

# UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISION DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

El espacio tiempo de Gödel y los viajes al pasado

Tesis Profesional

Que para obtener el título de:

LICENCIADO EN FÍSICA

Presenta:

Mabel Anahí Soto Brizuela

Hermosillo, Sonora

Junio de 2013

# Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess



# Índice

Introducción	1
I. Surgimiento de la Relatividad General	3
II. Algebra tensorial	18
2.1 De...nición de un espacio vectorial	18
2.2 Transformación de coordenadas	19
2.3 Campos tensoriales	20
III. Relatividad General	24
3.1 Ecuaciones de campo de Einstein	24
3.2 Algunas métricas propuestas para la solución de las ecuaciones de Einstein	39
IV. Espacio de Gödel	49
4.1 ¿Cómo es este espacio?	50
4.2 Trayectorias en el espacio de Gödel en distintas coordenadas	51
4.3 Caída Libre	68
V. Descripciones grá...cas y discusiones ...losó...cas	71
5.1 Propiedades principales de la solución de Gödel	71
5.2 El tiempo	73
5.3 La causalidad	74
5.4 Conjeturas ...losó...cas	74
Conclusiones	77
REFERENCIAS	78

# Introducción

En este trabajo de tesis se hace una descripción del universo que Kurt Gödel propone como modelo para la solución a las ecuaciones de Albert Einstein de la relatividad general.

En el primer capítulo se hace un recorrido a través de la historia de la evolución de la ciencia, para así sentar las bases de cómo es que surge la idea de una teoría de la relatividad especial, y cómo es que se da la necesidad de generalizarla y dar origen a la teoría de la relatividad general. La idea revolucionaria de Einstein fue darse cuenta de que estos fenómenos no los producen fuerzas misteriosas que sólo se sienten, sino que se deben a una deformación del espacio-tiempo.

Para conseguir la total comprensión acerca de cómo abordar las ecuaciones de Einstein descritas en el tercer capítulo, se consideró conveniente hacer uno previo, que hiciera mención y abundara un poco sobre las herramientas matemáticas, que son nuevas en comparación con las utilizadas en la relatividad especial y en la física clásica. Centrándonos prácticamente en: las definiciones de tensores, líneas geodésicas, derivadas covariantes y símbolos de Christoffel, para describir cómo fue que Albert Einstein llegó a consolidar sus ecuaciones de campo y realizar su aplicación en el espacio vacío. Después se mencionan algunos de los universos propuestos como solución a estas ecuaciones, como son: la métrica de Schwarzschild, la métrica de Keer, la métrica de Friedmann con el fin de compararlas con la métrica de Gödel que es la que a nosotros nos interesa. Es importante enfatizar que no es objetivo de este trabajo obtener las métricas en sí, sólo utilizaremos sus descripciones para enfatizar las cualidades de la de Gödel, las cuales se pretende encontrar haciendo una inspección en coordenadas cartesianas y luego en cilíndricas circulares, donde se tuvo más éxito.

Es en el cuarto capítulo donde está la parte esencial de este trabajo de tesis. Haciendo y explorando los desarrollos matemáticos antes mencionados, se obtienen resultados

más visuales de cómo es este universo y sus características principales como son su rotación, y sus trayectorias por líneas de tiempo cerradas; así como la peculiaridad del comportamiento de la caída libre en este espacio. Y como es que bajo esas descripciones, este universo permite el viaje hacia el pasado avanzando hacia el futuro. Para analizar se plantea una discusión acerca de cómo estas descripciones de universos rotantes permiten estos viajes, y por qué los argumentos causales no pueden descartar esta teoría como lo han hecho con otras.

# I. Surgimiento de la Relatividad General

Comenzaremos este trabajo situándonos en el tiempo; alrededor del año 1600 el creador del método científico, Galileo Galilei, desarrolló "La primera Teoría de la relatividad" surgida de sus estudios sobre movimiento de cuerpos, rozamiento y caída libre. En sus obras "Diálogo sobre los principales sistemas del mundo" (1632) y "Diálogos acerca de Dos Nuevas Ciencias" (1636), dió las características de los sistemas de referencia inerciales o "galileanos", con una notable descripción de experimentos y su interpretación para dos observadores en movimiento relativo, uno de ellos sobre un barco que se desplaza a velocidad constante, y el otro en Tierra firme. En general: Sean dos sistemas de referencia inerciales (S y S'). Llamaremos  $V$  a la velocidad relativa entre ellos,  $v$  la velocidad de un objeto respecto de S, y  $v'$  la velocidad respecto de S'. En general, todas las variables no primadas corresponderán al sistema S y las primadas al S'.

Supongamos que en el instante inicial los orígenes de ambos sistemas coinciden, por simplicidad supondremos que S está en reposo y S' tiene velocidad constante  $V$ , en la dirección del eje x.

Supongamos un objeto en reposo en el sistema S. Para un observador fijo en S' este objeto se mueve con velocidad  $v' = V$  con movimiento rectilíneo uniforme según el eje x'. La posición del objeto para S' irá variando según la relación  $x' = x + Vt$  pues  $V$  es constante.

En general, la relación funcional entre las coordenadas de ambos sistemas, conocidas

como Transformaciones de Galileo, serán:

$$\begin{aligned}x^0 &= x + Vt \\y^0 &= y \\z^0 &= z \\t^0 &= t\end{aligned}\tag{1.1}$$

Otra contribución importante de Galileo a esta área fue el Teorema de adición de velocidades, que demostró en una época en que aún no se conocían las derivadas.

El problema consiste en determinar, para un mismo objeto, cómo se relacionan las velocidades que le miden dos observadores inerciales en movimiento relativo. Su demostración es muy simple y sus consecuencias eran muy conocidas pues se lo aplicaba cotidianamente. Por ejemplo, para subirse a un carro en movimiento lo mejor es correr hasta ponerse en reposo respecto del carro. La importancia de este Teorema radica en que Galileo mostró matemáticamente su validez en todos los sistemas inerciales.

Con las Transformaciones de Galileo podemos relacionar fácilmente las velocidades de un mismo objeto medidas desde S y S', resultando:

$$\begin{aligned}v_{x^0}^0 &= \frac{dx^0}{dt} = \frac{d}{dt}(x + Vt) & v_{x^0}^0 &= v_x + V \\v_{y^0}^0 &= \frac{dy^0}{dt} = \frac{dy}{dt} & v_{y^0}^0 &= v_y \\v_{z^0}^0 &= \frac{dz^0}{dt} = \frac{dz}{dt} & v_{z^0}^0 &= v_z\end{aligned}$$

La conclusión es que la velocidad de un móvil es diferente para dos observadores en movimiento relativo.

Años después, en 1665 aproximadamente, el estudio del movimiento de los cuerpos



continuó con el físico matemático Isaac Newton, enunciando su primera ley:

"Todo cuerpo permanecerá en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo a no ser que sea obligado por fuerzas externas a cambiar su estado".

Que coincidió con la idea de Galileo.

También formuló la Ley de Gravitación que permitió entender los fenómenos físicos más importantes del universo observable, explicando las tres leyes de Kepler, entre muchas otras contribuciones.

La ley de la gravitación universal descubierta por Newton nos dice que todos los cuerpos ejercen una fuerza atractiva directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa, se expresa como:

$$F = -G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{12} \quad (1.2)$$

donde  $F$  es la fuerza,  $G$  es la constante de gravitación,  $m_1$  y  $m_2$  son las masas de los cuerpos que se atraen y  $r_{21} = j\vec{r}_2 - i\vec{r}_1$ .

Considerando una partícula sujeta a una fuerza  $F$ , de acuerdo a la segunda ley de Newton, la ecuación de movimiento será:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad (1.3)$$

donde  $F$  está dada por (1.2), con otra notación

$$F(x, t) = m_i \ddot{x}$$

donde  $m_i$  es la masa inercial.

La segunda Ley de Newton nos dice que la fuerza es proporcional al producto de la masa y la aceleración, y es fácil demostrar que resulta invariante ante una transformación de Galileo. Al introducir el concepto de espacio absoluto, Newton insinuó que toda la materia en el universo está en reposo respecto a este sistema (el estado de re-

poso de todas las masas se establece con referencia a un sistema absoluto) y también, que existe un tiempo absoluto, es decir, que sólo existe una única manera de medir el tiempo ( $t^0 = t$ ).

En 1865, James Clerk Maxwell publicó la Teoría del Campo electromagnético, que se resume en cuatro ecuaciones fundamentales

$$\begin{aligned}
 \text{r } \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\
 \text{r } \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
 \text{r } \nabla \times \mathbf{E} &= -i \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
 \text{r } \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Cuando no existe densidad de corriente ni de carga, las componentes de los campos satisfacen la ecuación de onda

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u = 0 \tag{1.5}$$

Las ecuaciones de Maxwell conducen a fenómenos completamente nuevos. El logro que más destacó en esta teoría fue la predicción de la existencia de ondas electromagnéticas y darse cuenta de que la luz podía comprenderse como tal.

En ese momento, la comunidad científ...ca se planteó que si las ondas deben viajar en un medio, y la luz es capaz de viajar por el espacio, era inapelable que debía existir un medio para que esto ocurriera. A este medio se le llamó éter.

A continuación probaremos de una manera sencilla que las ecuaciones de Maxwell 1.4 no son invariantes ante una transformación de Galileo, utilizando la ecuación de la onda electromagnética que se obtiene al combinarse adecuadamente las ecuaciones de Maxwell. Esto nos servirá más adelante.

Una onda electromagnética consiste en campos eléctricos y magnéticos, perpendiculares, variables en el tiempo. Esta variación genera una alteración que se propaga

en el espacio a la cual se le llama onda electromagnética. Si los campos varían en el tiempo de forma senoidal, la onda considerada será senoidal, que es el tipo de onda más simple. La onda representada se propaga a lo largo del eje  $X$  del sistema de coordenadas elegido; es decir, una onda plana donde los campos oscilan sólo en el plano  $YZ$ , cuya frecuencia de vibración es única, y unidimensional.

Las ecuaciones de los campos eléctrico,  $E$ , y magnético,  $B$ , de la onda electromagnética monocromática que se propaga en la dirección del eje  $X$  son,

$$E(x, t) = E_0 \text{sen} k(ct - x) \quad (1.6a)$$

$$B(x, t) = B_0 \text{sen} k(ct - x) \quad (1.6b)$$

Donde  $E_0$  y  $B_0$  son los valores máximos de los campos eléctrico y magnético respectivamente;  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  es el número de ondas siendo  $\lambda$  la longitud de onda y  $c$  la velocidad de la luz.

Tomando una de las componentes de la onda, por ejemplo la eléctrica 1.6a, y derivándola respecto al tiempo se obtiene

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (E_0 \text{sen} k(ct - x)) = ckE_0 \cos k(ct - x) \quad (1.7)$$

ya que  $E_0 = cte$  y  $x = cte$ , pues estamos considerando un punto particular del eje  $X$ .

Derivemos de nuevo respecto a  $t$ ,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} (ckE_0 \cos k(ct - x)) = -(ck)^2 E_0 \text{sen} k(ct - x) \quad (1.8)$$

Derivemos de nuevo la ecuación 1.6a dos veces, pero esta vez respecto a  $x$  en un instante particular, esto es, haciendo  $t = cte$ ,

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [E_0 \text{sen} k(ct - x)] = -E_0 k \cos k(ct - x) \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} [-E_0 k \cos k(ct - x)] = -E_0 k^2 \text{sen} k(ct - x) \quad (1.10)$$

Al comparar las ecuaciones 1.8 y 1.10 obtenemos que

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (1.11)$$

que es la ecuación diferencial de la componente eléctrica de la onda electromagnética. Probaremos que la ecuación (1.11) no es invariante ante una transformación de Galileo.

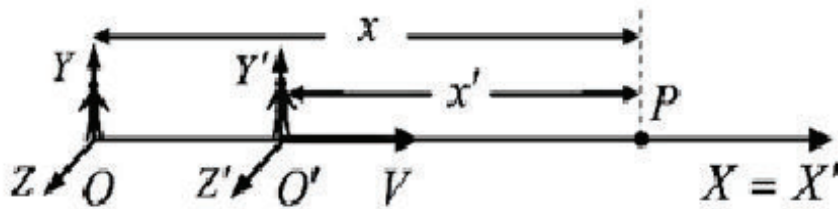


Figura 1.1

Tenemos un sistema O', que se mueve respecto a O con una velocidad V a lo largo del eje X común a ambos sistemas de coordenadas. El conjunto de ecuaciones que relacionan las coordenadas espaciales y el tiempo medidos por los dos observadores inerciales en O y O' de la Figura ?? son:

$$\begin{aligned} x^0 &= x + Vt & \Rightarrow & \quad x = x^0 + Vt \\ y^0 &= y \\ z^0 &= z \\ t^0 &= t \end{aligned} \quad (1.12)$$

De estas ecuaciones deducimos inmediatamente que,

$$\frac{\partial x^0}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x - Vt) = 1 \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial x^0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (x - Vt) = -V \quad (1.14)$$

Puesto que  $t = t^0$ , es evidente que  $dt = dt^0$ , esto implica que

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t^0} = v \quad y \quad \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial t^0}{\partial x} = 0 \quad (1.15)$$

El observador del sistema de referencia O aplica la ecuación 1.11. Si las ecuaciones de Maxwell fueran invariantes ante una transformación de Galileo, el observador del sistema de referencia O', que se mueve con velocidad constante respecto a O, debería aplicar la ecuación en la misma forma, es decir

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Ahora mismo lo corroboraremos, derivando la componente eléctrica de la onda electromagnética  $E(x^0, t^0)$  1.6a respecto a  $x$ , aplicando la regla de la cadena, y teniendo en cuenta las ecuaciones 1.13, 1.14 y 1.15, tenemos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} &= \frac{\partial E}{\partial x^0} \frac{\partial x^0}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial t^0} \frac{\partial t^0}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial x^0} (1) + \frac{\partial E}{\partial t^0} (0) \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= \frac{\partial E}{\partial x^0} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Derivando la ecuación nuevamente respecto a  $x$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial E}{\partial x^0} = \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial x^0}$$

aplicando la regla de la cadena

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 E}{\partial x^0} \frac{\partial x^0}{\partial x} + \frac{\partial^2 E}{\partial t^0} \frac{\partial t^0}{\partial x} \\
\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 E}{\partial x^{02}} \frac{\partial x^0}{\partial x} + \frac{\partial^2 E}{\partial t^0 \partial x^0} \frac{\partial t^0}{\partial x} \\
\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 E}{\partial x^{02}} \quad (1) \\
\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 E}{\partial x^{02}} \quad (1.17)
\end{aligned}$$

Puesto que  $t = t^0$ , resulta que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{\partial E}{\partial x^0} \frac{\partial x^0}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial t^0} \frac{\partial t^0}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial x^0} (iV) + \frac{\partial E}{\partial t^0} \quad (1) \\
\frac{\partial E}{\partial t} &= iV \frac{\partial E}{\partial x^0} + \frac{\partial E}{\partial t^0} \quad (1.18)
\end{aligned}$$

de aquí

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial t^{02}} + 2V \frac{\partial^2 E}{\partial x^0 \partial t^0} + V^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^{02}} \quad (1.19)$$

donde obtenemos que.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^{02}} + 2 \frac{V}{c} \frac{\partial^2 E}{\partial x^0 \partial t^0} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^{02}} \quad (1.20)$$

Observamos aquí que no se mantiene la misma forma que la Ec 1.11, por lo que decimos que: Las ecuaciones de Maxwell 1.4 no son invariantes ante una transformación de Galileo.

En 1887 Michelson y Morley realizaron un experimento, sin imaginarse que cambiaría la forma de entender la física. Se sabía que las velocidades tanto del emisor como la del receptor de una onda, cambiaban su frecuencia produciendo efecto Doppler, pero no la velocidad de la onda respecto al medio. Si el medio se mueve, la velocidad total de la onda será la suma vectorial de la velocidad de la onda respecto al medio y la velocidad del medio respecto al receptor; como ya establecimos al inicio con el "Teorema de adición de velocidades" de Galileo. Ahora, para el caso de la onda de

luz y el éter, se dedujo que la Tierra presenta movimiento respecto al éter en alguna dirección.

El objetivo del experimento era medir la velocidad de la luz en la Tierra, en tiempos y direcciones distintos, suponiendo que el movimiento respecto al éter no será igual en dos direcciones distintas a tiempos iguales.

Tenemos que si la Tierra se mueve a una velocidad  $v$ , su velocidad relativa en distintas direcciones respecto al éter varía en el tiempo, entonces la velocidad de la luz en la Tierra cuando ésta se mueve en dirección del éter, tendría que ser:  $c - v$  en dirección y sentido del movimiento de la Tierra,  $c + v$  en la dirección y sentido contrario al movimiento de la Tierra y  $\sqrt{c^2 - v^2}$  en dirección perpendicular al movimiento de la Tierra.

