UNIVERSIDAD DE SONORA
DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

"EL CONJUNTO DE CANTOR Y ALGUNAS DE SUS PROPIEDADES"

TESIS

Que para obtener el título de
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:
MARÍA ESMERALDA CARREÑO MONTOYA

Hermosillo, Sonora

Mayo de 2003

Índice General

Introducción

El objetivo de este trabajo es presentar algunas de las propiedades más relevantes y conocidas del conjunto de Cantor.

Mi interés por este conjunto tan fascinante se originó a través de los cursos de Análisis de la Licenciatura en Matemáticas, en los cuales se presenta como una fuente muy rica en contraejemplos para conceptos propios de esos cursos.

Por otra parte, es difícil encontrar en la literatura una fuente en la que se aborden y discutan las propiedades tan interesantes que posee el Conjunto de Cantor, de una manera unificada y accesible para un estudiante de matemáticas.

Así, con este trabajo se pretende dar un paso en esa dirección y, al mismo tiempo, esperamos que pueda servir de apoyo para los cursos de Análisis Matemático y de Topología en la Licenciatura en Matemáticas.

Generalmente, cuando uno se encuentra por primera vez con el Conjunto de Cantor, algunas de sus propiedades pueden parecer bastante sorprendentes. Por ejemplo, es un conjunto de medida de Lebesgue cero, no-numerable; también es perfecto, denso en ninguna parte y totalmente disconexo.

Estos resultados son, por sí mismos muy interesantes, pero resultan de mayor interés si uno trata usar esos conceptos para tratar de "*medir*" conjuntos. Por ejemplo, podemos preguntarnos cuándo un determinado conjunto es "*grande*" o "*pequeño*" en base a si satisface o no alguna de las propiedades anteriores.

Por ejemplo, si nos basáramos en el concepto de cardinalidad, el conjunto de Cantor sería un conjunto muy grande, y los racionales por su parte, serían un conjunto pequeño, pero en cambio si pensamos en una definición basada en la idea de densidad, tendríamos así un concepto topológico de pequeñez; de este modo el conjunto de Cantor sería muy pequeño, pues es denso en niguna parte y en cambio los racionales serían un conjunto grande, ya que son densos en $[0, 1]$, y en general, en la recta real.

Como podemos ver los conceptos de pequeñez en términos de cardinalidad y pequeñez en términos de densidad se contraponen por lo que no se ha podido dar una definición absoluta de cuándo un conjunto es *pequeño* o cuándo es *grande*

Además, como el conjunto de Cantor tiene medida cero, pequeñez en términos de cardinalidad y pequeñez en términos de medida también se contraponen.

Este conjunto es usado en Teoría de la Medida para demostrar que la σ-álgebra de Borel no es completa, en Topología para ilustrar que es un espacio métrico homeomorfo a n copias de sí mismo, incluso a una cantidad no numerable, lo cual no ocurre con $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n, n \geq 2$.

El conjunto de Cantor aparece como contraejemplo en diversas áreas de las matemáticas, como es el caso de Análisis Numérico, Ecuaciones Diferenciales Sistemas dinámicos y hasta en Estadística, sería muy difícil que un sólo trabajo abarcara todos estos tópicos, pues como es posible notar corresponden a áreas muy diferentes de las matemáticas. En particular el siguiente escrito se enfocó más hacia la Topología y Análisis, aunque esto no quiere decir que ya no existan más resultados referentes al conjunto distintos a los que se tratan en el presente.

El primer capítulo es una breve reseña sobre los acontecimientos matemáticos que ocurrieron durante los descubrimientos del conjunto de Cantor y la Función ternaria. Además se da una hipótesis sobre cómo Cantor pudo haber dado con ellas.

En el segundo capítulo definiremos el conjunto de Cantor, al que denotamos por C, y veremos que hay al menos dos formas de hacerlo y mostraremos que son equivalentes, una de ellas es bastante intuitiva y, por tanto, más sencilla de entender; la otra es más formal o rigurosa en el sentido matemático. También caracterizaremos a los elementos de C como aquellos números de $[0, 1]$ en cuya expansión ternaria no aparezca el dígito 1. Además de que daremos algunos puntos conocidos del conjunto.

