genera una discontinuidad, se llamará *tasador* y se denotará con Σ . Entonces

$$\partial\Omega = \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega$$

donde $\partial_1\Omega$ es la frontera de la región inactiva y $\partial_2\Omega$ es la frontera de la región activa,

$$\partial_1\Omega = \partial\Omega \cap \partial\Omega_1 \quad \text{y} \quad \partial_2\Omega = \partial\Omega \cap \partial\Omega_2$$

Además $\partial\Omega_1$ denota a la frontera de la región inactiva en unión con el tasador y algo similar para la región activa,

$$\partial\Omega_1 = \partial_1\Omega \cup \Sigma \quad \text{y} \quad \partial\Omega_2 = \partial_2\Omega \cup \Sigma$$

con esta notación, se tiene:

$$\int_{\Omega_1} \nabla \cdot \vec{u} d\vec{x} = \int_{\partial\Omega_1} \vec{u} \cdot \vec{n}_\partial d\vec{x} = \int_{\partial_1\Omega} \vec{u} \cdot \vec{n}_\partial d\vec{x} + \int_{\Sigma} \vec{u}_- \cdot \vec{n}_\Sigma d\vec{x} \quad (3.15)$$

Observe que en la ecuación (3.15), el vector operador \vec{n}_Σ es la normal unitaria en Σ y se ha tomado apuntando hacia fuera de Ω_1 . En forma similar, se tiene

$$\int_{\Omega_2} \nabla \cdot \vec{u} d\vec{x} = \int_{\partial\Omega_2} \vec{u} \cdot \vec{n}_\partial d\vec{x} = \int_{\partial_2\Omega} \vec{u} \cdot \vec{n}_\partial d\vec{x} - \int_{\Sigma} \vec{u}_+ \cdot \vec{n}_\Sigma d\vec{x} \quad (3.16)$$

donde la normal unitaria en Σ se ha tomado igual que en la ecuación (3.15), apuntando hacia fuera de Ω_1 , por lo que $\vec{n}_\partial = -\vec{n}_\Sigma$ apunta hacia afuera de Ω_2 .

Sumando las ecuaciones (3.15) y (3.16), se obtiene

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{u} d\vec{x} = \int_{\partial\Omega} \vec{u} \cdot \vec{n}_\partial d\vec{x} + \int_{\Sigma} [\vec{u}] \cdot \vec{n}_\Sigma d\vec{x} \quad (3.17)$$

donde

$$[\vec{u}] \equiv \vec{u}_+ - \vec{u}_- \quad (3.18)$$

es el salto de la función \vec{u} y la ecuación (3.17) es la forma generalizada del teorema de Gauss al que se ha hecho referencia.

Con lo anterior y adoptando esta notación será es más sencillo ver que la ecuación que se necesita, en sustitución a la ecuación (3.11), para describir sistemas con discontinuidades es entonces:

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{B(t)} \Psi d\vec{x} = \int_{B(t)} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\Psi \vec{v}(\vec{x}, t)) \right\} d\vec{x} + \int_{\Sigma(t)} [\Psi(\vec{v} - \vec{v}_\Sigma)] \cdot \vec{n} d\vec{x} \quad (3.19)$$

Si se aplica al término de la integral en frontera de la ecuación (3.10), el teorema generalizado de Gauss en presencia de discontinuidades, se obtiene:

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_{B(t)} \{g + \nabla \cdot \tau\} d\vec{x} + \int_{\Sigma(t)} [\vec{\tau}] \cdot \vec{n} d\vec{x} \quad (3.20)$$

Si se restan las ecuaciones (3.19) y (3.20), resulta:

$$\int_{B(t)} \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\Psi \vec{v}) - g \nabla \cdot \tau \right\} d\vec{x} + \int_{\Sigma(t)} [\Psi(\vec{v} - \vec{v}_\Sigma) - \vec{\tau}] \cdot \vec{n} d\vec{x} = 0 \quad (3.21)$$

Al aplicar el Lema de duBois-Reymond, se obtiene:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\Psi \vec{v}) = g + \nabla \cdot \vec{\tau}; \forall \vec{x} \in B(t) \quad (3.22)$$

$$[\Psi(\vec{v} - \vec{v}_\Sigma) - \vec{\tau}] \cdot \vec{n} = 0; \forall \vec{x} \in \Sigma(t) \quad (3.23)$$

donde (3.22) y (3.23) son las ecuaciones de balance local de la propiedad intensiva.

Una manera alternativa de expresar la ecuación de balance local (3.22) es en función de la derivada material de la propiedad intensiva, si se desarrolla el término de la divergencia resulta:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \Psi + \Psi \nabla \cdot \vec{v} = g + \nabla \cdot \vec{\tau}; \forall \vec{x} \in B(t) \quad (3.24)$$

Como los dos primeros términos son, por definición, la derivada material de la propiedad intensiva, se reescribe entonces la expresión:

$$\frac{D\Psi}{Dt} + \Psi \nabla \cdot \vec{v} = g + \nabla \cdot \vec{\tau}; \forall \vec{x} \in B(t) \quad (3.25)$$

para facilitar la manipulación algebraica.

3.7. Sistemas de varias fases

En los sistemas compuestos por varias fases debemos distinguir los conceptos de fase y componente.

Se denomina fase a cada una de las partes macroscópicas de un sistema. Una fase está compuesta por varios componentes, completamente superpuestos, que se mueven todos a la misma velocidad. Por ejemplo, al mezclar agua con aceite y dejarlos reposar unos minutos, éstos se separan en dos fases. A su vez el agua (fase 1) está compuesta por hidrógeno, oxígeno y otros elementos que se les llaman componentes y el aceite (fase 2) tiene también sus propios componentes.

Se considera un sistema compuesto por N_i fases donde, a su vez, en cada fase hay M_j componentes.

A cada componente se le puede asociar un conjunto de propiedades intensivas. Aquí solo se considera una propiedad intensiva por componente, la cual se designa como Ψ_j^i , donde el superíndice i corresponde al número de la fase y el subíndice j corresponde al número de la componente dentro de dicha fase. Además se designa como E_j^i a su propiedad extensiva correspondiente.

De manera análoga al caso de una sola fase, reescribiendo la ecuación (3.10), se pueden plantear las ecuaciones de balance global por componentes:

$$\frac{dE_j^i(t)}{dt} = \int_{B(t)} g_j^i(t)(\vec{x}, t) d\vec{x} + \int_{\partial B(t)} \vec{\tau}_j^i(t)(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} d\vec{x} \quad (3.26)$$

donde i ($i = 1, 2, \dots, N$) y j ($j = 1, 2, \dots, M$).

Así como también las ecuaciones de balance local, incluyendo el salto de la función

$$\frac{\partial \Psi_j^i(t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\Psi_j^i(t) \vec{v}^i) = g_j^i(t) + \nabla \cdot \vec{\tau}_j^i(t); \forall \vec{x} \in B(t) \quad (3.27)$$

$$\llbracket \Psi_j^i(t)(\vec{v}^i - \vec{v}_\Sigma^i) - \vec{\tau}_j^i(t) \rrbracket \cdot \vec{n} = 0; \forall \vec{x} \in \Sigma(t) \quad (3.28)$$

donde i ($i = 1, 2, \dots, N$) y j ($j = 1, 2, \dots, M$).

