Universidad de Sonora
División de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

“Solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío removiendo la singularidad en el radio de Schwarzschild”

Examen que para obtener el Título de Licenciado en Física
Presenta:
Abraham Ramsés Velázquez Kraff

Director:
Dr. Santos Jesús Castillo

Co- Director:
M.C. Lina Morales Peral.

Hermosillo, Sonora 03 de Junio de 2013

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se hablara acerca un poco de la historia y los orígenes de los agujeros negros, así como acerca de los físicos involucrados en la solución de este fenómeno. También se tomara un poco la discusión de la filosofía de la ciencia que hacemos y que en principio, nos dejaron como herencia físicos como Galileo Galilei, Johannes Kepler, Newton, Huygens, Laplace, entre otros. Pondremos en duda conceptos que resultan extraídas de las hipótesis propuestas de como puede ser la naturaleza, contra los verdaderos fenómenos naturales.

Se obtendrá la primera solución a las ecuaciones de Einstein que es conocida como la "solución de Schwarzschild", así como la discusión acerca de que le pasa a esta solución en el horizonte de eventos, veremos que esta solución en el radio de schwarzschild presenta una singularidad de coordenada que deberá ser eliminada, usando otras coordenadas.

Se usara y deducirá las coordenadas de Eddington-Finkelstein, para eliminar la singularidad que hay en r_s que es llamado el radio de Schwarchild, también se trabajara con las coordenadas de Kruskal que son un par de coordenadas con las cuales se le dará una forma matemática a la métrica de Schwarzschild en donde ya no aparecerá la singularidad en el horizonte, es decir, se habrá eliminado esta singularidad usando las coordenadas de Kruskal.

Se pondrán en duda la manera en que la física actual es que recurre con gran facilidad a explicaciones abstractas, por momentos hasta místicas, acerca de algunos fenómenos que suceden en nuestra naturaleza. Se hablara también de la importancia que tiene el experimento en la ciencia que se construyo con todas las dificultades que esto implicó para los físicos como Galileo y otros. Hablaremos del juego de la ciencia y del juego platónico, en donde se recordara que el juego actualmente empleado es la ciencia, y no las abstracciones platónicas sin interés alguno por los fenómenos naturales, sino interés en el razonamiento puro proveniente de sí mismo, esta es la postura platónica que se supone haber desaparecido por su falta de objetividad y de ser poco acertadas a los fenómenos estudiados. Aunque al parecer esta filosofía platónica está ganando terrenos una vez más en el campo de la ciencia, se desconocen los motivos (consciente o inconscientemente) pero este es nuestro panorama actual.

Esperamos que este trabajo sea claro y nos sirva para hacer reflexiones acerca de nuestro panorama actual de la ciencia.

Capítulo 1

ANTECEDENTES HISTORICOS DE AGUJEROS NEGROS

Los agujeros negros han sido objetos físicos de gran interés en la astrofísica y la cosmología, cabe aclarar que estos objetos son de interés debido a su gran complejidad teórica como observacional.

No hace mucho tiempo, los agujeros negros eran muy difíciles de detectar debido a que tienen campos gravitacionales tan intensos que ni la luz misma puede salir de ellos, es por esto que era tan difícil observarlos, estos objetos se forman debido a la muerte de estrellas, hay una competencia entre fuerzas, la gravitacional y la presión de los gases con los que está formada la estrella, cuando la gravitacional es mayor a la presión de la estrella entonces la estrella colapsará formándose así un agujero negro. En este trabajo veremos algunas consecuencias de los agujeros negros tanto causalmente como predicciones de otros universos, pero sin tomar ningún aseveramiento debido que aunque los agujeros negros se han podido detectar en nuestro universo todavía no se sabe que ocurre dentro de ellos así que parte de estos estudios que se tratarán en este trabajo son meramente teóricos y no existe ninguna observación de dichas predicciones aún.

1.1. Los agujeros negros de Laplace

En 1969 John Wheeler fue el primero en nombrar a estos objetos con el nombre de agujeros negros, pero 200 años atrás aproximadamente ya eran sinónimo de debate. En esa época se encontraban dos posturas acerca de la naturaleza de la luz; la Newtoniana, que establecía que la luz estaba compuesta de diminutas partículas, y la segunda la de

Huygens, que la luz estaba compuesta por ondas. Años más tarde se encontró que la naturaleza de la luz está asociada a ambas, tenía características ondulatorias y corpusculares a la vez, de aquí partieron los físicos para encontrar una nueva teoría, la mecánica cuántica. Pero volviendo al tema, la teoría de Huygens no estaba nada claro cómo es que se vería afectada la luz por la gravedad teniendo estas características ondulatorias, porque como no son partículas, entonces, no tienen masa y la interacción gravitacional es entre masas. Pero si la luz estaba compuesta de partículas entonces sí podrían ser afectadas gravitacionalmente (como lo demostró Einstein con su teoría de la relatividad general) como lo son los cohetes, las balas y los planetas. Inicialmente se pensaba que las partículas de luz viajaban a velocidades infinitas, de modo que la gravedad no sería capaz de atraparlas, pero el descubrimiento de Ole Roemer en el año de 1676 fue que la luz viajaba a una velocidad finita, esto significaba que la gravedad pudiera tener efectos sobre la luz.

En 1975 Pierre-Simón Laplace en uno de sus trabajos hace notar, al igual que Michell, que de acuerdo con la teoría Newtoniana de la gravedad y la teoría corpuscular de la luz de Newton, la luz no puede escapar de un cuerpo celeste tal que $\frac{2GM}{RC^2} > 1$, donde M es la masa del objeto atractor, R es su radio, G la constante de gravitación universal y c la velocidad de la luz. Textualmente aclara “un astro luminoso de la misma densidad de la tierra y cuyo diámetro fuera 250 veces mayor que la del sol, no dejará, debido a su atracción gravitacional, que ninguno de sus rayos llegara hasta nosotros; es, pues, que los cuerpos luminosos mayores del universo sean, por su propia naturaleza, invisibles”.

Laplace para decir lo anterior hizo un cálculo simple. De la conservación de la energía tenemos que:

$$K + V = E \qquad (1.1)$$

Pero para un cuerpo atractor como una estrella y tratándose de la luz queriendo escapar de la estrella vemos que debe cumplir para superar el campo gravitacional y salir de la estrella que

$$\frac{1}{2}mc^2 - \frac{GMm}{r} \geq 0 \qquad (1.2)$$

De este modo se sigue que

$$\frac{1}{2}mc^2 \geq \frac{GMm}{r} \qquad (1.3)$$

$$r \geq \frac{2GM}{C^2} \qquad (1.4)$$

Que por definición este es el radio de Schwarzschild. Pero debido a la teoría ondulatoria de Huygens la cual se quedó como la que explicaba la naturaleza de la luz debido a que tuvo mucho éxito en los fenómenos ópticos como el de refracción, difracción, reflexión, Laplace tuvo que olvidar esta idea hasta siglos más tarde retomadas por Schwarzschild.

Entonces las conclusiones de Laplace eran correctas, según los datos actuales el diámetro tiene que ser 246 veces el diámetro solar, lo cual nos lleva a que la predicción de Laplace fue muy buena. Hay que agregar que este cálculo clásico es el único que empata con la relatividad general de Einstein, lo cual es interesante que para este fenómeno tan increíble como el de agujeros negros las dos teorías convergen en el colapso.

1.2 Formación de agujeros negros

La atracción gravitacional que ejerce un objeto sobre una partícula depende sólo de dos cosas: la masa del objeto y la distancia a la partícula. Esto es explicado por Newton y posteriormente por Einstein.

Para que un objeto que emite luz desde su superficie sea un agujero negro, es decir, que no deje escapar dicha luz, debe tener suficiente masa como para que la atracción gravitacional en su superficie sea la necesaria para poder frenar la luz. Toda está en la relación entre la masa y el tamaño del objeto, es decir, debe cumplir ciertas condiciones para que se forme, por ejemplo, que tenga mucha masa y un tamaño pequeño. A este proceso que lleva a una estrella en convertirse en un agujero negro se le conoce como "*colapso gravitatorio*".