Se utilizó lo que hoy se conoce como interferómetro de Michelson, el cual medía las distancias de la siguiente manera:

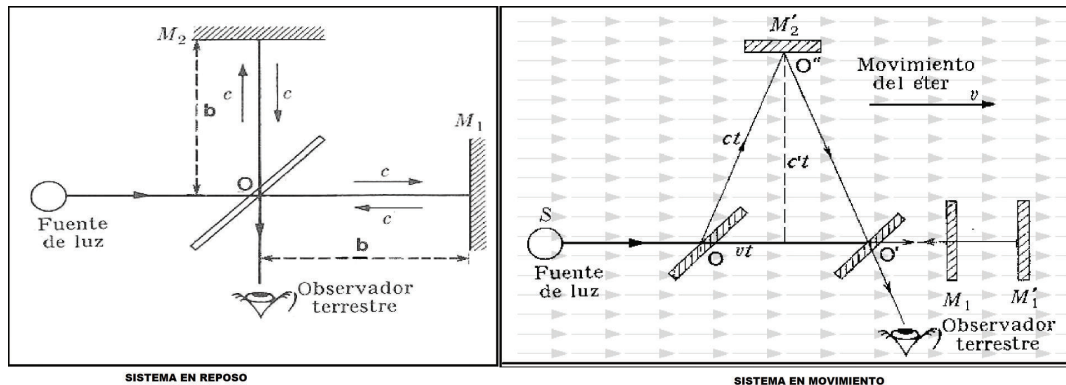


Figura 1.2 Interferómetro de Michelson, utilizado para medir distancias con precisión. Ilustrando su funcionamiento en un sistema en el que el éter estuviera en reposo respecto al observador y la fuente (lado izquierdo), y al igual que si el éter se moviera (lado derecho).

Entonces la velocidad de la luz  $c^0$  resultante, que se mediría en la Tierra en el eje perpendicular al movimiento sería  $c^0 = \sqrt{c^2 - v^2}$

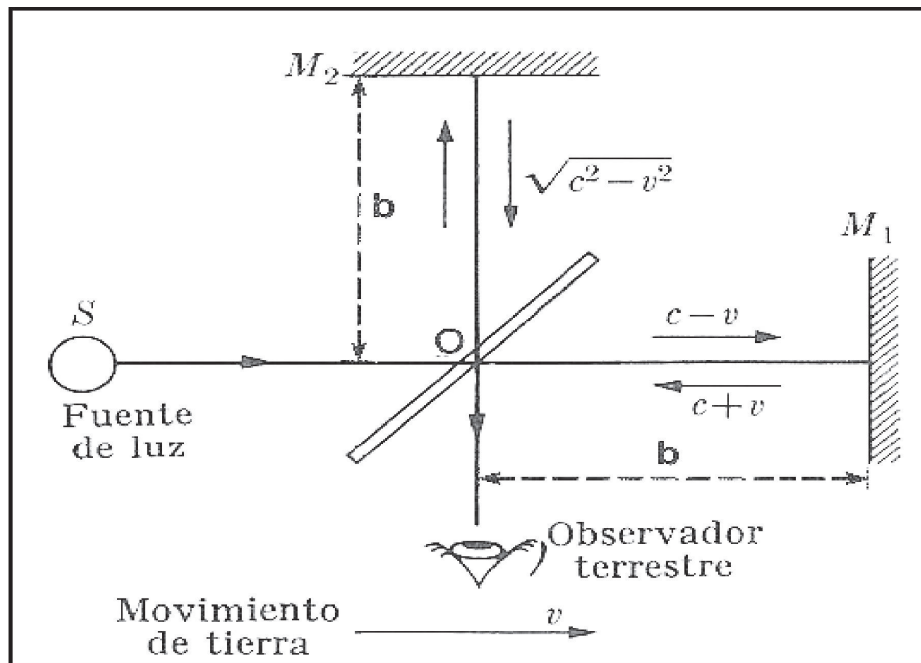


Figura1.3 Interferómetro de Michelson en un sistema con éter en movimiento visto desde un observador.

Tomando la proporción entre  $c$  y  $c^0$  tenemos

$$\frac{c^0}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Interpretando los resultados del experimento se tuvo que, independientemente de la dirección, hora día o mes en que se realizara la medición, la velocidad de la luz sería la misma ( $c^0/c = 1$ ), como si el sistema estuviera siempre en reposo respecto al éter.

Fue el físico matemático Hendrik Antoon Lorentz, quien estudiaba tanto la invarianza de las ecuaciones de Maxwell como los resultados del experimento de Michelson-Morley, y quién en 1902 expuso su interpretación al suponer que en la dirección del movimiento el brazo del interferómetro sufría una contracción precisamente en un factor  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ , que después sería llamada "Contracción de Fitzgerald-Lorentz" en honor a los 2 científicos que la propusieron (Fitzgerald antes que Lorentz).

En 1904 Lorentz realiza una modificación a las transformaciones de Galileo dando



origen así a las "Transformaciones de Lorentz", que son:

$$\begin{aligned}
 x^0 &= \gamma (x - vt) \\
 y^0 &= y \\
 z^0 &= z \\
 t^0 &= \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right)
 \end{aligned}
 \tag{1.21}$$

Escritas de forma matricial

$$\begin{pmatrix} ct^0 \\ x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -i\gamma\beta & 0 & 0 \\ -i\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}
 \tag{1.22}$$

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct^0 \\ x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{pmatrix}
 \tag{1.23}$$

donde,  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  y  $\beta = \frac{v}{c}$

Es fácil demostrar que las ecuaciones de Maxwell (1.4) son compatibles con estas transformaciones, a diferencia de las Transformaciones de Galileo, como ya lo demostramos.

En 1905, tras la interpretación del experimento por parte de Albert Einstein y de la discusión con la comunidad científica, se acordó que, de existir, el éter debía estar en reposo en todas las direcciones y en cualquier sistema inercial, y puesto que la Tierra se mueve, sería imposible que el éter no tuviera movimiento; y al tomar las Transformaciones de Lorentz como transformaciones de coordenadas en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones, la hipótesis del éter fue descartada.

Así, Einstein dio a conocer la Teoría de la Relatividad Especial que solucionaba el problema de la invariancia de la velocidad de la luz, aunque el trabajo no fue aceptado inmediatamente por los científicos de la época, pasó a ser uno de los pilares de la física

moderna.

Esta teoría se basó principalmente en argumentos de simetría de las leyes de la naturaleza, y en los resultados del experimento de Michelson y Morley. Para Einstein la interpretación de este experimento debía basarse en el resultado básico y esencial del experimento de Michelson y Morley. Esto es, como  $c/c^0 = 1$  entonces  $c = c^0$ . En consecuencia, no solo no existe el éter, sino que, además, la velocidad de la luz debe ser constante e independiente del sistema de referencia inercial en el cual se mida.

La Teoría de la relatividad especial de Einstein se basa en dos postulados:

- <sup>2</sup> La velocidad de la luz en el vacío es la misma en todos los sistemas inerciales
- <sup>2</sup> Las leyes físicas tienen la misma forma en todos los sistemas inerciales

El concepto de la invariabilidad de la velocidad de la luz, podría contraponerse al sentido común, puesto que al correr detrás de una señal luminosa deberíamos verla con una velocidad menor a 300 000 km/s; sin embargo, Einstein dice que no importa como es el sistema de referencia, la velocidad de la luz será constante.

Un resultado esencial de la teoría de la relatividad es que ninguna partícula puede tener una velocidad mayor a la de la luz, para ello ésta tendría que poseer una energía infinita.

Notamos que si  $v > c$ , entonces  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  se vuelve imaginaria, por lo tanto las transformaciones de Lorentz perderían sentido físico.

Otra consecuencia de la relatividad especial es que la energía relativista de una partícula libre es

$$E = mc^2$$

donde  $m$  es la masa de la partícula y  $c$  la velocidad de la luz.

De la mecánica clásica sabemos que la energía cinética de una partícula libre depende de su velocidad, y  $c$  es constante por el segundo postulado relativista.

Encontramos una expresión para la energía relativista en términos del momento lineal  $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$  ésta implica que  $E = pc$  para una partícula de masa nula como por ejemplo un fotón.

Debemos explicar el concepto del espacio-tiempo para poder entender la teoría de la relatividad.

Cada suceso ocurre en un espacio y un tiempo determinado, por ello debemos especificar las cuatro coordenadas. Cada punto en este espacio de cuatro dimensiones llamado espacio-tiempo, sería un suceso con coordenadas  $(ct, x, y, z)$ , con la coordenada temporal  $ct$  para que las unidades sean km. Es fácil demostrar que, si la "distancia" entre 2 sucesos en el espacio-tiempo es infinitesimal, ésta es:

$$dS^2 = c^2 (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 \quad (1.24)$$

es decir, si nos situamos en el origen del espacio tiempo  $(0, 0, 0, 0)$  la "distancia" al cuadrado de este punto a cualquier otro  $(x, y, z, ct)$  es, por definición

$$S^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (1.25)$$

Después de que Einstein presentara su teoría, el matemático ruso de origen lituano Hermann Minkowski observó que el concepto de un espacio de cuatro dimensiones era matemáticamente bien conocido. El espacio de Minkowski es un espacio geométrico de cuatro dimensiones, en el cual las distancias entre puntos se miden según las fórmulas antes mencionadas.

Reescribiremos el elemento de línea como un tensor y usaremos la convención de suma de índices repetidos de Einstein

$$dS^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.26)$$

donde  $\eta_{\mu\nu}$  es el tensor de Minkowski

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

y

$$dx^\mu = (cdt, dx, dy, dz) \quad (1.28)$$

Aunque no es posible graficar un espacio de esta índole, si descartamos una o dos dimensiones espaciales y en el eje vertical ubicamos al tiempo podemos darnos una

idea de su forma.

Si cada punto del espacio tiempo es un suceso, un conjunto de sucesos que ocurren en distintos lugares de este espacio serian la "historia de una partícula", llamada línea de universo.

Si retomamos el hecho de que la velocidad de la luz es un límite natural, esto implicaría que:

A cada suceso E podemos asociarle un cono de luz (un concepto que utilizaremos más adelante); que es el conjunto de todos los sucesos a los cuales se puede llegar desde E viajando con velocidad  $c$ , o desde los cuales se puede llegar a E viajando a la velocidad de la luz. Como nada puede viajar mas rápido que la luz, el suceso E sólo podrá influir sobre los sucesos que se encuentran dentro y sobre su cono futuro y sólo podrá ser influenciado por los sucesos que se encuentran dentro y sobre su cono pasado.

Si un suceso influye en otro emitiendo una señal con velocidad menor que  $c$ , se dice que los sucesos están causalmente conectados. Esto implica que todos los sucesos que ocurren fuera del cono de luz de un suceso E están causalmente desconectados.

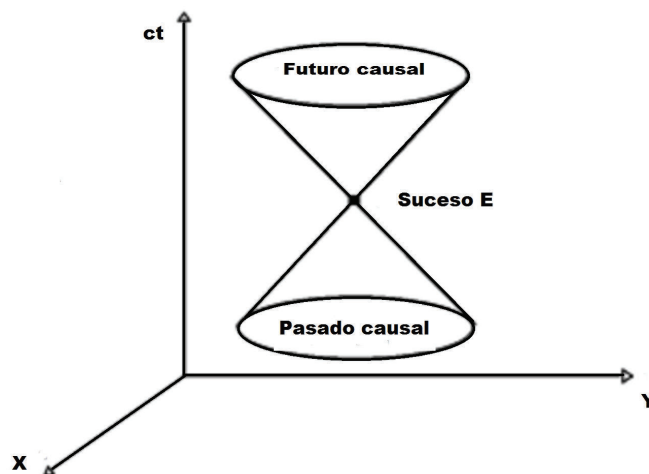


Figura 1.4 Ilustración de la conexión causal de un evento E en un cono de luz.

En noviembre de 1915 Einstein extendió los conceptos de la Relatividad Especial explicando una de las 4 interacciones fundamentales de la materia, la gravitatoria, en su llamada Teoría General de la Relatividad.

Imaginemos dos masas ejerciéndose una fuerza gravitatoria entre sí. Supongamos que una de las masas cambia repentinamente de posición. ¿Cuánto tiempo tardan ambos cuerpos en sentir la nueva fuerza de atracción? Según la física clásica el tiempo es nulo. Es decir la fuerza gravitatoria se transmite a velocidad infinita. Pero según la Relatividad Especial ninguna partícula adquiere velocidades mayores que  $c$  en el vacío.

La geometría en matemáticas había estado dominada por conceptos euclidianos durante más de 2000 años. En el siglo XIX algunos matemáticos, entre ellos, Nikolái Lobachevski, János Bolyai y K. F. Gauss, desarrollaron todo un conjunto de nuevas geometrías.

En dos dimensiones un plano tendría curvatura nula, la superficie de una esfera curvatura positiva y la superficie de una silla de montar curvatura negativa.

La Relatividad General nos dice que en realidad la atracción gravitatoria es una consecuencia de la curvatura del espacio-tiempo.

Hasta aquí hemos descrito la evolución de las teorías que dieron origen a la Teoría de la Relatividad General. Para seguir con el desarrollo de esta teoría se necesita una notación matemática más general.

# II. Algebra tensorial

## 2.1 Definición de un espacio vectorial

Se puede definir un espacio vectorial como un conjunto de vectores y escalares que cumplen las propiedades elementales de los vectores, las cuales son: asociativa, conmutativa y distributiva. Dicho de otra forma, tomemos la siguiente definición.

Definición: Sea  $U$  un conjunto en el cual están definidas la suma y la multiplicación por un escalar. Esto es, para todo  $A$  y  $B$  en  $U$  y para todo número  $a$ , la suma  $A+B$  está en  $U$  (" $U$  es cerrado bajo a la suma y la multiplicación por un escalar  $a$ ").

Supongamos que se satisfacen los siguientes axiomas para todo  $A, B$  y  $C$  en  $U$  y para cualquier número  $a$  y  $b$

- i  $A + B = B + A$ .
- ii  $(A + B) + C = A + (B + C)$ .
- iii Existe un elemento especial  $0$  (llamado vector cero o nulo) de  $U$  tal que  $A + 0 = A$  para todo  $A$  en  $U$ .
- iv Para cualquier elemento  $A$  de  $U$  existe un negativo  $-A$  en  $U$  tal que  $A + (-A) = 0$ .
- v  $a(A + B) = aA + aB$ .
- vi  $(a + b)A = aA + bA$ .
- vii  $(ab)A = a(bA)$ .
- viii  $1A = A$ .

Entonces se dice que  $U$  está en un espacio vectorial y sus miembros se denominan vectores.

La relatividad general se puede formular de diversas maneras. Una muy accesible para estudiantes de licenciatura es el álgebra de tensores.

Los tensores son una herramienta matemática, la cual es representada necesariamente en un sistema de referencia, de este modo surge el concepto de componentes de un tensor. Si bien los tensores son independientes del sistema de referencia, las componentes

serán dependientes y variarán con éste.

Los tensores se pueden clasificar según su orden de la siguiente manera:

- 2 Tensor de orden cero (Escalar). Cantidad que tiene magnitud pero no dirección. Los escalares pueden ser funciones del espacio y del tiempo y no necesariamente han de ser constantes. Como por ejemplo la densidad de masa.
- 2 Tensor de orden 1 (Vector). Es la cantidad que tiene magnitud y dirección. Ejemplo de ello son: la velocidad, aceleración o la fuerza.
- 2 Tensor de orden 2. Cantidad que tiene magnitud y dos direcciones. Por ejemplo: la tensión o la deformación.

El requisito para que un conjunto de funciones indexadas  $x^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p}_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m}$  sean las componentes de un tensor, es que se transforme como

$$x^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p}_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m} = \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial x^{\beta_1}} \frac{\partial x^{\alpha_2}}{\partial x^{\beta_2}} \dots \frac{\partial x^{\alpha_p}}{\partial x^{\beta_p}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial x^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial x^{\beta_m}}{\partial x^{\alpha_m}} X^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p}_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m}$$

Donde  $A^i_j, B^j_k$  son las matrices jacobianas correspondientes.

## 2.2 Transformación de coordenadas

Vamos a escribir cómo se puede representar una transformación de coordenadas. Supongamos que existe un suceso en un sistema de referencia de  $N$  dimensiones,  $(x^1, x^2, \dots, x^N)$ , y otro segundo sistema de referencia en el cual también se manifiesta el suceso,  $(x^{1^0}, x^{2^0}, \dots, x^{N^0})$ , de modo que existirán  $N$  relaciones independientes entre las coordenada de ambos sistemas, de tal forma que las coordenadas se pueden representar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x^{1^0} &= x^{1^0} \begin{matrix} i \\ x^1, x^2, \dots, x^N \end{matrix} \\ x^{2^0} &= x^{2^0} \begin{matrix} i \\ x^1, x^2, \dots, x^N \end{matrix} \\ &\vdots \\ x^{N^0} &= x^{N^0} \begin{matrix} i \\ x^1, x^2, \dots, x^N \end{matrix} \end{aligned} \tag{2.1a}$$

de aquí podemos abreviar las expresiones anteriores de la forma:

$$x^{k0} = x^{k0}(x^1, x^2, \dots, x^N) \quad \text{con } k = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.1b)$$

Donde todas las funciones se suponen uniformes, continuas y con derivadas continuas. Por lo que, a cada conjunto de coordenadas ( coordenadas primadas) le corresponde un único conjunto de las coordenadas ( coordenadas no primadas) de manera que

$$x^k = x^k(x^{10}, x^{20}, \dots, x^{N0}) \quad (2.2)$$

Estas dos últimas relaciones de...nen las fórmulas de transformación de coordenadas de un sistema de referencia a otro.

Los escalares, como ya mencionamos, son tensores de orden cero y son invariantes ante toda transformación de coordenadas. Supongamos que existe una función  $\varphi$  dada de las coordenadas  $x^k$  y  $\varphi'$  la correspondiente en la transformación de un nuevo conjunto de coordenadas  $x^{k0}$ ; la función deberá de cumplir con que  $\varphi = \varphi'$ . La función  $\varphi$  se llama escalar o invariante respecto de la transformación de coordenadas dada.

## 2.3 Campos tensoriales

Si a cada punto de una región de un espacio de N dimensiones se le puede asociar un tensor en dicha región, entonces está de...nido un campo tensorial. Si el tensor correspondiente a cada uno de los puntos es de orden cero o uno, el campo tensorial se reduce a un campo escalar o vectorial, respectivamente. Un campo tensorial no es el conjunto de sus componentes en un sistema de coordenadas particulares, sino todos los posibles conjuntos en cualquier transformación de coordenadas.