En este capítulo se han obtenido las ecuaciones con las que se puede modelar cualquier sistema continuo, mediante un método sistemático haciendo uso principalmente del teorema de

Gauss. En lo que sigue se hará uso de las ecuaciones obtenidas para aplicarlas en un problema específico de recuperación secundaria de hidrocarburos por inyección de aire, también conocido como combustión in-situ y obtener un modelo del mismo.

Capítulo 4

Modelo de frentes de combustión

La propagación sostenida de los frentes de combustión en medios porosos es una condición necesaria para el éxito en un proyecto de combustión in-situ para la recuperación de hidrocarburos. Comparado con otros métodos de recuperación la combustión in-situ involucra la complejidad agregada de reacciones químicas exotérmicas y la cinética química dependiente de la temperatura. Esto conduce a zonas de reacción de un ancho espacialmente estrecho, dentro del cual las velocidades de liberación de calor, las temperaturas y las concentraciones varían significativamente. Esta variación abrupta hace difícil la simulación de los procesos de combustión y la implementación de métodos a escala real.

En este trabajo se habla de un método para la solución a este problema mediante el tratamiento de la región de reacción como una superficie de discontinuidad en las variables apropiadas, las cuales incluyen, por ejemplo, los flujos de calor y de masa. Se derivan las condiciones apropiadas de salto que relacionan el cambio de estas variables a través del frente. Estas condiciones toman en cuenta la cinética de reacción entre el oxidante y el combustible, los cambios en la morfología del espacio de poro y la transferencia de masa y calor en la zona de reacción. Entonces, la modelación del problema se reduce a la modelación de la dinámica del frente de combustión en las regiones de cada lado, en las cuales el transporte de calor y masa, deben ser considerados. Las propiedades de las dos regiones son acopladas usando las condiciones de salto derivadas. Esta metodología permite incorporar de manera explícita los efectos de heterogeneidad de la permeabilidad en la descripción del proceso sin la complejidad de las reacciones químicas acopladas. Típicamente las reacciones de combustión poseen energías de activación grandes.

Debido a que normalmente es grande y a que la velocidad de reacción depende fuertemente de la temperatura, todas las reacciones de combustión están confinadas a una zona de reacción

delgada donde las reacciones ocurren a una alta velocidad. La zona de reacción está contenida dentro de la capa de transferencia de calor, ver figura 4.1.

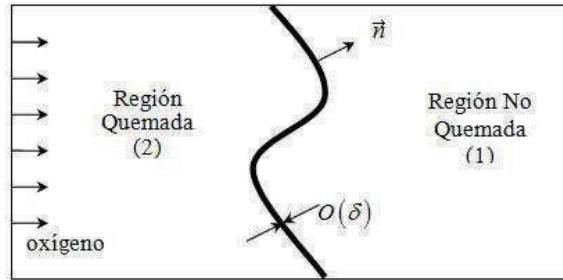


Figura 4.1: Esquema de la zona de combustión

En aplicaciones prácticas la zona de reacción tiene un ancho suficientemente pequeño por lo que puede ser vista como un frente.

Supondremos que la capa de transferencia de calor comparada con la escala del problema es muy pequeña, por lo que se puede considerar la zona de combustión como un frente, ver figura 4.1. Para este caso se pueden derivar condiciones adicionales de salto a través del frente de combustión.

En la combustión in-situ el combustible es producido como resultado de un proceso de oxidación de baja temperatura (LTO) que antecede al frente de combustión. Dado que los dos procesos están acoplados, la concentración y la composición del combustible son, en principio, no conocidas a priori y deben ser determinadas como parte de la solución del problema en conjunto.

Para formular el conjunto de ecuaciones que modelan el sistema se harán las siguientes hipótesis

- En el sistema existen dos fases:
 - La fase sólida (s), que consta de dos componentes: la matriz sólida (r) y el combustible sólido (f)

- La fase gaseosa (g), que es una mezcla de oxígeno (ox) y otros gases g_p (producto de la reacción).
- ρ_f^0 es la densidad inicial del combustible por unidad de volumen total, que se supone conocida.
- La matriz es no reactiva, estacionaria y sus propiedades termodinámicas no cambian durante el proceso.
- El combustible sólido [f] reacciona con el oxígeno [ox] de acuerdo al siguiente modelo estequiométrico:



- Localmente el espacio de poro y la matriz sólida están en equilibrio térmico.
- Se desprecian:
 - la transferencia de calor por radiación.
 - los términos fuente de energía debidos al incremento de la presión.
 - el trabajo de fuerzas de cuerpo y superficiales.
- Para la fase gaseosa se considerará la ecuación de estado del gas ideal $PV = nRT$
- Permanecen constantes las propiedades termodinámicas y de transporte, tales como: conductividad, difusividad, capacidad calorífica del sólido, calor de reacción, etc.

4.1. Arreglo de fases y componentes

Para facilitar el manejo de las variables en la sustitución de las ecuaciones de balance se han implementado las siguientes tablas

Para la masa

Fases (α)	Componentes (i)	Propiedades	Propiedades	Fuentes		Flujos
		Extensivas	Intensivas			
Sólida (s)	Roca (r)	$M_{(r,s)}(t)$	$\Psi_r^M = (1 - \phi) \rho_{(r,s)}$	$g_{(r,s)}$	$g_{\Sigma(r,s)}$	$\vec{\tau}_{(r,s)}$
	Combustible (f)	$M_{(f,s)}(t)$	$\Psi_f^M = \rho_{(f,s)}$	$g_{(f,s)}$	$g_{\Sigma(f,s)}$	$\vec{\tau}_{(f,s)}$
Gas (g)	Oxígeno (ox)	$M_{(ox,g)}(t)$	$\Psi_{ox}^M = \phi Y \rho_g$	$g_{(ox,g)}$	$g_{\Sigma(ox,g)}$	$\vec{\tau}_{(ox,g)}$
	Otros gases (og)	$M_{(og,g)}(t)$	$\Psi_{og}^M = \phi (1 - Y) \rho_g$	$g_{(og,g)}$	$g_{\Sigma(og,g)}$	$\vec{\tau}_{(og,g)}$

Cuadro 4.1: Arreglo de fases y componentes para la masa

Para la energía

Fases (α)	Propiedades	Propiedades	Fuentes		Flujos
	Extensivas	Intensivas			
Sólida (s)	$E_s(t)$	$\Psi_s^E = (1 - \phi) \rho_s e_s$	Γ_s	$\Gamma_{\Sigma s}$	$\vec{\Pi}_s$
Gas (g)	$E_g(t)$	$\Psi_g^E = \phi \rho_g e_g$	Γ_g	$\Gamma_{\Sigma g}$	$\vec{\Pi}_g$

Cuadro 4.2: Arreglo de fases y componentes para la energía

Notación:

α - representa la fase ($\alpha = s, g$)

i - representa la componente ($i = r, f, ox, og$)

$M_{(\beta,\alpha)}$ - masa de la componente i en la fase α

E_α - energía de la fase α

ϕ - porosidad del medio poroso

$\rho_{(i,\alpha)}$ - densidad de masa de la componente i en la fase α

ρ_α - densidad de masa de la fase α

e_α - energía interna por unidad de masa de la fase α

$g_{(i,\alpha)}$ - término fuente de la masa de la componente i en la fase α

$g_{\Sigma(i,\alpha)}$ - término fuente de la masa en Σ de la componente i en la fase α

$\vec{\tau}_{(i,\alpha)}$ - término de flujo de masa de la componente i en la fase α

Γ_α - término fuente de la energía para la fase α

$\Gamma_{\Sigma\alpha}$ - término fuente de la energía en Σ para la fase α

$\vec{\Pi}_\alpha$ - término de flujo de energía para la fase α

Y - Fracción de masa del oxígeno.

