UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemáticas

TESIS

“Uso de mecanismos articulados para el trazado de curvas para la enseñanza del concepto elipse en el bachillerato”

Para obtener el grado de:

MAESTRA EN CIENCIAS

CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

Presenta:

Luisa Cristina Rodríguez Ibarra

Director de tesis:

Dr. José Luis Soto Munguía

Hermosillo, Sonora

Febrero 2023

Agradecimientos

Quiero agradecer primeramente a mis profesores del Posgrado en Matemática Educativa, por su guía durante este viaje por el conocimiento, sin sus enseñanzas, comentarios y retos, habría sido imposible desarrollar este proyecto. En particular, agradezco a mi director Dr. José Luis Soto Munguía, por toda el ayuda, los comentarios y la paciencia.

Agradezco a Conacyt por la oportunidad de financiar mis estudios en el posgrado de mi preferencia, el cual cursé con mucho entusiasmo y dedicación. Sin ciencia no habrá una transformación nacional.

Le dedico un agradecimiento especial a mi familia, pues sin su apoyo y ánimo, me hubiera sido imposible sacar adelante mis cursos y, sobre todo, mi tesis.

Agradezco y dedico este trabajo a Manuel Eduardo Rábago, mi amigo y compañero de vida.

ÍNDICE

Introducción

Dentro de las habilidades matemáticas que se esperan desarrollan en los estudiantes en el transcurso del bachillerato en México se encuentra el pensamiento geométrico, el cual regularmente se explora entre el segundo y tercer semestre. Por un lado, en segundo semestre se abordan las operaciones figurales que involucran conceptos como ángulos, lados, congruencia y semejanza. Por otro lado, en tercer semestre existe un curso llamado Matemáticas III, el cual está dedicado a estudiar algunos conceptos de Geometría Analítica. Haciendo una revisión del programa de dicha materia de la Dirección General de Bachillerato (DGB), observamos que se declara objetivo de éste: promover habilidades que al estudiantado le permitan "*percibir e interpretar su entorno espacial desde un enfoque geométrico analítico*" (SEP, 2017, p.6).

Por su parte, la Dirección General de Educación Tecnológica Industrial (DGETI) señala que la materia de Geometría Analítica tiene como fin que cada estudiante "interprete, argumente, comunique y resuelva diversas situaciones problemáticas de su contexto por medios gráficos y analíticos, que incluyan la representación de figuras en el plano cartesiano." (DGETI 2017, p.13). Sin embargo, aunque así está declarado, consideramos que existe un problema al observar la realidad de lo que pasa en las aulas, este problema radica en que, con el paso de los años, en la escuela se ha minimizado la importancia de la geometría sintética, la cual va estrechamente relacionada con el uso del pensamiento geométrico. Cabe señalar que el pensamiento geométrico entenderemos a aquel en donde "se evidencia la importancia de la visualización de relaciones entre objetos geométricos y posterior modelación de éstas, así como la elaboración y comparación de algunos procedimientos propios de la geometría y de otros, que posibilitan la transición de una representación concreta de objetos geométricos a un análisis de propiedades de estos." Jaime, Sánchez Robayo, y Fonseca González (2008).

En el presente trabajo se diseñó de una secuencia didáctica que tuviera como objetivo fomentar el pensamiento geométrico y con ello, el estudio de la elipse con una perspectiva sobre los diferentes registros de representación que tiene, así como las condiciones a las que están sujetas todos los puntos que la conforman. Se reporta también la experiencia que hubo durante el progreso de nuestros objetivos.

En el primer capítulo se hace una descripción de la problemática que reconocemos y que en gran medida motiva este trabajo. Se hizo una revisión bibliográfica para contrastar los planteamientos geométricos con algunos hechos por René Descartes en su obra *La Geometría* y con ello identificar los elementos que se retoman y cuales se han dejado de lado, pero que sería importante recuperar.

Por ejemplo, se puede percibir en algunos libros de texto utilizados para impartir esta materia, cómo las herramientas geométricas han ido quedando rezagadas ante las algebraicas; esto se observa en especial al revisar cómo es el tipo de situaciones problema y las estrategias de solución planteadas a las y los estudiantes. Existe un descuido general en la enseñanza de la geometría y en particular algunos aspectos de su enseñanza, por ejemplo, el razonamiento y la argumentación. Es frecuente encontrar actividades que proponen una situación problema dentro de un contexto geométrico, el cual se presenta más bien como un pretexto para llegar cuanto antes a su representación algebraica y el tratamiento que podemos hacer de ellas, obviando o ignorando el análisis las relaciones y conjeturas de carácter geométrico, como las relaciones entre rectas, ángulos, semejanza de figuras, paralelismo, congruencia y ortogonalidad, entre otras.

En el capítulo dedicado a antecedentes se explora de forma más amplia el tipo de planteamientos que Descartes propone en la Geometría Analítica, así como algunos trabajos que rescatan y utilizan métodos geométricos y que incentivan en gran medida las ideas que se buscan incorporar en el diseño de las secuencias didácticas; esto por varias razones, primeramente porque ilustran de manera concisa actividades en las que intervienen estudios de Geometría Analítica con uso de artefactos manipulables y segundo, porque al ser algunos trabajos de intervención, será importante centrar la atención en cuáles son las reacciones y distintos tipos de situaciones que se generan entre las y los estudiantes, en particular, al abordar conceptos matemáticos escolares en un ambiente en el que los y las estudiantes participan de manera activa en la resolución de las situaciones planteadas.

Es importante señalar que las herramientas algebraicas tienen una gran potencia al momento de enfrentar una situación problema, y es quizá esta una de las razones por las que las operaciones algebraicas son tan utilizadas en las clases de matemáticas, aunque sea esta de Geometría.

El marco teórico en el que descansan la gran mayoría de los conceptos aplicados para el diseño y posterior análisis es la Teoría de Representaciones de Duval. En el capítulo que se presenta de manera extensa, se explican los diferentes tipos de representación que posee un mismo objeto matemático y la identificación y relación entre los diferentes elementos de cada uno de ellos, así como el razonamiento y la argumentación que se utiliza para justificar el paso entre las distintas representaciones.

En este sentido, Duval señala que "entre todos los campos de conocimiento en los que los estudiantes deben entrar, la Geometría es el que exige la actividad cognitiva más completa, ya que apela al gesto, al lenguaje y a la mirada." (Duval, 2016, p. 13). La dificultad de este aprendizaje tiene diversas razones, Duval (2016) determina que "ver una figura en geometría exige disociar lo que corresponde a la magnitud". Por ello nos resulta de sumo interés ahondar más en los métodos de enseñanza de la Geometría y analizar cuáles son las posibles áreas de oportunidad en cuanto al tipo de heurísticas que se pueden formular a partir del establecimiento de relaciones geométricas.

El objetivo general y los objetivos específicos están orientados a propiciar discursos de naturaleza geométrica, basada, entre otras cosas, en la visualización de las componentes o propiedades geométricas de las figuras, en este caso en particular dentro de los cursos de Geometría Analítica de preparatoria, favoreciendo la visualización geométrica y tomando como caso particular de estudio a la elipse. A partir de dichos objetivos, nos propusimos una serie de acciones metodológicas a seguir para ordenar el trabajo: el tiempo dedicado al diseño de la secuencia, la planeación de la puesta en escena, la obtención de resultados y el análisis posterior.

Lo relativo al diseño de las secuencias didácticas está contenido en el capítulo VII, en él se describe de forma más profunda cada una de las actividades que la integran. En un principio se pensó que sólo sería una, sin embargo, al final se realizaron un par de secuencias de actividades. En una se utiliza un mecanismo no articulado y en la otra se introduce el Elipsógrafo de Proclo de manera virtual. El uso de aparatos de trazado puede generar propuestas de enseñanza alineadas a los propósitos de la enseñanza de la geometría en el bachillerato, porque:

a) Coincidimos con lo dicho por Bartolini (1998), al afirmar que la introducción de artefactos en las clases de geometría presta diferentes perspectivas para clarificar el razonamiento entre los estudiantes, pues motiva el interés al salirse de los métodos tradicionales de enseñanza.

b) Además que, la justificación de su funcionamiento da pauta para establecer las condiciones que cumplen los puntos de la curva trazada, con el fin de comprender el lugar geométrico de la elipse.

Así mismo se promueve la búsqueda de relaciones entre las componentes de las representaciones figurales presentadas, con la intención de generar distintas estrategias y aumentar la comprensión de los distintos conceptos geométricos abordados, pretendiendo que de su análisis se desprenda una argumentación válida y que finalmente, sean todas ellas herramientas útiles al momento de resolver problemas de geometría.

Este trabajo es parte de un proyecto más amplio que contempla el uso de mecanismos articulados para el trazado de curvas como herramienta didáctica para la enseñanza de Geometría, el cual se centra en las secciones cónicas. En el caso de este proyecto en particular, se toma como objeto matemático de interés el concepto de la elipse.

En el capítulo VIII se presentan los análisis hechos una vez teniendo los resultados de la puesta en escena, la cual sufrió cambios en la estrategia de implementación debido a las circunstancias que se atravesaron. El 2019 se distinguió por la emergencia sanitaria mundial de la pandemia del COVID-19, en donde se vieron paralizadas las actividades escolares y posteriormente, se retomaron de manera virtual. Por ello, tanto los diseños de las secuencias como la implementación pasaron de estar planteadas en un entorno físico y con una manipulación directa de los mecanismos, a realizarlo todo de manera virtual y remota. Es decir, se retomó la dinámica virtual de las clases, publicando las actividades en una plataforma y las sesiones de trabajo en equipo fue mediante ZOOM. Así mismo los resultados recolectados fueron los que estas implementaciones dejaron. Las evidencias consisten en grabaciones de las sesiones virtuales (tanto los momentos frente a grupo como el trabajo en equipos), así como las hojas de trabajo entregadas por los grupos al finalizar las actividades. Este apartado fue fundamental para nuestro trabajo, pues es donde se realizó la contrastación teórica con lo que pretendía promover nuestra intervención didáctica, los que realmente sucedió en la práctica y los elementos teóricos en los cuales descansan las hipótesis planteadas.

Finalmente, en el último capítulo se expondrán las conclusiones más importantes del trabajo, tanto desde un punto de vista teórico como lo relativo a lo práctico, esto haciendo referencia de la puesta en escena y el análisis posterior.

Cabe destacar que tanto los antecedentes de la Geometría como los elementos teóricos de la teoría de representaciones semióticas de Duval tuvieron un papel fundamental para guiar tanto el análisis como para explicar y categorizar más de una situación a la que nos enfrentamos. Principalmente rescatamos la idea de que cuando se trata de geometría, es necesario dedicar una mayor cantidad de tiempo y esfuerzo a comprender los elementos geométricos que resultan tan válidos y útiles como los algebraicos. Aunque esto implique de manera directa una mayor dedicación de tiempo para generar una coordinación en los distintos registros de representación del objeto matemático en cuestión, en este caso la elipse.

1. Antecedentes y Problemática

1.1 PRESENTACIÓN

En este apartado se hace una descripción sobre las distintas problemáticas que enfrenta la enseñanza de la Geometría y cómo es que se han sobrellevado los retos a través del tiempo. Duval (1998) menciona que "Enseñar geometría es más complejo y comúnmente menos exitoso que enseñar operaciones numéricas o álgebra elemental; entonces, ¿por qué enseñar geometría a todos los estudiantes? O más aún, ¿por qué enseñar geometría?" (p. 37). Quizá no hay una respuesta única para estas interrogantes, sin embargo, es innegable la fortaleza que posee la Geometría no solo como rama de las matemáticas sino también, como una herramienta didáctica muy potente dadas las múltiples posibilidades de representación que ofrece, pues todos percibimos los objetos materiales y mentales de distintas maneras. Retomamos la idea que postula Goldenberg (1998): La geometría puede ayudar a los estudiantes a conectarse con las matemáticas,

- Los estudiantes se conectan bien con estudios geométricos seleccionados apropiadamente. Los diversos ganchos incluyen nada menos que el arte, la ciencia física, la imaginación, biología, curiosidad, diseño mecánico y juego.
- La Geometría también se conecta ampliamente con el resto de las matemáticas. Asumiendo una especie de propiedad transitiva, las conexiones de la geometría, tanto a los estudiantes como al resto de las matemáticas, podría ayudarnos a construir buenos puentes, atrayendo a más estudiantes y una comunidad ajena a las matemáticas en general. (Goldenberg 1998, p. 3)

Rodríguez (2021) señala que la enseñanza de la Geometría está incluida dentro de la matemática escolar, sin embargo, ha sufrido, al igual que otros contenidos, transformaciones en el tiempo. En este sentido observa que:

> ... se ha priorizado la enseñanza de la geometría analítica, haciendo uso de herramientas algebraicas y dejando de lado la visualización de objetos geométricos y sus propiedades y es este aporte visual lo que añade a la geometría un factor que no se debe descuidar sobre todo en la resolución de problemas. (Mammana y Villani, 1998, p. 4)

1.2 REPASO HISTÓRICO

Se realizó una revisión en la literatura acerca de la evolución de los planteamientos dentro del campo de la Geometría, para comprender cómo se concebía la generación de ecuaciones y expresiones algebraicas a través de sus correspondientes curvas, dando paso a la Geometría Analítica. Dentro del transcurso de este camino hubo un momento en el que el rumbo y enfoque de la enseñanza y aprendizaje de la Geometría cambió y con ello, se fueron transformando las dinámicas en las aulas.

Deniss (2009) afirma que el concepto de Geometría Analítica evolucionó en las matemáticas de la Europa del siglo XVII, en ese momento el significado del término era bastante diferente al que se tiene en la actualidad. La principal diferencia conceptual era que las curvas eran concebidas como objetos matemáticos por sí mismos, es decir, teniendo una existencia primaria antes de incluir cualquier análisis de sus propiedades numéricas o algebraicas. Las ecuaciones no eran las que creaban las curvas; sino que las curvas dieron lugar a ecuaciones. Los métodos geométricos para dibujar cada curva siempre fueron primero, y luego, analizando las acciones geométricas involucradas en un aparato físico de dibujo de curvas, llegaría a una ecuación que relaciona pares de coordenadas Dennis y Confrey (1995).

Descartes utilizó ecuaciones para generar una taxonomía de curvas (Lenoir, 1979). Esta tradición de concebir las curvas como resultado de acciones geométricas se mantuvo posteriormente en la obra de Roberval, Pascal, Newton y Leibniz desembocó en el cálculo, una matemática desarrollada que involucró un tratamiento entre curvas y ecuaciones, que después dieron el paso a la definición moderna de funciones.

Dennis (1997), señala que en su origen que la Geometría Analítica se enfocaba en el estudio de curvas, las cuales fueron construidas a partir de acciones geométricas como representación de la trayectoria del movimiento. En este sentido, a partir del diseño de mecanismos articulados para el trazado de curvas, tuvo sentido introducir una idea inicial de un plano cartesiano donde pudieran asociarse coordenadas de posición a puntos, con la finalidad de identificar la distancia de un punto móvil a un punto de referencia, y posteriormente, llegar a una ecuación que representara tal movimiento, es decir: “las ecuaciones no crearon curvas; las curvas dieron lugar a las ecuaciones” (Dennis 1997, p. 2).

De la misma manera, se reconoce que la construcción de sistemas geométricos que incluyen curvas cónicas fueron acompañados primeramente de mecanismos como la regla o el compás, sin embargo, conforme se iban complicando las curvas se requirieron mecanismos más sofisticados dando paso a los primeros sistemas articulados, los cuales se tiene registro se deben gracias a los avances de los matemáticos griegos del siglo V a.C. y fueron construidos para resolver algunos problemas relativos a cónicas y algunos para encontrar soluciones a ecuaciones de tercer grado insolubles únicamente con regla y compás.

La primera referencia clásica a un sistema dinámico de construcción de curvas es la del sistema destinado a la construcción de la cuadratriz atribuido a Hippias (460 – 400 a.C.), el cual se muestra en la Figura 1. Con esta curva se puede dividir un ángulo en un número cualquiera de partes iguales.

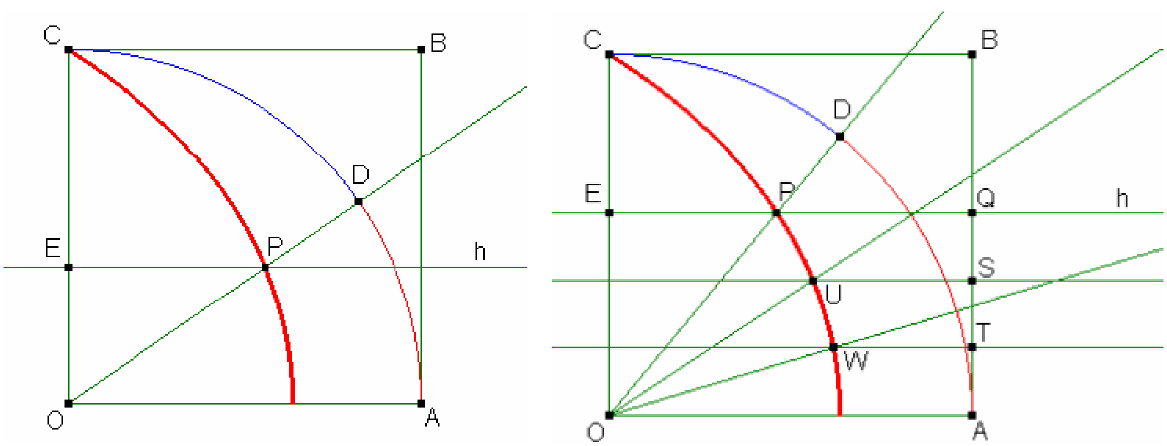


Figura 1. Del lado izquierdo se muestra el trazo de la cuadratriz y del lado derecho se añaden los trazos que indican la trisección del ángulo. Fuente: https://nanopdf.com/download/triseccion-de-un-angulo-con-la-trisectriz-de-hipias_pdf

A pesar de esto, Mozo (2017) señala que no hay muchas referencias de mecanismos articulados capaces de dibujar cónicas hasta fechas posteriores. Así mismo, reporta que una de las primeras es la de Proclo (418 - 485 d. C.) que habla de un compás para dibujar parábolas atribuido a Isidoro de Mileto. Hay referencias de dos aparatos, uno presumiblemente de Platón, y otro atribuido a Nicomedes (siglo III a.C.)

los cuales se mencionó anteriormente, se componen de sistemas mecánicos diseñados para el cálculo de raíces cúbicas y tienen aplicación directa tanto a resolver el problema Deliano (la duplicación del cubo), como el problema de la trisección del ángulo. Aroca (2013) hace una detallada descripción de ambos mecanismos, a continuación, presentaremos el primero de ellos.

El aparato consiste en tres barras, dos de las cuales, α y β, están rígidamente unidas por un extremo formando un ´ángulo recto, con vértice B, y la tercera γ se puede desplazar a lo largo de β a la que está unida por uno de sus extremos C, manteniendo paralela a α (ver Figura 2).

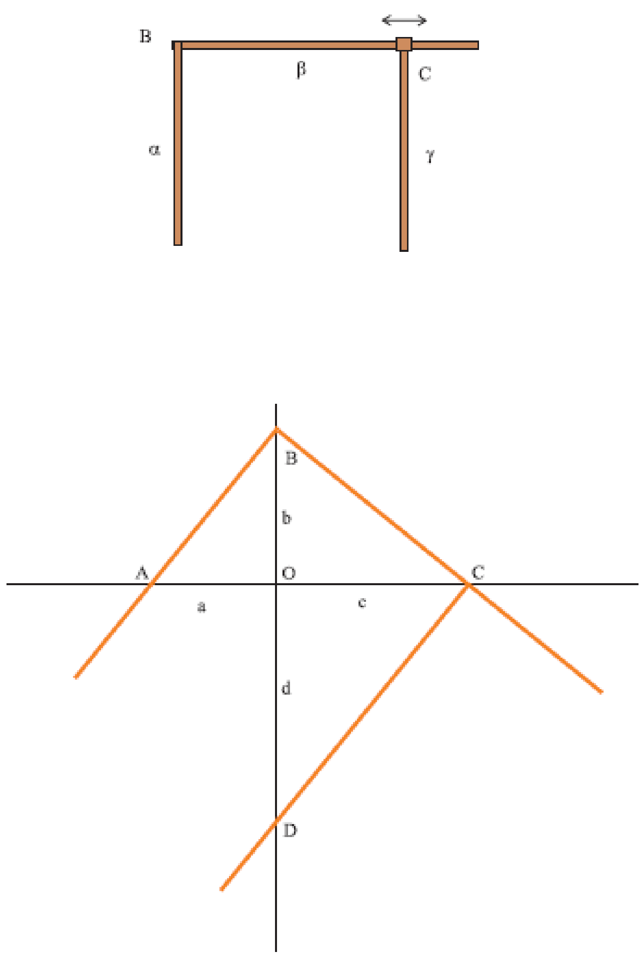


Figura 2. Aparato para resolver el problema Deliano, atribuido a Platón. Elaborada por Mozo (2017, p.16)

En cierto sentido es similar al compás y podría usarse, como este, para dibujar circunferencias. En la figura citada se puede apreciar cómo se usa. Si queremos calcular la raíz cubica de $\dfrac{d}{a}$ es decir de la medida del segmento d tomando a como unidad, en un sistema cartesiano se hace pasar la barra α por el punto (−a, 0), y la barra γ por el punto (0,−d) y a continuación se desplaza la Barra β hasta que se colocan, el vértice C en el eje x (punto (c, 0)) y el B alcanza el eje y (punto (0, b)). La aplicación del teorema de la altura a los triángulos rectángulos ABC y BCD establece que:

$$\begin{cases} b^2 = a \cdot c \\ c^2 = b \cdot d \end{cases} ; b^4 = a^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot b \cdot d \rightarrow \left({}^{b}\!/_{a}\right)^3 = {}^{d}\!/_{a}$$

Donde el último término deja a d con un valor igual a $\frac{b^3}{a^2}$ y a partir de esto se resuelve el problema de la duplicación del cubo.

