



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

TRANSMISIÓN ULTRASÓNICA EN HETEROESTRUCTURAS DE
CRISTALES FONÓNICOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

Licenciado en Física

PRESENTA

Gerardo Alejandro Morales Morales

DIRECTOR DE TESIS

María Betsabé Manzanares Martínez

Hermosillo, Sonora. Agosto 2018

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

Índice general

Introducción	6
1. Teoría de la Elasticidad	10
1.1. Deformación	10
1.2. Esfuerzos	12
1.3. Ecuación de equilibrio y de movimiento	14
1.4. Ley de Hooke para mecánica del medio continuo	15
1.5. Ondas elásticas	17
1.6. Condiciones en la frontera	21
2. Método de Desarrollo en Ondas Planas	23
2.1. Red de Bravais	23
2.1.1. Red de Bravais de simetría unidimensional	24
2.1.2. Red directa y recíproca	25
2.2. Teorema de Bloch	26
2.3. Desarrollo en ondas planas	26
3. Experimentación	36
3.1. Medición de la velocidad del sonido	36
3.1.1. Técnica de pulso-eco	37
3.2. Medición de la densidad	40
3.3. Fabricación de multicapas	41
3.4. Técnica de transmisión a través	42
4. Resultados	45
4.1. Multicapas	45

4.2. Heteroestructuras	48
5. Conclusiones	51
A. Cálculo de la estructura de bandas para CFn usando MDOP	53

Índice de figuras

1.1. P_0 denota la posición de un punto antes de la deformación mientras que P'_0 denota el mismo punto después de la deformación.	10
1.2. Distancia entre dos puntos cercanos antes y después de la deformación.	11
1.3. Componentes de esfuerzo en las caras visibles de un elemento de volumen de un cuerpo sólido elástico.	12
2.1. Red de Bravais bidimensional con celda unitaria dada por el paralelogramo ABCD.	24
2.2. Red de Bravais para simetría unidimensional.	25
2.3. Red infinita que representa a un cristal fonónico unidimensional. La red está compuesta por la repetición periódica de los materiales A y B.	27
2.4. Celda unitaria, donde a es el grosor de la capa A y d es el grosor de la celda unitaria.	27
2.5. Estructura de bandas obtenida para un cristal fonónico formado por aluminio y epoxi con celda unitaria de 5.0mm.	34
3.1. Transductor piezoeléctrico transmitiendo un pulso con incidencia normal a través de un material.	37
3.2. Configuración experimental para la medición de la velocidad de sonido de pulso-eco.	38
Configuración experimental para la medición de la velocidad de pulso-eco obtenida utilizando un transductor de $5MHz$ utilizando el método de pulso-eco	39
Configuración experimental para la medición de la densidad utilizando el método de Arquímedes.	41

3.5.	Multicapa elaborada con láminas de aluminio de 2mm alternadas con capas de resina epóxica de 3mm.	42
3.6.	Configuración experimental para la medición de la transmisión por el método de transmisión a través.	42
3.7.	Multicapas de celda unitaria de 5mm y 7.5mm pegadas	44
3.8.	Transmisión de la multicapa con $d=5mm$, (a) muestra la transmisión en el dominio del tiempo, (b) muestra la transmisión en el dominio de la frecuencia.	44
4.1.	Comparación teoría-experimento para multicapa con $d = 5.0mm$. (a) Estructura de bandas correspondiente al cristal fonónico del sistema aluminio/epoxi. (b) Transmisión experimental.	46
4.2.	Comparación teoría-experimento para multicapa con $d=7.5mm$. (a) Estructura de bandas correspondiente al cristal fonónico del sistema aluminio/epoxi. (b) Transmisión experimental.	47
4.3.	Comparación teoría-experimento para multicapa con $d=10mm$. (a) Estructura de bandas correspondiente al cristal fonónico del sistema aluminio/epoxi. (b) Transmisión experimental.	47
4.4.	Configuración experimental de transmisión a través para la superposición formada por dos multicapas de celdas unitarias $d=5mm$ y $d=7.5mm$. 48	
4.5.	Comparación teoría-experimento para la superposición de las multicapas con celdas unitarias $d=5.0mm$ y $d=7.5mm$. (a) Estructura de bandas correspondiente al cristal fonónico con $d=5.0mm$. (b) Estructura de bandas correspondiente al cristal fonónico con $d=7.5mm$. (c) Transmisión experimental.	49
4.6.	Superposición de las multicapas con celdas unitarias $d=5.0mm$, $d=7.5mm$ y $d=10.0mm$	49

- 4.7. Comparación teoría-experimento para la superposición de las multicapas con celdas unitarias $d=5.0mm$, $d=7.5mm$ y $d=10.0mm$. (a) Estructura de bandas correspondiente al cristal fonónico con $d=5mm$. (b) Estructura de bandas correspondiente al cristal fonónico con $d=7.5mm$. (c) Estructura de bandas correspondiente al cristal fonónico con $d=10.0mm$. (d) Transmisión experimental. 50

Índice de cuadros

3.1. Grosor de las capas.	38
3.2. Velocidades del sonido de aluminio y epoxi.	40
3.3. Densidades de aluminio y epoxi.	41

Introducción

El deseo de controlar el flujo de ondas elásticas ha inspirado un gran interés en Cristales Fonónicos (CFn) [1]. Los CFn son estructuras artificiales con variaciones periódicas en sus propiedades elásticas en una (1D), dos (2D) o tres dimensiones (3D). Se caracterizan por presentar una estructura de bandas para la propagación de ondas elásticas longitudinales y transversales, la cual es resultado de la dispersión múltiple de Bragg. Entre las bandas fonónicas puede haber rangos de frecuencias en las que se inhibe la propagación de las vibraciones mecánicas. Esta característica facilita la manipulación de ondas mecánicas para potenciales dispositivos optoacústicos [2].

El concepto de CFn para ondas elásticas sigue un principio físico similar con las bandas prohibidas para electrones en semiconductores y ondas electromagnéticas en cristales fotónicos (CFt). De esta manera, los semiconductores, CFt y CFn comparten muchas analogías, una de ellas es que la propagación de las ondas se describe mediante una ecuación diferencial de segundo orden [1]. Sin embargo, el mecanismo de propagación es diferente en cada caso. En los semiconductores, los electrones se propagan a través de átomos de materiales como el germanio (Ge) o el silicio (Si) que poseen constantes reticulares en el rango de $1 \times 10^{-10}m$.

En CFt tenemos ondas electromagnéticas que se propagan a través de una estructura cristalina compuesta por una repetición periódica de una celda unitaria que tiene un período del orden de la longitud de onda. En CFt, la celda unitaria se define mediante tres parámetros constitutivos: función dieléctrica, fracción de llenado y geometría. Un CFt se puede considerar como un enrejado cristalino mesoscópico que obedece a las leyes de la electrodinámica clásica.

Para el caso de CFn, la propagación de las vibraciones de ondas mecánicas se extiende desde el régimen acústico (Hz) al hipersónico (GHz), por lo tanto, las longitudes

de onda están en el rango de metros a nanómetros (nanómetros = $10^{-9}m$) [1, 3]. El interés en CFt y CFn es controlar el flujo de ondas electromagnéticas y mecánicas, respectivamente. Desde el descubrimiento de los CFt, una meta importante ha sido encontrar una estructura con una banda prohibida completa para todas las direcciones del espacio [4, 5]. El factor limitante para obtener una amplia banda prohibida fotónica es el contraste de los materiales, cuanto mayor es el contraste más grande es la banda prohibida.

Una estrategia para aumentar la brecha de banda en CFt es usar heteroestructuras [6]. Una heteroestructura está hecha de la concatenación de diferentes redes de CFt que se eligen para superponer las bandas prohibidas y así obtener un ancho de banda global ampliado. Usando esta técnica, ha sido posible obtener espejos para ondas electromagnéticas, es decir, amplios intervalos donde el CFt no transmite [7].

Para el caso de los CFn, que funcionen en el rango de GHz a THz existen restricciones similares para fabricar estructuras periódicas con un alto contraste en los parámetros constitutivos. En particular, recientemente se ha informado sobre la fabricación de un CFn hipersónico basado en multicapas de silicio poroso donde se ha demostrado la existencia de resonancias de Bragg elásticas en el régimen de GHz [8]. Sin embargo, las multicapas de silicio poroso poseen un bajo índice de contraste de densidad y velocidades de sonido, por lo tanto, no se detectaron las separaciones de bandas en la configuración experimental fabricada [8].

No obstante, las bandas prohibidas longitudinales y transversales se pueden encontrar en multicapas de silicio poroso para el régimen hipersónico bajo ciertas condiciones geométricas [9]. Sin embargo, tales bandas prohibidas son muy estrechas como resultado del bajo contraste en los parámetros constitutivos de la celda unitaria. Con el fin de ampliar las bandas prohibidas en CFn hipersónicos en el régimen de GHz, algunos de los autores han propuesto el uso de heteroestructuras fonónicas para ampliar el rango de la banda prohibida [9].

En este trabajo, presentamos una prueba experimental de la ampliación de bandas prohibidas fonónicas en el régimen de MHz utilizando heteroestructuras fonónicas. Hemos diseñado bandas prohibidas de gran tamaño utilizando una heteroestructura compuesta por capas de aluminio y epoxi. La heteroestructura resultante puede considerarse como un espejo mecánico. Los CFn que actúan como espejos en una amplia

gama de frecuencias son muy deseables en algunas aplicaciones, por ejemplo, en sustratos para antenas acústicas [10] o para estudiar la interacción entre el sonido y la luz en cavidades [11].

Capítulo 1

Teoría de la Elasticidad

1.1. Deformación

Tenemos que todos los cuerpos sólidos elásticos al ser sometidos a una fuerza cambian de forma, este cambio de forma puede ser cuantificado estudiando los desplazamientos de los puntos dentro del material. Tomamos un punto de referencia P_0 situado dentro del material, el vector de posición de este punto se denota con el vector \vec{r} con componentes $\vec{r} = \vec{r}(x = x_1, y = x_2, z = x_3)$, al deformarse el material el punto P_0 cambia su posición a una posición P'_0 ahora denotado con un vector \vec{r}' con componentes $\vec{r}' = \vec{r}'(x = x'_1, y = x'_2, z = x'_3)$ para esta nueva posición, ahora el cambio de posición entre los puntos P_0 y P'_0 es llamado vector de desplazamiento \vec{u} como se muestra en la Figura 1.1.

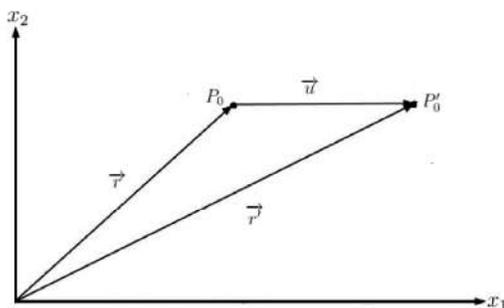


Figura 1.1: P_0 denota la posición de un punto antes de la deformación mientras que P'_0 denota el mismo punto después de la deformación.

Cuando un cuerpo se deforma la distancia entre sus puntos cambia. Consideremos dos puntos que antes de la deformación estaban muy cerca. El vector que define la

distancia entre los punto P_0 y P antes de la deformación es denotado como $d\vec{x}$, mientras que los puntos P'_0 y P' con $d\vec{x}'$. Al deformarse el cuerpo elástico el vector que define la distancia es $d\vec{x}' = d\vec{x} + d\vec{u}$.

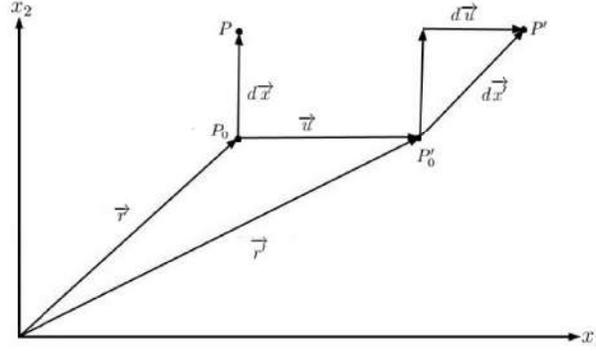


Figura 1.2: Distancia entre dos puntos cercanos antes y después de la deformación.

