"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

División de Ciencias Exactas y Naturales

Programa de Licenciado en Matemáticas

Algebrización de Campos Vectoriales En Dimensiones Bajas

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Jorge Alberto Espindola Zepeda

Director de Tesis: Dr. Martín Eduardo Frías Armenta

Hermosillo, Sonora, México. 1 de Julio de 2015.

SINODALES

Dr. Fernando Verduzca González
Universidad de Sonora

Dr. Guillermo Dávila Rascón
Universidad de Sonora

Dr. Martín Eduardo Frías Armenta
Universidad de Sonora

Dr. Elifalet López González
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

Contents

1 Módulos y álgebras **1**
1.1 Grupos y anillos 1
1.2 Módulos 3
1.3 Álgebras 6
1.4 Primera representación fundamental 15
1.5 Álgebras normales 18
1.6 $\mathbb{K}$-álgebras de Banach 25

2 Diferenciabilidad **27**
2.1 Diferencial de Fréchet 27
2.2 Diferenciabilidad en álgebras de Banach 35
2.2.1 Derivada newtoniana 35
2.2.2 Derivada de Lorch 39
2.3 Relación entre la diferenciabilidad de Fréchet y la diferenciabilidad de Lorch 42
2.3.1 Cambio de base 42
2.4 Ecuaciones de Cauchy-Riemann en álgebras 46

3 Algebrización de sistema de ecuaciones diferenciales autónomo **51**
3.1 Algebrización de campos vectoriales planares 51
3.1.1 Factor algebrizante 61
3.2 Algebrización de campos vectoriales en el espacio 66

4 Algebrización de sistema de ecuaciones diferenciales planares no autónomos **71**

Introducción

Un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias es un conjunto de dos ecuaciones diferenciales con dos funciones incógnitas y un conjunto de condiciones iniciales. Una solución del mismo es un conjunto de funciones diferenciables que satisfacen todas y cada una de las ecuaciones del sistema. De manera similar podemos definir los sistemas de tres ecuaciones diferenciales ordinarias.

El teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias nos dice que dada cualquiera condición inicial, siempre existe una solución definida de manera local, en este sentido siempre existe soluciones, pero no siempre se puede expresar en términos de funciones elementales.

Loe métodos de Lie costituyen la herramienta más importante para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Mediante estos métodos, se pueden encontrar soluciones de algunos sistemas de ecuaciones diferenciales o se pueden encontrar primeras integrales, cuyas curvas de nivel contienen a las curvas fase de las ecuaciones diferenciales correspondientes.

El matemático francés Henry Poincaré revolucionó el estudio de las ecuaciones diferenciales mediante la introducción de los sistemas dinámicos. Como el resultado de sus estudios se tiene que aunque los sistemas de ecuaciones diferenciales modelan fenómenos deterministas, pequeñas variaciones en las condiciones iniciales pueden implicar grandes diferencias en el compartamiento futuro, por lo que imposibilita la predicción. De esta manera se muestra que en sistemas deterministas, puede aparecer el caos. Los métodos cualitativos constituyen herramientas que nos permiten entender el comportamiento de las soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales, aunque estos sistemas no se pueden resolver, en el sentido de expresar a las soluciones en términos de funciones elementales, en general, los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no se pueden resolver de esta manera.

El presente trabajo tiene como objetivo mostrar familias de dos ecuaciones diferenciales ordinarias, para las cuales se puede encontrar una primera integral, ya que se puede encontrar un factor integrante. Para una ecuación diferencial algebrizable (diferenciable en el sentido de Lorch), el producto del campo vectorial correspondiente por una constante del álgebra es una simetría infinitesimal del campo inicial, de esta manera se pueden obtener simetrías infinitesimales no triviales, que nos permiten encontrar factores integrantes inversos, por lo tanto encontramos factores integrantes.

En general, para sistemas algebrizables no autónomos, se pueden encontrar simetría infinitesimales, ya que los productos del campo vectorial asociado, por constantes del álgebra resultan simetrías infinetisimales, las cuales son no triviales cuando la constante del álgebra no es una constante real por la identidad del álgebra.

En el caso no autónomo, los resultados de este trabajo pueden servir para identificar si un sistema cuadrático no autónomo dado, es una ecuación de Riccati de tiempo complejo o equivalente a una ecuación de Ricatti de tiempo complejo. Esto puede resultar interesante ya que para las ecuaciones diferenciales de tiempo complejo, se han realizado diversas investigaciones.

En el cap'itulo 1 se definen los concceptos de álgebra que se utilizan en este trabajo, dando primeramente la definición de grupo hasta llegar a definir $\mathbb{K}$-álgebra de Banach. También definiremos lo que es un homomorfismo y daremos la definición de un homomorfismo muy importante, que es, la primera representación fundamental de álgebras en espacio de matrices. Además daremos un resultado interesante, que es, la existencia y unicidad del producto tensorial de módulos y de álgebras.

Para el segundo capítulo, se introduce la definición de diferenciabilidad. Daremos, algunos resultados clásicos cuando se habla de diferenciabilidad. También daremos algunos resultados importantes de las Ecuaciones de Cauchy-Riemann en álgebras, ya que estos resultados son importante para la algebrización de sistemas de ecuaciones diferenciales.

En el tercer capítulo, primeramente daremos a conocer la definición de algebrización. En este capitulo trabajaremos con sistemas de ecuaciones diferenciales en el plano y sistemas de ecuaciones diferenciales en el espacio, así que daremos algunos resultados para saber cuando un sistema de ecuaciones diferenciales en el plano o en el espacio es algebrizable. También daremos la definición de factor algebrizante y que debe cumplir para poder algebrizar algunos sistemas de ecuaciones diferenciales en el plano. Por último, en el capítulo cuatro trabajaremos con la algebrización de sistemas de ecuaciones diferenciales planares no autónomo.

Este trabajo está principalmente basado en [2], [5], [6] y [9], las demás fueron usadas para consultas rápidas.

Chapter 1

Módulos y álgebras

En este capítulo introduciremos definiciones preliminares, como la definición de módulo, la definición de álgebra y la definición de la primera representación fundamental de un álgebra en el espacio de matrices n por n, en donde n es la dimensión del álgebra. Uno de los resultados será la existencia y unicidad del producto tensorial de módulos.

1.1 Grupos y anillos

Primeramente, antes de definir módulo y álgebra, empezaremos definiendo lo que es un grupo y un anillo, también daremos algunos ejemplos para entender con mayor claridad.

Definición 1.1.1. *Un conjunto no vacío de elementos G se dice que forma un* ***grupo*** *si en G esta definida una operación binaria, llamado producto y denotada por $(\cdot)$ tal que:*

1. *$a, b \in G$ implica que $a \cdot b \in G$.*
2. *$a, b, c \in G$ implica que $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.*
3. *Existe un elemento $e \in G$ tal que $a \cdot e = e \cdot a = a$.*
4. *Para todo $a \in G$ existe un elemento $a^{-1} \in G$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.*

Definición 1.1.2. *Un grupo G se dice que es* ***abeliano*** *(o* ***conmutativo****) si para cualquier $a, b \in G$ se tiene que : $a \cdot b = b \cdot a$.*

Ejemplo 1.1.3. *El conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ bajo la suma $(+)$ es un grupo abeliano.*

1. *$a, b \in \mathbb{Z}$ implica que $a + b \in \mathbb{Z}$ por las propiedades de los enteros, ya que la suma de dos enteros es de nuevo un entero.*

2. $a, b, c \in \mathbb{Z}$ *implica que* $a + (b + c) = (a + b) + c$ *por las propiedades de los enteros.*

3. *Existe un elemento* $e = 0 \in \mathbb{Z}$ *tal que* $a + 0 = 0 + a = a$.

4. *Para todo* $a \in \mathbb{Z}$ *existe un elemento* $a^{-1} = -a \in \mathbb{Z}$ *tal que* $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

5. $a, b \in \mathbb{Z}$ *se tiene que* $a + b = b + a$ *por las propiedadades de los enteros.*

Ejemplo 1.1.4. *El conjunto* $\{-1, 1\}$ *bajo la multiplicación usual de números reales es un grupo abeliano.*

1. $a, b \in G$ *implica que* $a \cdot b \in G$.

$$* \ 1 \cdot 1 = 1 \in \{-1, 1\}$$
$$* \ 1 \cdot (-1) = -1 \in \{-1, 1\}$$
$$* \ (-1) \cdot 1 = -1 \in \{-1, 1\}$$
$$* \ (-1) \cdot (-1) = 1 \in \{-1, 1\}$$

2. $\{-1, 1\}$ *es asociativa bajo* $(\cdot)$ *por la propiedad de los números reales.*

3. *Existe un elemento* $e = 1 \in \{-1, 1\}$ *tal que* $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

4. *Para todo* $a \in \{-1, 1\}$ *existe un elemento* $a^{-1} = a \in \{-1, 1\}$ *tal que* $a \cdot a = a \cdot a = 1$, *ya que cada elemento del conjunto* $\{-1, 1\}$ *es su propio inverso.*

5. *Del producto dado, vemos que se cumple la proppiedad asociativa, estos es,* $a \cdot b = b \cdot a$. *para todo* $a, b \in \{-1, 1\}$.

Definición 1.1.5. *Un conjunto no vacío* R *se dice que es un* ***anillo*** *si tiene dos operaciones, denotadas por* $+$ *y* $\cdot$ *tales que para cualesquiera* $a, b, c \in R$:

1. $a + b \in R$.

2. $a + b = b + a$.

3. $a + (b + c) = (a + b) + c$.

4. *Existe un elemento* $0 \in R$ *tal que* $a + 0 = 0 + a = a$.

5. *Para todo* $a \in G$ *existe un elemento* $-a \in R$ *tal que* $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

6. $a \cdot b \in R$.

7. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

8. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

Nota: Es decir, un grupo R es un anillo si cumple con las propiedades 6, 7 y 8.

Definición 1.1.6. *Un anillo* R *se dice que es un* ***anillo con elemento unitario*** *si existe* $1 \in R$ *tal que paratoda* $a \in R$ *se tiene que* $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.

Definición 1.1.7. *Un anillo* R *se dice que es un* ***anillo commutativa*** *si para cualesquiera* $a, b \in R$ *se tiene que* $a \cdot b = b \cdot a$

Ejemplo 1.1.8. *El conjunto de los enteros* $\mathbb{Z}$ *es un anillo conmutativo con unidad bajo las operaciones suma y multiplicación usuales de los enteros. En el Ejemplo 1.1.3 vimos que los enteros son un grupo abeliano bajo la suma, por las propiedades de los enteros* $\mathbb{Z}$ *cumple con 6), 7), 8),por lo tanto* $\mathbb{Z}$ *es un anillo.* $\mathbb{Z}$ *es conmutativo bajo el producto* $\cdot$ *por las propiedades de los enteros, así que* $\mathbb{Z}$ *es un anillo conmutativo. El elemento unidad existe en* $\mathbb{Z}$ *y es el 1,* $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ *para toda* $a \in \mathbb{Z}$*, por lo tanto* $\mathbb{Z}$ *es un anillo conmutativo con unidad.*

Ejemplo 1.1.9. *El conjunto de los enteros pares es un anillo conmutativo bajo la suma y multiplicación de los enteros*

Ejemplo 1.1.10. *El conjunto de los racionales* $\mathbb{Q}$ *es un anillo conmutativo con unidad bajo la suma y multiplicación de los racionales.*

1.2 Módulos

Los módulos juegan un papel fundamental en este trabajo, ya que son necesario para dar la definión de lo que entendemos por álgebra en este trabajo. También daremos la definición de homomorfismo de módulos.

Definición 1.2.1. *Sea R un anillo cualquiera; un conjunto no vacío M se dice que es un R-**módulo** (o un **módulo sobre** R) si M es un grupo abeliano bajo una operación $+$, con un producto por escalar, tal que para cada $r \in R$ y $m \in M$ existe un elemento $rm \in M$ de tal modo que se verifica:*

1. $r(a+b) = ra + rb$,
2. $r(sa) = (rs)a$, *y*
3. $(r+s)a = ra + sa$,

para cualesquiera $a, b \in M$ y $r, s \in R$

Definición 1.2.2. *Sea M un R-módulo y sea $1 \in R$ tal que $1m = m$, para toda $m \in M$, entonces M es un R-**módulo con unidad**.*

Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, tenemos que V cumple con las definiciones, por lo tanto V es un $\mathbb{F}$-módulo con unidad.

Ejemplo 1.2.3. *El conjunto $n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}$ de las parejas ordenadas (x, y), donde x y y son números múltiplo de n, sobre $\mathbb{Z}$, es un $\mathbb{Z}$-módulo, donde la suma de $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}$ y el producto por escalar $z \in \mathbb{Z}$ se define:*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$z(x_1, y_1) = (z \cdot x_1, z \cdot y_1).$$

Para todo $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ se tiene que:

1. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, *y como* $x_1 + x_2, y_1 + y_2 \in n\mathbb{Z}$, *entonces* $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}$.
2. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (y_2, x_2) + (x_1, y_1)$.
3. $(x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) = (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) + (x_3, y_3) = ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3)$.
4. *Existe el neutro tal que* $(x, y) + (0, 0) = (x, y)$, *como* $0 \in n\mathbb{Z}$ *entonces* $(0, 0) \in n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}$.
5. *El inverso de* (x, y) *es* $(-x, -y)$ *ya que* $(x, y) + (-x, -y) = (0, 0)$, *y como* $-x, -y \in n\mathbb{Z}$ *entonces* $(-x, -y) \in n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}$.

Por lo tanto $n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}$ es un grupo conmutativo bajo la suma. Ahora veamos que cumple con las propiedades del producto por escalar.

Sea $r, s \in \mathbb{Z}$ y $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}$:

1.

$$\begin{aligned}(r+s)(x_1, y_1) &= ((r+s)x_1, (r+s)y_1) = (r \cdot x_1 + s \cdot x_1, r \cdot y_1 + s \cdot y_1) \\ &= (r \cdot x_1, r \cdot y_1) + (s \cdot x_1, s \cdot y_1) = r(x_1, y_1) + s(x_1, y_1).\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}r((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= r(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (r(x_1 + x_2), r(y_1 + y_2)) \\ &= (r \cdot x_1 + r \cdot x_2, r \cdot y_1 + r \cdot y_2) = (r \cdot x_1, r \cdot y_1) + (r \cdot x_2, r \cdot y_2) \\ &= r(x_1, y_1) + r(x_2, y_2).\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}(rs)(x_1, y_1) &= ((rs) \cdot x_1, (rs) \cdot y_1) = (r \cdot s \cdot x_1, r \cdot s \cdot y_1) \\ &= r(s \cdot x_1, s \cdot y_1) = r(s(x_1, y_1)).\end{aligned}$$

4.

$$1(x_1, y_1) = (1 \cdot x_1, 1 \cdot y_1) = (x_1, y_1).$$

Ejemplo 1.2.4. *El conjuntos de las matrices de m filas con n columnas con entradas en R, es un R-módulo con la operación adición de matrices y multiplicación por escalar de R, definidas:*
1)(Adición de matrices). Si $A, B \in M_{n\times m}(R)$, entonces $A + B$ es la matriz cuya entradas i, j está dada por $[A + B]_{i,j} = [A]_{i,j} + [B]_{i,j}$.
2)(Multiplicación de matrices por escalares). Si $a \in R$ y $A \in M_{m\times n}(Z)$, entonces $[aA]$ es la matriz cuya entrada i, j está dada por $[aA]_{i,j} = a[A]_{i,j}$.

Definición 1.2.5. *Un homomorfismo de módulos es una función $f : M_1 \longrightarrow M_2$ entre los R-módulos M_1 y M_2 tal que si para todo $r \in R$ y $m, n \in M_1$, se cumple*

1. $f(m + n) = f(m) + f(n)$.
2. $f(rm) = rf(m)$.

Si f es además inyectiva y suprayectiva decimos que f es un isomorfismo de módulos.

Ejemplo 1.2.6. *Definamos la función* $f : 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \to M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ *como:*

$$f(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Veremos que es un homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos. Sea $r \in \mathbb{Z}$ y $(a,b),(c,d) \in 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$:

1.

$$\begin{aligned} f((a,b)+(c,d)) = f((a+c,b+d)) &= \begin{pmatrix} (a+c)+(b+d) & 0 \\ 0 & b+d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c+d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = f(a,b)+f(c,d). \end{aligned}$$

2.

$$f(r(a,b)) = f(ra,rb) = \begin{pmatrix} ra+rb & 0 \\ 0 & rb \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = rf(a,b).$$

1.3 Álgebras

En esta sección daremos la definición de lo que entendemos en este trabajo por álgebra y de homomorfismo de álgebras, también se darán ejemplos de álgebras que son interesantes. Además hacemos la aclaración de que $\mathbb{K}$, denotará al campo real $\mathbb{R}$ o al complejo $\mathbb{C}$.

Definición 1.3.1. *Sea M un R-módulos, y supongamos que existe una operación binaria definida entre elementos de M, $(\cdot,\cdot) : M \times M \to M$, tal que es bilineal con respecto a la suma, es decir, tal que para todo u, v, $w \in M$, $\lambda \in R$:*

1. $u \cdot (v+w) = u \cdot v + u \cdot w.$
2. $(v+w) \cdot u = v \cdot u + w \cdot u.$
3. $u \cdot (\lambda v) = (\lambda u) \cdot v = \lambda(u \cdot v).$

Entonces llamaremos $\mathbb{A} = (M,\cdot)$ ***álgebra sobre*** *R o R-**álgebra**.*

Ejemplo 1.3.2. *Veamos que* $\mathbb{A} = (\mathbb{R}^3, \times)$ *es un álgebra sobre* $\mathbb{R}$, *donde* $\times$ *denota el producto vectorial o producto cruz.*

Sabemos que $\mathbb{R}^3$ *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$, *esto quiere decir que* $\mathbb{R}^3$ *es un* $\mathbb{R}$*-módulo, tenemos que el producto vectorial es distributivo y bilineal, por lo tanto tenemos que* $\mathbb{A}$ *es un* $\mathbb{R}$*-álgebra.*

Definición 1.3.3. *Una* ***R-álgebra asociativa conmutativa con unidad*** *o* ***álgebra asocitiva conmutativa con unidad sobre un anillo conmutativo con unidad R*** *es un* R*-módulo* $\mathbb{A}$ *con un producto, el cual es una transformación bilineal* $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ *denotada por* $(x, y) \to xy$, *de tal manera que se tiene asociativilidad, conmutatividad y existe un elemento* $e \in \mathbb{A}$ *que satisface* $ex = xe = x$, *para todo* $x \in \mathbb{A}$. *A* e *se le llama la unidad de* $\mathbb{A}$.
La bilinealidad de $(x, y) \to xy$ *implica que para todo* $x, y, z \in A$ *y* $\alpha \in R$, *se tiene:*

i) $x(y + z) = xy + xz, (x + y)z = xz + yz.$

ii) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y).$

La asociatividad implica que para todo $x, y, z \in A$, *se tiene:*

iii) $x(yz) = (xy)z.$

La conmutatividad implica que para todo $x, y \in A$, *se tiene:*

iv) $xy = yx.$

Conviene aclarar que en este trabajo a lo que nosotros llamaremos álgebra es un álgebra asociativa, conmutativa con unidad.

Cuando un elemento $a \in \mathbb{A}$ se llama regular si existe $a^{-1} \in \mathbb{A}$, tal que $a^{-1}a = aa^{-1} = e$, donde e es la unidad de $\mathbb{A}$, a^{-1} se llamael inverso de a, al conjunto de los elementos regulares lo denotaremos por $G(\mathbb{A})$. Si $a \in \mathbb{A}$ no es regular, entonces a se llama singular.

El conjunto $G(\mathbb{A})$ es un grupo con respecto al producto del álgebra. Tenemos que el producto es asociativo, que la identidad e está en $G(\mathbb{A})$ y que existe el inverso, lo único que falta ver es que es cerrado.

Sea $u, v \in G(\mathbb{A})$, tenemos que $u^{-1}, v^{-1} \in G(\mathbb{A})$, además que $(uv)(v^{-1}u^{-1}) = e$ entonces $uv \in G(\mathbb{A})$. Por lo tanto tenemos que $G(\mathbb{A})$ es un grupo.

Los siguientes ejemplos son interesante, en especial el Ejemplo 1.3.6, llamado el álgebra de los complejos, ya que veremos más adelante que es un álgebra normal.