### 2.3.1 Tensores simétricos y hermismétricos

Antes de mencionar los tensores simétricos y hermismétricos de...namos qué son los índices covariantes y contravariantes.



El concepto de covarianza y contravarianza está relacionado con la descripción de un elemento en dos sistemas de coordenadas. Consideremos dos sistemas, los cuales se encuentran relacionados por las ecuaciones 2.1b y 2.2. Se define una magnitud de cierto sistema de coordenadas como  $A$ , de modo que para el sistema de coordenadas  $(x^1, x^2, \dots, x^N)$  sus magnitudes se representan como  $A^1, A^2, \dots, A^N$  y se encuentran relacionadas con las magnitudes del sistema de coordenadas  $(x^{10}, x^{20}, \dots, x^{N0})$  mediante las fórmulas de transformación.

$$A^{p0} = \sum_{q=1}^N \frac{\partial x^{p0}}{\partial x^q} A^q \quad (2.3)$$

con  $p = 1, 2, \dots, N$ . Al cual se le llama componente de un vector contravariante o tensor contravariante de primer orden.

De igual manera tenemos

$$A_{p0} = \sum_{q=1}^N \frac{\partial x^q}{\partial x^{p0}} A_q \quad (2.4)$$

con  $p = 1, 2, \dots, N$ . que es la componente de un tensor covariante de primer orden. El índice de arriba se llama índice contravariante mientras que al de abajo se le llama índice covariante.

Un tensor se llama simétrico respecto de dos índices contravariantes (covariantes) si sus componentes no varían al permutar dichos índices. Por consiguiente, si  $A_{qs}^{mpr} = A_{qs}^{pmr}$ , el tensor es simétrico respecto de los índices  $m$  y  $p$ .

Un tensor se llama hermismétrico respecto de dos índices contravariantes, o dos covariantes, si sus componentes cambian de signo al permutar dichos índices. Por consiguiente, si  $A_{qs}^{mpr} = -A_{qs}^{pmr}$ , el tensor es hermismétrico respecto de los índices  $m$  y  $p$ .

### 2.3.2 Símbolos de Christoffel

Los símbolos de Christoffel reciben el nombre de coeficientes de conexión [2] y se

demuestra que tienen la siguiente forma

$$\Gamma^m_{ik} = \frac{1}{2} g^{mr} (\partial_i g_{rk} + \partial_k g_{ir} - \partial_r g_{ki}) \quad (2.5)$$

Son portadores de la forma en que cambia la base de vectores que generan el espacio. Donde  $g_{ij}$  recibe el nombre de tensor métrico.

### 2.3.3 Líneas geodésicas y derivadas en espacios curvados

La distancia entre dos puntos  $t_1$  y  $t_2$  sobre una curva  $x^r = x^r(t)$  en un espacio de Riemann viene dada por

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} dt \quad (2.6)$$

La curva en el espacio que pasa por dos puntos con la mínima distancia entre ellos se llama línea geodésica de dicho espacio. La ecuación diferencial de la línea geodésica tiene la forma [2]

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\alpha}{ds} = 0 \quad (2.7)$$

Donde  $s$  indica el parámetro de la longitud de línea. Por ejemplo, las geodésicas en el plano son rectas y las correspondientes en una esfera son arcos de un círculo. Por lo tanto se denota el parámetro  $s$  como la longitud de arco de una curva.

En el caso de espacios curvados, la derivada parcial no toma en cuenta todos los cambios que tiene una función definida en el espacio. Hace falta, además, agregar que la base de vectores que generan ese espacio también cambia. Por eso se necesita la derivada covariante de un tensor, que definiremos a continuación:

La derivada covariante respecto de  $x^\nu$ , de un tensor representado en coordenadas covariantes:  $A_{\mu,i}$ , se denota como  $A_{\mu;\nu}$ , y se demuestra que tiene la forma

$$A_{\mu;\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\mu_{\nu s} A_s \quad (2.8)$$

Además, la derivada covariante de un vector representado en coordenadas contravariantes:  $A^\mu$  respecto a  $x^\nu$ , que se denota como  $A^\mu{}_{;\nu}$ , y se define de la siguiente forma

$$A^\mu{}_{;\nu} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu{}_{\nu s} A^s \quad (2.9)$$

En los textos se demuestra que las derivadas covariantes de diferentes tensores tienen la forma que sigue:

tipo de tensores	Expresión
campo escalar $\phi$	$\phi_{;a} = \partial_a \phi$
vector contravariante $\lambda^a$	$\lambda^a{}_{;b} = \partial_b \lambda^a + \Gamma^a{}_{bc} \lambda^c$
vector covariante $\mu_a$	$\mu_{a;b} = \partial_b \mu_a - \Gamma^c{}_{ab} \mu_c$
campo tensorial del tipo (2,0) $\tau^{ab}$	$\tau^c{}_{ab} = \partial_c \tau^{ab} + \Gamma^a{}_{dc} \tau^{db} + \Gamma^b{}_{dc} \tau^{ad}$
campo tensorial del tipo (0,2) $\tau_{ab}$	$\tau_{ab;c} = \partial_c \tau_{ab} - \Gamma^d{}_{ac} \tau_{db} - \Gamma^d{}_{bc} \tau_{ad}$
campo tensorial del tipo (1,1) $\tau^a_b$	$\tau^a{}_{b;c} = \partial_c \tau^a_b + \Gamma^a{}_{dc} \tau^d_b - \Gamma^d{}_{bc} \tau^a_d$

También se demuestra en los textos [7], que en espacios curvados el gradiente, la divergencia y el rotacional tienen la forma que sigue:

Para el gradiente:

$$r^{\odot} = \odot_{;\mu} = \frac{\partial \odot}{\partial x^\mu} \quad (2.10)$$

donde  $\odot$  es una función escalar.

La divergencia de un tensor  $A^\mu$  tiene la forma siguiente:

$$\text{div } A^\mu = A^\mu{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} A^k) \quad (2.11)$$

y es la operación de contracción de su derivada covariante respecto a  $x^\mu$ .

El Laplaciano de la función escalar  $\odot$  es la divergencia del gradiente, resulta:

$$r^{2\odot} = \text{div } \odot_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g} g^{jk} \frac{\partial \odot}{\partial x^k}) \quad (2.12)$$

# III. Relatividad General

## 3.1 Ecuaciones de campo de Einstein

En este capítulo haremos notar que la relación entre la geometría y la distribución de las masas está dada por las ecuaciones fundamentales de la relatividad general formuladas por Einstein. En estas ecuaciones se especifica cómo la distribución de las masas es quien determina la curvatura del espacio en cada punto y, a la par cómo la geometría determina el movimiento de las masas. Esto implica que, tanto la geometría como el movimiento de los cuerpos, deben ser autoconsistentes a lo largo de todo el espacio-tiempo. Es decir, las ecuaciones de campo de Einstein, hacen una descripción relativista de la gravitación, que es lo que produce la curvatura en el espacio tiempo. Completaremos la teoría postulando una ley que muestre cómo las fuentes del campo gravitatorio determinan la métrica. Partiremos de la ley de Gravitación universal de Newton

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} \quad (3.1)$$

De donde el potencial gravitatorio viene dado por la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \phi = -4\pi G \rho \quad (3.2)$$

la cual podemos considerar la ecuación de campo de Newton.

Como podemos observar, esta ecuación no depende explícitamente del tiempo, es decir, si modificamos la densidad de masa  $\rho$ , tanto el potencial  $\phi$  como la fuerza  $\vec{F}$ , se modificarán instantáneamente. Lo cual viola el primer postulado de la relatividad especial.

Podemos decir que si  $\rho$  depende de:

- <sup>2</sup> La masa (su medición depende del sistema de referencia)
- <sup>2</sup> El espacio (se contrae en sistemas de referencia con velocidades cercanas a  $c$ )

Entonces,  $\rho$  no es invariante, depende del Sistema de referencia y de su velocidad.

Ahora tomaremos la ecuación de movimiento de una partícula en un campo gravitacional

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{m_G}{m_I} \vec{r}_{\odot} \quad (3.3)$$

donde si  $m_I = m_G$  ( la masa inercial = la masa gravitacional), podemos concluir que la trayectoria de una partícula en un campo gravitacional es independiente de la naturaleza de la partícula.

Esto hizo que Einstein imaginara el siguiente experimento:

Desde un sistema de referencia en la Tierra, un elevador sin fricción cae con aceleración  $\hat{a}$ . La persona dentro debería tener igual aceleración. Si le prestamos aparatos de medición, no podrá detectar si se encuentra en caída libre o en un sistema de referencia inercial. Este experimento dio origen al Principio de Equivalencia:

"En un laboratorio que cae libremente y sin rotación ocupando una región pequeña del espacio tiempo, las leyes de la física son las de la relatividad especial".

Una observación importante en este experimento sería que, si colocamos a 2 observadores en extremos opuestos dentro del ascensor extremadamente ancho con iguales aparatos de medición, y lo elevamos a una altura considerable de la Tierra, para dejarlos caer, al cabo de un tiempo un tercer observador se percatará de que se acercan entre sí, ya que sus aceleraciones apuntan al centro de la Tierra.

De esta forma fue como Einstein propuso que la gravedad no debiera ser considerada como una fuerza sino como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo, siendo esta curvatura provocada por la presencia de materia. Esta es la idea principal

de la Teoría de la Relatividad General.

La relatividad considera cuatro componentes, estas forman un cuadrivector, que representa a una única cantidad física. Tres de las componentes de un cuadrivector forman siempre un vector ordinario en el espacio de tres dimensiones, sin ser necesariamente las tres primeras componentes las que forman el vector. Un ejemplo es el cuádrimomento que está dado como  $p = (p^0, p^1, p^2, p^3)$ , con  $p^0$  la energía. Éstos siguen las transformaciones de Lorentz.

Concluimos que la ecuación de movimiento de una partícula en caída libre debe ser equivalente a la de una partícula libre en el espacio-tiempo curvo.

$$\frac{dp}{d\tau} = 0 \quad (3.4)$$

con  $p$  el cuádrimomento de la partícula y  $\tau$  es el tiempo propio.

Entonces la línea de mundo de una partícula en caída libre bajo la acción de la gravedad es una geodésica en el espacio-tiempo curvo, como nos daremos cuenta más adelante.

El principio de equivalencia expresa matemáticamente que en cualquier punto  $P$  del espacio tiempo, podremos definir un sistema de coordenadas  $X^\mu$  de forma que en la vecindad de  $P$ , el elemento de línea del espacio tiempo tenga la forma de la ecuación 1.26

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

donde en el punto  $P$  se cumple la igualdad, al trasladarse a un punto distinto se requiere la Ec (3.9).

De la ecuación de la geodésica deducimos que la trayectoria de una partícula libre (está bajo la influencia solamente de la gravedad) en la vecindad del punto  $P$  está dada por

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0$$

si  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  y  $\Gamma^\mu_{\nu\sigma} = 0$ , debido a Ec (2.5), por tanto

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} \approx 0 \quad (3.5)$$

Si  $x^\mu = (ct, x, y, z)$  para  $\mu = 0$ ,  $\frac{dt}{d\tau} = cte$ , asimismo, para  $\mu = 1, 2, 3$  tendríamos que

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} \approx 0 \quad (3.6)$$

Esto es, que en una vecindad de  $P$  las coordenadas  $x^\mu$  definen un sistema cartesiano localmente inercial, en el cual las leyes de la relatividad especial se mantienen localmente. Para poder construir un sistema de estas características, el espacio tiempo deberá ser una variedad pseudo Riemanniana. En esta variedad, en un sistema arbitrario  $x^\mu$ , el elemento de línea toma la forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.7)$$

como ahora el espacio tiempo es curvo, esto nos impide encontrar una equivalencia entre esta métrica y la de Minkowski, por esta razón deberemos utilizar un sistema de coordenadas arbitrario  $x^\mu$  que etiquete los puntos de la variedad, al cual llamaremos coordenadas localmente inerciales. No es fácil describir físicamente a este sistema, pero el principio de equivalencia nos ayudará en ese aspecto mediante una transformación de las mismas, es decir construiremos un sistema de coordenadas  $x^\mu$  alrededor del punto  $P$  tal que

$$g_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu} \quad (\partial_\alpha g_{\mu\nu})_P = 0 \quad (3.8)$$

esto significa que  $e_{\nu\sigma}^\mu(P) = 0$ , donde los vectores en  $P$  forman un conjunto ortonormal, es decir,

$$e_\mu(P) \cdot e_\nu(P) = \eta_{\mu\nu}$$

Para cualquiera de ellos el vector base de carácter temporal  $e_0(P)$  es simplemente el cuadrivector velocidad normalizado  $\hat{u}(P)$  del origen del sistema en el punto  $P$ , y los vectores de carácter espacial ortonormales  $e_i(P)$  definen cómo estarán orientados los ejes. Si nos acercamos a  $P$ , la métrica del sistema de referencia localmente inercial  $x^\mu$  (cuyo origen está en  $P$ ), está dado por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial_\sigma \partial_\rho g_{\mu\nu})_P x^\sigma x^\rho + \dots \quad (3.9)$$

Al hablar de la curvatura del espacio tiempo en relatividad general, es necesario introducir el concepto de curvatura de una variedad, ya que nos enfocaremos en las propiedades de la geometría, al igual que tener una manera de cuantificar la curvatura de una variedad en un punto P dado.

Se dice que una variedad es plana si el elemento de línea es

$$ds^2 = \epsilon_1 dx^1{}^2 + \epsilon_2 dx^2{}^2 + \dots + \epsilon_N dx^N{}^2 \quad (3.10)$$

para cualquier sistema de coordenadas  $x^\mu$ , donde  $\epsilon_a = \pm 1$ .

Si existe  $x^a$ , tal que describa la variedad, entonces el elemento de línea será ahora

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b \quad (3.11)$$

Es decir, si podemos expresar el elemento de línea en una región del espacio-tiempo

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

con la forma de Minkowski de la relatividad especial, esto implicará que no hay campo gravitacional en la misma.

Necesitamos saber entonces si la geometría es plana o curvada en una región, partiendo directamente de la métrica  $g_{ab}$ , para no tener que lidiar con la elección correcta de coordenadas. Esto nos conducirá a las ecuaciones de campo.

### 3.1.1 Tensor de curvatura de Riemann

Si partimos de la diferenciación covariante, daremos respuesta a nuestra interrogante de cómo medir la curvatura de una variedad. Podemos decir que la derivada covariante resulta de generalizar la derivación parcial de un vector, considerando que en la derivada covariante importa el orden en el que ésta actúa [2]. Al aplicarla a un campo escalar operará del mismo modo en que la derivada parcial lo hace, por lo que consideraremos el caso de un campo vectorial arbitrario definido en una variedad de componentes covariantes  $V_a$ , cuya derivada covariante está dada por:

$$\lambda_{a;b} = \partial_b \lambda_a + \Gamma_{ab}^d \lambda_d \quad (3.12)$$



Como la derivada es un tensor de rango 2, al aplicarla de nuevo resulta

$$(\lambda_{a;b})_{;c} = \lambda_{a;bc} = \partial_c \lambda_{a;b} + i_{ac}^e \lambda_{e;b} + i_{bc}^e \lambda_{a;e} \quad (3.13)$$

donde tenemos

$$\lambda_{a;b} = \partial_b \lambda_a + i_{ab}^d \lambda_d \quad (3.14a)$$

$$\lambda_{e;b} = \partial_b \lambda_e + i_{eb}^d \lambda_d \quad (3.14b)$$

$$\lambda_{a;e} = \partial_e \lambda_a + i_{ae}^d \lambda_d \quad (3.14c)$$

sustituimos las ecuaciones 3.14a, 3.14b y 3.14c en la ecuación 3.13 y nos queda

$$\lambda_{a;bc} = \partial_c \partial_b \lambda_a + i_{\partial_c}^d \lambda_d + i_{ab}^d \partial_c \lambda_d + i_{ac}^e \partial_b \lambda_e + i_{ac}^e i_{eb}^d \lambda_d + i_{bc}^e \partial_e \lambda_a + i_{bc}^e i_{ae}^d \lambda_d \quad (3.15)$$

Intercambiamos los índices  $b$  y  $c$  para obtener  $\lambda_{a;cb}$ , restándola a la expresión 3.15

$$\lambda_{a;bc} + \lambda_{a;cb} = i_{\partial_c}^d \lambda_d + i_{ac}^e i_{eb}^d \lambda_d + i_{ab}^e i_{ec}^d \lambda_d + \partial_b i_{ac}^d \lambda_d \quad (3.16)$$

la cual se escribe como

$$\lambda_{a;bc} + \lambda_{a;cb} = R_{abc}^d \lambda_d \quad (3.17)$$

donde se define a

$$i_{\partial_c}^d \lambda_d + i_{ac}^e i_{eb}^d \lambda_d + i_{ab}^e i_{ec}^d \lambda_d + \partial_b i_{ac}^d \lambda_d = R_{abc}^d \quad (3.18)$$

este es el tensor de curvatura de Riemann. Podemos probar a través del teorema del cociente que el lado derecho de la ecuación nos muestra las componentes de un tensor de rango 4, y que está definido por el tensor métrico  $g_{ab}$  y sus primeras y segundas derivadas.

Ahora entonces, tendremos que establecer de qué modo el tensor de curvatura está relacionado con la curvatura de la variedad. Al tomar una región plana en la variedad podremos elegir las coordenadas de modo que el elemento de línea tenga la forma de la ecuación 3.10

$$ds^2 = \epsilon_1 dx^1{}^2 + \epsilon_2 dx^2{}^2 + \dots + \epsilon_N dx^N{}^2$$

en toda la región y además  $i_{bc}^a$  y sus derivadas sean cero, es decir

$$R_{ab}^d = 0 \quad (3.19)$$

en cualesquier punto de la región y bajo cualquier elección de coordenadas.