El cambio en la posición relativa de los puntos adyacentes antes y después de la deformación es denotado con $d\vec{u}$ (Figura 1.2) el cual es llamado vector diferencial de desplazamiento. Las coordenadas x'_i del punto desplazado estan en función de las coordenadas iniciales x_i , por lo tanto, el vector de desplazamiento es función de x_i , esto es:

$$u_i = u_i(x_i), \quad (1.1)$$

para pequeñas deformaciones en notación compacta

$$du_i = u_{i,k} dx_k, \quad (1.2)$$

donde $u_{i,k}$ es el tensor de gradiente de desplazamiento

$$u_{i,k} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right). \quad (1.3)$$

Este tensor puede ser descompuesto en una parte simétrica y otra antisimétrica

$u_{i,k} = u_{ik} + \omega_{ik}$ con:

$$u_{ik} = \frac{1}{2}(u_{i,k} + u_{k,i}), \quad (1.4)$$

$$\omega_{ik} = \frac{1}{2}(u_{i,k} - u_{k,i}), \quad (1.5)$$

donde u_{ik} es nombrado como tensor de deformación [12]. Entonces la deformación relativa entre dos puntos adyacentes es:

$$(1.6)$$

es necesario mencionar que el tensor de deformación es simétrico, es decir $u_{ik} = u_{ki}$, las componentes de la diagonal del tensor de deformación corresponden a deformaciones extensionales y las componentes fuera de la diagonal a las de corte [14]. En el presente trabajo no consideraremos rotaciones en el movimiento del sistema.

1.2. Esfuerzos

En general hay dos tipos de fuerzas mecánicas que pueden actuar sobre un cuerpo: las fuerzas de volumen y las de superficie. Las fuerzas de volumen son proporcionales al volumen de un cuerpo o bien a su masa, un ejemplo de esta es la fuerza gravitacional. Dada la configuración de nuestros experimentos no consideramos que las fuerzas de volumen contribuyan con la deformación del sistema (tal como ocurre en vigas y placas de gran tamaño).

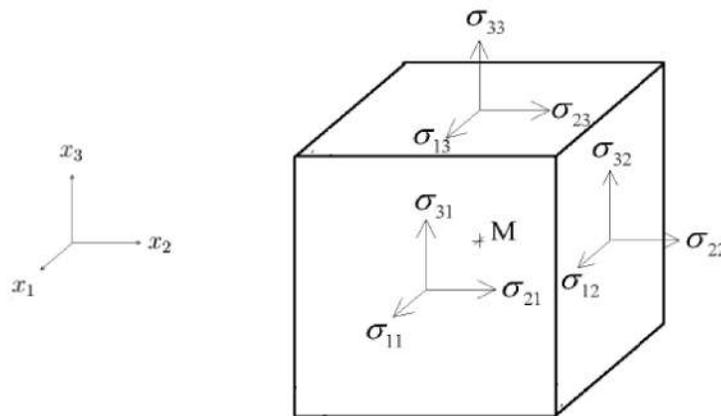


Figura 1.3: Componentes de esfuerzo en las caras visibles de un elemento de volumen de un cuerpo sólido elástico.

Las fuerzas de superficie, por otra parte, inciden sobre los límites volumétricos del sistema y son transmitidas a través de las partículas hacia el interior [12]. Existen fuerzas internas que tratan de devolver al sistema a su configuración inicial, a estas se les asocia con el concepto de esfuerzo interno. Para definir adecuadamente el esfuerzo consideramos un pequeño elemento de volumen en el interior de un sólido elástico continuo (Figura 1.3). Por facilidad este elemento tiene forma de paralelepípedo tridimensional y está orientado con los ejes cartesianos de tal manera que su volumen es $\Delta V = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$. Consideremos primeramente la pequeña fuerza que actúa sobre el área del paralelepípedo cuya normal es paralela al vector unitario $\hat{n}_2 : \Delta \vec{F}_2$. El esfuerzo o tracción $T^{\hat{n}_2}$ es:

$$\vec{T}^{\hat{n}_2} = \lim_{\Delta A_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_2}{\Delta A_2}. \quad (1.7)$$

El esfuerzo puede definirse como la fuerza dividida entre área en que está actuando (cuando el área tiende a cero). Por componentes este esfuerzo es:

$$\vec{T}^{\hat{n}_2} = \sigma_{12}\hat{n}_1 + \sigma_{22}\hat{n}_2 + \sigma_{32}\hat{n}_3, \quad (1.8)$$

el esfuerzo no depende solamente de la dirección en la cuál la fuerza actúa, sino también de la orientación del elemento de superficie, de manera que de forma más general podemos escribir:

$$\vec{T}^{\hat{n}_i}(\vec{x}, \hat{n}_i) = \sigma_{ij}\hat{n}_j. \quad (1.9)$$

A σ_{ij} se le conoce como *tensor de esfuerzos*. Dado que el elemento de volumen se encuentra en equilibrio las componentes del *vector de esfuerzos* debe ser igual y opuesta en las caras opuestas del paralelepípedo. Entonces el tensor de esfuerzos es simétrico:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (1.10)$$

1.3. Ecuación de equilibrio y de movimiento

Consideramos un elemento de volumen dentro de un material que está sometido a esfuerzos [12]. Si F_i es la fuerza interna por unidad de volumen en el material, la fuerza en dirección \hat{n}_i actuando en un elemento de volumen dV es

$$F_i dV, \quad (1.11)$$

podemos extender esto en todo el volumen, hacemos esto como:

$$\int_V F_i dV. \quad (1.12)$$

En un cuerpo que no está deformado el arreglo de las moléculas corresponde a un estado de equilibrio. Todas las partes del cuerpo están en equilibrio mecánico. Esto significa que si una porción del cuerpo es considerada las fuerzas resultantes en esa porción son cero. Cuando una deformación ocurre el arreglo de las moléculas cambia y el cuerpo deja de estar en su estado de equilibrio original. Entonces aparecen fuerzas que tratan de regresar al cuerpo a su estado de equilibrio. Las fuerzas internas que aparecen cuando el cuerpo está deformado se llaman *esfuerzos internos*. Si no hay deformación no hay esfuerzos internos.

Los esfuerzos internos se deben a fuerzas moleculares, fuerzas de interacción entre las moléculas. Un hecho importante es que la elasticidad es tal que las fuerzas moleculares son de muy corto radio de acción, su efecto se extiende solo a las vecindades de las moléculas que actúan junto a ella sobre una distancia del mismo orden que las intermoleculares. Sin embargo, la elasticidad es una teoría macroscópica, las distancias consideradas son mucho más grandes que las intermoleculares.

Las fuerzas internas pueden relacionarse a las de superficie

$$\int_V F_i dV = \oint_S \sigma_{ik} dA_k, \quad (1.13)$$

utilizando el teorema de la divergencia

$$\oint_S \vec{G} \cdot \hat{n} dS = \int_V \nabla \cdot \vec{G} dV, \quad (1.14)$$

o,

$$\oint_S \vec{G} \cdot d\hat{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{G} dV = \int_V \frac{\partial G_k}{\partial x_k} dV. \quad (1.15)$$

En nuestro caso

$$\oint_S \sigma_{ik} dA_k = \int_V \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV, \quad (1.16)$$

entonces

$$\int_V F_i dV = \int_V \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV. \quad (1.17)$$

Tenemos que la fuerza está dada de la siguiente manera

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (1.18)$$

La ecuación de movimiento se obtiene utilizando la Segunda Ley de Newton:

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (1.19)$$

Análogamente a la Segunda Ley de Newton para una masa puntual, donde solamente se necesita de la masa y la segunda derivada del desplazamiento respecto al tiempo. Para un medio continuo se requiere de la densidad y la segunda derivada del desplazamiento.

1.4. Ley de Hooke para mecánica del medio continuo

El modelo de sólido elástico puede describirse como un material continuo deformable que recupera su forma original cuando las fuerzas que causan la deformación se

retiran. Nos restringimos a que la relación esfuerzo deformación sea lineal. Esto quiere decir que el esfuerzo es directamente proporcional a la deformación, esto puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{kl},$$

donde C_{ijkl} es llamado tensor de elasticidad y contiene los módulos elásticos del material. Este tensor es de rango cuatro y está compuesto por ochenta y una componentes independientes las cuales se reducen a treinta y seis gracias a las propiedades de simetría de los tensores de esfuerzo y deformación [13, 14].

Si el material es estacionario, el comportamiento elástico no varía en el tiempo entonces los módulos elásticos serán constantes. Si el medio además es isotrópico, las propiedades elásticas de los materiales son las mismas en todas las direcciones, entonces el tensor de elasticidad del medio es invariante ante cualquier rotación. La forma más general para un tensor con estas características es [13].

$$C_{ijkl} = \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk}, \quad (1.21)$$

donde los coeficientes α , β y γ son constantes. Sustituyendo (1.21) en (1.20)

$$\sigma_{ij} = (\alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk}) u_{kl} \quad (1.22)$$

$$\sigma_{ij} = \alpha u_{ll}\delta_{ij} + \beta u_{ij} + \gamma u_{ji}, \quad (1.23)$$

tomando en cuenta las propiedades de simetría del tensor de deformación, y definiendo $\lambda \equiv \alpha$ y $2\mu \equiv \beta + \gamma$, obtenemos el siguiente resultado

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{ll}\delta_{ij} + 2\mu u_{ij}, \quad (1.24)$$

donde las constantes λ y μ son conocidas como coeficientes de Lamé.

1.5. Ondas elásticas

Para obtener las ecuaciones de movimiento para elasticidad debemos recurrir a la Segunda Ley Newton, que como habíamos visto anteriormente debe particularizarse a los parámetros utilizados en la mecánica de medio continuo y teoría de la elasticidad [12, 15]. Esta ley se expresa matemáticamente de la siguiente manera:

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = F_i. \quad (1.25)$$

Tenemos que la fuerza F_i por unidad de volumen está dada por el cambio temporal de momento p_i por unidad de volumen, además, para el caso de la mecánica del medio continuo, el momento por unidad de volumen es igual al producto de la densidad y la velocidad en cada punto:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} = p_i, \quad (1.26)$$

donde ρ es la densidad y u_i es el vector de desplazamiento o amplitud de oscilación.