Dejando atrás la época griega, es innegable que cuando hablamos de Geometría Analítica, existe una tradición de artefactos o mecanismos que permiten solucionar ecuaciones de mayor orden o bien, trazar curvas más complejas que las rectas o la circunferencia, como, por ejemplo, las cónicas. En el año de 1657, Van Schooten publicó su “Exercitationum mathematicarum libri quinque”. En el Libro III, van Schooten trata de reconstruir algunas de las obras de Apolonio en lugares geométricos. Este fue un importante tema de investigación de la época. Quizá la obra más conocida de Van Schooten es "Orgánica conicarum sectionum ", o "Los instrumentos de las secciones cónicas." Como sugiere el título, el capítulo describe una variedad de mecanismos para la elaboración de las diferentes secciones cónicas. Por ejemplo, a continuación, recuperamos la descripción que Cortés (2012) hace sobre el elipsógrafo de Van Schooten (Figura 3):

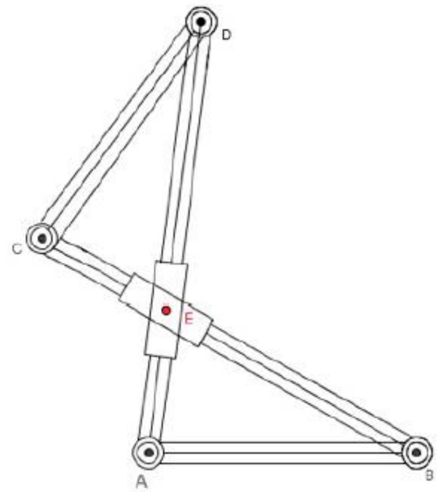


Figura 3. Elipsógrafo de Van Schooten. Elaborado por Cortés (2012, p.163)

Este mecanismo está comprendido por Antiparalelogramo ABCD mostrado en la Figura anterior. Las condiciones de su construcción nos indican la igualdad entre las longitudes de los siguientes segmentos: AB = CD y AD = BC. Se dice que es antiparalelogramo porque tiene dos pares opuestos de lados de longitud igual, pero en el que los lados de uno de los pares se cruzan entre sí. El más largo de los dos pares de lados siempre serán los que se crucen. Los puntos A y B son fijos (los focos de la elipse que traza). La intersección está señalada por el punto E. Al mover el mecanismo el punto E tiene desplazamiento por los segmentos AD y BC, describiendo durante su trayectoria una elipse. En la Figura 4 se muestra la construcción hecha por Cortés (2012) donde añade trazos auxiliares que permiten visualizar mejor la descripción que se realizará.

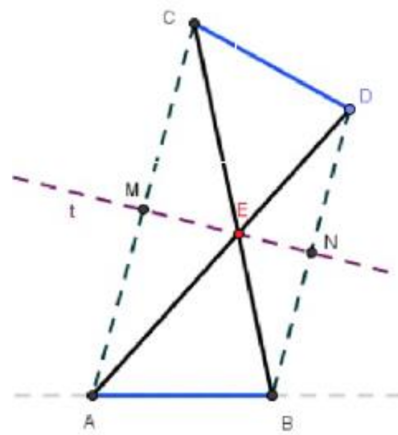


Figura 4. Elipsógrafo de Van Schooten con trazos auxiliares. Elaborado por Cortés (2012, p.163).

Por la construcción sabemos que:

$$AB = CD$$

$$AD = BC$$

La línea punteada t, es un eje de simetría. También se trazan los segmentos AC y BD.

Sea M el punto de la intersección de t con CA y N el punto de la intersección entre t y BD.

El trazo del eje de simetría tiene las siguientes implicaciones en la Figura:

- t es perpendicular a los segmentos BD y AC y los corta en su punto medio, es decir, es la mediatriz.
- t corta a los ángulos DEB y CEA por la mitad, es decir, es la bisectriz de éstos.

Con lo anterior, podemos afirmar que los triángulos BEN y DEN son congruentes, por el criterio LAL:

- Tienen a EN como lado común.
- Angulo BNE = Angulo DNE (pues el eje de simetría es perpendicular a BD y forma ángulos rectos).

- BN = ND (puesto que t biseca a BD por ser eje de simetría).

$$\therefore\ \Delta BEN\ \cong\ \Delta DEN$$

Y también por el criterio LAL,

$$\therefore\ \Delta MEA\ \cong\ \Delta MEC$$

De las dos congruencias anteriores obtenemos que el Δ AEB es congruente con Δ CED por el criterio LLL (ya que de las congruencias anteriores deducimos que EB ED y EA EC además de que por construcción conocíamos que AB CD). De allí vemos que:

$$AE + EB = AE + ED = AD = constante.$$

Y con esto, se cumple la condición para que el punto E trace una elipse según la definición de lugar geométrico de esta curva cónica.

Cabe destacar, que, si bien han sido muchos los matemáticos involucrados en la evolución de la Geometría, una de las figuras más prominentes en la historia, particularmente al hablar de Geometría Analítica, Descartes (1637) muestra ejemplos de la aplicación del método de pensamiento que él proponía. En dicho ensayo podemos observar cómo son los primeros planteamientos que se hacen respecto a la visualización del espacio, y cómo es que a partir de conjeturas meramente geométricas encuentra relaciones que posteriormente expresa en lenguaje algebraico. Es decir, dado un lugar geométrico definido por determinadas condiciones, hallar su ecuación matemática.

La Geometría está compuesta por tres libros: el primero ***Problemas que pueden resolverse sin emplear más que círculos y líneas rectas***, el segundo ***De la naturaleza de las líneas curvas*** y el tercero ***Sobre la construcción de problemas de sólidos y supersólidos.*** A pesar de ser el más breve de los apéndices del Discurso, ha tenido una repercusión tan significativa que derivó en toda una nueva rama de las matemáticas.

González (2003) incluye en su texto “Los orígenes de la Geometría Analítica” una descripción sobre el trabajo que desarrolló René Descartes, quien afirma que todos los problemas de Geometría pueden reducirse fácilmente a ciertos términos, que no es necesario conocer previamente más que la longitud de algunas líneas rectas para construirlos, tanto las que poseen valores desconocidos como que no. Luego, sin considerar ninguna diferencia entre estas líneas conocidas y desconocidas, se debe examinar la dificultad según el orden que se presente como más natural de todos, en la forma como aquellas líneas dependen mutuamente las unas de las otras, hasta que se haya encontrado la manera de expresar una misma cantidad de dos maneras: lo que se denomina una ecuación, porque dicho de otra manera, se parte de una igualdad con valores conocidos y desconocidos y se pueden realizar ciertos tratamientos para encontrar los valores desconocidos.

Por ejemplo, en la descripción de la construcción del hiperbológrafo de Descartes, el cual se muestra en la Figura 5, Manzano (2017, p.28) hace un resumen muy preciso de cuál es la evolución de los planteamientos hechos por Descartes originalmente, mismo que se retomará a continuación:

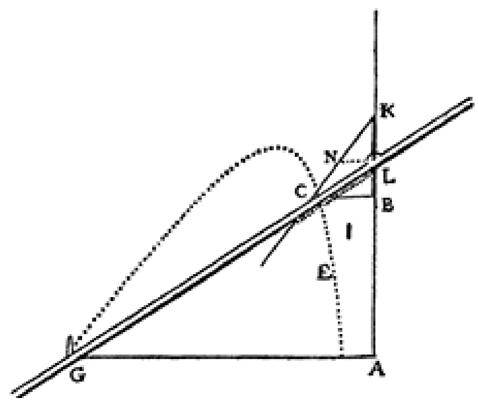


Figura 5. Hiperbológrafo de Descartes. Fuente: Descartes (1637, pp. 319-322)

A partir de la construcción anterior, Descartes (citado en Manzano, 2017) describe:

Sea la curva EC descrita por la intersección de la barra GL con la figura rectilínea NKL cuyo lado KN es generado indefinidamente en dirección a C y que, movido en el mismo plano de manera que su diámetro KL coincide siempre con parte de la línea AB, proporciona a la barra GL un movimiento giratorio alrededor de G (la barra está unida a la figura NKL en L). Si quiero encontrar a qué clase pertenece esta curva, elijo una línea recta, como AB, y en ella elijo un punto A por el que empezar la investigación. Digo 'escojo esto y esto' porque somos libres de elegir los que *queramos para hacer la ecuación lo más corta y simple posible y no importa qué recta escoja en vez de la AB ya que la curva será siempre de la misma clase como es fácilmente demostrable.* (p. 28-30)

Así, Descartes asegura que el grado de la ecuación que describe la curva es independiente del sistema de coordenadas elegido. Para encontrar la ecuación que describe esa curva, procede de la siguiente forma:

- Primeramente, introduce las variables

AB = y
BC = x

- Después, se declaran las constantes

GA = a
KL = b
NL = c

- A partir de la figura se observa que los triángulos KLN y KBC son semejantes, así que tenemos:

$$\frac{c}{b} = \frac{x}{BK} \to BK = \frac{b}{c}\, x \to BL = \frac{b}{c}\, x - b$$

De aquí, se tiene que:

$$AL = y + BL = y + \frac{b}{c}\, x - b$$

Como los triángulos LBC y LAG son semejantes:

$$\frac{BC}{BL} = \frac{AG}{AL}$$

de donde obtenemos:

$$\frac{x}{\frac{b}{c}\, x - b} = \frac{a}{y + \frac{b}{c}\, x - b} \leftrightarrow x\left(y + \frac{b}{c}\, x - b\right) = a\left(\frac{b}{c}\, x - b\right)$$

Entonces:

$$xy + \frac{b}{c}\,x^2 - bx = \frac{ab}{c}x - ab \;\leftrightarrow x^2 = cx - \frac{c}{b}\,xy + ax - ac$$

Descartes dejó así la ecuación ya que quería enfatizar que era de segundo grado, concluyendo entonces que era una hipérbola.

En este ejemplo se puede observar que las ideas que Descartes plantean para guiar el discurso que le permite ir encontrando y generando relaciones, es de naturaleza geométrica, es decir, a partir de las curvas trazadas, se generan las ecuaciones y no al revés. Se parte de la premisa de semejanza entre figuras y a partir de ahí se sigue en la formación de argumentos dados a partir de las condiciones del mecanismo en cuestión.

El contexto planteado no busca únicamente llegar a la ecuación de la hipérbola, también muestra la importancia de la visualización que se debe hacer de los componentes de la configuración presentada y cómo esta visualización deriva en el planteamiento de relaciones y subconfiguraciones que parten de la construcción inicial.

Después del auge que provocó entre la comunidad matemática el método propuesto por Descartes, se realizaron una serie de propuestas distintas en el campo de las matemáticas que, si bien no eran propias de la geometría, lograron permear en la forma de entender y enseñar la materia. En particular, en el siglo XX se formó un grupo de matemáticos franceses cuya visión de la matemática era mucho más abstracta y algebraica. Mathias (1992) reporta que este grupo, llamado Bourbaki, propuso un replanteamiento de las matemáticas y el rigor con que eran planteadas y enseñadas. Afirmaban que, para enseñar cierto tema, lo fundamental era aprender los axiomas involucrados, el planteamiento era encontrar las ideas generales en las distintas áreas de la matemática ayudándose sobre todo de las estructuras. El colectivo estaba formado por muchos matemáticos muy reconocidos a nivel internacional, es por lo que lograron tener gran repercusión, al grado de que la tendencia de enseñanza de matemáticas en las escuelas cambió y esto puede apreciarse particularmente en los cursos de Geometría.

Mathias (1992) reporta que "Los Bourbaki" han manifestado que sus publicaciones no estaban destinados específicamente a la enseñanza en ninguno de sus niveles (menos para ser usados como libros de texto), sino que eran más bien un tipo de "caja de herramientas" para las y los investigadores matemáticos.

Mathias (1992) muestra cómo ha sido el cambio entre la manera de hacer y describir la matemática en los últimos cincuenta años, y que ha sido mayor en Francia que en otros países. Así mismo, resalta su contribución en la organización de una parte de la matemática, desde los grandes problemas hasta cuestiones aparentemente secundarias como la terminología o la notación, dos terrenos en los que permearon de manera profunda.

A partir de estas influencias en los enfoques y planteamientos matemáticos, los libros de texto, así como esto, los programas educativos no quedaron exentos de haberse transformados en distintos grados y niveles. Un ejemplo de ello es precisamente la visión algebraica que ha dominado en muchos ámbitos. Si bien es innegable la potencia de las herramientas algebraicas al momento de enfrentarse a una situación problema, hay ramas de la matemática, como la geometría, en la que se ven involucrados objetos matemáticos con una naturaleza de representación gráfica, de la cual se pueden desprender elementos propios de las figuras geométricas como el paralelismo, ortogonalidad, semejanza y congruencia entre figuras, que resultan igual de válidos al dar solución a dicha situación problema.

2.3 MARCO CURRICULAR DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

Para comprender cómo estos cambios han sido plasmados en el currículo escolar, se revisó el estatus actual de la Geometría dentro de los programas de estudio de bachillerato en México, utilizando algunos ejemplos en concreto que describen mejor lo que queremos señalar. Puesto, aunque observamos que los cursos señalan tener como fin que cada estudiante *"interprete, argumente, comunique y resuelva diversas situaciones problemáticas de su contexto por medios gráficos y analíticos, que incluyan la representación de figuras en el plano cartesiano."* (DGETI 2017, p.13). Consideramos que existe una discrepancia en la realidad que vive la enseñanza de geometría en las escuelas, este problema radica en que, con el paso de los años, en la academia se ha minimizado la importancia de la geometría sintética, la cual va estrechamente relacionada con el uso del pensamiento geométrico.

Según la DGB (2017), en el programa de estudios de tercer semestre de preparatoria, propuesto por la Dirección General de Bachillerato (COBACH) como el propuesto por la Dirección General de Educación Tecnológica Industrial (DGETI), se plantea como parte del contenido curricular estudiar Geometría Analítica, siendo ese el nombre la materia en DGETI y "Matemáticas III" en el sistema COBACH. Particularmente, cuando se habla del enfoque de la materia, se menciona que el objetivo es promover el desarrollo de habilidades características del pensamiento lógico-matemático, así como de la capacidad de proponer alternativas de solución a diversos problemas presentes en su entorno desde diversos enfoques.

Dentro del curso, se indica a las y los profesores introducir a las y los estudiantes a conceptos como: sistemas de coordenadas, línea recta o cónicas, a través de la solución de problemas que les permitan percibir e interpretar su entorno espacial desde un enfoque geométrico analítico. Sin embargo, haciendo una revisión en algunos de los libros de texto de nivel medio superior, se observa que la realidad dista de esos planteamientos.

Ejemplo de esto son los siguientes ejercicios (Figuras 6 y 7) propuestos por el libro que se utiliza para la materia de Matemáticas III en Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora 2017. El primer recuadro es parte de la actividad diagnóstica que introduce al tema de elipses. En este ejercicio toma como contexto la forma de las órbitas planetarias que recorren una trayectoria elíptica alrededor del Sol. Sin embargo, sin ningún tipo de información previa sobre la elipse (o sobre el movimiento de los planetas) y a continuación, sin profundizar en la explicación, se les pide que desarrollen e igualen a cero una ecuación cuadrática. Dejando ver que únicamente la mención de la elipse es un paso para dirigirnos a un trabajo operativo algebraico. En donde las curvas no son las protagónicas, si no las ecuaciones que "están tras ellas".

Lee cuidadosamente y realiza lo que te solicita cada uno de los reactivos. Escribe con letra clara y legible cada uno de los procedimientos, simplificando al máximo.

1. ¿Qué tipo de órbita tienen los planetas?

2. ¿En qué punto se encuentra el sol dentro de la órbita de los planetas?

3. Desarrolla e iguala a cero la ecuación $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$

Figura *6*. Ejemplo de actividad diagnóstica del tema Elipse propuesta por el libro de Matemáticas III. Pag. 182. Ed. Colegio de Bachilleres Sonora.

Mientras tanto, otra muestra de la algebrización en los cursos de Geometría es la siguiente actividad, en ella destacamos que ya sin proporcionar ningún contexto se mete de lleno a proponer un desarrollo algebraico, con el fin de encontrar la ecuación de la elipse. Sin embargo, no se utiliza ningún recurso geométrico para apoyar el razonamiento o asociación con la representación figural o gráfica de ésta, sino que dada la elipse se procede a solicitar un desarrollo algebraico una ecuación a partir de la suma de las distancias focales. Este desarrollo no es trivial, puesto que se tienen que hacer bastantes pasos de despejes y factorización para llegar a la ecuación en la forma canónica.

ACTIVIDAD 3

SD4.1- B4

Poniendo el centro de la elipse en el origen y un punto $P(x, y)$ en uno de los vértices, los focos quedarían en las coordenadas $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ y tomando en cuenta que la suma de las distancia de cada uno de ellos al punto $P(x, y)$ es igual a $2a$. Determina los pasos a seguir para determinar su ecuación :

$$dPF_1+dPF_2=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

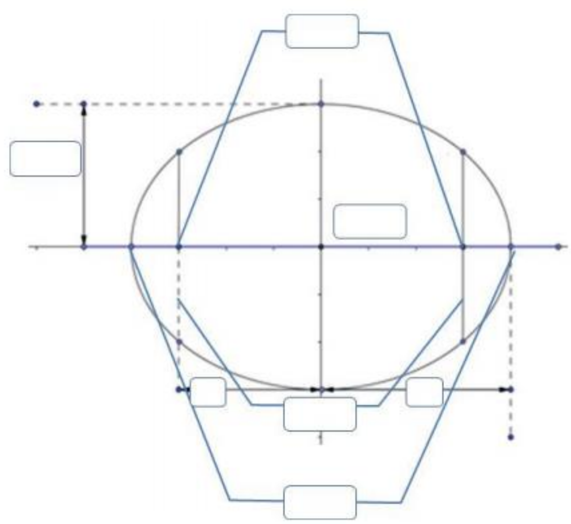
$$\vdots$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Figura *7*. Actividad 3 propuesta por el libro de Matemáticas III. Pag. 190. Ed. Colegio de Bachilleres Sonora.

O bien, los ejercicios propuestos por el libro de Matemáticas III (2015) el cual es utilizado en los programas de telebachillerato comunitario (Figuras 8 y 9). En la Figura 8 se aprecia en la actividad no. 1 que la forma de abordar a la elipse se limita a hacer una disección de sus partes y la identificación de éstas. Posteriormente se observa nuevamente que sin ningún tipo de solicitud geométrica les dan las coordenadas de los vértices y focos de una elipse y se pide encontrar la ecuación que la describe. Esto hace parecer que la figura geométrica no tiene mayor trascendencia, sino que sus partes son las dadoras de las condiciones que conforman una ecuación para su tratamiento y no como generadora de ella. Lo mismo ocurre en el punto tres, donde a partir de la ecuación nos piden seguir el camino contrario y encontrar los elementos de la elipse (posición de focos, vértices, etc.), sin embargo, nunca se pide después la graficación de las elipses encontradas. Abonando más a la idea de que la figura y la ecuación son dos objetos distintos y no representaciones de uno mismo, dejando relegados los aspectos de visualización en el proceso resolutivo.

1. Escribe dentro del recuadro el nombre o la variable que corresponde a cada elemento de la elipse.



2. Encuentra la ecuación de la elipse y todos sus elementos, cuyos vértices están en $V(0, 6)$ y $V'(0, -6)$ y sus focos en $F(0, 3)$ y $F'(0, -3)$.

3. Dada la siguiente ecuación de la elipse en su forma ordinaria, determina sus elementos: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

Figura 8. Ejercicio propuesto en el libro de Matemáticas III Telebachillerato. Pag. 258. Ed. SEP

Por otro lado, tenemos la siguiente actividad de la Figura 9, la cual realmente es muy similar a la anterior, no existe ninguna situación problema, más bien son ejercicios que buscan mecanizar los procesos de desarrollo algebraicos. No parece que haya intensión de generar análisis o razonamientos geométricos sobre la elipse, si no por el contrario, centrar el quehacer en el tratamiento de las ecuaciones. Más allá de decir que la visualización está rezagada, se puede observar que no es parte de las habilidades que se busca promover. Así mismo, se señala que nuevamente se ve afectada la relación de ver a la elipse como un solo objeto matemático en sus diferentes representaciones, es decir, es una curva que genera una ecuación, así como los puntos que la conforman cumplen la condicón del lugar geomético que la determina.