Ejemplo 1.3.4. *El* $\mathbb{R}$*-módulo* $\mathbb{R}^2$ *es una* $\mathbb{R}$*-álgebra con el producto:*

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2, x_1y_2 + y_1x_2),$$

veamos que es bilineal, asociativa, conmutativa y existe la unidad. Sea (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) *en* $\mathbb{R}^2$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$ *, entonces*

i)

$$\begin{aligned}
(x_1, y_1)((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) =&(x_1, y_1)(x_2 + x_3, y_2 + y_3)\\
=&(x_1(x_2 + x_3), x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3))\\
=&(x_1x_2 + x_1x_3, x_1y_2 + x_1y_3 + y_1x_2 + y_1x_3)\\
=&(x_1x_2, x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1x_3, x_1y_3 + y_1x_3)\\
=&(x_1, y_1)(x_2, y_2) + (x_1, y_1)(x_3, y_3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((x_1, y_1) + (x_2, y_2))(x_3, y_3) =&(x_1 + x_2, y_1 + y_2)(x_3, y_3)\\
=&((x_1 + x_2)x_3, (y_1 + y_2)x_3 + (x_1 + x_2)y_3)y_3)\\
=&(x_1x_3 + x_2x_3, y_1x_3 + y_2x_3 + x_1y_3 + x_2y_3)\\
=&(x_1x_3, y_1x_3 + x_2y_3) + (x_2x_3, y_2x_3 + x_1y_3)\\
=&(x_1, y_1)(x_3, y_3) + (x_2, y_2)(x_3, y_3),
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\alpha((x_1,y_1)(x_2,y_2)) =&\alpha(x_1x_2,x_1y_2+y_1x_2)\\ =&(\alpha x_1x_2,\alpha(x_1y_2+y_1x_2))\\ =&(\alpha x_1x_2,\alpha x_1y_2+\alpha y_1x_2)\\ =&(\alpha x_1,\alpha y_1)(x_2,y_2)\\ =&(\alpha(x_1,y_1))(x_2,y_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha((x_1,y_1)(x_2,y_2)) =&\alpha(x_1x_2,x_1y_2+y_1x_2)\\ =&(\alpha x_1x_2,\alpha(x_1y_2+y_1x_2))\\ =&(\alpha x_1x_2,\alpha x_1y_2+\alpha y_1x_2)\\ =&(x_1\alpha x_2,x_1\alpha y_2+y_1\alpha x_2)\\ =&(x_1,y_1)(\alpha x_2,\alpha y_2)\\ =&(x_1,y_1)(\alpha(x_2,y_2)),\end{aligned}$$

en i) y ii) tenemos que el producto es bilineal.

iii)

$$\begin{aligned}(x_1,y_1)((x_2,y_2)(x_3,y_3)) =&(x_1,y_1)(x_2x_3,x_2y_3+y_2x_3)\\ =&(x_1x_2x_3,x_1(x_2y_3+y_2x_3)+y_1x_2x_3)\\ =&(x_1x_2x_3,x_1x_2y_3+x_1y_2x_3+y_1x_2x_3)\\ =&(x_1x_2x_3,x_1x_2y_3+(x_1y_2+y_1x_2)x_3)\\ =&(x_1x_2,x_1y_2+y_1x_2)(x_3,y_3)\\ =&((x_1,y_1)(x_2,y_2))(x_3,y_3),\end{aligned}$$

en iii) tenemos que el producto es asociativo.

iv)

$$\begin{aligned}(x_1,y_1)(x_2,y_2) =&(x_1x_2, x_1y_2+y_1x_2)\\ =&(x_2x_1, x_2y_1+y_2x_1)\\ =&(x_2,y_2)(x_1,y_1),\end{aligned}$$

en iv) vemos que el producto es conmutativo.

v) La unidad es $e=(1,0)\in\mathbb{R}^2$,
$(1,0)(x,y)=(1x,1y+0x)=(x,y), (x,y)(1,0)=(x1,x0+y1)=(x,y)$.

Ejemplo 1.3.5. *El* $\mathbb{R}$*-módulo* $\mathbb{R}^2$ *es una* $\mathbb{R}$*-álgebra, con el producto:*

$$(x_1,x_2)(y_1,y_2)=(\frac{3}{2}x_1y_1+\frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_1-x_2y_2), \frac{3}{2}x_2y_2+\frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_1-x_1y_1)),$$

donde la unidad es $e=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Ejemplo 1.3.6. *(Complejos). El* $\mathbb{R}$*-módulo* $\mathbb{R}^2$ *es una* $\mathbb{R}$*-álgebra, con el producto:*

$$(x_1,y_1)(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1),$$

donde la unidad es $e=(1,0)$*. Denotaremos a esta álgebra como* $\mathbb{C}$.

El siguiente ejemplo es de nuestra interés, ya que en estás álgebras algebrizaremos sistemas de ecuaciones planares en el capítulo tres.

Ejemplo 1.3.7. *El* $\mathbb{R}$*-módulo* $\mathbb{R}^2$ *es una* $\mathbb{R}$*-álgebra, con alguno de los siguientes productos:*

I)

$\cdot$	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2
e_2	e_2	$-be_1+ae_2$

II)

$\cdot$	e_1	e_2
e_1	$-ae_1$	e_1
e_2	e_1	e_2

III)

$\cdot$	e_1	e_2
e_1	e_1	0
e_2	0	e_2

El siguiente ejemplo es de interés para nosostros, ya que en la Sección 3.2 trabajeremos con los siguientes productos.

Ejemplo 1.3.8. *$\mathbb{R}^3$ es un álgebra $\mathbb{A} = (\mathbb{R}^3, \cdot)$ donde $\cdot$ es alguno de los siguientes tres productos*

A)

$\cdot$	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	$-ae_1 - ce_2 - ee_3$	$-be_1 - de_2 - fe_3$
e_3	e_3	$-be_1 - de_2 - fe_3$	$-he_1 - je_2 - le_3$

B)

$\cdot$	e_1	e_2	e_3
e_1	$-ae_1 - ce_2 - ee_3$	e_1	$-be_1 - de_2 - fe_3$
e_2	e_1	e_2	e_3
e_3	$-be_1 - de_2 - fe_3$	e_3	$-he_1 - je_2 - le_3$

C)

$\cdot$	e_1	e_2	e_3
e_1	$-ae_1 - ce_2 - ee_3$	$-be_1 - de_2 - fe_3$	e_1
e_2	$-be_1 - de_2 - fe_3$	$-he_1 - je_2 - le_3$	e_2
e_3	e_1	e_2	e_3

Sabemos que $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial, ahora lo que haremos es ver que $\mathbb{A} = (\mathbb{R}^3, \cdot)$ tiene estructura de álgebra con respecto al producto Tipo A. Tenemos que el producto entre elementos de $\mathbb{A}$ se define como $(x, y, z), (u, v, w) = (xu - ayv - byw - bzv - hzw, xv + yu - cyu - dyw - dzv - jzw, xw - eyv - fyw + zu - fzw - lzw)$, veamos que se cumple que es bilineal, asociativo y conmutativo.

i) Veamos que es bilieneal:

$$\begin{aligned}(x_1,y_1,z_1)((x_2,y_2,z_2)+(x_3,y_3,z_3)=&(x_1,y_1,z_1)(x_2+x_3,y_2+y_3,z_1+z_3)\\
&(x_1(x_2+x_3)-ay_1(y_2+y_3)-by_1(z_2+z_3)\\
&-bz_1(y_2+y_3)-hz_1(z_2+z_3),\\
&x_1(y_2+y_3)+y_1(x_2+x_3)-cy_1(y_2+y_3)\\
&-dy_1(z_2+z_3)-dz_1(y_2+y_3)-jz_1(z_2+z_3),\\
&x_1(z_1+z_2)-ey_1(y_2+y_3)-fy_1(z_2+z_3)\\
&+z_1(x_2+x_3)-fz_1(y_2+y_3)-lz_1(z_2+z_3))\\
=&(x_1x_2-ay_1y_2-by_1z_2-bz_1y_2-hz_1z_2,\\
&x_1y_2+y_1x_2-cy_1y_2-dy_1z_1-dz_1y_2-jz_1z_2,\\
&x_1z_2-ey_1y_2-fy_1z_2+z_1x_2-fz_1y_2-lz_1z_2)\\
&+(x_1x_3-ay_1y_3-by_1z_3-bz_1y_3-hz_1z_3,\\
&x_1y_3+y_1x_3-cy_1y_3-dy_1z_3-dz_1y_3-jz_1z_3,\\
&x_1z_3-ey_1y_3-fy_1z_3+z_1x_3-fz_1y_3-lz_1z_3),\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\alpha((x_1,y_1,z_1)(x_2,y_2,z_2))=&\alpha(x_1x_2-ay_1y_2-by_1z_2-bz_1y_2-hz_1z_2,\\
&x_1y_2+y_1x_2-cy_1y_2-dy_1z_2-dz_1y_2-jz_1z_2,\\
&x_1z_2-ey_1y_2-fy_1z_2+z_1x_2-fz_1y_2-lz_1z_2)\\
=&(\alpha x_1x_2-a\alpha y_1y_2-b\alpha y_1z_2-b\alpha z_1y_2-h\alpha z_1z_2,\\
&\alpha x_1y_2+\alpha y_1x_2-c\alpha y_1y_2-d\alpha y_1z_2-d\alpha z_1y_2-j\alpha z_1z_2,\\
&\alpha x_1z_2-e\alpha y_1y_2-f\alpha y_1z_2+\alpha z_1x_2-f\alpha z_1y_2-l\alpha z_1z_2)\\
=&(\alpha x_1,\alpha y_1,\alpha z_1)(x_2,y_2,z_2)=(\alpha(x_1,y_1,z_1))(x_2,y_2,z_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha((x_1,y_1,z_1)(x_2,y_2,z_2))=&\alpha(x_1x_2-ay_1y_2-by_1z_2-bz_1y_2-hz_1z_2,\\
&x_1y_2+y_1x_2-cy_1y_2-dy_1z_2-dz_1y_2-jz_1z_2,\\
&x_1z_2-ey_1y_2-fy_1z_2+z_1x_2-fz_1y_2-lz_1z_2)\\
=&(\alpha x_1x_2-a\alpha y_1y_2-b\alpha y_1z_2-b\alpha z_1y_2-h\alpha z_1z_2,\\
&\alpha x_1y_2+\alpha y_1x_2-c\alpha y_1y_2-d\alpha y_1z_2-d\alpha z_1y_2-j\alpha z_1z_2,\\
&\alpha x_1z_2-e\alpha y_1y_2-f\alpha y_1z_2+\alpha z_1x_2-f\alpha z_1y_2-l\alpha z_1z_2)\\
=&(x_1,y_1,z_1)(\alpha x_2,\alpha y_2,\alpha z_2)=(x_1,y_1,z_1)(\alpha(x_2,y_2,z_2)).\end{aligned}$$

ii) Veamos que es asociativo:

$$
\begin{aligned}
(x_1, y_1, z_1)((x_2, y_2, z_2)(x_3, y_3, z_3)) =&(x_1, y_1, z_1)(x_2x_3 - ay_2y_3 - by_2z_3 - bz_2y_3 - hz_2z_3,\\
&x_2y_3 + y_2x_3 - cy_2y_3 - dy_2z_3 - dz_2y_3 - jz_2z_3,\\
&x_2z_3 - ey_2y_3 - fy_2z_3 + z_3x_3 - fz_2y_3 - lz_2z_3)\\
=&(x_1(x_2x_3 - ay_2y_3 - by_2z_3 - bz_2y_3 - hz_2z_3)\\
&- ay_1(x_2y_3 + y_2x_3 - cy_2y_3 - dy_2z_3 - dz_2y_3 - jz_2z_3)\\
&- by_1(x_2z_3 - ey_2y_3 - fy_2z_3 + z_3x_3 - fz_2y_3 - lz_2z_3)\\
&- bz_1(x_2y_3 + y_2x_3 - cy_2y_3 - dy_2z_3 - dz_2y_3 - jz_2z_3)\\
&- hz_1(x_2z_3 - ey_2y_3 - fy_2z_3 + z_3x_3 - fz_2y_3 - lz_2z_3),\\
&y_1(x_2y_3 + y_2x_3 - cy_2y_3 - dy_2z_3 - dz_2y_3 - jz_2z_3)\\
&+ y_1(x_2x_3 - ay_2y_3 - by_2z_3 - bz_2y_3 - hz_2z_3)\\
&- cy_1(x_2y_3 + y_2x_3 - cy_2y_3 - dy_2z_3 - dz_2y_3 - jz_2z_3)\\
&- dy_1(x_2z_3 - ey_2y_3 - fy_2z_3 + z_3x_3 - fz_2y_3 - lz_2z_3)\\
&- dz_1(x_2y_3 + y_2x_3 - cy_2y_3 - dy_2z_3 - dz_2y_3 - jz_2z_3)\\
&- jz_1(x_2z_3 - ey_2y_3 - fy_2z_3 + z_3x_3 - fz_2y_3 - lz_2z_3),\\
&x_1(x_2z_3 - ey_2y_3 - fy_2z_3 + z_3x_3 - fz_2y_3 - lz_2z_3)\\
&- ey_1(x_2y_3 + y_2x_3 - cy_2y_3 - dy_2z_3 - dz_2y_3 - jz_2z_3)\\
&- fy_1(x_2z_3 - ey_2y_3 - fy_2z_3 + z_3x_3 - fz_2y_3 - lz_2z_3)\\
&+ z_1(x_2x_3 - ay_2y_3 - by_2z_3 - bz_2y_3 - hz_2z_3)\\
&- fz_1(x_2y_3 + y_2x_3 - cy_2y_3 - dy_2z_3 - dz_2y_3 - jz_2z_3)\\
&- lz_1(x_2z_3 - ey_2y_3 - fy_2z_3 + z_3x_3 - fz_2y_3 - lz_2z_3))\\
=&(x_1x_2 - ay_1y_2 - by_1z_2 - bz_1y_2 - hz_1z_2,\\
&x_1y_2 + y_1x_2 - cy_1y_2 - dy_1z_2 - dz_1y_2 - jz_1z_2,\\
&x_1z_2 - ey_1y_2 - fy_1z_2 + z_1x_2 - fz_1y_2 - lz_1z_2)\\
&(x_3, y_3, z_3)\\
=&((x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2))(x_3, y_3, z_3)
\end{aligned}
$$

iii) Por úlitmo veamos que es conmutativa

$$\begin{aligned}(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) =&(x_1x_2 - ay_1y_2 - by_1z_2 - bz_1y_2 - hz_1z_2,\\ &x_1y_2 + y_1x_2 - cy_1y_2 - dy_1z_1 - dz_1y_2 - jz_1z_2,\\ &x_1z_2 - ey_1y_2 - fy_1z_2 + z_1x_2 - fz_1y_2 - lz_1z_2)\\ =&(x_2x_1 - ay_2y_1 - by_2z_1 - bz_2y_1 - hz_2z_1,\\ &x_2y_1 + y_2x_1 - cy_2y_1 - dy_2z_1 - dz_1y_1 - jz_2z_1,\\ &x_2z_1 - ey_2y_1 - fy_2z_1 + z_2x_1 - fz_2y_1 - lz_2z_1)\\ =&(x_2, y_2, z_2)(x_1, y_1, z_1)\end{aligned}$$

Definición 1.3.9. *Un homomorfismo de R-álgebras es una función $\psi : A \to A'$ entre las R-álgebras A y A', si para todo $a, a_1, a_2 \in A$ y $\lambda \in R$, se cumple:*

i) $\psi(a_1 + a_2) = \psi(a_1) + \psi(a_2)$.

ii) $\psi(\lambda a) = \lambda\psi(a)$.

iii) $\psi(a_1a_2) = \psi(a_1)\psi(a_2)$.

si e y e' son las unidades de A y A', entonces:

iv) $\psi(e) = e'$.

Además, si ψ es inyectiva y sobreyectiva, se dice que ψ es un isomorfismo de R-álgebras y que A y A' son R-álgebras isomorfas.

Ejemplo 1.3.10. *Sea f una función, que va del álgebra del Ejemplo 1.3.4 al álgebra de las matrices $M_2(\mathbb{R})$, que se define como:*

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}.$$

La función es un homomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras, como verificaremos a continuación. Sea $r \in \mathbb{R}$ y $(x, y), (w, z) \in \mathbb{R}^2$:

i)

$$f((x,y)+(w,z)) = f(x+w, y+z) = \begin{pmatrix} x+w & 0 \\ y+z & x+w \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w & 0 \\ z & w \end{pmatrix} = f(x,y) + f(w,z).$$

ii)

$$f(r(x,y)) = f(rx, ry) = \begin{pmatrix} rx & 0 \\ ry & rx \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} = rf(x,y).$$

iii)

$$f((x,y)(w,z))) = f(xw, xz+yw) = \begin{pmatrix} xw & 0 \\ xz+yw & xw \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w & 0 \\ z & w \end{pmatrix} = f(x,y)f(w,z).$$

iv)

$$f(e) = f(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{'}.$$

1.4 Primera representación fundamental

Un isomorfismo de R-álgebras es la primera representación fundamental de álgebra en un espacio de matrices, que se dará a conocer en la siguiente sección. Estas representaciones fundamentales nos ayudan a entender a las $\mathbb{K}$-álgebra, ya que mediante éstas el producto de álgebras corresponde a productos de matrices. También las representaciones fundamentales serán importante para la algebrización de sistema de ecuaciones diferenciales.

Dada una base $\beta = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ de un álgebra $\mathbb{A}$ de dimensión m, el producto de dos elementos w_i y w_j pertenece a $\mathbb{A}$, por lo tanto se puede expresar como una combinación lineal de los elementos de β, es decir,

$$w_i w_j = \sum_{k=1}^{m} c_{ijk} w_k$$

a los escalares c_{ijk} se les llama constantes de estructuras asociadas a β.

Denotaremos por R_j, para $1 \leqslant j \leqslant m$, a la matriz dada por

$$R_j = \begin{pmatrix} c_{j11} & \cdots & c_{jm1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{j1m} & \cdots & c_{jmm} \end{pmatrix}.$$

La primera representación fundamental de $\mathbb{A}$ asociada a la base β es el isomorfismo de álgebras $R_\beta : \mathbb{A} \to M_m(\mathbb{K})$ definido por

$$R_\beta : w_j \to R_j$$

para $1 \leqslant j \leqslant m$.

Ejemplo 1.4.1. *Calculemos la primera representación fundamental R de la $\mathbb{R}$-álgebra dada en el Ejemplo 1.3.4, evaluada en los elementos de la base estándar,*

$$(1,0)(1,0) = (1,0) = 1(1,0) + 0(0,1),\ c_{111} = 1,\ c_{112} = 0,$$

$$(1,0)(0,1) = (0,1) = 0(1,0) + 1(0,1),\ c_{121} = 0,\ c_{122} = 1,$$

$$(0,1)(1,0) = (0,1) = 0(1,0) + 1(0,1),\ c_{211} = 0,\ c_{212} = 1,$$

$$(0,1)(0,1) = (0,0) = 0(1,0) + 0(0,1),\ c_{221} = 0,\ c_{222} = 0,$$

son las matrices

$$R(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ R(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así obtenemos la representación $R : \mathbb{A} \to M(2,\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ en las matrices de $M(2,\mathbb{R})$ con entradas reales, definida por

$$R(x,y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el conjunto de matrices

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

es una $\mathbb{R}$-álgebra con respecto al producto usual de matrices, que es isomorfa a la $\mathbb{R}$-álgebra dada en el Ejemplo 1.3.4.

Ejemplo 1.4.2. *La imagen de la base estándar bajo la primera representación fundamental del álgebra $\mathbb{A}$ dada en el Ejemplo 1.3.5, son las matices*

$$R(1,0) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad R(0,1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Lo que nposostros nos interesa es ver como cambia la primera representación fundamental del álgebra cuando cambiamos de base, en el siguiente resultado mostramos como cambia la primera representación fundamental.

Proposición 1.4.3. *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra, que es el espacio $\mathbb{K}^n$ con un producto, y R_β, R_γ las primeras representaciones fundamentales de $\mathbb{A}$ con respecto a las bases β, γ, respectivamente. Denotemos por $S_i = R_\beta(\beta_i)$ y $R_i = R_\gamma(\gamma_i)$ para $i = 1, ..., n$, y $S = (s_{ij})$ la matriz cambio de base. Bajo estas condiciones tenemos que*

$$S_j = S^{-1} \sum_{i=1}^{n} s_{ij} R_i S$$

para $j = 1, ..., n$.

Prueba Tenemos que

$$\beta_i \beta_j = \sum_p D_{ijp} \beta_p, \tag{1.1}$$

ya que $\beta_i = \sum_j s_{ji}\gamma_j$, tenemos del lado izquierdo de (1.1)

$$\begin{aligned} \beta_i\beta_j = & \ (\textstyle\sum_l s_{li}\gamma_l)(\sum_m s_{mj}\gamma_m) = \sum_l \sum_m s_{li}s_{mj} \sum_k C_{lmk}\gamma_k \\ = & \ \textstyle\sum_k \sum_l \sum_m s_{li}s_{mj}C_{lmk}\gamma_k \end{aligned}, \tag{1.2}$$

ahora del lado derecho de la ecuación (1.1) tenemos

$$\sum_p D_{ijp}\beta_p = \sum_k \sum_p s_{kp} D_{ijp} \gamma_k, \tag{1.3}$$

de las tres ecuacionse tenemos que

$$\sum_l \sum_m s_{li} s_{mj} C_{lmk} = \sum_p s_{kp} D_{ijp}, \tag{1.4}$$

entoces tenemos que

$$SS_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} R_i S$$

lo cual demuestra el teorema. ■

Ejemplo 1.4.4. *Sea $\mathbb{A}$ la $\mathbb{R}$-álgebra del Ejemplo 1.3.1, sea $\gamma = \{e_1, e_2\}$ la base esándar de $\mathbb{R}^2$, y $\beta = \{\beta_1, \beta_2\}$ base de $\mathbb{R}^2$, donde $\beta_1 = e_1 + e_2$ y $\beta_2 = e_1$. Tenemos que*

$$\begin{aligned} \beta_1\beta_1 &= 2\beta_1 - \beta_2 \\ \beta_1\beta_2 &= \beta_1 \\ \beta_2\beta_2 &= \beta_2, \end{aligned}$$

así que la primera representació fundamental con respecto a la base β

$$R(\beta_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R(\beta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En el Ejemplo 1.4.1 calculamos $R(e_1)$ y $R(e_2)$. Vemos que se cumple la proposición 1.4.3

$$R(\beta_1) = S^{-1}R(e_1)S + S^{-1}R(e_2)SR(\beta_2) = S^{-1}R(e_1)S + 0 * S^{-1}R(e_2)S$$

donde

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.5 Álgebras normales

Las álgebras normales son importantes debido a que están relacionadas con las formas canónicas de Jordan, y las formas canónicas de Jordan son de gran importancia para la algebrización.

Teorema 1.5.1. *Para cada matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ existe una matriz $J \in M(n, \mathbb{R})$ llamada forma canónica de Jordan de A y una matriz invertible $B \in M(n, \mathbb{R})$, tal que $A = B^{-1}JB$.*

Para cada matriz J una forma canónica de Jordan, le asociaremos una $\mathbb{R}$-álgebra $\mathbb{J}$ de dimensión n, donde está es una subálgebra de $M_n(\mathbb{R})$.