En ausencia de fuerzas externas la fuerza por unidad de volumen está dada por la ecuación (1.19), entonces la ec. (1.26) es [12]

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}. \quad (1.27)$$

Sustituimos la ecuación (1.24) en esta última y desarrollamos el lado derecho

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda u_{ll} \delta_{ij} + 2\mu u_{ij}), \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= \lambda \frac{\partial u_{ll}}{\partial x_j} \delta_{ij} + 2\mu \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_j}, \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= \lambda \frac{\partial u_{ll}}{\partial x_j} \delta_{ij} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= \lambda \frac{\partial u_{ll}}{\partial x_j} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} \right), \end{aligned}$$

Reagrupando términos resulta

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = (\lambda + \mu) \frac{\partial u_{ll}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (1.29)$$

Ahora sustituimos en la ecuación (1.27)

$$\rho \ddot{u}_i = (\lambda + \mu) \frac{\partial u_{ll}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (1.30)$$

Desarrollando los términos del tensor de esfuerzos y la amplitud de oscilación obtenemos las siguientes relaciones vectoriales:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} = \nabla^2 \vec{u} \quad (1.31)$$

$$\frac{\partial u_{ll}}{\partial x_i} = \nabla (\nabla \cdot \vec{u}). \quad (1.32)$$

Usamos (1.31) y (1.32) en (1.30) y la identidad vectorial

$$\nabla^2 \vec{u} = \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) - \nabla \times \nabla \times \vec{u}, \quad (1.33)$$

lo que nos lleva a la siguiente ecuación:

$$\ddot{\vec{u}} = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) - \left(\frac{\mu}{\rho} \right) (\nabla \times \nabla \times \vec{u}), \quad (1.34)$$

identificamos

$$C_l^2 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right), \quad (1.35)$$

y

$$C_t^2 = \left(\frac{\mu}{\rho} \right), \quad (1.36)$$

como las velocidades de sonido longitudinal y transversal, respectivamente, de manera que

$$\ddot{\vec{u}} = C_l^2 \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) - C_t^2 (\nabla \times \nabla \times \vec{u}). \quad (1.37)$$

La ecuación de movimiento puede ser separada en dos partes, una compresional para la cual $\nabla \cdot \vec{u}$ es finita pero $\nabla \times \vec{u} = 0$ y una rotacional para la cual $\nabla \times \vec{u} \neq 0$ pero $\nabla \cdot \vec{u} = 0$. Entonces podemos representar el vector de desplazamiento como la suma de dos partes

$$\vec{u} = \vec{u}_l + \vec{u}_t, \quad (1.38)$$

donde \vec{u}_l corresponde a ondas longitudinales y \vec{u}_t a ondas transversales, tal que

$$\nabla \cdot \vec{u}_t = 0, \quad (1.39)$$

y

$$\nabla \times \vec{u}_l = 0. \quad (1.40)$$

Sustituyendo (1.38) en (1.37)

$$\ddot{\vec{u}}_l + \ddot{\vec{u}}_t = C_l^2 \nabla (\nabla \cdot [\vec{u}_l + \vec{u}_t]) - C_t^2 (\nabla \times \nabla \times [\vec{u}_l + \vec{u}_t]). \quad (1.41)$$

Aplicando (1.39) y (1.40)

$$\ddot{\vec{u}}_l = C_l^2 \nabla (\nabla \cdot \vec{u}_l). \quad (1.42)$$

Aplicando divergencia a (1.42), resulta

$$\nabla \cdot \ddot{\vec{u}}_l = C_l^2 \nabla^2 (\nabla \cdot \vec{u}_l). \quad (1.43)$$

De manera similar apl

$$\nabla \times \ddot{\vec{u}}_t = -C_t^2 \nabla \times \nabla \times [\nabla \times \vec{u}_t]. \quad (1.44)$$

Utilizando la identidad vectorial (1.33) en las ecuaciones (1.43) y (1.44)

$$\ddot{\vec{u}}_t = C_t^2 \nabla^2 \vec{u}_t, \quad (1.45)$$

$$\ddot{\vec{u}}_t = C_t^2 \nabla^2 \vec{u}_t. \quad (1.46)$$

Estas ecuaciones son longitudinales y transversales, respectivamente. Las soluciones son ondas longitudinales y transversales.



$$(1.47)$$

$$(1.48)$$

donde

$$k_l = \frac{\omega}{C_t} \quad (1.49)$$

y

$$k_t = \frac{\omega}{C_t}. \quad (1.50)$$

En el caso de medios no homogéneos los coeficientes de Lamé ya no son constantes sino que dependen de la posición. Utilizando las ecuaciones (1.35) y (1.36) podemos escribir los coeficientes de Lamé en términos de las velocidades de sonido longitudinal y transversal. El tensor de esfuerzos puede escribirse como

$$\sigma_{ij} = 2\rho C_t^2 (u_{ij} - u_{ii}\delta_{ij}) + \rho C_l^2 u_{ii}\delta_{ij}, \quad (1.51)$$

y la ecuación de movimiento es

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial}{\partial x_j} [2\rho C_t^2 (u_{ij} - u_{ii}\delta_{ij}) + \rho C_l^2 u_{ii}\delta_{ij}]. \quad (1.52)$$

Hemos obtenido la Segunda Ley de Newton en el contexto de la elasticidad en términos de los parámetros materiales.

1.6. Condiciones en la frontera

Una onda elástica que se transmite a través de una interface entre dos medios debe de cumplir con las condiciones de conservación de momento y energía. Consideremos entonces el flujo de momento por unidad de área que atraviesa una interface la cual tiene vector unitario perpendicular \hat{n} .

Como estamos hablando de una onda que transporta energía vamos a hablar de flujo de momento y su conservación. La densidad de momento lineal es:

$$\vec{m} = \rho \dot{\vec{u}}. \quad (1.53)$$

La densidad de flujo de momento a través de una interface es

$$\frac{d}{dt} (\vec{m} \cdot \hat{n}) = \frac{d\vec{m}}{dt} \cdot \hat{n} = \frac{d}{dt} (\rho \dot{\vec{u}}) \cdot \hat{n}. \quad (1.54)$$

Si consideramos que la masa en sí no esta fluyendo, solamente el transporte de momento debido a la onda

$$\frac{d}{dt} (\vec{m} \cdot \hat{n}) = \rho \ddot{\vec{u}} \cdot \hat{n}. \quad (1.55)$$

Ubicando la interface paralela al plano $y - z$, en $x = x_0$ la conservación de flujo de momento lineal nos lleva a que

$$\left. \frac{\partial \sigma_{xj}^A}{\partial x_j} \right|_A = \left. \frac{\partial \sigma_{xj}^B}{\partial x_j} \right|_B. \quad (1.56)$$

Esto se garantiza si

$$\sigma_{xj}^A|_{x=x_0} = \sigma_{ij}^B|_{x=x_0}. \quad (1.57)$$

Esto es, que las componentes normales y tangenciales del tensor de esfuerzos son continuas en la interfaz. Por otra parte, el flujo de energía debe de conservarse a través de la interfaz, esto es

$$S_x^A|_{x=x_0} = S_x^B|_{x=x_0}. \quad (1.58)$$

La expresión del vector de Poynting en la elasticidad está dada por

$$S = \sigma_{ij} \dot{u}_i, \quad (1.59)$$

entonces

$$\sigma_{xj}^A \dot{u}_j^A \Big|_{x=x_0} = \sigma_{xj}^B \dot{u}_j^B \Big|_{x=x_0}. \quad (1.60)$$

Dado que las componentes normales y tangenciales del tensor de esfuerzos son continuas [ec. (1.57)], tenemos

$$\dot{u}_i^A \Big|_{x=x_0} = \dot{u}_i^B \Big|_{x=x_0}. \quad (1.61)$$

Como las ondas son armónicas y tienen la misma frecuencia a ambos lados de la interfaz

$$u_i^A \Big|_{x=x_0} = u_i^B \Big|_{x=x_0}. \quad (1.62)$$

Entonces las componentes normales y tangenciales de la amplitud de oscilación son continuas en la interfaz.

Capítulo 2

Método de Desarrollo en Ondas Planas

En este capítulo presentamos el Método de Desarrollo en Ondas Plana (MDOP) que nos permite calcular bandas en un cristal fonónico (CFn). En nuestro caso utilizamos el MDOP para un CFn con simetría unidimensional para ello desarrollamos la Segunda Ley de Newton en el contexto de mecánica del medio continuo en series de Fourier, lo que da como resultado ecuaciones de valores propios en términos de los parámetros materiales del sistema. Primero es necesario definir algunos conceptos básicos que nos ayuden a desarrollar este método los cuales se presentan a continuación.

2.1. Red de Bravais

Uno de los conceptos básicos para describir un arreglo periódico es la **red de Bravais**, la cual muestra como las unidades (átomos, moléculas, etc.) fundamentales del sistema están ordenadas periódicamente.

La **red de Bravais** es un arreglo infinito donde todas sus unidades están orientadas de tal manera que desde cualquier punto de la red podemos observar el mismo arreglo en sus unidades fundamentales. La Figura 2.1 describe la red de un cristal bidimensional, podemos seleccionar el paralelogramo $ABCD$ como celda unitaria, la cual está determinada por los vectores \vec{a} y \vec{b} conocidos como vectores base de la

red [15].

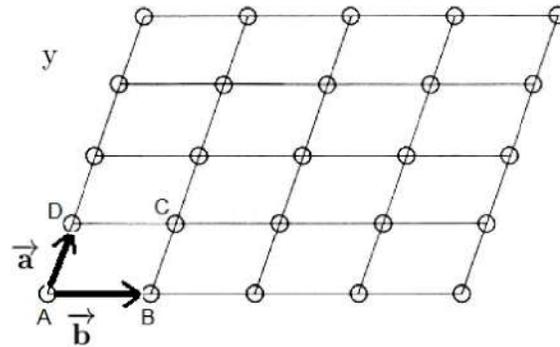


Figura 2.1: Red de Bravais bidimensional con celda unitaria dada por el paralelogramo ABCD.

Cada translación del paralelogramo $ABCD$ dada por múltiplos enteros de los vectores \vec{a} y \vec{b} dará como resultado una translación a una región del cristal idéntica a la anterior. De esta manera podemos reproducir todo el cristal a partir de la celda unitaria previamente definida. Ahora, si definimos la celda unitaria como la más pequeña posible y que reproduzca el cristal como hemos mencionado anteriormente esta se llama *primitiva*, los vectores linealmente independientes que definen esta son llamados *vectores primitivos* [15].

ariódico con simetría bidimensional, tenemos:

$$\vec{R} = n_1 \vec{a} + n_2 \vec{b}, \quad (2.1)$$

los primitivos y n_1, n_2 de diversas manera solo unitaria $ABCD$.

2.1.1. Red de Bravais de simetría unidimensional

Definimos el sistema como **cristal=red+base**, en nuestro caso tenemos una red con simetría unidimensional y una base formada por un arreglo periódico de dos materiales que poseen propiedades elásticas diferentes.

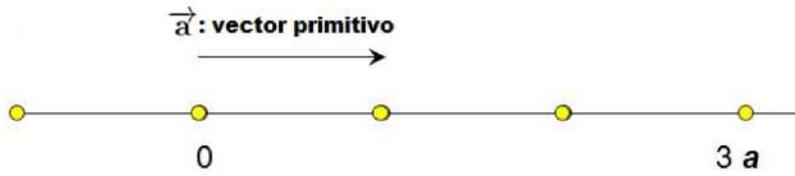


Figura 2.2: Red de Bravais para simetría unidimensional.

como se muestra en la Figura 2.2 el vector de posición es

$$\vec{R} = n_1 \vec{a}_1, \quad (2.2)$$

con $\vec{a}_1 = a\hat{i}$, $n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

La base para nuestra red esta formada por un arreglo periódico de dos materiales A y B como se muestra en la Figura 2.4.

2.1.2. Red directa y recíproca

Definimos la ecuación (2.1) como la **red directa**, ahora tenemos que una onda plana que se propaga a lo largo del eje x debe ser solución de la ecuación de onda dada por la ecuación (1.27):

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.3)$$

La solución a la ecuación de onda es:

$$u(r, t) = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (2.4)$$

Pensamos en una onda plana que se propaga en la red, la cual tiene simetría traslacional, entonces

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} + \vec{R})} = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}}.$$

Para que esto se cumpla

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} = 1. \quad (2.5)$$

Sea \vec{G} el conjunto de vectores que hace la ec. (2.5) se cumpla

$$\vec{G} = g_1 \vec{b}_1, \quad (2.6)$$

donde \vec{b}_1 es el vector primitivo de la base y g_1 es un entero. Debe suceder que

$$\vec{G} \cdot \vec{R} = 2\pi m, \quad (2.7)$$

donde m es un entero. Dado que estamos trabajando con simetra unidimensional $\vec{R} = na\hat{i}$, entonces la ecuacion (2.7) se cumple si

$$\vec{G} = \frac{2\pi}{a} g_x \hat{i} \quad (2.8)$$

donde g_x es un entero. Al conjunto de vectores \vec{G} se le conoce como red recíproca.