Aplicas los elementos y las ecuaciones de una elipse

Realiza los siguientes ejercicios en tu cuaderno.

2. Encuentra la ecuación de la elipse y todos sus elementos, cuyos vértices están en $V(0, 6)$ y $V'(0, -6)$ y sus focos en $F(0, 3)$ y $F'(0, -3)$.

3. Dada la siguiente ecuación de la elipse en su forma ordinaria, determina sus elementos:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

4. Dada la ecuación de la elipse $16x^2 + 4y^2 = 16$ determina todos sus elementos.

5. Dada la siguiente ecuación de la elipse en su forma ordinaria, determina sus elementos:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Figura 9. Ejercicio propuesto en el libro de Matemáticas III Telebachillerato. Pag. 259. Ed. SEP

Así como estos, existen otros muchos ejemplos de ejercicios o problemas donde podemos encontrarnos que el uso de figuras o situaciones con un cierto contexto geométrico, se convierten un paso en el camino que conduce al álgebra, es decir, una forma de trabajo con base en expresiones analíticas y su tratamiento, en lugar de un problema que verdaderamente involucre un razonamiento geométrico. Según Hitt (1998), en la enseñanza de la geometría hay un predominio del pensamiento algorítmico sobre el visual; basado en ideas de Vinner (1989), Eisenberg y Dreyfus (1990) señala:

“Hay un predominio del pensamiento algorítmico sobre el visual, una de las causas posibles es que pensar visualmente exige demandas cognitivas superiores a las que exige el pensar algorítmicamente; otra, es que los profesores de matemáticas promueven el pensamiento algorítmico sobre el visual”. (Hitt, 1998. p.27)

Una consecuencia visible de estas prácticas son los resultados de la prueba PISA (2012), en donde México ha resultado estar por debajo de la media esperada de resultados de matemáticas y tan solo un 4.5% de los estudiantes logran llegar a resolver correctamente problemáticas que involucren herramientas geométricas superiores al teorema de Pitágoras.

Es trascendente señalar, cuál es la definición de la competencia matemática que PISA utiliza: se define como la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en una variedad de contextos. Incluye el razonamiento matemático y el uso de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Esta competencia le ayuda al individuo a reconocer la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados y tomar decisiones necesarias en su vida diaria como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo. (OCDE, 2013).

Es necesario hacer una reflexión sobre esta definición, puesto que, si se compara con respecto al enfoque de la materia Matemáticas III, hay algunas similitudes, sin embargo, al ver los resultados de PISA, se puede conjeturar que, o bien, no ha habido un correcto aprovechamiento por parte de la gran mayoría del alumnado o el quehacer geométrico en las aulas difiere del requerido para hacer la prueba y obtener resultados satisfactorios.

Dentro de la educación matemática existen distintos problemas que van surgiendo cuando uno pretende enseñar matemáticas, Freudenthal (1980) enumera trece problemáticas frecuentes y una de ellas menciona en particular de la Geometría, en él dice: “¿Puede usted enseñar geometría haciendo que quien aprende reflexione sobre las intuiciones espaciales que éste posee?”. Esta pregunta es una motivación importante para el desarrollo de este trabajo, puesto que a partir de ella se ponen en discusión los métodos de enseñanza, así como el enfoque que se le da a esta asignatura en nivel bachillerato.

La importancia de la implementación de esta secuencia de actividades en primera instancia, es rescatar la Geometría Analítica planteada por Descartes según presenta el proyecto de Dennis (1997), pero también se busca promover en los estudiantes el desarrollo de las habilidades de visualización geométrica según el proyecto de Gutiérrez (1992), lo cual se ha descuidado en la educación actual de nivel bachillerato en México, haciendo más evidente esta ausencia al llegar el estudiante al nivel universitario donde se demanda el desarrollo del análisis geométrico.

Según Duval (2016) "la Geometría Analítica es quizá una rama de las matemáticas más complejas de enseñar, esto porque la producción de enunciados en geometría requiere funcionamientos cognitivos que son diferentes y más complejos que los que se aplican fuera de la geometría." Para lograr este tipo de habilidades es necesario que las y los estudiantes sean capaces de abordar un objeto matemático desde distintas representaciones, particularmente, las representaciones figurales, algebraicas y llevar a cabo procesos de visualización de las propiedades geométricas de los objetos involucrados.

Según Duval (2016), entre todos los campos de conocimiento en los que los estudiantes deben entrar, la geometría es el que exige la actividad cognitiva más completa, ya que apela al gesto, al lenguaje y a la mirada. Allí es necesario construir, razonar y ver, indisociablemente. Asegura también que la geometría es el campo más difícil de enseñar y uno de aquellos en los que, aun cuando los objetivos sean muy modestos, los resultados que se alcanzan son decepcionantes además de recordar las dificultades que conciernen a los problemas de demostración, típicos del campo.

Una de las estrategias que seguimos para generar en las y los estudiantes un mayor interés hacia los aspectos geométricos de las situaciones problema, es la incorporación del uso de mecanismos articulados para el trazado curvas, la integración de esos mecanismos en las problemáticas es parte fundamental de este trabajo.

Atendiendo las disposiciones oficiales, no podemos dejar de mencionar que en 2019 se expidió una Ley General de Educación y se abrogó la Ley General de la Infraestructura Educativa. Dándonos como resultado una nueva ley que describe lo que ahora se conoce como "la nueva escuela mexicana", contiene en el Capítulo IV "de la orientación integral" dos artículos que hablan de las consideraciones que contiene la propuesta. Destacamos los siguientes artículos:

- **Artículo 17.** La orientación integral en la nueva escuela mexicana comprende la formación para la vida de los educandos, así como los contenidos de los planes y programas de estudio, la vinculación de la escuela con la comunidad y la adecuada formación de los maestros en los procesos de enseñanza aprendizaje, acorde con este criterio.
- **Artículo 18.** La orientación integral, en la formación de la mexicana y el mexicano dentro del Sistema Educativo Nacional, considerará lo siguiente:

I. El pensamiento lógico matemático y la alfabetización numérica; …

Así mismo, el **Artículo 24.** Señala que los planes y programas de estudio en educación media superior promoverán el desarrollo integral de los educandos, sus conocimientos, habilidades, aptitudes, actitudes y competencias profesionales, a través de aprendizajes significativos en áreas disciplinares de las ciencias naturales y experimentales, las ciencias sociales y las humanidades; así como en áreas de conocimientos transversales integradas por el pensamiento matemático, la historia, la comunicación, la cultura, las artes, la educación física y el aprendizaje digital. Además, define el pensamiento lógico matemático como: estructura el pensamiento a partir del razonamiento lógico y la abstracción, capacidades mediante las cuales se consigue, entre otros, comprender conceptos, establecer relaciones, plantear problemáticas, identificar soluciones; elementos todos ellos cruciales para resolver situaciones de diversa índole en todo el trayecto formativo.

Si bien hay aún mucho que profundizar, analizar y reportar sobre la Nueva Escuela Mexicana, consideramos que la propuesta de intervención que hacemos es aplicable tanto dentro de parámetros de la ley anterior como los de la actual, pues el pensamiento geométrico y la Geometría Analítica siguen siendo considerado de la misma forma dentro de plan de estudios.

Como se ha mencionado antes, una parte fundamental de este trabajo es la introducción de mecanismos como herramienta didáctica en el diseño de la propuesta de intervención, por ello como un primer acercamiento, es necesario revisar trabajos realizados previamente por autores que los hayan implementado, así como hacer una análisis y reflexión de sus resultados obtenidos y conclusiones.

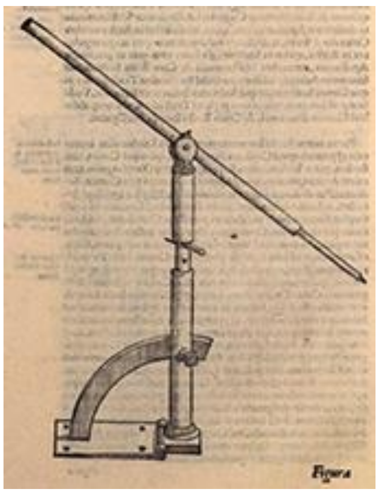
2.4 ESTUDIOS RELACIONADOS CON EL USO DE MECANISMOS ARTICULADOS EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

Se han realizado trabajos que buscan un mejor aprendizaje de la geometría, como el de Bartolini (1998), quien afirma que, si bien la contextualización es importante al momento de enseñar geometría, puede no ser suficiente; además señala que la introducción de artefactos en las clases de geometría presta diferentes perspectivas para clarificar el razonamiento entre las y los estudiantes, pues los motiva el interés al salirse de los métodos tradicionales de enseñanza.

Se decidió incorporar mecanismos articulados, para que sus movimientos sean los generadores de curvas y que estas curvas trazas se identifiquen como representaciones del resultado de una configuración, para finalmente lograr reconocer a las ecuaciones como representaciones de las curvas trazadas, con la intención de lograr así la reincorporación del enfoque de la Geometría Analítica original de Descarte a un formato más compatible con el ambientes escolar actual, donde se pretende utilizar como apoyo los mecanismos articulados diseñados con nuevas herramientas tecnológicas.

Además, cabe destacar que el desarrollo de las matemáticas no se podría entender por completo si se estudian únicamente sus elementos teóricos y se ignora el uso de los instrumentos y máquinas, pues son éstas en infinidad de casos, quienes han apuntalado en la validación y generación de sus múltiples resultados. Incluso actualmente existen áreas de la matemática que no podrían concebirse sin el uso de algún tipo de mecanismo tecnológico.

Manzano (2017) describe a un mecanismo articulado como un sistema mecánico compuesto por barras rígidas unidas mediante articulaciones. Tales articulaciones pueden permitir deslizar las barras entre sí. Dentro de los artefactos existe una categoría referente a "artefactos articulados para el trazado de curvas" y un ejemplo común de ellos son los elipsógrafos, que se han utilizado por diferentes personas a través del tiempo para el trazado de elipses. Abundan variedades: hay desde construcciones muy simples hasta otras más complejas. Para ejemplificar algunas, las mostradas en la Figura 10.



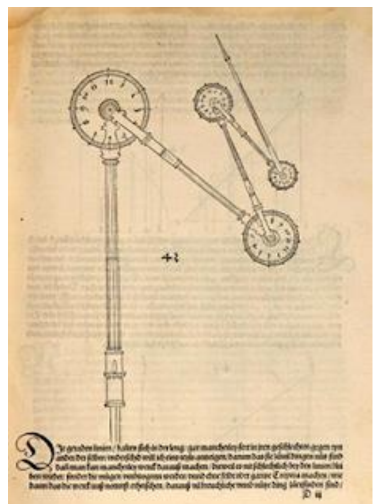


Figura 10.: Conicógrafo de Barocius (derecha) y Mecanismo de Durero para el trazado de cicloides (izquierda) Fuente: Albrecht Dürer (1525),

Otros autores como Cortés, J., Palenius, G., y Ontiveros, C. (2012), dan a conocer los resultados de su propuesta de intervención didáctica, la cual consistió en aplicar a ocho estudiantes de bachillerato dos actividades de aprendizaje de Geometría Analítica en las que se utilizan elipsógrafos (artefactos concretos). Las actividades tenían el objetivo de apoyar el proceso de demostración en Geometría Analítica, específicamente con el tema de Elipse. En su artículo, narran la experiencia de implementar el uso del elipsógrafo de Inward y el de Van Schoteen. Con la idea de retomar las ideas de que las curvas generan las ecuaciones y no al revés, así mismo cómo generar entre las y los estudiantes un ambiente más dinámico para trabajar. Hoyos, Capponi y Génèves

(1998), argumentan que el introducir este tipo de tecnología desencadena la comprensión de nociones y se promueve el ingenio y la creatividad científica.

Reportan también que, retomando ideas de (Bartolini et al 2005) los contextos fueron elementos importantes a tomar en cuenta en la creación de las actividades, así como también fue de suma importancia encontrar el material adecuado para la construcción de los mecanismos.

Se hicieron modelos tanto físicos como en papel. Para conseguir que las actividades fueran lo más precisas posibles a los elementos que se buscaban construir respecto a la elipse, se identificó la geometría que está detrás de ambos elipsógrafos, esto claro, utilizando conceptos geométricos como son la congruencia entre triángulos y también, haciendo análisis de segmentos de líneas fijos y móviles.

Dentro de sus conclusiones globales mencionan que el trabajo en equipo y cooperativo fue parte importante de que las y los estudiantes lograran realizar las actividades. En cuanto a los instrumentos, señalan dos cosas:

1) Trabajar con instrumentos concretos en el aprendizaje es viable ya que, se observó que la mayoría de los estudiantes se motivan trabajando con ellos, es una dinámica muy distinta a la de una clase cotidiana, además el concepto en cuestión es construido por ellos mismos por lo que este puede ser más duradero.
2) En cuanto a la manipulación del mecanismo, al principio les costó trabajo moverlo, lo cual se vio reflejado en sus trazos, los cuales quedaban muy imprecisos. Después de realizar varios trazos, los alumnos obtenían práctica y las elipses les comenzaron a quedar bien. Un problema para los alumnos fue que en ocasiones se salían las tachuelas con las que se fijaban los puntos fijos (focos), y esto les perjudicaba en la estética de sus dibujos.

Se hace una mención en particular al elipsógrafo puesto que será el concepto elipse en donde se centrará la atención de esta propuesta. Al estar localizado en el último bloque, exige que al menos se conozcan ciertos conceptos de Geometría Analítica que den noción a las y los estudiantes de las ideas.

Realizamos una revisión en algunos textos sobre las formas de abordar los diferentes bloques y fue en el de la elipse donde se consideramos había un área de oportunidad mayor de introducir el uso de manipulables.

Finalmente, teniendo presente la realidad en los salones de clase, Rodríguez (2021) reposta como las construcciones con regla y compás han desaparecido, es decir, se ha abandonado el trabajo geométrico, priorizando otros como el algebraico; dejando de lado el analizar propiedades geométricas, nociones como congruencia, semejanza y simetría, construidas desde el trabajo geométrico, las cuales se consideran fundamentales para promover la argumentación.

La problemática señalada anteriormente nos ha sido de motivación para proponer, como eje de este proyecto, el diseño de una secuencia de actividades que se convierta en una herramienta útil para el docente al momento de desarrollar el concepto elipse, favoreciendo la visión geométrica de los elementos de ella. Se ha señalado que, las representaciones gráficas y geométricas son quizá las más complicadas (y por lo regular menos tomada en cuenta) de generar y comprender. Para ello se incluye el uso de mecanismos articulados, en particular, de elipsógrafos como instrumento didáctico. Esperando que con el contacto y manipulación de éstos se genere un mayor interés del concepto.

Con base en la problemática señalada, es necesario plantear un objetivo general del trabajo, el cual sintetice de la forma más completa la propuesta. En dicho objetivo, se considera cuál es la acción principal en la que gira el trabajo, así como el producto final a obtener, de forma que será material de análisis y discusión el cumplimiento de éste una vez puesta en práctica la secuencia didáctica.

2.5 OBJETIVO GENERAL

Diseñar una secuencia de actividades didácticas que enriquezcan los significados geométricos de la elipse, favoreciendo la visualización geométrica, mediante el uso de mecanismos articulados para el trazado de curvas.

2.5.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Identificar los elementos geométricos presentes en el trazado de una elipse.
2. Identificar mecanismos articulados que tracen elipses poniendo en juego los elementos geométricos identificados.
3. Formular actividades que guíen al estudiante en la exploración y manipulación con el mecanismo articulado, así como en los cambios de representaciones.

A continuación, se hace la introducción y descripción a algunos de los elementos teóricos que darán rigor y solidez argumentativa a la propuesta del proyecto, así como también marcan la pauta de qué significados entenderemos de las habilidades que se buscan desarrollar en el estudiantado. Los elementos que se consideren serán clave, porque, además, proveen de un significado más profundo a los conceptos que se utilizan.

3. Marco teórico

Para diseñar la secuencia didáctica que se implementó, misma que surge a partir de la problemática señalada, ha sido necesario revisar en la literatura conceptos relacionados con la enseñanza de la Geometría y la perspectiva cognitiva de Duval (1999) sobre los registros de representación, así como de los procesos de comprensión de los estudiantes, los cuales surgen al momento de intentar resolver situaciones problema, en este caso de Geometría.

Según Torregrosa y Quesada (2007) cuando se trabaja en un ambiente geométrico, es preciso hacer distinciones entre figuras y dibujos, porque si bien ambas son representaciones gráficas de un objeto (sea este matemático o no), estos conceptos tienen distintos significados e implicaciones. Si se hablamos de la diferencia principal entre dibujo y figura está en las propiedades geométricas que las figuras tienen y los dibujos no. El dibujo es la representación gráfica de un objeto en un sentido amplio, ya sea sobre un papel u otro material, además de no poseer ningún tipo de información agregada del objeto, ni necesariamente conservando de forma fidedigna las proporciones o regularidad de los lados.

Usando como ejemplo a la elipse, suele representarse como un dibujo similar a un óvalo, pero no es hasta que se presentan características como sus focos, vértices, centro, semiejes o se determina la constancia de la suma de la distancia de cualquier punto de la curva a sus focos, que podríamos afirmar que tenemos una representación figural de la elipse. Esto puede verse claramente en las Figuras 11 y 12.

En la primera, se observa que no hay una regularidad en los trazos, como si se estuviera haciendo un esbozo de óvalos que asemejan a una elipse. Mientras que, en la segunda imagen, existen propiedades que nos dan la garantía de que estamos hablando de la figura geométrica de la elipse, por ejemplo, observamos que es una curva cerrada que cuenta con dos ejes de simetría, los ejes mantienen perpendicularidad entre sí, observamos que están indicados los focos, los cuales siempre se encuentran en el eje de mayor longitud.

Figura 11. Trazo a mano alzada de elipses. Fuente: http://diseno2014ariadnavasquezuriarte.blogspot.com/2014/09/trazo-mano-alzada-de-elipses.html

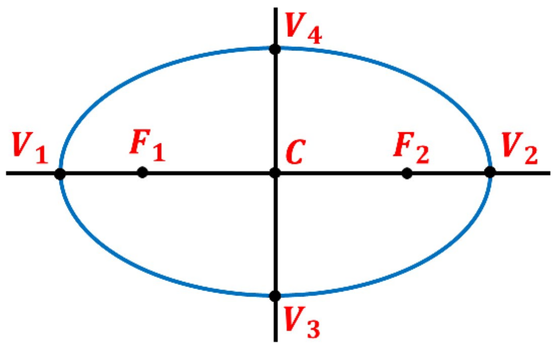


Figura 12. Elipse como figura, resaltando puntos importantes de su descripción. Fuente: JulioProfe (2009)

Así mismo, conceptos como ver y visualizar en geometría, son acciones que ocurren en distintos niveles de profundidad y que los estudiantes pueden o no llevar a cabo durante el proceso de resolución de un problema de geometría, esto depende en cierta parte del conocimiento y habilidad de quien resuelve el problema, sin embargo, la parte medular tiene que ver con las diversas herramientas que el profesor provea previamente a los estudiantes.

Es necesario recuperar y promover entre los estudiantes habilidades de visualización geométrica, dado que cada vez han ido quedando rezagadas ante los métodos algebraicos, porque además de resultar muy útiles a la hora de resolver problemáticas geométricas, son indispensables en el proceso de razonamiento de los problemas.

Duval (2016) señala que un punto medular en el aprendizaje de la geometría se basa en el proceso de trasladarse de un tipo de visualización icónica, que solo trata de plasmar un objeto y no incluye las propiedades que harían que se pudiera realizar operaciones en ella, a una visualización no icónica, en donde la figura es una *"configuración contextualmente destacada de una red o de una organización más compleja".* Es decir, la figura con la que se trabaja y sobre la que se opera, es resultado de una construcción de las partes que la conforman. Cabe señalar que esta es una característica de lo que Duval (2016) Llama como la *entrada del constructor* y sobre la que se abundará más adelante.

Figura 13. Identificación de elipses, actividad libro de texto Matemáticas III. Pag 183. Ed. Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora

En el caso particular de la elipse, se puede observar que en los libros de texto se suelen dar ejemplos de objetos físicos que asemejan a una elipse, sin embargo, no proveen argumentos geométricos que contribuyan a entender por qué dicho objeto se consideraría una elipse, en ocasiones el objeto mostrado ni siquiera posee de manera fidedigna la forma de la curva, es decir, se trabaja únicamente haciendo uso del recurso de la visualización icónica para generar asociaciones entre la curva y objetos reales, sin embargo, en este caso es confuso pues como lo mencionamos anteriormente, los objetos mostrados no representan una elipse y esto puede derivar en generar más obstáculos al pasar a una visualización no icónica de la elipse. Un ejemplo muy claro de ello se presenta en la Figura 13.

Además del desafío cognitivo que significa transitar entre la visualización icónica a una no icónica, también se debe promover la coordinación de los procesos de visualización respecto a los procesos de razonamiento. Esto porque es la puerta de entrada hacia el razonamiento deductivo, que resulta fundamental para resolver los problemas geométricos utilizando herramientas geométricas (Duval, 1998).