Expliquemos primero a grandes rasgos qué es una estrella, una estrella; posee una gran cantidad de gas que se encuentra confinado a ella debido a su propia gravedad, al igual que nuestra atmósfera que se encuentra atrapada en nuestro planeta tierra. La estrella tiene una forma aproximada de una esfera y su tamaño no cambia durante miles de millones de años en su vida normal. Esto significa que existe una fuerza que contrarresta a la atracción gravitacional, de lo contrario el gas seria atraído hacia el centro de la estrella cada vez más y más hasta hacer más pequeño el tamaño de la estrella, esta fuerza que contrarresta a la gravedad es la presión del propio gas que está en constante equilibrio con la fuerza gravitacional, esta presión es muy alta debido a las altas temperaturas que existen dentro de las estrellas, esto se debe a las reacciones nucleares que se dan dentro de la estrella, en ellos los átomos de hidrogeno(que es la mayor parte de gas que hay en las estrellas)se fusionan para formar átomos de helio y debido a esto hay una gran liberación de energía.

Una vez que la estrella pierde su combustible y su masa excede la masa crítica, que es conocido como el límite de Chandrasekhar, que es 1.5 veces la masa del sol, se convierte en una estrella de neutrones, en donde los átomos se contraen tanto que los electrones para no violar el principio de exclusión de Pauli se fusionan con los protones y crean neutrones, estos resultados fueron estudiados por el físico Robert Oppenheimer en el año de 1939. Después de esto los físicos se preguntaron si la estrella de neutrones podría llegar a un equilibrio y detener el colapso gravitacional, y al parecer la respuesta es que no, la fuerza gravitacional vencerá a la presión y el colapso es inevitable siempre y cuando la masa exceda unas 8 masas solares. El mismo Oppenheimer en conjunto con Hartland Snyder realizan un trabajo referente a qué sucede con una estrella lo suficientemente grande, unas 60 veces la masa del sol, entonces, concluyeron que este es el problema de una masa esférica que se comprime indefinidamente debido a su propia atracción gravitacional, a este colapso se le conoce como agujero negro. En conclusión los agujeros negros se deben a las estrellas, como vimos el final de una estrella debido a su masa, terminará en enana blanca si no excede el límite de Chandrasekhar, o en una estrella de neutrones, si excede este límite, o en un agujero negro si su masa es muy grande.

1.3 Agujeros blancos y agujeros negros

El descubrimiento de la expansión del universo, ha sido de gran importancia para los científicos debido a que esto pretende explicar el origen del mismo, mediante la teoría del "*Big-bang*", que dice que toda la materia estaba concentrada en una región del espacio, tan pequeño como lo es un punto, como si fuera un agujero negro, hubo una explosión y la materia se expandió por todo el espaciotiempo enfriándose y permitiendo que se formaran los átomos, la materia, las galaxias, y todo lo que conocemos hoy en día. Esto es importante debido a que en el estudio de los agujeros negros, existen unos resultados teóricos que nos hacen temblar sólo de pensar lo maravilloso que puede ser nuestro universo, que a veces hasta nos parece ficción. Como en los años 20, Einstein en conjunto con Rosen encontraron lo que se conoce ahora como puente o portal de Einstein-Rosen, que es el resultado de la estructura del espaciotiempo de la métrica de Schwarzschild en las coordenadas de Eddington-Finkelstein, aún más, se ha propuesto la existencia de universos paralelos, y que el puente de Einstein-Rosen conecta a estos dos universos, aunque John Wheeler propuso que los dos universos paralelos son sólo dos puntos del mismo universo separados por una distancia muy grande y que en este caso el puente de Einstein-Rosen conectaría las dos regiones lejanas del espacio a lo que llamó "*agujero de gusano*" .

Bien, pues en los puentes de Einstein-Rosen lo que no se puede ver dentro de un agujero negro, es lo que conecta al otro universo paralelo, se le conoce como "*agujero blanco*", y es lo contrario de un agujero negro en lugar de absorber todo a su paso lo expulsa, es por esto que algunos piensan que el Big-bang es el resultado de un agujero blanco.

Aunque todos estos resultados sólo han sido elucubraciones arrojadas de la geometría de los agujeros negros, hasta la fecha no existen ninguna evidencia observacional de que existan estos puentes de Einstein-Rosen o los agujeros de gusano de Wheeler, de manera que hasta el momento son resultados matemáticos, que no están sustentados en las mediciones astronómicas, aunque también cabe decir que desconocemos muchas cosas, como por ejemplo el concepto de *“singularidad”,* que no es más que algo que no podemos explicar mediante las herramientas matemáticas actuales.

Capítulo 2

LA SOLUCIÓN DE SCHWARZSCHILD

La solución que da Schwarzschild a las ecuaciones de campo de Einstein no solo fue la primera solución a estas ecuaciones si no también es de las más importantes ya que representa el espaciotiempo generado por una masa esféricamente simétrica en su exterior y sin rotación. Esta métrica es muy utilizada en el campo de la astrofísica para explicar cómo son los campos gravitacionales de objetos masivos como lo pueden ser planetas o estrellas, etc.

Einstein había dicho después de terminar la teoría de la relatividad general que estas ecuaciones de campo, serian muy difícil resolver debido a que por un lado se tiene información del espaciotiempo y por el otro la información de que es lo que hace que este espaciotiempo se deforme, entonces se le hacía muy difícil encontrar una solución general a estas ecuaciones, pero paso poco tiempo de esto cuando Schwarzschild encontró la primer solución, y el truco fue imponerle condiciones al espaciotiempo como se hace cuando se resuelve un problema de valores en la frontera.

Schwarzschild impuso las siguientes condiciones a las ecuaciones de Einstein:

- El campo es estático
- El campo es esféricamente simétrico
- El espacio está vacío
- El espacio es asintóticamente llano, es decir, si $r \to \infty$, se recupera el espaciotiempo de Minkowski

De manera general podemos escribir el tensor métrico covariante en coordenadas esféricas de la siguiente manera:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{tr} & g_{t\theta} & g_{t\varphi} \\ g_{rt} & g_{rr} & g_{r\theta} & g_{r\varphi} \\ g_{\theta t} & g_{\theta r} & g_{\theta\theta} & g_{\theta\varphi} \\ g_{\varphi t} & g_{\varphi r} & g_{\varphi\theta} & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \qquad (2.1)$$

De donde aplicando las condiciones anteriores impuestas por Schwarzschild el tensor métrico se reduce a:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \qquad (2.2)$$

Debido a que el campo gravitacional solo afecta las componentes radiales y temporales tendremos que $g_{\theta\theta} = \eta_{\theta\theta}$ y $g_{\varphi\varphi} = \eta_{\varphi\varphi}$ de este modo el tensor métrico queda:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2\emptyset(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\Lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 sen^2\theta \end{pmatrix} \qquad (2.3)$$

Y la inversa del tensor métrico es:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{-2\emptyset(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\Lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2}sen^{-2}\theta \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Con φ(r) y **Λ**(r) dos funciones a determinar a partir de las ecuaciones de Einstein y que además deben cumplir que:

$$\lim_{r\to\infty} \Phi(r) = 0 \qquad (2.5)$$

$$\lim_{r\to\infty} \Lambda(r) = 0 \qquad (2.6)$$

Para que lejos del agujero negro se recupere el espaciotiempo de la relatividad especial de Minkoski.

Necesitamos el tensor métrico debido a que aparece en el tensor de curvatura.

2.1 La métrica de Schwarzschild

Las ecuaciones de Einstein son:

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \quad (2.7)$$

Donde:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

Sustituyendo lo anterior en la (2.7) nos queda:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = kT_{\mu\nu} \quad (2.8)$$

Multiplicando por el tensor métrico contra variante tenemos que:

$$g^{\mu\nu}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right) = kg^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$$

$$R - \frac{1}{2} R\delta_\nu^\nu = kT_\nu^\nu$$

Haciendo una contracción tenemos:

$$R - \frac{1}{2} R(4) = kT$$

De aquí que:

$$R = -kT \qquad (2.9)$$

Sustituyendo (2.9) en (2.8) tenemos que:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(-kT) g_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(kT) g_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} = k(T_{\mu\nu} - T g_{\mu\nu})$$

Para las ecuaciones de campo en el vació $T_{\mu\nu} = 0$ entonces:

$$G_{\mu\nu} = 0 \qquad (2.10)$$

Esto implica que:

$$R_{\mu\nu} = 0 \qquad (2.11)$$

Y debemos encontrar los:

R_{00}= 0 R_{22}= 0

R_{11}= 0 R_{33}= 0

Y la forma del tensor de Ricci es:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\rho\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} \qquad (2.12)$$

Por lo que nos queda claro que hay que encontrar los símbolos de Christoffel que son de la forma:

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho}\left(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}\right) \qquad (2.13)$$

