

Resonancias de Helmholtz

Una tesis presentada a la Universidad de Sonora
para la obtención del título de
Licenciado en Física

por

Francisco Javier Soufflé Carvajal



Departamento de Física

Universidad de Sonora

Agosto de 2011

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

Agradecimientos

“Que te de vergüenza un día”

Este espacio de mi tesis es dedicado a agradecer a las personas que de alguna manera me ayudaron a llegar a este momento.

Comenzando con mi familia que siempre me ha apoyado en los proyectos que me he propuesto, aunque a veces mis intereses se contrapongan con los de ella.

Al maestro Antonio Jáuregui, por su gran apoyo y paciencia dirigiéndome en el desarrollo de este trabajo, y más que nada, por hacer el esfuerzo extra de aprender conmigo sobre esta rama de la Física en la que pocos incursionan.

A mis sinodales y maestros Angelina Uribe, María Elena Tejeda y Carlos Calcáneo por su constante apoyo en el transcurso de mi carrera y por su preocupación en que este trabajo se concluya de la mejor manera posible.

A todos mis amigos que han estado a mi lado todo este tiempo, brindándome siempre su apoyo moral y comprensión, especialmente a “la sempayada”, mi segunda familia.

A una “muchachita” que, a pesar de ser muy sensible, aguantó sin reparo el carácter tan difícil que traje con el estrés días antes de presentar este trabajo.

Muchas veces nos han dicho que el ocio es la madre de todos los vicios, hoy creo poder afirmar que el ocio es el padre de esta tesis, ¿quién diría que jugar a soplar una botellita y tratar de entenderla terminaría en un trabajo que involucra, según queramos, tanta Física y Matemática, que hoy me da mi título de licenciado?

Siempre recordaré unas palabras que me dijo la maestra María Elena cuando me entregó mi calificación de métodos matemáticos de la Física I: Yo se que ambas te gustan y está bien, pero tarde o temprano tendrás que dedicarle tus días a una y dejar la otra como *hobbie*, tienes que decidirte y debes hacerlo pronto, Física o Música, y tienes que escoger... la que más te haga feliz.

Mi decisión es estudiar la Música...

...con los instrumentos de un físico.

Contenido

Introducción	1
1. Propiedades termodinámicas del resonador	5
1.1. Ecuación reducida de Navier-Stokes	6
1.2. Ecuación de onda acústica	8
1.3. Proceso adiabático	13
2. Impedancia acústica	19
2.1. Impedancia mecánica	19
2.2. Impedancia acústica	25
2.3. Radiación de una esfera pulsante	26
2.4. Intensidad acústica	29
2.5. Fuentes simples	33
2.5.1. Fuente libre	33
2.5.2. Fuente apantallada.	34
2.6. Impedancia de radiación	37
2.7. Impedancia de radiación de un pistón circular plano	40
2.8. Tubos	46
2.8.1. Resonancia en tubos	46
2.8.1.1. Tubo cerrado	48
2.8.1.2. Tubo abierto	48
3. Modelo mecánico del resonador	51
3.1. Fuerzas en el resonador	52

3.2. Ecuación de movimiento	55
3.3. Método iterativo	56
3.3.1. Primera aproximación	58
3.3.2. Segunda aproximación	59
3.4. Resonancias.	61
3.5. Velocidad del sonido.	64
Conclusiones	66
Bibliografía	68

Introducción

Es conocido que las campanas más grandes pueden ser puestas en movimiento por un hombre, o incluso por un niño, que jala la cuerda amarrada a ellas a intervalos de tiempo regulares apropiados, aún cuando el peso del metal es tan grande que el hombre apenas podría moverla un poco si no aplica su fuerza en dichos intervalos periódicos. Cuando una de estas campanas es puesta en movimiento, ésta continúa, como un péndulo, oscilando por un tiempo hasta que regresa al reposo. El movimiento disminuye gradualmente, como sabemos, porque la fricción en el eje de la campana y la resistencia del aire en cada oscilación atenúan el movimiento existente.

Mientras la campana oscila hacia atrás y hacia adelante, la palanca y la cuerda fija a su eje sube y baja. Si cuando la palanca baja, se ejerce una fuerza pequeña al extremo inferior de la cuerda de la campana en el mismo sentido del movimiento, dicha fuerza actuará de modo que aumentará la rapidez del movimiento existente. Este aumento en la velocidad puede ser muy pequeño y aún así producirá un aumento correspondiente en la amplitud de la oscilación de la campana, la cual de nuevo continuará hasta que se detenga por la fricción o resistencia del aire. Pero si la fuerza que se ejerce sobre la cuerda de la campana se aplica en un momento equivocado, por ejemplo cuando ésta fuese en ascenso, la fuerza actuaría en oposición al movimiento de la campana y la amplitud de la oscilación decrecería. Ahora, si la fuerza se aplica a la cuerda en cada oscilación, en el momento en que ésta va cayendo, y entonces la deja ascender libremente, tendremos que en cada oscilación el movimiento de la campana resultaría incrementado en velocidad, y sus oscilaciones serían gradualmente más y más grandes. Este proceso continuaría hasta que la resistencia al movimiento, impartido en cada oscilación de la campana por la fricción del eje y el aire externo, sería tan grande como el exactamente proporcionado por la potencia

de la fuerza aplicada en cada oscilación. Estableciéndose de esta manera un equilibrio.

El éxito de este proceso depende, por lo tanto, esencialmente en que se aplique la fuerza sólo en esos momentos, cuando aumenta el movimiento de la campana. Esto es, la fuerza se debe aplicar periódicamente, y el periodo de tiempo debe ser igual al de las oscilaciones de la campana, o de lo contrario no se tendrá éxito.

Este fenómeno es conocido como resonancia mecánica, o simplemente como resonancia, y lo presentan aquellos cuerpos que una vez que son puestos en movimiento por cualquier impulso, continúan efectuando una serie de oscilaciones antes de quedar en reposo. Cuando estos cuerpos son movidos ligera y periódicamente por una fuerza externa repetitiva, aunque cada acción por separado sea suficiente para producir un movimiento apenas perceptible, si esta periodicidad de la fuerza coincide precisamente con la periodicidad de la vibración del cuerpo, el sistema entra en resonancia y resultarán vibraciones amplias. Los impulsos periódicos de esta naturaleza proceden de otro cuerpo que ya se encuentra vibrando regularmente, y en este caso, el balanceo del segundo pone en acción la oscilación del primero.

En este trabajo estamos interesados en la resonancia acústica como resultado de un reforzamiento de las ondas sonoras simples, o de una sola frecuencia.

Antes de que la instrumentación electrónica simplificara el estudio de las ondas sonoras, con el fin de estudiar la resonancia se utilizó un gran número de dispositivos de naturaleza mecánica, ahora considerados como verdaderas reliquias, pero en su momento fueron indispensables para dicho estudio. Por ejemplo, se utilizó una sirena de aire, cuya razón de revolución podía ser controlada por engranes, para establecer la frecuencia en una escala absoluta. Otro ejemplo lo constituye la cavidad resonante, que como dispositivo acústico se usaba para establecer la presencia o ausencia de una frecuencia particular en una onda sonora compuesta. Este dispositivo, la cavidad resonante, constituye el objeto de estudio del presente trabajo y consiste en un recipiente que encierra un volumen de aire, con una pequeña abertura, o cuello, estableciendo el acoplamiento entre el aire en el recipiente y el aire externo. Las dimensiones de la cavidad resonante son pequeñas comparadas con la longitud de onda del sonido al cual resuena. Si la cavidad resonante es expuesta a una onda sonora compuesta que contenga una componente de frecuencia igual a la frecuencia

característica de la cavidad, al cesar la fuente sonora la cavidad seguirá sonando hasta que decaiga su vibración, de manera similar al fenómeno de resonancia mecánica descrito líneas arriba.

Las cavidades resonantes son usadas a menudo como componentes de filtros acústicos, el análogo acústico de los filtros de ondas eléctricas. La ocarina es un instrumento musical basado en el fenómeno de la cavidad resonante, el tono que puede ser producido soplando a través de la boquilla de una botella también es un ejemplo familiar.

Hermann Helmholtz estudió las cavidades resonantes aprovechando su gran sensibilidad a las vibraciones del aire que permite apreciar las mismas en forma de sonido, las cavidades resonantes que utilizó en sus investigaciones constan de una esfera hueca de vidrio o metal, o tubos, con dos aberturas como se muestra en la figura 1

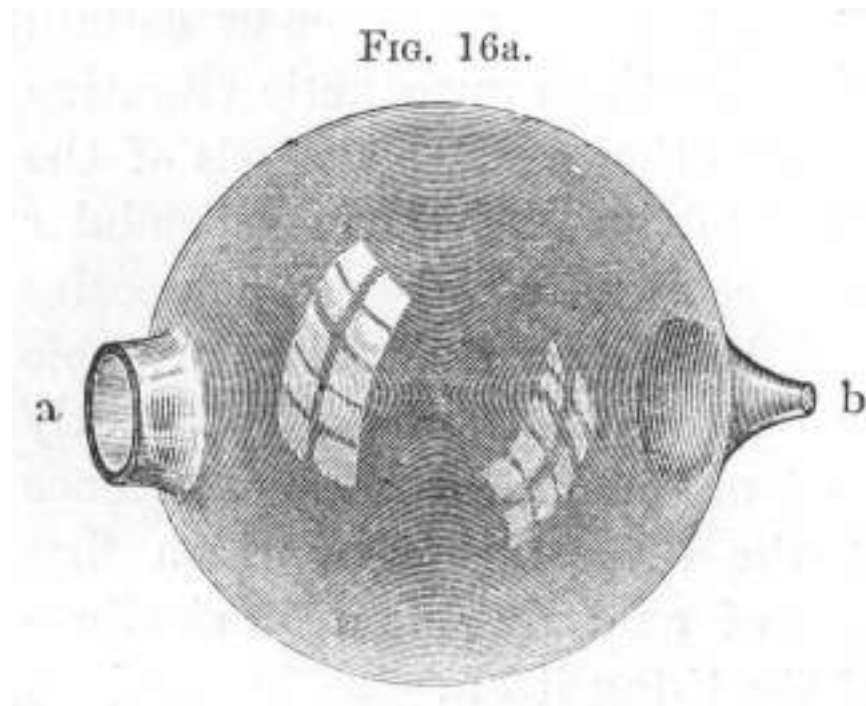


Figura 1: Imagen de un resonador utilizado por Helmholtz, aparece en el libro original de Helmholtz publicado en el año de 1885. La abertura (a) tiene un corte abrupto, la (b) tiene el final con forma de embudo con el fin de insertarse en el oído para apreciar mejor el sonido que produce.

Por las grandes aportaciones que Helmholtz realizó a la comprensión del fenómeno de resonancia de las cavidades, hoy en día a la cavidad resonante se le conoce también como

resonador de Helmholtz.

Este trabajo tiene como objetivo revisar el modelo mecánico del resonador de Helmholtz. Dicho modelo se basa en que el aire encerrado en el cuello del resonador actúa como una unidad que se mueve como resultado de la acción que ejerce, por un lado, el aire contenido en la cavidad, por otro, la fuerza disipativa que resulta de la pérdida de energía por radiación del sonido hacia el interior y exterior del cuello, y, por último, la fuerza externa aplicada al resonador con el fin de estimularlo. Por ello, en el primer capítulo estudiamos la interacción termodinámica entre la cavidad y el exterior, en el segundo capítulo revisamos el concepto de impedancia acústica y calculamos las impedancias necesarias para el modelo y el tercer capítulo está dedicado a establecer la ecuación de movimiento que resulta del modelo mecánico para el resonador de Helmholtz. Finalmente el trabajo termina con una sección de conclusiones y bibliografía.

Capítulo 1

Propiedades termodinámicas del resonador

En el presente trabajo nos referiremos sistemáticamente al resonador de Helmholtz simplemente como resonador, éste es un dispositivo que consiste en un contenedor de volumen V con un cuello en forma de tubo de longitud L , ilustrado en la figura 2.1. El resonador se encuentra inmerso en un fluido, usualmente aire.



Figura 1.1: Resonador de Helmholtz.

Inicialmente el aire en su interior se encuentra a una presión p ocupando por completo el volumen V del resonador. Como veremos en el capítulo 3, el modelo mecánico del resonador se basa en la consideración de que el aire en el cuello se mueve como una unidad formando un émbolo que al ser expuesto a un campo acústico es sometido a diversas

fuerzas que se derivan de los cambios de presión y de la pérdida de energía por radiación acústica. Esta consideración es válida para longitudes de onda grandes comparada con las dimensiones del resonador.

como una preparación para construir el modelo, en este capítulo empezaremos por revisar las ecuaciones que describen la presencia de ondas sonoras en el fluido que rodea y llena al resonador y el proceso termodinámico que ocurre en el mismo.

1.1. Ecuación reducida de Navier-Stokes

Consideremos un fluido de densidad ρ y un pequeño elemento de volumen del fluido $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ que contiene una masa Δm . La fuerza total sobre el elemento de volumen proviene de la presión que ejerce el resto del fluido sobre el elemento de volumen y de la fuerza de gravedad. Para calcular la primera de ellas, notamos que la fuerza sobre el elemento de volumen, actuando en la dirección x , es el resultado de la diferencia de presión que se ejerce sobre la cara $\Delta y \Delta z$ en el punto x y en el punto $x + \Delta x$, esto es

$$\Delta f_x = [\mathcal{P}(x, y, z) - \mathcal{P}(x + \Delta x, y, z)] \Delta y \Delta z \quad (1.1)$$

donde $\mathcal{P}(x, y, z)$ es la función que describe la presión. El desarrollo de Taylor a primer orden en Δx nos da

$$\Delta f_x = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} \Delta V \quad (1.2)$$

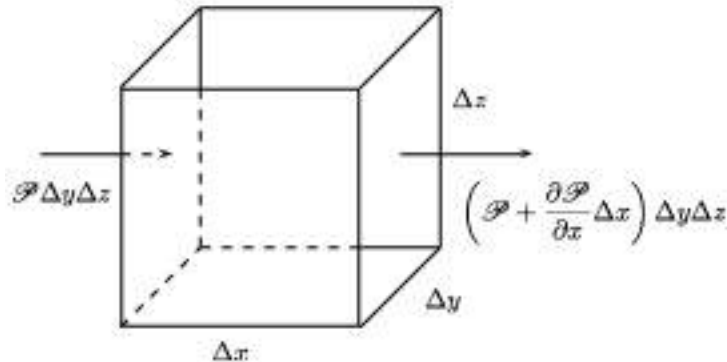


Figura 1.2: Diferencia de presiones en un elemento de volumen ΔV .

De la misma forma podemos encontrar expresiones análogas para Δf_y y Δf_z . Por su parte la presencia del campo gravitacional introduce una fuerza adicional en la dirección vertical $\Delta w = g\rho\Delta V$. Combinando todos estos elementos nos lleva a

$$\Delta \vec{f} = -\nabla \mathcal{P} \Delta V + \vec{g} \rho \Delta V \quad (1.3)$$

Ahora calculamos la expresión para la aceleración del elemento de fluido; para ello, sea $\vec{u}(x, y, z, t)$ la función de las coordenadas y el tiempo que nos proporciona la velocidad del elemento de fluido cuando éste se encuentra en el punto (x, y, z) al tiempo t . Es decir, $\vec{u}(x, y, z, t)$ representa el campo de velocidades del fluido. Si después de un intervalo de tiempo Δt el elemento de fluido ha cambiado su posición al punto $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ su velocidad estará dada por $\vec{u}(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t)$, El incremento en la velocidad es

$$\Delta \vec{u} = \vec{u}(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t) - \vec{u}(x, y, z, t) \quad (1.4)$$

El desarrollo de Taylor a primer orden en los incrementos nos da

$$\Delta \vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \Delta t \quad (1.5)$$

dividiendo por Δt y tomando el límite $\Delta t \rightarrow 0$ obtenemos la aceleración del elemento de fluido

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} u_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} u_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} u_z + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \quad (1.6)$$

y reconociendo en los primeros tres términos el producto escalar de la velocidad con el operador nabra, obtenemos finalmente

$$\vec{a} = (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \quad (1.7)$$

es decir, la aceleración del elemento de fluido contiene dos términos: uno asociado al cambio espacial de la velocidad y otro que proviene del cambio local de la velocidad.

Ahora que hemos obtenido las expresiones para la fuerza y la aceleración, haciendo uso de la segunda ley de Newton podemos obtener la ecuación de movimiento para el

elemento de fluido, de masa $\Delta m = \rho \Delta V$,

$$-\nabla \mathcal{P} + \rho \vec{g} = \rho \left[(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right] \quad (1.8)$$

éstas son llamadas ecuaciones de Euler y representan un caso reducido de las ecuaciones de Navier-Stokes que, en general, toman en cuenta la viscosidad del fluido y tienen la forma

$$-\nabla \mathcal{P} + \rho \vec{f} + \mu \left(\frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) + \nabla^2 \vec{u} \right) = \rho \left[(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right]$$

donde μ es el coeficiente de viscosidad dinámica del fluido y \vec{f} es la fuerza por unidad de masa.