En el tercer capítulo resumimos algunos de los conceptos topológicos que serán de gran utilidad en los capítulos posteriores, por lo que podemos considerarlos como un preámbulo en donde se revisan algunos conceptos básicos y resultados que son requeridos para probar algunas propiedades del conjunto de Cantor. Incluimos un poco de teoría sobre sistemas límite inverso y la topología producto, además de algunas proposiciones al respecto que culminan con el Teorema 3.21, el cual establece que dos espacios métricos compactos, perfectos y totalmente disconexos son homeomorfos.

En el cuarto capítulo estudiaremos algunas propiedades topológicas que distinguen a C, como es el hecho de que sea un espacio métrico totalmente disconexo, denso en ninguna parte, compacto y perfecto. Veremos además que es homeomorfo a n copias de sí mismo, incluso una cantidad numerable. También daremos una caracterización topológica de C como un espacio métrico, compacto, perfecto y totalmente disconexo.

En el siguiente capítulo analizaremos una función relacionada con el conjunto de Cantor, denominada la función Ternaria de C, la cual aplicaremos para probar algunos resultados interesantes, tal es el caso de que aunque esta función no sea absolutamente continua, es el límite de funciones que sí lo son, además esta función nos será útil para probar que la σ-álgebra de Borel no es completa.

En el sexto capítulo veremos que C es un fractal, calcularemos su dimensión y veremos conjuntos de Cantor de dimensión mayor que 1, que como ya sabemos, son homeomorfos.

El último capítulo trata sobre conjuntos de Cantor generalizados, veremos que es posible construir conjuntos perfectos, densos en ninguna parte que tengan medida positiva, a diferencia de C.

Finalmente, agregamos un anexo en el cual se incluyen definiciones de caracter topológico, además se enlistan muchas de las propiedades del conjunto de Cantor y que sólo mencionamos pues tratar de probarlas haría muy extenso el presente trabajo. En todo caso, el lector interesado en revisar dichas propiedades puede consultar la bibliografía que hemos incluido y que es más o menos amplia.

Capítulo 1

Reseña histórica

En esta parte presentaremos una breve introducción histórica acerca del Conjunto de Cantor y la Función de Cantor, un bosquejo de las ideas que se consideraban en el tiempo de sus descubrimientos, y una hipótesis de cómo Cantor llegó a ellas.

En particular, Cantor no fue el primero en descubrir "Conjuntos de Cantor", además el descubrimiento de Cantor del conjunto y la función de Cantor no fueron motivados por geometría ni tampoco por algo que la involucre, aunque esta sea la manera más usual en que se introducen estos objetos. De hecho, Cantor pudo haber dado con ellos através de un programa puramente aritmético.

El estudio sistemático de la topología de conjuntos en la recta real surgió durante el periodo 1870-1885 cuando los matemáticos investigaban dos problemas:

1. Las condiciones bajo las cuales una función admitía una integral, y
2. La unicidad de las series trigonométricas.

Fue en medio del ambiente de estas investigaciones que dos descubrimientos aparentemente independientes del conjunto de Cantor fueron hechos, cada descubrimiento vinculado a uno de estos problemas.