Calculamos los símbolos de Christoffel para **σ**=0 nos queda como:

$$\Gamma^0_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{0\rho}\left(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}\right) \qquad (2.14)$$

$$\Gamma^0_{\mu\nu} = \begin{Bmatrix} \Gamma^0_{00} & \Gamma^0_{01} & \Gamma^0_{02} & \Gamma^0_{03} \\ \Gamma^0_{10} & \Gamma^0_{11} & \Gamma^0_{12} & \Gamma^0_{13} \\ \Gamma^0_{20} & \Gamma^0_{21} & \Gamma^0_{22} & \Gamma^0_{23} \\ \Gamma^0_{30} & \Gamma^0_{31} & \Gamma^0_{32} & \Gamma^0_{33} \end{Bmatrix}$$

Debido a que el tensor métrico es diagonal y todos los demás términos fuera de ella son cero, excepto para **ρ**=**σ** son distintos de cero los tensores métricos, por lo que se obtiene:

$$\rho = \sigma = 0$$

$$\Gamma^0_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{00}\left(\partial_\mu g_{0\nu} + \partial_\nu g_{\mu 0} - \partial_o g_{\mu\nu}\right)$$

Desarrollando todos los términos quedan como:

$$\Gamma^0_{\mu\nu} = \begin{Bmatrix} 0 & \Phi'(r) & 0 & 0 \\ \Phi'(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Ahora para **σ**=**ρ**=1 tenemos que:

$$\Gamma^1_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{11}\left(\partial_\mu g_{1\nu} + \partial_\nu g_{\mu 1} - \partial_1 g_{\mu\nu}\right) \qquad (2.15)$$

$$\Gamma^1_{\mu\nu} = \begin{Bmatrix} \Gamma^1_{00} & \Gamma^1_{01} & \Gamma^1_{02} & \Gamma^1_{03} \\ \Gamma^1_{10} & \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{13} \\ \Gamma^1_{20} & \Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{22} & \Gamma^1_{23} \\ \Gamma^1_{30} & \Gamma^1_{31} & \Gamma^1_{32} & \Gamma^1_{33} \end{Bmatrix}$$

De este modo los símbolos para este caso son:

$$\Gamma^1_{\mu\nu} = \begin{Bmatrix} \Phi' e^{2(\Lambda-\Phi)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -re^{-2\Lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -rsen^2\theta e^{-2\Lambda} \end{Bmatrix}$$

Ahora para **σ**=**ρ**=2 para obtener:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{2} = \frac{1}{2} g^{22}\left(\partial_\mu g_{2\nu} + \partial_\nu g_{\mu 2} - \partial_2 g_{\mu\nu}\right) \qquad (2.16)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{2} = \begin{Bmatrix} \Gamma_{00}^{2} & \Gamma_{01}^{2} & \Gamma_{02}^{2} & \Gamma_{03}^{2} \\ \Gamma_{10}^{2} & \Gamma_{11}^{2} & \Gamma_{12}^{2} & \Gamma_{13}^{2} \\ \Gamma_{20}^{2} & \Gamma_{21}^{2} & \Gamma_{22}^{2} & \Gamma_{23}^{2} \\ \Gamma_{30}^{2} & \Gamma_{31}^{2} & \Gamma_{32}^{2} & \Gamma_{33}^{2} \end{Bmatrix}$$

Así los símbolos de Christoffel para este caso son:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{2} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-1} & 0 \\ 0 & r^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -sen\theta \;\; cos\theta \end{Bmatrix}$$

Ya por ultimo calculamos los términos para **σ**=**ρ**=3, para obtener:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{3} = \frac{1}{2} g^{33}\left(\partial_\mu g_{3\nu} + \partial_\nu g_{\mu 3} - \partial_3 g_{\mu\nu}\right) \qquad (2.17)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{3} = \begin{Bmatrix} \Gamma_{00}^{3} & \Gamma_{01}^{3} & \Gamma_{02}^{3} & \Gamma_{03}^{3} \\ \Gamma_{10}^{3} & \Gamma_{11}^{3} & \Gamma_{12}^{3} & \Gamma_{13}^{3} \\ \Gamma_{20}^{3} & \Gamma_{21}^{3} & \Gamma_{22}^{3} & \Gamma_{23}^{3} \\ \Gamma_{30}^{3} & \Gamma_{31}^{3} & \Gamma_{32}^{3} & \Gamma_{33}^{3} \end{Bmatrix}$$

Así los símbolos de Christoffel para este caso son:

$$\Gamma^{3}_{\mu\nu} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & cot\theta \\ 0 & r^{-1} & cot\theta & 0 \end{Bmatrix}$$

Así que podemos escribir los únicos coeficientes de Christoffel distintos de cero que son:

$$\Gamma^{1}_{00}, \Gamma^{1}_{11}, \Gamma^{1}_{22}, \Gamma^{1}_{33}, \Gamma^{2}_{12}, \Gamma^{2}_{21}, \Gamma^{2}_{33}, \Gamma^{0}_{01}, \Gamma^{0}_{10}, \Gamma^{3}_{13}, \Gamma^{3}_{31}, \Gamma^{3}_{23}, \Gamma^{3}_{32}$$

Pero debido a la propiedad de simetría de los símbolos de Christoffel:

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} \qquad (2.18)$$

Lo anterior se reduce a:

$$\Gamma^{1}_{00}, \Gamma^{1}_{11}, \Gamma^{1}_{22}, \Gamma^{1}_{33}, \Gamma^{2}_{12}, \Gamma^{2}_{33}, \Gamma^{0}_{01}, \Gamma^{3}_{31}, \Gamma^{3}_{23}$$

Solo se reduce a 9 elementos de los cuales los pondremos en una tabla puesto que los usaremos para obtener los tensores de Ricci:

$\Gamma^{1}_{00} = \Phi' e^{2(\Lambda - \Phi)}$ $\qquad$ $\Gamma^{1}_{22} = -re^{-2\Lambda}$ $\qquad$ $\Gamma^{1}_{33} = -rsen^{2}\theta e^{-2\Lambda}$

$\Gamma^{1}_{11} = \Lambda'$ $\qquad$ $\Gamma^{2}_{12} = r^{-1}$

$$\Gamma^{0}_{01} = \Phi'$$

$$\Gamma^{2}_{33} = -sen\theta cos\theta$$

$$\Gamma^{3}_{31} = r^{-1}$$

$$\Gamma^{3}_{23} = cot\theta$$

Ahora regresando a lo planteado anteriormente acerca del tensor de Ricci que esta dado como:

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} + \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\rho\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\rho\sigma} \qquad (2.19)$$

Corremos los índices para $\mu = \nu = 0$ entonces el tensor queda

$$R_{00} = \partial_{0}\Gamma^{\sigma}_{0\sigma} - \partial_{\sigma}\Gamma^{\sigma}_{00} + \Gamma^{\rho}_{0\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\rho 0} - \Gamma^{\sigma}_{00}\Gamma^{\sigma}_{\rho\sigma} \qquad (2.20)$$

Como podemos observar el primer término de la ecuación se anula debido a que contiene una derivada parcial respecto al tiempo, entonces nos dedicaremos a calcular los otros tres términos restantes.

Calculamos el segundo término:

$$\partial_{\sigma}\Gamma^{\sigma}_{00} = \partial_{0}\Gamma^{0}_{00} + \partial_{1}\Gamma^{1}_{00} + \partial_{2}\Gamma^{2}_{00} + \partial_{3}\Gamma^{3}_{00} \qquad (2.21)$$

De la tabla que obtuvimos de los coeficientes de Christoffel podemos notar que el tercer y cuarto término son cero, el primer término también lo es debido a la derivada temporal, entonces, sólo nos sobrevive el segundo sumando.

$$\partial_\sigma \Gamma^\sigma_{00} = \partial_r \Phi'^{e^{2(\Phi-\Lambda)}}$$

Desarrollando la derivada respecto r nos queda finalmente

$$\partial_\sigma \Gamma^\sigma_{00} = \left(\Phi'' + 2\Phi'^2 - 2\Phi'\Lambda'\right)e^{2(\Phi-\Lambda)}$$

Ahora calculemos el tercer sumando corriendo **ρ**

$$\Gamma^\rho_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{\rho 0} = \Gamma^0_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{00} + \Gamma^1_{1\sigma}\Gamma^\sigma_{10} + \Gamma^2_{2\sigma}\Gamma^\sigma_{20} + \Gamma^3_{3\sigma}\Gamma^\sigma_{30} \quad (2.22)$$