### 3.1.1.1 Propiedades del tensor de curvatura de Riemann

El tensor de curvatura posee un cierto número de simetrías y satisface algunas identidades importantes. Las simetrías del tensor se pueden derivar más fácilmente en términos de sus componentes covariantes. Podemos usar las componentes del tensor métrico para bajar un índice y por tanto obtener

$$R_{abcd} = g_{ae} R_{bcd}^e \quad (3.20)$$

que es el tensor de Riemann de primera clase. En un sistema arbitrario de coordenadas, la forma explícita de las componentes del tensor son

$$R_{abcd} = \frac{1}{2} (\partial_d \partial_a g_{bc} - \partial_d \partial_b g_{ac} + \partial_c \partial_b g_{ad} - \partial_c \partial_a g_{bd}) + g^{ef} (\Gamma_{eac} \Gamma_{fbd} - \Gamma_{ead} \Gamma_{fbc}) \quad (3.21)$$

cuyas propiedades de antisimetría son :

$$\begin{aligned} R_{abcd} &= -R_{bacd} \\ R_{abcd} &= -R_{abdc} \\ R_{abcd} &= R_{cdab} \end{aligned} \quad (3.22)$$

y de aquí se puede escribir la siguiente propiedad del tensor de curvatura de Riemann:  
Propiedad cíclica

$$R_{abcd} + R_{adb c} + R_{acdb} = 0 \quad (3.23)$$

o

$$R_{bcd}^a + R_{dbc}^a + R_{cdb}^a = 0 \quad (3.24)$$

Todos estos resultados se deducen en un sistema de coordenadas especial. Sin embargo, se trata de unas relaciones tensoriales, por tanto, si son válidas en un sistema de coordenadas, entonces lo son para cualquier otro sistema que se obtenga usando una matriz jacobiana..

El tensor de curvatura satisface también una identidad diferencial, conocida como la identidad de Bianchi

$$R_{bcd;e}^a + R_{bde;c}^a + R_{bec;d}^a = 0 \quad (3.25)$$

### 3.1.2 Tensor de Ricci, curvatura escalar y el tensor de Einstein

Se obtiene el tensor de Ricci, que es un tensor no nulo de rango 2, mediante una contracción en el primer y último índice del tensor de curvatura

$$R_{ab} = R_{abc}^c \quad (3.26)$$

A partir del tensor de Ricci se puede construir el siguiente tensor

$$R_a^c = g^{cd} R_{ad} \quad (3.27)$$

la contracción del tensor de Ricci con el tensor métrico nos da una cantidad escalar definida en cada punto de la variedad y que llamamos curvatura escalar

$$R = g^{ad} R_{ad} = R_a^a \quad (3.28)$$

Las derivadas covariantes del tensor de Ricci y de la curvatura escalar, obedecen una relación muy importante, clave para el desarrollo de las ecuaciones de la relatividad general.

Subiendo el índice  $a$  en la identidad de Bianchi y contrayéndolo con  $d$  obtenemos

$$R_{bc;e} + R_{bae;c}^a + R_{bec;a}^a = 0 \quad (3.29)$$

Usando las propiedades de simetría en el segundo término nos da que

$$R_{bc;e} + R_{be;c} + R_{bec;a}^a = 0 \quad (3.30)$$

Si subimos ahora el índice  $b$  y contraemos con  $e$  encontramos que

$$R_{c;b}^b + R_{;c} + R_{bc;a}^{ab} = 0 \quad (3.31)$$

Usando las propiedades de antisimetría podemos escribir el tercer término como

$$R_{bc;a}^{ab} = R_{cb;a}^{ba} = R_{c;a}^a = R_{c;b}^b \quad (3.32)$$

Obtenemos entonces

$$R_{c;b}^b + R_{;c} + R_{c;b}^b = 2R_{c;b}^b + R_{;c} = 0 \quad (3.33)$$

Considerando a  $\delta_c^b$  como un tensor que tiene derivada covariante cero, podemos escribir a

$$R_{;c} = R_{;b} \delta_c^b + 0 \quad (3.34)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \mu \quad 2R_{c;b}^b \mid R_{;c} &= 2R_{c;b}^b \mid R_{;b} \delta_c^b = 0 \\ R_c^b \mid \frac{1}{2} \delta_c^b R_{;b} &= 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

tomando que  $\delta_c^b = g^{b\sigma} g_{\sigma c}$ , tenemos

$$\mu \quad R_c^b \mid \frac{1}{2} g^{b\sigma} g_{\sigma c} R_{;b} = 0 \quad (3.36)$$

multiplicando por  $g^{c\rho}$

$$\begin{aligned} \mu \quad g^{c\rho} R_c^b \mid \frac{1}{2} g^{b\sigma} g_{\sigma c} R_{;b} &= 0 \\ \mu \quad g^{c\rho} R_\rho^b \mid \frac{1}{2} g^{b\sigma} g_{\sigma\rho} g^{c\rho} R_{;b} &= 0 \\ \mu \quad R^{cb} \mid \frac{1}{2} g^{b\sigma} \delta_\sigma^c R_{;b} &= 0 \\ \mu \quad R^{cb} \mid \frac{1}{2} g^{bc} R_{;b} &= 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

donde tenemos que el término entre paréntesis es el llamado tensor de Einstein

$$G^{ab} = R^{cb} \mid \frac{1}{2} g^{bc} R \quad (3.38)$$

de modo que la expresión anterior es

$$G_{;b}^{ab} = 0 \quad (3.39)$$

por lo tanto el tensor de Einstein tiene divergencia cero.

Es importante mencionar que es el único tensor de segundo rango, simétrico, cuyas componentes tienen segundas derivadas covariantes, que cumple con tener divergencia cero. Esta es una propiedad indispensable porque se espera igualar  $G^{ab}$  con un tensor de energía momento que contempla divergencia cero como consecuencia de la ley de conservación correspondiente.

### 3.1.3 El tensor momento-energía

Queremos construir las ecuaciones del campo gravitatorio, para ello, debemos encontrar primero una forma de expresar el tensor de energía-momento. El concepto

covariante significa que todas las leyes físicas deben tomar la misma forma en todos los sistemas de referencia. Debemos encontrar pues un tensor que describa la distribución de materia en cada punto del espacio-tiempo.

Consideremos una distribución que dependa del tiempo y cuyas partículas no interactúen entre ellas, cada una con masa en reposo  $m_0$ . En un punto  $P$  del espacio-tiempo podemos caracterizar la distribución completamente dando la densidad de materia  $\rho$  y el trivector velocidad  $\vec{u}$  medidos en algún sistema inercial. Por simplicidad, consideremos un elemento de fluido en su sistema en reposo instantáneo  $S$  en  $P$ , en el cual  $\vec{u} = \vec{0}$ . En este marco de referencia, la densidad propia está dada por  $\rho_0 = m_0 n_0$ , donde  $m_0$  es la masa de cada partícula y  $n_0$  es el número de partículas en una unidad de volumen.

Consideremos ahora otro sistema de referencia  $S^0$  moviéndose con una velocidad relativa  $v$  respecto de  $S$ . En este sistema de referencia, el volumen sufre una contracción de Lorentz en la dirección del movimiento. Por tanto, el número de partículas por unidad de volumen será ahora  $n^0 = \gamma n_0$ . Además, la masa de cada partícula en  $S^0$  será  $m^0 = \gamma m_0$ . Así pues, la densidad de materia en  $S^0$  será

$$\rho^0 = \gamma^2 \rho_0 \quad (3.40)$$

De esto concluimos que la densidad de materia no es un escalar aislado, sino que se transforma como la componente 00 de un tensor de rango 2. Esto sugiere que el término de energía y momento en las ecuaciones del campo gravitatorio es un tensor de rango 2. La experiencia obtenida en el estudio de fluidos indica que es posible realizar una formulación relativista del mismo usando tensores de tensiones, de esfuerzos y de energía-momento, que son de rango dos. En cualquier punto del espacio podemos construir un tensor  $T$  de rango 2 a partir del producto tensorial de los cuadvectores velocidad, y que es coherente con nuestra exigencia de transformación de  $\rho_0$

$$T(x) = \rho_0(x) u(x) \otimes u(x) \quad (3.41)$$

donde  $\rho_0(x)$  es la densidad propia del fluido, es decir, la que es medida por un observador comóvil con el flujo local y  $u(x)$  es su cuadvector velocidad. El tensor

$T(x)$  es el llamado tensor de momento-energía de la distribución de materia.

En un sistema arbitrario de coordenadas  $x^\mu$  en el cual el cuadvectores velocidad del elemento de fluido es  $u^\mu$ , las componentes contravariantes de  $T(x) = \rho(x) u(x) \otimes u(x)$  son

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu \quad (3.42)$$

Para dar un significado físico a las componentes del tensor momento-energía, consideremos un sistema de coordenadas cartesianas localmente inercial en  $P$  en el cual las componentes del cuadvectores velocidad del elemento de fluido son  $[u^\mu] = \gamma(c, \vec{u})$ . En este sistema de referencia, escribimos las componentes del tensor como

$$\begin{aligned} T^{00} &= \rho u^0 u^0 = \gamma^2 \rho c^2 \\ T^{0i} &= T^{i0} = \rho u^0 u^i = \gamma^2 c \rho u^i \\ T^{ij} &= \rho u^i u^j = \gamma^2 \rho u^i u^j \end{aligned} \quad (3.43)$$

El significado físico de cada componente de 3.43 es el siguiente:

- <sup>2</sup>  $T^{00}$  es la densidad de energía de la partícula
- <sup>2</sup>  $T^{0i}$  es el flujo de energía  $\text{E}c^{i-1}$  en la dirección  $i$
- <sup>2</sup>  $T^{i0}$  es el flujo de energía  $\text{E}c$  en la dirección  $i$
- <sup>2</sup>  $T^{ij}$  es el ritmo del flujo de la componente  $i$  de la fuerza por unidad de área ejercida sobre una superficie cuya normal está en la dirección  $j$ .

### 3.1.3.1 El tensor momento-energía de un fluido perfecto

Para generalizar nuestra discusión a fluidos reales, debemos tener en cuenta lo siguiente:

- <sup>2</sup> Además del movimiento del fluido, cada partícula posee una velocidad aleatoria (térmica).
- <sup>2</sup> Pueden existir fuerzas de interacción entre las partículas que contribuyan a la energía potencial total del sistema.

El significado físico de las componentes del tensor momento-energía  $T$ , nos da una idea de cómo generalizar su forma para incluir las propiedades de los fluidos reales.

Consideremos  $T$  en algún punto  $P$  y trabajemos en un sistema de coordenadas carte-

siano localmente inercial  $S$  que es el sistema en reposo instantáneo del elemento de fluido en  $P$ . La única componente no nula es  $T^{00}$ . Vamos ahora a considerar las componentes de  $T$  en el sistema  $S$  del fluido real.

- 2  $T^{00}$ : es la densidad de energía total, incluyendo cualquier energía potencial debida a las fuerzas entre las partículas y a la energía cinética derivada de su movimiento térmico.
- 2  $T^{0i}$ : aunque no hay movimiento del volumen total del fluido, la energía puede ser transmitida por conducción de calor, así pues, este es básicamente un término de conducción en  $S$ .
- 2  $T^{i0}$ : de nuevo, aunque las partículas no sufren un movimiento global, si el calor es transmitido entonces la energía conllevará un transporte de momento..
- 2  $T^{ij}$ : el movimiento de las partículas dará un aumento del flujo de momento. Existen esfuerzos cortantes, tales que hay una tensión en la dirección  $i$  y  $T^{ij}$  ( $i = j$ ) son los esfuerzos viscosos en el fluido.

Todas estas identificaciones son válidas para un fluido en general. Un fluido perfecto es aquél donde las partículas no interactúan entre ellas y donde no hay conducción del calor o viscosidad en  $S$ . La viscosidad es una fuerza paralela a la interacción entre las partículas. Su ausencia significa que las fuerzas deben ser siempre perpendicular a la misma, es decir que  $T^{ij}$  debe ser cero a menos que  $i = j$ , esto significa que  $T^{ij}$  debe ser una matriz diagonal y siempre es un múltiplo de la matriz identidad. Por lo tanto, una superficie en  $x$  tendrá a través de ella sólo una fuerza en la dirección  $x$ , y de manera similar para  $y$  y  $z$ ; estas fuerzas por unidad de área son todas iguales, y se llama la presión,  $p$ . Así, en  $S$ , para un fluido perfecto (es válido el principio de Pascal) las componentes del tensor  $T$  son [6]

$$[T^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

En general, podremos escribir las componentes del tensor como

$$T^{\mu\nu} = \rho + \frac{p}{c^2} u^\mu u^\nu - p \eta^{\mu\nu} \quad (3.45)$$

válida para cualquier sistema cartesiano localmente inercial en  $P$ . Sin embargo, podemos obtener una expresión válida en un sistema de coordenadas arbitrario simplemente

reemplazando  $\eta^{\mu\nu}$  por las funciones de la métrica  $g^{\mu\nu}$ . Así, llegamos a una expresión completamente covariante para las componentes del tensor momento-energía de un fluido perfecto:

$$T^{\mu\nu} = \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} \quad (3.46)$$

Observamos que  $T^{\mu\nu}$  es simétrico y está compuesto por dos campos escalares,  $p$  y  $\rho$ , y un campo vectorial  $u$  que caracterizan el fluido. Cuando  $p \neq 0$ , el fluido perfecto se convierte en una distribución que depende del tiempo y cuyas partículas no interaccionan entre ellas.

Fijémonos en que es posible dar expresiones mucho más complicadas para representar el tensor para fluidos no perfectos, para fluidos cargados o incluso fluidos electromagnéticos.

Todos estos tensores son simétricos.

### 3.1.4 Ecuación de continuidad

Se puede deducir[6] que la conservación del momento y la energía en un sistema arbitrario de coordenadas está dada por la ecuación

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

En la demostración de la expresión no se hace referencia explícita a si el espacio-tiempo es de Minkowski o curvo. Aunque la ecuación anterior es válida en ambos casos y para cualquier sistema coordenado, la interpretación de la ecuación difiere de uno a otro caso. Si nos olvidamos de la gravedad y asumimos que el espacio-tiempo es de Minkowski, la relación  $(\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0)$  representa la conservación de la energía y el momento. En presencia de un campo gravitatorio, sin embargo, la energía y el momento de la materia no se conservan por sí solos. En este caso, la relación anterior representa una ecuación de movimiento de la materia bajo la influencia de un campo gravitatorio.



### 3.1.5 Ecuaciones de Einstein

Las ecuaciones de Einstein son las ecuaciones fundamentales de la descripción relativista de la gravitación, que forman parte de la teoría de la relatividad general. Dentro de esa teoría el campo gravitatorio es el efecto de la existencia de una curvatura en el espacio-tiempo. Estas ecuaciones relacionan la presencia de materia con la curvatura del espacio-tiempo. Cuanto mayor sea la concentración de materia, representada por el tensor de energía-impulso, tanto mayores serán las componentes del tensor de curvatura de Ricci.

Estos tensores ya los hemos expresado anteriormente. Las ecuaciones de Einstein se escriben de la siguiente manera

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 4\pi GT_{\mu\nu} \quad (3.47)$$

tenemos que la ecuación de Poisson se expresa como

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho$$

que es la ecuación de campo de la teoría Newtoniana. Podemos ver que si tomamos la ecuación de campo de Einstein en el límite clásico se recupera la ecuación de Poisson, donde estas cantidades están contenidas en el tensor de energía-momento.

Ambos extremos de la ecuación general de Einstein son covariantes bajo transformaciones de sistemas de referencia, puesto que éstos ya no tienen que ser inerciales, dichas transformaciones no tienen que cumplir con ser transformaciones ortogonales.

#### 3.1.5.1 Ecuaciones de Einstein en el vacío y la gravitación newtoniana

En general,  $T_{\mu\nu}$  contiene todas las formas en las que se manifiesta la energía y el momento. Una región del espacio-tiempo en la cual  $T_{\mu\nu} = 0$  se llama vacío y por tanto carece de materia o radiación. Las ecuaciones del campo para este caso son:

Multiplicando por  $g^{\alpha\mu}$  a la ecuación 3.47 y desarrollando obtenemos

$$g^{\alpha\mu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0$$

$$\begin{aligned}
R_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{2} R g^{\alpha\mu} g_{\mu\nu} &= 0 \\
R_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{2} R \delta_{\nu}^{\alpha} &= 0 \\
R - 2R &= 0
\end{aligned}$$

por tanto

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (3.48)$$

Estas son 10 ecuaciones con 10 incógnitas  $g_{\mu\nu}$ . Esto no implica que  $R_{\mu\nu\sigma}^{\rho} = 0$ , pues el tensor de curvatura posee 20 componentes independientes mientras que el tensor de Ricci posee 10. Por tanto, es posible satisfacer las ecuaciones del campo en el espacio vacío con un tensor de curvatura de componentes no nulas. Un tensor de curvatura no nulo representa un campo gravitatorio que no desaparece, por lo que concluimos que pueden existir campos gravitatorios en el espacio vacío.