Bernhard Riemann (1826-1886) pasó considerable tiempo en la primera cuestión, y sugirió condiciones que pensaba podían dar una respuesta. Aunque no discutiremos estas condiciones, notamos que una de esas condiciones es importante, ya que eventualemente guió al desarrollo de la teoría de medida e integración. Un paso crucial en esta dirección fue el trabajo de Herman Hankel (1839-1873) durante principios de 1870. Hankel mostró, dentro del trabajo de Riemann, que la integrabilidad de una función depende de la naturaleza de ciertos conjuntos de puntos relacionados a la función. En particular, "una función, pensaba, es Riemann-integrable si y sólo si es *discontinua puntualmente*", lo que en términos modernos significa que, para cada $\sigma > 0$ el conjunto de puntos x en la cual la función oscila en más que σ en cada vecindad de x, es denso en ninguna parte. El razonamiento básico de Hankel, fue la creencia de que los conjuntos de la forma $\{\frac{1}{2^n}\}$ son prototipos para todos los subconjuntos densos en ninguna parte en la recta real. Hankel afirmaba que todos los subconjuntos densos en ninguna parte en la recta real podían ser encerrados por intervalos de longitud arbitrariamente pequeña (es decir, que tuvieran contenido exterior cero). Lo cual no es el caso.

Aunque la investigación de Hankel en la naturaleza de ciertos conjuntos de puntos fue muy importante, el hecho de que no consideró la posibilidad de conjuntos infinitos -en particular, conjuntos infinitos densos en ninguna parte- lo guió por mal camino. No fue sino hasta que se descubrió que los conjuntos nunca densos podían tener contenido exterior positivo que la importancia de conjuntos *insignificantes* en el sentido de teoría de la medida, fue reconocida. El descubrimiento de tales conjuntos, nunca densos con contenido exterior positivo, fue hecho por H.J.S. Smith (1826-1883), profesor de Geometría en Oxford, en un ensayo en 1875.

Después de una exposición sobre integración de funciones discontinuas, Smith presentó un método para construir conjuntos densos en ninguna parte que fue mucho más "substancial" que el conjunto $\{\frac{1}{2^n}\}$. Específicamente él observó lo siguiente :

Sea m cualquier entero mayor que 2. Dividamos el intervalo de 0 a 1 en m partes iguales, y extraigamos el último segmento de cada división subsecuente. Divídase cada uno de los segmentos m-1 restantes en m partes iguales; y omítanse los últimos segmentos de cada subdivisión subsecuente. Este procedimiento se continúa indefinidamente, se obtendrá un número infinito de puntos de división P sobre la línea de 0 a 1. Estos puntos yacen en un orden vago ...

En terminología moderna, el "orden vago" de Smith es a lo que nosotros referimos como nunca denso. Implícito en el trabajo de Smith, está la suposición de que los intervalos extraidos son abiertos, así que el conjunto resultante es cerrado. Actualmente, este conjunto vendría a ser conocido como un conjunto de Cantor, y al parecer ésta es la primera publicación que se tiene de tal conjunto.

En el mismo ensayo, Smith muestra que al dividir los intervalos restantes antes del n-ésimo paso en m^n partes iguales y extraer el último segmento de cada subdivisión, se obtiene un conjunto denso en ninguna parte de contenido exterior positivo. Smith se percató de la importancia de su descubrimiento, como él mismo declara, "el resultado obtenido en el último ejemplo merece atención, porque se opone a la teoría de funciones discontinuas, el cual le ha cobrado sanción a un eminente geómetra, el Dr. Hermann Hankel", y continúa explicando las deficiencias en las teorías contemporáneas de integración que su ejemplo ilustran.

Es interesante notar que el ensayo de Smith fue largamente inadvertido entre los matemáticos europeos y desafortunadamente sus descubrimientos cruciales fueron desconocidos. Casi una década después tomó el redescubrimiento de ideas similares por Cantor para ilustrar las deficiencias de las teorías contemporáneas de teoría de medida e integración.

Georg Cantor (1845-1918) llegó a estudiar la topología de conjuntos después de completar una tesis en teoría de números en Berlín en 1867. Empezó a estudiar con Eduard Heine (1821-1881) en la Universidad de Halle en la cuestión de la unicidad de series trigonométricas.

Este problema puede ser planteado como sigue :

Si para toda x, excepto en algún conjunto P, se tiene que

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos(nx) + b_n sen(nx)) = 0$$

¿los coeficientes deben ser cero ?

Heine respondió esta cuestión en sentido afirmativo "cuando la convergencia sea *uniforme en general* con respecto al conjunto P, el cual se toma finito", lo cual significa que la convergencia sea uniforme en cada subintervalo que no contenga puntos del conjunto finito P.