Duval (2016) declara que "ver una figura en geometría exige disociar lo que corresponde a la magnitud". También hace una crítica respecto a que ninguna de las actividades que se utilizan clásicamente para iniciar a los estudiantes en el estudio de la Geometría permite verdaderamente desarrollar esta manera de ver.

Por otra parte, Duval (2002) entiende la visualización como una herramienta necesaria para lograr un anclaje operativo entre las representaciones semióticas de un objeto. Mediante la visualización cualquier organización/construcción puede ser comprendida como una configuración, haciendo visible todo lo que no es accesible a la visión y aportando una aprehensión global de cualquier organización de relaciones. La visualización matemática en este contexto tiene que ver con una visión global, integradora, que articule, libre de contradicciones, representaciones de varios sistemas.

Para Duval (2002), la visualización plantea tres problemas desde el punto de vista del aprendizaje:

1) Discriminación de las características visuales relevantes.
2) El procesamiento figural, cambios entre registros visuales (descomponer, recomponer una figura; reconfiguración); cambio de perspectiva, etc.
3) Coordinación con el registro discursivo y algebraico.

La visualización se puede entender como un proceso en dos sentidos, por un lado, va de lo material a lo mental y el inverso que va de lo mental a lo material.

«La visualización ofrece un método de ver lo invisible» (Arcavi, 2003, p. 216). Esta visualización puede ser solo mental y entonces involucrar objetos no ostensivos, es decir, mentales, o bien, puede estar relacionado con una representación física y entonces ser objeto perceptible. En este caso se busca promover que los estudiantes pasen de las construcciones hechas con los objetos físicos o mecanismos virtuales, a configuraciones figurales.

Cabe resaltar que si visualizamos un dibujo se obtiene una imagen mental, la cual no necesariamente guarda las mismas proporciones y propiedades para todas las personas que lo observan, ya que depende de diversos factores, que pueden ir desde el ángulo de visión, hasta la percepción de las dimensiones. Por otro lado, una figura conlleva una serie de afirmaciones matemáticas (definiciones, propiedades o relaciones) que el dibujo no posee por sí mismo, sino le son atribuidas por quien opera dicha figura.

> "Toda confusión entre el objeto y su representación provoca, en un plazo más o menos amplio, una pérdida de la comprensión: los conocimientos adquiridos se hacen rápidamente inutilizables por fuera de su contexto de aprendizaje, sea por no recordarlos, o porque permanecen como representaciones "inertes" que no sugieren ningún tratamiento productor." (Duval, 2004a, p. 14)

Torregrosa y Quesada (2007) nos describen una figura como la imagen mental de un objeto físico, la cual se puede representar mediante una configuración geométrica, o sea, una composición de otras figuras de menor dimensión, a esto se le conoce por subconfiguraciones geométricas más simples, de dimensión geométrica menor o igual que la original, las cuales, a su vez, también están vinculadas con afirmaciones matemáticas.

Duval (1995, 2007) y Fischbein (1993) han subrayado el papel heurístico que desempeñan las figuras en la resolución de los problemas en los que se proporciona una configuración geométrica, así que debe ser exhaustiva la búsqueda de posibles configuraciones y subconfiguraciones que puedan realizarse con los mecanismos articulados escogidos en cada actividad. Las subconfiguraciones surgen a partir de la descomposición de una figura. La descomposición mereológica de las figuras es uno de los procedimientos más antiguos en la historia de la geometría (Edwards, 1979). Estas descomposiciones se clasifican en homogéneas cuando la descomposición es en dos figuras de la misma especie, heterogéneas cuando la descomposición es en figuras de dos o más especies diferentes y estrictamente homogéneas cuando la descomposición se hace en figuras de la misma figura inicial, pero de menor magnitud.

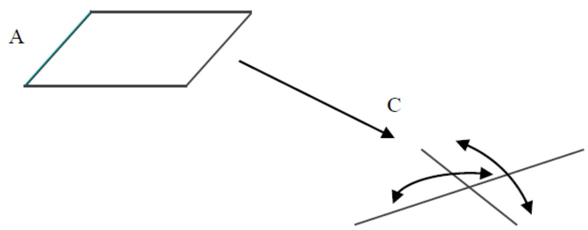


Figura 14. Ejemplo de descomposición dimensional 1D/2D. Duval (2016, p.31)

Las configuraciones figurales y descomposiciones serán fundamentales al momento de utilizar mecanismos articulados para el trazado de curvas, pues a partir de sus propiedades geométricas limitan el movimiento del punto que traza la curva específica y marcan las condiciones que deben cumplirse para obtenerla. A partir de la manipulación de ellos se forman las figuras con las que se trabajará y posteriormente realizar las transformaciones a otros registros de representación. Es por lo que se debe de plantear de forma muy clara y concisa la situación problema, para que las y los estudiantes puedan generar distintos tipos de subconfiguraciones que los ayuden a solventar la problemática.

Un ejemplo de una actividad que involucra distintos tipos de subconfiguraciones para la resolución de un problema geométrico lo presenta Clemente (2017), donde les pide a los estudiantes probar la relación descrita en la ilustración 15.

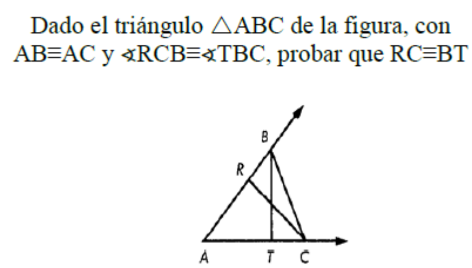


Figura 15. Problema que requiere el uso de subconfiguraciones. Clemente (2007, p. 503)

En los resultados del trabajo de Clemente (2017) puede observarse cómo hubo tres divisiones entre el grupo de estudiantes, cada uno de estos subgrupos coincidió en la forma de descomponer la figura, sin embargo, no todos lograron resolver de manera satisfactoria el problema. A pesar de ello, es muy interesante observar las diferentes transformaciones que sufrió la configuración inicial pues nos muestra cómo fue el razonamiento de los estudiantes, por ejemplo, al momento de discernir las figuras y segmentos más importantes o rotar las figuras para lograr mejores interpretaciones. Los resultados de los tipos de subconfiguraciones se muestran en la Figura 16.

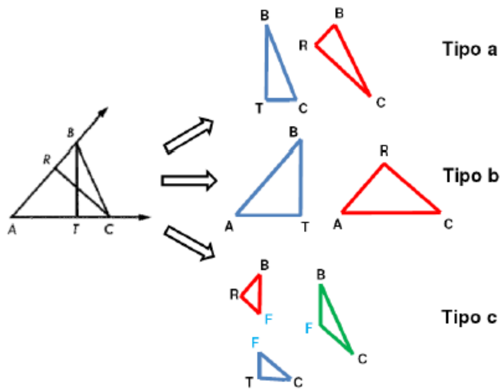


Figura 16. Distintos tipos de subconfiguraciones hechas por los estudiantes. Clemente (2017, p.505)

Otro ejemplo de subconfiguraciones hechas a partir de una figura, en este otro caso una elipse, construida por el método del jardinero, se presenta en la Figura 7, en donde dependiendo de la localización del punto que traza la elipse es el tipo de triángulo que se forma y dependiendo del problema, una subconfiguración puede ser más útil o precisa que otra para resolverlo.

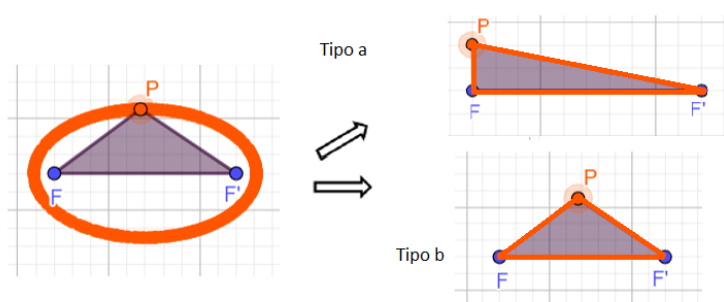


Figura 17. Diferentes triángulos obtenidos a partir de una elipse trazada con el método del jardinero. Elaboración propia.

Duval (1996) expresa que la deconstrucción dimensional exige un alto grado de visualización. No se puede entender el concepto de la visualización por sí solo, planteado por Duval, sin introducir el concepto de *aprehensión*, pues son los dos distintos tipos de aprehensión: operativa y discursiva, quienes se hacen presentes al momento de transitar entre las diferentes representaciones semióticas de un objeto.

Se observa, en la descripción de visualización formulada por Hershkowitz (1996), quienes mencionan que al introducir características de dicha transferencia obtenemos formas de aprehender (de ver una figura matemáticamente). O bien, en palabras de Duval (1998):

> Lo que un dibujo nos deja ver es una o varias figuras 1D/2D (de dimensión 1 representada en 2 dimensiones) o 2D/2D (líneas rectas o curvas, la frontera cerrada de un triángulo, de un cuadrilátero, etc.) o bien figuras 3D/2D (cubos, esferas, etc.). La identificación visual de estas figuras se basa en leyes de organización perceptiva, y estas figuras se pueden usar para representar objetos reales u objetos matemáticos. (p. 39)

Duval (1995, 1998) denomina aprehensión operativa a la modificación de una figura para considerar subconfiguraciones, es decir, la habilidad para, al ser presentada una figura geométrica, generar distintos tipos de descomposición dimensional de la figura para observar sus componentes y relaciones involucradas. Así mismo, denomina aprehensión discursiva a asociar afirmaciones matemáticas a una configuración, o sea, tener la posibilidad de a partir de una instrucción representada de forma escrita o verbal se pueda asociar la figura geométrica, en este caso llamada, configuración. Es necesario plantear formas para estimular este tipo de aprehensiones en las y los estudiantes al momento de enseñar geometría.

El proceso de coordinar los distintos tipos de aprehensión: aprehensión discursiva y aprehensión operativa que efectúan las y los estudiantes, cuando resuelve un problema de geometría según Duval se entiende como el proceso configural, pues se genera a partir de una interacción entre la configuración inicial y sus posibles modificaciones con las afirmaciones matemáticas adecuadas. La siguiente Figura representa esta coordinación.

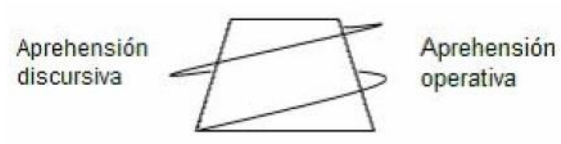


Figura 18. Coordinación de la aprehensión discursiva y operativa en la resolución de problemas de geometría. Torregrosa (2007, p.289)

Duval (1999) define un registro de representación como un sistema semiótico que tiene funciones cognitivas fundamentales para un consciente funcionamiento cognitivo entre los componentes que contiene dicho sistema. Además, enfatiza que estas representaciones son las representaciones mentales realizadas y expresadas por los individuos a través del uso de signos, es decir, no son más que una manera de materializar en forma visible las producciones mentales que surgen.

Duval (2004) señala que todo registro de representación semiótica debe cumplir ciertas actividades cognitivas inherentes a toda representación semiótica: producir la representación de algún objeto y permitir la transformación de esa representación en otra por medio de una conversión y tratamiento. De esta manera, el sistema semiótico que permite estas actividades es llamado registro de representación semiótica, por ejemplo, las figuras geométricas como la elipse o la circunferencia, entre otras.

Además, Duval (1999), indica que los sistemas de representación semiótica tales como el gráfico, algebraico, figural o lenguaje natural se catalogan como registros de representación, aplicados en la elipse se muestran en la tabla 1.

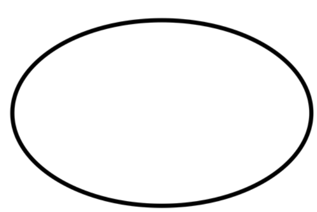
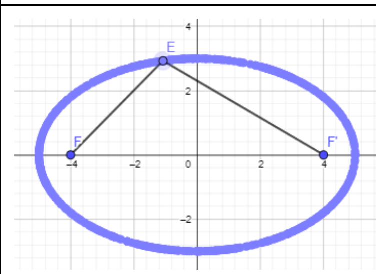
Registro lenguaje natural	Registro figural	Registro gráfico	Registro algebraico
Elipse			$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

Tabla 1.Distintos registros de representación presentados por Duval (1994)

Las representaciones semióticas pueden sufrir transformaciones de dos tipos: los tratamientos y conversiones. Un tratamiento de una representación es la transformación de esta representación en el mismo registro donde se formó. Por ejemplo, convertir la ecuación general de la elipse a su forma canónica (ordinaria), la que permite conocer el valor de los semiejes y las coordenadas del centro, es un tipo de transformación que ocurre dentro del registro algebraico. Por otro lado, la conversión consiste en cambiar de un registro a otro, como en el ejemplo mostrado en la Tabla 1.

Duval (1999) afirma que para la comprensión conceptual de un objeto matemático es necesaria la articulación de varios registros de representación semiótica y, además es necesario no exista la confusión entre los diferentes registros cuando se esté trabajando con un mismo objeto. En consecuencia, en el sentido del autor, si no hay articulación entre dos representaciones semióticas diferentes significa que no hay comprensión sobre que se está trabajando con un solo objeto, sino que se pensará que cada representación es un objeto independiente.

Esta idea que podría parecer simple es parte fundamental de la teoría de Duval y él lo esquematiza de la siguiente manera (Figura 19), donde cada objeto accesible a nuestros sentidos ya sea por medio de una percepción visual o manual con algún mecanismo físico o virtual (instrumentalmente) pueda asociar a un mismo objeto matemático, las distintas representaciones que existe de él mismo.

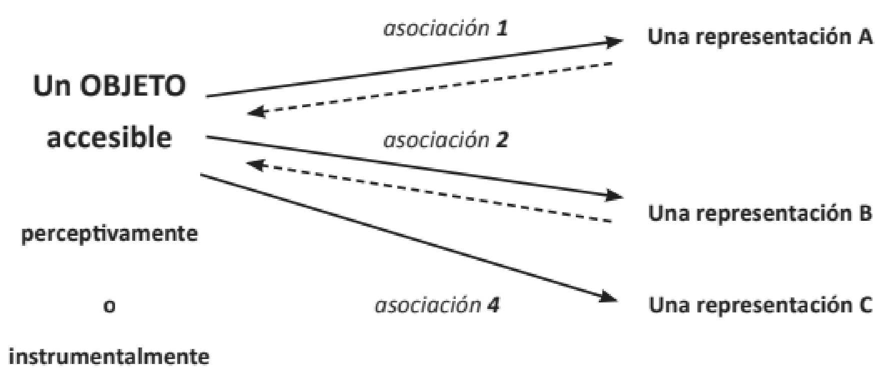


Figura 19. Procedimiento asociativo en situación de accesibilidad directa o instrumental a los objetos de estudio. Duval (2016, p.68)

Duval (2016), además caracteriza en la tabla 2 las cuatro entradas clásicas de los estudiantes al enfrentarse a un problema de Geometría.

	BOTÁNICO	AGRIMENSOR geómetra	CONSTRUCTOR	INVENTOR artesano
1. Tipo de operación sobre las FORMAS VISUALES, requerida por la actividad propuesta	Reconocer formas a partir de cualidades visuales de un contorno: se privilegia UNA forma particular como TÍPICA	Medir los bordes de una superficie: sobre un TERRENO o sobre un DIBUJO (variación de escala de magnitud y, por tanto, de procedimiento de medición)	Descomponer una forma en trazos construibles con ayuda de un instrumento. Hay que pasar (a menudo) por TRAZADOS AUXILIARES que no pertenecen a la figura "final"	**Transformar unas** formas en otras. Hay que agregar TRAZOS REORGANIZADORES en la figura final para inicializar esas transformaciones
2. Cómo se movilizan las PROPIEDADES GEOMÉTRICAS con respecto al tipo de operación	No hay relaciones entre las diferentes propiedades (no hay definición matemática posible)	Las propiedades son criterios de selección para las mediciones que se deben hacer. Solo son útiles si remiten a una fórmula que permita un cálculo	Como restricciones de un orden de construcción. Ciertas propiedades se obtienen mediante una sola operación de trazado, las otras exigen varias operaciones	Implícitamente mediante remisión a una red más compleja (una trama de rectas para la geometría plana o una trama de intersecciones de planos…) que la figura de partida

Tabla 2. Tabla de las cuatro entradas clásicas de la geometría. Duval (2016, p.16)

Duval (2016) señala que la mirada del constructor es la necesaria o deseada para que el estudiante genere los objetos matemáticos, a partir de sus distintos componentes, en este caso, se pretende generar la elipse como una figura construible a partir de dos diferentes mecanismos, en nuestro caso, primero es trazando con el método del jardinero y posteriormente con elipsógrafo de Proclo.

Con base en la problemática señalada, así como en los elementos teóricos seleccionados como sustento teórico argumentativo de la propuesta, es necesario plantear un objetivo general del trabajo, el cual sintetice de la forma más completa la propuesta. En dicho objetivo, se considera cuál es la acción principal en la que gira el trabajo, así como el producto final a obtener, de forma que será material de análisis y discusión el cumplimiento de éste una vez puesta en práctica la secuencia didáctica.

4. Metodología

Este capítulo plantea las acciones concretas que se realizaron para cumplir los objetivos específicos propuestos y el objetivo general. Clasificamos las diversas acciones realizadas en tres fases o etapas: una que se centró en la investigación bibliográfica y organización de información, otra con el diseño de las actividades y la puesta en escena de éstas y finalmente, una tercera fase que englobó el análisis de los resultados y las conclusiones del trabajo. Cada acción metodológica tuvo como fin cumplir uno o más objetivos específicos.

Fase1: Revisión bibliográfica, definición de la problemática y selección del mecanismo articulado.

La primera fase incluye los encuadres curriculares de la problemática, así como las tareas de investigación, análisis y síntesis de información que fue de interés para justificar la problemática, argumentar y desarrollar ideas que proveyeron de estructura y solidez al proyecto que se desarrolló. También se escogimos el mecanismo articulado en torno al que se diseñaron las actividades.

Acciones:

1) Revisión de planes y programas de estudio de estudio de Matemáticas III y Geometría Analítica a nivel bachillerado, con el fin de ubicar curricularmente la problemática planteada.
2) Comentar y discutir capítulos de libros y artículos referentes a la enseñanza de geometría con mecanismos articulados.
3) Selección del mecanismo articulado trazador de elipse.
4) Investigar y recopilar toda la información bibliográfica del elipsógrafo de Proclo.

Fase 2: De la construcción virtual del mecanismo y el diseño de actividades

En esta etapa se exponen las acciones que tuvieron como fin la construcción del Applet del elipsógrafo de Proclo haciendo uso del Software GeoGebra y a partir de este, se plantearon reactivos que integraron las actividades. Junto a ello, se buscaron diversos contextos que sirvieran como referencia e interés para la introducción del mecanismo y las situaciones problema.

Acciones:

1) Construir diferentes applets que tengan una configuración que trace la elipse, en particular se construyó el elipsógrafo de Proclo.
2) Realizar un análisis del elipsógrafo de Proclo según lo entendido por visualización, así como una búsqueda por distintas configuraciones que puedan ser útiles para hacer una descripción de la elipse a partir del mecanismo articulado.
3) Proponer contextos apropiados para incorporar en el diseño de la secuencia de actividades, que promuevan y destaque los elementos geométricos del elipsógrafo.
4) Hacer un análisis a priori de la secuencia de actividades, incluyendo y reportando algunos de los resultados esperados.
5) Determinar la duración que se necesita para realizar ambas secuencias y el número de sesiones en las que se debe descomponer la puesta en escena.

Fase 3: De la puesta en escena, recolección, organización y análisis de resultados.

La tercera fase se compone de las acciones que se realizaron para llevar a cabo la puesta en escena de la secuencia de actividades, desde las cuestiones técnicas: dadas las condiciones de la contingencia sanitaria, hasta la selección de la población muestral, también la organización y el análisis de los resultados. Finalizando con las conclusiones desprendidas de la puesta en escena y la escritura final del trabajo de tesis.

Acciones:

1) Seleccionar la institución de educación media superior que permita acceder la participación de al menos un grupo de estudiantes (al menos 5) hayan cursado en el rango de 1 año la materia de Matemáticas III.
2) Diseñar los diferentes instrumentos para recoger la información. En primera instancia se plantearon tablas que involucran los tipos de aprehensión y los tres problemas del aprendizaje de Geometría enlistados por Duval en referencia a la visualización.
3) Poner en escena a estudiantes la secuencia de actividades, priorizando la manipulación del virtual del mecanismo y generando debate entre los estudiantes.
4) Recolectar los resultados: acciones, comentarios, ideas o propuestas que lleven a los estudiantes a dar respuesta a las actividades.
5) Hacer un análisis a posteriori de los resultados y comparar con el análisis a priori.
6) Comenzar a plantear conclusiones respecto a la pertinencia de las actividades, así como el uso de los mecanismos articulados.
7) Plantear líneas de posibles áreas de oportunidad para próximas puestas en escena.
8) Redacción y presentación de la tesis.