De donde corriendo sobre **σ** obtenemos

$$\Gamma^\rho_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{\rho 0} = 2\Phi'^2 e^{2(\Phi-\Lambda)}$$

Ya por último calculamos

$$\Gamma^\rho_{00}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} = \Gamma^\rho_{00}\Gamma^0_{\rho 0} + \Gamma^\rho_{00}\Gamma^1_{\rho 1} + \Gamma^\rho_{00}\Gamma^2_{\rho 2} + \Gamma^\rho_{00}\Gamma^3_{\rho 3} \qquad (2.23)$$

Así que

$$\Gamma^\rho_{00}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} = \left(\Phi'^2 + \Phi'\Lambda' + 2\Phi'^{r^{-1}}\right)e^{2(\Phi-\Lambda)}$$

Sustituyendo los resultados anteriores en el tensor de Ricci producimos la siguiente ED

$$R_{00} = 0$$

$$2\Phi'\Lambda' - 2\Phi'^2 - \Phi'' + 2\Phi'^2 - \Phi'^2 - \Lambda'\Phi' - 2\Phi'^{\mathrm{r}^{-1}} = 0 \quad (2.24)$$

$$\Phi'' + \Phi'(\Phi' - \Lambda' + 2\mathrm{r}^{-1}) = 0 \qquad (2.25)$$

Ahora calculamos:

$$R_{11} = \partial_1 \Gamma^{\sigma}_{1\sigma} - \partial_{\sigma} \Gamma^{\sigma}_{11} + \Gamma^{\rho}_{1\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\rho 1} - \Gamma^{\sigma}_{11}\Gamma^{\sigma}_{\rho\sigma} \qquad (2.26)$$

Calculando el primer sumando

$$\partial_1 \Gamma^{\sigma}_{1\sigma} = \partial_1 \Gamma^{0}_{10} + \partial_1 \Gamma^{1}_{11} + \partial_2 \Gamma^{2}_{12} + \partial_3 \Gamma^{3}_{13}$$

$$\partial_1 \Gamma^{\sigma}_{1\sigma} = \Phi'' + \Lambda'' - 2r^{-2}$$

Calculando

$$-\partial_{\mathrm{r}}\Lambda' = -\Lambda''$$

Calculamos

$$\Gamma^{\rho}_{1\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\rho 1} = \Gamma^{\rho}_{10}\Gamma^{0}_{\rho 1} + \Gamma^{\rho}_{11}\Gamma^{1}_{\rho 1} + \Gamma^{\rho}_{12}\Gamma^{2}_{\rho 1} + \Gamma^{\rho}_{13}\Gamma^{3}_{\rho 1} \qquad (2.27)$$

$$\Gamma^{\rho}_{1\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\rho 1} = \Phi'^2 + \Lambda'^2 + r^{-2}$$

Calculando el cuarto término

$$-\Gamma^{\rho}_{11}\Gamma^{\sigma}_{\rho\sigma} = -(\Gamma^{0}_{11}\Gamma^{\sigma}_{0\sigma} + \Gamma^{1}_{11}\Gamma^{\sigma}_{1\sigma} + \Gamma^{2}_{11}\Gamma^{\sigma}_{2\sigma} + \Gamma^{3}_{11}\Gamma^{\sigma}_{3\sigma})$$

De manera que calculando la suma sobre sigma tenemos

$$-\Gamma^{\rho}_{11}\Gamma^{\sigma}_{\rho\sigma} = -\Lambda'\Phi' - \Lambda'^{2} - 2\Lambda'\mathrm{r}^{-1}$$

Reacomodando términos tenemos

$$R_{11} = \Phi'' + \Phi'(\Phi' - \Lambda') - 2\Lambda'\mathrm{r}^{-1} \qquad (2.28)$$

Calculamos ahora

$$R_{22} = \partial_2\Gamma^{\sigma}_{2\sigma} - \partial_\sigma\Gamma^{\sigma}_{22} + \Gamma^{\rho}_{2\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\rho 2} - \Gamma^{\sigma}_{22}\Gamma^{\sigma}_{\rho\sigma} \qquad (2.29)$$

Calculando el primer sumando

$$\partial_2\Gamma^{\sigma}_{2\sigma} = \partial_2\Gamma^{0}_{20} + \partial_2\Gamma^{1}_{21} + \partial_2\Gamma^{2}_{22} + \partial_2\Gamma^{3}_{23}$$

$$\partial_2\Gamma^{\sigma}_{2\sigma} = -Csc^2\theta$$

Calculando el segundo sumando

$$-\partial_\sigma\Gamma^{\sigma}_{22} = -\partial_0\Gamma^{0}_{22} - \partial_1\Gamma^{1}_{22} - \partial_2\Gamma^{2}_{22} - \partial_3\Gamma^{3}_{22}$$

$$-\partial_\sigma\Gamma^{\sigma}_{22} = (1 - 2r\Lambda')e^{-2\Lambda}$$

Ahora calculamos el tercer término

$$\Gamma^{\rho}_{2\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\rho 2} = -2e^{-2\Lambda} + cot^{2}\theta$$

Ahora el

$$-\Gamma^{\rho}_{22}\Gamma^{\sigma}_{\rho\sigma} = r\Phi'^{e^{-2\Lambda}} + r\Lambda'^{e^{-2\Lambda}} + 2e^{-2\Lambda}$$

Ahora construimos él:

$$R_{22} = [r(\Lambda' - \Phi') - 1]\mathrm{e}^{-2\Lambda} + 1 = 0 \qquad (2.30)$$

Ya por último calculamos

$$R_{33} = 0$$

$$R_{33} = \partial_3\Gamma^{\sigma}_{3\sigma} - \partial_\sigma\Gamma^{\sigma}_{33} + \Gamma^{\rho}_{3\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\rho\nu} - \Gamma^{\sigma}_{33}\Gamma^{\sigma}_{\rho\sigma} \qquad (2.31)$$

De igual forma como calculamos los anteriores se obtiene:

$$\{[r(\Lambda' - \Phi') - 1]\mathrm{e}^{-2\Lambda} + 1\}\mathrm{sen}^{2}\theta = 0 \qquad (2.32)$$

De tal modo que los tensores de Ricci son:

$$\Phi'' + \Phi'(\Phi' - \Lambda' + 2\mathrm{r}^{-1}) = 0 \qquad (2.33a)$$

$$\Phi'' + \Phi'(\Phi' - \Lambda') - 2\Lambda'^{r^{-1}} = 0 \qquad (2.33b)$$

$$[r(\Lambda' - \Phi') - 1]e^{-2\Lambda} + 1 = 0 \qquad (2.33c)$$

$$\{[r(\Lambda' - \Phi') - 1]e^{-2\Lambda} + 1\}\mathrm{sen}^2\theta = 0 \qquad (2.33d)$$

De este sistema de ecuaciones diferenciales tenemos que restando (2.33a) a (2.33b) obtenemos:

$$2\Lambda' r^{-1} + 2\Phi' r^{-1} = 0$$

Así llegamos a que

$$\Phi' = -\Lambda' \qquad (2.34)$$

Hemos encontrado una relación entre las derivadas de las funciones a determinar, así pues sustituyendo (2.34) en (2.33c) obtenemos:

$$\frac{d}{dr}(re^{-2\Lambda}) = 1 \qquad (2.35)$$

Integrando respecto ***r*** obtenemos:

$$e^{-2\Lambda} = 1 + \frac{\alpha}{r} \qquad (2.36)$$

Siendo $\boldsymbol{\alpha}$ una constante de integración

Ahora tenemos que $\Phi \quad + \Lambda = \mathrm{W}$ que se obtiene integrando respecto a r la ecuación (2.34), de aquí tenemos:

$$e^{2(\Phi+\Lambda)} = W' \qquad con \;\; W' = e^{2W} = constane$$

De aquí

$$e^{-2\Lambda} = W' e^{2\Phi} \qquad (2.37)$$

Siendo así aplicamos la condición que el espaciotiempo es asintóticamente plano para obtener el valor de W'

Entonces

$$W' = 1$$

Y con lo anterior témenos la siguiente relación para (2.37)

$$e^{-2\Lambda} = e^{2\Phi}$$

Por lo que podemos concluir también que

$$e^{2\Phi} = 1 + \frac{\alpha}{r} \qquad (2.38)$$

Ya con esto terminamos por obtener las componentes y sustituimos en el tensor métrico

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1+\frac{\alpha}{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1+\frac{\alpha}{r})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 sen^2\theta \end{pmatrix} \qquad (2.39)$$