Vamos a estudiar ahora el límite de campo débil para las ecuaciones de Einstein, considerando sólo las componentes  $00$ . Podemos escribir

$$R_{00} = k T_{00} - \frac{1}{2} T g_{00} \quad (3.49)$$

Enseguida demostraremos que la gravitación newtoniana es un caso límite de la teoría de Einstein. Suponemos que el espacio está débilmente curvado y por tanto, existe un sistema de coordenadas en el cual  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ , con  $h_{\mu\nu} \ll 1$ . En este caso  $g_{00} \approx 1$ . De la definición del tensor de Ricci encontramos que  $R_{00}$  viene dado por

$$R_{00} = \partial_0 \Gamma_{0\mu}^{\mu} - \partial_{\mu} \Gamma_{00}^{\mu} + \Gamma_{0\mu}^{\nu} \Gamma_{\nu 0}^{\mu} - \Gamma_{00}^{\nu} \Gamma_{\nu\mu}^{\mu} \quad (3.50)$$

En nuestro sistema de coordenadas  $\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu}$  son pequeños, así que podemos despreciar los dos últimos términos de la ecuación anterior. Además, puesto que la métrica es estacionaria tenemos que

$$R_{00} = \partial_i \Gamma_{00}^i \quad (3.51)$$

se puede deducir que  $\Gamma_{00}^i \approx \frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_j h_{00}$  hasta primer orden en  $h_{\mu\nu}$  y por tanto

$$R_{00} \approx \frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_j \partial_i h_{00} \quad (3.52)$$

Sustituyendo en nuestra ecuación de campo obtenemos que

$$\frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_j \partial_i h_{00} = \frac{1}{2} T_{00} \quad (3.53)$$

Si asumimos que la distribución de materia es tal que  $p/c^2 \ll \rho$ , el tensor momento-energía [2] es de la forma

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu \quad (3.54)$$

de lo que obtenemos que  $T = \rho c^2$ . Consideremos además que la partícula del fluido tiene velocidad pequeña comparada con la de la luz. Podemos hacer la aproximación  $\gamma \approx 1$  y por consiguiente  $u_0 \approx c$ . Con todo esto, la ecuación nos queda de la forma

$$\frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_i \partial_j h_{00} = \frac{1}{2} k \rho c^2 \quad (3.55)$$

Podemos escribir  $\delta^{ij} \partial_i \partial_j = \nabla^2$ . De la expresión  $g_{00} = -1 + \frac{2\phi}{c^2}$  [2] tenemos que  $h_{00} = \frac{2\phi}{c^2}$  y finalmente obtenemos que

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$$

que es la ecuación de Poisson en la gravitación newtoniana.

## 3.2 Algunas métricas propuestas para la solución de las ecuaciones de Einstein

Aunque ya introdujimos este concepto al mencionar la métrica de Minkowski en el primer capítulo, es conveniente dejarlo bien asentado para comprender las transformaciones de coordenadas para la visualización de los universos, ya que, como veremos a continuación, siempre se retoma esta métrica ya que aquí radica el concepto de generalidad de la teoría de Einstein.

Abordaremos esta definición mediante argumentos geométricos, como la distancia entre dos puntos en un espacio vectorial, como lo es el teorema de Pitágoras. En  $R^2$  se cumple que

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (3.56)$$

Generalizando a  $R^n$

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2 \quad (3.57)$$

Usando la convención de índices repetidos podemos expresarla como

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.58)$$

Donde  $g_{ij}$  es el tensor métrico y lo escribiremos de la siguiente manera

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

Para el espacio de Minkowski la métrica es

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \quad (3.60)$$

Y su tensor métrico está dado por

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

Es fácil demostrar que en coordenadas esféricas este tensor está dado por

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

Con elemento de línea

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (3.63)$$

Explicaremos cómo se obtiene la métrica de Schwarzschild, pero en general, no profundizaremos en la obtención de las métricas propuestas como solución a las ecuaciones de campo, debemos hacer mención de ellas con el propósito de comparar y entender mejor la métrica de Gödel, que es ahora nuestro objetivo.

### 3.2.1 Métrica de Schwarzschild

Alrededor de 1915, Karl Schwarzschild, para dar solución a las ecuaciones de campo de Einstein, propuso las siguientes condiciones:

El campo es estático, esféricamente simétrico, está vacío y además, en este espacio si

$r$  tiende a infinito, recuperamos el espacio tiempo de Minkowski.

Al tener simetría esférica Schwarzschild propone

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

Si el espacio está vacío,  $A(r)$  y  $B(r)$  son funciones determinadas a partir de  $R_{\mu\nu} = 0$ , que es la ecuación de Einstein en el vacío. Usamos la forma del elemento de línea

$$dS^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

para tener

$$dS^2 = A(r) c^2 dt^2 - B(r) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.65)$$

Como  $\lim_{r \rightarrow \infty} g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , al compararla con la métrica de Minkowski resulta

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} A(r) &= 1 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) &= 1 \end{aligned} \quad (3.66)$$

Entonces para obtener la métrica de Schwarzschild se deben encontrar las funciones calculando

$$R_{00} = R_{11} = R_{22} = R_{33} = 0 \quad (3.67)$$

usando

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma \quad (3.68)$$

donde

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\nu\mu}) \quad (3.69)$$

con

$$g_{00} = A(r), \quad g_{11} = -B(r), \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta \quad \text{y} \quad g^{\mu\nu} = \frac{1}{g_{\mu\nu}} \quad (3.70)$$

Calculando los coeficientes de conexión se obtiene

$$i_{10}^0 = \frac{1}{2} \frac{A^0}{A} \quad (3.71a)$$

$$i_{00}^1 = \frac{1}{2} \frac{A^0}{B}, \quad i_{11}^1 = \frac{B^0}{2B}, \quad i_{22}^1 = i \frac{r}{B}, \quad i_{33}^1 = i \frac{r \operatorname{sen}^2 \theta}{B} \quad (3.71b)$$

$$i_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad i_{33}^2 = i \operatorname{sen} \theta \cos \theta \quad (3.71c)$$

$$i_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad i_{23}^3 = \cot \theta \quad (3.71d)$$

Sustituyendo los valores de (3.70) en las ecuaciones 3.68

$$\begin{aligned} R_{00} &= 0 \\ R_{11} &= 0 \\ R_{22} &= 0 \\ R_{33} &= 0 \end{aligned} \quad (3.72)$$

Y resolviendo el sistema de  $R_{00} = 0$  con  $R_{11} = 0$

$$\begin{aligned} i A^{00} + \frac{(A^0)^2}{2A} + \frac{A^0 B^0}{2B} + i \frac{2A^0}{r} &= 0 \\ A^{00} + i \frac{(A^0)^2}{2A} + i \frac{A^0 B^0}{2B} + i \frac{2AB^0}{rB} &= 0 \end{aligned}$$

simplificando

$$i \frac{2A^0}{r} + i \frac{2AB^0}{rB} = 0 \quad (3.73)$$

Multiplicando por  $i \frac{rB}{2}$  para tener

$$A^0 B + AB^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r} (AB) = 0 \quad (3.74)$$

Lo que nos dice que el producto  $AB$  deberá ser constante, y por la condición de frontera definida en la ecuación 3.66, esta constante será igual a 1, por lo que

$$B = \frac{1}{A}$$

Ahora, sustituyendo este valor en la forma para  $R_{22} = 0$ , que es

$$\begin{aligned} \frac{1}{B} + i \frac{rB^0}{2B^2} + \frac{rA^0}{2AB} &= 1 \\ rA^0 + A &= 1 \\ \frac{\partial (rA)}{\partial r} &= 1 \end{aligned} \quad (3.75)$$

integrando tendremos

$$rA = r + k \quad (3.76)$$

con  $k$  constante de integración. Entonces tendremos

$$A(r) = 1 + \frac{k}{r} \quad (3.77)$$

$$B(r) = \frac{1}{1 + \frac{k}{r}} \quad (3.78)$$

La aproximación de campo débil es

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{00} \quad (3.79)$$

que comparando con el elemento de línea se debe cumplir que

$$g_{00} = 1 + \frac{2}{c^2} \phi(r) \quad (3.80)$$

de modo que

$$h_{00} = \frac{2\phi}{c^2} \quad (3.81)$$

lo que implica que

$$k = - \frac{2GM}{c^2} \quad (3.82)$$

con  $M$  masa esférica.

Sustituyendo en la métrica propuesta inicialmente, ecuación 3.64, tendremos el tensor métrico de Schwarzschild

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2GM}{rc^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{2GM}{rc^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (3.83)$$

O escrita de otra forma

$$dS^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{rc^2}\right) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.84)$$

La métrica de Schwarzschild es la solución matemática exacta a las ecuaciones de campo de Einstein en torno a un objeto muy masivo, eléctricamente neutro, y sin momento angular. Se puede demostrar [1] que cualquier cuerpo esféricamente simétrico que cumpla con la relación

$$\frac{R}{M} < 2 \quad \text{con } R \text{ el radio y } M \text{ su masa}$$

curva tanto al espacio-tiempo que ninguna partícula que atraviese la superficie ubicada

en  $r = 2M$  puede escapar de su atracción gravitatoria, independientemente de si tiene masa en reposo o no. Dicha superficie se denomina horizonte de eventos, y es una característica fundamental de cualquier agujero negro, sin carga eléctrica ni rotación, pues éstas actúan como una membrana permeable en una sola dirección, impidiendo así la "salida" de información desde el mismo.

### 3.2.2 Métrica de Kerr

El matemático Roy Patrick Kerr realizó en 1963 otra propuesta para la solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein dependiente de dos parámetros, la masa  $m$  y el momento angular específico  $a = S/m$  donde  $S$  es el spin de un agujero negro. Ésta consiste, a grandes rasgos, en describir el campo gravitatorio de un astro en rotación. Esta solución, bajo ciertas circunstancias, también contiene un agujero negro de Kerr. R.H. Boyer y R.W. Lindquist estudiaron el espacio-tiempo completo descrito por la métrica de Kerr y expresaron esta métrica en unas coordenadas adecuadas a una interpretación intuitiva del campo gravitatorio. Estas coordenadas, de Boyer y Lindquist (BL), son unas coordenadas esferoidales adaptadas al espacio curvo y su relación con las coordenadas cartesianas se deduce de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1 \quad (3.85)$$

$$\theta = \arccos \frac{z}{r} \quad (3.86)$$

$$\phi = \arctan \frac{y}{x} + \arctan \frac{a}{r} + \frac{Z}{\Phi} \quad (3.87)$$

$$\Phi = r^2 + 2mr + a^2 \quad (3.88)$$

Donde podemos ver que para  $a = 0$  estas coordenadas se reducen a coordenadas esféricas, es decir si  $r = \text{cte}$  las superficies son elipsoides de revolución.



La expresión de la métrica de Kerr en coordenadas BL es

$$dS^2 = \frac{2mr}{\mathfrak{S}} dt^2 + \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{C}} dr^2 + \mathfrak{S} d\theta^2 + \left( r^2 + a^2 \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{S}} \sin^2 \theta + \frac{2mra^2 \sin^4 \theta}{\mathfrak{S}} \right) d\phi^2 + \frac{4ar \sin^2 \theta}{\mathfrak{S}} dt d\phi \quad (3.89)$$

donde

$$\mathfrak{S} = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (3.90)$$

De este elemento de línea se puede deducir que se describe un campo gravitatorio estacionario y con simetría axial, ya que en la métrica de Kerr no aparecen explícitamente las coordenadas  $t$  y  $\phi$ .

También observamos que si  $r \gg 1$  la métrica se aproxima a la del espacio tiempo plano en coordenadas esféricas y toma la forma

$$dS^2 \gg \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{4Mas \sin^2 \theta}{r} dt d\phi + \left( 1 + \frac{2a^2 M \sin^2 \theta}{r^3} \right) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.91)$$

Comparando esta expresión con la que se obtiene en la aproximación de campo débil de un objeto que rota, se concluye la interpretación física de los parámetros  $M$ : la masa geométrica y  $a$ : la velocidad angular de rotación.

En el caso de los extremos,  $a^2 \leq M^2$ , la solución de Kerr representa lo que conocemos como un agujero negro rotante y en el caso súper extremo  $a^2 > M^2$ , una singularidad desnuda.

Puede verse que cuando se estudia el límite  $a \rightarrow 0$  se recupera la métrica de Schwarzschild.

Además, dejando  $a$  fijo, si se estudia el límite  $M \rightarrow 0$  se recupera el espacio-tiempo de Minkowski, pero en coordenadas elipsoidales.

Esta métrica, al igual que las que describen otro tipo de agujeros negros, tiene singularidades de dos clases:

- <sup>2</sup> Singularidades de coordenadas, que son originadas por un problema en la elección de coordenadas y se puede solucionar seleccionando otras.
- <sup>2</sup> Singularidades en las soluciones de la ecuación  $\mathfrak{C} = 0$ , con  $r = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$

<sup>2</sup> Singularidad de curvatura. Está ubicada en la solución de la ecuación  $\mathcal{S} = 0$ ,  $r = 0$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

La solución de Kerr representa la única solución de vacío que da la Teoría General de la Relatividad para describir a un agujero negro rotante estacionario y sin carga eléctrica. Esta solución es un caso particular de una solución a las ecuaciones de Einstein-Maxwell: la llamada métrica de Kerr-Newman que describe a un agujero negro rotante y con carga eléctrica.

Métrica de Kerr se presenta como la más importante solución exacta de todas las ecuaciones de la física. Subrahmanyan Chandrasekhar, Premio Nobel de Física en 1983, la describe:

“Durante toda mi vida como científ...co, a lo largo de 45 años, mi más intensa experiencia fue comprobar que la solución exacta a las ecuaciones de la relatividad general de Einstein, descubierta por el matemático neozelandés Roy Kerr, proporciona una representación absolutamente exacta de la cantidad innumerable de agujeros negros que pueblan el universo. Este estremecimiento experimentado ante la belleza, este hecho increíble por el cual un descubrimiento, resultado de una investigación, después, con belleza matemática encuentra su reflejo exacto en la naturaleza, me persuade para afirmar que la belleza de la mente humana es tal, que responde con la mayor profundidad a lo más profundo.”

### 3.2.3 Métrica de Friedmann

Después de que el astrónomo holandés Willem de Sitter, en 1916, fuera el primero en proponerle a Einstein soluciones en las cuales ocurre una expansión del espacio-tiempo, Einstein se opuso al modelo, argumentando que el universo debería ser estático, y, que la métrica debería estar determinada por la masa contenida en él. Es aquí donde Einstein plantea la existencia de la llamada constante cosmológica.

Continuando este campo de investigación, alrededor de 1922, el matemático soviético Alexander Friedmann, da a conocer su trabajo.

Imaginemos el problema de un avión en movimiento y la in...nidad de sistemas de referencia que podríamos plantear. Si llamamos sistema de referencia propio al que está ...jo en las paredes del avión, y sistema de referencia inercial al de Tierra, cuando la nave está acelerada usamos velocidades instantáneas, formando así un conjunto de sistemas, uno para cada instante, a los cuales llamamos sistemas de referencia en comovimiento.

Ahora se considera al espacio uniformemente lleno de materia, isotrópico y homogéneo. Aquí es donde elegimos una coordenada tiempo universal, tal que en cualquier instante, la métrica sea la misma en todos sus puntos y en todas sus direcciones. [4] Es decir si un observador se postra en cualquier punto arbitrario de este universo, verá exactamente lo mismo en cualquier dirección. Serán entonces un conjunto de sistemas de referencia en comovimiento.

Considerando lo anterior, y para una hiperesfera (esfera conocida inmersa en un espacio euclidiano de 4 dimensiones), la métrica será:

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 + kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2 \quad (3.92)$$

Donde k es un factor que nos dice los casos de curvatura:

$k = -1$  Universo cerrado (curvatura negativa)

$k = 0$  Espacios llanos tridimensionales (hipersuper...cie sin curvatura)

$k = 1$  Universo abierto (curvatura positiva)

Si convirtiéramos la métrica de Minkowski en una métrica de un espacio curvado que se expande, entonces podríamos introducir en la parte espacial la métrica de una hipersuper...cie como la hiperesfera que describimos; además, para lograr el efecto de expansión, el radio de la hiperesfera dependerá del tiempo. Al realizar esto obten...dríamos:

$$dS^2 = c^2 dt^2 + R(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 + kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (3.93)$$

Esta es la métrica de Friedmann-Robertson-Walker, de donde podemos encontrar el

tensor métrico que será:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2(t)}{1 - kr^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^2(t)r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^2(t)r^2 \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

### 3.2.4 Métrica de Gödel

La solución que propuso Kurt Gödel hacia 1950 de las ecuaciones de campo de Einstein presenta una alta simetría que hace más digeribles los calculos, al igual que la solución de la ecuación geodésica.

Existe una muy clara descripción del universo de Gödel mediante coordenadas cilíndricas  $x = (t, r, \phi, z)$ , descrita de la siguiente forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 + \frac{1}{1 + \frac{r^2}{2a^2}} dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2 + r^2 \frac{2c}{2a} dt d\phi \quad (3.95)$$

donde  $r = 2a$ , es el radio de Gödel

El radio de Gödel nos indica que si situamos a un observador en el origen del sistema coordinado su campo de visión estará restringido a este radio. Tomaremos unidades geométricas  $c = G = 1$ . Este será el centro de nuestro estudio.

El tensor métrico estará dado como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} c^2 & 0 & r^2 \frac{c}{2a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 + \left(\frac{r^2}{2a^2}\right)^2} & 0 & 0 & 0 \\ r^2 \frac{c}{2a} & 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.96)$$

Esta métrica da una solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein y describe un universo homogéneo pero no isotrópico, es decir sus propiedades dependerán de la dirección y el punto desde donde sean examinadas. También contempla la posibilidad del viaje en el tiempo.

Trataremos de aclarar estas afirmaciones durante el resto de este trabajo, y a su vez discutiremos las consecuencias que conllevan, describiendo a este universo.

## IV. Espacio de Gödel

En este capítulo se centra la esencia de este trabajo de tesis, donde trataremos de hacer una descripción general del espacio de Gödel.