2.2. Teorema de Bloch

Dado que un cristal es una estructura donde una celda unitaria es colocada en una red de Bravais, podemos escribir los parámetros materiales del sistema como funciones periódicas [20]:

$$\mu(\vec{r}') = \mu(\vec{r}' + \vec{R}). \quad (2.9)$$

En nuestro caso μ son densidades y velocidades de sonido.

La amplitud de onda es entonces,

$$\vec{u}(\vec{r}', t) = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}' - \omega t)} \vec{u}_k(\vec{r}'), \quad (2.10)$$

donde $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r}' - \omega t)}$ es una onda plana y $\vec{u}_k(\vec{r}')$ es una función vectorial periódica o función de Bloch tal que $\vec{u}_k(\vec{r}' + \vec{R}) = \vec{u}_k(\vec{r}')$.

2.3. Desarrollo en ondas planas

El método de desarrollo en ondas planas es una técnica computacional utilizada para el cálculo de bandas en cristales fonónicos [17, 18]. En este caso modelaremos un

crystal de periodicidad unidimensional donde la base está formada por dos materiales A y B como se muestra en la Figura 2.3.

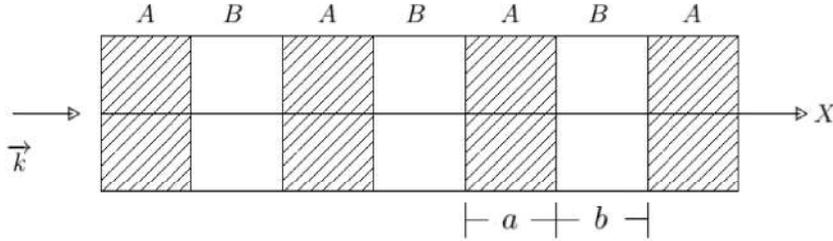


Figura 2.3: Red infinita que representa a un cristal fonónico unidimensional. La red está compuesta por la repetición periódica de los materiales A y B.

Definimos la celda unitaria como se muestra en la Figura 2.4 donde a es el grosor de la capa A, b es el grosor de la capa B, $d = a + b$ es llamado parámetro de red o ancho de la celda unitaria (Figura 2.3), $f = a/d$ es el factor de llenado. Tenemos entonces que $\vec{R} = na\hat{i}$ es el vector de la red directa y n es un entero.

Para desarrollar este método es necesario partir de la Segunda Ley de Newton para mecánica de medio continuo. En nuestro caso en particular se trata de una onda longitudinal propagándose a lo largo del eje x (simetría 1-D). Tenemos que el vector de onda y la amplitud de oscilación van en la misma dirección de propagación de la onda, esto es: $\vec{k} \parallel \hat{i}$ y $\vec{u} \parallel \hat{i}$.

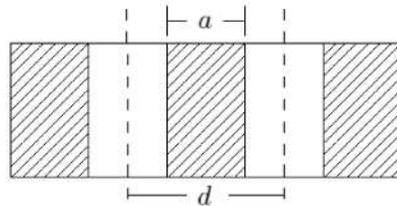


Figura 2.4: Celda unitaria, donde a es el grosor de la capa A y d es el grosor de la celda unitaria.

En este caso la Segunda Ley de Newton para la mecánica del medio continuo queda:

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{xj}}{\partial x_j}, \quad (2.11)$$

de la ecuación (1.50) tenemos

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} [2\rho C_t^2 (u_{xj} - u_{xx}\delta_{xj}) + \rho C_l^2 u_{xi}\delta_{xj}], \quad (2.12)$$

y de la ecuación (1.3) el tensor de deformación

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.13)$$

Dado que solo hay amplitud en la dirección x , $u_y = u_z = 0$ y no hay dependencia en y ni en z , entonces:

$$u_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = 0, \quad (2.14)$$

del mismo modo : $u_{xz} = 0, u_{yx} = 0, u_{yz} = 0, u_{zx} = 0, u_{zy} = 0, u_{yy} = 0, u_{zz} = 0$.

La única componente diferente de cero es:

$$u_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = \frac{\partial u_x}{\partial x}. \quad (2.15)$$

Sustituyendo en (2.12) obtenemos la Segunda Ley de Newton para la mecánica del medio continuo con simetría unidimensional para ondas longitudinales:

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho C_l^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} \right). \quad (2.16)$$

Tenemos que en este caso la densidad y la velocidad de sonido depende de la posición, entonces

$$\rho(x), \quad (2.17)$$

y

$$C_l(x). \quad (2.18)$$

ecuación (2.17) contiene a ρC_l^2 al cual se le conoce como *módulo*
 frecuencia trabajaremos con el módulo longitudinal como función

$$\rho C_l^2 = \rho C_l^2(x). \quad (2.19)$$

Ahora desarrollamos la densidad y el módulo longitudinal en series de Fourier sobre
 la base de la red recíproca [ecuación (2.8)]:

$$\rho(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho_n e^{iG_n x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho_n e^{i\frac{2\pi}{d} n x}. \quad (2.20)$$

Observemos que cada sumando tiene invariancia traslacional en la red

$$\rho(x) = \rho(x + d) : \quad (2.21)$$

$$e^{i\frac{2\pi}{d} n x} = e^{i\frac{2\pi}{d} (x+d)n} = e^{i\frac{2\pi}{d} n x} e^{i\frac{2\pi}{d} n d},$$

$$e^{i\frac{2\pi}{d} n x} e^{i2\pi n} = e^{i\frac{2\pi}{d} n x} = e^{iG_n x}.$$

Para calcular los coeficientes de Fourier

$$\rho_n = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \rho(x) e^{-iG_n x} dx. \quad (2.22)$$

Igualmente para el módulo longitudinal

$$\rho C_l^2(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n e^{iG_n x}, \quad (2.23)$$

donde:

$$\lambda_n = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \rho C_l^2(x) e^{-iG_n x} dx. \quad (2.24)$$

Aplicando el teorema de Bloch a la amplitud de oscilación

$$u_x(x, t) = e^{i(k_x x - \omega t)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{k_x}(G_n) e^{iG_n x}, \quad (2.25)$$

en las (2.20), (2.23) y (2.25) en la (2.16) y derivamos, entonces:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \sum_n \rho_n e^{iG_n x} \sum_{n'} (-\omega^2) e^{i(k_x x - \omega t)} u_{k_x}(G_{n'}) e^{iG_{n'} x} \\ \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= -\omega^2 e^{i(k_x x - \omega t)} \sum_{n, n'} \rho(G_n) u_{k_x}(G_{n'}) e^{i(G_n + G_{n'}) x} \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho C_l^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) &= \sum_{n, n'} i(k_x + G_n + G_{n'}) i(k_x + G_{n'}) e^{i(k_x x - \omega t)} e^{i(G_n + G_{n'}) x} \lambda(G_n) u_{k_x}(G_{n'}) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho C_l^2 \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) &= -e^{i(k_x x - \omega t)} \sum_{n, n'} (k_x + G_n + G_{n'}) (k_x + G_{n'}) e^{i(G_n + G_{n'}) x} \lambda(G_n) u_{k_x}(G_{n'}), \end{aligned} \quad (2.27)$$

igualando (2.26) con (2.27) y simplificando

$$\begin{aligned} \omega^2 \sum_{n, n'} \rho(G_n) u_{k_x}(G_{n'}) e^{i(G_n + G_{n'}) x} &= \sum_{n, n'} (k_x + G_n + G_{n'}) (k_x + G_{n'}) e^{i(G_n + G_{n'}) x} \lambda(G_n) u_{k_x}(G_{n'}) \\ \sum_{n, n'} [(k_x + G_{n''} + G_{n'}) (k_x + G_{n'}) \lambda(G_{n''}) u_{k_x}(G_{n'}) &- \omega^2 \rho(G_{n''}) u_{k_x}(G_{n'})] e^{i(G_{n''} + G_{n'}) x} = 0, \end{aligned}$$

multiplicamos por $\frac{1}{d} e^{-iG_n x}$ e integramos

$$\sum_{n, n'} [(k_x + G_{n''} + G_{n'}) (k_x + G_{n'}) \lambda(G_{n''}) u_{k_x}(G_{n'}) - \omega^2 \rho(G_{n''}) u_{k_x}(G_{n'})] I = 0, \quad (2.28)$$

definimos $I = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} e^{i(G_{n''} + G_{n'} - G_n)x} dx$. Resolvemos la integral.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} e^{i(G_{n''} + G_{n'} - G_n)x} dx = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} e^{i\left(\frac{2\pi}{d}n'' + \frac{2\pi}{d}n' - \frac{2\pi}{d}n\right)x} dx, \\ \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} e^{i\frac{2\pi}{d}(n'' + n' - n)x} dx &= \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \left\{ \cos \left[\frac{2\pi}{d} (n'' + n' - n) x \right] + i \sin \left[\frac{2\pi}{d} (n'' + n' - n) x \right] \right\} dx, \end{aligned}$$

como la integral es simétrica

$$I = \begin{cases} 1 & \text{si } n'' + n' - n = 0 \\ 0 & \text{si } n'' + n' - n \neq 0 \end{cases} = \delta(n'' + n' - n), \quad (2.29)$$

sustituimos en la ec. (2.28)

$$\sum_{n'', n'} [(k + G_{n''} + G_{n'}) (k + G_{n'}) \lambda(G_{n''}) u_{k_x}(G_{n'}) - \omega^2 \rho(G_{n''}) u_{k_x}(G_{n'})] \delta(G_{n''} + G_{n'} - G_n) = 0.$$

Aplicando la delta de Kronecker y sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{n, n'} [(k + G_n) (k + G_{n'}) \lambda(G_n - G_{n'}) u_{k_x}(G_{n'}) - \omega^2 \rho(G_n - G_{n'}) u_{k_x}(G_{n'})] &= 0, \\ \sum_{n, n'} (k + G_n) (k + G_{n'}) \lambda(G_n - G_{n'}) u_{k_x}(G_{n'}) &= \omega^2 \sum_{n, n'} \rho(G_n - G_{n'}) u_{k_x}(G_{n'}). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Podemos escribir esta ecuación en forma matricial:

$$\mathbb{M}\mathbb{U}_k = \omega^2 \mathbb{N}\mathbb{U}_k, \quad (2.31)$$

donde $\mathbb{M}(G_n, G_{n'}) = (k + G_{n'}) (k + G_n) \lambda(G_n - G_{n'})$, $\mathbb{N}(G_n, G_{n'}) = \rho(G_n - G_{n'})$ y $\mathbb{U}_k(G_{n'}) = u_k(G_{n'})$.

Multiplicamos la ec. (2.31) por la inversa de \mathbb{N}

$$\mathbb{N}^{-1}\mathbb{M}\mathbb{U}_k = \omega^2 \mathbb{N}^{-1}\mathbb{N}\mathbb{U}_k, \quad (2.32)$$

definimos $\mathbb{N}^{-1}\mathbb{M} = \mathbb{A}$ y sustituyendo tenemos la siguiente ecuación:

$$\mathbb{A}\mathbb{U}_k = \omega^2 \mathbb{U}_k, \quad (2.33)$$

la cual resulta en una ecuación de valores propios.