Cada forma de canónica de Jordan $J \in M_n(\mathbb{R})$ es una matriz del tipo

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & B_l \end{pmatrix},$$

en donde los $B_i \in M_{k_i}(\mathbb{R})$ para $i = 1, 2, \cdots, l$ son bloques de Jordan de alguno de los siguientes:
I)$B_i = (\lambda)$, llamado bloque de real simple,

II)$B_i = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, llamado bloque complejo simple,

III)$B_i = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \mu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \mu & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu \end{pmatrix}$, llamado bloque de Jordan real, y

IV)$B_i = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ I_2 & C & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & C & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I_2 & C \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \eta & -\nu \\ \nu & \eta \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
llamado bloque de Jordan complejo. Por lo tanto se tiene que $n = k_1 + k_2 + \cdots + k_l$,

Sean $\sigma_i : M_{k_i}(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ las secciones que sustituyen en la matriz cero $M_n(\mathbb{R})$, a la matriz $A \in M_{k_i}(\mathbb{R})$ en la posición del bloque B_i de la matriz J; para $i = 1, 2, \cdots, l$, es decir

$$\sigma_i(A) = \begin{pmatrix} 0_{k_1} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0_{k_{i-1}} & & & & \\ & & & A & & & \\ & & & & 0_{k_{i+1}} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0_{k_l} \end{pmatrix},$$

donde 0_i es la matriz de ceros de dimensión i.
Por ejemplo, sea

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

donde
$B_1 = (2)$, es un bloque real simple y

$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, es un bloque complejo simple,
entonces $\sigma_2 : M_2(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$. Por lo tanto

$$\sigma_2\left(\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea $I_i, M_i, N_i \in M_{k_i}(\mathbb{R})$, donde

$I_i = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, es la matriz identidad,

$M_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$, cumple $M_i^2 = -I_i$, y

$N_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$, es la matriz nilpotente.

Definamos al conjunto de matrices $\beta = \{B_{i,j} : 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq k_i\}$ de la siguiente manera:

i) $B_{i,1} := \sigma_i(1)$ si B_i es bloque real simple.

ii) $B_{i,1} := \sigma_i(I_i)$, $B_{i,2} := \sigma_i(M_i)$, si B_i es un bloque complejo simple.

iii) $B_{i,1} := \sigma_i(I_i)$ y $B_{i,j} := \sigma_i(N_i^{j-1})$ para $j = 2, \cdots, k_i$ si B_i es el bloque de Jordan real.

iv) $B_{i,1} := \sigma_i(I_i)$, $B_{i,2} := \sigma_i(M_i)$, $B_{i,2j+1} := \sigma_i(N_i^{2j})$ y $B_{i,2j+2} := B_{i,2}\sigma_i(N_i^{2j})$ para $j = 1, \cdots, \frac{k_i}{2} - 1$ si B_i es bloque de Jordan complejo.

El espacio lineal generado por β es una $\mathbb{R}$-álgebra de matrices $\mathbb{J}$, tal que β es una base del espacio lineal y $\mathbb{J}$ contiene a la matriz J.

Veamos que es una $\mathbb{R}$-álgebra de matrices $\mathbb{J}$. Podemos ver que $B_{i,k}B_{j,l} = 0$ para toda $i \neq j$.

Ahora veamos que σ_i es un homomorfismo de álgebras. Sea $A, B \in M_{k_i}(\mathbb{R})$, entonces

$$\sigma_i(AB) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ & \ddots & & \\ \vdots & AB & & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ & \ddots & & \\ \vdots & A & & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ & \ddots & & \\ \vdots & B & & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \sigma_i(A)\sigma_i(B).$$

De está propiedad podemos ver que si el bloque B_i es un bloque real simple, un bloque complejo simple o un bloque de Jordan real, las $B_{i,j}$, $1 \leq j \leq k_i$, conmutan. Si B_i es un bloque de Jordan complejo, faltaría ver que $B_{i,2}$ conmuta con $B_{i,2j+1}$. Para esto solamente falta ver que N_i^2 conmuta con J_i,

$$N_i^2 J_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ J & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & J \end{pmatrix} = J_i N_i^2,$$

donde I, J, $I \in M_2(\mathbb{R})$.
Por lo tanto tenemos que los elementos de β conmutan.

Definición 1.5.2. *Llamamos **álgebra normal de matrices** al álgebra* $\mathbb{J}$ *generado por* $B_{i,j} : 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq k_i$.

Ejemplo 1.5.3. *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

tenemos que su polinomio característico es $P(\lambda) = (3 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda 17)$, *entonces la forma canónica de Jordan asociada a la matriz* A *tenemos que es*

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

y la matriz cambio de base es

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

la base β *de la* $\mathbb{R}$*-álgebra de matrices* $\mathbb{J}$ *asociada a la matriz* J *es:*

$$B_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

es decir que

$$\mathbb{J} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & -z \\ 0 & z & y \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Ejemplo 1.5.4. *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7/2 & 1 & 5/2 & -2 & 1 & 3/2 & -1 \\ -2 & -1/2 & 2 & -1/2 & 2 & 1 & -3/2 & 1 \\ -5 & -4 & -4 & -3 & 0 & -2 & -4 & -4 \\ 2 & 5/2 & -2 & 7/2 & 1 & -3 & 3/2 & -4 \\ 5 & 3 & 3 & 4 & 0 & 3 & 4 & 4 \\ 7 & 17/2 & 8 & 19/2 & -2 & 0 & 17/2 & 4 \\ -2 & -3/2 & -1 & -5/2 & 2 & -1 & -3/2 & 3 \end{pmatrix}$$

tenemos que su polinomio característico es $P(\lambda) = (\lambda-2)^4(\lambda^2-6\lambda+25)^2$, *entonces la forma canónica de Jordan asociada a la matriz* A *es*

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

y la matriz cambio de base es

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la base β *de la* $\mathbb{R}$*-álgebra de matrices* $\mathbb{J}$ *asociada a la matriz* J *es:*

$$B_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{1,3} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \; B_{1,4} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$B_{2,1} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}, \; B_{2,2} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix},$$

$$B_{2,3} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix}, \; B_{2,4} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

es decir que

$$\mathbb{J} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1&0&0&0&0&0&0&0\\ x_2&x_1&0&0&0&0&0&0\\ x_3&x_2&x_1&0&0&0&0&0\\ x_4&x_3&x_2&x_1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&x_5&-x_6&0&0\\ 0&0&0&0&x_6&x_5&0&0\\ 0&0&0&0&x_7&-x_8&x_5&-x_6\\ 0&0&0&0&x_8&x_7&x_6&x_5 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \in \mathbb{R} \right\}$$

Definición 1.5.5. *Diremos que dos $\mathbb{K}$-álgebras de matrices $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ en $M_n(\mathbb{K})$ son* ***semejantes*** *si existe una matriz invertible $P \in M_n(\mathbb{K})$, tal que $\mathbb{A} = P^{-1}\mathbb{B}P$.*

Definición 1.5.6. *Una $\mathbb{R}$-álgebra $\mathbb{A}$ se llama* ***álgebra normal*** *si $\mathbb{A}$ es el espacio lineal $\mathbb{R}^n$ y la imagen de su primer representación fundamental asociada a la base estándar es un álgebra normal de matrices.*

El siguiente ejemplo es una álgebra normada.

Ejemplo 1.5.7. *La $\mathbb{R}$-álgebra $\mathbb{R}^2$ del Ejemplo 1.3.1, es una álgebra normal, ya que su primera representación fundamental asociada a la base estándar, las calculamos en el Ejemplo 1.4.1, son:*

$$R(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; R(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.6 $\mathbb{K}$-álgebras de Banach

Primeramente recordemos que un **espacio normado sobre un campo** $\mathbb{K}$ es un espacio lineal $\mathbb{E}$ sobre $\mathbb{K}$ con una norma, la cual es una función $||\cdot|| : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, tal que:

i) $||x|| \geq 0$ para toda $x \in \mathbb{E}$, y $||x|| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

ii) $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$ para toda $x \in \mathbb{E}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ para toda $x, y \in \mathbb{E}$.

También recordemos que un **espacio de Banach sobre un campo** $\mathbb{K}$ es un espacio normado en el cual toda sucesión de Cauchy converge.

Definición 1.6.1. *Una* ***$\mathbb{K}$-álgebra normada*** *o* ***álgebra normada sobre*** *$\mathbb{K}$ es un espacio normado $\mathbb{A}$ sobre $\mathbb{K}$, elcual tiene estructura de $\mathbb{K}$-álgebra, y que además la norma $||\cdot||$ satisface $||xy|| \leq ||x||||y||$ para toda $x, y \in \mathbb{A}$ y $||e|| = 1$, donde $e \in \mathbb{A}$ es la unidad.*

Ejemplo 1.6.2. *Sea $\mathbb{J}$ una álgebra de matrices, donde los elementos de ésta álgebra son de la siguiente forma*

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix},$$

definimos la norma, $|\cdot|:\mathbb{J}\to\mathbb{R}$ *como:*

$$|\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}| = \sqrt{\frac{2x^2+y^2}{2}},$$

Se puede ver facilmente que $|e| = 1$. *Ahora veamos que si*

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} z & 0 \\ w & z \end{pmatrix},$$

entonces $|AB| \leq |A||B|$, *tenemos que*

$$\begin{aligned} 2x^2z^2 + y^2w^2 + (xw - yz)^2 &\geq 0 \\ 2x^2z^2 + y^2w^2 + x^2w^2 - 2xwyz + y^2z^2 &\geq 0 \\ 4x^2z^2 + y^2w^2 + 2x^2w^2 + 2yz^2 &\geq 2x^2z^2 + y^2z^2 + x^2w^2 + 2xwyz \\ (2x^2 + y^2)(2z^2 + w^2) &\geq 2x^2z^2 + y^2z^2 + x^2w^2 + 2xwyz \\ |A||B| &\geq |AB|. \end{aligned}$$

Definición 1.6.3. *Una* $\mathbb{K}$- ***álgebra de Banach*** *o* ***álgebra de Banach*** $\mathbb{A}$ ***sobre*** $\mathbb{K}$, *es una* $\mathbb{A}$-*álgebra normada cuyo espacio normado es un espacio de Banach sobre* $\mathbb{K}$.

Ejemplo 1.6.4. *Sea* $\mathbb{C}$ *una* $\mathbb{R}$-*álgebra normada con la norma euclidiana es un álgebra de Banach.*

Ejemplo 1.6.5. *Definimos el conjunto* $C([0,1],\mathbb{C})$ *como el conjunto de funciones continuas y acotadas de* $[0,1]$ *a* $\mathbb{C}$ *es un espacio de Banach, con la norma del supremo,* $f \in C([0,1],\mathbb{C})$,

$$|f| = max_{x\in[0,1]}||f(x)||.$$

Chapter 2

Diferenciabilidad

En este capítulo trataremos temas de diferenciabilidad de Fréchet en espacios de Banach y de diferenciabilidad de funciones entre módulos de Banach. También definiremos la derivada newtoniana y la derivada de Lorch, veremos la relación entre estás definiciones.

2.1 Diferencial de Fréchet

Primeramente recordaremos la definición de diferenciación y veremos algunos resultados como la regla de la cadena.

Definición 2.1.1. *Diremos que una función $f : U \subset \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_2$, definida en un subconjunto abierto U de un espacio de Banach $\mathbb{E}_1$ con valores en un espacio de Banach $\mathbb{E}_2$, es diferenciable en el sentido de Fréchet en un punto $x_0 \in U$ si existe un operador lineal acotado $L : \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_2$, tal que se cumple el siguiente límite*

$$\lim_{\substack{h\to 0,\\ h\in\mathbb{E}_1}} \frac{||f(x_0+h) - f(x_0) - L(h)||_{\mathbb{E}_2}}{||h||_{\mathbb{E}_1}} = 0.$$

Cuando esto se verifique, denotaremos por $Df(x_0)$ al operador L y lo llamaremos diferencial de f en x_0. Diremos que f es diferenciable en U si f es Fréchet diferenciable para todo punto de U.

Cuando $\mathbb{E}_1 = \mathbb{R}^m$ y $\mathbb{E}_2 = \mathbb{R}^n$, se sabe que si f es Fréchet diferenciable en un punto x_0, entonces las primeras derivadas parciales de los componentes existen y el diferencial $Df(x_0)$ está dado, con respecto a la base estándar de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$, por la matriz jacobianade f en x_0:

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{|x_0},$$

en donde $|_{x_0}$ significa que todas las derivadas parciales se evalúan en x_0. Esto también se obtiene cuando $\mathbb{E}_1 = \mathbb{C}^m$ y $\mathbb{E}_2 = \mathbb{C}^n$.

Recordemos los siguientes resultados que se obtienen en la diferenciabilidad. Sean $f, g : U \subset \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_2$, funciones definidas en un subconjunto abierto de un espacio de Banach $\mathbb{E}_1$ sobre $\mathbb{K}$ y con qué espacio de Banach $\mathbb{E}_2$ sobre $\mathbb{K}$. Entonces

- La suma $f + g$ de funciones Fréchet diferenciables es Fréchet diferenciable y su diferencia en un punto $x_0 \in U$, que es un operador $\mathbb{K}$-lineal de $\mathbb{E}_1$ a $\mathbb{E}_2$, está dado por

$$D(f + g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0).$$

- El producto de una función Fréchet diferenciable por una constante es Fréchet diferencianble y su diferencial en un punto $x_0 \in U$, que es un operador $\mathbb{K}$-lineal de $\mathbb{E}_1$ a $\mathbb{E}_2$, está dado por

$$D(cf)(x_0) = cDf(x_0).$$

Los siguiente resultado son clásicos cuando se estudia la diferenciabilidad de funciones en espacios de Banach.

Teorema 2.1.2. *(Regla de la cadena). Sean $f : U \subset \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_2$ y $g : W \subset \mathbb{E}_2 \to \mathbb{E}_3$ funciones, donde U y W son conjuntos abiertos con $f(U) \subset W$, y $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$ y $\mathbb{E}_3$ son espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$. Si f es Fréchet diferenciable en x_0 y g es Fréchet diferenciable en $f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es Fréchet diferenciable en x_0 se cumple la regla de la cadena*

$$D(g \circ f)(x_0) = [D(g(f(x_0)))]D(f(x_0)).$$

Esto es,

$$[D(g \circ f)(x_0)](v) = [D(g(f(x_0)))]([D(f(x_0))](v)),$$

para todo $v \in \mathbb{E}_1$.

Prueba .- Veamos que

$$\lim_{\substack{h\to 0,\\ h\in\mathbb{E}_1}} \frac{||g(f(x_0+h)) - g(f(x_0)) - Dg(f(x_0))[Df(x_0)(x-x_0)||_{\mathbb{E}_2}}{||h||_{\mathbb{E}_1}} = 0.$$

Para esto estimaremos el numerador:

$$\begin{aligned} ||(g\circ f)(x) - (g\circ f)(x_0) - & Dg(f(x_0))(Df(x_0)(x-x_0))|| \\ &= ||(g\circ f)(x) - (g\circ f)(x_0) - Dg(f(x_0))[f(x) - f(x_0)] \\ &\quad + Dg(f(x_0))[f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x-x_0)]|| \\ &\leq ||(g\circ f)(x) - (g\circ f)(x_0) - Dg(f(x_0))[f(x) - f(x_0)]|| \\ &\quad + ||Dg(f(x_0))[f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x-x_0)]|| \end{aligned}$$

Como f es diferenciable, existen δ_0 y $M > 0$ tales que $||f(x) - f(x_0)|| \leq M||x - x_0||$ siempre que $||x - x_0|| < \delta_0$. Dado $\epsilon > 0$, por la definición de diferenciabilidad de g, existe δ_1 tal que $||y - f(x_0)|| < \delta_1$ implica

$$||g(y) - g(f(x_0)) - Dg(f(x_0))[y - f(x_0)]|| < \left(\frac{\epsilon}{2M}\right) ||y - f(x_0)||.$$

Así, $||x - x_0|| < \delta_2 = min\{\delta_0, \delta_1\}$ implica

$$\frac{||g(f(x)) - g(f(x_0)) - Dg(f(x_0))[f(x) - f(x_0)]||}{||x - x_0||} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como $Dg(f(x_0))$ es una transformación lineal, sabemos que existe N constante tal que $||Dg(f(x_0))(y)|| \leq N||y||$ para todo $y \in \mathbb{E}_2$. Ahora bien, por la definición de diferenciabilidad, existe $\delta_3 > 0$ tal que $||x - x_0|| < \delta_3$ implica

$$\frac{||f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x-x_0)||}{||x - x_0||} < \frac{\epsilon}{2N}.$$

Entonces $||x - x_0|| < \delta_3$ implica

$$\frac{||Dg(f(x_0))[f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x-x_0)]||}{||x - x_0||} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea $\delta = min\{\delta_2, \delta_3\}$. Así, $||x - x_0|| < \delta$ implica

$$\frac{||(g\circ f)(x) - (g\circ f)(x_0) - Dg(f(x_0))(Df(x_0)(x-x_0))||}{||x - x_0||} < \epsilon,$$

lo que demuestra la fórmula. ∎

Teorema 2.1.3. *(Teorema de la función inversa). Sean $\mathbb{E}_1, \mathbb{E}_2$ espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$ ambos de dimensión finita n y $U \subset \mathbb{E}_1$ abierto. Supongamos que $f : U \subset \mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_2$ es continuamente diferenciable en $x_0 \in U$ y $det(Df(x_0)) \neq 0$. Entonces existe un conjunto abierto $V \subset U \subset \mathbb{E}_1$, que contiene a x_0 y un conjunto abierto $W \subset \mathbb{E}_2$, que contiene a $f(x_0)$, tal que $f : V \to W$ tiene una inversa continua $f^{-1} : W \to V$, la cual es diferenciable para toda $y \in W$ y satisface:*

$$D(f^{-1})(y) = [Df(f^{-1}(y))]^{-1}.$$

Prueba .- Como $det(Df(x_0)) \neq 0$, entonces $Df(x_0)$ es invertible, luego existe $Df(x_0)^{-1}$ y $||Df(x_0)|| \neq 0$. Como f es diferenciable en x_0, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in \mathbb{E}_1$ y $||x - x_0|| < \delta$, entonces

$$||f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)|| \leq \frac{||x - x_0||}{2||Df(x_0)^{-1}||},$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
||f(x) - f(x_0)|| &= ||f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0) + Df(x_0)(x - x_0)|| \\
&\geq ||Df(x_0)(x - x_0)|| - ||f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)|| \\
&\geq ||Df(x_0)(x - x_0)|| - \frac{||x - x_0||}{2||Df(x_0)^{-1}||} \\
&\geq \frac{||x - x_0||}{2||Df(x_0)^{-1}||},
\end{aligned}$$

ya que

$$||x-x_0|| = ||(Df(x_0))^{-1}(Df(x_0))(x-x_0)|| \leq ||(Df(x_0))^{-1}||||Df(x_0)(x-x_0)||.$$

Para probar que f^{-1} es diferenciable en $y = f(x_0)$ y $Df^{-1}(y) = Df(x_0)^{-1}$, sea $\{y_n\}$ una sucesión de puntos en $\mathbb{E}_2$, distintos de y, convergente a y. Entonces $\{x_n\} = \{f^{-1}(y_n)\}$ es una sucesión de puntos de $\mathbb{E}_1$, distintos de x_0, convergente a x_0 ya que f^{-1} es continua en y. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $||x - x_0|| < \delta$ para todo n ya que $x_n \longrightarrow x_0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{||f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y) - Df(x_0)^{-1}(y_n - y)||}{||y_n - y||} &= \frac{||x_n - x_0 - Df(x_0)^{-1}(f(x_n) - f(x_0))||}{||y_n - y||} \\
&= \frac{||x_n - x_0 - Df(x_0)^{-1}(f(x_n) - f(x_0) - Df(x_0)(x_n - x_n) + Df(x_0)(x_n - x_0))||}{||y_n - y||} \\
&= \frac{||x_n - x_0 - Df(x_0)^{-1}(f(x_n) - f(x_0) - Df(x_0)(x_n - x_0)) - (x_n - x_0)||}{||y_n - y||} \\
&= \frac{||Df(x_0)^{-1}(f(x_n) - f(x_0) - Df(x_0)(x_n - x_0))||}{||y_n - y||} \\
&\leq ||Df(x_0)^{-1}|| \frac{||f(x_n) - f(x_0) - Df(x_0)(x_n - x_0)||}{||x_n - x_0||} \frac{||x_n - x_0||}{||y_n - y||} \\
&\leq 2||Df(x_0)^{-1}||^2 \frac{||f(x_n) - f(x_0) - Df(x_0)(x_n - x_0)||}{||x_n - x_0||}.
\end{aligned}$$

Como f es diferenciable en x_0, tenemos

$$\frac{||f(x_n) - f(x_0) - Df(x_0)(x_n - x_0)||}{||x_n - x_0||} \to 0$$

y por lo tanto

$$\frac{||f^{-1}(y_n) - f(y) - Df(x_0)^{-1}(y_n - y)||}{||y_n - y||} \to 0.$$

Esto prueba que f^{-1} es diferenciable en $y = f(x_0)$ y $Df^{-1}(y) = Df(x_0)^{-1}$.■

Lo que nosotros queremos hacer es definir la diferenciabilidad en $\mathbb{K}$-álgebras de Banach, la diferenciabilidad en el sentido de Fréchet nos da una idea de lo que queremos que cumpla la diferenciabilidad en álgebras de Banach. Ahora veamos los siguientes resultados, donde las funciones van de un espacio de Banach a una $\mathbb{K}$-álgebra.