4.2. Ecuaciones de balance del sistema

Ecuaciones de balance de masa en cada fase

En esta sección derivaremos la ecuaciones de balance de masa de cada fase. El **balance de masa** de la **componente roca** en la **fase sólida** es

$$M_{(r,s)}(t) = \int_{B(t)} (1 - \phi) \rho_{(r,s)} d\vec{x} \quad (4.2)$$

donde ϕ es la porosidad del medio y $\rho_{(r,s)}$ es la densidad promedio de la roca

La ecuación de balance global de la masa se obtiene de la ecuación (3.26) y haciendo uso de la tabla (4.1)

$$\frac{d}{dt} M_{(r,s)}(t) = \int_{B(t)} g_{(r,s)}(\vec{x}, t) d\vec{x} + \int_{\partial B(t)} \vec{\tau}_{(r,s)}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} d\vec{x} + \int_{\Sigma(t)} g_{\Sigma}(r, s) d\vec{x} \quad (4.3)$$

De esta manera, las ecuaciones de balance local de la roca en fase sólida son

$$\frac{\partial \left((1 - \phi) \rho_{(r,s)} \right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left((1 - \phi) \rho_{(r,s)} \vec{v}_s \right) = g_{(r,s)} + \nabla \cdot \vec{\tau}_{(r,s)} \quad (4.4)$$

Y para la discontinuidad usando la ecuación (3.28) y haciendo uso de la tabla (4.1) tenemos

$$\left[\left[(1 - \phi) \rho_{(r,s)} (\vec{v}_s - \vec{v}_\Sigma) \right] \right] \cdot \vec{n} = g_{\Sigma(r,s)}; \quad (4.5)$$

donde, considerando que la roca esta fija, no hay difusión, ni fuentes, entonces:

$$\vec{v}_s \equiv 0, \quad \vec{\tau}_{(r,s)} \equiv 0, \quad g_{(r,s)} = 0, \quad g_{\Sigma}(r, s) \equiv 0.$$

Con estas condiciones, las ecuaciones de balance local se reducen a:

$$\phi \frac{\partial \rho_{(r,s)}}{\partial t} = 0 \quad (4.6)$$

y para la ecuación de salto obtenemos

$$(1 - \phi) \vec{v}_{\Sigma} \llbracket \rho_{(r,s)} \rrbracket \cdot \vec{n}_{\Sigma} = 0; \quad (4.7)$$

$$\rho_{(r,s)} = \text{constante} \quad (4.8)$$

Si la densidad es constante, no hay salto en la roca entonces

$$\llbracket \rho_{(r,s)} \rrbracket = 0. \quad (4.9)$$

El **balance de masa** de la **componente combustible** de la **fase sólida** es

$$M_{(f,s)}(t) = \int_{B(t)} \rho_{(f,s)} d\vec{x} \quad (4.10)$$

donde $\rho_{(f,s)}$ es la densidad de masa del combustible en fase sólida por el volumen total.

La ecuación de balance global, obtenida de la ecuación (3.26) y haciendo uso de la tabla (4.1) es

$$\frac{d}{dt} M_{(f,s)}(t) = \int_{B(t)} g_{(f,s)}(\vec{x}, t) d\vec{x} + \int_{\partial B(t)} \vec{\tau}_{(f,s)}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} d\vec{x} + \int_{\Sigma(t)} g_{\Sigma}(f, s) d\vec{x} \quad (4.11)$$

De aquí obtenemos que las ecuaciones de balance local son

$$\frac{\partial (\rho_{(f,s)})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{(f,s)} \vec{v}_s) = g_{(f,s)} + \nabla \cdot \vec{\tau}_{(f,s)} \quad (4.12)$$

Y para la discontinuidad obtenemos la función de salto para el combustible

$$\llbracket \rho_{(f,s)} (\vec{v}_s - \vec{v}_\Sigma) \rrbracket \cdot \vec{n}_\Sigma = g_{\Sigma(f,s)} \quad (4.13)$$

Pero

$$\vec{v}_s \equiv 0, \quad \vec{\tau}_{(f,s)} \equiv 0, \quad g_{(f,s)} = W, \quad g_{\Sigma(f,s)} \neq 0, \quad \rho_{(f,s)} \equiv \rho_{(f,s)}^0 (1 - \eta)$$

donde $\rho_{(f,s)}$ es la densidad de masa del combustible en fase sólida por el volumen total, $\rho_{(f,s)}^0$ es la densidad de masa inicial del combustible en fase sólida y

$$\eta(\vec{x}, t) = 1 - \frac{\rho_{(f,s)}}{\rho_{(f,s)}^0} \quad (4.14)$$

es la fracción de combustible consumido.

sustituyendo se obtienen

$$\frac{\partial (\rho_{(f,s)}^0 (1 - \eta))}{\partial t} = W$$

$$\llbracket \rho_{(f,s)}^0 (1 - \eta) \vec{v}_\Sigma \rrbracket \cdot \vec{n}_\Sigma = g_{\Sigma(f,s)}$$

entonces

$$-\rho_{(f,s)}^0 \frac{\partial \eta}{\partial t} = W \quad (4.15)$$

y la ecuación de salto es

$$\llbracket \rho_{(f,s)}^0 (1 - \eta) \vec{v}_\Sigma \rrbracket \cdot \vec{n}_\Sigma = g_{\Sigma(f,s)} \quad (4.16)$$

Si se considera que el combustible se consume completamente, es decir, $[\eta] = -1$, $\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$, entonces resulta que

$$g_{\Sigma(f,s)} = -\rho_{(f,s)}^0 \vec{v}_{\Sigma} \cdot \vec{n}_{\Sigma} \quad (4.17)$$

El balance de masa de la componente oxígeno de la fase gaseosa es

$$M_{(ox,g)}(t) = \int_{B(t)} \phi Y \rho_g d\vec{x} \quad (4.18)$$

donde hacemos uso de ϕ como porosidad del medio, $Y(\vec{x}, t)$ la fracción de masa del oxígeno y $\rho_g(T, p_g)$ la densidad promedio del gas como función de la temperatura y la presión.