Para obtener los coeficientes de fourier definimos la función para la densidad como:

$$\rho(x) = \rho_B + (\rho_A - \rho_B) \Theta\left(\frac{a}{2} - |x|\right), \quad (2.34)$$

donde Θ es la función de Heaviside

$$\Theta\left(\frac{a}{2} - |x|\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq \frac{a}{2} \\ 1 & \text{si } |x| \leq \frac{a}{2} \end{cases}. \quad (2.35)$$

De manera similar para el módulo longitudinal

$$\rho C_l^2(x) = \rho_B C_B^2 + (\rho_A C_A^2 - \rho_B C_B^2) \Theta\left(\frac{a}{2} - |x|\right). \quad (2.36)$$

Sustituyendo la ecuación (2.34) en (2.22):

$$\rho(G_n) = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \rho(x) e^{-iG_n x} dx = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \rho_b e^{-iG_n x} dx + \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} (\rho_a - \rho_b) \Theta\left(\frac{a}{2} - |x|\right) e^{-iG_n x} dx. \quad (2.37)$$

Si $G_n = 0$ el coeficiente de Fourier para la densidad es:

$$\begin{aligned} \rho(0) &= \frac{\rho_b}{d} \int_{-d/2}^{d/2} dx + \frac{(\rho_a - \rho_b)}{d} \int_{-a/2}^{a/2} dx, \\ \rho(0) &= \frac{d}{d} \rho_b + (\rho_a - \rho_b) \frac{a}{d}. \end{aligned}$$

Definimos a $f = \frac{a}{d}$ como el factor de llenado, entonces

$$\rho(0) = \rho_b + (\rho_a - \rho_b) f. \quad (2.38)$$

Resolviendo para $\lambda(G_n)$ de manera similar, obtenemos:

$$\lambda(0) = \rho_c C_b^2 + (\rho_a C_a^2 - \rho_b C_b^2) f. \quad (2.39)$$

Resolviendo para $G_n \neq 0$, tenemos:

$$\begin{aligned}\rho(G_n) &= \frac{\rho_b}{d} \int_{-d/2}^{d/2} e^{-iG_n x} dx + \frac{(\rho_a - \rho_b)}{d} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-iG_n x} dx, \\ \rho(G_n) &= \frac{(\rho_a - \rho_b)}{d} \int_{-b/2}^{b/2} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{d} nx\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{d} nx\right) \right] dx.\end{aligned}\tag{2.40}$$

Hacemos un cambio de variable

$$\begin{aligned}v &= \frac{2\pi n}{d} x \rightarrow dv = \frac{2\pi n}{d} dx, \\ x &= \pm \frac{b}{2} \rightarrow v = \pm \frac{2\pi n}{d} \frac{b}{2}, \\ &v = \pm G_n \frac{b}{2}.\end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}\rho(G_n) &= \frac{(\rho_a - \rho_b)}{d} \int_{\pm G_n \frac{b}{2}} [\cos v - i \sin v] \frac{d}{2\pi n} dv, \\ \rho(G_n) &= \frac{(\rho_a - \rho_b)}{d} \frac{d}{2\pi n} \int_{\pm G_n \frac{b}{2}} \cos v dv = \frac{(\rho_a - \rho_b)}{d} \frac{d}{2\pi n} \sin v \Big|_{\pm G_n \frac{b}{2}}, \\ \rho(G_n) &= \frac{(\rho_a - \rho_b)}{d} \frac{d}{2\pi n} \left(2 \sin G_n \frac{b}{2} \right) = \frac{(\rho_a - \rho_b)}{\pi n} \left(\sin G_n \frac{b}{2} \right).\end{aligned}$$

Hacemos un poco de álgebra y obtenemos:

$$\rho(G_n) = (\rho_a - \rho_b) \frac{\sin G_n \frac{b}{2}}{\frac{2\pi n}{d} \frac{b}{2}} = (\rho_a - \rho_b) f \frac{\sin G_n \frac{b}{2}}{G_n \frac{b}{2}},\tag{2.41}$$

donde $G_n = \frac{2\pi n}{d}$ es el vector de la red recíproca y $f = \frac{a}{d}$ es el factor de llenado.

Calculamos $\lambda(G_n)$ de manera similar, el resultado es:

$$\lambda(G_n) = (\rho_a C_a^2 - \rho_b C_b^2) f \frac{\sin G_n \frac{b}{2}}{G_n \frac{b}{2}}. \quad (2.42)$$

Como resulta al resolver las series de Fourier para los parámetros materiales, obtenemos este par de funciones. Resumiendo los resultados:

$$\rho(G_n) = \begin{cases} \rho_b + (\rho_a - \rho_b) f & \text{si } G_n = 0 \\ (\rho_a - \rho_b) f \frac{\sin G_n \frac{b}{2}}{G_n \frac{b}{2}} & \text{si } G_n \neq 0 \end{cases}. \quad (2.43)$$

Para $\lambda(G_n)$ de manera similar, obtenemos:

$$\lambda(G_n) = \begin{cases} \rho_c C_b^2 + (\rho_a C_a^2 - \rho_b C_b^2) f & \text{si } G_n = 0 \\ (\rho_a C_a^2 - \rho_b C_b^2) f \frac{\sin G_n \frac{b}{2}}{G_n \frac{b}{2}} & \text{si } G_n \neq 0 \end{cases}. \quad (2.44)$$

El programa diseñado para trabajar las ecuaciones (2.33) con (2.43) y (2.44) es mostrado en el Apéndice A.

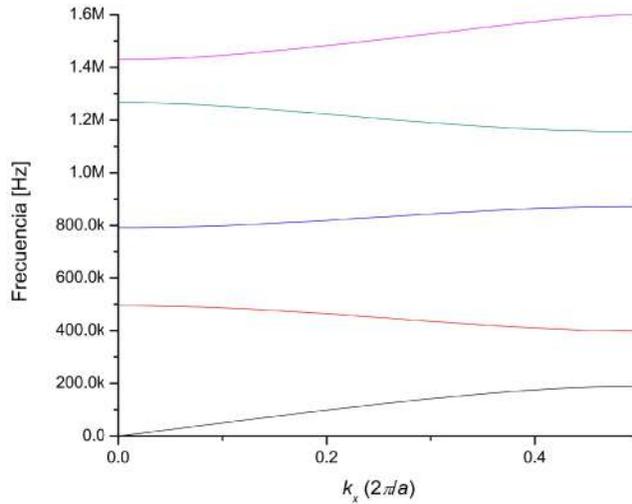


Figura 2.5: Estructura de bandas obtenida para un cristal fonónico formado por aluminio y epoxi con celda unitaria de 5.0mm.

La Figura 2.5 muestra la estructura de bandas de un cristal fonónico formado por el sistema Al-Ep (aluminio y epoxi) con una celda unitaria de 5mm y factor de llenado de 0.4. Sus parámetros materiales son: las densidades del aluminio

$\rho_{Al}=2.70\text{gr}/\text{cm}^3$ y del epoxi $\rho_{Ep}=1.18\text{gr}/\text{cm}^3$, las velocidades del sonido de los dos materiales, $C_{lAl}=6.300\times 10^5\text{cm}/\text{s}$ y $C_{lEp}=2.540\times 10^5\text{cm}/\text{s}$.

Encontramos líneas curvas llamadas bandas de frecuencias o permitidas las cuales indican un rango de frecuencias en donde las ondas mecánicas pueden propagarse. Existen regiones entre las bandas permitidas que están vacías, por ejemplo, en el intervalo de 600 a 800kHz (aproximadamente), tenemos que en estas zonas las ondas no se propagan. Esto se debe a la estructura periódica de los cristales fonónicos la cual crea interferencia destructiva gracias a la diferencia en las propiedades mecánicas de los materiales que componen el CFn.

Capítulo 3

Experimentación

3.1. Medición de la velocidad del sonido

La velocidad del sonido hace referencia a la velocidad de propagación de las ondas mecánicas en un medio elástico, éstas se pueden definir como una perturbación en un medio material, la cual cambia las propiedades básicas que lo componen: posición, velocidad, estructura interna. Las ondas mecánicas, en general, son debidas al movimiento y necesitan una fuente que cree la perturbación. Para interés de este trabajo mediremos una de las propiedades de las ondas mecánicas ya antes mencionadas; la velocidad de propagación de las ondas o de manera más específica, la velocidad del sonido en algunos materiales.

La caracterización de materiales a través de la velocidad del sonido es de gran interés en diversos campos del conocimiento, por ejemplo, en la medicina, donde utilizan ultrasonido, éste nos permite crear imágenes del interior del cuerpo humano y así poder diagnosticar la causa de algunos padecimientos y/o enfermedades, también es muy utilizado en los cuidados prenatales. Otro ejemplo sería la industria, donde también se utiliza ultrasonido en áreas como mantenimiento y calidad, donde se hacen pruebas no destructivas a distintos equipos y materiales.

3.1.1. Técnica de pulso-eco

Este método consiste en mandar un pulso ultrasónico a través del material el cual queremos caracterizar utilizando un transductor que cuenta con un piezoeléctrico que convierte la energía eléctrica (la cual se le brinda por medio del generador de funciones) en energía mecánica.

Colocamos el transductor sobre la pieza del material a medir, de la misma forma que se muestra en la Figura 3.1.



Figura 3.1: Transductor piezoeléctrico transmitiendo un pulso con incidencia normal a través de un material.

El pulso creado por el transductor se transmitirá a través del material, pero una parte de la energía generada por el transductor será reflejada y otra transmitida creando así ecos o réplicas de la onda dentro del material. Estos están denotados en la Figura 3.1 con un par de flechas.

Como habíamos mencionado anteriormente, la velocidad del sonido es la variable dinámica de propagación de las ondas mecánicas en un medio material; en particular, nos basaremos en la siguiente ecuación para calcular dicha propiedad:

$$C = \frac{d}{t}, \quad (3.1)$$

donde C es la velocidad del sonido, d es la distancia que recorren la ondas y t el tiempo que le toma recorrer dicha distancia. La medición de ambas variables dependerá de cómo definamos el sistema y el método de medición. El arreglo experimental para realizar las mediciones de velocidad del sonido en los materiales se muestra en la Figura 3.2.

Ahora para medir el grosor d del material debemos tomar en cuenta la naturaleza

Celda unitaria	Aluminio	Desv. est.	Separadores	Desv. est.
5 mm	2mm	0.000889mm	3mm	0.00065mm
7.5mm	3.1mm	0.0004mm	4.4mm	0.00016mm
10mm	4.02mm	0.00016mm	5.98mm	0.00021mm

Cuadro 3.1: Grosor de las capas.

del mismo, en este caso sólidos, epoxi y aluminio, los cuales fueron medidos utilizando un vernier Mitutoyo CD-6CSX. Los resultados se muestran en el Cuadro 3.1.

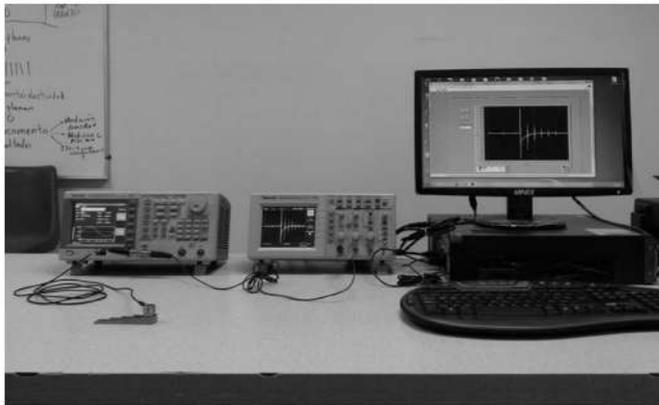
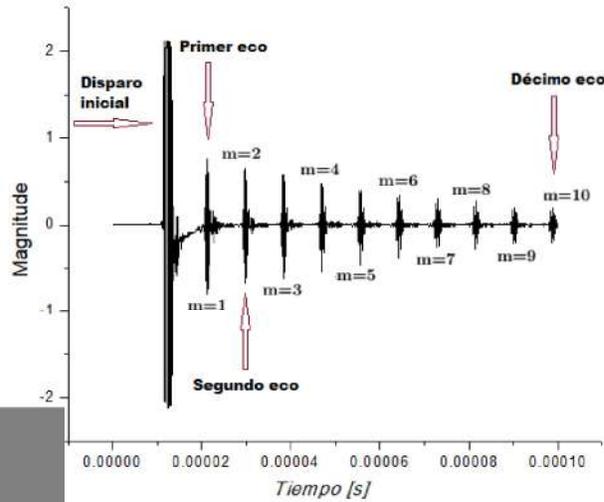


Figura 3.2: Configuración experimental para la medición de la velocidad de sonido por el método de pulso-eco.