Ahora solo nos falta encontrar el valor de **α**. Sabemos bien que esta métrica describe el espaciotiempo dentro y fuera de un objeto masivo esféricamente simétrico como es el caso de una estrella o un planeta, entonces, esperamos recuperar la forma de la métrica para campo débil cuando $r \to \infty$, tomando este límite entonces tenemos

$$g_{tt}(r \to \infty) = -\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) \qquad (2.40)$$

Y

$$g_{rr}(r \to \infty) = (1 + \frac{\alpha}{r})^{-1} \qquad (2.41)$$

Por otro lado, de la métrica de campo débil tenemos

$$g_{tt} = -(1 + 2\Phi) \qquad (2.42)$$

Y

$$g_{rr} = (1 - 2\Phi) \qquad (2.43)$$

Donde $\Phi = -\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{r}}$ de manera que comparando (2.40),(2.41) con (2.42),(2.43) para obtener que $\alpha = -2M$, así obtenemos la métrica de Schwarzschild

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1 - \frac{2M}{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \frac{2M}{r})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 sen^2\theta \end{pmatrix} \qquad (2.44)$$

También se puede escribir como el elemento de línea o intervalo de espaciotiempo de la siguiente manera

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + (1 - \frac{2M}{r})^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2) \qquad (2.45)$$

2.2 El problema en el horizonte de un agujero negro

El problema en el horizonte de Schwarzschild aparece en la ecuación (2.45) cuando r=2M y para r=0, pero, en r=0 es una singularidad física, la métrica no está definida en ese punto, aunque para r=2M presenta una singularidad de coordenada, veamos un ejemplo de esta singularidades.

Bien lo que haremos es mostrar que la singularidad en el horizonte no es una singularidad física sino una singularidad de coordenada. Es fácil a veces crear singularidades de coordenada por ejemplo podemos tomar en el plano euclidiano la métrica:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \qquad (2.46)$$

Ahora bien si introducimos la coordenada

$$\eta = \frac{1}{3}x^3 \qquad (2.47)$$

Tendremos que:

$$x = (3\eta)^{\frac{1}{3}} \qquad (2.48)$$

Tomando su diferencial nos queda

$$dx = \frac{d\eta}{(3\eta)^{\frac{2}{3}}} \qquad (2.49)$$

De manera que sustituyendo en la métrica nos queda

$$ds^2 = \frac{d\eta^2}{(3\eta)^{\frac{4}{3}}} + dy^2 \qquad (2.50)$$

De donde se logra apreciar que existe una singularidad en η=0. A esto se le conoce como singularidad de coordenada. Esta singularidad es removible pero no es tan fácil encontrar la forma de remover una singularidad de coordenada o saber si una singularidad es debida a la coordenada o no.

2.3 La Coordenada de Wheeler

Si miramos la estructura causal de la métrica de Schwarzschild, mediante las geodésicas nulas radiales, las geodésicas nulas que van de $r = 0$ a $r = \infty$ o viceversa. Para $d\theta = d\varphi = 0$, tomando el elemento de línea a

$$ds^2 = 0 \quad para\ geodésicas\ nulas$$

Entonces:

$$0 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + (1 - \frac{2M}{r})^{-1}dr^2 \qquad (2.51)$$

Multiplicando por $\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$y dividimos entre dr^2 nos queda:

$$\frac{dt^2}{dr^2} = \frac{1}{(1 - \frac{2M}{r})^2} \qquad (2.52)$$

Entonces:

$$dt = \pm \frac{dr}{(1 - \frac{2M}{r})} \qquad (2.53)$$

Integrando (2.53) tenemos:

$$\int dt = \int \frac{dr}{(1 - \frac{2M}{r})} \qquad (2.54)$$

Obtenemos que:

$$t = t_0 + \int \frac{(u + 2M)}{u} du$$

De manera que:

$$t = \pm \left[r + 2MLn\left(\frac{r}{2M} - 1\right)\right] \qquad (2.55)$$

Y definimos a:

$$r^* = \left[r + 2MLn\left(\frac{r}{2M} - 1\right)\right] \qquad (2.56)$$

Donde a (2.56) se le conoce como la coordenada de Regge-Wheeler.

Y podemos apreciar que la coordenada r toma valores en el rango $r_s < r < \infty$, donde $r_s = 2M$, mientras que la coordenada de Regge-wheeler tomará valores en el rango $-\infty < r^* < \infty$.Vemos que para la región $r < r_s$ se tiene que, si dividimos entre r_s se obtiene:

$$\frac{r}{r_s} < 1$$

Y restando 1 en la desigualdad construimos el factor del logaritmo de la coordenada tortuga que es:

$$\frac{r}{r_s} - 1 < 0$$

De manera que como el logaritmo no admite cantidades menores que cero para los números reales, por tanto ese argumento deberá estar en valor absoluto entonces (2.56) se transforma en:

$$r^* = \left[r + \mathrm{r_s} Ln \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right| \right] \qquad (2.57)$$

C a p i t u l o   3

LAS COORDENADAS DE EDDINGTON-FINKELSTEIN (E-F)

Habiendo encontrado ya la solución de Schwarzschild, nos encontramos con los problemas de $r = 0$ y $r = \mathrm{r}_s$. La singularidad de $r = 0$ es una singularidad esencial y es algo ya particular en los agujeros negros, es decir, una singularidad física verdadera, pero en $r = \mathrm{r_s}$ produce una singularidad únicamente por cómo se escoge el sistema coordenado.

Es por esto que Eddington y Finkelstein introdujeron unas coordenadas para eliminar la singularidad de 2M en la métrica de Schwarzschild, que es lo que nos apresuraremos a hacer en este capítulo.

Notemos que el término $(1 - \frac{2M}{r})$ no aparece en las componentes angulares, por lo tanto las coordenadas U y V sólo dependerán de las coordenadas temporales y radiales.

3.1. Coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes

Introducimos las variables:

$$V = t + r^* \qquad (3.1)$$

Que se obtuvo en la ecuación (2.55) anteriormente

Con lo cual la diferencial es:

$$dV = dt + dr\left[1 + \frac{1}{\frac{r}{\mathrm{r_s}} - 1}\right] \qquad (3.2)$$

Haciendo álgebra llegamos a que el diferencial es:

$$dV = dt + \frac{dr}{1 - \frac{\mathrm{r_s}}{r}} \qquad (3.3)$$

Despejamos el diferencial de tiempo para obtener:

$$dt = dv - \frac{dr}{1 - \frac{\mathrm{r_s}}{r}} \qquad (3.4)$$

Elevando al cuadrado (3.4) obtenemos:

$$dt^2 = dV^2 - 2dVdr[1 - \frac{\mathrm{r_s}}{r}]^{-1} + dr^2[1 - \frac{\mathrm{r_s}}{r}]^{-2} \qquad (3.5)$$

Sustituyendo (3.5) en la métrica de Schwarzschild ecuación (2.45) obtenemos:

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{\mathrm{r_s}}{r}\right]dV^2 + 2dVdr + r^2[d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2] \qquad (3.6)$$

De manera que para $r = 2M$ en (3.6) se ve que ya no hay problema, solamente se anula el primer término. Esto no implica que el tiempo se detenga, sólo tenemos que recordar que el diferencial dV tiene componentes temporales.

3.2 Coordenadas de Eddington-Finkelstein salientes

Ahora introducimos una nueva variable

$$U = t - r^{*} \qquad (3.7)$$

Calculamos su diferencial usando la ecuación (2.55) tenemos que:

$$dU = dt - \left[\frac{r}{r - \mathrm{r_s}}\right] dr \qquad (3.8)$$

De aquí finalmente obtenemos:

$$dU = dt - \frac{dr}{\left[1 - \frac{\mathrm{r_s}}{r}\right]} \qquad (3.9)$$

Así despejando el diferencial de tiempo y elevando al cuadrado nos queda:

$$dt^2 = dU^2 - 2dUdr[1 - \frac{\mathrm{r_s}}{r}]^{-1} + dr^2[1 - \frac{r_s}{r}]^{-2} \qquad (3.10)$$

Sustituyendo (3.10) en la métrica de Schwarzschild nos queda que:

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{\mathrm{r_s}}{r}\right] dU^2 + 2dUdr + r^2[d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2] \qquad (3.11)$$

De (3.11) vemos que al igual que (3.6) el primer término se anula al evaluar en $r = \mathrm{r_s}$ pero lo demás permanece bien comportado.