Entonces la ecuación de balance global es la siguiente

$$\frac{d}{dt} M_{(ox,g)}(t) = \int_{B(t)} g_{(ox,g)}(\vec{x}, t) d\vec{x} + \int_{\partial B(t)} \vec{\tau}_{(ox,g)}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} d\vec{x} + \int_{\Sigma(t)} g_{\Sigma(ox,g)} d\vec{x} \quad (4.19)$$

De esta manera usando la ecuación (3.26) y la tabla (4.1) obtenemos la ecuacion de balance local:

$$\frac{\partial (\phi Y \rho_g)}{\partial t} + \nabla \cdot (Y \rho_g \vec{u}_g) = g_{(ox,g)} + \nabla \cdot \vec{\tau}_{(ox,g)} \quad (4.20)$$

Y la ecuación de salto para la discontinuidad de la componente oxígeno es

$$\llbracket \phi Y \rho_g (\vec{v}_g - \vec{v}_{\Sigma}) - D_{(ox,g)} \nabla (Y \rho_g) \rrbracket \cdot \vec{n}_{\Sigma} = g_{\Sigma(ox,g)} \quad (4.21)$$

donde se considera lo siguiente

$\vec{u}_g \equiv \phi \vec{v}_g$ que es la velocidad de Darcy

$\vec{\tau}_{(ox,g)} \equiv D_{(ox,g)} \nabla (Y \rho_g)$ es la ley de Fick

$D_{(ox,g)}$ el coeficiente de difusión efectivo del oxígeno en la fase gaseosa

$g_{(ox,g)} = 0$ $g_{\Sigma(ox,g)} = -\mu_{ox} \rho_{(f,s)}^0 \vec{v}_{\Sigma} \cdot \vec{n}_{\Sigma}$ el signo negativo indica que el oxígeno se consume

$\mu_{ox} \equiv \gamma_{ox} \frac{M_{ox}}{M_f}$ es el coeficiente estequiométrico del oxígeno pesado con respecto a la masa.

Entonces, se obtiene la ecuación de balance de masa del oxígeno

$$\phi \frac{\partial (Y \rho_g)}{\partial t} + \nabla \cdot (Y \rho_g \vec{u}_g) = \nabla \cdot (D_{(ox,g)} \rho_g \nabla Y) \quad (4.22)$$

donde se está considerando que

$$\nabla (Y \rho_g) = \rho_g (\nabla Y + Y \nabla \rho_g / \rho_g) \quad (4.23)$$

Y la ecuación de salto es la que sigue, el signo negativo indica que el oxígeno se consume

$$\llbracket \phi Y \rho_g (\vec{v}_g - \vec{v}_\Sigma) - D_{(ox,g)} \nabla (Y \rho_g) \rrbracket \cdot \vec{n} = -\mu_{ox} \rho_{(f,s)}^0 \vec{v}_\Sigma \cdot \vec{n}_\Sigma \quad (4.24)$$

Finalmente presentamos el **balance de masa** de la **componente otros gases** en la **fase gaseosa**, presentes en el modelo:

$$M_{(og,g)}(t) = \int_{B(t)} \phi (1 - Y) \rho_g d\vec{x} \quad (4.25)$$

donde ϕ es la porosidad del medio, $Y(\vec{x}, t)$ es la fracción de masa del oxígeno y $\rho_g(T, p)$ es la densidad promedio del gas.

La ecuación de balance global es

$$\frac{d}{dt} M_{(og,g)}(t) = \int_{B(t)} g_{(og,g)}(\vec{x}, t) d\vec{x} + \int_{\partial B(t)} \vec{\tau}_{(og,g)}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} d\vec{x} + \int_{\Sigma(t)} g_{\Sigma(og,g)} d\vec{x} \quad (4.26)$$

y las ecuaciones de balance local son

$$\frac{\partial \{(1 - Y) \phi \rho_g\}}{\partial t} + \nabla \cdot \{(1 - Y) \rho_g \vec{u}_g\} = g_{(og,g)} + \nabla \cdot \vec{\tau}_{(og,g)} \quad (4.27)$$

$$\llbracket \phi (1 - Y) \rho_g (\vec{v}_g - \vec{v}_\Sigma) - D_{(og,g)} \nabla \{(1 - Y) \rho_g\} \rrbracket \cdot \vec{n}_\Sigma = g_{\Sigma(og,g)} \quad (4.28)$$

donde se considera lo siguiente

$\vec{u}_g \equiv \phi \vec{v}_g$ es la velocidad de Darcy

$\vec{\tau}_{(og,g)} \equiv D_{(og,g)} \nabla \{(1 - Y) \rho_g\}$ corresponde a la ley de Fick

$D_{(og,g)}$ es el coeficiente de difusión efectivo de los otros gases en la fase gas

$g_{(og,g)} \equiv 0$, no hay fuente de otros gases

$g_{\Sigma(og,g)} \equiv \mu_{og} \rho_{(f,s)}^0 \vec{v}_{\Sigma} \cdot \vec{n}_{\Sigma} \mu_{og} \equiv \gamma_{og} \frac{M_{og}}{M_f}$ es el coeficiente estequiométrico del oxígeno pesado con respecto a la masa.

Entonces, se obtiene la ecuación de balance de masa del oxígeno

$$\phi \frac{\partial \{(1 - Y) \rho_g\}}{\partial t} + \nabla \cdot \{(1 - Y) \rho_g \vec{u}_g\} = -\nabla \cdot (D_{(og,g)} \rho_g \nabla Y) \quad (4.29)$$

Y la ecuación de salto es

$$\llbracket \phi (1 - Y) \rho_g (\vec{v}_g - \vec{v}_{\Sigma}) + D_{(og,g)} \rho_g \nabla Y \rrbracket \cdot \vec{n}_{\Sigma} = \mu_{og} \rho_{(f,s)}^0 \vec{v}_{\Sigma} \cdot \vec{n}_{\Sigma} \quad (4.30)$$

donde

$$\nabla \{(1 - Y) \rho_g\} = (1 - Y) \nabla \rho_g - \rho_g \nabla Y = \rho_g \{(1 - Y) \nabla \rho_g / \rho_g - \nabla Y\} = -\rho_g \nabla Y$$

Ecuaciones de balance de energía en cada fase

El balance de energía de la fase sólida es

$$E_s(t) = \int_{B(t)} (1 - \phi) \rho_s e_s d\vec{x} \quad (4.31)$$

donde e_s es la energía interna por unidad de masa del sólido.

La ecuación de balance global es entonces

$$\frac{d}{dt} E_s(t) = \int_{B(t)} \Gamma_s(\vec{x}, t) d\vec{x} + \int_{\partial B(t)} \vec{\Pi}_s(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} d\vec{x} + \int_{\Sigma(t)} \Gamma_{\Sigma_s} d\vec{x} \quad (4.32)$$

De aquí se obtienen las ecuaciones de balance local

$$\frac{\partial}{\partial t} \{(1 - \phi) \rho_s e_s\} + \nabla \cdot ((1 - \phi) \rho_s e_s \vec{v}_s) = \Gamma_s + \nabla \cdot \vec{\Pi}_s \quad (4.33)$$

$$[(1 - \phi) \rho_s e_s (\vec{v}_s - \vec{v}_\Sigma) - \lambda_s \nabla T] \cdot \vec{n}_\Sigma = \Gamma_{\Sigma s} \quad (4.34)$$

donde se considera que

$\vec{\Pi}_s \equiv \lambda_s \nabla T$ es la ley de Fourier

λ_s es la conductividad térmica de la fase sólida

$\vec{v}_s \equiv 0$ es la velocidad de Darcy

$\Gamma_s \equiv -\dot{Q}_s^h$ es la pérdida de calor

$\Gamma_{\Sigma s} \equiv Q_s \rho_{(f,s)}^0 \vec{v}_\Sigma \cdot \vec{n}_\Sigma$

Q_s es calor liberado debido a la reacción de combustión

Entonces, se obtiene la ecuación de balance de energía del sólido

$$\frac{\partial}{\partial t} \{(1 - \phi) \rho_s e_s\} = \nabla \cdot (\lambda_s \nabla T) \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{(1 - \phi) \rho_s e_s\} = (1 - \phi) \rho_s \frac{\partial e_s}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \{(1 - \phi) \rho_s\} e_s \quad (4.36)$$

$$(1 - \phi) \rho_s c_s \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda_s \nabla T) \quad (4.37)$$

donde $c_s = \frac{\partial e_s}{\partial T}$ es la capacidad calorífica del sólido.