Para realizar la medición de la velocidad del sonido por este método utilizamos un conector en BNC T, el cual es conectado a la salida de un generador de funciones Tektronix AFG 3012B para dividir la señal del mismo; de una de las salidas del transductor piezoeléctrico, mientras que la salida restante se conecta a los canales del osciloscopio Tektronix TDS 2012, el cual, a su vez está conectado a una computadora de escritorio por medio de un adaptador GBIP a USB. Tenemos que el generador de funciones envía al transductor pulsos eléctricos senusoidales de un ciclo, con amplitud de 10V pico a pico y frecuencia igual a la del transductor, en este caso 5 MHz, los ecos creados por esta señal son reflejados y se transmiten al osciloscopio. Una vez obtenida una señal como la que se muestra en la Figura 3.3 podemos digitalizarla y examinar los datos, en el software OriginPro8 para obtener la distancia temporal entre los ecos.



Se realizó una prueba utilizando un transductor de 5 MHz utilizando el método de pulso-eco

como se muestra en la Figura 3.3 como los ecos se repiten en forma periódica y exponencialmente. Se denotan los ecos con la letra m donde $m = 1$ para el primer eco, $m = 2$ al segundo, $m = 3$ para el tercero y así sucesivamente. Se puede notar que la distancia entre dos ecos sucesivos es el tiempo

que toma en recorrer 2 veces el material; una correspondiente al primer eco y otra a la parte reflejada, como se muestra en la Figura 3.3. Si se mide el tiempo t_i correspondiente al eco $m = 1$ y el tiempo t_f como el tiempo correspondiente al eco $m = 2$, tenemos que el tiempo puede ser expresado mediante la

$$t = (t_f - t_i)/2,$$

donde t_f es el valor del pico más alto medido al segundo eco y t_i es el tiempo más alto medido al primer eco. De esta manera podemos determinar el tiempo que tarda el pulso en recorrer el material (tiempo de vuelo).

Si tomamos $m = 1$ y $m = 3$, tenemos que el pulso ha recorrido 4 veces el material, entonces para $m=1$ y $m=4$ habrá recorrido 6 veces el material, podemos generalizar la expresión (4.2) como:

$$t = \frac{t_f - t_i}{2\Delta m} = \frac{t_f - t_i}{2(m_f - m_i)}, \quad (3.3)$$

donde m_i, t_i corresponden al eco inicial y m_f, t_f al eco final. Esto puede ser útil para

disminuir el error de medición en caso de que los ecos presenten dispersión.

Como habíamos señalado anteriormente, existe cierta periodicidad temporal en los ecos la cual se ve claramente en la Figura 3.3. Es importante mencionar que para usar esta técnica es necesario notar dicha periodicidad al medir la muestra de material que se desea caracterizar, de lo contrario, no podemos asegurar que se trate de los ecos producidos por el pulso al recorrer el material. Los tiempos obtenidos con las ecuaciones (3.2) o (3.3) son sustituidos en la ec. (3.1) para obtener la velocidad de sonido longitudinal o transversal. Resultados para la velocidad de sonido se muestran en el Cuadro 3.2.

C_{Al} (cms)	Desv. est. (cm/s)	C_{Ep} (cm/s)	Desv. est. (cm/s)
6.300×10^5	0.150×10^5	2.540×10^5	0.062×10^5

Cuadro 3.2: Velocidades del sonido de aluminio y epoxi.

3.2. Medición de la densidad

Para medir la densidad de los materiales, ya que ambos son sólidos se utilizó el principio de Arquímedes. Se usó una balanza Ohaus PA313 se pesó una muestra de cada sólido (aluminio y epoxi), después se midió la masa de la misma muestra sumergida en agua destilada a $24^\circ C$ y colgada por medio de un hilo de nailon muy delgado, como se muestra en la Figura 3.7.

Las mediciones se repitieron diez veces para cada material con el fin de obtener un valor promedio de ambas. La densidad se calculó con la siguiente ecuación:

$$\rho = \rho_H \left(\frac{m_R}{m_R - m_A} \right), \quad (3.4)$$

donde ρ es la densidad del material, ρ_H es la densidad del agua, m_R es la masa de muestra del sólido y m_A es la masa aparente (masa sumergida en el agua). Todas las cantidades fueron promediadas sobre las diez mediciones. La densidad del agua fue tomada del CRC Handbook of Chemistry and Physics tomando en cuenta la temperatura ambiente al realizar las mediciones [19]. Los resultados se muestran en el Cuadro 3.3.

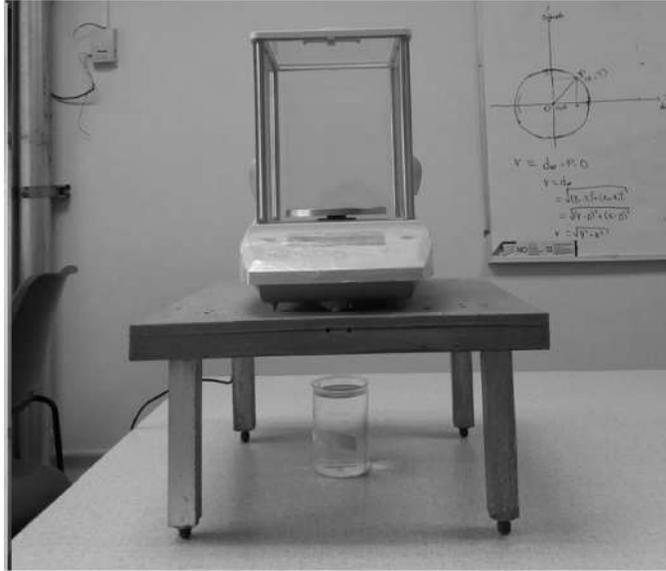


Figura 3.4: Configuración para la medición de la densidad utilizando el principio de Arquímedes.

ρ_{Al} (gr/cm^3)	Desv. est. (gr/cm^3)
2.700	0.082

Cuadro 3.3: Densidades de aluminio y epoxi.

3.3. Fabricación de multicapas

Una vez caracterizados los materiales, el siguiente paso es fabricar las multicapas. Para este estudio se fabricaron 3 multicapas de celda unitaria de 5.0, 7.5 y 10.0 mm, en cada una de ellas se utilizaron cinco placas de aluminio separadas por medio de pequeñas placas de vidrio de ventana, después cubrimos el fondo de la multicapa con cinta térmica.

Por último, vertemos la resina epóxica en los espacios vacíos y esperamos aproximadamente una hora y veinte minutos como mínimo para que solidifique.

La Figura 3.4 muestra una multicapa fabricada con aluminio de 2mm y desviación estándar de 0.000889mm y pasadores de 3mm con desviación estándar de 0.00065mm. Las medidas del espesor de las diferentes placas de aluminio y los separadores se encuentran en el Cuadro 4.1.

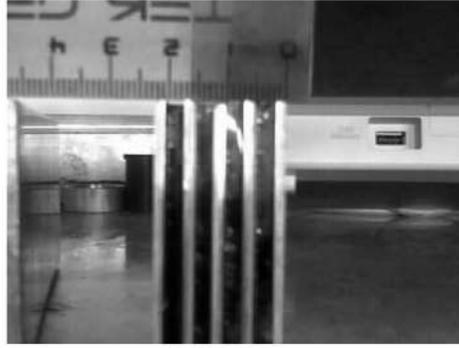


Figura 3.5: Multicapa elaborada con láminas de aluminio de 2mm alternadas con capas de resina epóxica de 3mm.

3.4. Técnica de transmisión a través

Esta técnica es utilizada para las mediciones de transmisión; en general, consiste en emitir una señal a través de la muestra o sistema a medir y recibirla con algún dispositivo que pueda procesar la señal. En nuestro caso utilizamos un par de transductores piezoeléctricos de la misma frecuencia, tipo y modelo. Para realizar este trabajo fue utilizado un par de transductores tipo longitudinal centrascan C603-RB de 1MHz. Las mediciones fueron hechas en incidencia normal.

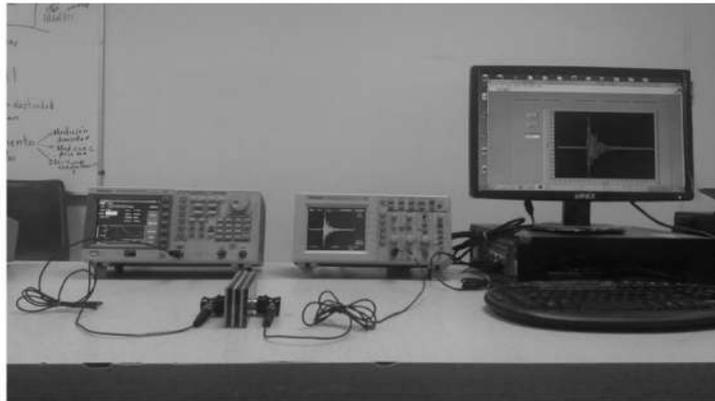


Figura 3.6: Configuración experimental para la medición de la transmisión por el método de transmisión a través.

Para este método conectamos un transductor a la salida de un generador de funciones Tektronix AFG 3012B de la misma manera que en el método de pulso-eco, solo que en esta técnica no es necesario utilizar un BNC T. El transductor receptor se colocó en el canal 1 de un osciloscopio Tektronix TDS 2012, igual que en el método

anterior esta conectado a una PC por medio de un adaptador GBIP a USB para medir el pulso emitido. Nuevamente, al obtener la señal deseada en el osciloscopio solo queda extraer los datos utilizando la PC por medio del software LabView y analizar los datos.

Al realizar las mediciones el generador de funciones somete al transductor piezoeléctrico a un voltaje. Mediante el efecto piezoeléctrico inverso el voltaje se convierte en una oscilación mecánica. Esta vibración es transmitida a la pieza de estudio por contacto directo mediante un gel acoplante.

La onda elástica viaja a través de la muestra hasta llegar a otro transductor piezoeléctrico que hace las veces de receptor. El receptor convierte esta vibración mecánica en voltaje mediante el efecto piezoeléctrico directo. El voltaje es detectado y medido por el osciloscopio.

El osciloscopio digitaliza la señal, de manera que se envía un archivo de $N = 2500$ datos a la computadora. Este archivo consta de dos columnas. La primera columna son N tiempos separados por un paso temporal Δt . La segunda columna son N valores de voltaje [Figura 3.8 (a)]. Los valores de voltaje son directamente proporcionales a la amplitud de oscilación mecánica. Por otra parte, el Δt es seleccionado en el osciloscopio según la venta de trabajo $N\Delta t$ que se decida.

Para pasar estos N datos temporales al dominio de las frecuencias usamos la transformada discreta de Fourier [21]. Tenemos N datos de amplitud de oscilación $f(t_k)$, donde $t_k = k\Delta t$, con $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Para pasar del espacio del tiempo al de las frecuencias

$$F(\omega_p) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{i\omega_p t_k}, \quad (3.5)$$

donde $\omega_p = \frac{2\pi p}{N\Delta t}$ con $p = 0, \pm 1, \dots, \pm (\frac{N}{2} - 1)$. En nuestro caso utilizamos el software Origin Pro 8 para realizar esta operación. Trabajar en el dominio de las frecuencias nos permite obtener gráficas de magnitud contra frecuencias [Figura 3.8 (b)]. Con esto es posible discernir las zonas de frecuencia de mayor o menor amplitud de transmisión.

Para nuestro caso particular se utilizó como medio de incidencia y transmisión un par de líneas de retardo, esto se puede ver en las Figuras 3.6 y 3.7.