Definición 2.1.4. *Sean $\mathbb{E}$ un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$ y $\mathbb{A}$ una $\mathbb{K}$-álgebra, sean f y g funciones tal que $f, g : U \subset \mathbb{E} \to \mathbb{A}$.*

Ahora definimos la función producto fg de manera natural, $fg : U \subset \mathbb{E} \to \mathbb{A}$, tal que

$$(fg)(x) = f(x)g(x),$$

donde $f(x)g(x)$ denota el producto en el álgebra de $f(x)$ por $g(x)$.

Supongamos que la imagen de g está contenido en $G(\mathbb{A})$, definimos la función conciente (f/g), $fg : U \subset \mathbb{E} \to \mathbb{A}$, como:

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$$

donde $f(x)/g(x)$ denota el cociente en el álgebra de $f(x)$ entre $g(x)$.

En las siguientes proposiciones, veremos como es la regla del producto y la regla del cociente en funciones que van de un espacio de Banach a un álgebra.

Proposición 2.1.5. *(Regla del producto en álgebras). Sean $\mathbb{E}$ un espacio de Banach sobre el campo $\mathbb{K}$ y $\mathbb{A}$ una $\mathbb{K}$-álgebra de Banach. Supongamos que $f, g : U \subset \mathbb{E} \to \mathbb{A}$ son funciones Fréchet diferenciables definidas en el abierto U, entonces el producto fg es Fréchet diferenciable y su diferencial está dada por:*

$$D(fg)(x_0) = g(x_0)Df(x_0) + f(x_0)Dg(x_0),$$

esto es

$$[D(fg)(x_0)]v = g(x_0)(Df(x_0)v) + f(x_0)(Dg(x_0)v),$$

para todo $v \in \mathbb{E}$, en donde $g(x_0)(Df(x_0)v)$ significa el producto en $\mathbb{A}$ de $g(x_0)$ por $[Df(x_0)]v$.

Ejemplo 2.1.6. *Sea $\mathbb{A}$ el espacio euclidiano $\mathbb{R}^2$ con el producto de la $\mathbb{R}$-álgebra de los números complejos. Conideremos a las funciones f y g definidas por*

$$f(x, y) = (x + xy, x^2 + y^2 + xy), \quad g(x, y) = (cos(xy), e^{x+y}).$$

Observemos que f, g son Fréchet diferenciable y no son diferenciables en el sentido complejo, pues sus matrices jacobianas están dadas por

$$\begin{pmatrix} 1+y & x \\ 2x+y & 2y+x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -ysenx & -xseny \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix},$$

respectivamente, por lo que no están contenidas en la primera representación fundamental de $\mathbb{C}$.
El producto complejo de f y g es el siguiente:

$$\begin{aligned} f(x, y)g(x, y) = & ((x + xy)cos(xy) - (x^2 + y^2 + xy)e^{x+y}, \\ & (x + xy)e^{x+y} + (x^2 + y^2 + xy)cos(xy)) \\ = & x(1 + y)(cos(xy), e^{x+y}) + (x^2 + y^2 + xy)(-e^{x+y}, cox(xy)), \end{aligned}$$

cuyo diferencial de Fréchet, por la regla del producto en $\mathbb{A}$, está dado por

$$[D(fg)(x_0)](a,b) = g(x_0)(Df(x_0)(a,b)) + f(x_0)(Dg(x_0)(a,b)).$$

calculamos los siguientes productos

$$\begin{pmatrix} 1+y & x \\ 2x+y & 2y+x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -ysenx & -xseny \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

Podemos evaluar los diferenciales $[Df(x_0,y_0)]$ y $[Dg(x_0,y_0)]$ en (a,b) :

$$[Df(x_0,y_0)](a,b) = (a(1+y_0)+bx_0, a(2x_0+y_0)+b(2y_0+x_0)),$$

$$[Dg(x_0,y_0)](a,b) = (-ay_0senx_0 - bx_0seny_0, e^{x_0+y_0}(a+b)).$$

Al multiplicar estas dos últimas expresiones por $g(x_0,y_0)$ y $f(x_0,y_0)$, respectivamente, obtenemos

$$\begin{aligned} g(x_0,y_0)([Df(x_0,y_0)](a,b)) &= (cos(x_0y_0), e^{x_0+y_0})(a(1+y_0)+bx_0, \\ &\quad a(2x_0+y_0)+b(2y_0+x_0)) \\ &= (cos(x_0y_0)(a(1+y_0)+bx_0) - e^{x_0+y_0}(a(2x_0+y_0) \\ &\quad +b(2y_0+x_0)), e^{x_0+y_0}(a(1+y_0)+bx_0) \\ &\quad +cos(x_0y_0)(a(2x_0+y_0)+b(2y_0+x_0))) \\ &= cos(x_0y_0)(a(1+y_0)+bx_0, a(2x_0+y_0)+b(2y_0+x_0)) \\ &\quad +e^{x_0+y_0}(-a(2x_0+y_0)-b(2y_0+x_0), a(1+y_0)+bx_0), \end{aligned} \tag{2.1}$$

y

$$\begin{aligned} f(x_0,y_0)[Dg(x_0,y_0)](a,b) &= (x_0+x_0y_0, x_0^2+y_0^2+x_0y_0)(-ay_0senx_0 - bx_0seny_0, \\ &\quad e^{x_0+y_0}(a+b)) \\ &= ((x_0+x_0y_0)(-ay_0senx_0 - bx_0seny_0) - (x_0^2+y_0^2+x_0y_0) \\ &\quad e^{x_0+y_0}(a+b), (x_0+x_0y_0)e^{x_0+y_0}(a+b) \\ &\quad +(x_0^2+y_0^2+x_0y_0)(-ay_0senx_0 - bx_0seny_0)) \\ &= (x_0+x_0y_0)(-ay_0senx_0 - bx_0seny_0, e^{x_0+y_0}(a+b)) \\ &\quad +(x_0^2+y_0^2+x_0y_0)(-e^{x_0+y_0}(a+b), -ay_0senx_0 - bx_0seny_0). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Por lo tanto, sumando las dos expresiones (2.1) y (2.2) obtenemos el diferencial del producto de fg en el punto (x_0,y_0) evaluado en (a,b).

Proposición 2.1.7. *(Regla del cociente en álgebras). Sean $\mathbb{E}$ un espacio de Banach sobre un campo $\mathbb{K}$ y $\mathbb{A}$ una $\mathbb{K}$-álgebra de Banach. Supongamos que $f,g : U \subset \mathbb{E} \to \mathbb{A}$ son funciones de Fréchet diferenciable definidas en el* *abiertoU, y $Im(g) \subset G(\mathbb{A})$, entonces el cociente f/g es Fréchet diferenciable, y su diferencial está dado por:*

$$D(f/g)(x_0) = \frac{g(x_0)Df(x_0) - f(x_0)Dg(x_0)}{g(x_0)^2},$$

esto es,

$$[D(f/g)(x_0)]v = \frac{g(x_0)([Df(x_0)]v) - f(x_0)([Dg(x_0)]v)}{g(x_0)^2},$$

para todo $v \in \mathbb{E}$, en donde $g(x_0)([Df(x_0)]v)$ significa el producto en $\mathbb{A}$ de $g(x_0)$ por $([Df(x_0)]v)$.

Ejemplo 2.1.8. *Sean $\mathbb{A}, f, g$ dadas en el Ejemplo 2.1.1. Entonces para calcular el cociente complejo de f y g primero calculamos la invera multiplicativa compleja de $g(x,y)$, que esta dada por*

$$(g(x,y))^{-1} = \left(\frac{cos(xy)}{cos^2(xy) + e^{2(x+y)}}, \frac{-e^{x+y}}{cos^2(xy) + e^{2(x+y)}}\right).$$

Por lo tanto, el cociente se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(x,y)/g(x,y) = &\left(\frac{(x+xy)cos(xy) + (x^2+y^2+xy)e^{x+y}}{cos^2(xy) + e^{2(x+y)}}\right) e_1 \\ &\left(\frac{-(x+xy)e^{x+y} + (x^2+y^2+xy)cos(xy)}{cos^2(xy) + e^{2(x+y)}}\right) e_2. \end{aligned}$$

Para encontrar el diferencial del cociente f/g en el punto (x_0, y_0) aplicado a (a,b), el cual por la regla del cociente para el diferencial de Fréchet está dado por

$$[D(f/g)(x_0,y_0)](a,b) = \frac{g(x_0,y_0)([Df(x_0,y_0)](a,b)) - f(x_0,y_0)([Dg(x_0,y_0)](a,b))}{g(x_0,y_0)^2}, \tag{2.3}$$

primero, usando las igualdades de (2.1) y (2.2) del Ejemplo 2.1.1,calculamos el numerador del miembro del lado derecho de la igualdad anterior:

$$\begin{aligned} &g(x_0)([Df(x_0)](a,b)) - f(x_0)([Dg(x_0)](a,b)) \\ =&cos(x_0y_0)(a(1+y_0) + bx_0, a(2x_0+y_0) + b(2y_0+x_0)) \\ &+ e^{x_0+y_0}(-a(2x_0+y_0) - b(2y_0+x_0), a(1+y_0) + bx_0) \\ &- (x_0 + x_0y_0)(-ay_0senx_0 - bx_0seny_0, e^{x_0+y_0}(a+b)) \\ &- (x_0^2 + y_0^2 + x_0y_0)(-e^{x_0+y_0}(a+b), -ay_0senx_0 - bx_0seny_0), \end{aligned}$$

multiplicando a ésta, con el producto complejo por

$$(g(x_0, y_0))^{-2} = \left(\frac{cos^2(x_0y_0) - e^{2(x_0+y_0)}}{(cos^2(x_0y_0) + e^{2(x_0+y_0)})^2}, \frac{-2e^{x_0+y_0}cos(x_0y_0)}{(cos^2(x_0y_0) + e^{2(x_0+y_0)})^2} \right).$$

tendremos evaluada la expresión del lado derecho de (2.3).

2.2 Diferenciabilidad en álgebras de Banach

En esta sección daremos la definición de derivada de tipo newtoniano en álgebras y la definición de derivada de Lorch. Además veremos unos resultados importantes que usaremos para saber cuando un sistema de ecuaciones diferenciales es algebrizable, que veremos en el siguiente capítulo.

2.2.1 Derivada newtoniana

En la sección anterior estudiamos la diferenciabilidad en el sentido de Fréchet, donde las funciones van de un espacio de Banach a un espacio de Banach o a un álgebra. En esta sección lo que haremos es ver la diferenciabilidad de funciones donde el dominio y el contradominio es un álgebra de Banach, a esta diferenciabilidad le llamaremos diferenciabilidad newtoniana. La diferenciabilidad que nosotros buscamos es una diferenciabilidad que nos asegure en términos de la ecuaciones de Cauchy-Riemann generalizadas que una función es diferenciable. La diferenciabilidad newtoniana nos acerca a esta diferenciabilidad que queremos.

Definición 2.2.1. *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra de Banach y $U \subset \mathbb{A}$ un subconjunto abierto. Decimos que una función $f : U \subset \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es* ***N-diferenciable*** *en un punto $x_0 \in U$ si existe un elemento $a \in \mathbb{A}$, tal que el siguiente lı́mite existe y se da la igualdad*

$$\lim_{\substack{h \to 0, \\ h \in G(\mathbb{A})}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a.$$

Denotamos por $f_N'(x_0)$ al elemento a y lo llamamos N-derivada de f em x_0. Si f es N-diferenciable en todos los puntos de U, diremos que f es diferenciable sobre U.

Después de ver la definición de diferenciabilidad newtoniana, queremos saber si cumple la regla de la cadena. Antes de ver el resultado de la regla de la cadena, veamos el siguiente resultado que nos sirve para demostrar la regla de la cadena.

Lema 2.2.2. *Si $f_N^{'}(x_0)$ es regular, entonces existe un $\delta > 0$ tal que para todo x en la vecindad de radio δ de x_0 y $x - x_0$ es regular se tiene que $f(x) - f(x_0)$ es regular.*

Prueba .- El conjunto de los elementos invertibles en un álgebra de Banach es abierto, si $f_N^{'}(x_0)$ es regular, entonces existe un $r > 0$ tal que la vecindad de radio r de $f'_N(x_0)$ está totalmente contenida en el conjunto de elementos regulares. Por definición de derivada tenemos que existe un $\delta > 0$ tal que si x en U, subconjunto abierto del álgebra, y $||x - x_0|| < \delta$, entonces

$$\left\| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'_N(x_0) \right\| < r.$$

Por lo tanto, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ es regular para todo $x \in U$ con $||x - x_0|| < \delta$ y $x - x_0$ es regular, tenemos que

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

es regular. ■

El siguiente teorema nos dice cuando se cumple la regla de la cadena en la diferenciabilidad newtoniana. Antes definimos el conjunto $C(x_0, \delta)$, tal que $x \in C(x_0, \delta)$ si $x - x_0$ es regular y $||x - x_0|| < \delta$.

Teorema 2.2.3. *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra de Banach, $U, V \subset \mathbb{A}$ conjuntos abiertos y $f : U \to \mathbb{A}, g : V \to \mathbb{A}$ funciones N-diferenciables en x_0 y $f(x_0)$, respectivamente, con $f(U) \subset V$ y $f_N^{'}(x_0)$ elemento regular en $\mathbb{A}$, entonces $h := g \circ f$ cumple la regla de la cadena para la N-derivada, es decir, h es N-diferenciable y su N-derivada está dada por*

$$h_N^{'}(x_0) = g_N^{'}(y_0) f_N^{'}(x_0),$$

en donde $y_0 = f(x_0)$ y $g_N^{'}(y_0) f_N^{'}(x_0)$ representa el producto en $\mathbb{A}$ de $g_N^{'}(y_0)$ y $f_N^{'}(x_0)$.

Prueba .- Usamos la notación $y_0 = f(x_0)$. Por el Lema 2.2.2 podemos tomar $\delta_1 > 0$ tal que si $x \in U$ y $x \in C(x_0, \delta_1)$, entonces $f(x) - f(x_0)$ es regular.
Sea $\epsilon > 0$. Dado que f es derivable en x_0 podemos tomar $\delta_2 > 0$ tal que si $x \in C(x_0, \delta_2) \cap U$, entonces

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f_N'(x_0) \right| < min \left\{ \frac{\epsilon/3}{|g_N'(y_0)| + \epsilon/3}, \epsilon/3 \right\}.$$

De la derivabilidad de g en y_0 podemos elegir δ_3 tal que si $y \in C(y_0, \delta_3) \cap V$, entonces

$$\left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - g_N'(y_0) \right| < min \left\{ \frac{\epsilon/3}{|f_N'(y_0)| + \epsilon/3}, \epsilon/3 \right\}.$$

Como f es derivableen x_0, podemos tomar δ_4 de tal manera que si $x \in C(x_0, \delta_4) \cap U$, entonces

$$f(x) \in C(y_0, \delta_3).$$

Tomando $\delta = min\{\delta_1, \delta_2, \delta_4\}$ tenemos que si $x \in C(x_0, \delta)$, entonces $f(x) \in C(y_0, \delta_3)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} - g_N'(f(x_0)) f_N'(x_0) \right| \\
=& \left| \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g_N'(f(x_0)) f_N'(x_0) \right| \\
\leq& \left| \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f_N'(x_0) \right) \right| \\
&+ \left| f_N'(x_0) \left(\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} - g_N'(f(x_0)) \right) \right| \\
\leq& \left| \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \left(\frac{\epsilon/3}{|g'_N(f(x_0))| + \epsilon/3} \right) \right| + |f'_N(x_0)| \left(\frac{\epsilon/3}{|f'_N(x_0)| + \epsilon/3} \right) \\
\leq& \left(|g_N'(f(x_0))| + \frac{\epsilon/3}{|f'_N(x_0)| + \epsilon/3} \right) \frac{\epsilon/3}{|g'_N(f(x_0))| + \epsilon/3} + \epsilon/3 \\
\leq& \left(|g_N'(f(x_0))| + 1 \right) \frac{\epsilon/3}{|g'_N(f(x_0))| + \epsilon/3} + \epsilon/3 < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(g \circ f)_N'(x_0) = g'_N(f(x_0)) f'_N(x_0)$.■

Los siguientes ejemplos muestran cuando se cumple la regla de la cadena.

Ejemplo 2.2.4. *Sea $\mathbb{B}$ una álgebra de Banach, $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ la función dada por $x \to 2x$ y $g : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ la función definida por $x \to x^2$. Entonces $f'_N = 2e$ es regular, donde ee es la unidad del álgebra, y $g'_N(x) = 2x$. Por la regla de la cadena tenemos que si $h := g \circ f$, entonces $h'_N(x_0) = g'_N(y_0)f'_N(x_0) = 2(2x)2e = 8x$, ya que son válidas las reglas usuales de diferenciación. Derivando directamente tenemos que la derivada de $h(x) = (2x)^2 = 4x^2$ está dado por $h'_N = 8x$. Por lo tanto, la regla de la cadena se verifica.*

Ejemplo 2.2.5. *Sea $\mathbb{B}$ una álgebra de Banach y $a \in \mathbb{B}$ un elemento regular. Entonces la función $h : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ definida por $h(x) = e^{ax}$ es N-derivable y es la composición $h = g \circ f$ de las funciones $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, definida por $x \to ax$, y $g : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, dada por $x \to e^x$. Como se verifican las reglas usuales de diferenciación, tenemos que $h'_N(x) = ae^{ax}, g'_N(f(x)) = e^{f(x)} = e^{ax}$, y $f'_N(x) = a$, de donde se obtiene*

$$h'_N(x) = g'_N(f(x))f'_N(x).$$

Por lo tanto, se cumple la regla de la cadena.

El siguiente ejemplo es interesante, ya que no cumple con la regla de la cadena, pero la composición sigue siendo diferenciable.

Ejemplo 2.2.6. *Sea $\mathbb{B}$ un álgebra de Banach con unidad e y sea $a \in \mathbb{B}$ un elemento singular, definimos las funciones $f, g : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ tal que $f(x) = ax$ y g está dada por*

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \text{ es regular.} \\ 2x, & \text{si } x \text{ es singular.} \end{cases}$$

Ahora definimos la función $h := g \circ f$, tenemos que $h(x) = 2ax$.

Así, derivando directamente h en 0, tenemos que $h'_N(0) = 2a$. La derivada de f en 0 es $f'_N(0) = a$ y la derivada de g en $f(0)$ está dada por

$$g'_N(f(0)) = g'_N(0) = \lim_{h \to 0,\ h \in G(\mathbb{B})} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in G(\mathbb{B})}} \frac{h - 0}{h} = e.$$

Es decir,

$$h'_N(0) = 2a \neq a = g'_N(f(0))f'_N(0),$$

por lo que la regla de la cadena no se cumple.

2.2.2 Derivada de Lorch

La diferenciabilidad de Lorch nos cumple con lo que queremos y también cumple con algunas propiedades de la diferenciabilidad de funciones de una variable.

Definición 2.2.7. *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra de Banach y $U \subset \mathbb{A}$ un subconjunto abierto. Decimos que una función $f : U \subset \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es* ***$\mathbb{A}$-diferenciable*** *o* ***diferenciable en el sentido de Lorch en un punto*** *$x_0 \in U$ si f es diferenciable en el sentido de Fréchet en x_0 y existe un elemento $a \in \mathbb{A}$, tal que $Df(x_0)v = av$ para todo $v \in \mathbb{A}$, en donde av denota al producto de a por v en $\mathbb{A}$, denotamos por $f'(x_0) = a$ al elemento a.*

Por lo tanto, la $\mathbb{A}$-diferenciable de f en un punto x_0 equivale a la existencia de un elemento $a \in \mathbb{A}$, tal que se cumple el siguiente límite:

$$\lim_{h\to 0,\ h\in G(\mathbb{A})} \frac{||f(x_0+h) - f(x_0) - ah||_{\mathbb{A}}}{||h||_{\mathbb{A}}} = 0,$$

en donde ah denota al producto en $\mathbb{A}$ de a con h.

Veamos un ejemplo de la diferenciabilidad de Lorch. Sea $\mathbb{A} = (\mathbb{R}^2, \cdot)$ álgebra de Banach, donde el producto es el complejo, definido en el Ejemplo 1.3.6, y la norma es la euclidiana definida como

$$||(x, y)|| = x^2 + y^2,$$

sea $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ definida por $f(x) = x^2$. Veamos que $f'(x) = 2x$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{h\to 0,\\ h\in G(\mathbb{A})}} \frac{||(x+h)^2 - x^2 - 2xh||}{||h||} \\
&= \lim_{\substack{h\to 0,\\ h\in G(\mathbb{A})}} \frac{||((x_1,x_2)+(h_1,h_2))^2 - (x_1,x_2)^2 - 2(x_1,x_2)(h_1,h_2)||}{||(h_1,h_2)||} \\
&= \lim_{\substack{h\to 0,\\ h\in G(\mathbb{A})}} \frac{||((x_1,x_2)+(h_1,h_2))^2 - (x_1,x_2)^2 - 2(x_1,x_2)(h_1,h_2)||}{||(h_1,h_2)||} \\
&= \lim_{\substack{h\to 0,\\ h\in G(\mathbb{A})}} \frac{||(h_1^2 - h_2^2, 2h_1h_2)||}{||(h_1,h_2)||} = \lim_{\substack{h\to 0,\\ h\in G(\mathbb{A})}} \frac{||(h_1,h_2)^2)||}{||(h_1,h_2)||} = 0.
\end{aligned}$$

Recordemos que $Df(x_0)$ es la matriz jacobiana si el álgebra $\mathbb{A}$ es el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ con un producto de álgebra. También recordemos que la primera representación fundamental de un álgebra $\mathbb{A}$ asociada a la base β es el isomorfismo de álgebras, $R_\beta : \mathbb{A} \to M_m(\mathbb{K})$, cuando la base es la esándar denotaremos al isomorfismo por R. El siguiente resultado es importante para saber si una función es $\mathbb{A}$-diferenciable.