Y la ecuación de salto es

$$- [(1 - \phi) \rho_s e_s \vec{v}_\Sigma + \lambda_s \nabla T] \cdot \vec{n}_\Sigma = Q_s \rho_{(f,s)}^0 \vec{v}_\Sigma \cdot \vec{n}_\Sigma \quad (4.38)$$

El balance de energía de la fase gas es

$$E_g(t) = \int_{B(t)} \phi \rho_g e_g d\vec{x} \quad (4.39)$$

donde e_g es energía interna por unidad de masa del gas.

Obtenemos la ecuación de balance global

$$\frac{d}{dt}E_g(t) = \int_{B(t)} \Gamma_g(\vec{x}, t) d\vec{x} + \int_{\partial B(t)} \vec{\Pi}_g(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} d\vec{x} + \int_{\Sigma(t)} \Gamma_{\Sigma g} d\vec{x} \quad (4.40)$$

Y con ésta las ecuaciones de balance local son

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_g e_g) + \nabla \cdot (\rho_g e_g \vec{u}_g) = \Gamma_g + \nabla \cdot \vec{\Pi}_g \quad (4.41)$$

$$[\phi \rho_g e_g (\vec{v}_g - \vec{v}_\Sigma) - \lambda_g \nabla T] \cdot \vec{n}_\Sigma = \Gamma_{\Sigma g} \quad (4.42)$$

donde se considera que

$\vec{\Pi}_g \equiv \lambda_g \nabla T$ es la ley de Fourier

λ_g es la conductividad térmica del gas

$\vec{u}_g \equiv \phi \vec{v}_g$ es la velocidad de Darcy de la fase gas

$\Gamma_g \equiv -\dot{Q}_g^h$

$\Gamma_{\Sigma g} \equiv Q_g \rho_{(f,s)}^0 \vec{v}_\Sigma \cdot \vec{n}_\Sigma$

Q_g es el calor liberado debido a la reacción de combustión

\dot{Q}_g^h es la pérdida de calor

Entonces, se obtiene la ecuación de balance de energía del gas

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_g e_g) + \nabla \cdot (\rho_g e_g \vec{u}_g) = \nabla \cdot (\lambda_g \nabla T) - \dot{Q}_g^h \quad (4.43)$$

o bien,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_g) e_g + \frac{\partial e_g}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} (\phi \rho_g) + \nabla \cdot (\rho_g \vec{u}_g) e_g + \nabla e_g \cdot (\rho_g \vec{u}_g) \\ & = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_g) + \nabla \cdot (\rho_g \vec{u}_g) \right\} e_g + \frac{\partial e_g}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} (\phi \rho_g) + \frac{\partial e_g}{\partial T} \nabla T \cdot (\rho_g \vec{u}_g) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Como, $\phi \frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g \vec{u}_g) = 0$, finalmente resulta

$$c_g \phi \rho_g \frac{\partial T}{\partial t} + c_g \rho_g \vec{u}_g \cdot \nabla T = \nabla \cdot (\lambda_g \nabla T) - \dot{Q}_g^h \quad (4.45)$$

donde $c_g = \frac{\partial e_g}{\partial T}$ es la capacidad calorífica del gas.

Y la ecuación de salto es

$$[\phi \rho_g e_g (\vec{v}_g - \vec{v}_\Sigma) - \lambda_g \nabla T] \cdot \vec{n}_\Sigma = Q_g \rho_{(f,s)}^0 \vec{v}_\Sigma \cdot \vec{n}_\Sigma \quad (4.46)$$

Balance de energía total

Sumando el balance de energía de las dos fases en las ecuaciones (4.37) y (4.45) tenemos:

$$(1 - \phi) \rho_s c_s \frac{\partial T}{\partial t} + c_g \phi \rho_g \frac{\partial T}{\partial t} + c_g \rho_g \vec{u}_g \cdot \nabla T = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \dot{Q}^h \quad (4.47)$$

donde $\lambda = \lambda_s + \lambda_g$ es la conductividad térmica efectiva que incluye los efectos del gas y del sólido. $Q = Q_s + Q_g$ cuantifica todo el calor generado durante la reacción de combustión y $\dot{Q}^h = \dot{Q}_s^h + \dot{Q}_g^h$ representa todo el calor disipado por el sistema.

Además la ecuación de salto es

$$[\phi \rho_g e_g \vec{v}_g - \{(1 - \phi) \rho_s e_s + \phi \rho_g e_g\} \vec{v}_\Sigma - \lambda \nabla T] \cdot \vec{n}_\Sigma = Q \rho_{(f,s)}^0 \vec{v}_\Sigma \cdot \vec{n}_\Sigma \quad (4.48)$$

Si se toma la aproximación lineal $e_\alpha = c_\alpha T$ la ecuación anterior se puede reescribir como

$$[\{\phi \rho_g c_g \vec{v}_g - ((1 - \phi) \rho_s c_s + \phi \rho_g c_g) \vec{v}_\Sigma\} T - \lambda \nabla T] \cdot \vec{n}_\Sigma = Q \rho_{(f,s)}^0 \vec{v}_\Sigma \cdot \vec{n}_\Sigma \quad (4.49)$$

4.3. Resumen del sistema de ecuaciones del modelo

Balance de masa de la roca

$$\begin{aligned} \rho_{(r,s)} &= \text{const} \\ [[\rho_{(r,s)}]] &= 0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

Balance de masa del combustible

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$$

$$[\eta] = -1 \quad (4.51)$$

En el caso en que se consume todo el combustible.

Balance de masa del oxígeno

$$\phi \frac{\partial(Y\rho_g)}{\partial t} - \nabla \cdot (D_{(ox,g)}\rho_g \nabla Y) + \nabla \cdot (Y\rho_g \vec{u}_g) = 0$$

$$\llbracket \phi Y \rho_g (\vec{v}_g - \vec{v}_\Sigma) - D_{(ox,g)} \nabla(Y\rho_g) \rrbracket \cdot \vec{n} = -\mu_{ox} \rho_{(f,s)}^0 \vec{v}_\Sigma \cdot \vec{n}_\Sigma \quad (4.52)$$

Balance de masa de otros gases

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} \{(1-Y)\rho_g\} + \nabla \cdot (D_{(og,g)}\rho_g \nabla Y) + \nabla \cdot \{(1-Y)\rho_g \vec{u}_g\} = 0$$

$$\llbracket \phi (1-Y)\rho_g (\vec{v}_g - \vec{v}_\Sigma) + D_{(og,g)}\rho_g \nabla Y \rrbracket \cdot \vec{n}_\Sigma = \mu_{og} \rho_{(f,s)}^0 \vec{v}_\Sigma \cdot \vec{n}_\Sigma \quad (4.53)$$