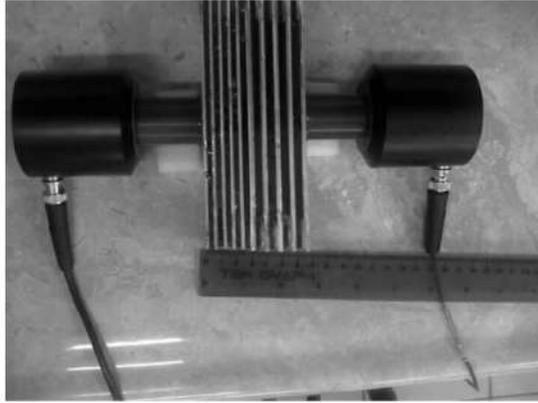


Figura 3.7: Multicapas de celda unitaria de 5mm y 7.5mm pegadas

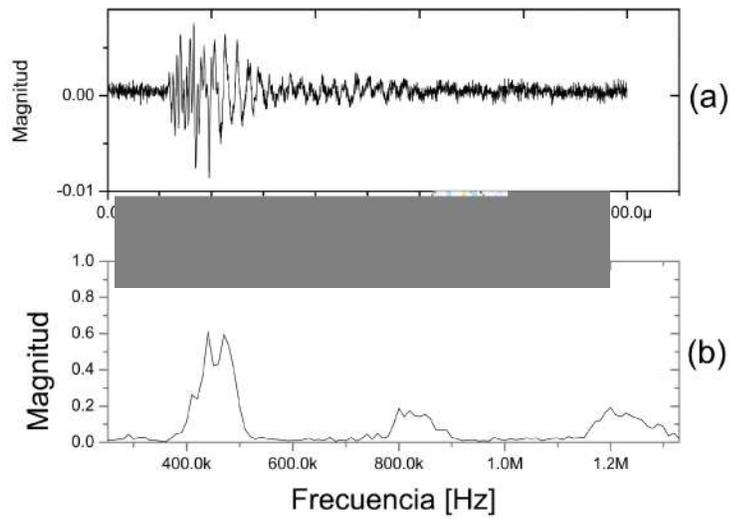


Figura 3.8: Transmisión de la multicapa con $d=5\text{mm}$, (a) muestra la transmisión en el dominio del tiempo, (b) muestra la transmisión en el dominio de la frecuencia.

En el panel (a) de la Figura 3.8 tenemos la transmisión en el dominio del tiempo obtenida con la técnica de transmisión a través, mientras que, en el panel (b) tenemos la transformada de Fourier de la transmisión del panel (a).

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo se presentan los resultados experimentales obtenidos para las tres multicapas con diferentes celdas unitarias, además de los resultados obtenidos al superponer dichas multicapas. También se presenta la comparación con los resultados teóricos y experimentales, con la finalidad de comprobar que los datos obtenidos del diseño de la heteroestructura sean los esperados. Para esto se realizaron mediciones con un transductores piezoeléctrico de 1MHz. Los resultados se muestran en dos secciones: una donde se muestra el efecto individual de las cada una de las multicapas y otra donde se muestra el efecto de la superposición de las multicapas.

4.1. Multicapas

Como lo habíamos mencionado, en esta sección presentamos los resultados obtenidos para las multicapas individuales de celda unitaria $d=5.0$, 7.5 y $10.0mm$, respectivamente. Las figuras utilizadas para mostrar los resultados incluyen el métodos teórico que aparecen en el capítulo 2 y se comparan con los resultados experimentales obtenidos al medir la transmisión de cada multicapa.

Empezamos por la multicapa con celda unitaria de $5.0mm$. Los valores obtenidos experimentalmente de la densidad y la velocidad de sonido aparecen en los Cuadros 3.2 y 3.3.

En el panel (a) de la Figura 4.1, se muestra la estructura de bandas correspondiente al cristal fonónico de celda unitaria $d=5.0mm$, conformado por una capa de aluminio y una de epoxi, cuyos grosores se muestran en el Cuadro 3.1. El panel (b) corresponde

a la transmisión obtenida experimentalmente usando un pulso ultrasónico de corta duración el cual se propaga a través del sistema mostrado en la Figura 3.4. Como medio de incidencia fueron utilizadas las líneas de retardo que se muestran en la Figura 3.5 con velocidad del sonido es $C_{1E}=2.2877 \times 10^5 \text{ cm/s}$ y su densidad $\rho_E = 1.33 \text{ gr/cm}^3$.

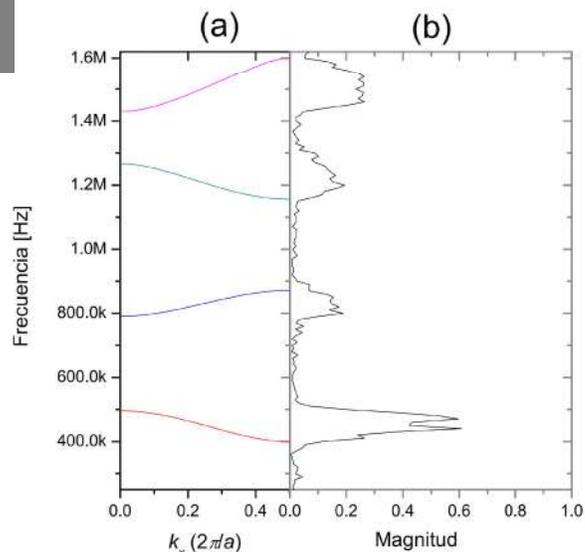


Figura 4.1: Comparación teoría-experimento para multicapa con $d = 5.0 \text{ mm}$. (a) Estructura de bandas correspondiente al cristal fonónico del sistema aluminio/epoxi. (b) Transmisión experimental.

Es necesario mencionar que el transductor utilizado para realizar los experimentos en este trabajo tiene un mejor rango de operación de 0.65 a 1.58MHz, con una frecuencia central de 1MHz; en el cual es más confiable trabajar, es por eso que los resultados mostrados en todas las figuras están en el rango de frecuencias mostrado.

La gráfica obtenida en el panel (b) se hizo calculando la Transformada de Fourier a la transmisión obtenida experimentalmente. De esta manera se llevan los resultados del dominio del tiempo al dominio de las frecuencias, permitiendo así, realizar la comparación con la estructura de bandas del panel (a). Puede observarse que la transmisión es consistente con la estructura de bandas, es decir, los rangos de frecuencia de cada banda coinciden con los de mayor transmisión. Por contraste, en las zonas de frecuencia prohibida, o gaps, la transmisión disminuye significativamente.

A continuación, se muestran los resultados para las multicapas de celda unitaria de 5.0 y 7.5mm. Los resultados mostrados en las Figuras 5.2 y 5.3 son similares a la descripción de la Figura 5.1.

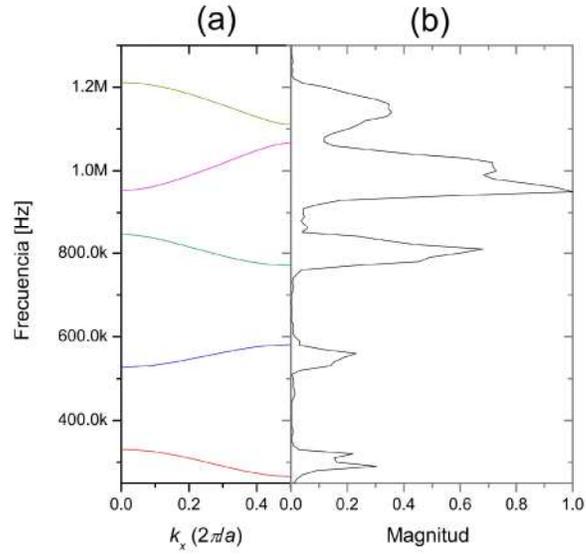


Figura 4.2: Comparación teoría-experimento para multicapa con $d=7.5mm$. (a) Estructura de bandas correspondiente al cristal fonónico del sistema aluminio/epoxi. (b) Transmisión experimental.

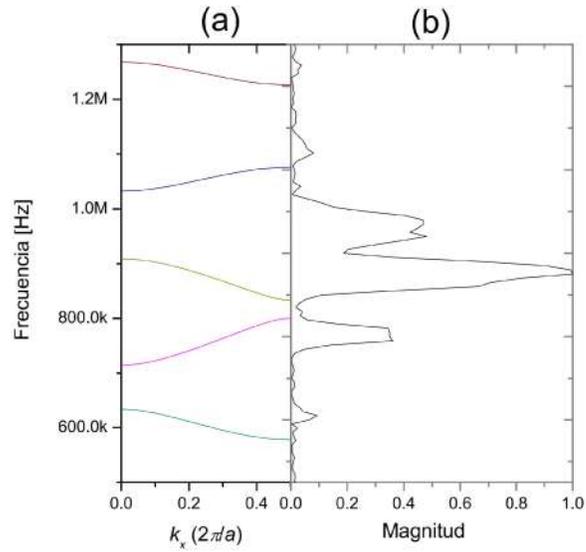


Figura 4.3: Comparación teoría-experimento para multicapa con $d=10mm$. (a) Estructura de bandas correspondiente al cristal fonónico del sistema aluminio/epoxi. (b) Transmisión experimental.

4.2. Heteroestructuras

En esta sección mostramos los resultados obtenidos al superponer las multicapas con celdas unitarias de $5mm$, $7.5mm$ y $10mm$. La primera configuración está compuesta por la superposición de las multicapas de $d=5mm$ con la de $d=7.5mm$, la segunda por las tres multicapas en orden de menor a mayor espesor de cada celda unitaria. La primera configuración es mostrada en Figura 4.4, se presenta un sistema compuesto por dos multicapas de celda unitaria de 5.0 y $7.5mm$, respectivamente, en una configuración experimental de transmisión a través usando como medio de incidencia las líneas de retardo hechas de lucita.

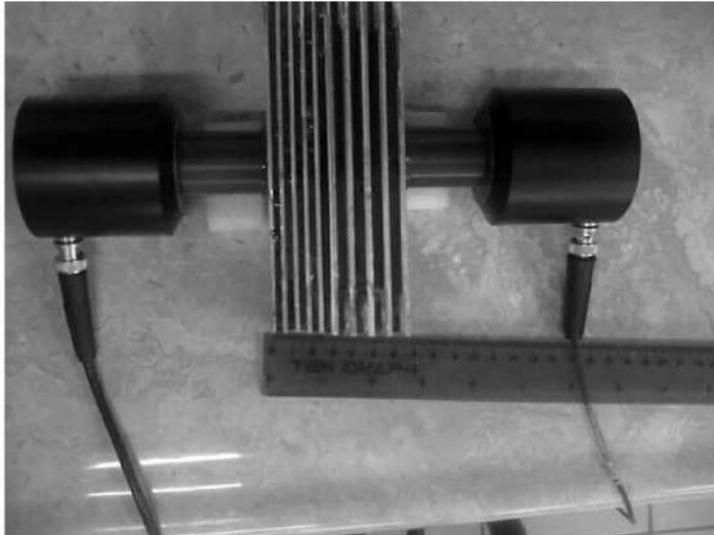


Figura 4.4: Configuración experimental de transmisión a través para la superposición formada por dos multicapas de celdas unitarias $d=5mm$ y $d=7.5mm$.

Al igual que las figuras de la sección anterior, la Figura 4.5 muestra una comparación entre los resultados obtenidos teóricamente y los resultados experimentales, solo que, para esta, hemos agregado tres paneles en vez de dos. El panel (a) muestra la estructura de bandas correspondiente al cristal fonónico de celda unitaria $d=5.0mm$ mientras que el panel (b) corresponde a la estructura de bandas de un cristal fonónico de celda unitaria $d=7.5mm$. El panel (c) muestra la transmisión medida en el laboratorio.

Podemos observar en los paneles (a) y (b), en el intervalo de 800 a $850kHz$ aproximadamente, las bandas que se superponen, en este rango de frecuencias es permitida

la propagación del pulso lo cual corresponde con la transmisión experimental. También podemos observar, que el gap correspondiente al intervalo de 850 a 950kHz del panel (b) cubre parte de la banda permitida que aparece en el panel (a). En contraparte a esto tenemos zonas de frecuencias prohibidas que también se superponen haciendo más grandes los gaps, en el panel (b) tenemos bandas que no aparecen en la transmisión, estas quedan cubiertas por los gaps que se forman en la multicapa con $d=5.0mm$ descrito en el panel (a).