Comenzaremos recordando cómo Yuri N. Obukhov cita a E. T. Whittaker para afirmar y preguntar "La rotación es un fenómeno universal, la Tierra y todos los otros miembros del sistema solar giran sobre sus ejes, los satélites giran alrededor de los planetas, los planetas giran alrededor del Sol, y el Sol mismo es miembro de la galaxia o sistema de la Vía Láctea que gira de una manera muy notable. ¿Cómo es que existen todos estos movimientos rotatorios? ¿Qué asegura su permanencia o produce sus modificaciones? ¿Y qué papel juegan en el sistema del mundo? "

Trataremos de esclarecer estas interrogantes mediante la descripción de los modelos de universos. Es importante hacer notar que no obtendremos la métrica de Gödel como tal, sino que la estudiaremos, y analizaremos el comportamiento de este universo.

El modelo cosmológico estándar de Friedmann-Lemaître supone una estructura ideal del espacio tiempo. Las métricas de Friedmann-Robertson-Walker describen un universo isotrópico y homogéneo. Aunque estas suposiciones están basadas en hechos observados, resulta dudoso que la geometría del universo y su contenido físico estén íntimamente ligados desde el Big Bang. Resultaría más general proponer modelos que contengan flujos ideales y donde se suponga isotropía y homogeneidad.

En los inicios de la teoría de la relatividad general se trató de construir la solución de las ecuaciones del campo gravitatorio con el universo en rotación. En 1924 Cornelius Lanczos considera al universo como el sistema más grande posible de rotación, y propone un modelo que consistía en un cilindro rígido de polvo con radio infinito que rotaba alrededor del eje del cilindro. Poco después, en 1946, George Gamow, señaló la importancia de la rotación cósmica en las teorías de formación de galaxias y recalcó su necesidad de rotación. Carl Friedrich von Weizsäcker fue precursor al estudiar el

papel de la turbulencia en la formación de la estructura del universo.

Poco después de esto, Kurt Gödel propuso un modelo cosmológico estacionario con rotación en la forma (coordenadas  $t, x, y, z$ ,  $a = \text{constante}$ ):

$$dS^2 = a^2 dt^2 - 2e^x dt dy + \frac{1}{2} e^{2x} dy^2 - dx^2 - dz^2 \quad (4.1)$$

## 4.1 ¿Cómo es este espacio?

En el modelo propuesto por Gödel el universo se describe lleno de polvo con densidad de energía  $\epsilon$ , y constante cosmológica  $-\alpha$ . La velocidad angular  $\omega$  de la rotación de este universo está dada por  $\omega^2 = \frac{1}{2a^2} = 4\pi G\epsilon = \alpha$ , con  $G$  como la constante gravitacional de Newton, que se equilibra con el efecto centrífugo. Es decir Gödel supone que el universo rota y que la fuerza centrífuga se contrarresta con la constante cosmológica introducida.

"Entonces tendremos un universo estático que rota."

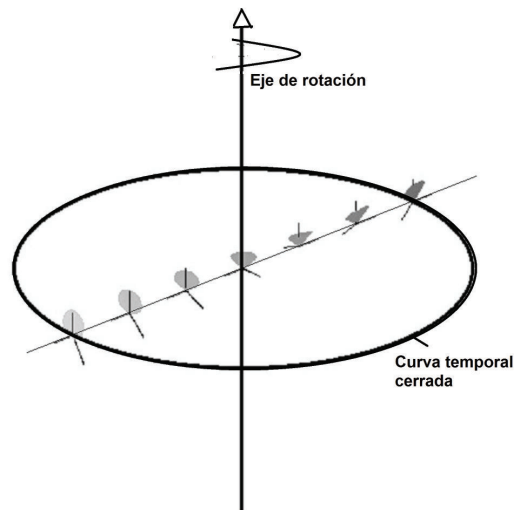


Figura 4.1 Esquema del universo rotante en el espacio de Gödel

Surgió así una corriente de pensamiento que consideran modelos de universo rotantes, se llama cosmología rotacional.

Gödel describe físicamente su propuesta, sin dar soluciones muy explícitas. Después de él, surgieron varios modelos de universos rotantes, tanto exactos como aproximados, con expansión y sin ella, donde surgieron algunas dificultades:

Es imposible combinar rotación pura y expansión en una solución de las ecuaciones de campo de la relatividad general para un fluido ideal. Hay dos maneras de atacar este problema:

- <sup>2</sup> Teniendo una energía-momento más general
- <sup>2</sup> Proponer cizallamiento cósmico

El modelo de Gödel admite curvas temporales cerradas, lo que genera un problema con la causalidad del espacio tiempo. Esto fue reconocido inmediatamente como una propiedad no física, ya que la causalidad del espacio-tiempo no puede ser violada. Este fenómeno será discutido con mayor profundidad en el siguiente capítulo.

La posibilidad de hacer la combinación de la rotación cósmica con la expansión fue el primer paso hacia una cosmología exitosa y más acercada a la realidad.

A pesar del papel paradigmático que ha jugado el modelo estándar de Friedman en la cosmología, la observación astronómica no es lo suficientemente precisa para decir si la métrica describe la evolución del universo. [8]

## 4.2 Trayectorias en el espacio de Gödel en distintas coordenadas

Adentrémonos aún más en el estudio del universo de Gödel, partiendo de la métrica y comprendiendo cómo son las trayectorias.

### 4.2.1 Coordenadas Cartesianas

La métrica está dada como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}e^{2x^1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Para calcular la función de Lagrange utilizamos la expresión

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \quad (4.3)$$

De la métrica  $g_{\mu\nu}$  podemos ver que los términos distintos de cero son:  $g_{00}$ ,  $g_{02}$ ,  $g_{11}$ ,  $g_{20}$ ,  $g_{22}$  y  $g_{33}$ .

Calculamos primero para  $g_{00}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} g_{00} \dot{x}^0 \dot{x}^0 &= \frac{1}{2} g_{00} \dot{x}^0{}^2 \\ &= \frac{1}{2} g_{00} \left( \frac{\partial x^0}{\partial \tau} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde  $g_{00} = 1$  y  $x^0 = ct$ , por lo tanto

$$\frac{1}{2} g_{00} \dot{x}^0 \dot{x}^0 = \frac{1}{2} c^2 \dot{t}^2 \quad (4.5)$$

Calculamos ahora para  $g_{02}$

$$\frac{1}{2} g_{02} \dot{x}^0 \dot{x}^2 = \frac{1}{2} g_{02} \frac{\partial x^0}{\partial \tau} \frac{\partial x^2}{\partial \tau} \quad (4.6)$$

donde  $\frac{\partial x^0}{\partial \tau} = ct$  y  $\frac{\partial x^2}{\partial \tau} = \frac{\partial y}{\partial \tau}$ ,  $g_{02} = e^{x^1}$

$$\frac{1}{2} g_{02} \dot{x}^0 \dot{x}^2 = \frac{1}{2} c e^{x^1} t \frac{\partial y}{\partial \tau} \quad (4.7)$$

Para  $g_{11}$

$$\frac{1}{2} g_{11} \dot{x}^1 \dot{x}^1 = \frac{1}{2} g_{11} \dot{x}^1{}^2 \quad (4.8)$$

donde  $g_{11} = 1$  y  $x^1 = x$

$$\frac{1}{2} g_{11} \dot{x}^1 \dot{x}^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial \tau} \right)^2 \quad (4.9)$$

Para  $g_{20}$ , donde podemos observar que  $g_{20} = g_{02}$ , por tanto

$$\frac{1}{2} g_{02} \dot{x}^0 \dot{x}^2 = \frac{1}{2} c e^{x^1} t \frac{\partial y}{\partial \tau} \quad (4.10)$$



para  $g_{22}$

$$\frac{1}{2} g_{22} \dot{x}^2 \dot{x}^2 = \frac{1}{2} g_{22} \mu \frac{\partial x^2}{\partial \tau} \quad (4.11)$$

donde  $g_{22} = \frac{1}{2} e^{2x^1}$  y  $x^2 = y$

$$\frac{1}{2} g_{22} \dot{x}^2 \dot{x}^2 = \frac{1}{4} e^{2x^1} \mu \frac{\partial y}{\partial \tau} \quad (4.12)$$

para  $g_{33}$

$$\frac{1}{2} g_{33} \mu \frac{\partial x^3}{\partial \tau} \quad (4.13)$$

donde  $g_{33} = 1$  y  $x^3 = z$

$$\frac{1}{2} g_{33} \mu \frac{\partial x^3}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial z}{\partial \tau} \quad (4.14)$$

de aquí, escribimos la función lagrangiana, sustituyendo las ecuaciones (4.5), (4.7), (4.9), (4.10), (4.12) y (4.14) en (4.3)

$$L = i \frac{c^2 \dot{t}^2}{2} + i \frac{c}{2} e^{x^1} \dot{t} \frac{dy}{d\tau} + \frac{1}{2} \mu \frac{\partial x}{\partial \tau} \quad i \frac{c}{2} e^{x^1} \dot{t} \frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{1}{4} e^{2x^1} \mu \frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \mu \frac{\partial z}{\partial \tau} \quad (4.15)$$

agrupando

$$L = i \frac{c^2 \dot{t}^2}{2} + i c e^{x^1} \dot{t} \frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{1}{4} e^{2x^1} \mu \frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \mu \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \mu \frac{\partial z}{\partial \tau} \quad (4.16)$$

haciendo  $\frac{\partial x}{\partial \tau} = \dot{x}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial \tau} = \dot{y}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial \tau} = \dot{z}$

$$L = i \frac{c^2 \dot{t}^2}{2} + i c e^{x^1} \dot{t} \dot{y} + \frac{1}{4} e^{2x^1} \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \dot{z}^2 \quad (4.17)$$

Calcularemos ahora las ecuaciones de movimiento (o condición de geodésica), la cual se expresa como

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} - \frac{\partial L}{\partial x^k} = 0 \quad (4.18)$$

donde

$$\dot{x}^k = \frac{\partial x^k}{\partial \tau}$$

Para  $k = 0$ , tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} + \frac{\partial L}{\partial x^0} &= 0 \\ \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{ct}} + \frac{\partial L}{\partial(ct)} &= 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

para  $k = 1$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (4.20)$$

para  $k = 2$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad (4.21)$$

para  $k = 3$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} + \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \quad (4.22)$$

como  $t, y, z$  no aparecen explícitamente en la lagrangiana, podemos notar que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} &= 0 \\ \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= 0 \\ \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} &= 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto, existen 3 integrales de movimiento

$$\begin{aligned} p^0 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \\ p^2 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \\ p^3 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \end{aligned}$$

Ahora calculamos las integrales de movimiento:

Para  $p^0$

$$\begin{aligned} p^0 &= \frac{\partial}{\partial \dot{t}} \left[ \frac{c^2 \dot{t}^2}{2} + ce^{x^1} \dot{t} \dot{y} + \frac{1}{4} e^{2x^1} \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \dot{z}^2 \right] \\ p^0 &= c^2 \dot{t} + ce^{x^1} \dot{y} \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde tenemos que  $\frac{\partial t}{\partial \tau} = t$

$$\begin{aligned}
 p^0 &= \left( c^2 \frac{\partial t}{\partial \tau} \right) \left( c e^{x^1} y \right) \\
 p^0 + c e^{x^1} y \frac{\partial \tau}{\partial t} &= c^2 \frac{\partial t}{\partial t} \\
 p^0 + c e^{x^1} y \tau &= c^2 t \\
 p^0 &= c^2 \frac{t}{\tau} \left( c e^{x^1} y \right)
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Para  $p^2$

$$\begin{aligned}
 p^2 &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{c^2 t^2}{2} \left( c e^{x^1} t y \right) + \frac{1}{4} e^{2x^1} y^2 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} z^2 \right) \\
 p^2 &= c e^{x^1} t + \frac{1}{2} e^{2x^1} y
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

donde tenemos que

$$y = \frac{dy}{d\tau}$$

por lo tanto

$$p^2 = c e^{x^1} t + \frac{1}{2} e^{2x^1} \frac{dy}{d\tau}$$

separando variables

$$p^2 d\tau = c e^{x^1} t d\tau + \frac{1}{2} e^{2x^1} dy$$

resolviendo, nos queda

$$p^2 \tau = c e^{x^1} t \tau + \frac{1}{2} e^{2x^1} y$$

despejando  $p^2$  nos queda

$$p^2 = \frac{y e^{2x^1}}{2 \tau} \left( c e^{x^1} t \right) \tag{4.26}$$

Calculamos ahora para  $p^3$

$$\begin{aligned}
 p^3 &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{c^2 t^2}{2} \left( c e^{x^1} t y \right) + \frac{1}{4} e^{2x^1} y^2 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} z^2 \right) \\
 p^3 &= z
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

donde

$$z = \frac{dz}{d\tau}$$

por lo tanto

$$p^3 = \frac{dz}{d\tau}$$

resolviendo

$$p^3 = \frac{z}{\tau} \quad (4.28)$$

Ya obtuvimos las integrales de movimiento. Ahora vamos a calcular la ecuación de movimiento para  $x^1$ .

Tenemos la ecuación

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^1} - \frac{\partial L}{\partial x^1} = 0 \quad (4.29)$$

donde  $x^1 = x$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (4.30)$$

calculamos las derivadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{c^2}{2} \dot{t}^2 - c e^{x^1} t \dot{y} + \frac{1}{4} e^{2x^1} \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \dot{z}^2 \right] \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= -c e^{x^1} t \dot{y} + \frac{1}{2} e^{2x^1} \dot{y}^2 \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \dot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \dot{x} \Rightarrow \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \ddot{x} \end{aligned} \quad (4.32)$$

por lo tanto, la ecuación de movimiento para  $x$  nos queda

$$\begin{aligned} \ddot{x} - c e^{x^1} t \dot{y} + \frac{1}{2} e^{2x^1} \dot{y}^2 &= 0 \\ \ddot{x} + c e^{x^1} t \dot{y} - \frac{1}{2} e^{2x^1} \dot{y}^2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Después de hacer un análisis de la métrica de Gödel en coordenadas cartesianas, no podemos deducir gran cosa acerca de las trayectorias, ya que los desarrollos matemáticos aumentan su complejidad y nublan la visibilidad hacia el objetivo de este trabajo que es entender y visualizar el espacio, por lo cual optaremos por cambiarnos a coor-

denadas cilíndricas, para efectos de mejorar la visualización de este universo.

#### 4.2.2 Coordenadas cilíndricas circulares

Tenemos que

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (4.34)$$

donde

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ e & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

con

$$a = \frac{1}{1 + \frac{r}{r_g}} \quad (4.36)$$

$$b = r^2 \left( 1 - \frac{r}{r_g} \right)$$

$$e = \frac{r^2}{r_g}$$

y

$$x^0 = ct, \quad x^1 = r, \quad x^2 = \phi, \quad x^3 = z \quad (4.37)$$

por lo tanto

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ e & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}^0 \\ \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ \dot{x}^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ e & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}^0 \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

o bien

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{x}^2 & e\phi & 0 \\ 0 & e\phi & ar^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix}$$

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -\dot{x}^2 + e\phi \dot{x} + ar^2 + e\phi \dot{x} + b\phi^2 + z^2 \quad (4.38)$$

de aquí tenemos que la función lagrangiana nos queda como

$$L = \frac{1}{2} \left( -\dot{x}^2 + ar^2 + b\phi^2 + z^2 + 2e\phi \dot{x} \right) \quad (4.39)$$

Ahora, encontramos las ecuaciones de movimiento, las cuales se expresan como

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0$$

donde tenemos que  $t$ ,  $\phi$ , y  $z$  no aparecen explícitamente en la lagrangiana, por lo tanto, tenemos tres integrales de movimiento para  $\mu = 0, 2, 3$ .

para  $\mu = 0$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} - \frac{\partial L}{\partial x^0} = 0 \quad \text{con} \quad \frac{\partial L}{\partial x^0} = 0$$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} = k_0 \quad (4.40)$$

de igual manera para  $\mu = 2, 3$  se obtiene

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^2} = k_2 \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^3} = k_3 \quad (4.42)$$

calculamos las derivadas parciales y obtenemos

$$k_0 = -\dot{x} + e\phi \quad (4.43)$$

$$k_2 = b\phi + e\dot{x} \quad (4.44)$$

$$k_3 = z \quad (4.45)$$

de la ecuación 4.43 despejamos  $x^0$

$$x^0 = e\phi + k_0 \quad (4.46)$$

sustituyendo 4.46 en la ecuación 4.44, nos queda

$$k_2 = e\phi + k_0 + b\phi = (b + e^2)\phi + ek_0 \quad (4.47)$$

despejando  $\phi$

$$\phi = \frac{k_2 + ek_0}{b + e^2} \quad (4.48)$$

sustituyendo en 4.46

$$x^0 = e \frac{k_2 + ek_0}{b + e^2} + k_0 = \frac{ek_2 + e^2k_0}{b + e^2} + k_0$$

desarrollando

$$x^0 = \frac{ek_2 + bk_0}{b + e^2} \quad (4.49)$$

sustituyendo 4.48, 4.49 y  $z = k_3$  en la lagrangiana, nos queda

$$L = \frac{1}{2} \left( \frac{ek_2 + bk_0}{b + e^2} + ar^2 + b \frac{k_2 + ek_0}{b + e^2} + k_3^2 + 2e \frac{ek_2 + bk_0}{b + e^2} \frac{k_2 + ek_0}{b + e^2} \right) \quad (4.50)$$

donde tenemos la condición  $L = \frac{1}{2}\gamma c^2$ , on  $\gamma$  constante. De aquí tenemos

$$\gamma c^2 = \left( \frac{ek_2 + bk_0}{b + e^2} + ar^2 + b \frac{k_2 + ek_0}{b + e^2} + k_3^2 + 2e \frac{ek_2 + bk_0}{b + e^2} \frac{k_2 + ek_0}{b + e^2} \right)$$

despejando  $r^2$

$$r^2 = \frac{1}{a} \left( \frac{ek_2 + bk_0}{b + e^2} + b \frac{k_2 + ek_0}{b + e^2} + k_3^2 + 2e \frac{ek_2 + bk_0}{b + e^2} \frac{k_2 + ek_0}{b + e^2} + 2\gamma c^2 \right) \quad (4.51)$$