1.2. Ecuación de onda acústica

Las cantidades \mathcal{P} y ρ son medidas instantáneas de la presión y la densidad respectivamente, es conveniente trabajar con cantidades más apropiadas a nuestro propósito. Para esto, consideremos el fluido en equilibrio y sean \mathcal{P}_0 y ρ_0 la presión y densidad del estado de equilibrio, en ausencia de la onda sonora. Entonces

$$p = \mathcal{P} - \mathcal{P}_0 \quad (1.9)$$

representa la componente de la presión que cambia y esto lo interpretamos como la presión debido a la onda sonora; es decir, es la presión acústica. Además, conviene definir el parámetro llamado condensación

$$\theta = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \quad (1.10)$$

el cual mide la proporción del incremento de la densidad respecto a la densidad en equilibrio.

De las expresiones anteriores podemos obtener $\mathcal{P} = p + \mathcal{P}_0$ y $\rho = \rho_0(1 + \theta)$ que al sustituir en la ecuación de Euler, (1.8), nos lleva a

$$-\nabla p - \nabla \mathcal{P}_0 + \vec{g} \rho_0 + \vec{g} \rho_0 \theta = \rho_0(1 + \theta) \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right] \quad (1.11)$$

En equilibrio la presión proviene unicamente del peso del propio fluido, entonces $\mathcal{P}_0 = \rho_0 g z$, y por lo tanto $\nabla \mathcal{P}_0 = \rho_0 \vec{g}$, así la ecuación anterior se reduce a

$$-\nabla p + \vec{g}\rho_0\theta = \rho_0(1 + \theta) \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} \right] \quad (1.12)$$

y después de dividir por ρ_0 obtenemos finalmente

$$-\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \vec{g}\theta = (1 + \theta) \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} \right] \quad (1.13)$$

Ahora tomamos en cuenta que en las ondas acústicas el cambio en la densidad es muy pequeño respecto a la densidad en equilibrio, por lo que podemos tomar $\theta \ll 1$, esto se ve reflejado en que $|\vec{g}\theta| \ll |\frac{1}{\rho_0}\nabla p|$. Además asumimos que el cambio local de la velocidad del fluido es muy grande comparado con el cambio espacial, esto es $|\partial \vec{u} / \partial t| \gg |(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}|$, entonces la ecuación anterior se reduce a

$$-\frac{1}{\rho_0}\nabla p = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \quad (1.14a)$$

$$\vec{u} = -\frac{1}{\rho_0} \int \nabla p dt \quad (1.14b)$$

donde la segunda ecuación representa la integral respecto al tiempo de la primera.

Las últimas dos expresiones relacionan la velocidad del elemento de fluido con la presión acústica.

Tomando la divergencia de la ecuación (1.14a) y multiplicando por $-\rho_0$ tenemos

$$\begin{aligned} \nabla^2 p &= -\rho_0 \frac{\partial \nabla \cdot \vec{u}}{\partial t} \\ &= -\rho_0 \frac{\partial^2 \nabla \cdot \vec{\xi}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.15)$$

donde $\vec{\xi}$ es el vector de desplazamiento del fluido, dependiente de las coordenadas y el tiempo, con forma explícita

$$\vec{\xi} = \xi_x \hat{i} + \xi_y \hat{j} + \xi_z \hat{k} \quad (1.16)$$

con ξ_x , ξ_y y ξ_z los desplazamientos en las direcciones x , y y z respectivamente.

Para encontrar $\nabla \cdot \vec{\xi}$, veamos la condensación en términos del volumen

$$\begin{aligned}
\theta &= \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \\
&= \frac{\frac{m}{V} - \frac{m}{V_0}}{\frac{m}{V_0}} \\
&= -\frac{V - V_0}{V}
\end{aligned} \tag{1.17}$$

De la expresión anterior podemos escribir

$$\begin{aligned}
-\frac{V - V_0}{V_0} &= \frac{V}{V_0} \theta \\
&= \frac{V_0 + V - V_0}{V_0} \theta \\
&= \theta \left(1 - \frac{V - V_0}{V_0} \right)
\end{aligned}$$

ahora despejamos $-\frac{V-V_0}{V_0}$ para tener

$$-\frac{V - V_0}{V_0} = \theta - \theta^2 + \dots$$

y de aquí, tomando en cuenta que la condensación es mucho menor que uno, podemos usar la aproximación

$$\theta = -\frac{V - V_0}{V_0} \tag{1.18}$$

Considerando un volumen diferencial $V_0 = \Delta x \Delta y \Delta z$, la condensación se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\theta &= -\frac{\left(\Delta x + \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \Delta x\right) \left(\Delta y + \frac{\partial \xi_y}{\partial y} \Delta y\right) \left(\Delta z + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \Delta z\right) - \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} \\
&= 1 - \left(1 + \frac{\partial \xi_x}{\partial x}\right) \left(1 + \frac{\partial \xi_y}{\partial y}\right) \left(1 + \frac{\partial \xi_z}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{1.19}$$

y usando el desarrollo a primer orden queda

$$\theta = -\left(\frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_y}{\partial y} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z}\right) = -\nabla \cdot \vec{\xi} \tag{1.20}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (1.15) obtenemos

$$\nabla^2 p = \rho_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \tag{1.21}$$

Por otro lado, la ecuación de estado para el fluido es una relación matemática entre las distintas variables termodinámicas del fluido, en particular nos interesa escribir en forma explícita la relación entre presión y volumen considerando de manera implícita el resto de las variables, $\mathcal{P} = \mathcal{P}(V)$. Tomando el desarrollo en serie de Taylor alrededor de V_0 tenemos

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 + \left. \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial V} \right) \right|_{V_0} (V - V_0) + \left. \left(\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial V^2} \right) \right|_{V_0} (V - V_0)^2 + \dots \quad (1.22)$$

Como los cambios de volumen son pequeños, tomamos la expresión a primer orden y obtenemos que la presión acústica está dada por

$$p = \mathcal{P} - \mathcal{P}_0 = \left. \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial V} \right) \right|_{V_0} (V - V_0) \quad (1.23)$$

esto es

$$p = -V \left. \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial V} \right) \right|_{V_0} \theta \quad (1.24)$$

donde hemos usado la expresión para θ , ecuación (1.18).

El coeficiente que relaciona la presión con la condensación en la expresión anterior se llama *módulo de bulk*, o módulo de compresibilidad, se denota con \mathcal{B} y es una medida de la resistencia del fluido a la compresión uniforme

$$\mathcal{B} = -V \left. \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial V} \right) \right|_{V_0} \quad (1.25)$$

con este parámetro reescribimos la expresión para la presión acústica

$$p = \mathcal{B}\theta \quad (1.26)$$

A partir de esta expresión sustituimos θ en la ecuación (1.21) y obtenemos la ecuación que satisface la presión acústica

$$\nabla^2 p = \frac{\rho_0}{\mathcal{B}} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (1.27)$$

es decir, la presión acústica p satisface una ecuación de onda cuyas soluciones, como veremos, son perturbaciones que se trasladan con velocidad $\pm \sqrt{\frac{\mathcal{B}}{\rho_0}}$.

Definimos, entonces, la velocidad termodinámica de la onda de presión en el fluido como

$$c = \sqrt{\frac{\mathcal{B}}{\rho_0}} \quad (1.28)$$

llamada *fórmula de Newton-Laplace*, la cual permite tener la ecuación de onda en términos de un sólo parámetro, c :

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (1.29)$$

Es fácil entender el tipo de soluciones de la ecuación de onda (1.29), para ello basta considerar las variables

$$\eta_{\pm} = \hat{n} \cdot \vec{r} \pm ct \quad (1.30)$$

donde \hat{n} es un vector unitario constante.

Usando la regla de la cadena se demuestra que los operadores ∇ y $\partial/\partial t$ están dados por

$$\begin{aligned} \nabla &= \hat{n} \left(\frac{\partial}{\partial \eta_+} + \frac{\partial}{\partial \eta_-} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} &= c \left(\frac{\partial}{\partial \eta_+} - \frac{\partial}{\partial \eta_-} \right) \end{aligned} \quad (1.31)$$

Sustituyendo esas expresiones para los operadores en la ecuación de onda (1.29) resulta

$$\hat{n} \cdot \hat{n} \left(\frac{\partial}{\partial \eta_+} + \frac{\partial}{\partial \eta_-} \right)^2 p = \frac{1}{c^2} c^2 \left(\frac{\partial}{\partial \eta_+} - \frac{\partial}{\partial \eta_-} \right)^2 p \quad (1.32)$$

como \hat{n} es un vector unitario, después de desarrollar los operadores y hacer las cancelaciones pertinentes queda

$$\frac{\partial}{\partial \eta_+} \frac{\partial p}{\partial \eta_-} = 0 \quad (1.33)$$

ésta es la ecuación de onda en las variables (1.30). Pero, esta ecuación se integra de inmediato, su solución general es

$$p = f(\eta_-) + g(\eta_+) \quad (1.34)$$

donde la forma de las funciones f y g es arbitraria. Cambiando a las variables originales obtenemos

$$p(\vec{r}, t) = f(\hat{n} \cdot \vec{r} - ct) + g(\hat{n} \cdot \vec{r} + ct) \quad (1.35)$$

el primer término representa una onda viajando en la dirección \hat{n} con velocidad c , el segundo término es una onda viajando en la dirección $-\hat{n}$ con la misma velocidad c . Es decir, la presión acústica en el punto \vec{r} al tiempo t es la superposición de dos ondas viajando en direcciones opuestas, con la velocidad c .

Es usual que a la velocidad de onda en el fluido, c , se le llame *velocidad del sonido*.¹ De aquí en adelante consideraremos que el fluido es un gas y mostraremos cómo la velocidad del sonido está relacionada a otras propiedades del gas.

1.3. Proceso adiabático

Como veremos, el gas en el cuello del resonador de Helmholtz interactúa con el cuerpo del resonador sin un intercambio significativo de calor; por ello, en esta sección revisaremos los elementos del proceso adiabático. Un gas de peso molecular μ es una sustancia termodinámica cuyo estado de equilibrio está determinado por su presión P y temperatura absoluta T . Un volumen V definido del gas, que encierra una masa m , tiene una densidad $\rho_0 = m/V$ y contiene $n = m/\mu$ moles. La ecuación de estado es una relación funcional entre P , V y T para una cantidad específica de gas. Bajo condiciones de equilibrio, dos de las variables de estado determinan la tercera. La ecuación de estado para gases reales es representada con buena aproximación por la de un gas ideal

$$PV = nRT \tag{1.36}$$

donde $R = 8.314 J/molK$ es la constante universal de los gases, una de las constantes principales de la naturaleza.

La termodinámica nos dice que, en general, necesitamos conocer más que la ecuación de estado para especificar completamente las propiedades termodinámicas de una sustancia que tiene las variables de estado P , V y T . La información adicional puede consistir en el conocimiento de un calor específico, como el calor específico a presión constante C_P

¹Alternativamente, la velocidad del sonido en el fluido es $c^2 = \frac{1}{\theta} \frac{p}{\rho_0}$.

o el calor específico a volumen constante C_V , como función de la temperatura. Con esta información, y la de la ecuación de estado, la termodinámica nos permite calcular muchas otras propiedades de la sustancia, incluyendo su módulo de bulk, \mathcal{B} , y entonces a partir de la fórmula de Newton-Laplace obtener la velocidad del sonido.

Los gases que tienen una ecuación de estado aproximada por la ecuación (1.36) usualmente tiene calores específicos C_P y C_V prácticamente constantes en un rango limitado de temperaturas.

Por otro lado, la primera ley de la termodinámica establece la relación entre la energía interna U de un sistema, la energía suministrada al mismo en forma de calor Q y el trabajo W realizado por éste. En su forma diferencial, esta ley se enuncia como sigue

$$dU = dQ + dW \quad (1.37)$$

Para encontrar la expresión del trabajo en un sistema, supongamos que tenemos un recipiente de sección transversal A y longitud L que encierra un volumen $V = AL$ de gas a una presión p . Supongamos ahora que permitimos que el gas se expanda, pasando su longitud de L a $L + dl$ e incrementando su volumen en $dV = Adl$, el trabajo realizado por la fuerza debido a la presión es

$$dW = -pAdl = -pdV \quad (1.38)$$

donde hemos incorporado un signo negativo ya que, por convención, un trabajo positivo será aquel que actúe sobre el sistema disminuyendo su volumen. Con este resultado la primera ley de la termodinámica se escribe como

$$dQ = dU + pdV \quad (1.39)$$

Ahora, de la ecuación de estado para el gas ideal, ecuación (1.36), tomando el diferencial tenemos

$$pdV + Vdp = nRdT \quad (1.40)$$

y combinando con la ecuación (1.39) obtenemos la siguiente expresión para la ley termo-

dinámica válida para un gas ideal

$$dQ = dU + nRdT - Vdp \quad (1.41)$$

Consideremos ahora un proceso a volumen constante, $dV = 0$. Se sigue de (1.39) que en este tipo de proceso el cambio en la energía interna es igual al cambio de calor

$$dU = dQ \quad (1.42)$$

y tomando en cuenta la definición de capacidad calorífica a volumen constante

$$C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V \quad (1.43)$$

entonces, el cambio en la energía interna se expresa como

$$dU = C_V dT \quad (1.44)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (1.41) obtenemos

$$\begin{aligned} dQ &= C_V dT + nRdT - Vdp \\ &= (C_V + nR)dT - Vdp \end{aligned} \quad (1.45)$$

Ahora consideremos un proceso a presión constante, $dp = 0$, de la ecuación anterior se sigue que en este caso

$$dQ = (C_V + nR)dT \quad (1.46)$$

De igual forma que en (1.43), se define la capacidad calorífica a presión constante como

$$C_P = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_P \quad (1.47)$$

entonces, en este proceso $dQ = C_P dT$ y sustituyendo esto en (1.46) obtenemos, después de cancelar el factor dT ,

$$C_P = C_V + nR \quad (1.48)$$

esto es, en un gas ideal las capacidades caloríficas C_V y C_P no son independientes, esto permite definir un parámetro γ como la razón de dichas capacidades caloríficas

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = 1 + \frac{nR}{C_V} \quad (1.49)$$

como ambos términos del lado derecho son positivos entonces $\gamma > 1$; en consecuencia en un gas la capacidad calorífica a presión constante siempre es mayor que la capacidad calorífica a volumen constante.

Sustituyendo la ecuación (1.44) en (1.39) y la ecuación (1.48) en (1.45) obtenemos

$$dQ = C_V dT + p dV \quad (1.50a)$$

$$dQ = C_P dT - V dp \quad (1.50b)$$

Cuando un gas se expande, o se contrae, de modo que no hay flujo de calor entrando o saliendo del gas, se dice que se encuentra en un proceso adiabático; es decir, $dQ = 0$ y las ecuaciones (1.50a) y (1.50b) se reducen a

$$C_V dT = -p dV \quad (1.51a)$$

$$C_P dT = V dp \quad (1.51b)$$

De estas ecuaciones, eliminando dT , obtenemos

$$\frac{V dp}{C_P} = -\frac{p dV}{C_V} \quad (1.52)$$

utilizando la definición de γ y separando las variables p y V

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V} \quad (1.53)$$

e integrando desde p_0, V_0 hasta p, V queda

$$\ln p - \ln p_0 = -\gamma [\ln V - \ln V_0] \quad (1.54)$$

finalmente, separando las variables iniciales de las finales y utilizando propiedades de los logaritmos queda

$$pV^\gamma = p_0V_0^\gamma \quad (1.55)$$

de esta forma hemos obtenido la ecuación de estado del gas ideal en un proceso adiabático

$$pV^\gamma = \text{constante} \quad (1.56)$$

Cuando el calor puede fluir al gas pero la temperatura se mantiene constante, de la ecuación de estado del gas ideal (1.36) se sigue que el gas obedece la ecuación isotérmica:

$$pV = \text{constante} \quad (1.57)$$

Las ecuaciones (1.56) y (1.57) son más representativas de los gases reales en el límite del desvanecimiento de presión. De la primera de estas ecuaciones obtenemos el módulo de bulk adiabático:

$$\mathcal{B}_A = -V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right) \Big|_{V_0} = \gamma p \quad (1.58)$$

de la segunda obtenemos el módulo de bulk isotérmico,

$$\mathcal{B}_T = -V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right) \Big|_{V_0} = p \quad (1.59)$$

La velocidad del sonido en términos del módulo de Bulk está dada por la fórmula de Newton-Laplace, ecuación(1.28), de modo que las velocidades del sonido correspondientes a los procesos adiabático e isotérmico son:

$$c_A = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho_0}} \quad (1.60a)$$

$$c_T = \sqrt{\frac{p}{\rho_0}} \quad (1.60b)$$

La ecuación (1.60a) da un valor más cercano al valor correcto de la velocidad del sonido en gases, porque las compresiones y rarefacciones están tan ampliamente separadas que prácticamente no hay transferencia de calor. La fórmula isoterma (1.60b) es principalmente de interés histórico. Newton propuso esto en 1686 teóricamente, antes de que la distinción entre los procesos isotérmicos y adiabáticos fuera conocida. La fórmula newtoniana para la velocidad del sonido en el aire daba un valor considerablemente menor comparado con el experimental, ya que $\gamma \approx 1.4$ para el aire. Laplace, en 1816, señaló que se necesitaba considerar el proceso como adiabático.