Proposición 2.2.8. *Supongamos que $\mathbb{A}$ es el espacio $\mathbb{R}^n$ con un producto de álgebra y que $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es $\mathbb{A}$-diferenciable en un punto $x_0 \in U$, en donde U es abierto. Entonces*

$$Df(x_0) = R(f'(x_0)),$$

esto es, si $f'(x_0) = (a_1, a_2, ..., a_n)$, entonces

$$Df(x_0) = a_1R_1 + a_2R_2 + ... + a_nR_n.$$

Prueba .- Supongamos que $f'(x_0) = (a_1, a_2, ..., a_n)$. De la definición de $\mathbb{A}$-diferenciable tenemos que

$$Df(x_0)(x) = ax,$$

en donde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ y el primer miembro del lado derecho de la expresión anterior representa al producto en $\mathbb{A}$.
Para evaluar $Df(x_0)$ en x, calculamos el producto

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_j}|_{x_0} x_j \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_2}{\partial x_j}|_{x_0} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_n}{\partial x_j}|_{x_0} x_j \end{pmatrix}.$$

Ahora calculamosmos el producto de a por x

$$\begin{aligned} ax = & \ (a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_ne_n)(x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n) \\ = & \ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n a_l x_j c_{lji} e_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{l=1}^n a_l c_{lij} \right) x_j \right) e_i. \end{aligned} \tag{2.4}$$

De la igualdad $Df(x_0)x = ax$, tenemos que

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)x_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{l=1}^n a_l c_{lji} \right) x_j, \tag{2.5}$$

entonces

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) = \sum_{i=1}^{n} a_l c_{lji}, \tag{2.6}$$

que son las entradas de la igualdad matricial $Df(x_0) = R(a)$, con lo que terminamos la demostración. ■

Como consecuencia de la Proposición 2.2.8 tenemos que si una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es $\mathbb{A}$-diferenciable en x, entonces $Df(x) \in R(\mathbb{A})$ y por definición f es Fréchet diferenciable en x. En la siguiente proposición tenemos que la recíproca necesita la hipótesis adicional de diferencialbilidad de Fréchet para asegurar la $\mathbb{A}$-diferenciabilidad.

Proposición 2.2.9. *Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función Fréchet diferenciable en un punto x_0 y $Df(x_0) \in R_\beta(\mathbb{A})$, esto es, $Df(x_0) = a_1R_1 + ... + a_nR_n$, en donde $\mathbb{A}$ es el espacio $\mathbb{R}^n$ con un producto de álgebra, $\beta = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ es una base de $\mathbb{A}, R_\beta$ es la primera representación fundamental de $\mathbb{A}$ asociada a $\beta, R_i = R_\beta(f_i)$ para $i = 1, 2, ...n$, y $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Entonces f es $\mathbb{A}$-diferenciable en x_0 y su $\mathbb{A}$-derivada está dada por*

$$f^{'}(x_0) = a.$$

Prueba .- De la igualdad matricial que

$$Df(x_0) = a_1R_1 + a_2R_2 + ... + a_nR_n,$$

tenemos que las entradas satisfacen las n^2 igualdades (2.6). Procediendo de manera inversa en la prueba de la Proposición 2.2.8, tenemos que se cumplen las igualdades (2.4) y (2.5), de donde podemos obtener que

$$Df(x_0) = ax.$$

Por lo tanto, f es $\mathbb{A}$-diferenciable y sus $\mathbb{A}$-derivada satisface la igualdad $f^{'}(x_0) = a$.■

Teorema 2.2.10. *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra de Banach cuyo conjunto de elementos regulares $G(\mathbb{A})$ es denso en $\mathbb{A}$. Si $f : U \subset \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es N-diferenciable sobre un conjunto abierto U, entonces f es $\mathbb{A}$-diferenciable sobre U y las derivadas coinciden, esto es, $f^{'}(x) = f^{'}_N(x)$ para toda $x \in U$.*

2.3 Relación entre la diferenciabilidad de Fréchet y la diferenciabilidad de Lorch

Esta sección hablaremos de la relación entre la diferenciabilidad de Fréchet y la diferenciabilidad de Lorch. Tambi"en veremos otro forma de demostrar el resultado de como cambia la primera representación fundamental de un álgebra $\mathbb{A}$ cuando cambiamos de base.

2.3.1 Cambio de base

Sea $f : U \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ una función definida en un abierto U. Si $\beta = \{\beta_1, ..., \beta_n\}$ es una base de $\mathbb{K}^n$, denotamospor $(\partial f_j / \partial \beta_i)(x_0)$ a las derivadas parciales

$$\frac{\partial f_j}{\partial \beta_i}(x_0) = \lim_{h\to 0,\ h\in\mathbb{K}} \frac{f(x_0 + h\beta_i) - f(x_0)}{h}$$

con respecto a la dirección β_i de las componentes f_j de la función $f = f_1\beta_1 + ... + f_n\beta_n$. Usaremos la notación $J_\beta f(x_0)$ para la matriz jacobiana de f con respecto a la base β en el punto x_0, esto es,

$$J_\beta f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \beta_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \beta_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \beta_1} & \frac{\partial f_n}{\partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial \beta_n} \end{pmatrix} |_{x_0}.$$

Observemos que si β es la base estándar de $\mathbb{K}^n$, entones $\partial f_j / \partial e_i = \partial f_j / \partial x_i$, en donde $x = (x_1, ..., x_n)$ denota a las coordenadas de $\mathbb{K}^n$.

Observemos que si $\beta = \{\beta_1, ..., \beta_n\}$ está dada por $\beta_i = \sum_{j=1}^n s_{ji}\gamma_j$ para $i = 1, ..., n$, $s_{ij} \in \mathbb{K}$, entonces las coordenadas $y = (y_1, ..., y_n)$ asociadas a β se relacionan con las coordenadas $x = (x_1, ..., x_n)$ asociadas a la base $\gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_n\}$, de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^n y_i\beta_i = \sum_{i=1}^n y_i \sum_{j=1}^n s_{ji}\gamma_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n s_{ji} y_i \right) \gamma_j = \sum_{j=1}^n x_j\gamma_j,$$

es decir, tenemos que $x_i = \sum_{j=1}^n s_{ji}y_j$ para $j = 1, ..., n$, o de manera equivalente $x = L_S(y)$, donde S es la matriz $S = (s_{ij})$ y L_S denota a la transforación lineal asociada a la matriz S.

Denotemos por g a la función f expresada en el sistema de coordenadas y, entonces $g = L_S^{-1} \circ f \circ L_S$. La relación entre $D_\beta f$ (que es Jg en las coordenadas y) y $D_\gamma f$ está dadapor la igualdad siguiente:

$$D_\beta f = S^{-1} D_\gamma f S. \tag{2.7}$$

Si γ es la base estándar de $\mathbb{K}^n$, entonces

$$D_\beta f = S^{-1} D f S, \tag{2.8}$$

Df denota a la matriz jacobiana de f en la base estándar.

Proposición 2.3.1. *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra, que es el espacio $\mathbb{K}^n$ con un producto, y R_β, R_γ las primeras representaciones fundamentales de $\mathbb{A}$ con respecto a las bases β, γ, respectivamente. Denotemos por $S_i = R_\beta(\beta_i)$ y $R_i = R_\gamma(\gamma_i)$ para $i = 1, ..., n$. Bajo estas condiciones tenemos que*

$$S_j = S^{-1} \sum_{i=1}^{n} s_{ij} R_i S$$

para $j = 1, ..., n$.

Prueba .- Para mostrar esto, tenemos que si

$$D_\beta f(y_0) = \sum_{i=1}^{n} b_i S_i, \; D_\gamma f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} a_i R_i,$$

donde $x_0 = L_S(y_0)$ y $a = L_S(b)(a_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij} b_j)$. Entonces

$$S^{-1} D_\gamma S = S^{-1} \sum_{i=1}^{n} a_i R_i S = S^{-1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} s_{ij} b_j R_i S = \sum_{j=1}^{n} b_j S^{-1} \sum_{i=1}^{n} s_{ij} R_i S.$$

Luego, de la igualdad (2.7) tenemos que $S^{-1} D_\gamma f S = \sum_{i=1}^{n} b_i S_i$, entonces $S_j = S^{-1} \sum_{i=1}^{n} s_{ij} R_i S$ para $j = 1, 2, ..., n$.■

Ejemplo 2.3.2. *Sea $\mathbb{A}$ la $\mathbb{R}$-álgebra $\mathbb{C}$ y $\beta = \{\beta_1, \beta_2\}$ la base de $\mathbb{A}$ dada por $\beta_1 = e_2, \beta_2 = e_1 + e_2$, entoncess la matriz S está dada por*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La tabla del producto de $\mathbb{A}$ con respecto a β es la siguiente:

$\cdot$	β_1	β_2
β_1	$\beta_1 - \beta_2$	$2\beta_1 - \beta_2$
β_2	$2\beta_1 - \beta_2$	$2\beta_1$

de donde podemos obtener que las imágenes de β_1 y β_2 están respectivamente dadas por

$$R_\beta(\beta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \; R_\beta(\beta_2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} S^{-1}(R(e_2))S &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = R_\beta(\beta_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S^{-1}(R(e_1)+R(e_2))S &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = R_\beta(\beta_2). \end{aligned}$$

La función $f(\xi) = \xi^2$ con respecto a la base estándar de $\mathbb{R}^2$, se escribe como $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$, y con respecto a la base β tenemos que

$$\begin{aligned} f(u,v) =&(u\beta_1 + v\beta_2)^2 = u^2\beta_1^2 + 2uv\beta_1\beta_2 + v^2\beta_2^2 \\ =&u^2(\beta_1 - \beta_2) + 2uv(2\beta_1 - \beta_2) + v^2(2\beta_1) \end{aligned}$$

$$= (u^2 + 4uv + 2v^2, -u^2 - 2uv),$$

de donde obtenemos que $J_\beta f(u,v)$ está dada por la matriz

$$J_\beta f = \begin{pmatrix} 2u+4v & 4u+4v \\ -2u-2v & -2u \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La relación entre las matrices jacobianas asociadas a β y a la base estándar de $\mathbb{R}^2$ está dada en la igualdad

$$S^{-1}Jf(x,y)S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2y & 4y \\ -2y & 2x-2y \end{pmatrix}.$$

Los siguientes resultados relaciona la deiferenciabilidad de Fréchet con la diferenciabilidad de Lorch. Esto es de gran ayuda, ya que en varios casos es difícil calcular la diferenciabilidad de Fréchet, y entonces nos podemos ayudar calculando la diferenciabilidad de Lorch.

Teorema 2.3.3. *(Regla de la cadena para diferenciabilidad de Fréchet y Lorch.) Si $\mathbb{E}$ es un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}, \mathbb{A}$ es un álgebra de Banach sobre $\mathbb{K}, f : U \subset \mathbb{E} \to \mathbb{A}$ es una función Fréchet diferenciable en un punto x_0 en el abierto U y $g : V \subset \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una función definida sobre un abierto V que contiene a $f(U)$, esto es $f(U) \subset V$, que es $\mathbb{A}$-diferenciable en $f(x_0)$. Entonces por la regla de la cadena para la derivada de Fréchet, la función $h = g \circ f$ es Fréchet diferenciable en x_0 y su diferencial está dado por*

$$Dh(x_0) = Dg(f(x_0))Df(x_0).$$

que es el operador lineal de $\mathbb{E}$ a $\mathbb{A}$ definido por

$$Dh(x_0)v = Dg(f(x_0))(Df(x_0)v),$$

en donde $Dg(f(x_0))(Df(x_0)v)$ denota al producto en $\mathbb{A}$ de $Dg(f(x_0))$ y $Df(x_0)v$.

Ejemplo 2.3.4. *Sean f y g las funciones definidas por $f(x, y, z) = (x + z, y + z)$ y $g(x, y) = e_{\mathbb{C}}^{(x,y)}$ en donde $e_{\mathbb{A}}^{\cdot}$ denota a la función exponencial compleja de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$. Entonces la función $h = g \circ f$ es Fréchet diferenciable y su diferencial está dado por*

$$Dh(x_0, y_0, z_0) = g'(f(x_0, y_0, z_0))Df(x_0, y_0, z_0),$$

en donde

$$Df(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$g'(f(x_0, y_0, z_0)) = e_{\mathbb{C}}^{f(x_0,y_0,z_0)} = e^{x+z}(cos(y + z), sen(y + z)).$$

Por lo tanto,

$$[Dh(x_0, y_0, z_0)](a, b, c) = e^{x_0+z_0}(cos(y_0 + z_0), sen(y_0 + z_0))(a + c, b + c),$$

en donde la multiplicación de elementos de $\mathbb{R}^2$, que aparece en el lado derecho de la expresión anterior, denota al producto complejo. Entonces

$$\begin{aligned}[Dh(x_0, y_0, z_0)](a, b, c) = &e^{x_0+z_0}((a + c)cos(y_0 + z_0) - (b + c)sen(y_0 + z_0), \\ &(a + b)sen(y_0 + z_0) + (b + c)cos(y_0 + z_0)).\end{aligned}$$

Teorema 2.3.5. *(Regla de la cadena para diferenciabilidad con respecto a dos álgebras.) Si $\mathbb{E}$ es un espacio de Banach en el cual se tiene definidas dos* *estructuras de álgebras de Banach* $\mathbb{A}$ *y* $\mathbb{B}, f : U \subset \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ *es una función* $\mathbb{A}$*-diferenciable en* x_0 *en el abierto* U *y* $g : V \subset \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ *es una función definida en un abierto* V*, donde* $f(U) \subset V$*, que es* $\mathbb{B}$*-difereciable em* $f(x_0)$*, entonces por la regla de la cadena para la diferencial de Fréchet, tenemos que*

$$D(g \circ f) = Dg(f(x_0))Df(x_0).$$

esto es

$$D(g \circ f)(x_0)v = g'_{\mathbb{B}}(f(x_0))(f'_{\mathbb{A}}(x_0)v)$$

para todo $v \in \mathbb{E}$*, en donde* $f'_{\mathbb{A}}$ *representa a la* $\mathbb{A}$*-derivada,*$g'_{\mathbb{B}}(f(x_0))$ *la* $\mathbb{B}$*-derivada,* $f'_{\mathbb{A}}v$ *al producto entre los elementos* $f'_{\mathbb{A}}$ *y* v *de* $\mathbb{A}$*, y* $g'_{\mathbb{B}}(f(x_0))(f'_{\mathbb{A}}v)$ *al producto en* $\mathbb{B}$ *de* $g'_{\mathbb{B}}(f(x_0))$ *y* $f'_{\mathbb{A}}v$*.*

Ejemplo 2.3.6. *Sean* $\mathbb{A}$ *el álgebra definida por el espacio* $\mathbb{R}^2$ *con el producto*

$$(x, y)(u, v) = (xu + yv, xv + yu),$$

y $f(x) = x^2$ *con respecto al producto de* $\mathbb{A}$ *y* $g(y) = e^y_{\mathbb{C}}$ *relativo a la* $\mathbb{R}$*-álgebra* $\mathbb{C}$*. Entonces*

$$\begin{aligned}
[D(g \circ f)(x_0, y_0)](a, b) =& e_{\mathbb{C}}^{(x_0,y_0)^2} \cdot_{\mathbb{C}} (2(x_0, y_0) \cdot_{\mathbb{A}} (a, b)) \\
=& 2e^{x_0^2-y_0^2}(cos(2x_0y_0), sen(2x_0y_0)) \cdot_{\mathbb{C}} (ax_0 + by_0, bx_0 + ay_0) \\
=& 2e^{x_0^2-y_0^2}((ax_0 + by_0)cos(2x_0y_0) - (bx_0 + ay_0)sen(2x_0y_0))e_1 \\
&+ 2e^{x_0^2-y_0^2}((bx_0 + ay_0)cos(2x_0y_0) + (ax_0 + by_0)sen(2x_0y_0))e_2.
\end{aligned}$$

2.4 Ecuaciones de Cauchy-Riemann en álgebras

En esta sección hablaremos de las ecuaciones de Cauchy-Riemann en álgebras, y daremos un resultado importante para la algebrización de sistema de ecuaciones diferenciales que veremos en el cap"ítulo tres. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann juegan un papel importante para saber si una función es $\mathbb{A}$-diferenciable.

Sea $\mathbb{A}$ un álgebra asociativa conmutativo y f una función $f : U \subset \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, tenemos el siguiente conjunto de ecuaciones diiferenciales

$$\sum_{i,j=1}^{n} d_{kij} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0, (k = 1, 2, \cdots, (n^2 - n)), \tag{2.9}$$

que son las ecuaciones de Cauchy-Riemann generalizadas.

Lema 2.4.1. *Para $j, k, s \in \{1, 2, ..., n\}$ se tiene que las primeras derivadas parciales de las componentes de una función $\mathbb{A}$-diferenciable $f : U \subset \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ satisface las igualdades*

$$\sum_{i=1}^{n} c_{iks} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} c_{ijs} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}. \tag{2.10}$$

Prueba .- En la primera y última de las igualdades siguientes se usan las ecuaciones (2.6), en la segunda y cuarta se usan propiedades usuales de sumas y productos, en la tercera se usa la asociatividad del álgebra y en la quinta, la conmutatividad del álgebra:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} c_{iks} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} &= \sum_{i=1} c_{iks} \sum_{l=1}^{n} a_l c_{lji} = \sum_{l=1}^{n} a_l \sum_{i=1}^{n} c_{iks} c_{lji} = \sum_{l=1}^{n} a_l \sum_{i=1}^{n} c_{jis} c_{ckli} \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_{jis} \sum_{l=1}^{n} a_l c_{kli} = \sum_{i=1}^{n} c_{ijs} \sum_{i=1}^{n} a_l c_{lki} = \sum_{i=1}^{n} c_{ijs} \frac{\partial f_i}{\partial x_k},\end{aligned}$$

de esta manera el lema queda demostrado para $j, k, s \in \{1, 2, ..., n\}$.■

En esta sección damos unos ejemplos en los cuales calculamos las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Si $\mathbb{R}^n$ tiene definido un producto de álgebra $\mathbb{A}$, tal que los elementos de la base estándar $\{e_1, ..., e_n\}$ son regulares en $\mathbb{A}$ y si $f : \Omega \subset \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es $\mathbb{A}$-diferenciable, podemos calcular la $\mathbb{A}$-derivada de $f'(x)$ en las direcciones de la base estándar mediante el límite newtoniano

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_k) - f(x)}{te_k}, \quad \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_l) - f(x)}{te_l}$$

de donde obtenemos las igualdades

$$\frac{\partial f}{e_i \partial x_i} = \frac{\partial f}{e_j \partial x_j}, \quad e_j \frac{\partial f}{\partial x_i} = e_i \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} e_k e_j = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_l}{\partial x_i} e_l e_i.$$■

Así, se obtienen un conjunto de $n^2 - n$ igualdades entre las derivadas parciales de las componentes de f; Mediante un procedimiento análogo al hecho para obtener las igualdades (2.6), podemos mostrar que estas ecuaciones son las de Cauchy-Riemann generalizadas.

Si no todos los elementos de la base estándar de $\mathbb{R}^n$ son regulares en el álgebra, podemos usar las igualdades (2.9) para calcular las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Se puede elegir una base de elementos regulares para un álgebra, pero recordemos que al cambiar la base de ésta álgebra, los coeficientes de estructura en la nueva base son diferentes, por lo que las ecuaciones de Cauchy-Riemann obtenidas serían diferentes.

Ejemplo 2.4.2. *(Ecuaciones de Cauchy-Riemann en los complejos) Consideremos a la $\mathbb{R}$-álgebra de los complejos, cuyo producto en la base estándar de $\mathbb{R}^2$ está dado en el Ejemplo 1.3.6. Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es $\mathbb{C}$-diferenciable, entonces*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}e_1e_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x}e_2e_2 = \frac{\partial f_1}{\partial x}e_1e_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x}e_2e_1.$$

Usando el producto complejo, podemos llegar a la siguiente igualdad:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}e_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x} - (e_1) = \frac{\partial f_1}{\partial x}e_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x}e_2,$$

de donde obtenemos las ecuaciones de Cauchy-Riemann para los complejos $\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial y}$.

Ahora lo que veremos es como determinan un álgebra asociativa conmutativa $\mathbb{A}$ para el conjunto de ecuaciones diferenciales (2.9) tal que son las ecuaciones diferenciales de Cauchy-Riemann generalizadas.

Teorema 2.4.3. *Supongamos el sistema de ecuaciones dierenciales (2.9) tiene la propiedad que para algún entero fijo p implica*

$$\left(\frac{\partial y_r}{\partial x_s}\right) = \left(\sum_t^n a_{tsr}\frac{\partial y_t}{\partial x_p}\right).$$

Supongamos, además, que las matrices $A_i = (a_{isr})$, $i = 1, 2, \cdots, n$, son conmutativa y

$$\textstyle\sum_{i=1}^n d_{kii} = 0, \ (k = 1, 2, \cdots, (n^2 - n)).$$

Entonces existe un único álgebra $\mathbb{A}$ conmutativa asociativa sobre R, que (2.9) es un conjunto de ecuaciones diferenciales de Cauchy-Riemann generalizadas.

Corolario 2.4.4. *Una condición necesaria y suficiente para que las ecuaciones lineales independientes*

$$\sum_{i,j=1}^{2} d_{kij}\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = 0 \ (k = 1, 2) \tag{2.11}$$

determina un álgebra $\mathbb{A}$ tal que (2.11) es el conjunto de las ecuaciones de Cauchy-Riemann generalizadas es tal que

$$d_{k11} + d_{k22} = 0 \ (k = 1, 2).$$

Chapter 3

Algebrización de sistema de ecuaciones diferenciales autónomo

En este capítulo Definiremos lo que es algebrizar. También aaremos algunos resultados para algebrización de sistema de ecuaciones diferenciales autónomas planares y en el espacio, también de sistema de ecuaciones diferenciales no autónomas planares.