5. Diseño de las secuencias y análisis a priori

En este apartado se presenta el diseño de las secuencias de actividades, haciendo un repaso de los elementos teóricos que en las que se basa éste, además se hará una descripción del elipsógrafo de Proclo, que es el mecanismo central para analizar del proyecto.

Son dos secuencias de actividades, cada una se compone de una actividad de inicio, desarrollo y cierre. Cada sección espera generar en los equipos de estudiantes un diálogo que genere procesos de visualización y les permita "ver" lo que no está presente a primera vista.

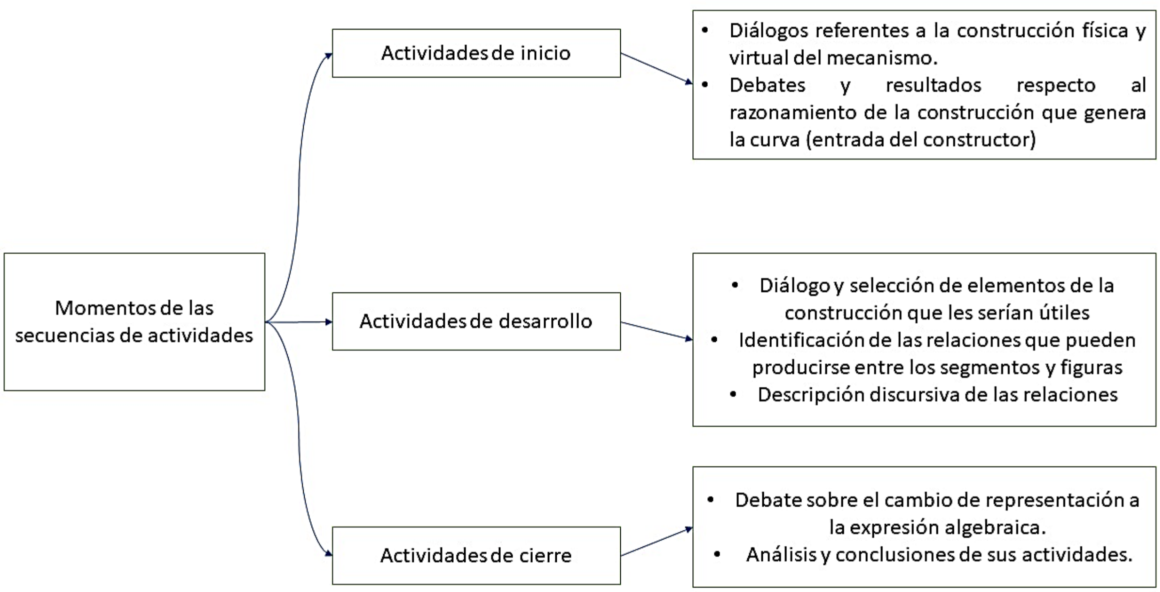


Figura 20. Cuadro conceptual sobre los 3 momentos de cada secuencia didáctica: inicio, desarrollo y cierre. Elaboración propia.

La primera secuencia es introductoria y no involucra al elipsógrafo de Proclo, lo que busca es que el grupo de estudiantes tenga un primer acercamiento a la definición de elipse como lugar geométrico y se familiarice con esta forma de trabajo, donde se privilegian las descripciones de lo encontrado, sobre las tareas de carácter puramente algebraico. Mientras que, en la segunda, todo el análisis y las actividades de los estudiantes se concentraron en el elipsógrafo de Proclo. Por motivos de la emergencia sanitaria por la que actualmente pasa el mundo y a raíz de ello el inicio de un periodo de clases virtuales, fue imposible que se construyeran de manera física el elipsógrafo y la manipulación quedó reservada exclusivamente virtual. A continuación, se presentarán más detalles sobre este elipsógrafo, así como su construcción virtual y la deducción de la ecuación de la elipse a partir de dicho mecanismo.

5.1 ELIPSÓGRAFO DE PROCLO

Como se ha mencionado antes, existen distintos tipos de elipsógrafos, sin embargo, para aterrizar la construcción fue preciso seleccionar uno en particular. Se seleccionó el elipsógrafo atribuido a Proclo (410 - 485), el cual consistente en dos barras rígidamente unidas con dos ranuras por las que se deslizan dos pivotes de una tercera barra. Cualquier punto de esta última barra traza una elipse, en la Figura 11 se muestra un esquema del elipsógrafo.

En la investigación de Cortés y Soto (2012), se plantea la propuesta para trabajar con mecanismos articulados físicos los cuales fueron adecuados a las situaciones en cuanto a su tamaño y peso, donde se llegó a la decisión que el mejor material utilizado en los diseños de los mecanismos fue el acrílico. Sin embargo, debido a las condiciones de emergencia sanitaria al que nos enfrentamos en el 2019 se vieron interrumpidas las clases presenciales y pensamos que no sería trivial para estudiantes de bachillerato construirlos individualmente en su casa. Por ello optamos por transportar el diseño de intervención hacia actividades virtuales.

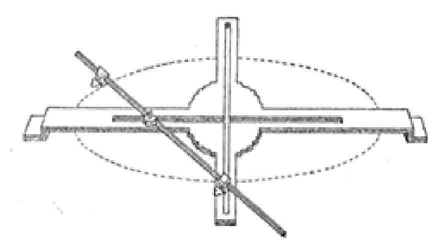


Figura 21. Elipsógrafo de Proclo. Mozo (2007, p.20)

Existe una larga tradición de uso de mecanismos articulados, en particular el elipsógrafo de Proclo nos permite explorar el movimiento de la barra, la identificación de segmentos fijos y variables, y posteriormente, encontrar la ecuación de la elipse en su forma canónica mediante la incorporación de recursos como los criterios de congruencia entre triángulos y el teorema de Pitágoras.

5.1.1 CARACTERÍSTICAS DE LA CONSTRUCCIÓN VIRTUAL

La pandemia puso como un gran reto en la enseñanza, la migración del trabajo a un espacio virtual, por ello el incorporar el uso de tecnología, en este caso el software GeoGebra, será una parte también fundamental de nuestro estudio, tanto para la construcción virtual del elipsógrafo de Proclo, como para la propuesta de diseño de las actividades didácticas. Es importante prestar especial atención a la construcción virtual, así como al planteamiento de actividades que involucren herramientas tecnológicas pues, Iranzo y Fortuny (2009) señalan que las posibilidades de movimiento y limitaciones del software tienen una influencia en las estrategias de resolución de problemas de las y los estudiantes, es tanta la influencia que pueden tener estas herramientas que pueden llegar a alterar las concepciones de los conceptos geométricos involucrados.

Adicionalmente, con la intención de apoyar al estudiante a desarrollar habilidades de visualización, se propone el trabajo colaborativo que aporte al debate y socialización de conocimientos previos entre ello, así mismo, incorporar la utilidad de mecanismos articulados digitales como lo propone el proyecto de Cortés y Soto (2012), el cual busca aportar al desarrollo del cambio de ver las curvas, a descomponer y reconfigurar las formas, para encontrar nuevas propiedades de la elipse como lugar geométrico, mismo que proporcionaron argumentos geométricos para dar solución a los problemas planteados.

A continuación, se muestra una representación de la construcción virtual del elipsógrafo. Esto con la intención de mostrar de una forma explícita el trazado de la elipse y las propiedades fijas y móviles de los segmentos de recta involucrados.

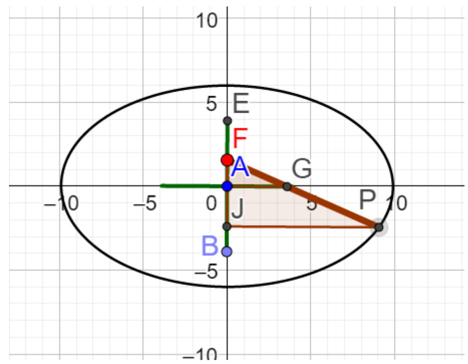


Figura 22. Elipsógrafo de Proclo (construcción virtual utilizando GeoGebra)

La descripción del funcionamiento de la construcción virtual se conforma por:

- Los 4 canales por donde se mueven los pivotes son de la misma longitud.
- Los puntos F y G representan los pivotes sobre la barra y se "mantienen" sobre los canales.
- El segmento FP es de longitud fija, al representar la barra del elipsógrafo, P es el punto que traza la elipse.

El uso de un software de geometría dinámica como GeoGebra permite construir objetos y desplazar una parte de éstos. Si el objeto ha sido construido respetando sus proporciones y propiedades geométricas, se pueden observar cuáles son las cantidades que varían y cuáles no al desplazar o arrastrar la figura. Sin embargo, el hecho de poder desplazar objetos para observar elementos invariantes, si bien es una posibilidad que el software brinda, solo tendrá una verdadera significancia si la o el alumno es capaz de entender este proceso, de tal forma que pueda serle útil al momento de resolver las situaciones problema presentadas.

5.1.2 ECUACIÓN DE LA ELIPSE TRAZADA POR EL ELIPSÓGRAFO DE PROCLO

En esta sección se presenta la obtención de la ecuación de la Elipse trazada por el mecanismo en su forma canónica, la cual se determinó a partir del análisis del elipsógrafo de Proclo: su constitución y las relaciones geométricas encontradas. Para mayor claridad nos guiaremos de la Figura 23. En la figura se muestra una simulación de la construcción en GeoGebra del elipsógrafo de Proclo. Vale decir que esta construcción sólo es capaz de trazar media elipse y la otra mitad la trazamos con la herramienta de espejo utilizada en el punto P, que es el punto que traza la Elipse.

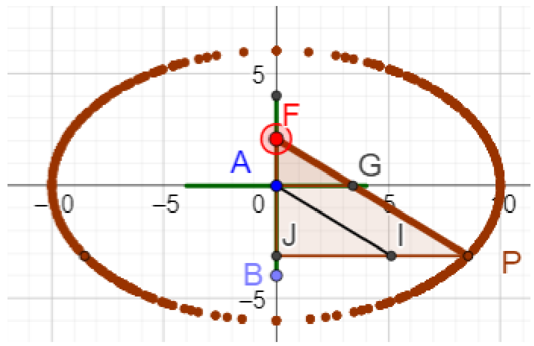


Figura 23. Construcción virtual del elipsógrafo de Proclo, incluyendo el segmento AI como trazo auxiliar. Pr es el reflejo del punto P porque el applet traza únicamente la mitad de la elipse. Elaboración propia.

De la Figura anterior, retomaremos algunos elementos, con el fin de deducir la ecuación de la elipse en su forma ordinaria. Para esto, incorporamos el segmento AI como trazo auxiliar, para formar un triángulo semejante a JFP que es el triángulo JAI. Estos triángulos se muestran en la Figura 24, para mayor practicidad de la deducción, se le denominó con letras a las longitudes de los lados.

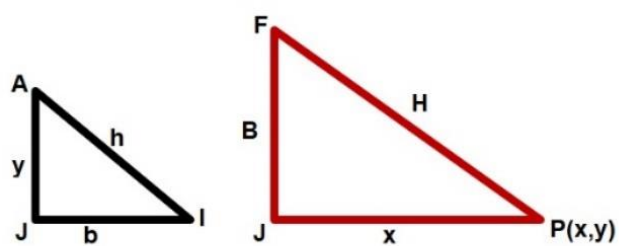


Figura 24. Triángulos semejantes que salen de la configuración del elipsógrafo de Proclo. Elaboración propia.

También, denominaremos a las coordenadas del punto P como x y y, el valor que toman estas coordenadas coincide con la longitud de un lado de un triángulo respectivamente. El valor de y se le asigna al triangulo de menor tamaño porque A está colocado en el origen. Tomando en cuenta que hay semejanza entre triángulos, podemos afirmar las siguientes relaciones:

$$\frac{y}{b} = \frac{B}{x}$$

$$\frac{H}{B} = \frac{h}{y}$$

$$\frac{H}{h} = \frac{B}{y}$$

Las cuales son las relaciones que guarda la proporción entre los lados de los triángulos, al ser estos semejantes. De la tercera ecuación, despejaremos B y queda:

$$B = \frac{Hy}{h}$$

Posteriormente, utilizando el teorema de Pitágoras, tenemos las ecuaciones:

$$h^2 = y^2 + b^2$$

$$H^2 = B^2 + x^2$$

Sustituyendo el valor de B en la última ecuación, obtendremos:

$$H^2 = \left(\frac{Hy}{h}\right)^2 + x^2$$

$$H^2 = \frac{H^2 y^2}{h^2} + x^2$$

Dividimos todo entre H^2, reacomodamos los términos y obtenemos:

$$\frac{x^2}{H^2} + \frac{y^2}{h^2} = 1$$

Donde los valores de H y h son constantes determinadas por la longitud de la barra más larga del elipsógrafo de Proclo. Podemos darnos cuenta de que esta ecuación obtenida tiene la forma de una ecuación ordinaria de Elipse con centro en el origen. Por ejemplo, si la barra H tuviera un valor de 10 unidades, el valor de h sería igual a 4 unidades y la ecuación de la Elipse sería:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$$

La gráfica de la Elipse que describe la ecuación anterior se muestra en la Figura 25.

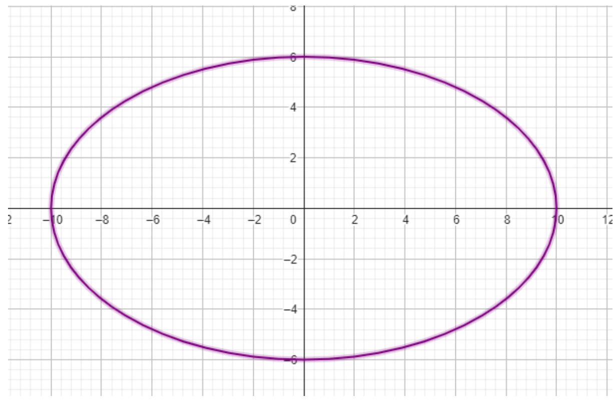


Figura 25. Gráfica de la ecuación de la elipse obtenida. Elaboración propia.

A continuación, se presenta los argumentos más trascendentes que llevaron a que culminaron en el diseño de las secuencias didácticas. Posteriormente se presentará el análisis a priori de las actividades.

Secuencia 1.

Se plantea el problema a los estudiantes de trazar una elipse mediante un mecanismo que posee las propiedades geométricas siguientes: las tachuelas fijas que representan los focos, así como la longitud constante del hilo que representa la constancia de la suma de las distancias de cualquier punto de la curva a los focos.

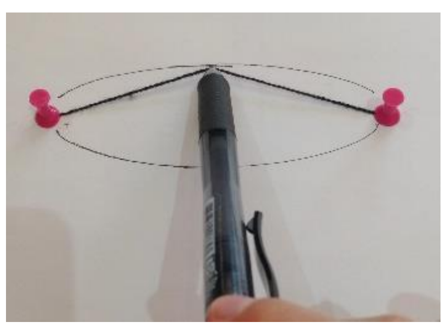


Figura 26. Imagen tomada por una estudiante, en ella indica cómo trazó la elipse utilizando el método del jardinero.

Esto siguiendo la idea de Duval (2016) donde afirma que, las figuras geométricas no se dibujan a mano alzada, se construyen con ayuda de un instrumento que restringe el movimiento de la mano. Esto porque un instrumento permite producir una forma exacta, o al menos más cercana a la propiedad geométrica que posee. Se produce una invariancia en el trazo, que se ve reflejada visualmente.

Arcavi (2003) afirma que “La visualización ofrece un método de ver lo invisible” (p. 216). Este “ver” puede ser solo mental y entonces involucra objetos no ostensivos, es decir mentales, o bien, puede estar relacionado con una representación física y entonces ser objeto perceptible, en este caso se busca promover que los estudiantes pasen de las construcciones hechas con los objetos físicos a figuras geométricas, para apoyar este tipo de visualización se utilizaron applets de GeoGebra que simulaban los mecanismos y que les permitía manipularlos. Durante la manipulación de los Applets, se hacían preguntas como las siguientes:

- *“Coloca el punto en la posición que tú quieras y observa el triángulo que se forma, ¿cuál es su perímetro? Explica cómo lo calculaste.”*
- *¿Qué ocurre con el perímetro del triángulo si cambias de lugar P? (dejando los puntos F y F’ fijos)*

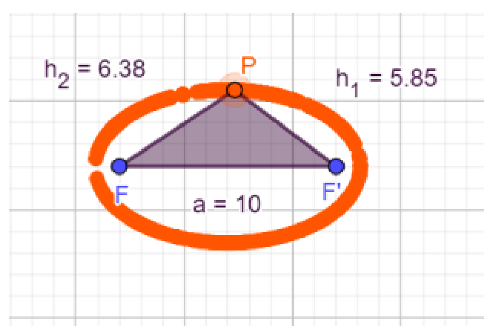


Figura 27. Elipse trazada utilizando una simulación el GeoGebra del método del jardinero, se indica la longitud de cada lado del triángulo interior.

Visualización y discurso constituyen dos tipos de funcionamiento cognitivo que a menudo se han opuesto, a pesar de que, la articulación entre ellos es absolutamente decisiva para el aprendizaje de la geometría, pues la actividad geométrica necesita una coordinación cognitiva de esos dos registros de representación. Para ello, se analizan y proponen reactivos como los siguientes:

- Completa la siguiente oración: "La elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano que...
- ¿De qué longitudes o segmentos se compone la ecuación que describe la elipse?

Segunda secuencia

El objetivo de esta segunda secuencia es determinar los elementos geométricos de la elipse a partir de la manipulación y análisis del elipsógrafo de Proclo. Para ello se buscará promover la mirada del constructor para que conciban la elipse a partir de la construcción (simulada) del mecanismo y posteriormente puedan encontrar la ecuación canónica.

En esta segunda secuencia se plantea el problema de describir a la elipse a partir de las partes de la construcción del elipsógrafo de Proclo, para esto es necesario que se recurra a la descomposición dimensional de la curva. Esta es una actividad que deberán desempeñar los estudiantes para poder comenzar a operar con los segmentos presentes y poder generar las relaciones correspondientes. Lo anterior es incluido de en la siguiente actividad propuesta:

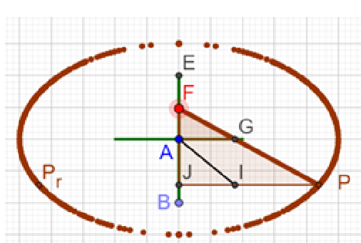
Figura	¿Qué ves?
	a) Dibuja los triángulos JAI y JFP • Los triángulos semejantes como en este caso guardan proporcionalidad entre las razones de sus lados

Figura 28. Ejemplo de actividad donde se les solicita a los alumnos una descripción de la figura presentada.

a) *Ahora, vamos a centrar nuestra atención en las relaciones que existen entre las hipotenusas y los catetos ambos triángulos. ¿Cómo expresarías la razón entre el valor de la hipotenusa y uno de los catetos?*

Duval (1998) afirma que una deconstrucción dimensional representa una revolución cognitiva para el funcionamiento de la visualización icónica o no icónica. La deconstrucción dimensional de las formas es un cambio repentino de mirada que va en contra de todos los procesos de organización y de reconocimiento perceptivo de la forma, pero que representa al funcionamiento profundo de la visualización en geometría. Es por lo que se busca que los estudiantes recurran a buscar elementos más fundamentales que puedan darles una mayor aprehensión de la geometría involucrada.

Finalmente, se busca a partir de este mismo concepto de deconstrucción dimensional para centrar la atención de los estudiantes en el punto que traza la elipse y describir las constricciones que tiene en su movimiento para trazarla, para esto último se recurrirá al uso del plano cartesiano. El applet que acompaña esta última actividad se muestra a continuación, así como un ejemplo de cómo se introducirán las coordenadas cartesianas:

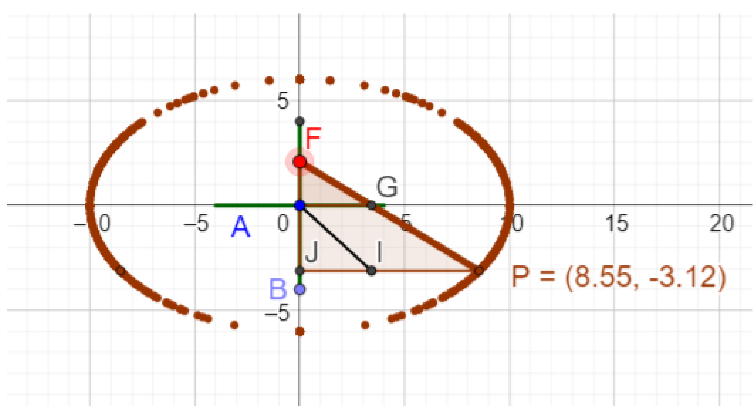


Figura 29. Applet del Elipsógrafo de Proclo en GeoGebra, se indican las coordenadas del punto que traza la elipse.

- *Para deducir la ecuación de la elipse vamos a ubicar las coordenadas del punto P como (x, y) porque al trazar la elipse van cambiando su valor. ¿A qué lados del triángulo corresponden los valores de x y y?*

5.2 ANÁLISIS A PRIORI

En esta sección se presentan las características de la secuencia desde una perspectiva diferente, se busca analizar e intenta predecir cuáles son las posibles respuestas o caminos tomados por los estudiantes al momento de realizar las distintas actividades.