En el fenómeno real, ocurre que un flujo de calor muy pequeño toma lugar dando como consecuencia que la onda de sonido se atenúe. Sin embargo, la experiencia indica que dicha atenuación es muy pequeña y que la onda viaja distancias muy grandes sin verse significativamente atenuada. Por ello, la cantidad de calor involucrada debe ser extremadamente pequeña, implicando que la hipótesis adiabática es muy buena.

Capítulo 2

Impedancia acústica

Es común encontrar el término impedancia en diferentes ramas de la Física ya que es la relación entre la magnitud de una acción periódica y la respuesta producida en el sistema físico; así, tenemos la impedancia eléctrica que es la razón entre el voltaje y la corriente, como una medida de la oposición del circuito al paso de la segunda; la impedancia mecánica, como la medida de la oposición al movimiento de una estructura sujeta a una fuerza. La impedancia acústica está relacionada a la propagación de ondas sonoras en un medio acústico.

Este capítulo tiene como objetivo revisar la impedancia acústica y calcular las impedancias relevantes para el estudio del resonador. Comenzaremos estudiando el oscilador forzado y amortiguado para identificar elementos importantes que aprovecharemos en el desarrollo de este trabajo y como una ilustración del concepto de impedancia.

2.1. Impedancia mecánica

Consideremos un cuerpo de masa m bajo la acción de una fuerza de restitución lineal en la posición $-kx$, sujeto a una fuerza disipativa proporcional a la velocidad, $-R_m \frac{dx}{dt}$, donde R_m es una constante positiva llamada resistencia mecánica, e impulsado por una fuerza externa $F(t)$. La ecuación que describe el movimiento se obtiene a partir de la segunda ley de Newton

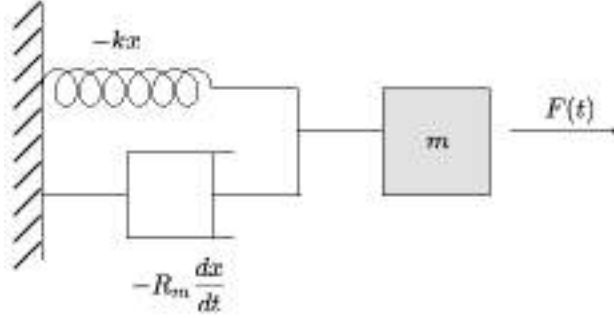


Figura 2.1: Oscilador sujeto a una fuerza de restitución $-kx$, fuerza disipativa $R_m \dot{x}$ e impulsado por $F(t)$.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - R_m \frac{dx}{dt} + F(t) \quad (2.1)$$

Dividiendo por m y redefiniendo los parámetros

$$\beta = \frac{R_m}{2m} \quad (2.2a)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (2.2b)$$

la ecuación de movimiento lleva a la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f(t) \quad (2.3)$$

donde $f(t)$ es la fuerza externa por unidad de masa.

La solución a la ecuación anterior será entonces la suma de dos partes: la solución general a la ecuación homogénea, $x_H(t)$, que contiene dos constantes arbitrarias, y una solución particular, $x_P(t)$, que dependerá del forzamiento externo $f(t)$:

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t) \quad (2.4)$$

La solución $x_H(t)$ se obtiene resolviendo la ecuación homogénea

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.5)$$

dado que la ecuación es lineal y de coeficientes constantes su solución es de la forma

$$x = Ae^{\lambda t} \quad (2.6)$$

donde λ satisface la ecuación algebraica que se sigue de sustituir la solución anterior en (2.5)

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (2.7)$$

este polinomio de segundo grado tiene como raíces

$$\lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad (2.8)$$

Para nuestro propósito es suficiente considerar el caso en que la resistencia mecánica es muy pequeña, por ello $\omega_0 > \beta$, de modo que λ es un número complejo. Notamos que si $R_m = 0$ entonces $\lambda = \pm i\omega_0$ lo que sugiere definir una nueva constante

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (2.9)$$

con lo cual λ se escribe ahora como

$$\lambda = -\beta \pm i\omega_a \quad (2.10)$$

y ω_a resulta ser la frecuencia angular del oscilador corregida por el amortiguamiento. Notemos que ω_a siempre es menor que la frecuencia angular natural ω_0 del oscilador sin amortiguar.

La solución general a la ecuación homogénea es entonces

$$x_H(t) = e^{-\beta t} (A_1 e^{i\omega_a t} + A_2 e^{-i\omega_a t}) \quad (2.11)$$

donde A_1 y A_2 son constantes reales arbitrarias. En forma alternativa, la solución $x_H(t)$ se puede escribir como

$$x_H(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_a t + \phi) \quad (2.12)$$

donde A y ϕ son constantes reales determinadas por las condiciones iniciales.

Debido al factor exponencial negativo, después de un tiempo $t \gg 1/\beta$, el término de amortiguamiento hace que la solución $x_H(t)$ sea despreciable comparada con la solución

$x_P(t)$ y por lo tanto el movimiento del oscilador se describe por $x_P(t)$ para tiempos grandes

$$x(t) \rightarrow x_P(t) \quad t \gg \frac{1}{\beta} \quad (2.13)$$

Lo anterior podemos entenderlo de la siguiente manera: el movimiento tiene dos etapas, en los primeros instantes $x_H(t)$ contribuye significativamente al movimiento junto con $x_P(t)$, esta etapa del movimiento se conoce como transitorio, el movimiento transitorio depende de las condiciones iniciales; luego, conforme transcurre el tiempo la contribución de $x_H(t)$ es cada vez más pequeña y el movimiento se parece cada vez más a $x_P(t)$, esta etapa se conoce como estacionario. El movimiento estacionario descrito por $x_P(t)$ es independiente de las condiciones iniciales y sólo depende del forzamiento externo.

Ahora buscamos la solución particular; para ello, consideramos que el forzamiento externo es del tipo sinusoidal, $f(t) = f_0 \cos \Omega t$, para tener la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t \quad (2.14)$$

La solución particular de la ecuación (2.14) se encuentra más fácilmente si reemplazamos el forzamiento externo $f_0 \cos \Omega t$ por la parte real de la expresión compleja $\mathbf{f}(t) = f_0 e^{i\Omega t}$. Como el operador del lado izquierdo de la ecuación (2.14) es lineal, y además real, podemos reemplazar la variable x por la parte real de la variable compleja $\mathbf{x} = x + iy$. Con lo anterior la ecuación diferencial a resolver se convierte en¹

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} + 2\beta \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{x} = f_0 e^{i\Omega t} \quad (2.15)$$

y de su solución basta tomar la parte real para obtener $x(t)$.

Por ser (2.15) una ecuación diferencial lineal, la solución particular tiene la forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{A} e^{i\Omega t} \quad (2.16)$$

donde \mathbf{A} es una constante compleja. Sustituyendo en la ecuación diferencial tenemos

$$(-\Omega^2 + 2i\beta\Omega + \omega_0^2)\mathbf{A} e^{i\Omega t} = f_0 e^{i\Omega t} \quad (2.17)$$

¹De aquí en adelante reservaremos la notación en negrita para denotar números complejos.

cancelando el factor $e^{i\Omega t}$ y despejando \mathbf{A} queda

$$\mathbf{A} = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\beta\Omega} \quad (2.18)$$

lo que lleva a la solución del desplazamiento complejo $\mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{i\Omega} \frac{mf_0 e^{i\Omega t}}{R_m + i\frac{m}{\Omega}(\Omega^2 - \omega_0^2)} \quad (2.19)$$

Derivando la expresión anterior con respecto al tiempo obtenemos una velocidad en los complejos cuya parte real es la velocidad del oscilador

$$\mathbf{u}(t) = \frac{mf_0 e^{i\Omega t}}{R_m + i\frac{m}{\Omega}(\Omega^2 - \omega_0^2)} \quad (2.20)$$

Las últimas dos expresiones pueden ser escritas en una forma más sencilla si definimos la *impedancia mecánica* del sistema, \mathbf{Z}_m , como la función compleja de la variable Ω

$$\mathbf{Z}_m(\Omega) = R_m + i\frac{m}{\Omega}(\Omega^2 - \omega_0^2) \quad (2.21)$$

entonces \mathbf{x} y \mathbf{u} se escriben como

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{i\Omega} \frac{F_0}{\mathbf{Z}_m} e^{i\Omega t} \quad (2.22a)$$

$$\mathbf{u}(t) = \frac{F_0}{\mathbf{Z}_m} e^{i\Omega t} \quad (2.22b)$$

donde $F_0 = mf_0$ es la amplitud de la fuerza aplicada.

Estas expresiones nos permiten aclarar el significado físico de la impedancia \mathbf{Z}_m ; para ello, basta tomar su forma polar

$$\mathbf{Z}_m = Z_m e^{i\varphi} \quad (2.23)$$

donde Z_m es la magnitud de la impedancia

$$Z_m(\Omega) = \sqrt{R_m^2 + \frac{m^2}{\Omega^2}(\Omega^2 - \omega_0^2)^2} \quad (2.24)$$

y φ es la fase de la impedancia

$$\varphi(\Omega) = \tan^{-1} \frac{m(\Omega^2 - \omega_0^2)}{\Omega R_m} \quad (2.25)$$

Usando la forma polar de \mathbf{Z}_m podemos escribir las ecuaciones (2.22a) y (2.22b) en la forma

$$\mathbf{x}(t) = \frac{F_0}{\Omega Z_m} e^{i(\Omega t - \varphi - \frac{\pi}{2})} \quad (2.26a)$$

$$\mathbf{u}(t) = \frac{F_0}{Z_m} e^{i(\Omega t - \varphi)} \quad (2.26b)$$

y hemos usado la identidad $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$. La parte real de estas expresiones nos dan la posición y velocidad del oscilador en el estado estacionario

$$x(t) = \frac{F_0}{\Omega Z_m(\Omega)} \text{sen}(\Omega t - \varphi) \quad (2.27a)$$

$$u(t) = \frac{F_0}{Z_m(\Omega)} \text{cos}(\Omega t - \varphi) \quad (2.27b)$$

donde usamos $\text{cos}(\theta - \frac{\pi}{2}) = \text{sen}\theta$. Es decir, la amplitud de la velocidad, en el régimen estacionario, es inversamente proporcional a la magnitud de la impedancia mecánica y la fase de la impedancia representa el desfaseamiento entre la aplicación de la fuerza y la velocidad del oscilador.² Esto significa que la impedancia mecánica, como número complejo, contiene toda la información sobre la respuesta del oscilador en el régimen estacionario, una vez conocido el forzamiento externo.

La parte real de la impedancia representa la resistencia mecánica; la parte imaginaria se llama *reactancia* y se denota con $X = \Im\{\mathbf{Z}\}$. La reactancia mecánica del oscilador es la función de la frecuencia Ω :

$$X_m(\Omega) = \frac{m}{\Omega} (\Omega^2 - \omega_0^2) \quad (2.28)$$

que permite escribir la impedancia del oscilador como la suma, compleja, de la resistencia y la reactancia

$$\mathbf{Z}_m = R_m + iX_m \quad (2.29)$$

con magnitud

$$Z_m = \sqrt{R_m^2 + X_m^2} \quad (2.30)$$

²Note que igualmente pudimos definir una impedancia en relación con la posición del oscilador, lo cual es más frecuente en los sistemas mecánicos, pero para el propósito del presente trabajo es preferible la impedancia en relación con la velocidad.

Claramente, de las ecuaciones (2.27a) y (2.27b), la respuesta del oscilador es máxima cuando Z_m es mínima y esto ocurre para aquellas frecuencias Ω que hacen que la reactancia sea cero. Este fenómeno se llama *resonancia* y la frecuencia a la cual ocurre se llama *frecuencia de resonancia*.

De la expresión (2.28) se sigue que para el oscilador la frecuencia de resonancia es $\Omega_r = \omega_0$; es decir, si el forzamiento externo tiene la misma frecuencia que la frecuencia natural del oscilador la amplitud de respuesta del oscilador tiene un máximo local y la magnitud de la impedancia es mínima.

2.2. Impedancia acústica

La impedancia acústica, cuyo símbolo es \mathbf{Z} , es la razón de la presión acústica al flujo de volumen acústico, $\mathbf{Z} = \mathbf{p}/\mathbf{U}$. El flujo es medido en metros cúbicos por segundo, entonces, de la definición podemos ver que las unidades de la impedancia acústica son de presión por segundo sobre metro cúbico, $Pa \cdot s/m^3$.

La impedancia acústica es una función que varía con la frecuencia. La impedancia acústica a una frecuencia en particular indica cuánta presión es generada por la onda acústica de esa frecuencia. En el caso particular de instrumentos de viento, la impedancia acústica tiene la ventaja de ser una propiedad física del instrumento y lo caracteriza.

Se pueden definir los siguientes tres tipos de impedancias acústicas ya que éstas son muy útiles en diferentes circunstancias:

1. La *impedancia acústica específica*, \mathbf{Z} , es la razón de presión acústica \mathbf{p} a la velocidad \mathbf{u} asociada a la partícula oscilante en un medio. Es una propiedad característica del medio y del tipo de onda que es propagada. Es útil en cálculos que involucran la transmisión de ondas acústicas de un medio a otro.

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{u}} \quad (2.31)$$

2. La *impedancia de radiación acústica*, \mathbf{Z}_{ra} , la cual es útil en el estudio de radiación acústica de superficies vibrantes. Está relacionada con la impedancia acústica

específica por la expresión

$$\mathbf{Z}_{ra} = \frac{\mathbf{Z}}{S} \quad (2.32)$$

donde S es el área de la superficie vibrante.

3. La *impedancia de radiación*, \mathbf{Z}_r , usada en cálculos de acoplamientos entre ondas acústicas y fuentes de forzamiento o cargas impulsadas. Es parte de la impedancia mecánica \mathbf{Z}_m de un sistema vibrante relacionada con la radiación de sonido. La impedancia de radiación se define como la razón entre la fuerza \mathbf{f} y la velocidad \mathbf{u} asociada a la partícula oscilante del medio y está relacionada con la impedancia acústica específica en una superficie por la expresión

$$\mathbf{Z}_r = S\mathbf{Z} \quad (2.33)$$

2.3. Radiación de una esfera pulsante

La fuente acústica más sencilla es la esfera pulsante. Ésta consiste en una esfera cuyo radio oscila con el tiempo, lo cual provoca que la esfera emita una onda de presión que se manifiesta como la onda acústica. La esfera pulsante es muy útil ya que sirve como modelo para analizar una importante variedad de fuentes que en la literatura especializada se refieren como *fuentes simples*.



Figura 2.2: Esfera pulsante de radio promedio a .

En un medio homogéneo e isotrópico, la esfera pulsante produce una onda de presión que es esférica, saliente y con las mismas propiedades en todas direcciones. Matemática-

mente, esta onda de presión sólo depende de la variable radial r y el tiempo t , es decir se describe por una función real $p(r, t)$. La forma explícita de $p(r, t)$ se obtiene a partir de la ecuación de onda (1.29)

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (2.34)$$

que escrita en coordenadas esféricas, y tomando en cuenta que la presión es independiente de los ángulos, se reduce a

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (2.35)$$

Si hacemos el cambio de función

$$p(r, t) = \frac{q(r, t)}{r} \quad (2.36)$$

entonces, al sustituir en la ecuación anterior obtenemos la ecuación que satisface la función $q(r, t)$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \quad (2.37)$$

esta ecuación se resuelve con el método de separación de variables y proporciona la solución

$$q(r, t) = \mathbf{A} e^{ik(ct-r)} \quad (2.38)$$

donde k , la constante de separación, tiene unidades de inverso de la distancia y se conoce como *número de onda*. Esta solución es una función en los complejos que representa una onda esférica saliente. Entonces hay que tomar la parte real de esta función para obtener la presión acústica $p(r, t)$. Como el producto kc tiene unidades de inverso de tiempo es conveniente introducir la frecuencia $\omega = kc$, por lo tanto, la onda de presión se describe por la parte real de la presión compleja

$$\mathbf{p}(r, t) = \frac{\mathbf{A}}{r} e^{i(\omega t - kr)} \quad (2.39)$$

donde A está determinada por las condiciones en la frontera. Ésta es una onda radial de frecuencia ω , que se desplaza con la velocidad del sonido c y cuya amplitud decae con la distancia como $1/r$.

Consideremos una esfera de radio promedio a , vibrando radialmente en forma cosenoidal, $r(t) = a \cos \omega t$, con el desplazamiento de la superficie mucho menor que el radio a . La

velocidad de la frontera de la esfera es la parte real de la velocidad compleja $\mathbf{u}(t) = u_0 e^{i\omega t}$. La presión acústica del fluido en contacto con la esfera se obtiene de (2.39) evaluando en $r = a$. Por su parte, la componente radial de la velocidad del fluido en contacto con la esfera se encuentra usando la impedancia acústica específica para la onda esférica, también evaluada en $r = a$.

Para encontrar la impedancia acústica de la esfera pulsante retomemos la relación entre presión y velocidad, ecuación (1.14b),

$$\vec{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\rho_0} \int \nabla \mathbf{p} dt \quad (2.40)$$

y sustituimos la expresión para la onda esférica, como ésta depende espacialmente sólo de la variable radial, queda

$$\vec{\mathbf{u}} = -\hat{r} \frac{1}{\rho_0} \int \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r} \frac{1}{r} e^{i(\omega t - kr)} dt \quad (2.41)$$

donde \hat{r} es el vector unitario radial.