3.1 Algebrización de campos vectoriales planares

Supongamos que tenemos una funciones $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) =& x_1^2 - x_2^2 \\ f_2(x_1, x_2) =& 2x_1 - 2x_2, \end{aligned}$$

ahora supongamos que $\mathbb{R}^2$ es un $\mathbb{R}$-álgebra con el producto complejo y definimos $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, como $F(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$, entonces podemos escribir a F de la siguiente forma

$$F(X) = X^2,$$

donde $X = (x_1, x_2)$. Ahora daremos la definición formal de algebrización.

Definición 3.1.1. *Sea $\mathbb{A}$ el espacio $\mathbb{R}^2$ con un producto de $\mathbb{R}$-álgebra. Decimos que un campo vectorial $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es $\mathbb{A}$-**algebrizable** en Ω si F es $\mathbb{A}$-diferenciable en Ω.*

Definición 3.1.2. *Sea $\mathbb{A}$ el espacio $\mathbb{R}^2$ con un producto de $\mathbb{R}$-álgebra. Diremos que el sistema diferencial*

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

es $\mathbb{A}$-***algebrizable*** *si* $F = (f_1, f_2)$ *es* $\mathbb{A}$-*algebrizable.*

Proposición 3.1.3. *Sea* $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *Fréchet-diferenciable en* Ω *. Entonces,* F *es algebrizable si y sólo si existe una pareja de matrices* $B_1, B_2 \in \mathbb{M}(2, \mathbb{R})$ *linealmente independiente tal que:*

$$\langle B_i, DF(x_1, x_2)\rangle = 0,\ Tr(B_i) = 0, i = 1, 2.$$

Prueba .- La demostración es directa del Corolario 2.4.4. ■

Ahora lo que queremos saber es como son esas matrices y cuál es la álgebra correspondiente. En los siguientes resultaremos damos formas de las matrices y cual es el álgebra.

Proposición 3.1.4. *Sea* $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *Fréchet-diferenciable sobre un conjunto abierto* Ω *. La función* F *es algebrizable si y sólo si para cada una de los tres tipos*

I) $\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$

II) $\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

III) $\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

donde a *y* b *son constantes reales, tales que*

$$\langle \boldsymbol{B}_i, DF(x_1, x_2)\rangle = 0,\ i = 1, 2.$$

Prueba.- El conjunto $\mathcal{M}$ de las matrices $B \in M_2(\mathbb{R})$ que satisfacen

$$\langle B, DF(x_1, x_2)\rangle = 0 \text{ y } Tr(B) = 0$$

define un espacio linear L, ya que si $A, B \in \mathcal{M}$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$Tr(\lambda A + \mu B) = \lambda Tr(A) + \mu Tr(B) = 0,$$

y

$$\langle \lambda A + \mu B, DF(x_1, x_2)\rangle = \lambda\langle A, DF(x_1, x_2)\rangle + \mu\langle B, DF(x_1, x_2)\rangle = 0.$$

Así, una combinación de elementos de L pertenece a L. Suponga que F es Algebriable, entonces por la Proposición 3.1.1, existe un par de matrices

$B_1, B_2 \in L$, donde B_1 y B_2 tienes la siguiente forma

$$B_1 = \begin{pmatrix} h & l \\ c & -h \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} d & e \\ f & -d \end{pmatrix}$$

que son linealmente independientes. Por lo tanto, la dimensión $dim(L) \geq 2$. Estas matrices B_1, B_2 pueden considerarse como dos vectores $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^4$ que son linealmente independientes, donde $v_1 = (h, l, c, -h)$ y $v_2 = (d, e, f, -d)$. Consideremos escribir estos vectores como una matriz de 2×4. Entonces, realizando un número finito de operaciones elementales de fila en la matriz

$$W = \begin{pmatrix} h & l & c & -h \\ d & e & f & -d \end{pmatrix},$$

tenemos los siguientes casos:

- Caso I: $h \neq 0$ and $d \neq 0$. Supongamos que $e \neq 0$, realizamos operaciones elementares obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & -1 \\ 0 & 1 & b & 0 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ son las matrices del Tipo I.
Otro subcaso es: $e = 0$ entonces $f \neq 0$, realizamos operaciones elementales obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -0 \end{pmatrix},$$

obtenemos $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$ del Tipo II.

- Caso II: $h \neq 0$ y $d = 0$. Supongamos que $e \neq 0$ y realizamos operaciones elementales

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & -1 \\ 0 & 1 & b & 0 \end{pmatrix},$$

donde obtenemos las matrices de el Tipo I. Supongaos que $e = 0$ entonces $f \neq 0$, realizamos operaciones obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde obtenemos las matrices de el Tipo II.

- Caso III: $h = 0$ y $d \neq 0$. Supongaos que $l \neq 0$ y realizamos operaciones elementales

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & a & -1 \end{pmatrix},$$

donde obtenemos las matrices de Tipo I. El otro subcaso es $l = 0$ entonces $c \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

donde obtenemos las matrices de el Tipo II.

- Caso IV: $h = 0$ y $d = 0$. Supongamos que $l \neq 0$, realizamos operaciones elementales obtenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde obtenemos las matrices de el Tipo III. Si $l = 0$ entonces $c \neq 0$ y $e \neq 0$, realizamos operaciones obtenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde obtenemos las matrices de el Tipo III.

Por lo tanto, empezamos formando una pareja de matrices B_1, B_2 obtenemos una pareja de matrices $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ de uno y sólo uno de los Tipos I, II o III que satisface $\langle \mathbf{B}_i, DF(x_1, x_2) \rangle = 0$, y $Tr(\mathbf{B}_i) = 0$, para $i = 1, 2$ y para todo $(x_1, x_2) \in \Omega$, entonces estas matrices son linealmentes independientes y satisface $Tr(\mathbf{B}_i) = 0$, para $i = 1, 2$. Por la Proposición 3.1.1, terminamos la demostración. ■

En la sección 2.3 vimos que $A = (\mathbb{R}^2, \cdot)$ es un álgebra, donde $\cdot$ denota alguno de los siguientes productos:

I)

$\cdot$	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2
e_2	e_2	$-be_1 + ae_2$

II)

$\cdot$	e_1	e_2
e_1	$-ae_1$	e_1
e_2	e_1	e_2

III)

$\cdot$	e_1	e_2
e_1	e_1	0
e_2	0	e_2

En el siguiente teorema vemos cuando una función F es algebrizable con respecto a cada producto.

Teorema 3.1.5. *Sea $\mathbb{A} = (\mathbb{R}^2, \cdot)$ donde $\cdot$ denota alguno de los tres productos definidos anteriormente. Sea $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función Fréchet-diferenciable en el conjunto abierto Ω. Entonces F es algebrizable si y sólo si F es $\mathbb{A}$-diferenciable.*

Prueba.- Calculando el producto interior de la pareja de matrices del tipo I de la Proposición 3.1.4 con $DF(x_1, x_2)$ tenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + a\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + b\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + a\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -b\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \end{aligned}$$

obtenemos que $DF(x_1, x_2)$ satisface la igualdad

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1 & a \end{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_1}.$$

Por la Proposición 2.2.9 tenemos que el espacio $\mathbb{R}^2$ es un álgebra $\mathbb{A}$ cuya primera representación funtamental asociada a la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es definido por:

$$R(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1 & a \end{pmatrix}.$$

El producto dado en la tabla I del Ejemplo 1.3.7 corresponde a esta álgebra. Por otra parte, F es $\mathbb{A}$-diferenciable, procediendo de manera inversa obtenemos que F es algebrizable. Así, la demostración está hecha cuando la álgebra $\mathbb{A}$ está dotado con el producto tipo I.

Calculando el producto interior de la pareja de matrices del tipo II de la Proposición 3.1.4 con $DF(x_1, x_2)$ tenemos las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + a\frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0, \ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$$

entonces

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -a\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$$

obtenemos que $DF(x_1, x_2)$ satisface la igualdad

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_2}.$$

Por la Proposición 2.2.9 tenemos que el espacio $\mathbb{R}^2$ es un álgebra $\mathbb{A}$ cuya primera representación funtamental asociada a la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es definido por:

$$R(e_1) = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ R(e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El producto dado en la tabla II del Ejemplo 1.3.7 corresponde a esta álgebra. Por otra parte, F es $\mathbb{A}$-diferenciable, procediendo demanera inversa obtenemos que F es algebrizable. Así, la demostración está hecha cuando el álgebra $\mathbb{A}$ está dotado con el producto tipo II.

Si tenemos la existencia de una pareja de matrices como en el tercer caso, entonces

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0, \ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0.$$

Así, $f_1(x_1, x_2)$ no depende de x_2 y $f_2(x_1, x_2)$ no depende de x_1. En este caso tenemos que F es $\mathbb{A}$-diferenciable con respecto a el álgebra dado en la tabla III. Así, la prueba está hecha cuando el álgebra $\mathbb{A}$ está dotado con el producto tipo III satisface el hipotesis del teorema.■

En la demostración del teorema anterior tenemos que

1. La función F es algebrizable con respecto al producto tipo I si

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + a\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + b\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

2. F es algebrizable con respecto al producto tipo II si

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + a\frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

3. F es algebrizable con respecto al producto tipo III si

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0, \\ \tfrac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Corolario 3.1.6. *Los sistemas cuadráticos planares que son algebrizable tiene una de las siguientes expresiones;*

1. *Tipo I*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_0 + (b_2 - ab_1)\, x_1 - bb_1 x_2 + \left(\frac{1}{2}b_4 - ab_3\right) x_1^2 - 2bb_3 x_1 x_2 - \frac{1}{2}bb_4 x_2^2, \\ \dot{x}_2 &= b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_1^2 + b_4 x_1 x_2 + \left(\frac{1}{2}ab_4 - bb_3\right) x_2^2, \end{aligned}$$

donde $a, b, a_0, b_0, ..., b_4$ son constantes reales.

2. *Tipo II*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 =& a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 - \frac{1}{2}aa_3 x_1^2 + a_3 x_1 x_2 + a_4 x_2^2, \\ \dot{x}_2 =& b_0 + (a_1 + aa_2)\, x_2 + \left(\frac{1}{2}a_3 + aa_4\right) x_2^2, \end{aligned}$$

donde $a, b, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$ son constantes reales.

3. Tipo III

$$\dot{x}_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_3 x_1^2,$$
$$\dot{x}_2 = b_0 + b_2 x_2 + b_5 x_2^2,$$

donde $a_0, a_1, a_3, b_0, b_2, b_3$ son constantes reales.

Prueba .- Asociamos el sistema de ecuaciones diferenciales Tipo I al campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$F(x_1, x_2) = (a_0 + (b_2 - ab_1)\, x_1 - bb_1 x_2 + \left(\frac{1}{2}b_4 - ab_3\right) x_1^2 - 2bb_3 x_1 x_2 - \frac{1}{2} bb_4 x_2^2,$$
$$b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_1^2 + b_4 x_1 x_2 + \left(\frac{1}{2}ab_4 - bb_3\right) x_2^2)$$

y cuya matriz jacobiana es

$$DF(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} b_2 - ab_1 + (b_4 - 2ab_3)x_1 - 2bb_3 x_2 & -bb_1 - 2bb_3 x_1 - bb_4 x_2 \\ b_1 + 2b_3 x_1 + b_4 x_2 & b_2 + b_4 x_1 + (ab_4 - 2bb_3) x_2 \end{pmatrix}.$$

Las matrices

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

son ortogonales a la matriz jacobiana $DF(x_1, x_2)$. Así, F es $\mathbb{A}$-algebrizable con respecto a el álgebra $\mathbb{A}$ que es $\mathbb{R}^2$ con el producto tipo I, donde $e = e_1$ es la unidad de $\mathbb{A}$. La ecuación diferencial de una sola variable sobre la álgebra correspondiente está dada por

$$\frac{d\xi}{d\tau} = (a_0 e_1 + b_0 e_2) + ((b_2 - ab_1)\, e_1 + b_1 e_2)\, \xi + \left(\left(\frac{1}{2}b_4 - ab_3\right) e_1 + b_3 e_2\right) \xi^2,$$

donde $\xi = x_1 e_1 + x_2 e_2$.

Ahora asociamos al sistema de ecuaciones diferenciales Tipo II el campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$F(x_1, x_2) = (a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 - \frac{1}{2} a a_3 x_1^2 + a_3 x_1 x_2 + a_4 x_2^2,$$
$$b_0 + (a_1 + a a_2)\, x_2 + \left(\frac{1}{2}a_3 + a a_4\right) x_2^2)$$

able sobre la álgebra correspondiente está dada por

$$\frac{d\xi}{d\tau} = (a_0 e_1 + b_0 e_2) + (a_1 e_1 + b_2 e_2)\xi + (a_3 e_1 + b_5 e_2)\xi^2,$$

donde $\xi = x_1 e_1 + x_2 e_2$.■

y cuya matriz jacobiana es

$$DF(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} a_1 - aa_3x_1 + a_3x_2 & a_2 + a_3x_1 + 2a_4x_2 \\ 0 & a_1 + aa_2 + (a_3 + 2aa_4)x_2 \end{pmatrix}.$$

Las matrices

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

son ortogonales a la matriz jacobiana $DF(x_1, x_2)$. Así, F es $\mathbb{A}$-algebrizable con respecto a el álgebra $\mathbb{A}$ que es $\mathbb{R}^2$ con el producto Tipo II, donde $e = e_2$ es la unidad de $\mathbb{A}$. La ecuación diferencial de una sola variable sobre la álgebra correspondiente está dada por

$$\frac{d\xi}{d\tau} = (a_0e_1 + b_0e_2) + (a_2e_1 + (a_1 + aa_2)\, e_2)\, \xi + \left(a_4e_1 + \left(\tfrac{1}{2}a_3 + aa_4\right) e_2\right) \xi^2,$$

donde $\xi = x_1e_1 + x_2e_2$.

Asociamos al sistema de ecuaciones diferenciales Tipo III el campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$F(x_1, x_2) = (a_0 + a_1x_1 + a_3x_1^2, b_0 + b_2x_2 + b_5x_2^2)$$

y cuya matriz jacobiana es

$$DF(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} a_1 + 2a_3x_1 & 0 \\ 0 & b_2 + 2b_5x_2 \end{pmatrix}.$$

Las matrices

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

son ortogonales a la matriz jacobiana $DF(x_1, x_2)$. Así, F es $\mathbb{A}$-algebrizable con respecto a el álgebra $\mathbb{A}$ que es $\mathbb{R}^2$ con el producto Tipo III, donde $e = e_1 + e_2$ es la unidad de $\mathbb{A}$. La ecuación diferencial de una sola variable sobre la álgebra correspondiente está dada por

$$\frac{d\xi}{d\tau} = (a_0e_1 + b_0e_2) + (a_1e_1 + b_2e_2)\xi + (a_3e_1 + b_5e_2)\xi^2,$$

donde $\xi = x_1e_1 + x_2e_2$.■

Ejemplo 3.1.7. *El campo vectorial*

$$F(x_1,x_2) = (3x - y + x^2 - y^2, x + 5y + 2xy + 2y^2)$$

tiene matriz jacobiana

$$DF(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 3+2x & -1-2y \\ 1+2y & 5+2x+4y \end{pmatrix}.$$

Encontramos las matrices

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que cumplen

$$\langle DF(x_1,x_2), B_i\rangle = 0,\ i = 1, 2.$$

Por lo tanto F es $\mathbb{A}$-algebrizable con respecto al producto tipo I, donde $a = 2$ y $b = -1$.

La unidad del álgebra es e_1 y tenemos que

$$F(te_1) = F(t,0) = (3t + t^2, t) = (3,1)t + (1,0)t^2,$$

entonces

$$F(X) = CX + X^2, C = (3,1),$$

como función de la variable $X = (x,y)$ de $\mathbb{A}$

Ejemplo 3.1.8. *Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 - 2x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1x_2 + 2x_2^2, \end{aligned}$$

que es asociado al campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$F(x_1,x_2) = (x_1^2 - 2x_2^2, 2x_1x_2 + 2x_2^2)$$

y cuya matriz jacabiona es

$$DF(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -4x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}.$$

Las matrices

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

son ortogonales a la matriz jacobiana $DF(x_1,x_2)$, es decir

$$\langle B_i, JF(x_1, x_2) \rangle = 0, \; i = 1, 2,$$

para todo $(x_1, x_2) \in \Omega$. *Así,* F *es* $\mathbb{A}$*-algebrizable con respecto al álgebra* $\mathbb{A}$ *que es* $\mathbb{R}^2$ *con el producto tipo I, donde* $a = 2$, $b = 2$ *y* $e = e_1$ *es la unidad de* $\mathbb{A}$. *La ecuación diferencial de una sola variable sobre el álgebra correspondiente es dada por* $\dfrac{d\xi}{d\tau} = \xi^2$.

3.1.1 Factor algebrizante

Vimos resultados para algebrizar algunos sistemas de ecuciones diferenciales: Existen varíos sistemas de ecuaciones diferenciales que no se pueden algebrizar directamente, pero multiplicando por una función el sistema nuevo puede ser algebrizable, a esta función se le llama factor algebrizante. A continuación daremos la definición formal de factor algebrizante.

Definición 3.1.9. *Diremos que el sistema*

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{3.4}$$

es ***casi-algebrizable*** *si existe una función escalar Frechét -diferenciable* $\alpha = \alpha(x_1, x_2)$, *llamado* ***factor algebrizante****, tal que la función* $F = (\alpha f_1, \alpha f_2)$ *es algebrizable.*

Vimos que en el plano tenemos tres tipos de productos, a continuación veremos tres teorema que nos dice las condiciones que debe cumplir la función para poder encontrar el factor algebrizante correspondiente a cada producto.

Teorema 3.1.10. *Sea (3.4) el sistema diferencial, con* $f_1 \neq 0$. *Sea* $h(x_1, x_2)$ *definida por*

$$h = \frac{-f_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} - f_2 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} - (af_1 + bf_2)\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} + f_1 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}}{f_1^2 + af_1 f_2 + bf_2^2},$$

con $f_1^2 + af_1f_2 + bf_2^2 \neq 0$. *Supongamos que existen constantes* a *y* b *tal que* h *tiene antiderivada* $H(x_1, x_2)$ *con respecto a* x_1 *y que satisface*

$$\frac{\partial H}{\partial x_2} = \frac{-bf_2 h - \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} - b\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}}{f_1},$$

entonces $\alpha(x_1, x_2) = e^{H(x_1, x_2)}$ *es un factor algebrizante para el sistema.*

Prueba .- Tenemos que

$$\frac{\partial(\alpha f_1)}{\partial x_2} = \frac{\partial(e^H f_1)}{\partial x_2} = f_1 e^H \frac{\partial H}{\partial x_2} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} e^H =$$

$$f_1 e^H \left(\frac{-bf_2h - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - b\frac{\partial f_2}{\partial x_1}}{f_1} \right) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} e^H = e^H \left(-bf_2h - b\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) =$$

$$-b\left(f_2 e^H h + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} e^H \right) = -b\frac{\partial(e^H f_2)}{\partial x_1} = -b\frac{\partial(\alpha f_2)}{\partial x_1},$$

también tenemos que

$$\frac{\partial(\alpha f_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial(e^H f_2)}{\partial x_2} = f_2 e^H \frac{\partial H}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} e^H = e^h \left(f_2 \frac{-bf_2h - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - b\frac{\partial f_2}{\partial x_1}}{f_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right)$$

$$= e^H \left(\frac{bf_1f_2^2\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + bf_2^3\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + bf_2^2(af_1+bf_2)\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - bf_1f_2^2\frac{\partial f_2}{\partial x_2}}{f_1(f_1^2+af_1f_2+bf_2^2)} \right)$$

$$-e^H \left(\frac{(f_1^2+af_1f_2+bf_2^2)\left(-f_2\frac{\partial f_1}{\partial x_2} - bf_2\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + f_1\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)}{f_1(f_1^2+af_1f_2+bf_2^2)} \right)$$

$$= e^H \left(\frac{bf_1f_2^2\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + (-f_1^2f_2 - af_1f_2^2)\frac{\partial f_1}{\partial x_2} - bf_1^2f_2\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + (f_1^3 + af_1^2f_2)\frac{\partial f_2}{\partial x_2}}{f_1(f_1^2+af_1f_2+bf_2^2)} \right)$$

$$= e^H \left(\frac{bf_2^2\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + (-f_1f_2 - af_2^2)\frac{\partial f_1}{\partial x_2} - bf_1f_2\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + (f_1^2 + af_1f_2)\frac{\partial f_2}{\partial x_2}}{(f_1^2+af_1f_2+bf_2^2)} \right)$$

$$= e^H \left((f_1+af_2) \left(\frac{-f_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - f_2\frac{\partial f_1}{\partial x_2} - (af_1+bf_2)\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + f_1\frac{\partial f_2}{\partial x_2}}{f_1^2+af_1f_2+bf_2^2} \right) \right)$$

$$+e^H \left(\frac{(f_1^2+af_1f_2+bf_2^2)\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + a\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)}{f_1^2+af_1f_2+bf_2^2} \right) = e^H \left((f_1+af_2)h + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + a\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)$$

$$= f_1 e^H \frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} e^H + a\left(f_2 e^H \frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} e^H \right)$$

$$= \frac{\partial (e^H f_1)}{\partial x_1} + a\frac{\partial (e^H f_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial (\alpha f_1)}{\partial x_1} + a\frac{\partial (\alpha f_2)}{\partial x_1},$$

por lo que tenemos que $F(x_1, x_2) = ((\alpha f_1)(x_1, x_2), (\alpha f_2)(x_1, x_2))$ cumple con las ecuaciones (3.1), es decir,

$$\frac{\partial (\alpha f_1)}{\partial x_2} = -b\frac{\partial (\alpha f_2)}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial \alpha f_2}{\partial x_2} = \frac{\partial \alpha f_1}{\partial x_1} + a\frac{\partial \alpha f_2}{\partial x_1},$$

es decir, $(\alpha f_1, \alpha f_2)$ es algebrizable con respecto a una álgebra del tipo I dado en el Teorema 3.1.5. ■

Teorema 3.1.11. *Sea (3.4) el sistema diferencial, con* $f_2 \neq 0$. *Sea* $h(x_1, x_2)$ *definida por*

$$h = \frac{f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + a f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - a f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2}}{a f_1 f_2 - f_2^2},$$

con $a f_1 f_2 - f_2^2 \neq 0$. *Supongamos que existe constante* a *tal que* h *tiene antiderivada* $H(x_2)$, *no depende de* x_1, *y definimos* $g_1(x_2) = e^{H(x_2)}$, *entonces*

$$\alpha(x_1, x_2) = \frac{g_1(x_2)}{f_2(x_1, x_2)}$$

es un factor algebrizante para el sistema.