La primera actividad de la primera secuencia se caracteriza porque busca que los estudiantes centren su atención a las características propias de la construcción física: la posición fija de las tachuelas y la invarianza de la longitud del hilo. Por ejemplo, para el siguiente reactivo se espera la siguiente respuesta:

- ***¿Cómo es esta distancia en comparación con la longitud del hilo? ¿Por qué? Respuesta esperada:*** Igual, porque la distancia del hilo no cambia durante el trazo.

Y es a partir de este resultado, que se espera en las siguientes actividades de la secuencia, se concentren las discusiones sobre esta característica y con ello, quede como conclusión que la propiedad que tienen puntos sobre una elipse, o bien, en este caso los puntos que siguió la trayectoria del lápiz que trazó la curva.

Finalmente, en esta primera parte se utilizó un applet que introdujera de forma intuitiva la ecuación de la elipse y se pidió a los estudiantes que hicieran un análisis sobre ella y los valores de la curva que están involucradas.

En la segunda secuencia se buscó centrar la atención de los estudiantes en el problema de describir la construcción del elipsógrafo de Proclo, así como los elementos que restringen el movimiento que tiene el punto que traza la elipse. Un ejemplo del tipo de respuestas esperadas por los estudiantes al momento de manipular el applet son las siguientes:

- *¿Identificas segmentos cuya longitud no cambie?*
  Respuesta esperada: FK, FG, GK, tamaño de las barras

- *¿Identificas segmentos de longitud variable?*
  Respuesta esperada: AF, AG

Posteriormente, se centró la discusión en los triángulos semejantes que se forman al unirse algunos puntos sugeridos, esto a partir de la estrategia que se diseñó para encontrar la ecuación a partir de las relaciones entre los segmentos que se tienen.

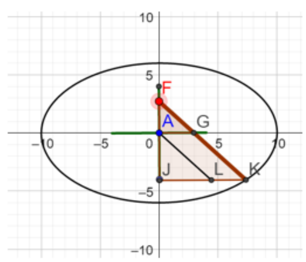
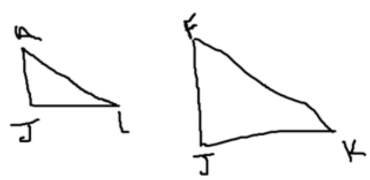
Figuras	**¿Qué ves?**
	a) Dibuja los triángulos JAL y JFK 

Figura 30. Respuestas esperadas de la actividad de desarrollo 2, en la cual se les solicita a los estudiantes trazar los triángulos internos de la elipse JAL y JFK.

A partir de estas descripciones se espera que los estudiantes puedan encontrar las relaciones que hay entre los lados de ambos triángulos a partir de la semejanza entre estos triángulos. Posteriormente con estas relaciones entre los segmentos, deducir la ecuación de la elipse que se traza el elipsógrafo de Proclo.

La idea es que durante el transcurso de esta segunda secuencia se pueda obtener una expresión algebraica como resultado de una discusión de carácter geométrico sobre las figuras involucradas en la construcción inicial.

6. Puesta en escena y análisis a posteriori

En este capítulo se comentan las condiciones de la implementación de las secuencias de actividades, así como posteriormente se hace el análisis sobre los resultados obtenidos de parte de los estudiantes, a partir de los elementos teóricos propuestos por la teoría de registros de representación semiótica de Duval que nos interesó observar.

Cuando se comenzó este trabajo la propuesta original era realizar el trabajo con el elipsógrafo de Proclo en físico, puesto que se buscaba que el proceso de manipulación de los estudiantes fuera más profundo, así como la identificación de los segmentos fijos y variables fuese más evidente, en especial, al percibir las longitudes que permanecen constantes. Sin embargo, justo cuando llegó el momento de llevar a cabo la implementación de las actividades, se desató la contingencia sanitaria de la COVID-19 y con ella vino la suspensión de clases presenciales y posterior regreso a las actividades de forma virtual, lo cual sin duda fue un reto no sólo al replantear las actividades que teníamos sino también, al ponerlas en práctica.

La mayor parte de la secuencia de actividades pasó a la interface virtual y aunque sí hubo una problemática planteada utilizando lápiz, tachuelas e hilo, la realidad es que prácticamente todas las actividades se centraron en cuestionamientos que implicaron manejar construcciones virtuales hechas previamente en el software GeoGebra y puestas a su disposición, en conjunto con un cuestionario en Word, a manera de introducción sobre el tema de elipse, la primera secuencia tenía como objetivo la reproducción del método del jardinero para encontrar la ecuación de la elipse y posteriormente, la segunda secuencia tuvo como fin la exploración virtual del elipsógrafo de Proclo, para identificar los segmentos trascendentes en la construcción y se lograra deducir la ecuación de la elipse en su forma ordinaria.

Las actividades se diseñaron para implementarse en diez sesiones de una hora: cinco para las actividades pertenecientes a la primera secuencia y otras cinco para las actividades de la segunda. Dejando a cada secuencia con una hora para su actividad introductoria, dos horas para la actividad de desarrollo y dos para la actividad de cierre.

Todas las implementaciones fueron planeadas para realizarse de manera virtual, haciendo uso de la plataforma zoom donde se tenía un contacto "directo" entre los estudiantes y la profesora, quien fungía como observadora y solo se manifestó al momento de resolución de dudas, así mismo, el cuestionario dónde se encontraban tanto las situaciones problema como los hipervínculos para acceder a los applets de GeoGebra se hicieron llegar cada día mediante la plataforma Google Classroom, pues era esa la vía institucional de entrega de materiales virtuales, recepción y calificación de trabajos, tareas y exámenes.

Las características del grupo y de los equipos de trabajo fueron las siguientes:

- El grupo estaba conformado por 23 alumnos, los cuales se dividieron voluntariamente en equipos de trabajo conformados por 4-5 participantes en cada uno.
- Todos eran estudiantes del tercer semestre de bachillerato, con una edad promedio de 14 años.
- Los grupos focales de observación fueron 2 equipos, uno comprendido solamente por integrantes mujeres y uno solamente por hombres.
- Al momento de trabajar los estudiantes fueron separados mediante la función de grupos de Zoom, la cual permite que por tiempos definidos los participantes estén únicamente en comunicación con su equipo asignado.
- Hubo un observador fijo en cada uno de los equipos, quien tenía una doble función, pues además de recopilar la información de interés, estuvo atento a las dudas que manifestaban los estudiantes, con la intención de resolverlas y que pudieran avanzar.

Las implementaciones se pudieron grabar, sumado a las hojas de observación que se habían elaborado previamente para obtener resultados específicos de las discusiones de la implementación. A pesar de que se había estimado un tiempo para cada sesión y actividad, como se mencionó anteriormente, la realidad fue que extendieron más de lo planeado, pues hubo confusión al momento de la interpretación de las instrucciones y más aún en la redacción de las respuestas.

6.1 ANÁLISIS A POSTERIORI

En este subcapítulo se presenta el análisis de los resultados, el cual se realizó a partir de las evidencias recolectadas durante la puesta en escena de las secuencias de actividades. Las evidencias consisten en grabaciones de las sesiones de implementación, así como las hojas de trabajo entregadas por los equipos al finalizar las actividades.

El análisis además toma en cuenta las observaciones por equipos, dado que todas las actividades fueron siempre planteadas para trabajar de manera grupal. Cabe destacar que esto se hizo con la intención de generar no solo respuestas en las hojas de trabajo, sino también, propiciar un debate sobre la resolución de las problemáticas, dado que las discusiones hechas durante la actividad matemática son muy útiles para comprender cuál es el razonamiento o camino seguido por las estudiantes.

Así mismo, el análisis realizado de los resultados de cada actividad busca observar, de ser el caso, elementos descritos ya previamente por Duval. Fue de especial interés identificar cuándo sucede el momento en que el estudiante genera una figura mental de un objeto presentado a través de los diferentes registros de representación y cómo ocurre la sinergia entre ellos.

Esto con el fin de distinguir cual tipo de actividad podría favorecer la visualización y con ello, una aprehensión operativa. Posteriormente, indagar sobre cómo es que surge (si es que la hay) la coordinación figural, dando muestra de ello las acciones, razonamientos y/o argumentos que realicen los estudiantes para establecer los registros de representación de la elipse.

Es de interés, además, observar cuáles son las formas que los estudiantes toman para buscar resolver cada situación problema, según lo planteado anteriormente algo que esperábamos obtener como resultado es que fuera la entrada del constructor la que predominara al momento de abordar los problemas, pero fueron los recursos con los que contó cada equipo los que determinaron el tipo de entrada y enfoque que le dieron a las actividades. Sin embargo, algo curioso y recurrente que se presentó fue la necesidad que hubo de parte de los alumnos por tomar las mediciones de los segmentos que conformaban las figuras, por ejemplo, si se hacía un cuestionamiento que involucraba a un triángulo, antes de analizar la pregunta se procedía a medir y determinar la longitud de cada lado, pensando seguramente que esa información sería importante para el resultado.

Cabe señalar que esta es una característica típica de la entrada del agrimensor y conlleva mayor sentido si se toma en cuenta que un objetivo de estas actividades tenía que ver con deducir la ecuación de la elipse, es decir, al momento de buscar relaciones entre los segmentos o áreas, sin duda, la magnitud se convierte en un dato de suma relevancia.

La forma en la que se presenta el análisis es por actividad, es decir, separando cada una de las seis actividades, tres relativas a la primera secuencia y tres de la segunda.

Actividad de inicio

En la primera actividad se solicita a las estudiantes que con ayuda de los materiales: tachuelas, hilo, hojas de papel y lápiz, tracen dos curvas: en primera instancia, una circunferencia y en segundo lugar una elipse.

La construcción de la configuración que daba como resultado a la circunferencia dio pie a una serie de comentarios de parte de las integrantes del equipo que sirvieron de guía a la compañera que trazó la curva y cabe señalar que los diálogos más destacados que se rescataron en esta parte fueron los siguientes:

En el trazo de la primera figura:

- *Estudiante 1: "A ver, puse la tachuela y le amarré el lápiz, pero ¿cómo, nomás le doy vueltas y así?"*

- *Estudiante 2: "Pues eso dice que hagas, ¿qué dibujas?"*

- *Estudiantes 1: "Una rueda"*

- *Estudiante 3: "Es un círculo, ¿le tomaste foto?"*

Figura 31. Alumna trazando la circunferencia fijando un punto fijo con una tachuela y atando un lápiz al otro extremo.

Se puede resaltar cómo lograron pasar del registro de representación discursivo (en las instrucciones) al registro figural (trazo de la circunferencia). Se cumplió el objetivo de obtener la circunferencia pedida, sin embargo, al momento de describir las características de ella, sólo se mencionó que era como una rueda. Lo cual nos indica que hasta este momento las estudiantes recurrieron a objetos de su vida cotidiana que se asemejaban a lo que veían y no se mostró un paso de la visualización icónica a la no icónica, es decir, lograron traducir las instrucciones en una figura, pero no tradujeron la medida fija de la cuerda hacia las características de la figura.

Posteriormente, en la parte que se les pide que apliquen el método del jardinero, que les ayude a trazar la elipse y posteriormente hacer una descripción de lo que ven, de esta actividad se rescató el siguiente diálogo:

- Estudiante 3: "Entonces en la respuesta de la curva hay que ponerle que es un óvalo".

- Estudiante 2: "Sí, y en sus principales características hay que poner que es angosto y es largo de los lados".

Figura 32. Alumna muestra cómo tensa el hilo con el lápiz antes de trazar la elipse.

Este diálogo lo que nos permite observar es que apenas logran describir alguna característica de las formas, pero no logran verla como figura. Es importante señalar que las estudiantes tuvieron dificultades para dibujar la elipse completa (como curva cerrada), se quedaban hasta dibujar la mitad, esto creemos que pudo ocurrir por dos razones:

1) La construcción misma impedía que fuera natural que en un solo trazo se completara la curva y eso les dificultó pensar que lo que obtendrían sería una curva cerrada
2) Hasta este momento en las hojas de trabajo no habría nada explícito referente a la elipse, por su parte todo era referenciado a la curva y ellas tenían la idea de curva como una figura no cerrada.

Las descripciones que se hicieron hasta este momento se quedaron hasta una parte muy superficial, es decir, no se profundizó más allá de las características más prominentes de las figuras que se tienen, podemos observar las estudiantes tienen noción de la elipse en el registro figural, sin embargo, hasta este momento no podríamos afirmar que comprenden a la elipse como una figura geométrica, sino solamente como un dibujo hecho a partir de una construcción específica.

Hasta este momento, se podría hablar de que los objetos geométricos con los que están trabajando solo se lograron identificar las características más predominantes, sin hacer un análisis más profundo de la figura obtenida. Esto realmente ya había sido previsto, pues no es un quehacer habitual para los estudiantes describir qué es lo que observan y menos en una clase de matemáticas (incluso si se trata de Geometría) es por eso por lo que a continuación se les cuestionó acerca de los elementos de la construcción y se les pide que analicen cuáles son los segmentos de longitudes constantes y variables. La idea es que se avance hacia una visualización no icónica en donde cada uno de los elementos de la configuración se conviertan eventualmente en elementos con los que se pueda operar o incluso llegar a alguna conjetura geométrica.

Si bien pueden reconocer los materiales necesarios para dibujar la elipse, aún no está explícita la característica en la que se buscaba centrar la atención y que es determinante para hacer la descripción de la elipse como lugar geométrico (que es el objetivo de esta primera secuencia didáctica). Fue hasta el cuestionamiento de una de las estudiantes respecto a las cantidades (longitudes) que se conservan que se logró acercar a la determinación que se esperaba. Como muestra de ello, el siguiente diálogo:

- *Estudiante 2: "La siguiente dice que cómo varía ¿Cómo es esta longitud al variar la posición del lápiz? Pues por ejemplo la longitud del hilo siempre es la misma ¿no? O sea, al sumar los dos siempre dará lo mismo porque nomás cambia el punto, no se hace más largo el hilo, pero la de cada uno varía depende de dónde pongas el punto y ya es todo.*

A partir de este diálogo las demás integrantes del equipo se convencen de que la condición que cumplirían todos los puntos que están sobre la elipse trazada es la conservación de la suma de las distancias a los puntos fijos (tachuelas) y lo redactaron en de la siguiente manera:

5) ¿Cómo es esta longitud al variar la posición del punto donde se localiza el lápiz? ¿Por qué?
Al sumar las dos longitudes da 10.5cm por que es lo que mide el hilo, y a cambiar el punto donde se localiza varia la longitud de cada uno.

Figura 33. Hoja de respuestas del equipo 1, expresando por escrito no variación de la longitud del hilo.

Si nos fijamos en ambas respuestas, en particular en la escrita, se puede notar que se logró hacer el cambio del registro figural al registro discursivo. Esto utilizando la característica que encontraron sobre la no variación de la longitud y más aún, le dieron un valor numérico a esa característica, validando así sus dichos con una respuesta numérica, que según Duval (2016) es una característica de la entrada del agrimensor. Este valor también les sirvió para poder comparar con otros puntos y corroborar lo que, en el diálogo ya anticipaban. Mostrando con esto, que el trabajo colaborativo fue una parte decisiva para determinar sus respuestas. A raíz de este tipo de situaciones, consideramos que, sin la identificación de los invariantes en el aparato de trazado, no se podrá identificar las características del lugar geométrico de la curva y sin ellas no se logra pasar al registro gráfico.

Como una mejora a la secuencia, valdría la pena proponer el trazo de elipses de diferentes tamaños utilizando diferentes longitudes de hilo, para relacionar la medida del hilo con las diferentes formas de las elipses.

Actividad de desarrollo.

El objetivo de esta actividad es determinar la propiedad que cumplen los puntos de la curva que forma la Elipse, esto a partir de la manipulación y el análisis de la construcción geométrica virtual del método del jardinero.

Observando las respuestas del equipo a los primeros cuestionamientos que se hacen, lo primero que salta a la vista es el hecho de que sigue persistiendo la idea de que al hablar de la curva se trata solo de un segmento curvo y no de una figura cerrada, pese a que con la manipulación del software sí se podría trazar a la elipse completa con facilidad. Esto tenía una particular importancia, pues identificándola se quería fortalecer los elementos geométricos que caracterizan el lugar geométrico de la curva.

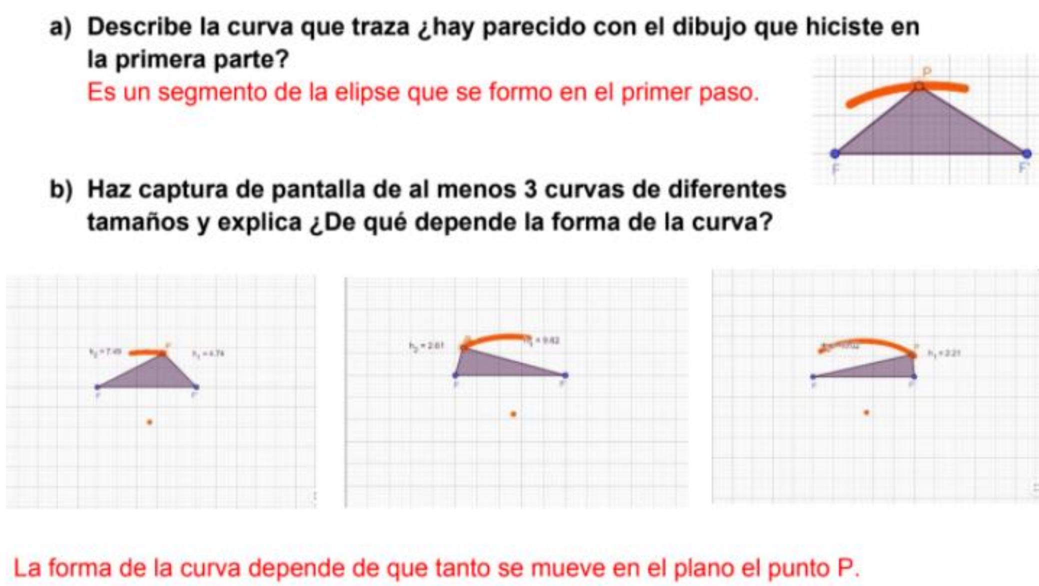


Figura 34. Hoja de respuesta de los estudiantes, donde comparan el applet de GeoGebra con el mecanismo anteriormente utilizado (tachuelas e hilo).

No se reconoció del todo la forma final de la curva (en comparación con el mecanismo físico), sino arcos de ésta, indica que no hay una relación fuerte entre la configuración y la figura final. Sin embargo, el que estuviera trazado el triángulo completo sí guio el razonamiento, además se presentaban los indicadores de variación entre las longitudes de los lados del triángulo interior; haciendo notoria la disminución de longitud de un lado cuando el otro crecía. Esto indica que se identificó la invariancia de la longitud del hilo y la deconstrucción dimensional 2D/1D necesaria para concebir esta invariancia.

El hecho de que existiera un valor numérico que indicara la variación de la distancia del punto que traza la elipse a cada foco fue determinante para que se avanzara, nuevamente estamos en presencia del tipo de entrada del Agrimensor. Este tipo de entrada consiste en la constatación que resulta de la lectura de un instrumento de medición, aunque en este caso el valor era dado. A su vez, podemos afirmar que existió una relación entre las aprehensiones operativa y discursiva, puesto que se logró asociar las características geométricas que conservaba el triángulo. Identificar esta invariancia ha resultado difícil, aun echando mano de la herramienta numérica, porque dicha invariancia no existe visualmente y la deconstrucción 2D/1D no es obvia. Otra mejora que valdría la pena agregar al applet es una simulación donde exista un punto de apoyo visual, como el que se muestra en la Figura 35.

También se debe señalar que el proceso de deconstrucción dimensional se dio al pasar de tener en primera instancia una figura en 2D (triángulo) a posteriormente desglosarla en todos sus segmentos constituyentes 1D (lados) y finalmente 0D (puntos), es decir, el triángulo formado por los segmentos que resultan de unir los focos y cada foco al punto que traza la curva. Los focos son puntos fijos de la construcción (Figura 35).

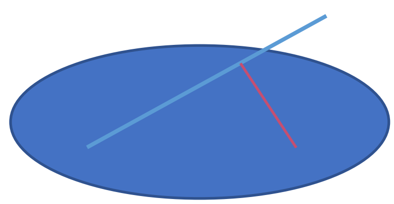


Figura 35. Imagen de la descripción del método del jardinero al trazar una elipse. Elaboración propia

Actividad de cierre.

En esta actividad se tenía como objetivo de aprendizaje determinar el concepto de elipse como lugar geométrico, así como el paso del registro figural al gráfico y posteriormente, si fuera posible conseguir una coordinación entre el registro gráfico y discursivo para pasar al registro algebraico.

Para ello, se les solicitó a las estudiantes identificaran y enlistaran los pasos que fueron necesarios para construir el mecanismo que utilizaron para trazar elipses, lo cual recapitulaba su experiencia y sirvió para refrescar las componentes indispensables para obtener la figura que trazaron físicamente y después en el Applet. Una vez hecho esto se centró la atención en la elipse trazada, en particular en el triángulo que se forma de unir con una línea recta los puntos de los focos de la elipse y el punto móvil que la va trazando.