Realizando por separado la operación indicada en el integrando obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r} \frac{1}{r} e^{i(\omega t - kr)} &= \frac{-ikr A e^{i(\omega t - kr)} - A e^{i(\omega t - kr)}}{r^2} \\ &= -\left(ik + \frac{1}{r} \right) \frac{\mathbf{A}}{r} e^{i(\omega t - kr)} \end{aligned} \quad (2.42)$$

sustituyendo en la integral, dividiendo por $-\rho_0$ y llevando a cabo la integración, resulta

$$\vec{\mathbf{u}} = \hat{r} \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{k}{\omega} - \frac{i}{\omega r} \right) \frac{\mathbf{A}}{r} e^{i(\omega t - kr)} \quad (2.43)$$

donde hemos omitido una constante de integración irrelevante para nuestro propósito. Identificando el último factor en esta relación como la presión, ecuación (2.39), y usando la expresión para la frecuencia, queda finalmente

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\rho_0 c k r} (kr - i) \mathbf{p}(r, t) \quad (2.44)$$

donde hemos omitido el carácter vectorial.

Ahora podemos calcular la impedancia acústica específica dada por el cociente de la presión con la velocidad, $\mathbf{Z} = \mathbf{p}/\mathbf{u}$, ecuación (2.31),

$$\mathbf{Z} = \rho_0 c k r \frac{kr + i}{(kr)^2 + 1} \quad (2.45)$$

o bien, escrita en forma polar

$$\begin{aligned}\mathbf{Z} &= \rho_0 c \frac{kr}{\sqrt{k^2 r^2 + 1}} e^{i\theta} \\ &= \rho_0 c \cos \theta e^{i\theta}\end{aligned}\quad (2.46)$$

donde el ángulo θ está determinado por $\tan \theta = 1/kr$. Note la dependencia de la impedancia en la variable r a través del ángulo $\theta(r)$.

En particular en $r = a$, la velocidad de la superficie de la esfera pulsante es la parte real de $\mathbf{u} = u_0 e^{i\omega t}$ y usando la impedancia evaluada en $r = a$ junto con la presión en la superficie de la esfera, obtenida de la expresión (2.39) evaluada en $r = a$, tenemos

$$\frac{\mathbf{A}}{a} e^{i(\omega t - ka)} = \rho_0 c \cos \theta_a e^{i\theta_a} u_0 e^{i\omega t} \quad (2.47)$$

donde $\tan \theta_a = 1/ka$. Despejando \mathbf{A} de esta expresión

$$\mathbf{A} = \rho_0 c u_0 a \cos \theta_a e^{i(ka + \theta_a)} \quad (2.48)$$

y sustituyendo en (2.39) obtenemos la presión compleja de la onda acústica emitida por la esfera pulsante de radio a

$$\mathbf{p}(r, t) = \frac{\rho_0 c u_0 a}{r} \cos \theta_a e^{i[\omega t - k(r-a) + \theta_a]} \quad (2.49)$$

la parte real de esta expresión nos proporciona $p(r, t)$:

$$p(r, t) = \frac{\rho_0 c u_0 a}{r} \cos \theta_a \cos[\omega t - k(r-a) + \theta_a] \quad (2.50)$$

2.4. Intensidad acústica

La intensidad de una onda acústica es el promedio temporal de la energía transmitida por unidad de área, por unidad de tiempo, en dirección normal a la propagación

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T pu \, dt \quad (2.51)$$

donde T es el periodo de la onda acústica.

La intensidad instantánea $I(t) = p(r, t)u(r, t)$ de una onda sonora es la razón instantánea por unidad de área y de tiempo a la cuál un elemento de fluido hace trabajo sobre otro adyacente. La intensidad acústica se mide en watts por metro cuadrado, W/m^2 .

Para la esfera pulsante, tanto la presión como la velocidad son radiales, por lo tanto el producto $\vec{p} \cdot \vec{u}$ se reduce a pu . La presión está dada por

$$p(r, t) = \frac{\rho_0 c u_0 a}{r} \cos \theta_a \cos[\omega t - k(r - a) + \theta_a] \quad (2.52)$$

y la velocidad la podemos calcular haciendo uso de la definición de impedancia $\mathbf{u} = \mathbf{p}/\mathbf{z}$. Con ayuda de (2.46) y (2.50) tenemos

$$\mathbf{u} = \frac{u_0 a \cos \theta_a}{r \cos \theta} e^{i[\omega t - k(r - a) + \theta_a - \theta]} \quad (2.53)$$

tomando la parte real de esta expresión

$$u(r, t) = \frac{u_0 a \cos \theta_a}{r \cos \theta} \cos[\omega t - k(r - a) + \theta_a - \theta] \quad (2.54)$$

Ahora estamos en condiciones de calcular la intensidad de la onda sonora emitida por la esfera pulsante. Sustituyendo (2.52) y (2.54) en (2.51), tenemos

$$I = \frac{1}{T} \frac{\rho_0 c u_0 a}{r} \cos \theta_a \frac{u_0 a \cos \theta_a}{r \cos \theta} \int_0^T \cos(\omega t - \Theta) \cos(\omega t - \Theta - \theta) dt \quad (2.55)$$

donde $\Theta = k(r - a) - \theta_a$. Utilizando la identidad $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ para modificar el segundo factor del integrando

$$I = \frac{1}{T} \frac{\rho_0 c u_0^2 a^2 \cos^2 \theta_a}{r^2 \cos \theta} \int_0^T [\cos^2(\omega t - \Theta) \cos \theta + \cos(\omega t - \Theta) \sin(\omega t - \Theta) \sin \theta] dt \quad (2.56)$$

Tomando en cuenta que el periodo de la onda es $T = 2\pi/\omega$ y que el segundo término del integrando es impar, su integral sobre un periodo es cero. Si además en el primer término usamos la identidad: $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, obtenemos

$$I = \frac{\rho_0 c u_0^2 a^2 \cos^2 \theta_a}{r^2 \cos \theta} \frac{1}{T} \left\{ \int_0^T \frac{1}{2} dt + \int_0^T \cos[2(\omega t - \Theta)] dt \right\} \cos \theta \quad (2.57)$$

de nuevo, el integrando de la segunda integral es impar y su integral en un periodo completo es cero. Por lo tanto, la intensidad acústica de la esfera pulsante es

$$I = \frac{1}{2} \frac{\rho_0 c u_0^2 a^2 \cos^2 \theta_a}{r^2} \quad (2.58)$$

Como una preparación para lo que discutiremos a continuación, nos interesa analizar matemáticamente el caso particular en que $ka \ll 1$. Dada esta condición, por ejemplo la presión se calcula a partir de (2.49)

$$\mathbf{p}(r, t) = \frac{\rho_0 c u_0 a}{r} \cos \theta_a e^{i[\omega t - k(r-a) + \theta_a]} \quad (2.59)$$

Recordando la definición de θ_a , la cual está dada por $\tan \theta_a = 1/ka$, tenemos

$$\begin{aligned} \sin \theta_a &= \frac{1}{\sqrt{1 + (ka)^2}} \\ \cos \theta_a &= \frac{ka}{\sqrt{1 + (ka)^2}} = ka \sin \theta_a \end{aligned} \quad (2.60)$$

Ahora veamos la parte que involucra a ka y a θ_a de (2.59)

$$\begin{aligned} \cos \theta_a e^{i(ka + \theta_a)} &= ka \sin \theta_a [\cos ka + i \sin ka] [\cos \theta_a + i \sin \theta_a] \\ &= ka \sin \theta_a [\cos ka + i \sin ka] [ka \sin \theta_a + i \sin \theta_a] \\ &= ka \sin^2 \theta_a [\cos ka + i \sin ka] [ka + i] \end{aligned} \quad (2.61)$$

Con la aproximación $ka \ll 1$ tenemos

$$\sin ka \approx ka \quad \cos ka \approx 1$$

para tener

$$\cos \theta_a e^{i(ka + \theta_a)} \approx ka \sin^2 \theta_a [1 + ika] [ka + i] \quad (2.62)$$

$$= ka \sin^2 \theta_a [ka - ka + i + ik^2 a^2] \quad (2.63)$$

$$= ika \sin^2 \theta_a [1 + k^2 a^2]$$

$$= ika$$

Con este resultado la presión en el régimen $ka \ll 1$ es

$$\mathbf{p}(r, t) = i \frac{\rho_0 c u_0 a}{r} k a e^{i(\omega t - kr)} \quad (2.64)$$

Por su parte la impedancia acústica específica en la superficie de la esfera pulsante está dada por (2.46) evaluada en $r = a$:

$$\mathbf{Z} = \rho_0 c \cos \theta_a e^{i\theta_a} \quad (2.65)$$

y en el régimen $ka \ll 1$, usando (2.60), se reduce a

$$\mathbf{Z} = \rho_0 c k a (ka + i) \quad (2.66)$$

Cuando el radio de la fuente a es pequeño comparado con la longitud de la onda sonora entonces se realiza la condición $ka \ll 1$, esto implica a su vez $\theta_a \rightarrow \pi/2$ y la impedancia acústica específica cerca de la superficie de la esfera es altamente reactiva. Esto es síntoma de la fuerte divergencia radial de la onda cerca de una fuente pequeña y representa el almacenamiento y liberación de energía a través de capas sucesivas del fluido que se estiran y se encogen esféricamente. Este efecto inercial se manifiesta en la reactancia tipo masa de la impedancia acústica específica. En este límite de longitud de onda grande, la presión

$$\mathbf{p}(r, t) = i \frac{\rho_0 c u_0 a}{r} k a e^{i(\omega t - kr)} \quad (2.67)$$

está desfasada con respecto a la velocidad de partícula por un ángulo cercano a $\pi/2$, la presión y velocidad de partícula no están fuera de fase exactamente por $\pi/2$ ya que esto llevaría al anulamiento de la intensidad.

Por otro lado, en el régimen $ka \ll 1$ la intensidad acústica se obtiene a partir de (2.58) y usando (2.60) queda

$$I = \frac{1}{2} \rho_0 c u_0^2 \left(\frac{a}{r}\right)^2 (ka)^2 \quad (2.68)$$

con u_0 constante. Es conveniente notar que la amplitud de la presión en (2.67), $P = \frac{\rho_0 c u_0 a}{r} k a$ y la intensidad están simplemente relacionados

$$I = \frac{P^2}{2\rho_0 c} \quad (2.69)$$

La intensidad (2.68) es proporcional al cuadrado de la frecuencia y depende de la cuarta potencia del radio de la fuente. De este modo, podemos ver que fuentes pequeñas, respecto a su longitud de onda, son inherentemente pobres radiadores de energía acústica.

Cuando las dimensiones de la fuente son más pequeñas que la longitud de onda radiada, el campo de presión depende de la cantidad de aire desplazado, una medida de esto es el desplazamiento de volumen, definido como el área de la superficie vibrante por la amplitud promedio del desplazamiento ξ . Su derivada temporal se conoce como *fortaleza de la fuente*

y está dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} &= \frac{d}{dt} \int_S \vec{\xi} \cdot d\vec{s} \\ &= \int_S \vec{u} \cdot \hat{n} ds\end{aligned}\quad (2.70)$$

donde S representa el área de la superficie vibrante y \hat{n} el vector unitario normal a la superficie. Notando que la fortaleza oscila con la frecuencia ω , podemos escribir

$$\mathbf{Q} = Q e^{i\omega t} \quad (2.71)$$

Es importante notar que, sin importar la forma que tengan, fuentes que producen el mismo campo acústico que una esfera pulsante, siempre que la longitud de onda sea mayor que las dimensiones de la fuente y que éstas tengan la misma fortaleza, son llamadas fuentes simples. Como consecuencia de esto, la razón de la fortaleza de a la presión que produce en un punto, a una distancia r de la fuente, es la misma para todas las fuentes simples, a la misma frecuencia. Este resultado es conocido como *principio de reciprocidad acústica* y se puede enunciar matemáticamente como

$$\frac{\mathbf{Q}_1}{\mathbf{p}_1(r)} = \frac{\mathbf{Q}_2}{\mathbf{p}_2(r)} \quad (2.72)$$

este cociente es llamado *factor de reciprocidad*.

Lo anterior nos permite calcular el campo de presión de cualquier fuente simple por más irregular que sea ya que dicho campo debe ser idéntico al campo de presión producido por una pequeña esfera pulsante de la misma fortaleza.

2.5. Fuentes simples

2.5.1. Fuente libre

La fuente es libre si está en el *espacio libre*; es decir, si genera un campo de presiones como el dado por (2.67). En ese caso podemos calcular el factor de reciprocidad, de campo libre, con ayuda de la fortaleza de una fuente esférica de radio promedio a

$$\mathbf{Q} = \int_S u_0 e^{i\omega t} ds = 4\pi u_0 a^2 e^{i\omega t} \quad (2.73)$$

y utilizando la expresión para la presión en el espacio libre, ecuación (2.67), tenemos

$$\frac{Q}{\mathbf{p}(r)} = \frac{4\pi u_0 a^2 e^{i\omega t}}{i\rho_0 c u_0 \frac{a}{r} k a e^{i(\omega t - kr)}} = -i \frac{2\lambda r}{\rho_0 c} e^{ikr} \quad (2.74)$$

donde hemos usado la longitud de la onda sonora $\lambda = 2\pi/k$. Con esto podemos reescribir la expresión para la presión en el límite de grandes longitudes de onda, (2.67), en términos de la amplitud de la fortaleza de la fuente

$$\mathbf{p}(r, t) = \frac{1}{2} i \rho_0 c \frac{Q}{\lambda r} e^{i(\omega t - kr)} \quad (2.75)$$

la cuál, por el *principio de reciprocidad*, es cierta para todas las fuentes simples.

La amplitud de presión para fuente simple es $P = |\mathbf{p}(r, t)|$

$$P = \frac{1}{2} \rho_0 c \frac{Q}{\lambda r} \quad (2.76)$$

con lo cual, de (2.69), obtenemos la intensidad

$$I = \frac{1}{8} \rho_0 c \left(\frac{Q}{\lambda r} \right)^2 \quad (2.77)$$

La integración de la intensidad sobre la superficie de una esfera de radio fijo, r , centrada en la fuente nos da la potencia radiada,

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{\rho_0 c Q^2}{8\lambda^2 r^2} 4\pi r^2 \\ &= \frac{\pi}{2} \rho_0 c \left(\frac{Q}{\lambda} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.78)$$

Este resultado nos dice que la potencia radiada por la fuente libre es inversamente proporcional al cuadrado de la longitud de la onda emitida.

2.5.2. Fuente apantallada.

Otro caso de interés práctico es aquél de una fuente simple cerca de una frontera rígida que no permite que la onda sonora pase a través de ella. Si las dimensiones de la frontera son mucho mayores que la longitud de onda del sonido, la frontera puede ser considerada como un plano de extensión infinita. Este tipo de frontera es denominada *baffle* o pantalla, y tenemos el caso de una fuente simple apantallada.

En la reflexión de una onda esférica en una frontera plana simple, el mismo campo de presiones puede ser generado por un sistema de dos fuentes, la primera es nuestra fuente original, en la segunda la fuerza y posición son seleccionados para satisfacer la condición en la frontera y recrear el campo de presiones en el espacio de interés, de manera similar al método de imágenes usado en el electromagnetismo³.

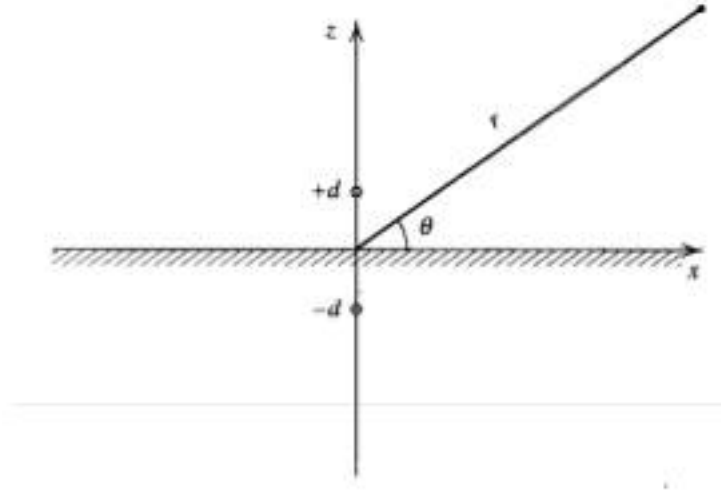


Figura 2.3: Uso del método de imágenes para calcular campos acústicos.

Consideremos una fuente de ondas esféricas colocada sobre el eje z a una distancia $+d$ del origen, ésta da origen a una onda esférica en todo el espacio dada por

$$\mathbf{p}(\vec{r}, t) = \frac{A}{r_-} e^{i(\omega t - kr_-)} \quad (2.79)$$

donde $r_- = \sqrt{(z - d)^2 + x^2 + y^2}$ es la distancia desde el punto $(0, 0, d)$ al punto $\vec{r} = (x, y, z)$, donde observamos la presión. Si la segunda fuente, la imagen, de igual fuerza, frecuencia y ángulo de fase inicial es colocada en $(0, 0, -d)$ a la distancia r_+ del punto de observación, la presión que genera es

$$\mathbf{p}(\vec{r}, t) = \frac{A}{r_+} e^{i(\omega t - kr_+)} \quad (2.80)$$

con $r_+ = \sqrt{(z + d)^2 + x^2 + y^2}$.