Tomando el caso para cuando  $k_2 = 0$

$$\begin{aligned}
 r^2 &= \frac{1}{a} \left( \frac{bk_0}{b+e^2} + b \frac{ek_0}{b+e^2} + k_3^2 + 2b \frac{ek_0}{b+e^2} + 2\gamma c^2 \right) \\
 r^2 &= \frac{1}{a} \left( \frac{bk_0}{b+e^2} + b \frac{ek_0}{b+e^2} + k_3^2 + 2\gamma c^2 \right) \\
 r^2 &= \frac{1}{a(b+e^2)^2} \left( (bk_0)^2 + b(ek_0)^2 + b^2 + e^2 + 2\gamma c^2 + k_3^2 \right) \quad (4.52)
 \end{aligned}$$

ahora; de (4.36) se tiene

$$\begin{aligned}
 b + e^2 &= r^2 \left( \frac{r^4}{r_g^2} + \frac{2r^4}{r_g^2} \right) = r^2 + \frac{r^4}{r_g^2} \\
 b + e^2 &= r^2 \left( 1 + \frac{r^2}{r_g^2} \right) \\
 b + e^2 &= \frac{r^2}{a} \quad (4.53)
 \end{aligned}$$

y sustituyendo en 4.52 nos queda

$$\begin{aligned}
 r^2 &= \frac{1}{a} \left( (bk_0)^2 + b(ek_0)^2 + \frac{r^2}{a} + 2\gamma c^2 + k_3^2 \right) \\
 &= \frac{a}{r^4} \left( b^2 k_0^2 + be^2 k_0^2 + \frac{r^2}{a} + 2\gamma c^2 + k_3^2 \right) \\
 &= \frac{a}{r^4} \left( b^2 + be^2 + \frac{r^2}{a} + 2\gamma c^2 + k_3^2 \right) \\
 &= \frac{a}{r^4} \left( b + e^2 + \frac{r^2}{a} + 2\gamma c^2 + k_3^2 \right) \\
 &= \frac{a}{r^4} \left( \frac{r^2}{a} + \frac{r^2}{a} + 2\gamma c^2 + k_3^2 \right) \\
 r^2 &= \frac{1}{r^4} \left( r^2 b k_0^2 + \frac{r^4}{a} + 2\gamma c^2 + k_3^2 \right)^{3/4} = \frac{bk_0^2}{r^2} + \frac{1}{a} + 2\gamma c^2 + k_3^2
 \end{aligned}$$

sustituyendo  $b$  para tener

$$r^2 = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{a} + 2\gamma c^2 + k_3^2 \quad (4.54)$$

Suponiendo que no existe movimiento en  $z$ , es decir:  $z = 0 = k_3$



entonces la ec 4.54 se convierte en

$$r^2 = \left(1 + \frac{r^2}{r_g^2} k_0^2 + \frac{1}{a} i 2\gamma c^2\right) \quad (4.55)$$

si sabemos que  $a = \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{r_g}\right)^2}$ , sustituimos para tener

$$r^2 = \left(1 + \frac{r^2}{r_g^2} k_0^2 + 1 + 2 \frac{r}{r_g} i \gamma c^2\right)$$

$$\frac{dr}{d\tau} = k_0^2 + 2\gamma c^2 + \frac{r^2}{r_g^2} i k_0^2 + 2\gamma c^2$$

desarrollando tendremos

$$\frac{dr}{\frac{r_g}{k_0^2 + 2\gamma c^2} \left( \frac{k_0^2 + 2\gamma c^2}{k_0^2 + 2\gamma c^2} r_g^2 + r^2 \right)^{\frac{1}{2}}} = d\tau$$

resolviendo la ecuación diferencial, tendremos

$$\tau = \frac{r_g}{k_0^2 + 2\gamma c^2} \arcsen \frac{r}{\frac{(k_0^2 + 2\gamma c^2) r_g^2}{k_0^2 + 2\gamma c^2}} \quad (4.56)$$

si llamamos

$$\alpha = \frac{r_g}{k_0^2 + 2\gamma c^2}$$

$$\beta = \frac{(k_0^2 + 2\gamma c^2) r_g^2}{k_0^2 + 2\gamma c^2}$$

tendremos

$$\tau = \alpha \arcsen \frac{r}{\beta} \quad (4.57)$$

entonces

$$r(\tau) = \beta \operatorname{sen} \frac{\tau}{\alpha} \quad (4.58)$$

tendremos

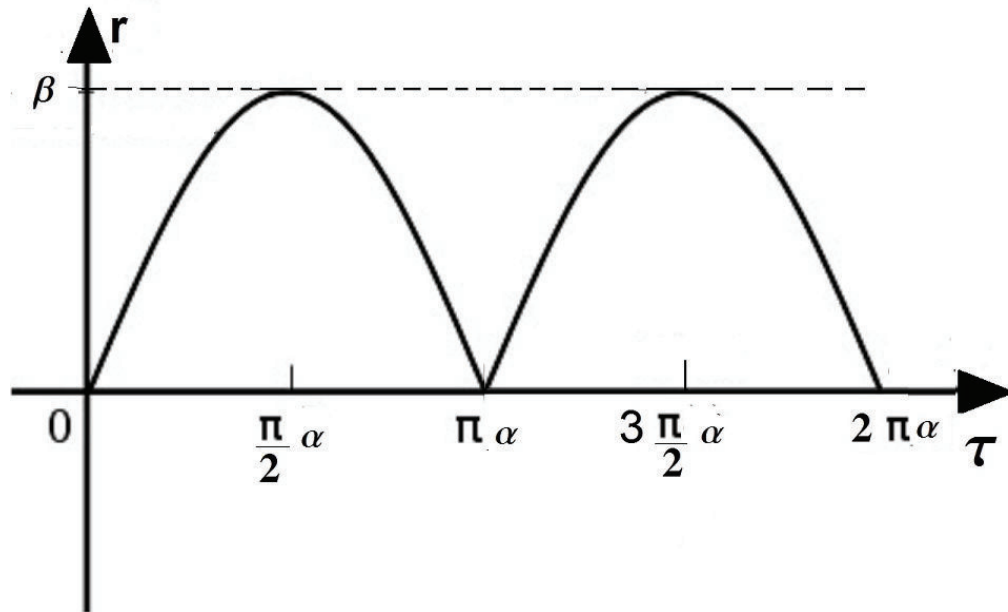


Figura 4.2 Gráfica del comportamiento de la posición en el tiempo

#### 4.2.2.1 La restricción de $\gamma$

Retomando la Ec (4.56) tomamos los casos de los valores posibles de  $\gamma$

1.- Cuando  $\gamma = 1$ , describe a un vector espacialoide, es decir, tendremos

$$\tau = \frac{r_g}{k_0^2 + 2c^2} \arcsen \frac{r}{\frac{(k_0^2 + 2c^2)r_g^2}{k_0^2 + 2c^2}}^{\frac{1}{2}} \quad (4.59)$$

$$\tau = \frac{r_g}{k_0^2 + 2c^2} \arcsen \frac{\mu}{k_0^2 + 2c^2} \frac{r}{r_g}^{\frac{1}{2}}$$

Este caso no es de relevancia para nuestro trabajo.

2.- Cuando  $\gamma = 0$ , para la luz. De igual forma, tendremos

$$\tau = \frac{r_g}{k_0} \arcsen \left( \frac{\mu}{r_g} \right) \quad (4.60)$$

esto implica que

$$r = r_g \sen \left( \frac{k_0 \tau}{r_g} \right) \quad (4.61)$$

si gra...camos posición contra el tiempo tendríamos

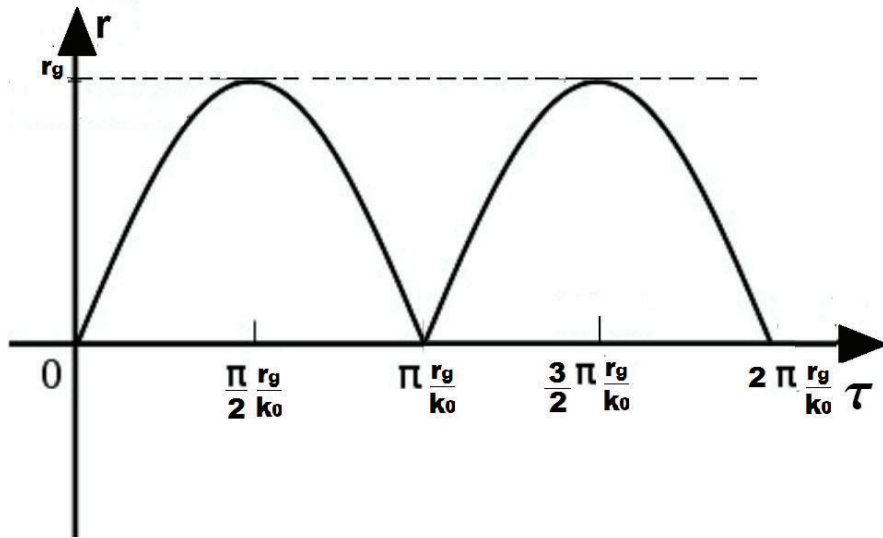


Figura 4.3

3.- Cuando  $\gamma = 1$ , partículas con masa moviéndose en geodésicas, obtendríamos

$$\tau = \frac{r_g}{k_0^2 + 2c^2} \arcsen \left( \frac{\tilde{\mu}}{k_0^2 + 2c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{r}{r_g} \quad (4.62)$$

procediendo igual tendremos

$$r = r_g \operatorname{sen} \frac{(k_0^2 + 2c^2)^{\frac{1}{2}}}{r_g} \tau \quad (4.63)$$

gra...cando

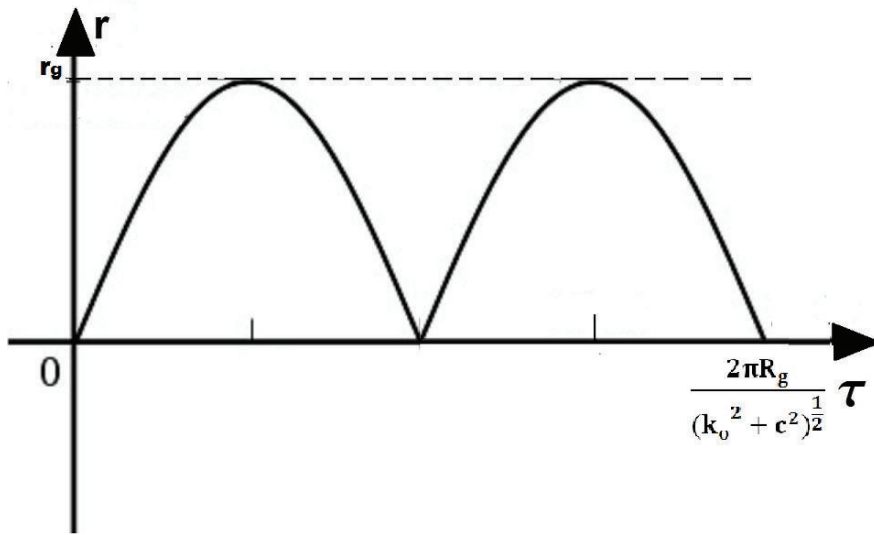


Figura 4.4

#### 4.2.2.2 Inclinación del eje del tiempo

Vamos a demostrar que el eje del tiempo no apunta en la misma dirección para todos los puntos del espacio tiempo.

Tenemos que la métrica de Gödel es

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} c^2 & 0 & \frac{cr^2}{2a} & 0 \\ 0 & i \frac{1}{1+(\frac{r}{2a})^2} & 0 & 0 \\ \frac{cr^2}{2a} & 0 & i r^2 & i \frac{r}{2a} \\ 0 & 0 & 0 & i 1 \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

donde  $a$  es el parámetro de Gödel y  $r_g$  es el radio de Gödel, el cual es  $r_g = 2a$ .

De  $g_{\mu\nu}$  tenemos

$$g_{11} = - \frac{1}{3 \left( 1 + \frac{r}{r_g} \right)^2} \quad (4.65)$$

$$g_{22} = - \left( r^2 - 1 \right) \left( \frac{r}{2a} \right)^2 \quad (4.66)$$

podemos ver que si

$$r \rightarrow r_g \quad ) \quad g_{22} \rightarrow 0$$

$$a \rightarrow 1 \quad ) \quad r_g \rightarrow 1$$

entonces la métrica de Gödel tiende a la métrica de Minkowski en coordenadas cilíndricas.

Tomamos la velocidad angular  $\Omega_g = \frac{c}{2a} = \frac{P_{2c}}{r_g}$  ( $\Omega$  densidad de masa de Gödel), poniéndolo en términos de la densidad de masa del universo  $\Omega = 2 \frac{P}{\pi \gamma p}$  donde  $\gamma = G$  de Newton.

Tenemos que

$$g_{02} = \bar{e}_0 \cdot \bar{e}_2 = \bar{e}_t \cdot \bar{e}_\phi \quad (4.67)$$

$$g_{02} = \sum_j \bar{e}_{tj} \bar{e}_{\phi j} \cos \alpha \quad (4.68)$$

obteniendo las magnitudes, donde

$$g_{00} = \bar{e}_0 \cdot \bar{e}_0 = c^2$$

$$\sum_j \bar{e}_{0j} \bar{e}_{0j} = c \quad (4.69)$$

y

$$g_{22} = \bar{e}_\phi \cdot \bar{e}_\phi = r^2 - 1 - \frac{r^2}{r_g^2} \quad (4.70)$$

$$\sum_j \bar{e}_{\phi j} \bar{e}_{\phi j} = r^2 - 1 - \frac{r^2}{r_g^2}$$

de aquí podemos obtener  $\cos \alpha$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{g_{02}}{j\bar{e}_t j\bar{e}_\phi} \\ \cos \alpha &= \frac{r}{a \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{r^2}{r_g^2}}} \end{aligned} \quad (4.71)$$

siendo  $\alpha$  el ángulo de  $\hat{e}_t$  con  $\hat{e}_\phi$

poniéndolo en términos de  $r/r_g$ , donde tenemos que  $r/a = 2r/r_g$ , por lo tanto

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2} \frac{r}{r_g}}{1 - \frac{r^2}{r_g^2}}$$

si  $x = r/r_g$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}x}{1 - x^2}$$

tomamos que

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}x}{1 - x^2} &= 1 \\ \frac{2x^2}{1 - x^2} &= 1 \end{aligned}$$

buscamos un valor  $x_m$ , para que el  $\cos \alpha = 1$

$$\begin{aligned} \frac{2x_m^2}{1 - x_m^2} &= 1 \\ 2x_m^2 &= 1 - x_m^2 \\ x_m &= \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0.57735 \end{aligned} \quad (4.72)$$

donde  $\alpha = \arccos \frac{\sqrt{2}x}{1 - x^2}$

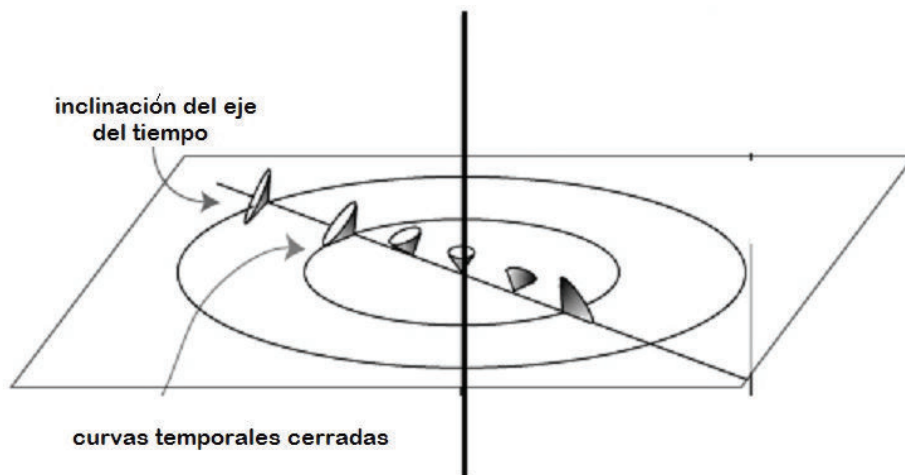


Figura 4.5 Se observa que al alejarse del origen el eje del tiempo es más inclinado. Y en los extremos su sentido es opuesto.

Un observador colocado en un punto del universo encuentra que, quienes se alejan haciendo crecer la coordenada  $r$ , tienen un eje del tiempo cada vez más inclinado. Este resultado, unido a la ecuación (4.58), da la posibilidad de curvas cerradas en el tiempo que atraviesan diferentes geodésicas. Esto se retoma en el quinto capítulo.

#### 4.2.2.3 Coincidencia del tiempo propio con la coordenada tiempo

Sea  $\lambda$  el parámetro del elemento de línea

$$c^2 d\lambda^2 = (dt, dr, d\phi, dz) \begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_g^2 x^2 (1-x^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ dr \\ d\phi \\ dz \end{pmatrix} \quad (4.73)$$

en un punto fijo, es decir,  $dr, d\phi, dz = 0$ , nos queda

$$c^2 d\lambda^2 = c^2 dt^2 \quad (4.74)$$

para partículas con masa usamos  $\lambda = \tau$

$$\tau = t \tag{4.75}$$

(no es como la métrica de Schwarzschild).