Es oportuno señalar que fue muy complicado hasta este punto de las actividades que hubiera una aprehensión operativa de la elipse como objeto accesible, pues en lugar de tener las diferentes asociaciones a las representaciones del objeto, por los comentarios de las estudiantes como *"… Primero tenemos que describir el dibujo y luego el otro que hicimos en la compu…"* parece que se está hablando de un objeto matemático distinto en cada ocasión.

Como se mencionó antes, un objetivo fundamental de esta actividad era que los estudiantes consiguieran pasar al registro algebraico, para ello se les propuso el uso del teorema de Pitágoras como camino para encontrar la ecuación de la elipse, empezando por conocer el valor de la longitud de los lados del triángulo interior de la elipse, sin embargo, lo que obtendrían de fondo es la distancia entre dos puntos en el plano. Se reconoció el punto equidistante de los focos como una condición para el cálculo de la distancia por este método (por la necesidad de que hubiera un ángulo recto) fuera aplicable, pues así lo argumentaron: "solo se vale en los triángulos rectángulos".

La identificación de cada uno de los segmentos de los que depende la ecuación ordinaria de la elipse fue parte fundamental, para comprender qué era lo que describía la ecuación. Se reconocen los elementos geométricos necesarios para trazar una elipse: dos puntos fijos (tachuelas) y segmento (hilo). Se caracterizan las posiciones de las tachuelas como puntos fijos con coordenadas fijas:

6. **Abre el applet del Método del Jardinero 2 ¿Cuáles son las coordenadas de los focos? Inserta una imagen de cómo se ve esto.**
F1: (-c, 0) F2: (c-0)
7. **Activa la casilla ecuación, comenten y escriban ¿Qué es lo que obtienen?**
La forma representada gráficamente de la elipse, así como la ecuación
x2/36 + y2/9 = 1
8. **¿De qué longitudes o segmentos depende la ecuación anterior?**

De las medidas de la elipse

Figura 36. Hoja de respuesta de los estudiantes, donde señalan la relación que existe entre las coordenadas de los focos y las medidas de la elipse trazada.

En cuanto a las transformaciones entre registros semióticos, podemos afirmar que los cambios de registro se dieron de la siguiente manera:

En un primer momento, se comenzó buscando pasar del registro figural al discursivo, comentando los elementos característicos de la elipse y relacionándolos al concepto previamente establecido de lugar geométrico como el conjunto de puntos que cumplen ciertas reglas o condiciones dadas, esto ayudó a que se tuviera presente la constante en la longitud de ciertos segmentos, así como la posición fija de los focos.

Posteriormente, se introdujo la figura en un plano cartesiano y fueron precisamente estas características las que permitieron pasar del registro figural al registro gráfico, aunque sí fue muy brusca la incorporación del plano, se tuvo la ventaja de que era un elemento conocido para los estudiantes y lograron establecer coordenadas para los puntos fijos y el punto variable, esto partiendo de establecer un origen y de esta manera se incorporaron las variables x y y como las coordenadas del punto P que traza la elipse.

Finalmente, se pretendió que una vez establecido lo anterior, se diera una coordinación entre la representación gráfica y la representación algebraica, y más aún que de estas distintas asociaciones se tuviera la claridad de que se está hablando de un mismo objeto.

Segunda secuencia

Actividad de inicio.

En esta segunda secuencia se introdujo el elipsógrafo de Proclo de forma virtual y donde el objetivo de aprendizaje que se tenía era determinar las propiedades geométricas por las cuales este mecanismo traza elipses, se buscó promover la entrada del constructor, con la intención de comprender cómo es que está constituido el mecanismo y así mismo las características fijas y variables de éste.

Las estudiantes trazaron la elipse como resultado de una configuración más compleja y de las restricciones de movimiento del punto que la traza. En un primer momento fue complejo para ellas identificar que la curva que trazaron era similar a elipse con la que estuvieron trabajando en la primera secuencia, esto nos indica que hasta este punto no se logró transitar de una visualización icónica a una visualización no icónica, sin embargo, al momento de hacer una descripción del mecanismo se puso en acción su razonamiento que derivó en una asociación al registro gráfico, pues compararon las barras fijas del elipsógrafo a los ejes del plano cartesiano, dando así sentido de que estaban, al igual que en la actividad de cierre anterior, trabajando con puntos coordenados y segmentos que los conectan. Mostrando de esta manera que surgió en el proceso de resolución una descomposición dimensional de 2D/1D y 2D/0D. Además, se realizaron afirmaciones sobre la construcción que eran indispensables para trabajar en la siguiente actividad, por ejemplo, determinar que el ángulo entre los canales era de 90°. Como puede verse en la Figura 37.

4. ¿Qué caracteriza a las barras por donde se mueven los puntos F y G?
Están fijas, representa el eje de las X y Y, lo que vale una de las barras es el doble del segmento FG, forman ángulos de 90º.

5. ¿Identificas segmentos cuyas longitudes no cambien? ¿Cuáles?
Si, el segmento FG, EA, AB, EB, FP.

Figura 37. Hoja de respuesta del equipo 1, donde describen las características del elipsógrafo de Proclo.

Cada uno de los segmentos (1D) que se identificaron del mecanismo trazador de elipses (2D) fueron motivo de análisis y a cada uno se le asoció el nombre de una variable (si su longitud variaba) y el de la cantidad que valía si es que esta se mantenía constante. Parte importante de esta descripción fue los segmentos se comprendieran como líneas entre dos puntos, pues era la localización (coordenadas) de esos puntos las que posteriormente ayudaron a las estudiantes a generar una aprehensión operativa en el registro gráfico de la elipse.

Pese a que se lograron identificar con relativa facilidad los segmentos fijos y variables, existió dificultad en gran medida para pasar del registro figural al discursivo, es decir, poder expresar textualmente la conclusión a la que se llegó a partir de sus descripciones y debates, en particular, porque no tenían seguridad en los conceptos matemáticos que se utilizan para nombrar cada elemento. Como se mencionó anteriormente, creó problemas el paso de la configuración utilizada en la primera secuencia (método del jardinero) al elipsógrafo de Proclo utilizado en la segunda, fue tan débil la asociación entre figuras que las estudiantes pensaron en un inicio que se trataba de otra figura diferente a la Elipse, solo por el hecho de haber cambiado el mecanismo con el que se trazó.

Actividad de desarrollo.

Se continuó con la manipulación del applet y la actividad de desarrollo planteó centrar la atención en los segmentos fijos y variables del Elipsógrafo de Proclo. También propuso incorporar algunos trazos auxiliares en particular para guiar el razonamiento de las estudiantes hacia una visualización no icónica (ver lo invisible), que derivada en generar un proceso de descomposición dimensional de la figura, así como posibles reorganizaciones con el fin de crear relaciones entre figuras, segmentos y sus longitudes, que les encaminen a determinar la ecuación ordinaria de la elipse.

La actividad de desarrollo tenía como un objetivo poner énfasis especial en la construcción del mecanismo: mostrarla como objeto de interés en sí mismo. Se analizó cada uno de los segmentos que conformaban el elipsógrafo, es decir, fue tan importante la elipse trazada como el instrumento que la trazó. La aprehensión operativa jugó un papel fundamental en esta sección dado el grado de razonamiento que fue puesto en juego para encontrar la semejanza entre los triángulos, las estudiantes hallaron esta semejanza al comparar las razones entre los lados de cada triángulo, fue notable que nuevamente se recurrió a una constatación numérica, que les permitiera comprobar sus afirmaciones, la cual dio paso también a una asociación entre una cantidad numérica y una relación figural.

El ángulo recto que tienen en común los triángulos fue fundamental para que aceptar la idea de la semejanza entre ellos. Además, en todo momento se hizo presente el recurso del teorema de Pitágoras, por el cual ya habían determinado previamente la necesidad de que los triángulos fueran rectángulos y fue utilizado como estrategia para obtener algebraicamente el valor de los lados de los triángulos.

Se agregaron trazos auxiliares que permitieron quedarnos con una configuración diferente a la inicial: dos triángulos, uno que contenía a otro y tenían lados compartidos, como se muestra en la Figura 38.

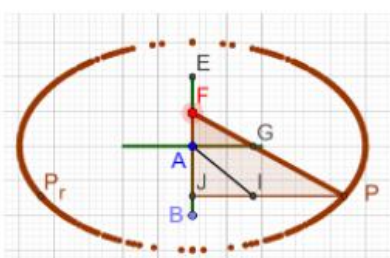
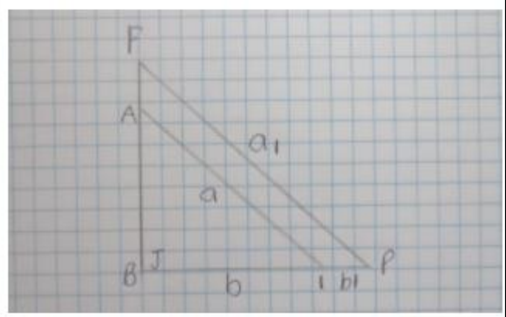
Figura	¿Qué ves?
	a) Dibuja los triángulos JAI y JFP 

Figura 38. Hoja de respuestas del equipo 1, en ella trazan los dos triángulos interiores a la elipse, los cuales tienen la característica de ser semejantes entre ellos.

Una vez identificados, se trabajó con los dos triángulos semejantes BFP y BAb'. Se reconocieron segmentos fijos, variables y así mismo, se determinó que existía una correspondencia que había entre los lados respectivos.

Con respecto a la transición entre registros de representación semiótica, podemos resaltar el cambio del registro figural al discursivo, pues se describieron con lenguaje natural todos los elementos característicos de la elipse al tratarla como lugar geométrico y posteriormente, el cambio del registro figural al registro gráfico, insertando nuevamente el plano cartesiano y asignando coordenadas cartesianas a cada punto de importante del Elipsógrafo de Proclo.

Cabe resaltar que, una vez realizada la caracterización de coordenadas las estudiantes buscaron calcular la longitud de los segmentos a partir de la ecuación de la distancia entre dos puntos y con ello comparar con los valores dados. Esto no les ayudó a avanzar en la problemática, pero fue interesante el planteamiento, pues nos muestra la necesidad que existe por asignar y operar con valores numéricos sea cual sea la naturaleza del problema. Lo anterior nos lleva a señalar que una parte importante del razonamiento matemático que han desarrollado los estudiantes predomina la aritmética, aunque los valores no les signifiquen algo en particular o bien, no respondan los cuestionamientos que se les hicieron. La necesidad de medir y asignar unidades es característica de la entrada del agrimensor y fue una actividad que se presentó recurrentemente.

Actividad de cierre.

Finalmente, el objetivo de esta actividad fue encontrar las relaciones determinadas entre segmentos fijos y variables, para ello se retomó lo analizado previamente respecto a la semejanza entre los triángulos interiores y sus respectivas correspondencias. Se incorporó de forma directa la información obtenida de las coordenadas de los puntos en plano cartesiano, para que las estudiantes hicieran una descripción de la variación en la posición del punto que traza la elipse y con ello encontrar las expresiones algebraicas necesarias para encontrar la ecuación de la elipse en su forma canónica u ordinaria.

Si bien los estudiantes identificaron al punto P que trazaba la elipse como una consecuencia de las variaciones de los lados de los triángulos que se formaban o dicho de otra manera el movimiento de P tenía como consecuencia que los lados de los triángulos se modificaran, sin embargo, no era accesible para ellos describir la trayectoria de este punto, la cual depende directamente del movimiento constreñido por las condiciones que pone el Elipsógrafo de Proclo.

Para que fuera hubiese una mayor familiaridad con las coordenadas variables del punto P se les designó coordenada “x” la que indicaba se movimiento en el eje “x” y consecuentemente “y” a la del eje vertical, una vez que ocurrió el cambio de nombre o etiqueta a las coordinadas lo mismo ocurrió con los lados cambiantes del triángulo por las longitudes “x” y “y”, pero con un sentido de función no de incógnita, es decir, no un valor desconocido sino un punto que varía su posición.

Posteriormente, se pidió que el valor de las longitudes de los lados fuera expresado en términos de “x” y “y”, acercándose aún más a la expresión algebraica de la elipse. Ejemplo de esto la Figura 39, que muestra los cambios de variables y la designación que se le hizo en cada segmento, por un lado, el registro figural donde se representan los triángulos semejantes, los respectivos segmentos asociados y por otro las equivalencias algebraicas.

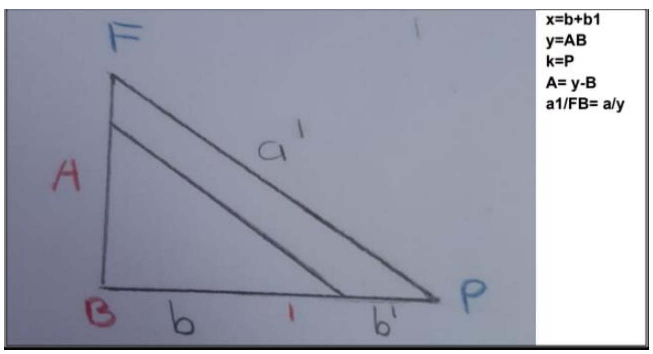


Figura 39. Hoja de respuestas del equipo 1, en ella describen de forma algebraica la relación que existe entre los segmentos de los dos triángulos respectivamente.

Hubo un cambio en la concepción que se tenía de realizar igualaciones y relaciones entre los segmentos (lados de los triángulos) a la operación algebraica con las ecuaciones que incorporan a las variables. Se identificó el punto que traza la elipse como un objeto con coordenadas variables (x, y), donde el valor de x y y correspondía a segmentos variables de los triángulos.

Se reconoció que el valor de las coordenadas del punto P está relacionado a las variaciones de longitudes de algunos segmentos, mismos que fueron asociados a los lados de los triángulos involucrados, sin embargo, no se llegó más allá de eso, pues no se logró llegar a la expresión deseada. Sin embargo, cabe señalar que se hizo presente la asociación entre distintas formas de representar ciertos objetos matemáticos, como lo fueron los segmentos y sus respectivas expresiones algebraicas.

Con respecto a los cambios de registro semiótico, se debe resaltar en primera instancia, del registro figural al discursivo, pues se comentaron y escribieron los elementos característicos de la elipse al tratarla como lugar geométrico. Posteriormente se transitó del registro figural al registro gráfico, cuando se introdujo el plano cartesiano y con él la localización de los puntos trascendentes de la configuración del Elipsógrafo (que eran los vértices de los triángulos) y finalmente, se pasó del registro algebraico al registro discursivo, cuando se describieron las expresiones algebraicas a las que llegaron.

7. Conclusiones

En este capítulo se engloban las conclusiones principales a las que se llegaron después del proceso de diseño, puesta en escena y análisis de los resultados. Para llegar a dichas conclusiones se discutieron de manera detallada los aspectos teóricos que fundamentan este trabajo y se espera presentar de manera concisa las reflexiones más trascendentes a las que llegamos.

En primera instancia, podemos afirmar que se cumplió el objetivo general, porque se diseñaron y pusieron en práctica dos secuencias didácticas para estudiantes de tercer semestre del bachillerato, ambas secuencias se adaptaron a los tiempos y condiciones escolares y, también, lograron ser implementadas como parte de su curso virtual de Matemáticas III, el cual fue a distancia dada la emergencia sanitaria de la COVID-19.

Las dos secuencias proponían a las estudiantes que vieran más allá de lo que inmediatamente percibían, es decir, argumentar cuáles eran las diferentes características observadas y comparar las diferentes propiedades que cada una le atribuía a las figuras presentadas, es decir, lo que <visualizaban> y con ello obtener una descripción más amplia y enriquecida de la elipse y del mecanismo que la trazaba.

Para afirmar lo anterior, reportamos que las estudiantes lograron identificar los elementos necesarios para trazar la elipse y determinar las características propias de la figura, así como obtener y enunciar la condición de lugar geométrico de la curva. Las estudiantes fueron capaces de reconocer la elipse en diferentes representaciones, puesto que en la resolución de las actividades se estuvieron involucrados los registros de representación semiótica: lenguaje discursivo, figural, gráfico y algebraico.

Las estudiantes realizaron durante el desarrollo de las actividades, en cada registro, tratamientos para hacer conversiones entre los diferentes registros de representación. Lo cual nos indica el cumplimiento de algunos de los objetivos específicos propuestos durante este trabajo:

- Identificar los diferentes registros de representación semiótica de la Elipse trazada por el Elipsógrafo de Proco.
- Identificar la coordinación entre los registros figural, gráfico y algebraico que en teoría debería dominar un estudiante de tercer semestre de bachillerato.

Posteriormente a la identificación, se observó que las estudiantes consiguieron reproducir elipses en los diferentes registros de representación semiótica, generando una asociación entre ellos, pero siendo conscientes de que es un solo objeto matemático presentando de distintas maneras, pues tal como lo indica Duval, la transición entre registros de representación es el gran reto en la enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica. Lo anterior nos afirma que las estudiantes concibieron a la Elipse como un objeto matemático que puede representarse de diferentes formas, convirtiendo a la Elipse en un objeto matemático accesible para ellas.

Las estudiantes recurrían constantemente a hacer asociaciones y constataciones numéricas, para poder dar respuestas a los cuestionamientos, aun cuando estos no requirieran una respuesta con cifras. Estas acciones son características de la entrada del agrimensor descrita por Duval.

Sin embargo, pese a los resultados positivos, también notamos que existió dificultad y confusión para encontrar sentido a las instrucciones solicitadas por parte de las estudiantes, por un lado, reflexionaremos más adelante lo relativo al diseño, pero consideramos que en parte es por el tipo de actividades propuestas, las cuales ponen el foco en aspectos geométricos o de visualización, dado que, como se ha mencionado antes, no es un quehacer común de los estudiantes el realizar tareas descriptivas, más aún si se trata de una clase de matemáticas, pese a ser uno de los objetivos marcados en los planes de estudio a desarrollar en el curso.

Desde la perspectiva del análisis, destacamos que tanto los antecedentes como los elementos teóricos tomados de la teoría de representaciones semióticas de Duval tuvieron un papel fundamental para enmarcar la problemática que se abordó, así como para guiar el análisis, explicar y categorizar situaciones a la que nos enfrentamos. Así mismo, la puesta en escena nos permitió reflexionar sobre posibles mejorías en el diseño de los reactivos, con el fin de fomentar en mayor medida la visualización no icónica.

En la primera actividad de la primera secuencia, el uso de mecanismo físico fue determinante para generar la idea de obtener una figura a través de un movimiento constreñido y con ello la retomar el hecho de que los trazos en movimiento generan curvas y que las configuraciones que limitan este movimiento determinarán el tipo de curvas que trazan, esto era de particular interés pues fue una idea recurrente durante el trabajo posterior, además un objetivo de la propia actividad era promover la entrada del constructor. Mientras que en el resto de las actividades y la segunda secuencia fueron los applets en GeoGebra las protagonistas.

El uso de GeoGebra fue fundamental para desarrollar ambas secuencias pues hubiera sido muy complicado guiar a distancia a los estudiantes en la construcción y posterior manipulación del Elipsógrafo de Proclo. Además, que fue imprescindible para que los estudiantes describieran y razonaran la variación de las longitudes de los segmentos y lados de los triángulos. Un aspecto que dificultó la comprensión del elipsógrafo fue que la construcción virtual solamente trazaba la mitad de la elipse.

Es necesario dedicar al menos una sesión previa de trabajo para familiarizar a los estudiantes para utilizar el Software GeoGebra antes de problematizar alrededor de construcciones hechas ahí, pues al inicio fue muy confuso para ellos y no hubo el suficiente tiempo para buscar más información de las figuras usando las herramientas ofrecidas por el software.

> Pensamos que, si se presentan actividades bien planificadas y realizadas, estas pueden contribuir para que el estudiante desarrolle capacidades de análisis, visualización e interpretación, las cuales se hacen necesarias para poder comprender la noción de Elipse como un solo objeto matemático con distintas representaciones.

7.1 POSIBLES LÍNEAS DE TRABAJO A FUTURO

Finalmente, queremos presentar algunas líneas de trabajo que reflexionamos y sugerimos se podrían seguir para dar continuidad a los trabajos realizados en esta Tesis de intervención escolar, que tuvo como objetivo el diseño de secuencias didácticas para la enseñanza de la Elipse en el nivel bachillerato.

En primer lugar, se sugiere hacer una sesión de introducción a la Elipse, para ello se recomienda realizar un estudio más profundo sobre las diversas aplicaciones de la Elipse en otras áreas del conocimiento, por ejemplo, en mecánica, acústica o en astronomía y el estudio de las órbitas elíptica de los planetas en el sistema solar, en donde, se considera al Sol en uno de los focos de la trayectoria elíptica de la Tierra, pues utilizando el contexto de problemas físicos podría despertar un mayor interés en el aula.

Una problemática identificada posteriormente en el diseño fue que no se planteó encontrar la ecuación canónica de la elipse por medio de la fórmula de la distancia entre dos puntos y fue presentada haciendo únicamente una asociación de cada parte de la ecuación a cada parte de la elipse. Además, el uso del mecanismo físico y el virtual en la primera secuencia generó confusión en el estudiantado al pasar a la segunda secuencia.