³El método de imágenes es consecuencia del teorema de unicidad de la solución de la ecuación de onda. Sin importar cómo se construye la solución a la ecuación de onda, si satisface las condiciones en la frontera e iniciales entonces es la solución del problema físico.

La presión debida a la fuente y la imagen en el punto \vec{r} es entonces:

$$\mathbf{p}(\vec{r}, t) = \frac{A}{r_-} e^{i(\omega t - kr_-)} + \frac{A}{r_+} e^{i(\omega t - kr_+)} \quad (2.81)$$

es fácil demostrar que, en $z = 0$, la componente normal de la velocidad de partícula es cero, cumpliendo la condición en la frontera.

Para un mejor entendimiento busquemos la expresión a la cual se reduce esta solución analítica para puntos lejanos a la fuente, $r \gg d$. De la definición de r_{\pm} , como la distancia de la imagen y la fuente al punto \vec{r} , tenemos

$$\begin{aligned} r_{\pm} &= \sqrt{r^2 \pm 2rd \sin \theta + d^2} \\ &= r \left[1 \pm \frac{2d \sin \theta}{r} + \left(\frac{d}{r} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

donde θ es el ángulo que forma el vector que ubica el punto de interés con respecto al plano de la frontera. Para $r \gg d$ tenemos la aproximación

$$r_{\pm} \approx r \sqrt{1 \pm \frac{2d \sin \theta}{r}}$$

y usando el desarrollo binomial a primer orden queda

$$r_{\pm} \approx r \pm \Delta r \quad (2.82)$$

donde

$$\Delta r = d \sin \theta \quad (2.83)$$

Con estos resultados la expresión para la presión (2.81) se vuelve

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(r, \theta, t) &\approx \frac{A}{r - \Delta r} e^{i[\omega t - k(r - \Delta r)]} + \frac{A}{r + \Delta r} e^{i[\omega t - k(r + \Delta r)]} \\ &\approx \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} \left\{ \frac{e^{ik\Delta r}}{1 - \frac{\Delta r}{r}} + \frac{e^{-ik\Delta r}}{1 + \frac{\Delta r}{r}} \right\} \end{aligned} \quad (2.84)$$

y haciendo uso de la serie geométrica

$$\frac{1}{1 \pm x} \approx 1 \mp x + \dots$$

con el desarrollo a primer orden en Δr , y después de usar la relación estándar entre exponenciales complejas y funciones trigonométricas, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(r, \theta, t) &\approx 2 \frac{A}{r} \cos(k\Delta r) e^{i(\omega t - kr)} \\ &\approx 2 \frac{A}{r} \cos(kd \sin \theta) e^{i(\omega t - kr)} \end{aligned} \quad (2.85)$$

Entonces el campo de presión en el semiespacio ocupado por la fuente es el doble del generado por la fuente en el espacio libre, ecuación (2.76), y por lo tanto tiene amplitud de presión

$$P = \rho_0 c \frac{Q}{\lambda r} \quad (2.86)$$

Como resultado de esto la intensidad es incrementada por un factor de cuatro,

$$I = \frac{1}{2} \rho_0 c \left(\frac{Q}{\lambda r} \right)^2 \quad (2.87)$$

y la integración de la intensidad sobre un hemisferio, ya que no hay penetración acústica al espacio detrás de la pantalla, da el doble de la potencia radiada,

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \rho_0 c \left(\frac{Q}{\lambda r} \right)^2 2\pi r^2 \\ &= \pi \rho_0 c \left(\frac{Q}{\lambda} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.88)$$

La duplicación de la potencia de salida de la fuente puede ser visto como sorpresivo pero resulta del hecho de que la fuente tiene la misma fortaleza en ambos casos, la superficie de la fuente se está moviendo con la misma velocidad, pero en el caso apantallado está trabajando al doble de fortaleza y por lo tanto debe gastar el doble de la potencia para mantener su propio movimiento en presencia de la pantalla.

2.6. Impedancia de radiación

Consideremos una fuente acústica cuya cara activa, de área S , llamada diafragma, se mueve uniformemente con velocidad \mathbf{u} cuya magnitud y fase pueden ser función de la posición. Si $d\mathbf{f}_S$ es la componente normal de la fuerza en un elemento dS del diafragma, la impedancia de radiación es

$$\mathbf{Z}_r = \int_S \frac{d\mathbf{f}_S}{\mathbf{u}} \quad (2.89)$$

donde la integral se extiende sobre toda la superficie S .

Si el diafragma tiene masa m , resistencia mecánica R_m , es impulsado por un resorte de constante s y se mueve uniformemente con una componente normal de velocidad $\mathbf{u}_0 = u_0 e^{i\omega t}$ bajo la fuerza externa aplicada $\mathbf{f} = f_0 e^{i\omega t}$, la segunda ley de Newton revela

$$\mathbf{f} - \mathbf{f}_S - R_m \frac{d\xi}{dt} - s\xi = m \frac{d^2\xi}{dt^2} \quad (2.90)$$

donde ξ es el complejo que representa al desplazamiento del diafragma y la fuerza debida al fluido es $\mathbf{f}_S = \mathbf{Z}_r \mathbf{u}_0$, donde \mathbf{Z}_r es la impedancia de radiación. Sustituyendo \mathbf{f} y \mathbf{f}_S queda la ecuación

$$f_0 e^{i\omega t} - \mathbf{Z}_r u_0 e^{i\omega t} - R_m \frac{d\xi}{dt} - s\xi = m \frac{d^2\xi}{dt^2} \quad (2.91)$$

para la cual proponemos como solución

$$\xi = \mathbf{A} e^{i\omega t} \quad (2.92)$$

sustituyendo y cancelando el factor $e^{i\omega t}$, tenemos

$$f_0 - u_0 \mathbf{Z}_r - R_m \mathbf{A} i\omega - s\mathbf{A} = -m\omega^2 \mathbf{A}$$

despejando la amplitud \mathbf{A} de esta expresión

$$\mathbf{A} = \frac{f_0 - \mathbf{Z}_r u_0}{i\omega R_m - m\omega^2 + s} \quad (2.93)$$

y sustituyendo este resultado en (2.92) tenemos

$$\xi(t) = \frac{f_0 - \mathbf{Z}_r u_0}{i\omega R_m - m\omega^2 + s} e^{i\omega t} \quad (2.94)$$

Derivando $\xi(t)$ con respecto al tiempo obtenemos la velocidad

$$\frac{d\xi}{dt} = i\omega \frac{f_0 - u_0 \mathbf{Z}_r}{i\omega R_m - m\omega^2 + s} e^{i\omega t} \quad (2.95)$$

ésta es la velocidad $\mathbf{u}_0(t)$ del diafragma, por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0(t) &= \frac{f_0 e^{i\omega t} - u_0 \mathbf{Z}_r e^{i\omega t}}{R_m + im\omega - i\frac{s}{\omega}} \\ &= \frac{\mathbf{f} - \mathbf{Z}_r \mathbf{u}_0(t)}{R_m + im\omega - i\frac{s}{\omega}} \end{aligned} \quad (2.96)$$

en términos de la impedancia mecánica, \mathbf{Z}_m ,

$$\mathbf{Z}_m = R_m + i \left(m\omega - \frac{s}{\omega} \right) \quad (2.97)$$

finalmente obtenemos la relación

$$\mathbf{u}_0 = \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{Z}_m + \mathbf{Z}_r} \quad (2.98)$$

así, en la presencia de una carga de fluido, la fuerza aplicada enfrenta la suma de la impedancia mecánica de la fuente y la impedancia de radiación.

La impedancia de radiación puede ser expresada como

$$\mathbf{Z}_r = Z_r e^{i\theta} = R_r + iX_r \quad (2.99)$$

con

$$R_r = Z_r \cos \theta \quad X_r = Z_r \sin \theta$$

donde R_r es la resistencia de radiación y X_r es la reactancia de radiación. Un valor positivo de R_r incrementa la resistencia total, aumentando la potencia disipada por la fuente en una cantidad igual a la potencia radiada en el fluido. Veamos, la potencia radiada es el producto de la fuerza debida al fluido, $\Re(\mathbf{f}_S = \mathbf{Z}_r \mathbf{u}_0)$, por la velocidad, $\Re(\mathbf{u}_0 = u_0 e^{i\omega t})$. Por lo tanto, la potencia radiada es el promedio:

$$\Pi = \frac{1}{T} \int_0^T Z_r u_0^2 \cos(\omega t + \theta) \cos \omega t dt \quad (2.100)$$

donde T es el periodo de la onda sonora. Usando identidades trigonométricas podemos escribir la ecuación anterior en la forma

$$\Pi = \frac{1}{2T} Z_r u_0^2 \int_0^T (\cos \theta + \cos \theta \cos 2\omega t - \sin \theta \sin 2\omega t) dt \quad (2.101)$$

Como el periodo es $T = \frac{2\pi}{\omega}$, el promedio de los términos con seno y coseno de $2\omega t$ es cero, queda

$$\Pi = \frac{1}{2} u_0^2 Z_r \cos \theta$$

y por lo tanto, la potencia radiada en un periodo es proporcional a la resistencia de radiación

$$\Pi = \frac{1}{2} R_r u_0^2 \quad (2.102)$$

A su vez, la resistencia de radiación puede ser encontrada si se conoce la potencia radiada en el fluido

$$R_r = \frac{2}{u_0^2} \Pi \quad (2.103)$$

y ahora podemos usar las expresiones para la potencia Π ya calculadas. Si la fuente es libre, usamos (2.78) para tener

$$R_{rl} = \pi \frac{\rho_0 c}{u_0^2} \left(\frac{Q}{\lambda} \right)^2 \quad (2.104)$$

y si la fuente es apantallada, usamos (2.88)

$$R_{ra} = 2\pi \frac{\rho_0 c}{u_0^2} \left(\frac{Q}{\lambda} \right)^2 \quad (2.105)$$

recordando que $Q = u_0 S$, y sustituyendo $\lambda = 2\pi/k$, queda

$$R_{rl} = \frac{\rho_0 c}{4\pi} k^2 S^2 \quad (\text{libre}) \quad (2.106a)$$

$$R_{ra} = \frac{\rho_0 c}{2\pi} k^2 S^2 \quad (\text{apantallada}) \quad (2.106b)$$

donde, en cada caso, S es la superficie relevante del área de la fuente.

De (2.98) tenemos que la reactancia total es la suma de la reactancia mecánica y la reactancia de radiación

$$X = m\omega - \frac{s}{\omega} + X_r \quad (2.107)$$

si asumimos que la reactancia total es cero, $X = 0$, podemos dar una interpretación alternativa a la reactancia de radiación, ya que en ese caso podemos escribir

$$\begin{aligned} m + \frac{X_r}{\omega} &= \frac{s}{\omega^2} \\ \omega^2 &= \frac{s}{m + \frac{X_r}{\omega}} \\ \omega &= \sqrt{\frac{s}{m + m_r}} \end{aligned} \quad (2.108)$$

donde $m_r = \frac{X_r}{\omega}$. De aquí que un valor positivo de X_r se manifestará como una carga de masa que decrece la frecuencia original del oscilador de $\sqrt{s/m}$ a la frecuencia $\sqrt{s/(m + m_r)}$. Entonces podemos interpretar a m_r como la masa de radiación. El efecto de la masa de radiación puede ser leve para fuentes operando en un medio ligero como el aire, pero para un fluido denso como el agua el decremento de la frecuencia de resonancia como resultado de la presencia del medio puede ser notable.

2.7. Impedancia de radiación de un pistón circular plano

Una fuente acústica de interés práctico es el pistón circular plano, que sirve de modelo para numerosas fuentes, incluyendo bocinas, tubos de órganos abiertos, y ductos de ventilación.

Consideremos un pistón de radio a montado en una superficie rígida y plana, de extensión infinita. Permitamos que la superficie del pistón se mueva uniformemente con velocidad $u_0 e^{i\omega t}$ normal a la pantalla.

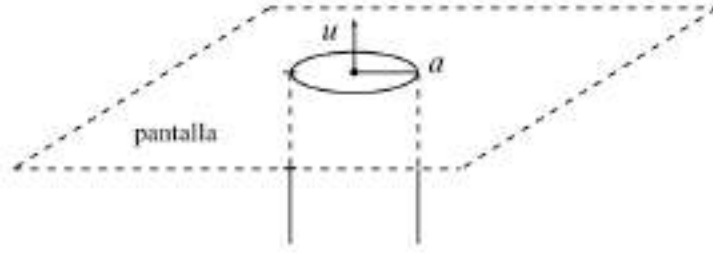


Figura 2.4: Pistón de radio a montado en una pantalla. La superficie del pistón se mueve uniformemente con velocidad $u_0 e^{i\omega t}$ normal a la pantalla.

La presión en cualquier punto del campo puede ser obtenida dividiendo la superficie del pistón en elementos infinitesimales dS' , de los cuáles cada uno actúa como una fuente simple apantallada colocada en el punto \vec{r}' . Consideremos el diferencial de fortaleza de la fuente

$$dQ = u_0 dS' \quad (2.109)$$

Sustituyendo en la expresión para la amplitud de presión debida a una fuente apantallada, ecuación (2.86), escribimos el diferencial de amplitud de presión como

$$dP = \rho_0 c \frac{u_0 dS'}{\lambda |\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.110)$$

y la presión total se obtiene integrando sobre la superficie del pistón

$$\mathbf{p}(\vec{r}, t) = i\rho_0 c \frac{u_0}{\lambda} \int_S \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{i(\omega t - k|\vec{r} - \vec{r}'|)} dS' \quad (2.111)$$

donde la integral de superficie es tomada sobre la región $r' \leq a$.

Para calcular la impedancia de radiación de un pistón circular apantallado de radio a y velocidad $\mathbf{u}(t) = u_0 e^{i\omega t}$, consideremos el área infinitesimal dS' de la superficie del pistón, vea la figura 2.5. Dejemos que $d\mathbf{p}$ sea el incremento en la presión que el movimiento de dS' produce en algún otro elemento de área dS del pistón. La presión total \mathbf{p} en dS puede

ser obtenida integrando la expresión (2.111), para la presión de un pistón circular plano, sobre la superficie del pistón,

$$\mathbf{p} = i\rho_0 c \frac{u_0}{\lambda} \int_S \frac{1}{r} e^{i(\omega t - kr)} dS' \quad (2.112)$$

donde $r = |\vec{r} - \vec{r}'|$ es la distancia entre dS y dS' . La fuerza total \mathbf{f}_S en el pistón debido a la presión es la integral de \mathbf{p} sobre dS , de modo que $\mathbf{f}_S = \int \mathbf{p} dS$. La integración sobre dS' para tener \mathbf{p} y entonces sobre dS para tener \mathbf{f}_S incluye la fuerza en dS resultante del movimiento de dS' y viceversa. Pero, del teorema de reciprocidad acústica, estas dos fuerzas son iguales; consecuentemente, el resultado de la doble integración es el doble de lo que se obtendría si los límites de integración fueran escogidos para incluir la fuerza entre cada par de elementos sólo una vez. Esta selección de los límites da lugar a una considerable simplificación del problema.

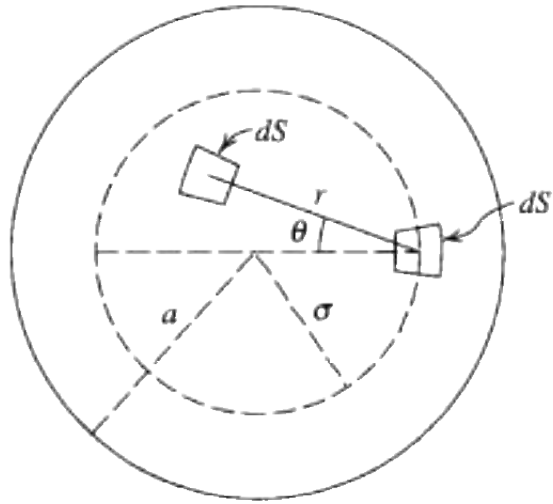


Figura 2.5: Elementos de superficie dS y dS' utilizados para obtener la fuerza de reacción del pistón circular plano.

En la figura 2.5, con σ hemos representado la distancia radial desde el centro del pistón hasta dS' , cada par de elementos es usado sólo una vez mediante la integración sobre el área del pistón dentro de este círculo de radio σ . La máxima distancia desde dS' a cualquier punto dentro del círculo es $2\sigma \cos \theta$, entonces el área completa del círculo será cubierta si

integramos r de 0 a $2\sigma \cos \theta$ y entonces integramos θ de $-\pi/2$ a $\pi/2$. Extendamos ahora la integración de dS' sobre la superficie completa del pistón escribiendo $dS' = \sigma d\sigma d\phi$ e integrando ϕ de 0 a 2π y entonces σ de 0 a a . Después de multiplicar esto por dos, tenemos la expresión para la fuerza total \mathbf{f}_S en el pistón,

$$\mathbf{f}_S = 2i\rho_0 c \frac{u_0}{\lambda} e^{i\omega t} \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\sigma \cos \theta} \frac{1}{r} e^{-ikr} r \sigma dr d\theta d\phi d\sigma \quad (2.113)$$

Primero realicemos la integral sobre la variable r

$$\int_0^{2\sigma \cos \theta} e^{-ikr} dr = \frac{i}{k} (-1 + e^{-2ik\sigma \cos \theta}) \quad (2.114)$$

Ahora integramos este resultado con respecto al ángulo θ

$$\begin{aligned} \frac{i}{k} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-1 + e^{-2ik\sigma \cos \theta}) d\theta &= -\frac{i\pi}{k} \\ &+ \frac{i}{k} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\cos(2k\sigma \cos \theta) - i \sin(2k\sigma \cos \theta)] d\theta \end{aligned} \quad (2.115)$$

como el integrando depende de $\cos \theta$ y ésta es una función par, cada integral es dos veces la integral de 0 a $\pi/2$ y usando las identidades

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2k\sigma \cos \theta) d\theta = \frac{\pi}{2} J_0(2k\sigma) \quad (2.116)$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2k\sigma \cos \theta) d\theta = \frac{\pi}{2} H_0(2k\sigma) \quad (2.117)$$

donde $J_0(x)$ y $H_0(x)$ son las funciones de Bessel y Struve de orden cero, respectivamente.