Cantor avanzó más en este problema. En documentos de 1870 y 1871, él omitió la suposición de que la convergencia sea "uniforme en general" y empezó a considerar el caso en que P fuera un conjunto infinito.

En un ensayo de 1872, Cantor introdujo la noción de *punto límite* de un conjunto, que definió tal como la conocemos actualmente, llamó a los puntos límite de un conjunto, el *conjunto derivado*, el cual denotó por P'. Entonces P" era el conjunto derivado de P', y así en adelante.

Cantor mostró que si el conjunto P era tal que $P^{(n)} = \emptyset$ para algún entero n y la serie trigonométrica

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos(nx) + b_n sen(nx)) = 0,$$

excepto posiblmente en P, entonces todos los coeficientes deben ser cero. El trabajo de Cantor en este problema fue decisivo, y doblemente importante, ya que los conjuntos derivados jugarían un papel importante en sus trabajos futuros.

Durante los años 1879-1884 Cantor escribió una serie de ensayos titulados *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, que contienen el primer tratado sistemático de topología de conjuntos de la recta real.

En particular nos concierne la introducción de tres términos en esta serie. Cantor define lo que se conoce como conjunto *denso* (literalmente "überall dicht"), término cuyo significado es todavía vigente. Da algunos ejemplos, incluyendo el conjunto de números de la forma $\frac{2^{2n+1}}{2^m}$ donde n y m son enteros, y continúa notando la relación entre conjuntos densos y sus conjuntos derivados. Es decir, $P \subset (\alpha, \beta)$ es denso en (α, β) si (y sólo si) $P' = (\alpha, \beta)$. Cantor discute también, la partición de un conjunto en dos componentes, que él califica como *reducible* y *perfecto*. Su definición de conjunto perfecto todavía es vigente: Un conjunto P es perfecto si satisface que $P = P'$.

Cantor afirma que los conjuntos perfectos no necesariamente son densos. En el pie de página de esta declaración Cantor introduce el conjunto que viene a ser conocido como el *Conjunto Ternario de Cantor*: El conjunto de números reales de la forma

$$x = \frac{c_1}{3} + \cdots + \frac{c_v}{3} + \cdots$$

donde c_v es 0 o 2 para cada entero v. Cantor nota que este conjunto es infinito y perfecto, con la propiedad de que no es denso en cualquier intervalo, a pesar de qué tan pequeño se tome el intervalo.

Durante el tiempo en que Cantor estuvo trabajando en estos ensayos, otros estuvieron trabajando en extensiones del Teorema Fundamental del

Cálculo para funciones discontinuas. Cantor dirigió esta cuestión en una carta fechada en Noviembre de 1883, en la cual define el conjunto de Cantor, justo como la había definido en uno de los ensayos citados anteriormente. Define en esta carta la Función de Cantor, y esta es la primera aparición de esta función. Se define primero en el complemento del conjunto de Cantor como la función cuyos valores son

$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{c_1}{2} + \cdots + \tfrac{c_{\mu-1}}{2^{\mu-1}} + \tfrac{2}{2^{\mu}}\right)$$

para cualquier entero entre

$$a = \frac{c_1}{3} + \cdots + \frac{c_{\mu-1}}{3^{\mu-1}} + \frac{1}{3^{\mu}}$$

y

$$b = \frac{c_1}{3} + \cdots + \frac{c_{\mu-1}}{3^{\mu-1}} + \frac{2}{3^{\mu}},$$

donde cada c_v es 0 o 2. Cantor concluye esta sección de la carta haciendo notar que esta función puede ser extendida a una función continua y creciente en [0,1]. Lo cual sirve como contraejemplo a la extensión de Harnack del Teorema Fundamental del Cálculo para funciones discontinuas, el cual estaba de moda en ese tiempo.