De manera que con estas nuevas coordenadas logramos quitar la singularidad de $r = \mathrm{r_s}$.y demostramos que efectivamente sólo era una singularidad de coordenada.

Ahora veremos qué es lo que pasa con la estructura causal de ambas coordenadas.

3.3 La estructura causal de las coordenadas de Eddington-Finkelstein

Restando las ecuaciones (3.1) y (3.7) tenemos que:

$$V - U = 2r + 2\mathrm{r_s} Ln\left[\frac{r}{\mathrm{r_s}} - 1\right] \qquad (3.12)$$

Que podemos escribirla también como:

$$\frac{1}{2}(V - U) = \left[r + \mathrm{r_s} Ln\left|\frac{r}{r_s} - 1\right|\right] \qquad (3.13)$$

Calculando sus diferenciales tenemos que:

$$\frac{1}{2}(dV - dU) = \frac{dr}{[1 - \frac{\mathrm{r_s}}{r}]} \qquad (3.14)$$

De manera que despejando el diferencial de r y sustituyéndolo en la ecuación (3.11) obtenemos:

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{\mathrm{r_s}}{r}\right] dUdV + r^2[d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2] \qquad (3.15)$$

Que obtenemos el mismo resultado despejando el diferencial de r en (3.14) y sustituyéndolo en (3.6). Pero ahora si apreciamos que en conjunto las coordenadas (U, V, θ, φ) que mapean todas las regiones dentro y fuera del agujero negro tienen problemas para $r = \mathrm{r}_s$ debido q que el primer término se hace cero en (3.15), de este modo necesitamos otro conjunto de coordenadas que en conjunto no presente este problema en 2M.

C a p í t u l o 4

COORDENADAS DE KRUSKAL

En este caso, la superficie $r = 2M$ está de nuevo a una distancia infinita ya sea en $V = -\infty$ o $U = \infty$. Por esto se realiza un cambio de coordenada que traiga a esta superficie una distancia finita.

En términos de las nuevas coordenadas $(\tilde{u}, \tilde{v})$ definidas por:

$$\tilde{v} = 2r_s e^{\frac{V}{2r_s}} \tag{4.1}$$

Y

$$\tilde{u} = -2r_s e^{-\frac{U}{2r_s}} \tag{4.2}$$

Con $r_s = 2M$

Estas coordenadas se llaman coordenadas de Kruskal-szekeres, donde los puntos en el horizonte se encuentran parametrizadas por ($\tilde{u} = 0, v$,θ,φ y (u,v=0,θ,φ). El hecho de que U y V tengan valores finitos en el horizonte sugiere que la forma de la métrica es regular en esos puntos.

Con esto si sumamos (4.1) y (4.2) obtenemos:

$$\tilde{v} + \tilde{u} = 2r_s\left(e^{\frac{V}{2r_s}} - e^{-\frac{U}{2r_s}}\right) \tag{4.3}$$

Entonces:

$$\frac{1}{2}(\tilde{v} + \tilde{u}) = \boldsymbol{T} = r_s\left(e^{\frac{V}{2r_s}} - e^{-\frac{U}{2r_s}}\right) \tag{4.4}$$

De donde ésta es la coordenada que introduciremos; ahora calculemos su diferencial

$$dT = \frac{1}{2} dV e^{\frac{V}{2r_s}} + \frac{1}{2} dU e^{-\frac{U}{2r_s}} \tag{4.5}$$

Ahora restando (4.1) y (4. 2) obtenemos:

$$\tilde{v} - \tilde{u} = 2r_s \left(e^{\frac{V}{2r_s}} + e^{-\frac{U}{2r_s}} \right) \tag{4.6}$$

Entonces:

$$\frac{1}{2} (\tilde{v} - \tilde{u}) = X = r_s \left(e^{\frac{V}{2r_s}} + e^{-\frac{U}{2r_s}} \right) \tag{4.7}$$

Y ahora calculamos su diferencial:

$$dX = \frac{1}{2} dV e^{\frac{V}{2r_s}} - \frac{1}{2} dU e^{-\frac{U}{2r_s}} \tag{4.8}$$

Ahora elevando al cuadrado (4.5) y (4.8) tenemos:

$$dT^2 = \frac{1}{4} dV^2 e^{\frac{V}{r_s}} + \frac{1}{4} dU^2 e^{-\frac{U}{r_s}} + \frac{1}{2} dV dU e^{\frac{V-U}{2r_s}} \tag{4.9}$$

Y

$$dX^2 = \frac{1}{4} dV^2 e^{\frac{V}{r_s}} + \frac{1}{4} dU^2 e^{-\frac{U}{r_s}} - \frac{1}{2} dV dU e^{\frac{V-U}{2r_s}} \tag{4.10}$$

Ahora restando (4.9) y (4.10) tenemos que:

$$dT^2 - dX^2 = dV dU e^{\frac{V-U}{2r_s}} \tag{4.11}$$

De tal manera que:

$$dVdU = (dT^2 - dX^2)e^{\frac{U-V}{2r_s}} \tag{4.12}$$

Sustituyendo (4.12) en (3.15) obtenemos una forma de la métrica en términos de las coordenadas de Kruskal que es:

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{r_s}{r}\right](dT^2 - dX^2)e^{\frac{U-V}{2r_s}} + r^2[d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2] \tag{4.13}$$

Ahora solo nos falta trabajar con la ecuación (3.13) para desaparecer el problema en $r = r_s$ que es el objetivo de este estudio, entonces:

$$\frac{1}{2}(V - U) = r + r_s Ln\left|\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{r_s}} - 1\right|$$

Y se sigue que:

$$\frac{V - U}{2r_s} = \frac{r}{r_s} + Ln\left|\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{r_s}} - 1\right|$$

Exponenciando lo anterior se tiene que:

$$e^{-\frac{r}{r_s}}e^{\frac{V-U}{2r_s}} = \left[\frac{r}{r_s} - 1\right] \tag{4.14}$$

Multiplicando el lado derecho de (4.14) por el factor $\frac{r_s}{r}/\frac{r_s}{r}$ tenemos:

$$\frac{\mathrm{r_s}}{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{r_s}}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{V-U}}{2\mathrm{r_s}}} = (1 - \frac{\mathrm{r_s}}{\mathrm{r}}) \tag{4.15}$$

Sustituyendo (4.15) en (4.13) obtenemos finalmente:

$$ds^2 = -\frac{r_s}{r} e^{-\frac{r}{r_s}} e^{\frac{V-U}{2r_s}} (dT^2 - dX^2) e^{\frac{U-V}{2r_s}} + r^2[d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2] \qquad (4.16)$$

Ahora observemos que esta nueva forma a la que hemos llevado a la métrica de Schwarzschild no es singular en $r = 2M$, la única singularidad sigue siendo la que hay en $r = 0$, que no podemos eliminar eligiendo otro sistema de coordenadas ya que ésta es una singularidad real o física la estructura del espaciotiempo de un agujero negro.

Estos mapeos con estas nuevas coordenadas traen a la luz según los estudios realizados hasta ahora que un agujero negro es la conexión entre dos universos. Uno de estos universos es donde nos encontramos nosotros y el otro es donde se encuentra el otro extremo del agujero negro que no se puede observar, al otro se le conoce con el nombre de agujero blanco y tiene la característica que a diferencia de los agujeros negros, éste expulsa materia, es por esto que los teóricos que trabajan en este campo muestran la importancia de estos fenómenos debido a que se, cree que un agujero blanco podría haber sido la razón de cómo se origino nuestro universo.

Conclusiones:

Ya se ha visto que estos fenómenos de la naturaleza son muy interesantes, pero pareciera que estamos tomando una postura ya antes tomada en la historia de la ciencia, siempre es bueno preguntarnos ¿qué es la ciencia?, bueno pues puede haber varias formas de contestar a esta pregunta, pero una de ellas sencillamente es el estudio de los fenómenos naturales que suscitan en nuestro universo, con la ayuda de teorías matemáticas y experimentos que verifiquen la veracidad de estas teorías, hace algunos siglos la ciencia era sólo lo que la razón nos indicaba y eso nos llevó a un atraso de más de un siglo, me pregunto si hoy en día los físicos saben exactamente lo que es la ciencia.