Balance de masa de la fase gas

$$\phi \frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g \vec{u}_g) = 0$$

$$\llbracket \phi \rho_g (\vec{v}_g - \vec{v}_\Sigma) \rrbracket \cdot \vec{n} = \mu_g \rho_{(f,s)}^0 \vec{v}_\Sigma \cdot \vec{n} \quad (4.54)$$

Balance de energía

$$(1-\phi)\rho_s c_s \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + c_g \rho_g \vec{u}_g \cdot \nabla T = -\dot{Q}^h$$

$$\llbracket \{\phi \rho_g c_g \vec{v}_g - ((1-\phi)\rho_s c_s + \phi \rho_g c_g) \vec{v}_\Sigma\} T - \lambda \nabla T \rrbracket \cdot \vec{n}_\Sigma = Q \rho_{(f,s)}^0 \vec{v}_\Sigma \cdot \vec{n}_\Sigma \quad (4.55)$$

Incógnitas:

$$\eta, Y, \rho_g(T, p_g), T, p_g, \vec{v}_g, \vec{v}_\Sigma.$$

donde $\eta(\vec{x}, t) = 1 - \rho_f/\rho_f^0$, en el caso en que $\eta = 0$, estado inicial, ($\rho_f = \rho_f^0$). O bien en el caso en que $\eta = 1$, combustión completa del combustible, ($\rho_f = 0$).

Conclusiones

Con base en el presente trabajo es posible concluir que la formulación de los sistemas continuos es una herramienta poderosa para plantear los modelos de sistemas que son de gran interés para el humanidad ya que de esta forma se hace uso correcto de los recursos naturales y se pueden prevenir desastres en el ambiente, en particular ha sido fundamental en este trabajo el uso de las ecuaciones diferenciales, el teorema de Gauss, así como también fue imprescindible el uso de la ley de Darcy y la ley de Fick para la modelación que se realizó, primordialmente, la teoría de medios continuos.

La principal conclusión que se observa en este trabajo es el establecimiento de un análisis en lo que se refiere a las ecuaciones de salto correspondientes al punto en que las variables cambian abruptamente y la sencillez con la que las podemos plantear mediante el teorema de Gauss.

En este trabajo se llevó a cabo un estudio analítico sobre la recuperación secundaria de petróleo por inyección de aire y más profundamente se estudiaron las ecuaciones que modelan la dinámica del frente de combustión in-situ en un medio poroso. Se analizó el caso adiabático y estacionario de las ecuaciones diferenciales conservativas que dominan el proceso de combustión in situ. Se construyó un sistema de ecuaciones algebraicas que modelan el proceso.

Para tener un trabajo bien planteado como proyecto para recuperación de petróleo no basta con presentar el modelo de ecuaciones sino también debería incluir la solución a estas ecuaciones, las cuales se resuelven de manera numérica mediante el uso de métodos de elementos finitos. Dicha solución sale del propósito de este estudio, sin embargo, se cree conveniente señalar que para futuros proyectos se podría incluir un análisis completo de las ecuaciones y estudiar sus soluciones.

Es prudente mencionar que la forma de las ecuaciones y la metodología que se utilizó para realizar este trabajo, tienen múltiples y muy amplias aplicaciones, si se hiciera una reforma de los intereses bien podría servir esta tesis para realizar un proyecto, por así decirlo, ambiental, por

ejemplo, de agua, de humo o de distintas áreas que involucren la teoría de fluidos, el transporte de energía y los medios continuos.

Apéndice A

Leyes y teoremas

A.1. Ley de Darcy

En 1856, en la ciudad francesa de Dijon, el ingeniero Henry Darcy fue encargado del estudio de la red de abastecimiento de agua a la ciudad. Parece que también debía diseñar filtros de arena para purificar el agua, así que se interesó por los factores que influían en el flujo del agua a través de los materiales arenosos y posteriormente estableció lo que ahora conocemos como Ley de Darcy, una de las piedras fundamentales de la mecánica de los suelos y medios porosos.

Aquí enunciaremos una parte de este resultado empírico, que muestra que la *Velocidad de Darcy* \vec{U} , la cual describe el flujo, es una función lineal del gradiente de la presión en ausencia de gravedad. En general esta ley se expresa en presencia de gravedad como:

$$\vec{U} = -\frac{1}{\mu} |k| \cdot (\nabla p - \rho \vec{g}) \quad (\text{A.1})$$

donde

\vec{g} - es el vector de aceleración de la gravedad

μ - es la viscosidad dinámica del fluido

k - es el tensor de permeabilidad intrínseca

p - es la presión del fluido

$\vec{U} = \phi \vec{v}$ - es la velocidad de Darcy que se define como el gasto volumétrico por unidad de área

v - es la velocidad del fluido

ϕ - es la porosidad del medio

Si consideramos az como la altura respecto a un nivel de referencia dado, entonces el vector aceleración de la gravedad se puede expresar como:

$$\vec{g} = -g \nabla z \quad (\text{A.2})$$

y consecuentemente esta ley se puede describir como

$$\vec{U} = -\frac{1}{\mu} |k| \cdot (\nabla p + \rho g \nabla z) \quad (\text{A.3})$$

donde g - es la magnitud del vector aceleración de la gravedad.

A.2. Ley de Fick

La ley de Fick es una ley cuantitativa en forma de ecuación diferencial, describe diversos casos de difusión de materia o energía en un medio en el que inicialmente no existe equilibrio. Recibe su nombre en honor al médico Adolf Fick, quien la derivó en 1855 en Alemania.

En situaciones en las que existen gradientes de concentración, o de temperatura, se produce un flujo de partículas, o de calor, que tiende a homogeneizar el sistema y uniformizar la concentración o la temperatura. El flujo homogeneizador es una consecuencia estadística del movimiento azaroso de las partículas que da lugar al segundo principio de la termodinámica. Así los procesos físicos de difusión pueden ser vistos como procesos físicos o termodinámicos irreversibles.

En el caso de existir diferencias de concentración de cualquier especie, el movimiento aleatorio de las moléculas se llevará a cabo desde las regiones con mayor concentración hacia las regiones de menor concentración. El flujo de sustancia irá en el sentido opuesto del gradiente de concentración y, si éste es débil, podrá aproximarse por el primer término de la serie de Taylor, resultando la ley de Fick:

$$u_{n,x} = -D \frac{\partial c}{\partial x} \quad (\text{A.4})$$

siendo D el coeficiente de difusión de la especie de concentración c . En el caso particular del calor, la ley de Fick se conoce como ley de Fourier.

A.3. Ley de Dalton

La ley de las presiones parciales, conocida también como ley de Dalton, fué formulada en el año 1803 por el físico, químico y matemático británico John Dalton. Establece que la presión de una mezcla de gases, que no reaccionan químicamente, es igual a la suma de las presiones

parciales que ejercería cada uno de ellos si solo uno ocupase todo el volumen de la mezcla, sin cambiar la temperatura.