No existe evidencia sustancial sobre cómo Cantor dio con el conjunto y la función de Cantor. Sin embargo, en [11], J. F. Fleron propone la siguiente hipótesis: *Por el camino que tomó Cantor en la topología de conjuntos, su introducción aritmética del conjunto de Cantor y de la función de Cantor, y su facilidad con los métodos aritméticos, es posible que sea dentro del marco aritmético de expansiones binarias y ternarias que Cantor haya arrivado al conjunto de Cantor y a la función de Cantor.*

Capítulo 2

El Conjunto de Cantor

En este capítulo definimos el Conjunto de Cantor de dos maneras diferentes: una que es bastante intuitiva y que podríamos calificarla de tipo geométrico, y otra un poco más formal que la anterior, aunque también es fácil de entender.

Más aun, caracterizaremos a los elementos de este conjunto como aquellos puntos del intervalo $[0,1] \subset \mathbb{R}$ en cuya expansión ternaria sólo aparecen los dígitos 0 y 2, lo cual simplificará el trabajo para resultados posteriores.

Gracias a esta caracterización nos será posible presentar varios ejemplos de puntos conocidos del Conjunto de Cantor, tales como $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$, por mencionar algunos.

Por otra parte, también analizaremos algunas propiedades distintivas de este conjunto, como lo son el hecho de que tenga medida cero y, al mismo tiempo, sea no numerable.

2.1 Construcción del Conjunto de Cantor

Consideremos el intervalo $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Construiremos en este intervalo el Conjunto de Cantor, que denotaremos por $\boldsymbol{C}$.

Una manera de definir el conjunto de Cantor $\boldsymbol{C}$ es como sigue: Sean

$$F_0 = \{1\}$$

y

$$F_j = \{3s - 2, 3s\},$$

donde $s \in F_{j-1}, j = 1, 2, 3, \ldots$.
De esta manera, vemos que

$$F_1 = \{1,3\}, \quad F_2 = \{1,3,7,9\}, \quad F_3 = \{1,3,7,9,19,21,25,27\},$$

etcétera.
Es claro que cada F_k tiene 2^k elementos, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Para cada k, definimos los conjuntos C_k como la unión de 2^k intervalos de la forma

$$I^k_{r_j} = [\frac{r_j - 1}{3^k}, \frac{r_j}{3^k}] \tag{2.1}$$

donde $j = 1, 2, ..., 2^k$ y $r_j \in F_j$ para $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Esto es,

$$C_k = I^k_{r_1} \cup I^k_{r_2} \cup \ldots \cup I^k_{r_{2^k}}$$

Por ejemplo,

$$C_0 = [0, 1],$$

$$C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1],$$

$$C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1],$$

etcétera.

Se define el **Conjunto de Cantor** como

$$\boldsymbol{C} = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k \tag{2.2}$$

Notemos que cada C_k es cerrado, pues es unión de 2^k intervalos cerrados, cada uno de ellos de longitud $\frac{1}{3^k}$. Además, es fácil ver que

$$C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots$$

Como [0,1] es compacto, se sigue que $\boldsymbol{C} \neq \emptyset$ de acuerdo con la propiedad de intersecciones finitas (ver definición 3.1).

Observemos que el conjunto C_k se obtiene a partir de C_{k-1} pues dividimos cada uno de los intervalos que conforman C_{k-1} en tres partes iguales por lo que obtenemos tres subintervalos por cada uno de los intervalos de C_{k-1} y tomamos el primero y tercero de éstos, excluyendo el tercio medio (abierto).

Esto sugiere que podemos interpretar la construcción anterior del modo siguiente:

Del intervalo $[0,1]$ quitamos el tercio medio $E_1 = (\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ y obtenemos el conjunto

$$C_1 = [0,1] \setminus E_1^1,$$

por lo que nos quedan dos subintervalos: $[0,\frac{1}{3}]$ y $[\frac{2}{3},1]$.