Por lo tanto

$$\frac{i}{k} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-1 + e^{-2ik\sigma \cos \theta}) d\theta = -\frac{i\pi}{k} + \frac{i\pi}{k} J_0(2k\sigma) + \frac{\pi}{k} H_0(2k\sigma) \quad (2.118)$$

La integral sobre el ángulo φ da como resultado un factor global de 2π y queda sólo la integral en la variable σ . Con estos resultados la integral múltiple que aparece en (2.113) es

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\sigma \cos \theta} e^{-ikr} \sigma dr d\theta d\phi d\sigma &= \\ &= -i \frac{\pi^2 a^2}{k} + i \frac{2\pi^2}{k} \int_0^a \sigma J_0(2k\sigma) d\sigma + \frac{2\pi^2}{k} \int_0^a \sigma H_0(2k\sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (2.119)$$

Con el cambio de variable

$$x = 2k\sigma \quad (2.120)$$

la integral queda como

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\sigma \cos \theta} e^{-ikr} \sigma dr d\theta d\varphi d\sigma = \\ -i \frac{\pi^2 a^2}{k} + i \frac{\pi^2}{2k^3} \int_0^{2ka} x J_0(x) dx + \frac{\pi^2}{2k^3} \int_0^{2ka} x H_0(x) dx \end{aligned} \quad (2.121)$$

y usando las siguientes propiedades de las funciones de Bessel

$$\int_0^{2ka} x J_0(x) dx = 2ka J_1(2ka) \quad (2.122)$$

$$\int_0^{2ka} x H_0(x) dx = 2ka H_1(2ka) \quad (2.123)$$

obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\sigma \cos \theta} e^{-ikr} \sigma dr d\theta d\varphi d\sigma = \\ \frac{\pi^2 a^2}{k} \left[i \left(\frac{1}{ka} J_1(2ka) - 1 \right) + \frac{1}{ka} H_1(2ka) \right] \end{aligned} \quad (2.124)$$

Una vez realizada la integral podemos sustituir en la ecuación (2.113) para tener la expresión de la fuerza total sobre el pistón

$$\mathbf{f}_S = 2i\rho_0 c \frac{u_0}{\lambda} e^{i\omega t} \frac{\pi^2 a^2}{k} \left[i \left(\frac{1}{ka} J_1(2ka) - 1 \right) + \frac{1}{ka} H_1(2ka) \right] \quad (2.125)$$

y sustituyendo la longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$, la velocidad $\mathbf{u}(t) = u_0 e^{i\omega t}$ y el área del pistón $S = \pi a^2$, obtenemos

$$\mathbf{f}_S = \rho_0 c S \left(1 - \frac{1}{ka} J_1(2ka) + i \frac{1}{ka} H_1(2ka) \right) \mathbf{u}(t) \quad (2.126)$$

De esta expresión obtenemos la impedancia de radiación del pistón circular, dada por el cociente $\mathbf{Z}_r = \mathbf{f}_S / \mathbf{u}$,

$$\mathbf{Z}_r = \rho_0 c S \left(1 - \frac{1}{ka} J_1(2ka) + i \frac{1}{ka} H_1(2ka) \right) \quad (2.127)$$

por lo tanto, si definimos las funciones

$$\begin{aligned} R_1(x) &= 1 - \frac{2}{x} J_1(x) \\ X_1(x) &= \frac{2}{x} H_1(x) \end{aligned}$$

la resistencia y reactancia de radiación del pistón son

$$R = \rho_0 c S R_1(2ka) \quad (2.128)$$

$$X = \rho_0 c S X_1(2ka) \quad (2.129)$$

Usando los desarrollos en potencias de las funciones Bessel y Struve de primer orden, las funciones $R_1(x)$ y $X_1(x)$ son

$$R_1(x) = \frac{x^2}{2 \cdot 4} - \frac{x^4}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \frac{x^6}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} - \dots \quad (2.130a)$$

$$X_1(x) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{x}{3} - \frac{x^3}{3^2 \cdot 5} + \frac{x^5}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} - \dots \right) \quad (2.130b)$$

En el límite de bajas frecuencias, $ka \ll 1$, la impedancia de radiación puede ser aproximada por los primeros términos de los desarrollos en potencias. Así, la resistencia de radiación se reduce a

$$R \approx \frac{1}{2} \rho_0 c S k^2 a^2 \quad (2.131)$$

la reactancia de radiación se vuelve

$$X \approx \frac{8}{3\pi} \rho_0 c S k a \quad (2.132)$$

y, por lo tanto, la impedancia de radiación del pistón apantallado en el límite de bajas frecuencias es

$$\mathbf{Z}_r = \frac{1}{2} \rho_0 c S k^2 a^2 + i \frac{8}{3\pi} \rho_0 c S k a \quad (2.133)$$

Note que, en el límite de bajas frecuencias, la resistencia de radiación del pistón es idéntica a la de una fuente simple apantallada de la misma superficie S , ecuación (2.106b), y que la reactancia de radiación es equivalente a un término de masa, m_r , dado por

$$m_r = \frac{X_r}{\omega} = \frac{8}{3\pi} \rho_0 S a \quad (2.134)$$

esta masa se suma a la del pistón para dar una masa efectiva: $m + m_r$. De este modo, el pistón parece estar cargado con un volumen cilíndrico adicional de fluido, cuya sección transversal es la superficie S del pistón y cuya altura efectiva es $8a/3\pi \approx 0.85a$.

2.8. Tubos

El comportamiento del sonido en un tubo de paredes rígidas depende, además de las propiedades de la fuente, de la longitud del tubo, del comportamiento de su sección transversal como función de la distancia, de la presencia de alguna perforación en sus paredes y de las condiciones en la frontera que describan alguna terminación. Si la longitud de onda del sonido es suficientemente grande, el movimiento de la onda puede ser aproximado por una onda plana, esto ofrece una gran simplificación.

Segmentos de tubos que tienen dimensiones suficientemente pequeñas comparadas con las longitudes de onda relevantes pueden ser considerados como elementos acústicos pasivos cuyo comportamiento semeja al de osciladores mecánicos simples. Estos elementos encuentran aplicación como modelos para sistemas más complicados a bajas frecuencias, permitiendo el estudio de la transmisión de ruido característico de las tuberías, ductos, escapes y otros, sin afectar significativamente ningún flujo estacionario de fluido a través del sistema.

2.8.1. Resonancia en tubos

Asumamos que el fluido en un tubo, con área de sección transversal S y longitud L , es excitado por un pistón colocado en $x = 0$ y que el tubo termina en $x = L$. Si el pistón vibra con frecuencias para las cuales sólo se propagan ondas planas, la onda de presión en el tubo se describe mediante la superposición

$$\mathbf{p}(x, t) = \mathbf{A}e^{i[\omega t + k(L-x)]} + \mathbf{B}e^{i[\omega t - k(L-x)]} \quad (2.135)$$

donde \mathbf{A} y \mathbf{B} son determinadas por las condiciones en la frontera, en $x = 0$ y $x = L$.

La velocidad de partícula se obtiene a partir de la expresión

$$\mathbf{u}(x, t) = -(1/\rho_0) \int (\partial \mathbf{p} / \partial x) dt \quad (2.136)$$

y está dada por

$$\mathbf{u}(x, t) = \frac{k}{\rho_0 \omega} [\mathbf{A}e^{i[\omega t + k(L-x)]} - \mathbf{B}e^{i[\omega t - k(L-x)]}] \quad (2.137)$$

Puesto que la fuerza total del fluido sobre el área transversal en el punto x es $\mathbf{p}(x, t)S$, con las dos expresiones anteriores podemos encontrar la impedancia de radiación, $\mathbf{Z} =$

pS/\mathbf{u} , para todo punto del tubo

$$\mathbf{Z}(x) = \frac{\rho_0 \omega S}{k} \frac{\mathbf{A}e^{ik(L-x)} + \mathbf{B}e^{-ik(L-x)}}{\mathbf{A}e^{ik(L-x)} - \mathbf{B}e^{-ik(L-x)}} \quad (2.138)$$

Si con \mathbf{Z}_0 y \mathbf{Z}_L denotamos la impedancia en $x = 0$ y en $x = L$, respectivamente, entonces

$$\mathbf{Z}_0 = \rho_0 c S \frac{\mathbf{A}e^{ikL} + \mathbf{B}e^{-ikL}}{\mathbf{A}e^{ikL} - \mathbf{B}e^{-ikL}} \quad (2.139a)$$

$$\mathbf{Z}_L = \rho_0 c S \frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{\mathbf{A} - \mathbf{B}} \quad (2.139b)$$

donde hemos usado la identidad $\omega = kc$. Es conveniente definir la impedancia escalada, en unidades de $\rho_0 c S$,

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{Z}}{\rho_0 c S} \quad (2.140)$$

Ahora, combinando las ecuaciones (2.139a) y (2.139b) para eliminar las constantes \mathbf{A} y \mathbf{B} obtenemos una relación entre las impedancias escaladas de los extremos del tubo

$$\mathbf{z}_0 = \frac{\mathbf{z}_L + i \tan kL}{1 + i \mathbf{z}_L \tan kL} \quad (2.141)$$

Denotemos la impedancia de salida \mathbf{z}_L como

$$\mathbf{z}_L = r_L + ix_L \quad (2.142)$$

donde r_L y x_L son la resistencia y reactancia, escaladas, en la salida del tubo, respectivamente. Entonces, la ecuación (2.141) puede escribirse como

$$\mathbf{z}_0 = \frac{r_L + i(x_L + \tan kL)}{(1 - x_L \tan kL) + ir_L \tan kL} \quad (2.143)$$

desarrollando la expresión obtenemos la resistencia y reactancia en la entrada del tubo

$$\begin{aligned} \Re\{\mathbf{z}_0\} &= \frac{r_L - x_L(r_L - 1) \tan kL + \tan^2 kL}{(1 - x_L \tan kL)^2 + r_L^2 \tan^2 kL} \\ \Im\{\mathbf{z}_0\} &= \frac{x_L + (1 - x_L^2 - r_L^2) \tan kL - x_L \tan^2 kL}{(1 - x_L \tan kL)^2 + r_L^2 \tan^2 kL} \end{aligned} \quad (2.144)$$

Recordando que las frecuencias de resonancia están determinadas por el anulamiento de la reactancia mecánica de entrada, entonces para encontrar dichas resonancias requerimos $\Im\{\mathbf{z}_0\} = 0$. A continuación consideramos los casos particulares en que el tubo está cerrado o abierto.

2.8.1.1. Tubo cerrado

Supongamos que el tubo está cerrado en $x = L$ por una tapa rígida. Esto significa que la resistencia de salida es infinita, $r_L \rightarrow \infty$, y esto a su vez, con la ecuación (2.144), nos lleva a que la reactancia de entrada sea

$$\Im\{\mathbf{z}_0\} = -\cot kL \quad (2.145)$$

La reactancia es cero, $\cot kL = 0$, y las resonancias ocurren cuando

$$k_n L = (2n - 1)\frac{\pi}{2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.146)$$

es decir, las frecuencias de resonancia son los armónicos impares de la frecuencia fundamental

$$f_n = (2n - 1)f_1 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.147)$$

donde $f_1 = c/4L$ es la frecuencia fundamental.

2.8.1.2. Tubo abierto

Ahora consideremos el caso en que el tubo está abierto en $x = L$. En este caso la impedancia de salida es la impedancia de radiación, $\mathbf{z}_L = \mathbf{z}_r$, ya que el final abierto del tubo radía sonido al medio que lo rodea.

Si asumimos, por ejemplo, que el extremo abierto del tubo circular de radio a está rodeado por un embudo grande respecto a la longitud de onda, situación que llamaremos *terminación suave*, entonces la abertura semeja a un pistón apantallado en el límite de bajas frecuencias, $ka \ll 1$, cuya impedancia de radiación está dada por la ecuación (2.133), de donde tenemos

$$\frac{\mathbf{z}_r}{\rho_0 c S} = \mathbf{z}_L = \frac{1}{2}(ka)^2 + i\frac{8}{3\pi}ka \quad (\text{terminación suave}) \quad (2.148)$$

en este caso $r_L = (ka)^2/2$ y $x_L = 8ka/3\pi$.

Las resonancias son los valores k_n tales que la reactancia de entrada sea cero, $\Im\{\mathbf{z}_0\} = 0$, de (2.144) obtenemos la ecuación para k_n

$$\frac{x_L + (1 - x_L^2 - r_L^2) \tan k_n L - x_L \tan^2 k_n L}{(1 - x_L \tan k_n L)^2 + r_L^2 \tan^2 k_n L} = 0 \quad (2.149)$$

tomando en cuenta que, como $ka \ll 1$, entonces tanto r_L como x_L son mucho menores que la unidad, la ecuación anterior se aproxima por

$$\frac{x_L + \tan kL - x_L \tan^2 k_n L}{1 - 2x_L \tan k_n L} \approx 0 \quad (2.150)$$

y desarrollando el denominador

$$\begin{aligned} (x_L + \tan k_n L - x_L \tan^2 k_n L)(1 + 2x_L \tan k_n L) &\approx \\ x_L + \tan k_n L + x_L \tan^2 k_n L &\approx 0 \end{aligned} \quad (2.151)$$

resolviendo para $\tan k_n L$ obtenemos como condición para calcular las resonancias k_n

$$\tan k_n L \approx -x_L \quad (2.152)$$

sustituyendo x_L , la ecuación anterior se escribe en forma equivalente como

$$\tan(k_n L) = -\frac{8}{3\pi} k_n a \approx \tan\left(\frac{-8k_n a}{3\pi}\right) \quad (2.153)$$

cuya solución es

$$k_n L = -\frac{8}{3\pi} k_n a + n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.154)$$

y de aquí las frecuencias de resonancia son

$$f_n = n f_1 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.155)$$

las resonancias de un tubo con terminación suave son todos los armónicos de la frecuencia fundamental

$$f_1 = c/[2(L + 8a/3\pi)] \quad (2.156)$$

Es importante notar que, como consecuencia de la impedancia de salida, el tubo ha incrementado su longitud a una longitud efectiva dada por

$$L_{ef} = L + \frac{8}{3\pi} a \approx L + 0.85a \quad (2.157)$$

esta predicción de la corrección en la longitud está de acuerdo con los valores medidos experimentalmente, vea las referencias [2] y [3].

Para un tubo de extremo abierto que termina abruptamente, llamado *terminación abrupta*, la teoría indica que la impedancia de radiación es

$$\frac{\mathbf{Z}_r}{\rho_0 c S} = \mathbf{z}_r = \frac{1}{4}(ka)^2 + i\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}ka \quad (\textit{terminación abrupta}) \quad (2.158)$$

por lo tanto, se sigue del caso anterior que las frecuencias de resonancia son todos los armónicos de la frecuencia fundamental $f_0 = c/[2(L + 4\sqrt{2}/3\pi)]$ y la longitud efectiva del tubo es

$$L_{ef} = L + \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}a \approx L + 0.6a \quad (2.159)$$

y, de nuevo, este resultado concuerda con el medido experimentalmente.

Capítulo 3

Modelo mecánico del resonador

En este capítulo vamos a construir el modelo mecánico del resonador de Helmholtz. Para ello, consideremos un resonador, como el que reproducimos en la figura de la página 20, de volumen V_0 y cuello cilíndrico de radio a , longitud L y área de sección transversal constante $S = \pi a^2$, vea la figura.

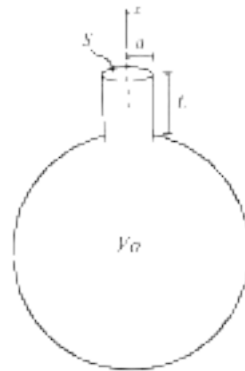


Figura 3.1: Resonador de Helmholtz. Consiste en una cavidad de volumen V_0 , con un cuello cilíndrico de longitud L y radio a .

El modelo mecánico se basa en la observación de que el aire en el cuello del resonador, al ser expuesto a un campo acústico, se mueve uniformemente formando un *pistón*, cuyo movimiento es el resultado de las distintas fuerzas que actúan sobre él, fuerzas que en este capítulo serán calculadas con ayuda de los resultados obtenidos en los capítulos anteriores.

3.1. Fuerzas en el resonador

La primera de estas fuerzas es resultado del proceso termodinámico involucrado en el resonador. Dicho proceso es adiabático ya que ni el campo acústico introduce calor, ni hay pérdida de energía por fricción con las paredes del resonador.