Prueba .- Tenemos que

$$\frac{\partial (\alpha f_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial (\frac{g_1 f_2}{f_2})}{\partial x_1} = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} = 0,$$

también tenemos que

$$\frac{\partial (\alpha f_2)}{\partial x_2} - a\frac{\partial (\alpha f_1)}{\partial x_2} = \frac{\partial (\frac{g_1 f_2}{f_2})}{\partial x_2} - a\frac{\partial (\frac{g_1 f_2}{f_2})}{\partial x_2} = \frac{\partial g_1}{\partial x_2} - a\frac{\left(f_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + g_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) f_2 - g_1 f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_2}}{f_2^2}$$

$$= e^H h - a\frac{\left(e^H h f_1 + e^H \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) f_2 - e^H f_1 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}}{f_2^2} = e^H \left(\frac{h(f_2^2 - af_1f_2) - af_2\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} + af_1\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}}{f_2^2}\right)$$

$$= e^H \left(\frac{\left(\dfrac{f_1\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} - f_2\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + af_1\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} - af_2\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}}{af_1f_2 - f_2^2}\right)(f_2^2 - af_1f_2) - af_2\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} + af_1\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}}{f_2^2}\right)$$

$$= e^H \left(\frac{f_2\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} - f_1\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}}{f_2^2}\right) = \frac{g_1 f_2\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} - g_1 f_1\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}}{f_2^2} = \frac{f_1 f_2\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} + g_1 f_2\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} - g_1 f_1\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}}{f_2^2}$$

$$= \frac{(f_1\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} + g_1\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1})f_2 - g_1 f_1\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}}{f_2^2} = \frac{\partial(\frac{g_1 f_1}{f_2})}{\partial x_1} = \frac{\partial(\alpha f_1)}{\partial x_1},$$

por lo tanto, tenemos que $F(x_1, x_2) = ((\alpha f_1)(x_1, x_2), (\alpha f_2)(x_1, x_2))$ cumple con las ecuaciones (3.2), es decir,

$$\frac{\partial(\alpha f_2)}{\partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial(\alpha f_2)}{\partial x_2} - a\frac{\partial(\alpha f_1)}{\partial x_2} = \frac{\partial(\alpha f_1)}{\partial x_1},$$

es decir, $(\alpha f_1, \alpha f_2)$ es algebrizable con respecto a una álgebra del tipo II dado en el Teorema 3.1.5. ■

Teorema 3.1.12. *Sea (3.4) el sistema diferencial. Supongamos que existen β, f, g funciones tales que*

$$f_1(x_1, x_2) = \beta(x_1, x_2) f(x_1),$$

$$f_2(x_1, x_2) = \beta(x_1, x_2) g(x_2)$$

y $\beta(x_1, x_2) \neq 0$, *entonces*

$$\alpha(x_1, x_2) = \frac{1}{\beta(x_1, x_2)}.$$

es un factor algebrizante para el sistema.

Prueba .- Tenemos que $F(x_1, x_2) = ((\alpha f_1)(x_1, x_2), (\alpha f_2)(x_1, x_2))$ cumple con las ecuaciones (3.3), es decir,

$$\frac{\partial(\alpha f_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0,$$

y que

$$\frac{\partial(\alpha f_1)}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0,$$

por lo tanto es algebrizable con respecto a una álgebra del tipo III dado en el Teorema 3.1.5. ■

Ejemplo 3.1.13. *Considere el sistema*

$$\dot{x}_1 = \frac{x_1}{x_2} - 1$$

$$\dot{x}_2 = \frac{2x_1}{x_1 + x_2}$$

tenemos que $f_1 = \frac{x_1}{x_2} - 1$ *y* $f_2 = \frac{2x_1}{x_1 + x_2}$. *Tomando a=0 y b=1 tenemos que* $h(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 + x_2}$. *La antiderivada* $H(x_1, x_2) = log|x_1 + x_2| + log|x_2|$ *de h que satisface las hipotesis del Teorema 3.1.10, entonces*

$$\alpha(x_1, x_2) = e^{H(x_1, x_2)} = x_2(x_1 + x_2).$$

es un factor algebrizante del sistema. Así

$$\alpha(x_1, x_2)(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) = (x_1^2 - x_2^2, 2x_1 x_2).$$

Evaluando $\alpha(f_1, f_2)$ *en te, donde e es la identidad, en este caso* $e = (1, 0)$, *tenemos* $\alpha(t, 0)(f_1(t, 0), f_2(t, 0)) = (t^2, 0) = t^2 e$. *Por lo tanto*

$$\alpha(x_1, x_2)(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2) = (x_1, x_2)^2.$$

3.2 Algebrización de campos vectoriales en el espacio

En esta sección veremos algunos resultados para algebrizar sistemas de ecuaciones diferenciales de tres por tres. Para eso, tenemos que $\mathbb{R}^3$ es un álgebra $\mathbb{A} = (\mathbb{R}^3, \cdot)$ donde $\cdot$ denota alguno de los siguientes tres productos

A)

$\cdot$	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	$-ae_1 - ce_2 - ee_3$	$-be_1 - de_2 - fe_3$
e_3	e_3	$-be_1 - de_2 - fe_3$	$-he_1 - je_2 - le_3$

B)

$\cdot$	e_1	e_2	e_3
e_1	$-ae_1 - ce_2 - ee_3$	e_1	$-be_1 - de_2 - fe_3$
e_2	e_1	e_2	e_3
e_3	$-be_1 - de_2 - fe_3$	e_3	$-he_1 - je_2 - le_3$

C)

$\cdot$	e_1	e_2	e_3
e_1	$-ae_1 - ce_2 - ee_3$	$-be_1 - de_2 - fe_3$	e_1
e_2	$-be_1 - de_2 - fe_3$	$-he_1 - je_2 - le_3$	e_2
e_3	e_1	e_2	e_3

Teorema 3.2.1. *Sea $f : \Omega \in R^3 \to R^3$ Fréchet-diferenciable sobre un conjunto abierto Ω. Suponga que existe seis matrices linelmente independientes $\boldsymbol{B}_1, ..., \boldsymbol{B}_6 \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ de los siguientes tipos:*

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 \\ f & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ g & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 \\ j & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ l & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que son ortogonales a la matriz Jacobiana $Df(x, y, x)$, es decir,

$$\langle \boldsymbol{B}_i, Df(x, y, z) \rangle = 0, \ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

para todo $(x, y, z) \in \Omega$. Entonces $\mathbb{A} = (\mathbb{R}^3, \cdot)$ es un álgebra con el producto tipo A, tal que f es $\mathbb{A} - diferenciable$.

Prueba.- Calculando el producto interior de las seis matrices con $Df(x,y,z)$ tenemos las siguientes ecuaciones

$$a\frac{\partial f_2}{\partial x}+b\frac{\partial f_3}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y}=0,\ -\frac{\partial f_1}{\partial x}+c\frac{\partial f_2}{\partial x}+d\frac{\partial f_3}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}=0,$$
$$e\frac{\partial f_2}{\partial x}+f\frac{\partial f_3}{\partial x}+f\frac{\partial f_3}{\partial y}=0,\ g\frac{\partial f_2}{\partial x}+h\frac{\partial f_3}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial z}=0,$$
$$i\frac{\partial f_2}{\partial x}+j\frac{\partial f_3}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial z}=0,\ -\frac{\partial f_1}{\partial x}+k\frac{\partial f_2}{\partial x}+l\frac{\partial f_3}{\partial x}+\frac{\partial f_3}{\partial z}=0,$$

por lo tanto

$$Df(x,y,z)=\frac{\partial f_1}{\partial x}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\frac{\partial f_2}{\partial x}\begin{pmatrix}0&-a&-g\\1&-c&-i\\0&-e&-k\end{pmatrix}+\frac{\partial f_3}{\partial x}\begin{pmatrix}0&-b&-h\\0&-d&-j\\1&-f&-l\end{pmatrix}.$$

Por el Teorema 2.4.1 tenemos que el espacio $\mathbb{R}^3$ es un álgebra cuya representación fundamental asociada a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ se define por

$$R(e_1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},R(e_2)=\begin{pmatrix}0&-a&-g\\1&-c&-i\\0&-e&-k\end{pmatrix},R(e_3)=\begin{pmatrix}0&-b&-h\\0&-d&-j\\1&-f&-l\end{pmatrix}.$$

El producto tipo A, corresponde a esta álgebra. Por lo tanto, f es $\mathbb{A}$-diferenciable. ■

Teorema 3.2.2. *Sea $f:\Omega\in R^3\to R^3$ Fréchet-diferenciable sobre un conjunto abierto Ω. Suponga que existe seis matrices linelmente independiente $\boldsymbol{B}_1,\dots,\boldsymbol{B}_6\in\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ de los siguientes tipos:*

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&a&0\\0&-1&0\\0&b&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}0&c&0\\1&0&0\\0&d&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}0&e&0\\0&0&0\\1&f&0\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{B}_4=\begin{pmatrix}0&g&1\\0&0&0\\0&h&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_5=\begin{pmatrix}0&i&0\\0&0&1\\0&j&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_6=\begin{pmatrix}0&k&0\\0&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix},$$

que son ortogonales a la matriz Jacobiana $Df(x,y,x)$, es decir,

$$\langle\boldsymbol{B}_i,Df(x,y,z)\rangle=0,\ i=1,2,3,4,5,6.$$

para todo $(x,y,z)\in\Omega$. Entonces $\mathbb{A}=(\mathbb{R}^3,\cdot)$ es un álgebra con el producto tipo B, tal que f es $\mathbb{A}-diferenciable$.

Prueba.- Calculando el producto interior de las seis matrices con $Df(x,y,z)$ tenemos las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}+a\frac{\partial f_1}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial y}+b\frac{\partial f_3}{\partial y}=0,\ \frac{\partial f_2}{\partial x}+c\frac{\partial f_1}{\partial y}+d\frac{\partial f_3}{\partial y}=0,$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial x}+e\frac{\partial f_1}{\partial y}-f\frac{\partial f_2}{\partial y}=0,\ g\frac{\partial f_1}{\partial y}+h\frac{\partial f_3}{\partial y}+\frac{\partial f_1}{\partial z}=0,$$
$$i\frac{\partial f_1}{\partial y}+j\frac{\partial f_3}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial z}=0,\ k\frac{\partial f_1}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial y}+l\frac{\partial f_3}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}=0,$$

por lo tanto

$$Df(x,y,z)=\frac{\partial f_1}{\partial y}\begin{pmatrix}-a & 1 & -g\\ -c & 0 & -i\\ -e & 0 & -k\end{pmatrix}+\frac{\partial f_2}{\partial x}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\frac{\partial f_3}{\partial x}\begin{pmatrix}-b & 0 & -h\\ -d & 0 & -j\\ -f & 1 & -l\end{pmatrix}.$$

Por el Teorema 2.4.1 tenemos que el espacio $\mathbb{R}^3$ es un álgebra cuya representación fundamental asociada a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ se define por

$$R(e_1)=\begin{pmatrix}-a & 1 & -g\\ -c & 0 & -i\\ -e & 0 & -k\end{pmatrix},R(e_2)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},R(e_3)=\begin{pmatrix}-b & 0 & -h\\ -d & 0 & -j\\ -f & 1 & -l\end{pmatrix}.$$

El producto Tipo B, corresponde a esta álgebra. Por lo tanto, f es $\mathbb{A}$-diferenciable. ■

Teorema 3.2.3. *Sea $f:\Omega\in R^3\to R^3$ Fréchet-diferenciable sobre un conjunto abierto Ω. Suponga que existe seis matrices linelmente independiente $\boldsymbol{B}_1,\dots,\boldsymbol{B}_6\in\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ de los siguientes tipos:*

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & c\\ 1 & 0 & d\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & e\\ 0 & 0 & f\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{B}_4=\begin{pmatrix}0 & 1 & g\\ 0 & 0 & h\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_5=\begin{pmatrix}0 & 0 & i\\ 0 & 1 & j\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_6=\begin{pmatrix}0 & 0 & k\\ 0 & 0 & l\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

que son ortogonales a la matriz Jacobiana $Df(x,y,x)$, es decir,

$$\langle\boldsymbol{B}_i,Df(x,y,z)\rangle=0,\ i=1,2,3,4,5,6.$$

para todo $(x,y,z)\in\Omega$. Entonces $\mathbb{A}=(\mathbb{R}^3,\cdot)$ es un álgebra con el producto tipo C, tal que f es $\mathbb{A}-diferenciable$.

Prueba .- Calculando el producto interior de las seis matrices con $Df(x,y,z)$ tenemos las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -a\frac{\partial f_1}{\partial z} - b\frac{\partial f_3}{\partial z}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = -c\frac{\partial f_1}{\partial z} - d\frac{\partial f_2}{\partial z},$$
$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = -e\frac{\partial f_1}{\partial z} - f\frac{\partial f_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -g\frac{\partial f_1}{\partial z} - h\frac{\partial f_2}{\partial z},$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = -i\frac{\partial f_1}{\partial z} - j\frac{\partial f_2}{\partial z} + \frac{\partial f_3}{\partial z}, \quad \frac{\partial f_3}{\partial y} = -k\frac{\partial f_1}{\partial z} - l\frac{\partial f_2}{\partial z},$$

por lo tanto

$$Df(x,y,z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}\begin{pmatrix} -a & -b & 1 \\ -c & -d & 0 \\ -e & -f & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\begin{pmatrix} -b & -h & 0 \\ -d & -j & 1 \\ -f & -l & 0 \end{pmatrix} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por el Teorema 2.4.1 tenemos que el espacio $\mathbb{R}^3$ es un álgebra cuya representación fundamental asociada a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ se define por

$$R(e_1) = \begin{pmatrix} -a & -b & 1 \\ -c & -d & 0 \\ -e & -f & 0 \end{pmatrix}, R(e_2) = \begin{pmatrix} -b & -h & 0 \\ -d & -j & 1 \\ -f & -l & 0 \end{pmatrix}, R(e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El producto Tipo C, corresponde a esta álgebra. Por lo tanto, f es $\mathbb{A}$-diferenciable. ■

Chapter 4

Algebrización de sistema de ecuaciones diferenciales planares no autónomos

En esta sección algebrizaremos sistemas planares no autónomos usando algunos resultados que tenemos para sistemas plares autónomos para poder algebrizar.

Definición 4.0.4. *Diremos que un sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x,y) \\ \dot{y} &= g(t,x,y), \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *son de clase* C^1 *en* Ω, Ω *es un conjunto abierto de* $\mathbb{A}$, *es algebrizable si existe un álgebra* $\mathbb{A} = (\mathbb{R}^2, *)$ *y funciones* $F, G : \widetilde{\Omega} \subset \mathbb{A}^2 \to \mathbb{R}$, $\widetilde{\Omega}$ *es un conjunto abierto de* $\mathbb{A}^2$, *tales que*

$$\begin{aligned} F(te,(x,y)) &= f(t,x,y), \\ G(te,(x,y)) &= g(t,x,y), \end{aligned}$$

donde te es el producto escalar de $t \in \mathbb{R}$ *y e la unidad de* $\mathbb{R}^2$, *y la función* $H = (F, G)$, $H : \widetilde{\Omega} \subset \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}$, *definida como* $H(x,y,z,w) = (F(x,y,z,w), G(x,y,z,w))$, *es* $\mathbb{A}$*-diferenciable.*

En este caso el sistema no autónomo sobre $\mathbb{A}$

$$\frac{d\epsilon}{d\tau} = H(\tau, \epsilon) \tag{4.2}$$

es llamado ecuación diferencial algebrizada *sobre* $\mathbb{A}$, *donde* $H(\tau,\epsilon) = (F(\tau,\epsilon), G(\tau,\epsilon))$, $\tau = (s,t)$ *y* $\epsilon = (x,y)$.

Cuando una función $H : \mathbb{A} \times \mathbb{B} \to \mathbb{C}$, que es $\mathbb{A}$-diferenciable y $\mathbb{B}$-diferenciable tenemos que la matriz jacobiana de H está contenida en el producto cruz de las primeras representaciones fundamentales de las álgebras $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$.

Veamos los siguientes ejemplos para comprender la definición. Sea

$$\begin{aligned}\dot{x} =& \frac{tx}{x^2+y^2},\\ \dot{y} =& 0,\end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}F(t,s,x,y) &= \frac{tx}{x^2+y^2}\\ G(t,s,x,y) &= \frac{-2y}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

Tenemos que $H(\tau,\epsilon) = (F(\tau,\epsilon), T(\tau,\epsilon))$, donde $\tau = (t,s)$ y $\epsilon = (x,y)$, es $\mathbb{A}$-algebrizable, donde $\mathbb{A} = (\mathbb{R}^2,\cdot)$ y el producto es el complejo, es decir, $(u,v)(x,y) = (ux - vy, uy + vx)$. Podemos escribir como la ecuación diferencial algebrizada sobre $\mathbb{A}$

$$\frac{d\epsilon}{d\tau} = \frac{\tau}{\epsilon}.$$

Ahora consideremos el siguiente sistema diferencial no autónomo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{1}{t^3} - \frac{2x}{t} + tx^2 - ty^2,\\ \dot{y} &= -\frac{2y}{t} + 2txy + ty^2,\end{aligned}$$

podemos escribirla como la ecuación diferencial sobre $\mathbb{A}$

$$\frac{d\epsilon}{d\tau} = -\frac{1}{\tau^3} - \frac{2\epsilon}{\tau} + \tau\epsilon^2,$$

Donde $\mathbb{A} = (\mathbb{R}^2,\cdot)$ y el producto está definido por $(u,v)(x,y) = (ux - vy, uy + vx + vy)$.

El siguiente resultado nos dice que si yo tengo una solución de (4.2) como puedo encontrar una solución de (4.1).

Proposición 4.0.5. *Si (4.2) es el sistema algebrizable de (4.1), y $\epsilon(\tau)$ es una solución de la ecuación diferencial sobre $\mathbb{A}$*

$$\frac{d\epsilon}{d\tau} = H(\tau, \epsilon),$$

entonces $(x(t), y(t)) = \epsilon(te)$ *es una solución del sistema (4.1).*

Prueba .- Sea ϵ una solución de (4.2), la derivada de $(x(t), y(t))$ con respecto a t está dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x(t), y(t)) &= \frac{d}{dt}\epsilon(te) = \frac{d\epsilon(\tau, \epsilon)}{d\tau}|_{\tau=(te)}\frac{d\tau}{dt} \\ &= H(\tau, \epsilon)|_{\tau=(te)}e = H(te, \epsilon(te)) \\ &= (f(t, x(t), y(t)), g(t, x(t), y(t))). \end{aligned}$$

Así $(x(t), y(t))$ es una solución de (4.1). ■

Ahora cosideremos que f y g son polinomios de segundo grado

$$\begin{aligned} f(t,x,y) &= a_0 + a_1t + a_2x + a_3y + a_4t^2 + a_5tx + a_6ty + a_7x^2 + a_8xy + a_9y^2 \\ g(t,x,y) &= b_0 + b_1t + b_2x + b_3y + b_4t^2 + b_5tx + b_6ty + b_7x^2 + b_8xy + b_9y^2 \end{aligned} \tag{4.3}$$

lo que queremos encontrar son F, G que sean algebrizable y que cumpla con $F(te, (x, y)) = f(t, x, y)$ y $G(te, (x, y)) = g(t, x, y)$. Los siguientes resultados dan condiciones que caracterizan la algebrizabilidad de la ecuación diferencial (4.1) con f y g polinomios de segundo grado.

Teorema 4.0.6. *Sea $\mathbb{A}$ es un álgebra con el producto del tipo I definido por las constante a y $b \neq 0$ y f, g son los polinomios (4.3). Los siguientes son equivalentes*

1. *La función $(x, y) \mapsto (f(t, x, y), g(t, x, y))$ es $\mathbb{A}$-diferenciable.*

2. *Las funciones f y g tienen la forma*

$$\begin{aligned} f(t,x,y) &= a_0 + a_1t + (b_3 - ab_2)x - bb_2y + a_4t^2 + (b_6 - ab_5)tx - bb_5ty \\ &\quad + \left(\frac{b_8}{2} - ab_7\right)x^2 - 2bb_7xy - \frac{b}{2}b_8y^2, \\ g(t,x,y) &= b_0 + b_1t + b_2x + b_3y + b_4t^2 + b_5tx + b_6ty + b_7x^2 + b_8xy + (\frac{ab_8}{2} - bb_7)y^2. \end{aligned}$$

3. La función $H = (F, G)$ dada por

$$\begin{aligned} F(t,s,x,y) &= \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 st + \alpha_4 sx + \alpha_5 sy + f(t,x,y), \\ G(t,s,x,y) &= \beta_1 s + \beta_2 s^2 + \beta_3 st + \beta_4 sx + \beta_5 sy + g(t,x,y), \end{aligned}$$

es $\mathbb{A}$-diferenciable con respecto a (t,s) y (x,y), donde

$\alpha_1 = -bb_1$, $\alpha_2 = -ba_4 - abb_4$, $\alpha_3 = -2bb_4$, $\alpha_4 = -bb_5$, $\alpha_5 = -bb_6$, $\beta_1 = a_1 + ab_1$, $\beta_2 = aa_4 + a^2 b_4 - bb_4$, $\beta_3 = 2a_4 + 2ab_4$, $\beta_4 = b_6$, $\beta_5 = ab_6 - bb_6$.