De cada uno de éstos quitamos los tercios medios $E_2^1 = (\frac{1}{9},\frac{2}{9})$ y $E_2^2 = (\frac{7}{9},\frac{8}{9})$, respectivamente, y se obtiene el conjunto

$$C_2 = ([0,\frac{1}{3}] \setminus E_2^1) \cup ([\frac{2}{3},1] \setminus E_2^2) = C_1 \setminus (E_2^1 \cup E_2^2)$$

Los subintervalos que nos quedan son: $[0,\frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9},\frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3},\frac{7}{9}]$ y $[\frac{8}{9},1]$.

Nuevamente, eliminamos de cada uno de éstos los tercios medios

$$E_3^1 = \left(\frac{1}{27},\frac{2}{27}\right), \quad E_3^2 = \left(\frac{7}{27},\frac{8}{27}\right), \quad E_3^3 = \left(\frac{19}{27},\frac{20}{27}\right), \quad E_3^4 = \left(\frac{25}{27},\frac{26}{27}\right),$$

y se obtiene el conjunto

$$C_3 = C_2 \setminus (\bigcup_{k=1}^{2^{3-1}} E_3^k)$$

En general, si se definen los subintervalos de $[0,1]$

$$E_n^j = \left(\frac{3s_j-2}{3^n},\frac{3s_j-1}{3^n}\right)$$

para $s_j \in F_{n-1}, j = 1,2,...,2^{n-1}, n = 1,2,3,...$ y hacemos

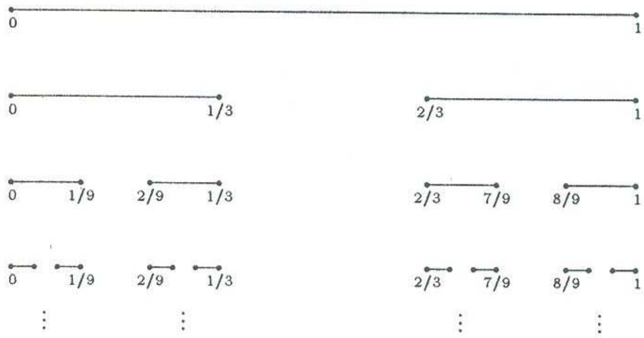
$$E_n = \bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} E_n^j,$$

entonces el conjunto de Cantor es

$$\boldsymbol{C} = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \tag{2.3}$$

Notemos que cada E_n es abierto, pues es unión de 2^{n-1} intervalos abiertos, cada uno de ellos de longitud $\frac{1}{3^n}$. Además, C es cerrado por ser el complemento de un abierto en $[0,1]$.

En la figura siguiente podemos apreciar los primeros pasos que se dan en la construcción del conjunto de Cantor C.



2.2 Caracterización de los elementos de C

De acuerdo con la construcción de C, al menos los puntos extremos de cada uno de los intervalos $I^k_{r_j}$, definidos en (2.1), pertenecen a este conjunto; sin embargo, éstos no son sus únicos puntos. De hecho C es no numerable, como veremos más adelante (proposición 2.2).

Cada número real lo podemos expresar diferentes bases; en particular si $x \in [0,1] \subset \mathbb{R}$, entonces puede expresarse en base 3 de la forma

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{3^m} = 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3....,$$

donde $\alpha_m \in \{0,1,2\}$. Esta expresión se llama la **expansión ternaria** de x y nos servirá para dar una caracterización de los elementos de C.

Proposición 2.1. *Sea $x \in [0,1]$. $x \in C_k$ si y sólo si x tiene una expansión ternaria de la forma $0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3...$, donde $\alpha_i \neq 1$ para $1 \leqslant i \leqslant k$; además $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ son constantes en cada uno de los intervalos de C_k, para cada $k = 0,1,2,3,\ldots$.*

Demostración. Procedemos por inducción en k.

Si k=0, entonces C_0=[0,1] y la proposición es válida, pues todo elemento en C_0 tiene una expansión ternaria.

En el caso k=1, se tiene que $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Luego, si $x \in I_1^1 = [0, \frac{1}{3}]$ y $x \neq \frac{1}{3}$, entonces $x = 0.0\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots$, por lo que $\alpha_1 \neq 1$.