Me preocupa el hecho de que la razón está ganando terreno en el campo de la física como lo hicieron los platónicos en su tiempo, en el caso de los agujeros negros los físicos aseguran la existencia de dos universos por lo menos, o más de dos, como consecuencia de la estructura del agujero negro en las coordenadas de Kruskal, sin ningún argumento experimental u observacional, también aseguran que de un agujero negro se pudo haber originado el universo apoyándose del hipotético “agujero blanco”, la cuestión es, si nuestro universo se creó de un “agujero blanco”, significa que nuestro universo es una maquina de producción de miles de universos, debido a que existen en nuestro universo millones de agujeros negros y entonces por cada agujero negro que haya, existe un nuevo universo creándose, es interesante pensar en un universo de esta índole, pero todas estas deducciones supuestas por las coordenadas de Kruskal son totalmente hipotéticas, sin ninguna base experimental y este tipo de cosas son traídas como consecuencia debido que se olvida o se desconoce las dos partes de la cual se compone la ciencia. Por ejemplo los estudios que se realizaron en esta tesis para $r < r_s$ parecieran que no son del todo correctos(o en todo caso habría que revisar si las funciones son suaves y diferenciables en esta región), debido que en esa región del espaciotiempo las funciones y el espaciotiempo mismo no son bien comportados, cosa que exige las ecuaciones de Einstein, de manera que ya de entrada introducimos la hipótesis de que en la región $r < r_s$ el espaciotiempo sigue siendo suave y diferenciable. Es posible que la falta de fé en la existencia de Dios para los científicos se deba a que no hay evidencia experimental de él, no se le ha observado ni detectado, aunque en la física hay muchos fenómenos que no se les ha medido, ni detectado, ni mucho menos observado, y nadie se pone a cuestionar su existencia. Esto se debe a nuestra incapacidad de no abandonar la hipótesis, o tal vez que no hemos aún encontrado como estudiar a la naturaleza sin recurrir a fantasías o al misticismo.

Hoy en día en la física existen muchas cosas que se desconoce su explicación y se recurre a cosas "virtuales", los estados virtuales, desplazamientos virtuales, partículas virtuales etc. Y todas estas cosas virtuales no se pueden medir ni observar pero son válidas en el contexto de las teorías y hacemos como si existieran en la naturaleza. Esto es un ejemplo de que tan fácil los científicos recurrimos a la hipótesis, es como nuestro pecado original.

Por ejemplo, dentro de la región $r < r_s$, un cuerpo experimentaría cambios en las coordenadas temporales y espaciales de forma extraña, como por ejemplo la componente temporal juega el papel de la coordenada de r y viceversa, de manera que esto es un resultado de la teoría en esa región, aunque no pueda ver ninguna evidencia observacional, debido que al cruzar el horizonte de eventos nada puede ser observado desde afuera, es curioso que las coordenadas independientes intercambian papeles en esa región.

En resumen, necesariamente tenemos que recurrir a los experimentos, a las mediciones u observaciones para la validez de una teoría y además que estos experimentos puedan medir que las hipótesis introducidas en estas teorías correspondan lo más fielmente posible a los fenómenos naturales. No introducir hipótesis fantasmas como las cosas “virtuales” que no se pueden medir u observar, nuestra ciencia se basa en evidencias experimentales también, aún que haya algunos que piensen que ésta pudiera ser una postura ortodoxa de la ciencia, debemos saber perfectamente cómo se juega el juego antes de poder jugarlo, y tratar de pensar en como remplazar esas hipótesis de virtualidad que presenta algunos campos de la ciencia, como lo son las partículas virtuales, los universos paralelos, entre otras cosas.

Apéndice A

Espacios curvados (coordenadas curvilíneas)

Sea un objeto en el espacio ubicado por las siguientes coordenadas:

$$u_1 = u_1(x, y, z) \ , u_2 = u_2(x, y, z) \ , u_3 = u_3(x, y, z)$$

Ahora tenemos qué los vectores base son variables en el espacio curvo.

Definiendo las bases recíprocas tenemos que:

$$\vec{e}_i = \frac{\overrightarrow{\partial r}}{\partial u^i}$$

Y

$$\vec{e}^i = \nabla u^i$$

También tenemos que:

$$\vec{e}^i \vec{e}_j = \delta^i_j$$

Las componentes covariantes son:

$$a_i = \vec{a}.\vec{e}_i$$

Las componentes contravariantes son:

$$a^i = \vec{a}.\vec{e}^i$$

De manera que el tensor métrico se define como:

$$g_{ij} = \vec{e}_i.\vec{e}_j$$

Y el espacio de Riemann es:

$$ds^2 = \overrightarrow{dr}.\overrightarrow{dr}$$

$$ds^2 = g_{ij}du^i du^j$$

Donde este es el esquema general para los espacios curvos, el tensor métrico, los vectores base y el elemento de línea.

El tensor métrico es utilizado para subir o bajar índices de la siguiente manera:

$$g_{ij}b^j = b^i \quad ; \quad g^{ij}b_j = b^i$$

$$g^{ik}g_{kj} = \delta_j^i$$

Los símbolos de Christoffel

Consideremos las derivadas de los vectores base $\frac{\partial \overrightarrow{e_i}}{\partial u^j}$, donde este es un vector, que podemos escribirlo como combinación lineal de los vectores base $\vec{e}_k$. Introduciendo el símbolo Γ_{ij}^k para denotar los coeficientes de esta combinación lineal, tenemos:

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial u^j} = \Gamma_{ij}^k \vec{e}_k \qquad (1)$$

Donde Γ_{ij}^k es el coeficiente k-esimo del vector $\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial u^j}$.

Usando la relación:

$$\vec{e}^i \vec{e}_j = \delta_j^i$$

En la ecuación (1) tenemos que:

$$\Gamma_{ij}^{k}\delta_{k}^{l} = \vec{e}^{l}.\frac{\partial \vec{e}_{i}}{\partial u^{j}}$$

Para obtener:

$$\Gamma_{ij}^{l} = \vec{e}^{l}.\frac{\partial \vec{e}_{i}}{\partial u^{j}}$$

Los símbolos de Christoffel son simétricos respecto al intercambio de índices como:

$$\frac{\partial \vec{e}_{i}}{\partial u^{j}} = \frac{\partial \partial \vec{r}}{\partial u^{j} \partial u^{i}} = \frac{\partial \partial \vec{r}}{\partial u^{i} \partial u^{j}} = \frac{\partial \vec{e}_{j}}{\partial u^{i}}$$

$$\frac{\partial \vec{e}_{i}}{\partial u^{j}} = \frac{\partial \vec{e}_{j}}{\partial u^{i}} \qquad (2)$$

Comparando la ecuación (2) con (1) tenemos que:

$$\Gamma_{ij}^{k}\vec{e}_{k} = \Gamma_{ji}^{k}\vec{e}_{k}$$

$$\Gamma_{ij}^{k}\vec{e}_{k} - \Gamma_{ji}^{k}\vec{e}_{k} = 0 \qquad ; \qquad \vec{e}_{k}(\ \Gamma_{ij}^{k} - \Gamma_{ji}^{k}) = 0$$

De manera que hemos llegado a la propiedad de simetría de los símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k} \qquad (3)$$

Ahora bien para obtener una expresión para los símbolos de Christoffel, usaremos la derivada del tensor métrico.

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \frac{\partial}{\partial u^k}\left(\vec{e}_i . \vec{e}_j\right) = \vec{e}_i \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial u^k} + \vec{e}_j \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial u^k}$$

De la ecuación (1) tenemos que:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \vec{e}_i . \vec{e}_l \Gamma_{jk}^l + \vec{e}_j . \vec{e}_l \Gamma_{ik}^l$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \Gamma_{jk}^l g_{ij} + \Gamma_{ik}^l g_{ij} \quad (4)$$

Ahora permutando cíclicamente los índices libres i, j, k obtenemos:

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} = \Gamma_{ji}^l g_{jl} + \Gamma_{ik}^l g_{kl} \quad (5)$$

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} = \Gamma_{kj}^l g_{li} + \Gamma_{ij}^l g_{kl} \quad (6)$$

Ahora sumando (5) y (6) y restando (4):

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = 2\Gamma_{ij}^l g_{kl}$$

$$\frac{1}{2} g^{kl}\left[\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right] = \Gamma_{ij}^l \qquad (7)$$

En donde hemos encontrado como están expresados los símbolos de Christoffel.