Así mismo, el refinamiento de las secuencias aplicadas anteriormente, tendrían que pasar un proceso de corrección sobre la redacción de las instrucciones para que logren dar a entender de una forma más eficiente los que se está pidiendo, puesto que como hemos reportado ha causado dificultad en los estudiantes el describir formas, características y propiedades de las figuras geométricas, porque no es una tarea común de la matemática escolar, por ello consideramos de vital importancia que las instrucciones sean lo más claros posibles para que no resulten ser una dificultad más.

Para generar un mayor interés didáctico, se pueden explorar diversos tipos de elipsógrafos, encontrando alguno que puedan construir ya sea de manera física o virtual, el realizar esta construcción elevaría el nivel de comprensión de la Elipse por parte de los estudiantes, así como de sus propiedades geométricas. También podría utilizarse un mismo elipsógrafo, pero variando el tamaño del mecanismo para obtener elipses de distintos tamaños y elongaciones que provoquen encontrar las propiedades geométricas indispensables.

Por último, sugerimos realizar una investigación más amplia acerca de los textos escolares relacionados con la enseñanza de las cónicas, en particular de la Elipse, para analizar las perspectivas del docente en cuanto a la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval, que consideramos es fundamental para la comprensión del concepto matemático de las figuras geométricas y en particular de la Elipse en un nivel de bachillerato, por la claridad que genera el poder concebir varias representaciones de un mismo objeto matemático, esto nos señalaría una amplia comprensión de las figuras geométricas, las cuales son primordiales durante el estudio de la Geometría Analítica.

Referencias

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 52, 215-241.

Bartolini, M. (1998). Geometry: Past and Future. En: G. Schrum, L., y Levin, B. B. Leading 21st-century schools: Harnessing technology for engagement and achievement. Corwin Press. pp 29-83

Bartolini, M. (2005). The meaning of conics: historical and didactical dimensions. In Meaning in mathematics education (pp. 39-60). Springer, New York, NY.

Clemente, F., Llinares, S. y Torregrosa, G. (2017). Visualización y razonamiento configural. BOLEMA. Boletim de Educaçao Matemática, v.31, nº 57, 497-516.

Cortés, J., Palenius, G., y Ontiveros, C. (2013). Actividades de aprendizaje usando elipsógrafos para apoyar el proceso de demostración en geometría analítica. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, (35), pp.115-134.

Dennis, D. (1997) Dispositivos de dibujo de curvas de René Descartes: experimentos en las relaciones entre el movimiento mecánico y el lenguaje simbólico. Revista Matemáticas 70:3, páginas 163-174.

Dennis, D. y Confrey, J. (1995) Funciones de una curva: la noción original de funciones de Leibniz y su significado para la parábola, The College Mathematics Journal, 26:2, 124-131, DOI: 10.1080/07468342.1995.11973681

Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. Repères-IREM, 17, 121-138. Recuperado de http://www.univ-irem.fr/exemple/reperes/articles/17_article_119.pdf.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Peter Lang. Suisse.

Duval, R. (1996) "Quel Cognitif Retenir en Didactiques des Mathématiques?" RDM, Vol. 16 No. 3, 349-382.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En: F. Hitt (Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa II. Grupo Editorial Iberoamérica, 5, 101-120.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. Recuperado de: http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED466379.pdf

Duval, R. (2002) Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. basic issues for learning. en F. Hitt, (ed.), Representations and Mathematics Visualization, (pp. 311-335).

Duval, R. (2004). Semiosis y Pensamiento Humano. Traducción de título original: Sémiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. PeterLang. S.A. Santiago de Cali, Colombia. 2ª ed.

Duval, R. (2007). Registro de Representación Semiótica y Funcionamiento Cognitivo de Comprensión en Matemáticas. En SDA Machado (Ed.), Learning in Mathematics: Records of Semiotic Representation (3ra ed., pp. 11-33). Campinas, SP: Papirus.

Duval, R. (2016). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. En Duval, Raymond; Sáenz-Ludlow, Adalira (Eds.), Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas Énfasis (pp. 13-60). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Edwards, C. (1979). The Historical Development of the Calculus. New York: Springer-Verlag.

Eisenberg T. y T. Dreyfus (1990), "On the Reluctance to Visualize in Mathematics", en W. Zimmermann y S. Cunningham (eds.), Visualization in Teaching and Mathematics, Estados Unidos.

Urbaneja, P. (2003). Los orígenes de la Geometría Analítica (Vol. 6). Fundación Canaria Orotava.

Gutiérrez, A. (1992): Procesos y habilidades en visualización espacial, Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática: Geometría, 44-59.

Freudenthal, H. (1981) Major Problems of Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 12, No. 2 (1981), pp. 133-150

Hershkowitz, R., Parzysz, B. y Dormolen, J. (1996). Space and shape. In, A. J. Bishop et al. (Eds), International Handbook of Mathematics Education. (pp. 161-204). London: Kluwer

Hershkowitz, R. (1998). About reasoning in geometry. In C. Mammana y V. Villani (Eds.), Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st Century (pp. 29-37). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Plublishers.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. Educación matemática, 10(02), 23-45.

Hoyos, V., Capponi, B. y Génèves, B. (1998). Simulation of drawing machines on Cabri-II and its dual algebraic symbolization…, en Proceedings of CERME1, <http://www.find.uniosnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1proceedings/cerme-proceedings.html>. Alemania: Universidad de Osnabrueck.

Iranzo, N., y Fortuny, J. (2009). La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. Enseñanza de las Ciencias, 27(3), 433-446.

Jaime, O., Sánchez, B. y Fonseca, J. (2008). Desarrollo del pensamiento geométrico: algunas actividades de matemática recreativa. Encuentro Colombiano de Matematica Educativa. Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/940/1/1Taller.pdf

Julioprofe (2009). TRAZADO DE UNA ELIPSE Y SUS ELEMENTOS PRINCIPALES. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=81NbgFpAfOU

Mammana, C. y Villani, V. (1998). Introduction. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. An ICMI Study (pp. 1 – 8). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Manzano, F. (2017) *Mecanismos articulados para trazar curvas como recurso educativo digital para la didáctica de las matemáticas en Secundaria y Bachillerato*. 2017. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Madrid.

Mathias, A. (2004). La ignorancia de Bourbaki. La Gaceta de la RSME, 7(3), 727-748.

OCDE (2013). PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy, OECD Publishing.

Pisa, O. E. C. D. (2012). Results in Focus. 2014-02-17]. http://www, oecd. org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results-o-verview, pdf.

Rodríguez-Ibarra, M. y Montiel, G. (2021). Pensamiento geométrico: una experiencia de trabajo con profesores de matemáticas de secundaria . SAHUARUS. REVISTA ELECTRÓNICA DE MATEMÁTICAS. ISSN: 2448-5365, 5(1). https://doi.org/10.36788/sah.v5i1.108

SEP, DGB (2017). MATEMÁTICAS III. SERIE PROGRAMAS DE ESTUDIOS. México, D.F.: Secretaría de Educación Pública. Consultado en: <https://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio/CFB/3er-semestre/Matematicas-III.pdf>.

Torregrosa, G., y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, p. 275-300.

Vinner, S. (1989), "Mathematics Service Courses – Lip Service", The Proceedings of the 2nd Jerusalem Convention on Science Education

ANEXO. Secuencias de actividades.

Primera secuencia

Actividad de inicio

Durante la historia de las matemáticas ha habido distintos tipos de mecanismos que han aportado de forma significativa en los avances de la ciencia: algunos que realizan cálculos y otros, por ejemplo, para trazadores de curvas. Tú seguramente conoces el compás, sin embargo, existen otros más complejos, en esta ocasión nos centraremos en uno que en particular es fácil de construir.

- Los materiales para generar nuestros trazadores de curvas son los siguientes: necesitaremos: **un pedazo de hilo no elástico de 40 cm (puede ser estambre), dos tachuelas, un lápiz, un cartón fotográfico (puede ser otro tipo de cartón) y hojas de papel.**

Reúnanse en equipos (zoom) y realicen las siguientes actividades

1) **Instrucciones para la construcción del primer mecanismo:**

   - Comenzaremos clavando una tachuela en una hoja de papel (utiliza el cartón debajo de la hoja para mantener fija la tachuela).

   - Después dobla el hilo a la mitad el hilo y pégalo (o amárralo), posteriormente colócalo alrededor de la tachuela que se fijó previamente

   - Finalmente en la otra punta del hilo coloca un lápiz y muévelo manteniendo la tensión del hilo.

   a) ¿Qué figura obtienen?

   b) ¿Qué puedes decir de la distancia del lápiz a la tachuela?

   c) ¿Cuál es la longitud del radio?

2) **Instrucciones para la construcción del segundo mecanismo:**

- Extiende el hilo en la hoja
- Extiende el hilo en la hoja de tal forma que tengas un segmento de 10 cm de longitud.
- Ubica y fija las dos tachuelas en cada uno de los extremos del segmento, utiliza el cartón debajo de la hoja para que queden fijas.
- Después utilizando el lápiz, tensa el hilo y muévelo procurando no dejar de tensarlo.

- **Quien tenga el material para la construcción tiene la responsabilidad de trazar la curva, tomarle una foto o video y compartirla con sus compañeros de equipo.**

Después de haber realizado la construcción de este mecanismo y trazado la curva. Comenta con tus compañeros y responde:

1) ¿Qué curva se traza? Haz una lista de sus principales características.
2) Ubica el lápiz de manera que esté a la misma distancia de las dos tachuelas. Ilustra cómo se ve este punto en la curva.
    a) ¿A qué distancia está la punta del lápiz de cada tachuela? ¿Cómo hiciste para saberlo?
3) Ubica el lápiz en otro punto de la curva ¿Cuánto mide la longitud de los segmentos de hilo que se forman con cada tachuela?
4) ¿Cuánto suman en total el valor de las longitudes del lápiz a cada tachuela?
5) ¿Cómo es esta longitud al variar la posición del punto donde se localiza el lápiz? ¿Por qué?

- Las curvas que trazan ambos mecanismos son curvas cerradas empleando una longitud fija, así como uno o dos puntos fijos. **En el primer caso se trata de una circunferencia y en el segundo de una elipse (posee forma similar a un óvalo).**

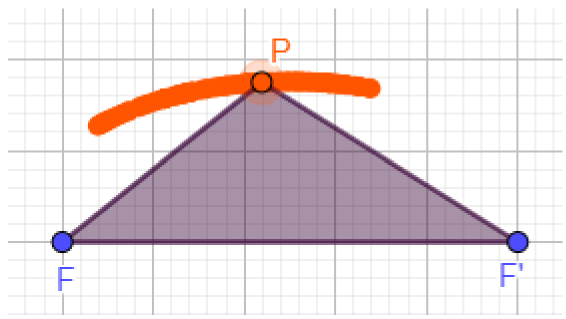
- **Los puntos en los que has colocado las tachuelas en tu dibujo se llaman focos** y la forma que tenga la elipse, depende en cierta medida de la de la longitud del hilo, así como la distancia entre los focos ¿Cómo podrías comprobar esto? Varía la distancia y dibuja distintas elipses.

Actividad de desarrollo.

Abre el applet **Método del jardinero** (pica la tecla ctrl y haz click en este link), éste nos muestra una simulación del mecanismo con el que trazaste una elipse anteriormente, los puntos F y F’ simulan los puntos dónde se colocan las tachuelas, el perímetro del triángulo simula la el hilo.

- **En el applet puedes variar la separación entre las tachuelas (focos), una vez que hayas dejado fijos los puntos, mueve el punto P y observa lo que sucede.**

a) Describe la curva que traza ¿hay parecido con el dibujo que hiciste en la primera parte?



b) Haz captura de pantalla de al menos 3 curvas de diferentes tamaños y explica ¿De qué depende la forma de la curva?

c) Coloca el punto en la posición que tú quieras y observa el triángulo que se forma, ¿cuál es su perímetro? Explica cómo lo calculaste.

d) ¿Qué ocurre con el perímetro del triángulo si cambias de lugar P? (dejando los puntos F y F’ fijos)

e) ¿Qué longitudes cambian y cuáles se quedan constantes en el cálculo de este perímetro?

f) ¿Qué pasa con las longitudes de los segmentos $\overline{FP}$ y $\overline{F'P}$ al mover el punto P?

g) ¿Qué relación existe entre estas longitudes y la longitud del hilo con el que trazaste la elipse en la actividad de inicio?

h) ¿Qué pueden concluir de la suma $\overline{FP}$ +$\overline{F'P}$?

i) A partir de lo anterior, podríamos **afirmar** que todos los puntos sobre una elipse tienen la propiedad de que…

Actividad de cierre.

Como probablemente ya hayas visto en clases, un lugar geométrico es un conjunto de puntos, los cuales, cumplen una serie de condiciones o propiedades dadas. Por ejemplo, la circunferencia:

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo, llamado Centro (C).

A partir de las experiencias con las actividades pasadas, discute con tus compañeros y respondan en equipo las siguientes preguntas:

1. Haz una breve descripción de cómo crearon la elipse con el método del jardinero
2. ¿Cuáles fueron los materiales necesarios para trazar una elipse?
3. ¿Qué elementos geométricos son necesarios para trazar una elipse?
4. ¿Qué características dirían que cumplen los puntos que están sobre una elipse?
5. Completa la siguiente oración: **"La elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano que...**
6. Abre el applet del Método del Jardinero 2 ¿Cuáles son las coordenadas de los focos? Inserta una imagen de cómo se ve esto.
7. Activa la casilla ecuación, comenten y escriban ¿Qué es lo que obtienen?
8. ¿De qué longitudes o segmentos depende la ecuación anterior?

Segunda secuencia

Actividad de inicio

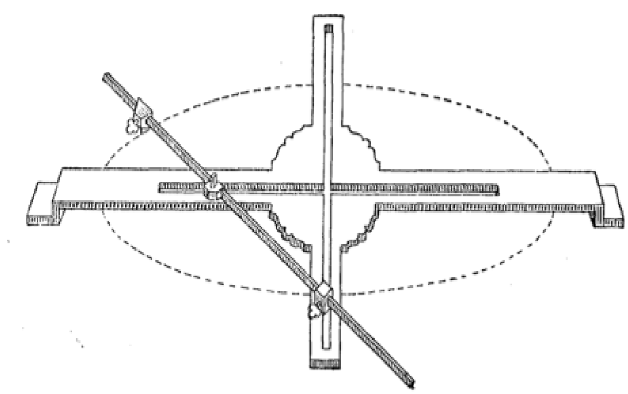
En esta ocasión exploraremos otro mecanismo que traza curvas. Para ello vamos a manipular el applet llamado **PROCLO.**

a) Mueve el punto F en el applet y observa el punto P ¿Qué curva que traza? Compárala con la curva que traza el **mecanismo del jardinero** (el que se utilizó en la primera secuencia) ¿Cuáles similitudes o diferencias identificas?

b) ¿Se podrá trazar una curva de las mismas dimensiones haciendo uso del mecanismo del jardinero? Explica cómo lo harías.

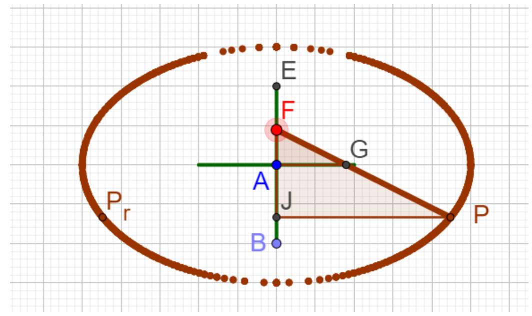
El elipsógrafo de Proclo, como su nombre, lo indica traza elipses. Este mecanismo consiste en dos barras perpendiculares rígidamente unidas con dos ranuras por las que se deslizan dos pivotes articulados de una tercera barra. Cualquier punto de esta última barra traza una elipse.

Cabe señalar que los pivotes están separados una distancia igual a la mitad de la distancia focal de la elipse. En la siguiente imagen se muestra cómo se vería la construcción física de este mecanismo.



c) Utiliza el applet para apoyar tus respuestas y completa la siguiente tabla, identificando en la figura presentada cada uno de los siguientes elementos, enumera en la figura dónde ubicas cada uno.

Elementos para localizar en la figura	**Figura**

1. Punto que traza la curva 2. Punto reflejado 3. Barra móvil 4. Canal horizontal 5. Canal vertical 6. Elipse	

A partir de tus respuestas en la tabla anterior responde:

1. ¿Cuáles características posee el punto P?

2. ¿Qué representan los puntos F y G en el mecanismo de Proclo?

3. ¿Qué representan los segmentos $\underline{FG}$? y FP?

4. ¿Qué caracteriza a las barras por donde se mueven los puntos F y G?

5. ¿Identificas segmentos cuyas longitudes no cambien? ¿Cuáles?

6. ¿Identificas segmentos cuyas longitudes sean variables? ¿Cuáles?

Actividad de desarrollo.

Para esta actividad de desarrollo, usaremos el applet [PROCLO2](), el cual contiene algunos puntos que nos servirán de referencia.

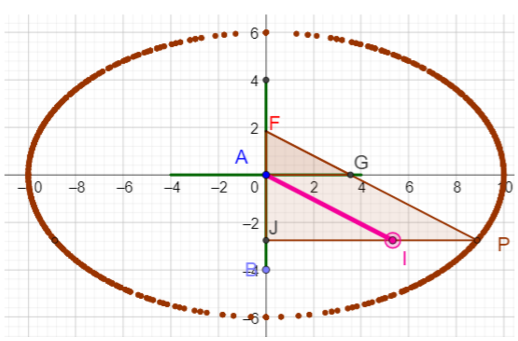
- **Se agregó el punto I, de tal forma que AI es paralelo a FP y al trazar el segmento AI se forma la hipotenusa de un triángulo rectángulo.**

a) ¿Cuáles segmentos son de longitud fija y cuáles de longitud variable?

b) Fíjate en los triángulos con los vértices JAI y JFP. Si el segmento AI es paralelo a FP, ¿encuentras alguna similitud entre los dos triángulos?

c) Mueve el punto F y observa qué sucede. ¿Qué características se conservan entre los dos triángulos?

En la siguiente tabla se encuentran unas imágenes de los triángulos que generaste en los incisos anteriores. Ahora vamos a encontrar ciertas relaciones entre sus lados.

Figura	¿Qué ves?
	a) Dibuja los triángulos JAI y JFP • Los triángulos semejantes como en este caso guardan proporcionalidad entre las razones de sus lados

b) Ubica los segmentos AI, FB, BP y FP, para ello asigna valores “a”, “b”, para definirlos.

c) Escribe qué lado de cada triángulo se corresponde con qué lado del otro triángulo.

- **La barra del elipsógrafo de Proclo mide 10 u, siendo este el valor de la longitud del segmento FP**

d) Desliza el punto F y encuentra el valor de AI, ¿cuál es?

e) Ahora, vamos a centrar nuestra atención en las relaciones que existen entre las hipotenusas y los catetos ambos triángulos. ¿Cómo expresarías la razón entre el valor de la hipotenusa y uno de los catetos?

f) De las expresiones que escribiste anteriormente ¿cómo escribirías la razón de la hipotenusa del triángulo JAI y el triángulo JFP?

g) ¿Cómo expresarías el valor de la hipotenusa de cada triángulo en término de los catetos? Escribe las expresiones de cada caso.

h) Del inciso e) ¿Puedes obtener una expresión para b (despéjala)?

i) Utiliza la relación que encontraste en los incisos anteriores para calcular la hipotenusa del triángulo pequeño ¿cómo queda esa expresión?

j) ¿Reconoces este tipo de ecuación? ¿A qué curva corresponde?

Actividad de cierre.

En esta última actividad, la vamos a dividir en dos partes, primero introduciremos los ejes del plano cartesiano para apoyarnos y posteriormente vamos a buscar llegar a expresiones que nos ayuden a describir algebraicamente la elipse a partir del elipsógrafo de Proclo que estamos utilizando.

I. **Utilizando el applet PROCLO3, analiza lo que te pide y responde:**

a) ¿Qué coordenadas tiene el punto A?
b) ¿Cuáles son las coordenadas del punto que traza la elipse?
c) ¿Su posición es fija?

II. Apoyándote en el dibujo de los dos triángulos semejantes que hiciste y las relaciones que encontraste, vamos a deducir la ecuación de la curva que traza el punto K (elipse).

- **Recuerda que son los triángulos FPJ y AIJ**

a) Para deducir la ecuación de la elipse vamos a ubicar las coordenadas del punto K como (x, y) porque al trazar la elipse van cambiando su valor. ¿A qué lados del triángulo corresponden los valores de **x** y **y**?

b) ¿Cómo quedarían las expresiones que habías escrito en la actividad de desarrollo inciso e) ahora en términos de **x y y**?
c) ¿Cómo expresarías el valor de la hipotenusa de cada triángulo en término de los catetos? Escribe las expresiones de cada caso.

d) Con las ecuaciones del inciso b) obtén una expresión para b en términos de x

e) Utiliza la relación que encontraste en los incisos anteriores para calcular la hipotenusa del triángulo pequeño ¿cómo te quedaría esa expresión?