Prueba .- Si escribimos $g(t,x,y) = B_0 + B_1 x + B_2 y + B_3 x^2 + B_4 xy + B_5 y^2$, entonces

$B_0 = b_0 + b_1 t + b_4 t^2$, $B_1 = b_2 + b_5 t$, $B_2 = b_3 + b_6 t$, $B_3 = b_7$, $B_4 = b_8$, $B_5 = b_9$.

y la función $(x,y) \mapsto (f(t,x,y), g(t,x,y))$ es $\mathbb{A}$-diferenciable si y sólo si

$$f(t,x,y) = A_0 + (B_2 - aB_1)x - bB_1 y + \left(\frac{1}{2}B_4 - aB_3\right)x^2 - 2bB_3 xy - \frac{1}{2}bB_4 y^2$$

por el Corolario 3.1.6 el tipo I. Así, los incisos (1) y (2) son equivalentes.

Considere F y G. Suponga que (f,g) es $\mathbb{A}$-diferenciable como una función de (x,y) con respecto a una álgebra con el producto del tipo I, entonces tenemos que cumple con las ecuaciones (3.1), es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + a\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + b\frac{\partial g}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

La igualdad $\alpha_4 + a\beta_4 - \beta_5 = 0$ es verificada, entonces tenemos

$$\left(\alpha_4 s + \frac{\partial f}{\partial x}\right) + a\left(\beta_4 s + \frac{\partial g}{\partial x}\right) - \left(\beta_5 s + \frac{\partial g}{\partial y}\right) = 0,$$

es decir que

$$\frac{\partial F}{\partial x} + a\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial y} = 0.$$

Tenemos $\alpha_5 + b\beta_4 = 0$, entonces

$$\left(\alpha_5 s + \frac{\partial f}{\partial y}\right) + b\left(\beta_4 s + \frac{\partial g}{\partial x}\right) = 0,$$

que corresponde a la ecuación

$$\frac{\partial F}{\partial y} + b\frac{\partial G}{\partial x} = 0.$$

Así $(x, y) \mapsto (F(s, t, x, y), G(s, t, x, t))$ es $\mathbb{A}$-diferenciable.

Tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} =& a_1 + 2a_4t + (b_6 - ab_5)x - bb_5y.\\ \frac{\partial g}{\partial t} =& b_1 + 2b_4t + b_5x + b_6y.\end{aligned}$$

Usando las igualdades de α_i y β_i obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= \left(\beta_1 + \frac{a\alpha_1}{b}\right) + \left(\beta_3 + \frac{a\alpha_3}{b}\right)t + (\beta_4 + \frac{a\alpha_4}{b})x + \left(\beta_5\frac{a\alpha_5}{b}\right)y,\\ \frac{\partial g}{\partial t} &= -\frac{\alpha_1}{b} - \frac{\alpha_3}{b}t - \frac{\alpha_4}{b}x - \frac{\alpha_5}{b}y,\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} + \left(-\frac{\alpha_1}{b} - \frac{\alpha_3}{b}t - \frac{\alpha_4}{b}x - \frac{\alpha_5}{b}y\right) + (\beta_1 + \beta_3t + \beta_4x + \beta_5y) &= 0,\\ (\alpha_1 + \alpha_3t + \alpha_4x + \alpha_5y) + b\frac{\partial g}{\partial t} &= 0,\end{aligned}$$

Usando las igualdades de α_i y β_i obtenemos

$$\begin{aligned}\alpha_3 + a\beta_3 - 2\beta_2 &= 0,\\ 2\alpha_2 + b\beta_3 &= 0,\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\left(\alpha_3s + \frac{\partial f}{\partial t}\right) + a\left(\beta_3s + \frac{\partial g}{\partial t}\right) - (\beta_1 + 2\beta s + \beta_3t + \beta_4x + \beta_5y) &= 0\\ (\alpha_1 + 2\alpha_2s + \alpha_3t + \alpha_4x + \alpha_5y) + b(\beta_3 + \frac{\partial g}{\partial t}) &= 0.\end{aligned}$$

Es decir que cumple con las ecuaciones (3.1)

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t} + a\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial s} &= 0,\\ \frac{\partial F}{\partial s} + b\frac{\partial G}{\partial t} &= 0,\end{aligned}$$

así (F, G) son $\mathbb{A}$-diferenciable con respecto a (s, t).

Suponga que (F, G) es $\mathbb{A}$-diferenciable como función de (t, s) y como función de (x, y), entonces $(x, y) \mapsto f(t, x, y), g(t, x, y))$ es $\mathbb{A}$-diferenciable. ■

Corolario 4.0.7. *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra con producto del tipo I definido por las constantes a y $b \neq 0$, y f, g los polinoios como (4.3). Suponga que el sistema (4.1) es $\mathbb{A}$-algebrizable, entonces la función (F, G) puede ser escrita como*

$$(F(T,X), G(T,X)) = A_0 + A_1T + A_2X + A_3T^2 + A_4TX + A_5X^2,$$

donde

$$A_0 = (a_0, b_0),\ A_1 = (a_1, b_1),\ A_2 = (b_3 - ab_2, b_2),\ A_3 = (a_4, b_4),$$
$$A_4 = (b_6 - ab_5, b_5),\ A_5 = \left(\tfrac{1}{2}b_8 - ab_7, b_7\right),\ T = (s,t) \text{ y } X = (x,y).$$

Así, la algebrización del sistema es dada por la ecuación de Riccati sobre $\mathbb{A}$

$$\frac{dX}{dT} = P(T) + Q(T)X + R(T)X^2,$$

Donde $P(T) = A_0 + A_1T + A_3T^2$, $Q(T) = A_2 + A_4T$ *y* $R(T) = A_5$,

Teorema 4.0.8. *Sea $\mathbb{A}$ es un álgebra con el producto tipo I definido por las constante a y $b = 0$ y f, g son los polinomios (4.3). Los siguientes son equivalentes*

1. *La función* $(x,y) \mapsto (f(t,x,y), g(t,x,y))$ *es* $\mathbb{A}$*-diferenciable*

2. *Las funciones f y g tienen la forma*

$$\begin{aligned} f(t,x,y) &= a_0 + a_1t + (b_3 - ab_2)x - bb_2y + a_4t^2 + (b_6 - ab_5)tx - bb_5ty \\ &\quad + \left(\frac{b_8}{2} - ab_7\right)x^2 - 2bb_7xy - \frac{b}{2}b_8y^2, \\ g(t,x,y) &= b_0 + b_1t + b_2x + b_3y + b_4t^2 + b_5tx + b_6ty + b_7x^2 + b_8xy + \frac{ab_8}{2}y^2. \end{aligned}$$

3. *La función $H = (F, G)$ tiene la siguiente forma*

$$\begin{aligned} F(t,s,x,y) &= f(t,x,y), \\ G(t,s,x,y) &= \beta_1s + \beta_2s^2 + \beta_3st + \beta_4sx + \beta_5sy + g(t,x,y), \end{aligned}$$

es $\mathbb{A}$-diferenciable con respecto a (s,t) y con respecto a (x,y), donde

$$\beta_1 = a_1 + ab_1,\ \beta_2 = aa_4 + a^2b_4,\ \beta_3 = 2a_4 + 2ab_4,\ \beta_4 = b_6,\ \beta_5 = ab_6.$$

Prueba .- La equivalencia entre (1) y (2) se sigue del Teorema 4.0.6.

Considere F y G. Suponga que (f,g) es $\mathbb{A}$-diferenciable como una función de (x,y) con respecto a una álgebra con el producto tipo I, entonces tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + a\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

La ecuación $a\beta_4 - \beta_5 = 0$ se verifica, entonces tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} + a\left(\beta_4 s + \frac{\partial g}{\partial x}\right) - \left(\beta_5 s + \frac{\partial g}{\partial y}\right) = 0,$$

que corresponde a la primerade las siguientes ecuación

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + a\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

la segunda se obtiene, ya que F no depende de y. Así tenemos que cumple con las ecuaciones (3.1), por lo que tenemos que $(x,y) \mapsto (F(s,t,x,y), G(s,t,x,t))$ es $\mathbb{A}$-diferenciable.

Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= a_1 + 2a_4 t + (b_6 - ab_5)x. \\ \frac{\partial g}{\partial t} &= b_1 + 2b_4 t + b_5 x + b_6 y. \end{aligned}$$

Ya que f no depende de S tenemos $\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial s} = 0$, usando las igualdades de α_i y β_i obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a\frac{\partial g}{\partial t} - (\beta_1 + \beta_3 t + \beta_4 x + \beta_5 y) = 0,$$

y como $a\beta_3 - 2\beta_2 = 0$ obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a\left(\beta_3 s + \frac{\partial g}{\partial t}\right) - (\beta_1 + 2\beta_2 s + \beta_3 t + \beta_4 x + \beta_5 y) = 0$$

es decir que cumple con las ecuaciones (3.1)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial s} + a\frac{\partial G}{\partial s} - \frac{\partial G}{\partial t} &= 0,\\
\frac{\partial F}{\partial s} &= 0,
\end{aligned}$$

Así (F, G) son $\mathbb{A}$-diferenciable con respecto a (s, t).

Suponga que (F, G) es $\mathbb{A}$-diferenciable como función de (s, t) y como función de (x, y), entonces $(x, y) \mapsto f(t, x, y), g(t, x, y))$ es $\mathbb{A}$-diferenciable.■

Teorema 4.0.9. *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra con el producto Tipo II definido por la constante a y f, g polinomios como (4.3).Los siguientes resultados son equivalentes*

1. *La función $(x, y) \mapsto (f(t, x, y), g(t, x, y))$ es $\mathbb{A}$-diferenciable con respecto a la variable $X = (x, y)$*

2. *Las funciones f y g están dadas por*

$$\begin{aligned}
f(t, x, y) =& a_0 + a_1t + a_2x + a_3y + a_4t^2 + a_5tx + a_6ty - \frac{1}{2}aa_8x^2 + a_8xy + a_9y^2.\\
g(t, x, y) =& b_0 + b_1t + (a_2 + aa_3)y + b_4t^2 + (a_5 + aa_6)ty + \left(\frac{1}{2}a_8 + aa_9\right)y^2.
\end{aligned}$$

3. *la función $H = (F, G)$,*

$$\begin{aligned}
F(s, t, x, y) &= \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 st + \alpha_4 sx + \alpha_5 sy + f(t, x, y),\\
G(s, t, x, y) &= g(t, x, y),
\end{aligned}$$

es $\mathbb{A}$-diferenciable con respecto a (s, t) y con respecto a (x, y), donde $\alpha_1 = b_1 - aa_1$, $\alpha_2 = a^2a_4 - ab_4$, $\alpha_3 = 2b_4 - 2aa_4$, $\alpha_4 = -aa_5$, $\alpha_5 = a_5$

Prueba .- Si escribimos $f(t, x, y) = A_0 + A_1x + A_2y - \frac{1}{2}aA_3x^2 + A_3xy + A_4y^2$, entonces
$A_0 = a_0 + a_1t + a_4t^2$, $A_1 = a_2 + a_5t$, $A_2 = a_3 + a_6t$, $A_3 = a_8$, $A_4 = a_9$, $B_0 = b_0 + b_1t + b_4t^2$

y el mapeo $(x, y) \mapsto (f(t, x, y), g(t, x, y))$ es $\mathbb{A}$-diferenciable si y sólo si

$$g(t, x, y) = B_0 + (A_1 + aA_2)y + \left(\frac{1}{2}A_3 + aA_4\right)y^2$$

por el Corolario 3.1.6 Tipo II.

Consideremos F y G. Suponga que (f,g) es $\mathbb{A}$-diferenciable como una función de (x,y) con respecto a un álgebra con el producto Tipo II, entonces tenemos que cumple con las ecuaciones (3.2), es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + a\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

La igualdad $\alpha_4 + a\alpha_5 = 0$ es verificaao, entonces tenemos

$$\begin{aligned} \left(\alpha_4 s + \frac{\partial f}{\partial x}\right) + a\left(\alpha_5 s + \frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial g}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial g}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

que corresponde a las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + a\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial G}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

como satisface las ecuaciones (3.2), tenemos que $(x,y) \mapsto (F(s,t,x,y), G(s,t,x,y))$ es $\mathbb{A}$-diferenciable.

Ya que las igualdades $2\alpha_2 + a\alpha_3 = 0$ y

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= a_1 + 2a_4 t + a_5 x + a_6 y, \\ \frac{\partial g}{\partial t} &= b_1 + 2b_4 t + (a_5 + aa_6)y, \end{aligned}$$

se verifican, usando las igualdades de α_i tenemos

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + 2\alpha_2 s + \alpha_3 t + \alpha_4 x + \alpha_5 y) + a\left(\alpha_3 s + \frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{\partial g}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial G}{\partial s} &= 0. \end{aligned}$$

Es decir que satisface las ecuaciones (3.2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial s} + a\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial G}{\partial s} &= 0. \end{aligned}$$

Así (F, G) es $\mathbb{A}$-diferenciable con respecto a (s, t).

Suponga que (F, G) es $\mathbb{A}$-diferenciable como función de (s, t) y como función de (x, y), entonces $(x, y) \mapsto f(t, x, y), g(t, x, y))$ es $\mathbb{A}$-diferenciable.

■

Corolario 4.0.10. *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra con producto del tipo II definido por la constante a, y f, g los polinoios como (4.3). Suponga que el sistema (4.1) es $\mathbb{A}$-algebrizable, entonces la función (F, G) puede ser escrita como*

$$(F(T, X), G(T, X)) = A_0 + A_1 T + A_2 X + A_3 T^2 + A_4 TX + A_5 X^2,$$

donde $T = (s, t)$ y $X = (x, y)$,

$$A_0 = (a_0, b_0),\ A_1 = (a_1, b_1),\ A_2 = (a_3, a_2 + aa_3),$$

$$A_3 = (a_4, b_4),\ A_4 = (a_6, a_5 + aa_6),\ A_5 = \left(a_9, \tfrac{1}{2}a_8 + aa_9\right),$$

Teorema 4.0.11. *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra con el producto del tipo III. Sea f, g los polinomios como (4.3). Los siguientes resultados son equivalentes*

1. *La función $(x, y) \mapsto (f(t, x, y), g(t, x, y))$ es $\mathbb{A}$-diferenciable con respecto a la variable $X = (x, y)$*

2. *Las funciones f y g tienen la siguiente forma*
   $f(t, x, y) = a_0 + a_2 x + a_7 x^2$
   $g(t, x, y) = b_0 + b_1 t + b_3 y + b_4 t^2 + b_6 ty + +b_9 y^2$

3. *La función $H = (F, G)$ tiene la forma*

$$\begin{aligned} F(s, t, x, y) &= \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_4 sx + f(t, x, y), \\ G(s, t, x, y) &= g(t, x, y), \end{aligned}$$

   es $\mathbb{A}$-diferenciable con respecto a (s, t) y (x, y),

Prueba .- Por el Corolario 3.1.6 Tipo III, tenemos que el mapeo $(x, y) \mapsto (f(t, x, y), g(t, x, y))$ es $\mathbb{A}$-diferenciable si y sólo si

$$f(t, x, y) = A_0 + A_1 x + A_3 x^2,$$
$$g(t, x, y) = B_0 + B_2 y + B_3 y^2,$$

donde

$$A_0 = a_0, A_1 = a_2 + a_5 t, A_3 = a_7,$$
$$B_0 = b_0 + b_1 t + b_4 t^2, B_2 = b_3 + b_6 t, B_3 = b_9.$$

Considere F and G. Suponga que (f, g) es $\mathbb{A}$-diferenciable como una función de (x, y) con respecto a una álgebra con el producto tipo III, entonces tenemos que satisface las ecuaciones (3.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial g}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial G}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

así tenemos que cumple con las ecuaciones (3.3), entonces $(x, y) \mapsto (F(s, t, x, y), G(s, t, x, y))$ es $\mathbb{A}$-diferenciable.
Tenemos que satisface las ecuaciones (3.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial G}{\partial s} &= 0. \end{aligned}$$

Así (F,G) es $\mathbb{A}$-diferenciable con respecto a(s,t).

Suponga que (F, G) es $\mathbb{A}$-diferenciable como función de (s, t) y como función de (x, y), entonces $(x, y) \mapsto f(t, x, y), g(t, x, y))$ es $\mathbb{A}$-diferenciable. ■

Corolario 4.0.12. *Sea $\mathbb{A}$ una álgebra con producto del tipo III, f, g los polinoios como (4.3). Suponga que el sistema (4.1) es $\mathbb{A}$-algebrizable, entonces la función (F, G) puede ser escrita como*

$$(F(T, X), G(T, X)) = A_0 + A_1 T + A_2 X + A_3 T^2 + A_4 T X + A_5 X^2,$$

donde $T = (s, t)$ y $X = (x, y)$,

$$A_0 = (a_0, b_0), \ A_1 = (\alpha_1, b_1), \ A_2 = (a_2, b_3),$$
$$A_3 = (\alpha_2, b_4), \ A_4 = (\alpha_4, b_6), \ A_5 = (a_7, b_9).$$

Ahora veamoslos siguientes ejemplos, donde al algebrizar obtenemos una ecuación de Riccati.

Ejemplo 4.0.13. *Considere el sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 + 7t - x - 3y + 5t^2 - tx - 3ty - 6xy - 6y^2\\ \dot{y} &= 1 + t + x + y + t^2 + tx + ty + x^2 + 4xy + y^2,\end{aligned}$$

entonces las derivaddas parciales de f y g satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} &= 0\\ \frac{\partial f}{\partial y} + 3\frac{\partial g}{\partial x} &= 0.\end{aligned}$$

Así, $(x,y) \mapsto (f(t,x,y), g(t,x,y))$ es $\mathbb{A}$ diferenciable por una álgebra $\mathbb{A}$ con el producto Tipo I cuando $a = 2$ y $b = 3$. Las condiciones de el teorema son satisfacidas, entoncces las funciones F, G son dadas por

$$\begin{aligned}F(s,t,x,y) &= -3s - 21s^2 - 6st - 3sx - 3sy + f(t,x,y),\\ G(s,t,x,y) &= 9s + 11s^2 + 14st + sx - sy + g(t,x,y).\end{aligned}$$

En términos de las variables $T = (t,s)$ y $X = (x,y)$ de $\mathbb{A}$, (F,G) puede ser escrito como

$$(F(T,X), G(T,X)) = A_0 + A_1T + A_2X + A_3T^2 + A_4TX + A_5X^2,$$

donde

$$A_0 = (1,1),\ A_1 = (7,1),\ A_2 = (-1,1),$$

$$A_3 = (5,1),\ A_4 = (-1,1),\ A_5 = (0,1).$$

Ejemplo 4.0.14. *Considere el sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 + 2t + x + 3y + 5tx - \frac{3}{2}x^2 + 3xy,\\ \dot{y} &= 2t + 4y + 5ty + \frac{3}{2}y^2,\end{aligned}$$

entonces las derivaddas parciales de f y g satisfacen las ecuaciones (3.2), con $a = 1$.

Así, $(x,y) \mapsto (f(t,x,y), g(t,x,y))$ *es* $\mathbb{A}$ *diferenciable por una álgebra* $\mathbb{A}$ *con el producto Tipo II cuando* $a = 2$. *Las funciones* F, G *son dadas por*

$$\begin{aligned} F(s,t,x,y) &= -4s^2 + 8st - 5sx + 5sy + f(t,x,y), \\ G(s,t,x,y) &= g(t,x,y). \end{aligned}$$

En términos de las variables $T = (s,t)$ *y* $X = (x,y)$ *de* $\mathbb{A}$, (F,G) *puede ser escrito como*

$$(F(T,X), G(T,X)) = A_0 + A_1T + A_2X + A_3T^2 + A_4TX + A_5X^2,$$

donde

$$\begin{gathered} A_0 = (1,0),\ A_1 = (2,2),\ A_2 = (3,4), \\ A_3 = (0,4),\ A_4 = (0,5),\ A_5 = (0,3/2). \end{gathered}$$

Ejemplo 4.0.15. *Considere el sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2 + x + 4x^2 \\ \dot{y} &= 1 + t^2 + 5ty - 2y^2, \end{aligned}$$

entonces las derivaddas parciales de f *y* g *satisfacen las ecuaciones (3.3).*

Así, $(x,y) \mapsto (f(t,x,y), g(t,x,y))$ *es* $\mathbb{A}$ *diferenciable por una álgebra* $\mathbb{A}$ *con el producto Tipo III. Las funciones* F, G *son dadas por*

$$\begin{aligned} F(s,t,x,y) &= 4s + 3s^2 - 2sx + f(t,x,y), \\ G(s,t,x,y) &= g(t,x,y). \end{aligned}$$

En términos de las variables $T = (s,t)$ *y* $X = (x,y)$ *de* $\mathbb{A}$, (F,G) *puede ser escrito como*

$$(F(T,X), G(T,X)) = A_0 + A_1T + A_2X + A_3T^2 + A_4TX + A_5X^2,$$

donde

$$\begin{gathered} A_0 = (2,1),\ A_1 = (4,0),\ A_2 = (1,0), \\ A_3 = (3,1),\ A_4 = (-2,0),\ A_5 = (4,-2). \end{gathered}$$