Tensor de curvatura

Partimos de la definición de la derivada covariante que es:

$$v_{p;q} = \frac{\partial v_p}{\partial x^q} - \Gamma^j_{pq} v_j \qquad (8)$$

Aplicando una ves mas la deriva covariante a (8) tenemos:

$$v_{p;qr} = \frac{\partial v_{p;q}}{\partial x^r} - \Gamma^j_{pr} v_{j;q} - \Gamma^j_{qr} v_{p;j} \qquad (9)$$

De manera que sustituyendo (8) en (9) tenemos:

$$v_{p;qr} = \frac{\partial}{\partial x^r}(\frac{\partial v_p}{\partial x^q} - \Gamma^j_{pq} v_j) - \Gamma^j_{pr}(\frac{\partial v_j}{\partial x^q} - \Gamma^k_{jq} v_k) - \Gamma^j_{qr}(\frac{\partial v_q}{\partial x^r} - \Gamma^l_{qr} v_l)$$

$$v_{p;qr} = \frac{\partial}{\partial x^r}\frac{\partial v_p}{\partial x^q} - \frac{\partial}{\partial x^r}\Gamma^j_{pq} v_j - \Gamma^j_{pr}\frac{\partial v_j}{\partial x^q} + \Gamma^j_{pr}\Gamma^k_{jq} v_k - \Gamma^j_{qr}\frac{\partial v_q}{\partial x^r} + \Gamma^j_{qr}\Gamma^l_{qr} v_l \qquad (10)$$

Ahora invirtiendo los índices tenemos que:

$$v_{p;rq} = \frac{\partial}{\partial x^q}\frac{\partial v_p}{\partial x^r} - \frac{\partial}{\partial x^q}\Gamma^j_{pr} v_j - \Gamma^j_{pq}\frac{\partial v_j}{\partial x^r} + \Gamma^j_{pq}\Gamma^k_{jr} v_k - \Gamma^j_{rq}\frac{\partial v_r}{\partial x^q} + \Gamma^j_{rq}\Gamma^l_{rq} v_l \qquad (11)$$

Ahora tomando la diferencia de (10) y (11) tenemos que:

$$v_{p;qr} - v_{p;rq} = \Gamma^j_{pr}\Gamma^k_{jq} v_k - \frac{\partial}{\partial x^r}\Gamma^j_{pq} v_j - \Gamma^j_{pq}\Gamma^k_{jr} v_k + \frac{\partial}{\partial x^q}\Gamma^j_{pr} v_j$$

Renombrando índices para poner al vector $v_j$como producto de todo tenemos que:

$$v_{p;qr} - v_{p;rq} = \Gamma^k_{pr}\Gamma^j_{kq}v_j - \frac{\partial}{\partial x^r}\Gamma^j_{pq}v_j - \Gamma^k_{pq}\Gamma^j_{kr}v_j + \frac{\partial}{\partial x^q}\Gamma^j_{pr}v_j$$

$$v_{p;qr} - v_{p;rq} = \left(\Gamma^k_{pr}\Gamma^j_{kq} - \frac{\partial}{\partial x^r}\Gamma^j_{pq} - \Gamma^k_{pq}\Gamma^j_{kr} + \frac{\partial}{\partial x^q}\Gamma^j_{pr}\right).v_j$$

Donde esto se transforma en:

$$v_{p;qr} - v_{p;rq} = R^j_{pqr}v_j \qquad (12)$$

Donde:

$$R^j_{pqr} = \Gamma^k_{pr}\Gamma^j_{kq} - \frac{\partial}{\partial x^r}\Gamma^j_{pq} - \Gamma^k_{pq}\Gamma^j_{kr} + \frac{\partial}{\partial x^q}\Gamma^j_{pr}$$

Que es el tensor de Riemann.

Apéndice B

Transformación de las coordenadas de E-F a las de Kruskal

La intención es tener un buen comportamiento en el sistema coordenado usando las coordenadas U y V como las dos coordenadas en el plano r vs t.

El sistema coordenado resultante se relaciona con las coordenadas de Schwarzschild por:

$$V - U = 2r^* \qquad (1)$$

$$V + U = 2t \qquad (2)$$

Y el elemento de línea en términos de las nuevas coordenadas es:

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{2M}{r}\right] dVdU + r^2[d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2] \qquad (3\ )$$

Entonces (1) es:

$$V - U = 2\left[r + 2MLn\left(\frac{r}{2M} - 1\right)\right]$$

$$\frac{V - U}{4M} = \left[\frac{r}{2M} + Ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right)\right]$$

$$e^{\frac{V-U}{4M}} = (\frac{r}{2M} - 1)e^{\frac{r}{2M}}$$

$$e^{-\frac{U}{4M}} = \left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{\frac{r}{2M}} e^{-\frac{V}{4M}} \qquad (4)$$

Pero de la ecuación:

$$V = t + r^* \qquad (5)$$

Sustituyendo (5) en (4) nos queda:

$$\tilde{u} \equiv -(\frac{r}{2M} - 1)^{\frac{1}{2}}\, e^{\frac{r}{4M}}\, e^{-\frac{t}{4M}} = -e^{-\frac{U}{4M}} \qquad (6)$$

Ahora de:

$$V + U = 2t$$

$$V + U = \frac{4Mt}{2M}$$

$$\frac{U + V}{4M} = \frac{t}{2M}$$

$$e^{\frac{U+V}{4M}} = e^{\frac{t}{2M}}$$

Y multiplicando por $e^{-\frac{U}{4M}}$ lo anterior obtenemos:

$$e^{\frac{V}{4M}} = e^{\frac{t}{2M}}\, e^{-\frac{U}{4M}} \qquad (7)$$

Y de:

$$U = t - r^* \qquad (8)$$

Sustituyendo (8) en (7) tendremos:

$$\tilde{v} \equiv (\frac{r}{2M} - 1)^{\frac{1}{2}}\, e^{\frac{t}{4M}}\, e^{\frac{r}{4M}} = e^{\frac{V}{4M}} \qquad (9)$$

De manera que (6) y (9) son las ecuaciones de Kruskal introducidas en el capítulo 4.

Apéndice C

También se puede llevar el intervalo espaciotiempo de la métrica de Schwarchild a la formulación completica de la relatividad general haciendo:

$$ds^2 = e^{1\prime}e^{1\prime} + e^{2\prime}e^{2\prime} + e^{3\prime}e^{3\prime} - e^{4\prime}e^{4\prime} \qquad (1)$$

Esta es el intervalo de espaciotiempo puesto en formas diferenciales (1-forma). De tal manera que identificando términos de ds en la métrica de Schwarzschild podríamos identificar las tétradas como:

$$ds^2 = -\frac{r_s}{r}e^{-\frac{r}{r_s}}e^{\frac{V-U}{2r_s}}(dT^2 - dX^2)e^{\frac{U-V}{2r_s}} + r^2[d\theta^2 + sen^2\theta d\varphi^2]$$

De este modo las tétradas quedan como:

$$e^{1\prime} = (\frac{r_s e^{-\frac{r}{r_s}}}{r})^{1/2}dT$$
$$e^{2\prime} = (\frac{r_s e^{-\frac{r}{r_s}}}{r})^{1/2}dX$$
$$e^{3\prime} = rd\theta$$
$$e^{4\prime} = rsen\theta d\varphi$$

Con esto se puede llegar a la forma izquierdo degenerado que es:

$$ds^2 = 2e^1e^2 + 2e^3e^4$$

BIBLIOGRAFIA

- Charles W. Misner Kip S. Thorne John Archibald Wheeler, GRAVITATION; W.H Freeman and Company San Francisco.
- Arnulfo Castellanos Moreno, Relatividad General Para Estudiantes de Licenciatura.
- Darío Moreno, Gravitación
- Nuria Calvet Miguel Alcubierre Tomás Ortín, VII Escuela "La Hechicera" Relatividad, Campos y Astrofísica.
- Eduard Alexis Larrañaga R. Agujeros Clásicos
- Alberto Galindo Tixaire, Real Academia de Ciencias, Agujeros Negros en el Espacio.
- Bert Janseen, Teoría de la Relatividad General, Universidad de Granada.
- Carlos A. Marín, Colegio de Ciencias e Ingenierías, Cayendo Hacia un Agujero Negro de Schwarzschild.
- Antonio Rincón Córcoles, Agujeros negros.
- Pablo Castañeda Rivera, Teoremas de Singularidades en Relatividad General.
- Antonio Sarmiento Galán, Gravitación, Facultad de Ciencias UNAM.
- Shahen Hacyan, LOS HOYOS NEGROS Y LA CURVATURA DEL ESPACIO-TIEMPO.
- Alan Aganza Torres, Tesis: Estudios numéricos de órbitas en la métrica de Schwarzschild.
- Santos Jesús Castillo, Tesis: Algunas Líneas de Investigación en Relatividad General