Entonces la presión que ejerce un componente determinado de una mezcla de gases se llama presión parcial del componente. Las presiones parciales se calculan aplicando la ley de los gases ideales a cada componente. Así la presión parcial P_c para un componente consiste en n_c moles a la temperatura T en el volumen V , siendo R la constante universal de los gases ideales, está dada por la expresión

$$P_c = \frac{n_c RT}{V} \quad (\text{A.5})$$

Se puede calcular la presión parcial de cada componente, si se conoce el número de moles de cada uno de los gases que se encuentran en la mezcla encerrada en un volumen determinado y a una temperatura dada. Debido a que las partículas de cada gas componente se conducen de una forma diferente, la presión total que ejerza la mezcla será el resultado de todas las partículas. Se establece que la presión total de una mezcla de gases es igual a la suma de las presiones parciales de los gases individuales. Así pues

$$P_{total} = \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n \frac{n_i RT}{V} \quad (\text{A.6})$$

Siendo n_i el número de moles del componente i de la mezcla.

Apéndice B

Reacciones químicas

En esta sección se habla de las reacciones químicas que se desencadenan en el problema de extracción de petróleo y se discutirán las propiedades generales de las reacciones de oxidación que se siguen de estimar el calor liberado de los hidrocarburos involucrados en un proceso de combustión in-situ. De una manera sencilla y sin entrar mucho en detalles, se explicarán los procesos por los que pasa el compuesto antes de ser extraído. Esto sirve por que es necesario conocer ciertos parámetros ya que a la hora de hacer los modelos matemáticos, es necesario echar mano de los experimentos realizados y de los resultados obtenidos. Generalmente se obtienen muchos productos de la reacción de oxidación de hidrocarburos. Sin embargo, si se toma en cuenta la formación de ligaduras entre un átomo de carbono y de oxígeno, es posible derivar los procesos mas importantes.

En un proceso HTO, el resultado de las reacciones entre el oxígeno y los combustibles orgánicos derivados del crudo es la formación de CO_2 , CO y H_2O . Estas reacciones remueven al carbón del combustible y rompen la cadena de los hidrocarburos (llamado craqueo térmico) para formar una fracción volátil, una de baja volatilidad y un residuo pesado (en la literatura, a este residuo pesado se le llama coque). Uno de los puntos más importantes de los estudios experimentales de inyección de aire es determinar el consumo de oxígeno del yacimiento. Este consumo depende de la cinética de las reacciones de oxidación. Con base en los resultados experimentales de los tubos de combustión [4], se sabe que el proceso de oxidación de los hidrocarburos para producir monóxido de carbono, bióxido de carbono y agua, básicamente sigue dos rutas de oxidación.

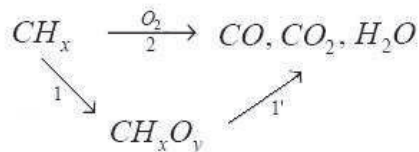


Figura B.1: Ruta de reacción

La primera ruta está dada por la trayectoria que va de $1 \rightarrow 1$, ver figura B.1; el combustible CH_x se oxigena para formar los compuestos polares CH_xO_y y estos se oxidan posteriormente para obtener el producto que nos interesa.

En la segunda ruta de la reacción, el combustible se oxida para formar de manera directa monóxido de carbono, bióxido de carbono y agua, es claro que estas dos reacciones ocurren a temperaturas diferentes. En yacimientos con hidrocarburos pesados, el frente de oxidación puede alcanzar temperaturas hasta de 800°C y las reacciones de oxidación siguen la ruta $1 \rightarrow 1'$, la ruta 2 o ambas simultáneamente. En tanto que en los yacimientos con hidrocarburos ligeros, las temperaturas típicas que alcanza el frente de oxidación son de 200°C a 400°C . Éstos son los que tienen menor pérdida de calor a través de la roca que el generado por las reacciones de oxidación y experimentan las rutas 1 y 1'.

En yacimientos con hidrocarburo ligero con saturación de agua muy alta o saturación de aceite muy baja, las reacciones de oxidación ocurren a temperaturas cercanas a la del yacimiento y principalmente se logra la reacción de oxidación de la ruta 1, esto es, solo se producen productos oxigenados (compuestos polares).

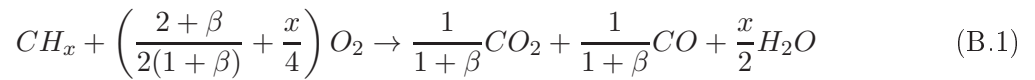
Haciendo estudios de la roca de los fluidos del yacimiento y de oxidación de hidrocarburos en tubos de combustión, se puede inferir cual de los dos procesos de oxidación es más probable que se realice al inyectar aire en el yacimiento y, controlando la tasa de inyección de aire es posible inducir y controlar el tipo de proceso de oxidación que sea de interés para la explotación del yacimiento.

En la literatura [16] se reporta que, para aceite ligero, los núcleos consolidados pueden tener permeabilidades de hasta 10md^* , las presiones que debe resistir el tubo de combustión son de hasta 40MPa^* y debe de resistir temperaturas de hasta 500°C .

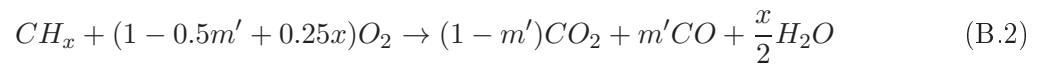
*La permeabilidad en el Sistema Métrico Decimal se mide en cm^2 . En esta sección se hace uso de la unidad derivada de la Ley de Darcy, la cual se denomina darcy y habitualmente se utiliza el milidarcy que se denota como md , equivalencia: $1\text{ darcy} = 9.86923 \times 10^{-13}\text{m}^2$. A su vez, el pascal de símbolo Pa es la unidad de presión del Sistema Internacional de Unidades y se define como la presión que ejerce una fuerza de 1 newton sobre una superficie de 1 metro cuadrado normal a la misma, equivalencia: $1\text{Pa} = \frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}^2}$

Calor producido por oxidación de alta temperatura ($T > 350^\circ\text{C}$)

Durante un proceso de oxidación in-situ el consumo de oxígeno ocurre principalmente en la zona de alta temperatura donde predominan las reacciones de combustión completa e incompleta, suponiendo que el combustible oxidado solo contiene carbono e hidrógeno, y definiendo, bajo estas condiciones, el cociente atómico $x = \frac{H}{C}$ del combustible quemado y el cociente volumétrico $\beta = \frac{CO}{CO_2}$ de los gases producidos, la estequiometría del proceso de combustión de alta temperatura es como sigue:



Otra manera de escribir esta ecuación es la siguiente:



en esta expresión, x es el número promedio de átomos de hidrógeno por átomo de carbono, conocido como el cociente $\frac{H}{C}$, y m' es la razón de moles de CO a CO_2 .

Se debe mencionar que no se consideró el contenido de sulfuro, nitrógeno y oxígeno en el combustible. El número promedio de átomos de hidrógeno por átomo de carbono, x , se calcula ya sea por un análisis elemental del combustible (por ejemplo, con una muestra de coque que se tome cercana al frente de combustión) o de un balance de materia de la fase de gas de la zona de combustión de alta temperatura. Sin embargo, ambos métodos son bastante difíciles de llevar a cabo en campo, ya que los estudios se hacen en los gases de los pozos productores.

Como en algunas regiones del yacimiento se realizan los procesos de oxidación de baja temperatura, el valor global que se obtenga para x de un análisis de gases será más grande que el debido únicamente a una reacción de alta temperatura. Por este motivo es mejor utilizar el valor de x que se obtiene en el laboratorio.

Usualmente se hace un análisis de los óxidos de carbono producidos y del oxígeno libre para determinar que tipo y que cantidad de combustible se está quemando.