### 4.3 Caída Libre

En esta sección abordaremos otra peculiaridad del espacio de Gödel. Vamos a tomar el problema donde una partícula se encuentra en caída libre, tomando la métrica de Gödel y calculando la ecuación de Lagrange.

Tenemos que la Lagrangiana se expresa como

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$$

de aquí tenemos

$$g_{\mu\nu}^{\xi\mu} = \begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_g^2 x^2 (1+x^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} t \\ r \\ \phi \\ z \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c^2 t + \frac{1}{1+x^2} r & 0 \\ \frac{1}{1+x^2} r & r_g^2 x^2 (1+x^2) \phi \\ 0 & r_g^2 x^2 t + r_g^2 x^2 (1+x^2) \phi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} t \\ r \\ \phi \\ z \end{matrix}$$

y

$$g_{\mu\nu}^{\xi\mu\xi\nu} = \begin{pmatrix} c^2 t + \frac{1}{1+x^2} r & 0 \\ \frac{1}{1+x^2} r & r_g^2 x^2 (1+x^2) \phi \\ 0 & r_g^2 x^2 t + r_g^2 x^2 (1+x^2) \phi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} t \\ r \\ \phi \\ z \end{matrix}$$

$$= c^2 t^2 + 2 \frac{1}{1+x^2} r t + r_g^2 x^2 (1+x^2) \phi^2$$



por lo tanto

$$L = \frac{1}{2} c^2 \dot{t}^2 + 2 \sqrt{\frac{r_g}{2}} x^2 \dot{t} \dot{\phi} + \frac{1}{1+x^2} \dot{r}^2 + r_g^2 x^2 \left( 1 + x^2 \frac{c^2}{\phi} \dot{\phi} \right) \dot{z}^2 \quad (4.76)$$

calculamos ahora las ecuaciones de movimiento. Donde podemos ver que la Lagrangiana no depende explícitamente de  $t$ ,  $\phi$  y  $z$ , por lo que tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = p_t \quad (4.77)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = p_\phi \quad (4.78)$$

calculamos  $p_t$  y  $p_\phi$

$$p_t = c^2 \dot{t} + 2 \sqrt{\frac{r_g}{2}} x^2 \dot{\phi} \quad (4.79)$$

$$p_\phi = 2 \sqrt{\frac{r_g}{2}} x^2 \dot{t} + r_g^2 x^2 \left( 1 + x^2 \frac{c^2}{\phi} \right) \dot{\phi} \quad (4.80)$$

de la ecuación 4.79 despejamos  $\dot{t}$

$$\dot{t} = \frac{1}{c^2} p_t - 2 \sqrt{\frac{r_g}{2}} x^2 \dot{\phi} \quad (4.81)$$

sustituyendo 4.81 en 4.80 nos queda

$$p_\phi = \frac{2 \sqrt{\frac{r_g}{2}}}{c^2} r_g x^2 p_t + \sqrt{\frac{r_g}{2}} x^2 \dot{\phi}^2 + r_g^2 x^2 \left( 1 + x^2 \frac{c^2}{\phi} \right) \dot{\phi}$$

$$p_\phi = \frac{2 \sqrt{\frac{r_g}{2}}}{c^2} r_g x^2 p_t + \frac{2 r_g^2 x^4}{c^2} \dot{\phi} + r_g^2 x^2 \left( 1 + x^2 \frac{c^2}{\phi} \right) \dot{\phi} \quad (4.82)$$

despejando  $\dot{\phi}$

$$\dot{\phi} \left( r_g^2 x^2 \left( 1 + x^2 \frac{c^2}{\phi} \right) + \frac{2 r_g^2 x^4}{c^2} \right) = p_\phi + \frac{2 \sqrt{\frac{r_g}{2}}}{c^2} r_g x^2 p_t$$

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi + \frac{2 \sqrt{\frac{r_g}{2}}}{c^2} r_g x^2 p_t}{r_g^2 x^2 \left( 1 + x^2 \right) + \frac{2 r_g^2 x^4}{c^2}} \quad (4.83)$$

de la condición

$$L = \frac{1}{2} \gamma c^2 \quad (4.84)$$

si la partícula se encuentra en caída libre, entonces,  $\dot{\phi} = 0$  y  $\dot{z} = 0$ . por lo tanto

$$c^2 \dot{t}^2 + \frac{1}{1+x^2} \dot{r}^2 = \gamma c^2 \quad (4.85)$$

de aquí

$$\mu \frac{1}{2\gamma} \frac{c^2}{t} = \frac{r^2}{1+x^2}$$

$$r^2 = \frac{\mu}{\gamma} \frac{c^2}{t} (1+x^2) c^2 \quad (4.86)$$

tomando  $\dot{\phi} = 0$  y  $\dot{z} = 0$  en la ecuación 4.81 nos queda

$$\dot{t} = \frac{1}{c^2} p_t \quad (4.87)$$

sustituyendo 4.87 en 4.86

$$r^2 = \frac{\mu}{\gamma} \frac{1}{c^4} p_t^2 (1+x^2) c^2$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{\mu}{\gamma} \frac{1}{c^4} p_t^2 (1+x^2) c > 0 \quad (4.88)$$

Vemos que si un objeto se mueve libremente, se aleja del origen de coordenadas

# V. Descripciones gráficas y discusiones filosóficas

## 5.1 Propiedades principales de la solución de Gödel

Todas las soluciones cosmológicas con densidad de materia conocidas en la actualidad tienen una propiedad en común, contienen una coordenada de tiempo tal que todas las  $\hat{x}_0$  son paralelas siempre.

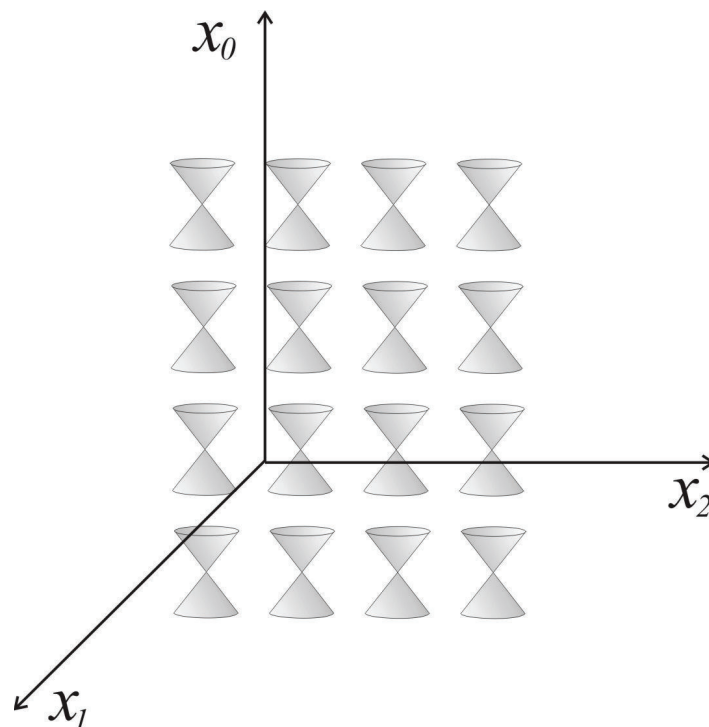


Figura 5.1. Las líneas del tiempo de cada cono de luz en un universo no rotante, son siempre paralelas entre sí.

Gödel afirma que la propiedad de ser paralela de los ejes  $\hat{x}_0$  se sostiene sólo si el

universo no rota. El futuro siempre está en la misma dirección, ya que los  $\hat{x}_0$  son paralelos; pero al trasladarse en un universo rotante ya no son paralelos.

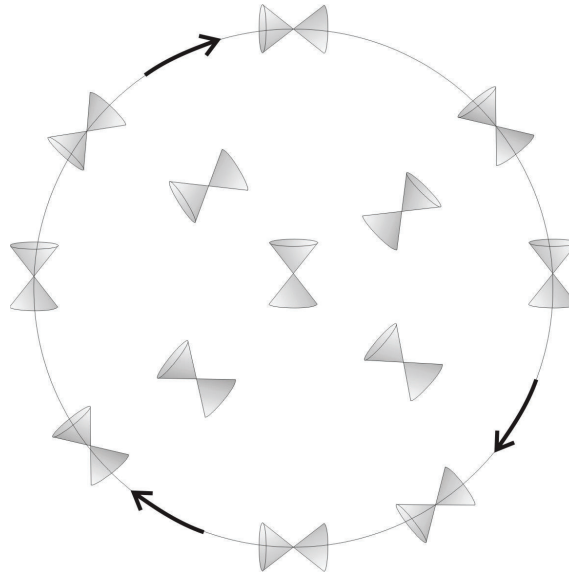


Figura 5.2 Las líneas temporales cerradas en el universo de Gödel

Gödel propone una solución (con constante cosmológica diferente de 0), que exhibe tales rotaciones, y tiene las siguientes propiedades:

- 1) Es homogéneo. En términos de la física esto significa que la solución es estacionaria y espacialmente homogénea.
- 2) Existe simetría rotacional, lo cual significa que cuando el observador se coloca en un punto arbitrario del universo éste gira en torno suyo.
- 3) Existen curvas tales que gastando energía, al hacer crecer  $t$  regresas a un valor inicial  $t_0$  que fue tu tiempo de partida.

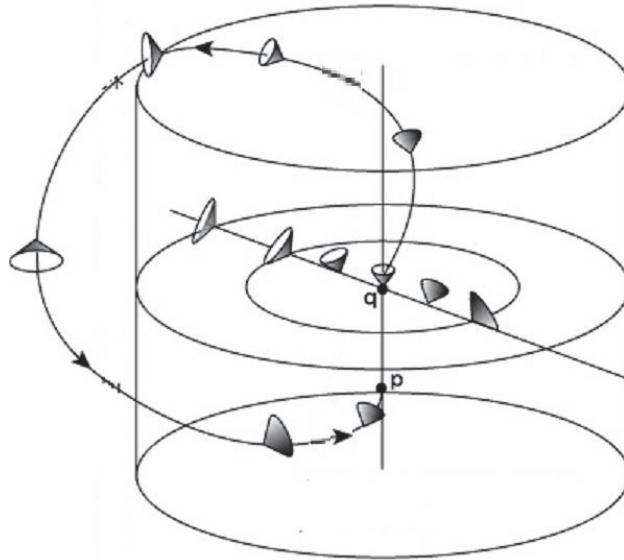


Figura 5.3 Ilustración de los conos de luz viajando en geodésicas

4) Cada línea mundo que ocurre en la solución es una línea abierta de longitud infinita la cual nunca se aproxima a alguno de sus puntos precedentes otra vez.

5) La materia en todas partes tiene una rotación relativa (al punto donde tu te colocas). Rota con velocidad angular  $2(\pi\kappa\rho)^{1/2}$  donde  $\rho$  es la densidad de masa de la materia y  $\kappa$  la constante de gravitación de Newton.

A lo largo de este trabajo hemos introducido conceptos como son, la causalidad, el tiempo y los conos de luz, trataremos de aclararlos un poco más.

## 5.2 El tiempo

La palabra tiempo se usa aquí en diferentes contextos, son los siguientes:

El tiempo como una coordenada que ayuda a describir el espacio tiempo.

El tiempo propio, que es el marcado por un reloj en un punto del espacio tiempo.

El tiempo relativo, que le corresponde a cada sistema inercial en relatividad especial.

El tiempo absoluto, llamado tiempo cosmológico, que se usa en la métrica de Friedmann.

En el caso de la métrica de Gödel la coordenada tiempo y el tiempo propio coinciden pero los conceptos de pasado y futuro pierden sentido debido a la existencia de curvas cerradas.

### 5.3 La causalidad

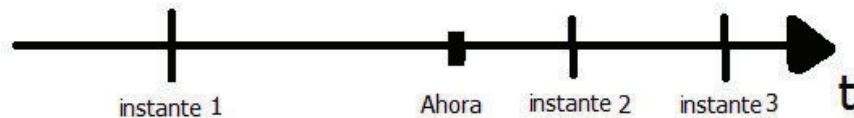
El principio de causalidad sostiene que todo evento debe tener una causa. En la física clásica se asumía que todo evento era causado por otro evento y esta causalidad podía ser explicada por alguna ley de la naturaleza, de modo que conociendo las condiciones iniciales de cualquier sistema podía predecirse el comportamiento futuro del mismo. Al ingresar en el campo de la física relativista hay que ajustar el concepto de causalidad y aclarar que la precedencia de un evento como causa de otro en el tiempo debe darse para observadores inerciales que se encuentren en el mismo cono de luz. Esto se aplica incluso para soluciones como el universo de Gödel y curvas temporaloides cerradas. Cuando este principio no se cumple existe una paradoja, como por ejemplo:

La "paradoja del viaje en el tiempo", también conocida como "la paradoja del abuelo", consiste en una persona que viaja al pasado y mata a su abuelo antes de que este conozca a su abuela y puedan concebir a su padre. Por lo que el viajero nunca ha nacido y, mucho menos, pudo haber viajado en el tiempo para eliminar a su antepasado. Esto implica que tanto su padre, como él, en realidad sí pueden existir, por lo que podría viajar y matar a su abuelo, y así una y otra vez.

### 5.4 Conjeturas ...losó...cas

Einstein planteó que el tiempo es relativo, no absoluto, diferencia el observador de un evento del que está realizando dicho experimento.

Gödel se enfocó a la ...losofía del tiempo, basándose en la relatividad general para obtener un resultado matemático formal que tuviera implicaciones ...losó...cas. Para Gödel el tiempo es un resultado de la intuición humana.



si  $\Delta t = \text{instante } n - \text{instante } m$  , con n y m numeros reales

Como el punto llamado Ahora tambien es real,  
puede estar situado en cualquier punto de la recta

Figura 5.4

La forma en que los cosmólogos utilizan la métrica de Friedmann involucra la idea de un tiempo Universal.

En cambio para Gödel el tiempo no puede ser universal en un universo expansivo, sólo en regiones muy bien de...nidas. Hay universos en donde 2 relojes situados en diferentes regiones no podrán ajustarse por las propiedades del mismo universo, sólo en regiones bien delimitadas.

Si existieran universos rotantes, que rotan respecto a la totalidad de sistemas galácticos, esto reforzaría la idea de que haciendo un viaje en redondo en una nave, en un espacio su...cientemente curvado es posible viajar a cualquier región del pasado, del presente o del futuro y regresar hacia atrás, lo que implicaría la paradoja del abuelo. Éstas y otras contradicciones no pueden ser evitadas sobre la base de que no pueden ser puestas en práctica.

Si puede haber trayectorias en las que el viajero regrese hacia el pasado mientras avanza hacia el futuro, tendremos por consecuencia que no es su auténtico pasado.

Einstein dijo que los procesos físicos más probables van en un sentido, entonces asociándolo al tiempo va del pasado hacia el futuro. Esto es posible en regiones acotadas cuando los eventos están separados una distancia muy larga se puede enviar una señal de luz de un punto a otro, pero si la curva es cerrada entonces ya no es seguro que se pueda hacer eso.

Gödel no dejó los cálculos para abandonarse a las especulaciones, de hecho, calculó la energía necesaria para uno de estos viajes en el tiempo. Escribió que basados en el cálculo de una densidad de masa igual a la observada en nuestro universo, y suponiendo que podemos transformar la masa completamente en energía, el peso del combustible de una nave espacial que podría completar el viaje en  $t$  años (medidos por el viajero) podría ser del orden de magnitud de un número que llamaremos  $R$ , que resulta de multiplicar el peso de la nave por un número que es un 1 seguido por 22 ceros y dividido entre el cuadrado de los  $t$  años que duraría su viaje hacia el pasado mientras avanzaba hacia el futuro. También calculó que esos  $t$  años serían mucho menor que un 1 seguido por once ceros, es decir: mucho menor que cien mil millones de años. También encontró que cualquiera que fuera ese número de años  $t$ , la velocidad de la nave debería ser de casi 212 mil kilómetros por segundo (el 70% de la velocidad de la luz)[3].



# Conclusiones

En las métricas de Schwarzschild, Kerr y Friedmann los conos de luz tienen ejes paralelos y todos los puntos tienen la línea de futuro en la misma dirección.

En cambio en la métrica de Gödel, una vez seleccionada tu posición, los puntos más alejados de ti poseen ejes del tiempo que se inclinan hasta apuntar en sentido contrario cuando están muy lejos.

En el universo de Gödel, hay líneas geodésicas que se pueden seguir sin gastar energía. Como las órbitas de los planetas alrededor del Sol. En este caso el tiempo solo  $\ddot{f}$ uye hacia el futuro.

En la métrica de Gödel es posible cambiarse de una geodésica a otra gastando energía, hasta encontrar una que te lleva a tu pasado.

# REFERENCIAS

- [1] J. Foster y J.D Nightingale, a short course in General Relativity, (springer-verlag 1995).
- [2] A. Castellanos Moreno, Relatividad General para estudiantes de Física, notas de curso no publicadas.
- [3] A. Castellanos Moreno, El tiempo (apuntes sobre su física y su ...losofía). Libro en preparación, Capitulo 10.
- [4] L. D Landau and E.M Lifshitz, the classical theory of ...elds, pergamon, Oxford 1971.
- [5] Robert M. Wald, General Relativity, (Chicago 1984).
- [6] Bernard F. schutz, A ...rst course in general relativity, (cambridg 1985).
- [7] Murray Spiegen, Análisis vectorial, 2da edición, 2007.
- [8] Saulo Carneiro, A Gödel-Friedman cosmology?, Instituto de Física, universidad Federal de Bahia 40010-340, Salvador, BA, Brasil.