Inicialmente el aire en el interior del resonador se encuentra a una presión p_0 ocupando por completo el volumen V_0 . Supongamos que el *pistón* se desplaza una distancia x , entonces el volumen del aire encerrado en la cavidad cambia en $\Delta V = V - V_0$ provocando, a su vez, un cambio en la presión, $\Delta p = p - p_0$. Recordando que en un proceso adiabático la cantidad pV^γ se conserva, tenemos

$$p_0 V_0^\gamma = (p_0 + \Delta p)(V_0 + \Delta V)^\gamma \quad (3.1)$$

o bien

$$1 + \frac{\Delta p}{p_0} = \left(1 + \frac{\Delta V}{V_0}\right)^{-\gamma} \quad (3.2)$$

usando el desarrollo en serie de potencias para $\frac{\Delta V}{V_0} \ll 1$

$$(1 + x)^r = 1 + rx + \frac{1}{2}r(r-1)x^2 + \dots \quad (3.3)$$

con $r = -\gamma$, la ecuación anterior se puede escribir en la forma

$$1 + \frac{\Delta p}{p_0} = 1 - \gamma \frac{\Delta V}{V_0} + \frac{1}{2}\gamma(\gamma+1) \left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)^2 + \dots \quad (3.4)$$

y de ésta despejamos el cambio de presión Δp

$$\Delta p = -\gamma \frac{\Delta V}{V_0} p_0 + \frac{1}{2}\gamma(\gamma+1)p_0 \left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)^2 + \dots \quad (3.5)$$

Cuando el *pistón* se ha desplazado una distancia x tenemos $\Delta V = Sx$ y el cambio en la presión es

$$\Delta p = -\gamma p_0 \frac{Sx}{V_0} + \frac{1}{2}\gamma(\gamma+1)p_0 \left(\frac{Sx}{V_0}\right)^2 + \dots \quad (3.6)$$

En el capítulo 1 calculamos la velocidad del sonido en el gas, cuando el proceso es adiabático, ecuación (1.60a),

$$c^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \quad (3.7)$$

donde ρ_0 es la densidad del aire. Sustituyendo esta expresión para la velocidad del sonido en el cambio de presión (3.6) obtenemos

$$\Delta p = -\rho_0 c^2 \frac{Sx}{V_0} + \frac{1}{2} \rho_0 c^2 (\gamma + 1) \left(\frac{Sx}{V_0} \right)^2 + \dots \quad (3.8)$$

El cambio en la presión produce sobre el *pistón* una fuerza, $F = S\Delta p$, que representa la fuerza de restitución del aire encerrado en el resonador sobre el *pistón* y está dada por

$$F = -\frac{\rho_0 c^2 S^2}{V_0} \left[x - \frac{1}{2} (\gamma + 1) \frac{S}{V_0} x^2 + \dots \right] \quad (3.9)$$

La segunda fuerza a considerar es disipativa, de la forma $-R\dot{x}$, con \dot{x} la velocidad. Cuando el *pistón* se acelera radía ondas sonoras hacia el aire que le rodea, la fuerza disipativa es resultado de la pérdida de energía por la radiación de dichas ondas sonoras.

Para encontrar R , nos auxiliamos de las diferentes impedancias presentes en un tubo, que en este caso es el cuello del resonador. Para el extremo exterior utilizamos la impedancia de radiación de un tubo con terminación abrupta, ecuación (2.158),

$$\mathbf{Z}_{ext} = \rho_0 c S \left[\frac{1}{4} (ka)^2 + i \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} ka \right] \quad (3.10)$$

Para el extremo que está en el interior usamos la impedancia de radiación de un tubo con terminación suave, ecuación (2.148), y consideramos que el efecto físico del primer término de la impedancia ya fue tomado en cuenta en el cálculo de la fuerza de restitución, por ello para este extremo tomamos sólo la reactancia

$$\mathbf{Z}_{int} = i \rho_0 c S \frac{8}{3\pi} ka \quad (3.11)$$

Para la impedancia mecánica de entrada del *pistón* de aire moviéndose en el cuello de longitud L y abierto en el extremo exterior, consideremos la ecuación (2.141) y la impedancia no-escalada

$$\mathbf{Z}_0 = \rho_0 c S \frac{\mathbf{Z}_L + i \rho_0 c S \tan kL}{\rho_0 c S + i \mathbf{Z}_L \tan kL}$$

Como no hay carga acústica que se oponga a la radiación del sonido en el extremo exterior, entonces $\mathbf{Z}_L = 0$ y queda

$$\mathbf{Z}_0 = i \rho_0 c S \tan kL$$

con c la velocidad local del sonido. Esta expresión, a bajas frecuencias, $kL \ll 1$, se convierte en

$$\mathbf{Z}_0 = i\rho_0 c S k L \quad (3.12)$$

Sumando las tres impedancias, ecuaciones: (3.10), (3.11) y (3.12), obtenemos la impedancia total del tubo

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{tot} &= \rho_0 c S \left[\frac{1}{4}(ka)^2 + i \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} ka \right] + i\rho_0 c S \frac{8}{3\pi} ka + i\rho_0 c S k L \\ &= \rho_0 c S \left[\frac{1}{4}(ka)^2 + ik \left(L + \frac{4(2 + \sqrt{2})}{3\pi} a \right) \right] \\ &= \rho_0 c S \left[\frac{1}{4}(ka)^2 + ik(L + 1.45a) \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

Es importante notar, de la reactancia \mathbf{Z}_{tot} , que el tubo actúa con una longitud efectiva

$$L_{ef} = L + 1.45a \quad (3.14)$$

y, en consecuencia, el *pistón* tiene una masa efectiva

$$m = \rho_0 S L_{ef} = \rho_0 S (L + 1.45a) \quad (3.15)$$

el primer término corresponde al aire encerrado dentro del tubo; el segundo es la suma de las masas de radiación debido a los extremos del tubo y representa la masa extra a considerar en el *pistón* de aire debido a los efectos de frontera.

Como vimos en el capítulo 2, el coeficiente de amortiguamiento β se relaciona con la resistencia, parte real de la impedancia total $R = \Re\{\mathbf{Z}\}$, mediante la expresión

$$\beta = \frac{\Re\{\mathbf{Z}\}}{2m} \quad (3.16)$$

y usando (3.13) y (3.15) obtenemos

$$\beta = \frac{1}{8} \frac{ck^2 a^2}{L + 1.45a}$$

y, como es de esperarse, este coeficiente depende de la frecuencia. Usando la relación $kc = \omega$, queda

$$\beta(\omega) = \frac{1}{8} \frac{\omega^2 a^2}{c(L + 1.45a)} \quad (3.17)$$

sin embargo, en el régimen que nos interesa, $ka \ll 1$, el coeficiente β es muy pequeño.

La última fuerza a considerar proviene del campo acústico externo al que está expuesto el resonador, esta fuerza es dependiente del tiempo y la denotamos con $F(t)$.

Resumiendo, sobre el *pistón* de aire en el cuello del resonador actúan tres fuerzas; la fuerza de restitución ejercida por la cavidad; la fuerza disipativa, resultado de la radiación de sonido hacia dentro y fuera del cuello; y el forzamiento debido al campo acústico externo.

3.2. Ecuación de movimiento

Usando la segunda ley de Newton, denotando con \ddot{x} la aceleración del *pistón* de aire y tomando en cuenta las tres fuerzas que actúan sobre él, obtenemos la ecuación de movimiento

$$m\ddot{x} = -\frac{\rho_0 c^2 S^2}{V_0} \left[x - \frac{1}{2}(\gamma + 1) \frac{S}{V_0} x^2 \right] - R\dot{x} + F(t) \quad (3.18)$$

donde m es la masa corregida del *pistón* y hemos usado la ecuación (3.9). Dividiendo por m obtenemos la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \frac{\rho_0 c^2 S^2}{mV_0} \left[x - \frac{1}{2}(\gamma + 1) \frac{S}{V_0} x^2 \right] = f(t) \quad (3.19)$$

donde $\beta = R/2m$ y $f(t)$ denota fuerza por unidad de masa. Como $m = \rho_0 S L_{ef}$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \frac{c^2 S}{V_0 L_{ef}} \left[x - \frac{1}{2}(\gamma + 1) \frac{S}{V_0} x^2 \right] = f(t) \quad (3.20)$$

y definiendo los parámetros

$$\omega_0^2 = \frac{c^2 S}{V_0 L_{ef}} \quad \alpha = \frac{1}{2}(\gamma + 1) \frac{S}{V_0} \quad (3.21)$$

tenemos finalmente la ecuación que describe el movimiento del *pistón*:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2(x - \alpha x^2) = f(t) \quad (3.22)$$

ésta es una ecuación diferencial de segundo orden, no-lineal de coeficientes constantes e inhomogénea.

El forzamiento externo $f(t)$ se puede escribir, usando el desarrollo de Fourier, como una superposición de excitaciones vibratorias de tipo sinusoidal; entonces, nos concretamos

a analizar el caso más fundamental en que el forzamiento externo es $f(t) = f_0 \cos \omega t$, es decir el campo acústico externo depende sólo de una frecuencia. En este caso la ecuación de movimiento se reduce a

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2(x - \alpha x^2) = f_0 \cos \omega t \quad (3.23)$$

salvo por el término no-lineal, esta ecuación es idéntica a la ecuación (2.14) del oscilador forzado y amortiguado discutido en el capítulo 2.

El término no-lineal impide construir la solución exacta de la ecuación y, en consecuencia, sólo podemos conocer la solución analítica en forma aproximada, para ello es necesario recurrir a alguna técnica de aproximación. En este trabajo usaremos el método iterativo.

3.3. Método iterativo

La esencia del método iterativo consiste en acercarse a la solución exacta de la ecuación mediante una sucesión de funciones $x_0(t), x_1(t), x_2(t), \dots$ donde cada una de estas funciones está más cerca de la exacta que la anterior. El método se basa en el hecho de que el parámetro α es pequeño y esto permite aproximar el término no-lineal en cada una de las aproximaciones sucesivas por el mismo término pero calculado con la solución anterior. En otras palabras, x_n satisface la ecuación

$$\frac{d^2x_n}{dt^2} + 2\beta \frac{dx_n}{dt} + \omega_0^2 x_n = f_0 \cos \omega t + \alpha \omega_0^2 x_{n-1}^2 \quad (3.24)$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$. El método parte con la condición inicial $x_{-1}(t) = 0$.

La ecuación (3.24), siendo una ecuación lineal en x_n e inhomogénea, se puede escribir como

$$\hat{\mathcal{L}}x_n(t) = f_n(t) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.25)$$

donde $\hat{\mathcal{L}}$ es el operador lineal

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{d^2}{dt^2} + 2\beta \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \quad (3.26)$$

y $f_n(t)$ representa la inhomogeneidad dada por

$$f_n(t) = f_0 \cos \omega t + \alpha \omega_0^2 x_{n-1}^2(t) \quad (3.27)$$

Como el operador (3.26) es lineal, la ecuación (3.24) es lineal, de coeficientes constantes e inhomogénea. Para cada n , la solución general consta de la suma de la solución general a la ecuación homogénea $x_H(t)$, dada por la ecuación (2.12), y de la solución particular $x_{Pn}(t)$ que toma en cuenta la inhomogeneidad. La solución a la homogénea es

$$x_H(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega_a t + \phi)$$

donde A y ϕ son constantes arbitrarias y ω_a es la frecuencia de oscilación corregida por el parámetro de fricción. La función $x_H(t)$ representa el transitorio del sistema, de tal forma que para $t \gg \beta^{-1}$ la solución alcanza el régimen estacionario descrito por la solución particular $x_{Pn}(t)$. A partir de aquí asumimos que estamos en el régimen estacionario y escribimos $x_{Pn} = x_n$.

Con la condición inicial $x_{-1}(t) = 0$, la familia de ecuaciones por resolver es:

$$\hat{\mathcal{L}}x_0 = f_0 \cos \omega t \quad (3.28)$$

$$\hat{\mathcal{L}}x_1 = f_1(t) \quad (3.29)$$

$$\hat{\mathcal{L}}x_2 = f_2(t) \quad (3.30)$$

⋮

La primera ecuación ya fue resuelta en el capítulo 2, la solución está dada por (2.27a) con $\Omega = \omega$

$$x_0(t) = \frac{F_0}{\omega Z_m(\omega)} \sin(\omega t - \varphi_0) \quad (3.31)$$

donde F_0 es la magnitud del forzamiento externo, $Z_m(\omega)$ y φ_0 son magnitud y fase de la impedancia mecánica del oscilador, ecuaciones (2.24) y (2.25);

$$Z_m(\omega) = m \sqrt{4\beta^2 + \frac{1}{\omega^2}(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \quad (3.32a)$$

$$\varphi_0 = \tan^{-1} \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\beta\omega} \quad (3.32b)$$

y hemos usado $R_m = 2m\beta$.

3.3.1. Primera aproximación

Ahora vamos a calcular $x_1(t)$ a partir de la ecuación (3.29). Para ello, primero calculamos $f_1(t)$ usando (3.27)

$$\begin{aligned}
 f_1(t) &= f_0 \cos \omega t + \alpha \omega_0^2 x_0^2(t) \\
 &= f_0 \cos \omega t + \frac{\alpha \omega_0^2 F_0^2}{\omega^2 Z_m^2(\omega)} \sin^2(\omega t - \varphi_1) \\
 &= \frac{\alpha \omega_0^2 F_0^2}{2\omega^2 Z_m^2(\omega)} + f_0 \cos \omega t - \frac{\alpha \omega_0^2 F_0^2}{2\omega^2 Z_m^2(\omega)} \cos(2\omega t - 2\varphi_1)
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

donde hemos usado la identidad $\sin^2 \phi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\phi)$.

Como $\hat{\mathcal{L}}$ es un operador lineal, la solución a (3.29) con $f_1(t)$ dada por la expresión anterior está formada por la suma de las soluciones a cada uno de los tres términos. El primer término de $f_1(t)$ es constante, luego la solución es la misma constante dividida por ω_0^2 ; el segundo término tiene como solución la expresión (3.31); la solución al tercer término la construimos usando la impedancia del oscilador, ayudados de (2.27a) con $\Omega = 2\omega$, para tener la solución $x_1(t)$ en la forma

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= \frac{\alpha F_0^2}{2\omega^2 Z_m^2(\omega)} + \frac{F_0}{\omega Z_m(\omega)} \sin(\omega t - \varphi_0) \\
 &\quad - \frac{\alpha \omega_0^2 F_0^2}{2\omega^2 Z_m^2(\omega)} \frac{1}{2\omega Z_m(2\omega)} \sin(2\omega t - 2\varphi_0 - \varphi_1)
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

donde

$$Z_m(2\omega) = m \sqrt{4\beta^2 + \frac{(4\omega^2 - \omega_0^2)^2}{4\omega^2}} \tag{3.35a}$$

$$\varphi_1 = \tan^{-1} \frac{4\omega^2 - \omega_0^2}{4\beta\omega} \tag{3.35b}$$

La solución (3.34) se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= \alpha \frac{F_0^2}{2\omega^2 Z_m^2(\omega)} + \frac{F_0}{\omega Z_m(\omega)} \sin(\omega t - \varphi_0) \\
 &\quad - \alpha \frac{\omega_0^2 F_0^2}{4\omega^3 Z_m^2(\omega) Z_m(2\omega)} \sin(2\omega t - 2\varphi_0 - \varphi_1)
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Claramente los términos que dependen de α son consecuencia del término no-lineal en la fuerza, cuyo efecto es doble, como podemos ver, por un lado hay un desplazamiento de la posición de equilibrio del *pistón* y por otro aparece el primer armónico de la frecuencia del forzamiento externo.