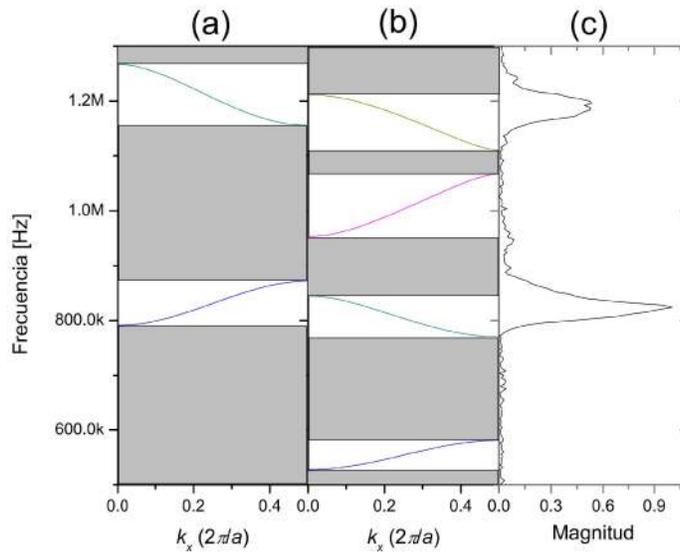


Figura 4.5: Comparación teoría-experimento para la superposición de las multicapas con celdas unitarias $d=5.0mm$ y $d=7.5mm$. (a) Estructura de bandas correspondiente al cristal fonónico con $d=5.0mm$. (b) Estructura de bandas correspondiente al cristal fonónico con $d=7.5mm$. (c) Transmisión experimental.

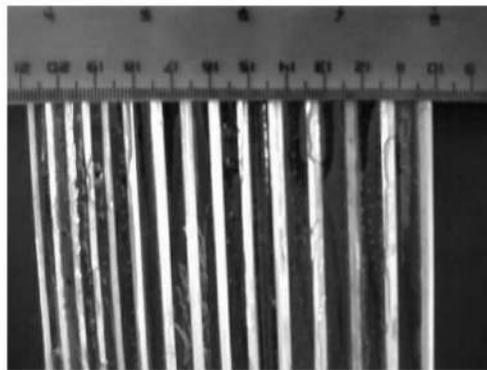


Figura 4.6: Superposición de las multicapas con celdas unitarias $d=5.0mm$, $d=7.5mm$ y $d=10.0mm$.

En la Figura 4.6 tenemos un sistema compuesto por las tres multicapas ya antes mencionadas. Para realizar esta medición fue necesario utilizar un pulsador con el cual emitimos una señal de 400volts a diferencia del generador de funciones que solo emite una señal de 10vpp.

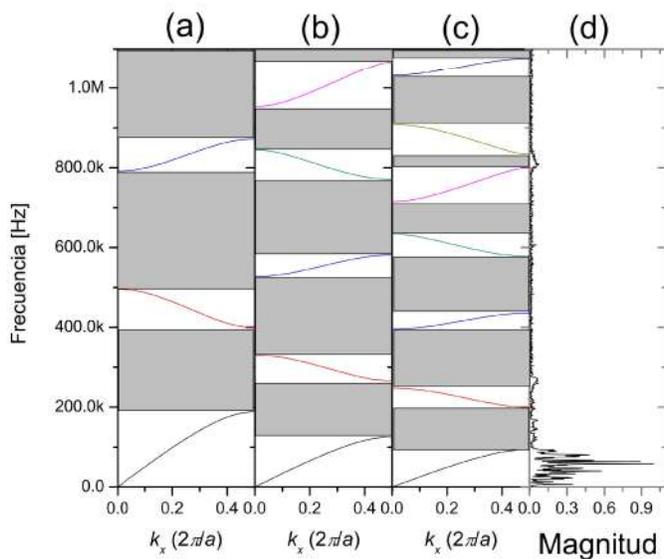


Figura 4.7: Comparación teoría-experimento para la superposición de las multicapas con celdas unitarias $d=5.0\text{mm}$, $d=7.5\text{mm}$ y $d=10.0\text{mm}$. (a) Estructura de bandas correspondiente al cristal fonónico con $d=5\text{mm}$. (b) Estructura de bandas correspondiente al cristal fonónico con $d=7.5\text{mm}$. (c) Estructura de bandas correspondiente al cristal fonónico con $d=10.0\text{mm}$. (d) Transmisión experimental.

En la Figura 4.7 tenemos que en el rango de 0 a 200kHz aproximadamente, las bandas mostradas en los paneles (a), (b) y (c) se superponen siendo esta una zona de transmisión, la cual tiene correspondencia en el panel (d). Podemos observar la misma situación alrededor de los 800kHz. Para el resto de los valores de frecuencias observamos que los gaps se superponen creando zonas muy grandes de no transmisión. Por último, en el panel (d) tenemos un pequeño rango de frecuencias alrededor de los 200kHz que no aparecen en los demás paneles, esto se debe a las imperfecciones en la fabricación de las multicapas y la incertidumbre asociada a los grosores de las capas.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo utilizamos el Método de Desarrollo en Ondas Planas para calcular la estructura bandas de tres cristales fonónicos formados por capas de aluminio y epoxi, con celdas unitaria de 5.0, 7.5 y 10.0mm y factor de llenada de 0.4 para los tres sistemas.

Después realizamos experimentos para medir la transmisión de las tres multicapas correspondientes a cada uno de los cristales fonónicos antes mencionados utilizando el método de transmisión a través.

Al comparar los resultados obtenidos con MDOP y los obtenidos experimentalmente pudimos observar que la estructura de bandas de cada uno de los cristales fonónicos es consistente con la transmisión que medimos para cada una de las multicapas.

El siguiente paso fue formar una heteroestructura compuesta por la superposición de las multicapas de 5.0 y 7.5mm y del mismo modo en que hicimos con las multicapas individuales comparamos los resultados obtenidos con el MDOP y la transmisión medida experimentalmente. Aquí pudimos notar que las zonas de no transmisión de ambas multicapas se superponen formando gaps más grandes.

Por último, formamos una heteroestructura compuesta por las tres multicapas y nuevamente comparamos los resultados teóricos con los experimentales, dando como resultado la suma de las zonas de no transmisión de los tres sistemas formando gaps de mayor tamaño que los obtenidos en la primer heteroestructura. Con esto hemos obtenido evidencia experimental de que es posible ampliar el rango de frecuencias prohibidas utilizando heteroestructuras fonónicas en simetría unidimensional para on-

das longitudinales consistente con la estructura de bandas obtenidas con el MDOP.

Apéndice A

Cálculo de la estructura de bandas para CFn usando MDOP

```
import numpy as np

import math
from scipy import linalg
import matplotlib.pyplot as plt

pi=math.pi
sen=math.sin
pa=1.1
ca=2.5E5
pb=2.68
cb=6.234E5

f=.6
n=150

def funcion1(a,b):
if a==b:
ec=pb+(pa-pb)*f
else:
ec=(pa-pb)*f*(sen(pi*(a-b)*f))/(pi*(a-b)*f)
return ec
```

```

def funcion2(a,b):
if a==b:
ec1=pb*cb*cb+(pa*ca*ca-pb*cb*cb)*f
else:
ec1=(pa*ca*ca-pb*cb*cb)*f*(sen(pi*(a-b)*f))/(pi*(a-b)*f)
return ec1

```

```

matrizN=np.zeros((2*n+1,2*n+1))
matrizM=np.zeros((2*n+1,2*n+1))

```

```

for i in np.arange(-n,n+1):
    for j in np.arange(-n,n+1):
        matrizN[i,j]=funcion1(i,j)

```

```

NI=linalg.inv(matrizN)

```

```

for k in np.arange(0,0.50001,.02):
    for i in np.arange(-n,n+1):
        for j in np.arange(-n,n+1):
            matrizM[i,j]=funcion2(i,j)*(k+i)*(k+j)

```

```

A=np.matmul(NI,matrizM)
valp,vecp = np.linalg.eig(A)
omega=(((valp))**(1/2))
fre=omega/1
fre=np.sort(fre)

```

```

plt.plot(k,fre[0], 'bo')
plt.plot(k,fre[1], 'bo')
plt.plot(k,fre[2], 'bo')
plt.plot(k,fre[3], 'bo')

```

```
plt.plot(k,fre[4], 'bo')  
plt.plot(k,fre[5], 'bo')  
plt.plot(k,fre[6], 'bo')  
plt.plot(k,fre[7], 'bo')  
plt.plot(k,fre[8], 'bo')  
plt.plot(k,fre[9], 'bo')  
plt.plot(k,fre[10], 'bo')  
plt.plot(k,fre[11], 'bo')
```

Bibliografía

- [1] M. S. Kushwaha, P. Halevi, L. Dobrzynski, and B. Djafari-Rouhani, *Physical Review Letters* 71, 2022 (1993).
- [2] P. K. Bhattacharya (Editor-in Chief), *Journal of Physics D: Applied Physics* 40 (2007).
- [3] T. Gorishnyy, C. K. Ullal, M. Maldovan, G. Fytas, and E. L. Thomas *Phys. Rev. Lett.* 94, 115501 (2005)
- [4] E. Yablonovitch, T. J. Gmitter and K. M. Leung, *Physical Review Letters* 67, 2295 (1991).
- [5] T. R. Zhai, D. H. Liu, and X. D. Zhang, *Frontiers of Physics in China* 5, 266 (2010).
- [6] R. Archuleta-Garcia, D. Moctezuma-Enriquez, J. Manzanares-Martinez, *Journal of Electromagnetics Waves and Applications*, 24,351 (2010).
- [7] J. Manzanares-Martinez, R. Archuleta-Garcia, P. Castro-Garay, D. Moctezuma-Enriquez, and E. Urrutia-Banuelos, *Progress In Electromagnetics Research (PIER)*, 111,105 (2011).
- [8] L. C. Parsons and G. T. Andrews, *Appl. Phys. Lett.* 95, 241909 (2009).
- [9] D. Moctezuma-Enriquez, Y. J. Rodriguez-Viveros, M. B. Manzanares-Martinez, P. Castro- Garay, E. Urrutia-Banuelos, and J. Manzanares-Martinez, *Applied Physics Letters* 99, 171901 (2011).
- [10] J. F. F. Hall and J. W. Wescott, *The Journal of the Acoustical Society of America* 56, 1376 (1974).

- [11] G. N. Aliev, B. Goller, D. Kovalev, and P. A. Snow, *Applied Physics Letters* 96, 124101 (2010).
- [12] L. D. Landau y E. M. Lifshitz. *Theory of Elasticity*. Pergamon Press; 2^a edición (1970)
- [13] M. H. Sadd. *Elasticity Theory, Applications, and numerics*. Elsevier; 1^a edición (2005).
- [14] G. Arfken. *Matematical methods for physicists*. Academic Press; 3^a edición (1985)
- [15] Ashcroft, N. W., Mermin, N. D. (2005). *Solid state physics* (holt, rinehart and winston, new york, 1976). Google Scholar, 403.
- [16] Fetter, Alexander L., and John Dirk Walecka. *Theoretical quantum mechanics and continua*. Courier Corporation, 2003.
- [17] 3. Yablonovitch E., Gmitter T.J., *Phys. Rev. Lett.* 63, 1
- [18] 7. Sozuer H.S., Haus J.W., *Phys. Rev. B* 45, 13962, 1992.
- [19] W. M. Haynes. *CRC Handbook of Chemistry and Physics. A Ready-Reference Book of Chemical and Physical Data*. CRC Press, 95^a edición (2015)
- [20] Arfken, G. B., & Weber, H. J. (1999). *Mathematical methods for physicists*.
- [21] Kittel, C., McEuen, P., & McEuen, P. (1996). *Introduction to solid state physics* (Vol. 8, pp. 323-324). New York: Wiley.