El cociente $\frac{H}{C}$ del combustible quemado se puede expresar como una razón atómica o como una razón molar. Estos cálculos requieren de un balance de materia muy cuidadoso en el contenido de O_2 , H_2 y C presentes en el sistema reactivo. Si no se incluyen en el cálculo los efectos del oxígeno que contiene el crudo y las contribuciones del contenido mineral, en este caso, η es el cociente molar del oxígeno total que reaccionó para formar el bioxido de carbono generado y se calcula de un balance de oxígeno sencillo y de la hipótesis de que no hay acumulación de estos gases en el sistema:

$$\eta = \frac{\text{gasto de } O_2 \text{ consumido}}{\text{gasto de } CO_2 \text{ producido}} = \frac{0.21i_a - q c_{O_2P}}{q c_{CO_2P}} \quad (\text{B.3})$$

en esta expresión, 0.21 es la fracción molar del contenido de oxígeno en el aire, i_a es la tasa de inyección de aire, q es la tasa de producción de gas, la concentración de la fracción molar del gas de salida producido es, para el oxígeno c_{O_2P} , para el bióxido de carbono c_{CO_2P} y para el nitrógeno c_{N_2} .

El resto del aire inyectado es básicamente nitrógeno y argón, que son gases inertes, entonces

$$0.79i_a = qc_{N_2} \quad (\text{B.4})$$

Con estas hipótesis se obtiene que el equivalente del cociente atómico $\frac{H}{C}$ del combustible oxidado es:

$$x = 4(1 - m') \left(\frac{0.27c_{N_2} - c_{O_2}}{c_{CO_2}} \right) + 2m' - 4 \quad (\text{B.5})$$

Los valores típicos de x son entre 1 y 2, tanto en el laboratorio como en las pruebas de campo. Los valores relativamente pequeños son para reacciones de oxidación de alta temperatura y se incrementan conforme aumentan las contribuciones de una reacción de oxidación de baja temperatura. Los valores típicos de m' parecen estar relacionados al tipo de oxidación que se esta

llevando a cabo, esto es, LTO ó HTO, esta información se extrae de la concentración de oxígeno en la corriente generada.

Para combustible quemado, cuando hacemos el experimento de combustión con un material cuya porosidad ϕ no corresponde a la del yacimiento, la masa m_R del combustible quemado por unidad de bulto de volumen del yacimiento está dada por:

$$m_R = \frac{1 - \phi}{1 - \phi_E} m_E \quad (\text{B.6})$$

donde m_E es la masa del combustible quemado por unidad de bulto de volumen de la muestra experimental.

El petróleo saturado equivalente se puede calcular en función del combustible quemado:

$$S_{0F} = \frac{m_R}{\phi \rho_0} \quad (\text{B.7})$$

donde ρ_0 es la densidad del petróleo.

La cantidad de agua generada en el proceso de combustión se puede calcular de la estequiometría de la reacción de HTO, expresada como el agua de saturación equivalente en la zona quemada, y esta dada como

$$S_{wF} = \frac{0.319 x a_R}{(4 - 2m' + x)\phi} \quad (\text{B.8})$$

donde a_R es el volumen de aire en condiciones estándar que se requirió para oxidar completamente un volumen unitario de yacimiento en miles de pies cúbicos estándar (scf) por pie cúbico (cu ft).

Volumen de aire requerido por unidad de volumen de combustible

El volumen de aire que se requiere para quemar 1 lbm* de combustible se puede calcular de la ecuación estequiométrica para la reacción de combustión, si conocemos $x = \frac{H}{C}$, del combustible quemado. De acuerdo con esta ecuación, el número de moles de oxígeno que reaccionan con un

*libra masa

mol de combustible está dado por $1 - 0.5m' + 0.25x$.

Un mol de gas ocupa 0.379 Mscf, y un mol de combustible pesa $12 + x$ lbm. De aquí que el volumen de aire R a requerido para quemar un pie cúbico de combustible, está dado por:

$$a_R = 10^3 Mscf/scf \frac{451m_R}{12 + x} (4 - 2m' + x) scf/cuft \quad (\text{B.9})$$

en esta expresión, m_R es el combustible quemado por unidad de bulto del volumen del yacimiento medido en lbm/cu ft.

El parámetro a_R es uno de los más importantes y su valor afecta el diseño y el cálculo económico del proyecto de inyección de aire.

El aire a_R^* que se requiere consumir cuando pasa a través de una unidad de bulto está dado por:

$$a_R^* = \left[(a_R + 10^3 Mscf/cuft) \left(\frac{T_{sc,ab}}{T_{ab}} \right) \left(\frac{P_{inj,ab}}{P_{s,ab}} \right) \phi \right] \frac{1}{E_{O_2}} \quad (\text{B.10})$$

en esta expresión p_{sc} y T_{sc} son la presión parcial y la temperatura en condiciones estándar, mientras que el subíndice ab denota el valor absoluto y E_{O_2} es el consumo de oxígeno o la eficiencia en utilización. En ausencia de una información mejor, el cociente de temperaturas se aproxima por 0.5.

Bibliografía

- [1] Thermal Recovery, Michael Prats. 1982.
- [2] Recuperación mejorada de hidrocarburos, aplicaciones en yacimientos naturalmente fracturados, Prats, Michael. Abril 1997.
- [3] SPE 5437 Laboratoire studies for light oil air injection projects: Potential application in Handi field. Cédric CLARA, SPE, Marc DURANDEAU, SPE, Gérard QUENAULT, Total Exploration Production, Túyet-Hang NGUYEN, Centre National de la Recherche Scientifique
- [4] Kuhn, C. S. and Koch, R. L.: In-Situ Combustión. Newest Method of increasing Oil Recovery, Oil and Gas Journal Aug. 10,1953
- [5] Akkutlu, I. Y. and Yortsos, Y. C.: The Dynamics of Combustion Fronts in Porous Media, SPE 063225, SPE Annual Technical Conference and Exhibition held in Dallas, TX, October 2000.
- [6] Akkutlu, I. Y. and Yortsos, Y. C.: The dynamics of in-situ combustion fronts in porous media. Combustion and Flame, 2003.
- [7] SPE 8394 In-Situ Combustion Model Keith H. Coats, Intercomp Resource Development and Engineering Inc.
- [8] Fundamental Mechanics of Fluids, 1974 Currie, Iain G.
- [9] Principles of Applied Reservoir Simulation, second edition. John R. Fanchi
- [10] Systematic formulation of continuum systems: Theoretical modeling of combustion fronts in porous media. Dennys López-Falcón, Martín Díaz-Viera, Ismael Herrera, Ezequiel Rodríguez-Jáuregui.

-
- [11] Dullien F. A. L. Porous Media - Fluid Transport and Pore Structure. Academic Press, 1992.
- [12] X. O. Olivella, C. A. de Sacibar. Mecánica de Medios Continuos para Ingenieros, 2000.
- [13] L. Carrillo, M. Díaz. Ingeniería de Yacimientos Petroleros (Notas de Curso), Edición 2006.
- [14] Robert E. Treyval, Operaciones de transferencia de masa, 1994.
- [15] Victor L. Streeter. E. Benjamin Wyle. Keith W. Bedford. Mecánica de Fluidos, 1999.
- [16] El libro de las reacciones químicas de Ezequiel.