3.3.2. Segunda aproximación

En este apartado vamos a construir la solución $x_2(t)$ de la ecuación (3.30) con el propósito de reafirmar nuestras conclusiones. Primero calculamos $x_1^2(t)$, a partir de la ecuación (3.36) tenemos

$$\begin{aligned}
x_1^2(t) &= \alpha^2 \frac{F_0^4}{4\omega^4 Z_m^4(\omega)} + \frac{F_0^2}{\omega^2 Z_m^2(\omega)} \sin^2(\omega t - \varphi_0) \\
&+ \alpha^2 \frac{\omega_0^4 F_0^4}{16\omega^6 Z_m^4(\omega) Z_m^2(2\omega)} \sin^2(2\omega t - 2\varphi_0 - \varphi_1) + \alpha \frac{F_0^3}{\omega^3 Z_m^3(\omega)} \sin(\omega t - \varphi_0) \\
&- \alpha^2 \frac{\omega_0^2 F_0^4}{4\omega^4 Z_m^4(\omega) Z_m(2\omega)} \sin(2\omega t - 2\varphi_0 - \varphi_1) \\
&- \alpha \frac{\omega_0^2 F_0^3}{2\omega^4 Z_m^3(\omega) Z_m(2\omega)} \sin(\omega t - \varphi_0) \sin(2\omega t - 2\varphi_0 + \varphi_1)
\end{aligned} \tag{3.37}$$

y haciendo uso de las siguientes identidades trigonométricas

$$\begin{aligned}
\sin \phi &= \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) \\
\sin^2 \phi &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\phi) \\
\sin \phi_1 \sin \phi_2 &= \frac{1}{2} [\cos(\phi_1 - \phi_2) - \cos(\phi_1 + \phi_2)]
\end{aligned}$$

obtenemos finalmente

$$\begin{aligned}
x_1^2(t) &= \frac{F_0^2}{2\omega^2 Z_m^2(\omega)} + \alpha^2 \frac{F_0^4}{4\omega^4 Z_m^4(\omega)} \left[1 + \frac{\omega_0^4}{8\omega^2 Z_m^2(2\omega)} \right] \\
&+ \alpha \frac{F_0^3}{\omega^3 Z_m^3(\omega)} \cos\left(\omega t - \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) \\
&- \alpha \frac{\omega_0^2 F_0^3}{4\omega^4 Z_m^3(\omega) Z_m(2\omega)} \cos(\omega t - \varphi_0 - \varphi_1) \\
&- \frac{F_0^2}{2\omega^2 Z_m^2(\omega)} \cos(2\omega t - 2\varphi_0) \\
&- \alpha^2 \frac{\omega_0^2 F_0^4}{4\omega^4 Z_m^4(\omega) Z_m(2\omega)} \cos\left(2\omega t - 2\varphi_0 - \varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right) \\
&+ \alpha \frac{\omega_0^2 F_0^3}{4\omega^4 Z_m^3(\omega) Z_m(2\omega)} \cos(3\omega t - 3\varphi_0 + \varphi_1) \\
&- \alpha^2 \frac{\omega_0^4 F_0^4}{32\omega^6 Z_m^4(\omega) Z_m^2(2\omega)} \cos(4\omega t - 4\varphi_0 - 2\varphi_1)
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Sustituyendo esta expresión para $x_1^2(t)$ en la siguiente ecuación

$$f_2(t) = f_0 \cos \omega t + \alpha \omega_0^2 x_1^2(t) \tag{3.39}$$

tenemos

$$\begin{aligned}
f_2(t) = & \alpha \frac{\omega_0^2 F_0^2}{2\omega^2 Z_m^2(\omega)} \left[1 + \alpha^2 \frac{F_0^2}{2\omega^2 Z_m^2(\omega)} \left(1 + \frac{\omega_0^4}{8\omega^2 Z_m^2(2\omega)} \right) \right] \\
& + f_0 \cos \omega t + \alpha^2 \frac{\omega_0^2 F_0^3}{\omega^3 Z_m^3(\omega)} \cos(\omega t - \varphi_0 - \frac{\pi}{2}) \\
& - \alpha^2 \frac{\omega_0^4 F_0^3}{4\omega^4 Z_m^3(\omega) Z_m(2\omega)} \cos(\omega t - \varphi_0 - \varphi_1) \\
& - \alpha \frac{\omega_0^2 F_0^2}{2\omega^2 Z_m^2(\omega)} \cos(2\omega t - 2\varphi_0) \\
& - \alpha^3 \frac{\omega_0^4 F_0^4}{4\omega^4 Z_m^4(\omega) Z_m(2\omega)} \cos(2\omega t - 2\varphi_0 - \varphi_1 - \frac{\pi}{2}) \\
& + \alpha^2 \frac{\omega_0^4 F_0^3}{4\omega^4 Z_m^3(\omega) Z_m(2\omega)} \cos(3\omega t - 3\varphi_0 + \varphi_1) \\
& - \alpha^3 \frac{\omega_0^6 F_0^4}{32\omega^6 Z_m^4(\omega) Z_m^2(2\omega)} \cos(4\omega t - 4\varphi_0 - 2\varphi_1)
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Ahora podemos construir la solución $x_2(t)$. De nuevo, la solución es la suma de las soluciones a cada término de $f_2(t)$. La solución al término constante es la constante dividida por ω_0^2 ; para el resto de los términos, como son proporcionales a una función coseno, recurrimos a la impedancia mecánica. Por lo tanto, usando la solución genérica (2.27a) tenemos

$$\begin{aligned}
x_2(t) = & \alpha \frac{F_0^2}{2\omega^2 Z_m^2(\omega)} \left[1 + \alpha^2 \frac{F_0^2}{2\omega^2 Z_m^2(\omega)} \left(1 + \frac{\omega_0^4}{8\omega^2 Z_m^2(2\omega)} \right) \right] \\
& + \frac{F_0}{\omega Z_m(\omega)} \sin(\omega t - \varphi_0) - \alpha^2 \frac{\omega_0^2 F_0^3}{\omega^4 Z_m^4(\omega)} \cos(\omega t - 2\varphi_0) \\
& - \alpha^2 \frac{\omega_0^4 F_0^3}{4\omega^5 Z_m^4(\omega) Z_m(2\omega)} \sin(\omega t - 2\varphi_0 - \varphi_1) \\
& - \alpha \frac{\omega_0^2 F_0^2}{4\omega^3 Z_m^2(\omega) Z_m(2\omega)} \sin(2\omega t - 2\varphi_0 - \varphi_1) \\
& + \alpha^3 \frac{\omega_0^4 F_0^4}{8\omega^5 Z_m^4(\omega) Z_m^2(2\omega)} \cos(2\omega t - 2\varphi_0 - 2\varphi_1) \\
& + \alpha^2 \frac{\omega_0^4 F_0^3}{12\omega^5 Z_m^3(\omega) Z_m(2\omega) Z_m(3\omega)} \sin(3\omega t - 3\varphi_0 + \varphi_1 - \varphi_3) \\
& - \alpha^3 \frac{\omega_0^6 F_0^4}{128\omega^7 Z_m^4(\omega) Z_m^2(2\omega) Z_m(4\omega)} \sin(4\omega t - 4\varphi_0 - 2\varphi_1 - \varphi_4)
\end{aligned} \tag{3.41}$$

donde

$$Z_m(3\omega) = m \sqrt{9\beta^2 + \frac{(9\omega^2 - \omega_0^2)^2}{9\omega^2}} \tag{3.42a}$$

$$Z_m(4\omega) = m\sqrt{16\beta^2 + \frac{(16\omega^2 - \omega_0^2)^2}{16\omega^2}} \quad (3.42b)$$

$$\varphi_3 = \tan^{-1} \frac{9\omega^2 - \omega_0^2}{6\beta\omega} \quad (3.42c)$$

$$\varphi_4 = \tan^{-1} \frac{16\omega^2 - \omega_0^2}{8\beta\omega} \quad (3.42d)$$

Este resultado nos permite concluir hasta aquí que el término no-lineal juega un doble papel en la solución:

1. Por un lado, la posición promedio del *pistón* de aire en el cuello del resonador tiene un corrimiento como resultado de la presencia de un exceso de presión en la cavidad del resonador. Este corrimiento promedio a segundo orden está dado por

$$\langle x \rangle = \alpha \frac{f_0^2}{2\omega^2 Z_m^2(\omega)} \left[1 + \alpha^2 \frac{f_0^2}{2\omega^2 Z_m^2(\omega)} \left(1 + \frac{\omega_0^4}{8\omega^2 Z_m^2(2\omega)} \right) \right] \quad (3.43)$$

ya que el promedio temporal de las funciones seno y coseno es cero.

2. Por otro lado, tiene el efecto de introducir en el movimiento del *pistón* todos los armónicos de la frecuencia de forzamiento.

3.4. Resonancias.

Vimos en el capítulo 2 que las resonancias del sistema ocurren para aquellas frecuencias que minimizan la magnitud de la impedancia y en consecuencia el sistema tiene una respuesta que localmente es un máximo. La magnitud de la impedancia es mínima cuando la reactancia es cero. De los resultados de la sección anterior podemos concluir que el resonador de Helmholtz tiene la resonancia principal en la frecuencia ω_0 y resonancias secundarias en los submúltiplos $\omega_0/2, \omega_0/3, \dots$

Con el propósito de ilustrar lo anterior, escogemos en forma apropiada los siguientes parámetros: $\omega_0 = 1$, $f_0 = 0.5$, $t_0 = 1$, $\beta = 0.1\omega^2$, $\alpha = 0.5$.

Figura 3.2: Amplitud de respuesta del resonador de Helmholtz en la aproximación de orden cero como función de la frecuencia del forzamiento externo. La resonancia está centrada en la frecuencia ω_0 .

Así, por ejemplo, si describimos el oscilador mediante la solución $x_0(t)$, ecuación (3.31), la amplitud de la respuesta está graficada en la figura 3.2. La figura muestra que el resonador de Helmholtz produce resonancia a la frecuencia característica del oscilador

Cuando describimos el resonador mediante la solución $x_1(t)$, ecuación (3.36), entonces la gráfica de la amplitud de respuesta, que se encuentra en la figura 3.3, muestra la resonancia secundaria en la frecuencia $\omega_0=2$.

Figura 3.3: Amplitud de respuesta del resonador de Helmholtz a primer orden, cuando se toma en cuenta el término no-lineal de la fuerza. Ahora aparece una resonancia secundaria a la frecuencia $\omega_0=2$.

Las amplitudes de respuesta anteriores pueden ser comparadas reuniendo en una mis-

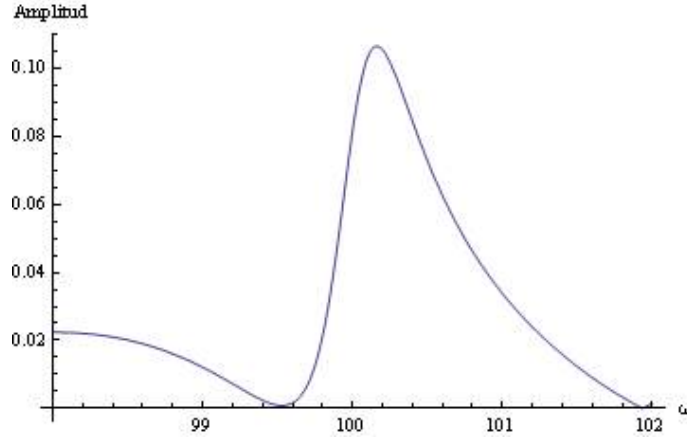


Figura 3.5: Curva de resonancia del resonador de Helmholtz con parámetros: $V_0 = 2$ Litros, $L = 4$ cm y $a = 1.1$ cm, con el aire a una atmósfera y a 20 grados centígrados. La frecuencia ω se mide en *Hertz*.

3.5. Velocidad del sonido.

La resonancia principal, de la figura 3.2, es descrita por la siguiente función de la frecuencia ω , que se sigue de (3.31),

$$A(\omega) = \frac{f_0}{\omega} \frac{1}{\sqrt{4\beta^2 + \frac{1}{\omega^2}(\omega^2 - \omega_0^2)^2}} \sin(\omega t_0 - \varphi_0) \quad (3.44)$$

para un tiempo t_0 fijo. La resonancia ocurre a la frecuencia ω_0 y tiene amplitud máxima

$$A_m = \frac{f_0}{2\omega_0\beta} \sin(\omega_0 t_0 - \varphi_0) \quad (3.45)$$

Entonces, en la vecindad de la resonancia, podemos aproximar la curva de resonancia $A(\omega)$ sustituyendo ω por ω_0 excepto en la diferencia $\omega - \omega_0$. Para ello, hacemos la descomposición

$$(\omega^2 - \omega_0^2)^2 = (\omega + \omega_0)^2(\omega - \omega_0)^2 \approx 4\omega_0^2(\omega - \omega_0)^2$$

para tener

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{f_0}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{4\beta^2 + \frac{1}{\omega_0^2}4\omega_0^2(\omega - \omega_0)^2}} \sin(\omega_0 t_0 - \varphi_0) \\ &= \frac{f_0}{2\omega_0\beta} \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + (\omega - \omega_0)^2}} \sin(\omega_0 t_0 - \varphi_0) \\ &= A_m \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + (\omega - \omega_0)^2}} \end{aligned} \quad (3.46)$$

donde hemos usado (3.45). Esta forma aproximada de la amplitud de respuesta en la vecindad de la resonancia se conoce como fórmula del tipo de *Breit-Wigner*.

La expresión (3.46), aparte de la frecuencia de resonancia, depende sólo de dos parámetros: la amplitud máxima A_m y el parámetro β que está relacionado geoméricamente a la anchura de la resonancia, ya que si la frecuencia se incrementa por β , a partir de ω_0 , la amplitud decrece a $A_m/\sqrt{2}$.

Así, ambos parámetros son medidos a partir de la curva experimental. En particular, determinado experimentalmente el valor del parámetro β y comparando con la expresión deducida teóricamente, ecuación (3.17), tenemos

$$\beta_{exp} = \frac{1}{8} \frac{\omega_0^2 a^2}{c(L + 1.45a)} \quad (3.47)$$

y de aquí despejando c tenemos

$$c = \frac{1}{8} \frac{\omega_0^2 a^2}{\beta_{exp}(L + 1.45a)} \quad (3.48)$$

es decir, el resonador de Helmholtz nos ofrece una alternativa para medir la velocidad del sonido.

Conclusiones

A lo largo este trabajo desarrollamos la herramienta necesaria para describir el resonador de Helmholtz, comenzamos viendo características de pequeños elementos de fluido, el comportamiento de su volumen como respuesta a cambios en la presión. Abordamos además un poco de conceptos termodinámicos y con lo anterior llegamos a obtener la ecuación de onda que satisface la presión, así como la expresión para la velocidad del sonido conocida como fórmula de Newton-Laplace.

En el capítulo 2, examinamos la solución a la ecuación del oscilador armónico unidimensional considerando un término disipativo R_m y un forzamiento externo dependiente del tiempo $F(t)$, este análisis motivó la definición de impedancia mecánica Z_m como un concepto que contiene toda la información sobre la respuesta del oscilador al forzamiento externo. Basándonos en el concepto de impedancia mecánica, introdujimos el concepto de impedancia acústica, y calculamos la impedancia de un pistón circular plano y las impedancias de radiación acústica en los extremos de un tubo que termina en forma abrupta o apantallada. Revisamos brevemente el principio de reciprocidad acústica para concluir que las fuentes sonoras de forma irregular, en el régimen de longitud de onda grande comparada con la dimensión de la fuente, pueden ser aproximadas por fuentes de geometrías más simples.

Con la herramienta ya desarrollada, en el capítulo 3 construimos un modelo mecánico para el resonador de Helmholtz. Dicho modelo se sustenta en la observación de que el aire contenido en el cuello del resonador actúa como una unidad sometida a las distintas fuerzas que resultan de su interacción con la cavidad, de la radiación acústica emitida y de la interacción con el agente externo. La primera de estas fuerzas es una fuerza de restitución que le da el carácter periódico al movimiento de la masa de aire en el cuello

del resonador y determina la frecuencia ω_0 característica del mismo. Esta fuerza resultó intrínsecamente no-lineal. Con ayuda de las impedancias determinadas en el capítulo 2, pudimos expresar la fuerza debida a la pérdida de energía por la radiación acústica. De esta forma, dada la naturaleza de la fuerza de restitución, el modelo de oscilador para el resonador de Helmholtz lleva a una ecuación diferencial no-lineal, la cual fue resuelta mediante un método de aproximaciones sucesivas.

Confirmamos que el resonador de Helmholtz tiene una resonancia principal en la frecuencia característica ω_0 , como resultado del término lineal de la fuerza de restitución. Esta frecuencia característica depende sólo de los parámetros geométricos del resonador.

La presencia del término no-lineal en la fuerza de restitución tiene varias consecuencias, entre las que destacamos:

- La solución del modelo depende de todos los armónicos de la frecuencia de forzamiento.
- En el resonador aparecen resonancias secundarias de menor intensidad en los subarmónicos de la frecuencia característica ω_0 .
- Existe un excedente de presión en el interior del resonador que provoca que la posición promedio del pistón de aire en el cuello esté ligeramente fuera de éste.
- La resonancia principal se corre ligeramente del valor ω_0 hacia un valor más pequeño.

Finalmente, obtuvimos una fórmula para la velocidad del sonido a partir de los parámetros que se obtienen de la curva experimental de la resonancia principal.

Bibliografía

- [1] L. Kinsler, A. Frey, A. Coppens, J. Sanders. *Fundamentals of acoustics*. John Wiley; 4^a edición (1999).
- [2] William C. Elmore, Mark A. Herald. *Physics of waves*. Dover; 2^a edición (1985).
- [3] R. Boullosa, F. Orduña. *The reaction force on a Helmholtz resonator driven at high sound pressure amplitudes*. Am.J.Phys. **60** (8), 722(1992).
- [4] Hermann Helmholtz. *On the sensation of tone*. Dover; 2^a edición (1954). Reimpresión del original publicado en 1885.
- [5] A. P. French. *Vibrations and waves*. Norton; 2^a edición (1971).
- [6] A. Jáuregui, A. Uribe. *Funciones especiales*. Universidad de Sonora; 1^a edición (2006).
- [7] L. García-Colín *Introducción a la termodinámica clásica*. Trillas; 4^a edición (1990).
- [8] Sitio del grupo de acústica musical de la Universidad de nueva Gales del Sur:
www.phys.unsw.edu.au/music/, Visitada en Agosto de 2011.
- [9] William Seto. *Teoría y problemas de acústica* Serie de Compendios *Schaum's*. McGraw-Hill;
- [10] Allan D. Pierce. *Acoustics*. Acoustical Society of America; 1^a edición (1981).
- [11] J. W. S. Rayleigh. *The theory of sound*. Dover; 2^a edición (1945).