Si $x = \frac{1}{3}$, entonces podemos tomar la expansión ternaria $x = 0.02222\ldots$ por lo que también se tiene $\alpha_1 \neq 1$.

En el caso de que $x \in I_3^1 = [\frac{2}{3}, 1]$ se tiene $x = 0.2\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots$ y es claro que $\alpha_1 \neq 1$.

Vemos además que en cada uno de estos dos subintervalos α_1 es constante.

Supongamos ahora que el resultado se cumple para $n = k$.

Sea I_r^k uno de los 2^k subintervalos cerrados que ocurren en C_k, con $r \in F_k$.

Por la hipótesis de inducción, suponemos que la expansión ternaria de cada elemento en I_r^k tiene la forma

$$0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k\beta_{k+1}\beta_{k+2}\beta_{k+3}\ldots$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ permanecen constantes en este intervalo, $\alpha_i \in \{0{,}2\}$ para $i = 1, 2, \ldots, k$ y $\beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \ldots$, pueden variar.

El intervalo I_r^k es de longitud $\frac{1}{3^k}$ y al dividirlo en tres tercios de igual longitud, $\beta_{k+1} = 0$ en el primer tercio y $\beta_{k+1} = 2$ en el tercer tercio.

En efecto, la expansión ternaria

$$0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k\beta_{k+1}\beta_{k+2}\beta_{k+3}\ldots$$

es lo mismo que

$$\frac{\alpha_1}{3} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \frac{\alpha_3}{3^3} + \cdots + \frac{\alpha_k}{3^k} + \frac{\beta_{k+1}}{3^{k+1}} + \frac{\beta_{k+2}}{3^{k+2}} + \cdots,$$

así, al dividir el intervalo $I_r^k = [\frac{r-1}{3^k}, \frac{r}{3^k}]$ en tres partes iguales, obtenemos tres subintervalos:

$$\left[\frac{r-1}{3^k}, \frac{3r-2}{3^{k+1}}\right], \left[\frac{3r-2}{3^{k+1}}, \frac{3r-1}{3^{k+1}}\right], \left[\frac{3r-1}{3^{k+1}}, \frac{r}{3^k}\right],$$

pues es claro que

$$\frac{r-1}{3^k} + \frac{1}{3^{k+1}} = \frac{3r-3+1}{3^{k+1}} = \frac{3r-2}{3^{k+1}}$$

$$\frac{r-1}{3^k}+\frac{2}{3^{k+1}}=\frac{3r-3+2}{3^{k+1}}=\frac{3r-1}{3^{k+1}}$$

De esta manera, $\beta_{k+1}=0$ en $[\frac{r-1}{3^k},\frac{3r-2}{3^{k+1}}]$, donde hemos tomado la expansión ternaria $0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k0222\ldots$ para el punto $\frac{3r-2}{3^{k+1}}$ en lugar de la expresión $0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k1000\ldots$

Es claro que para los puntos en $(\frac{3r-2}{3^{k+1}},\frac{3r-1}{3^{k+1}})$ se tiene $\beta_{k+1}=1$.

Finalmente, $\beta_{k+1}=2$ para los puntos del intervalo $[\frac{3r-1}{3^{k+1}},\frac{r}{3^k}]$, donde hemos tomado la expansión ternaria $0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k2000\ldots$ para $\frac{3r-1}{3^{k+1}}$ en lugar de $0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k1222\ldots$

Así, al remover el intervalo $(\frac{3r-2}{3^{k+1}},\frac{3r-1}{3^{k+1}})$ los puntos que quedan son aquellos para los cuales $\beta_{k+1}\neq 1$.

Por lo tanto, los elementos de C_{k+1} tienen la expansión ternaria requerida y se completa el proceso de inducción.

$\square$

Notemos que $x\in[0,1]$, pertenece al conjunto de Cantor $\boldsymbol{C}$ si y sólo si $x\in C_k$ para toda k, lo cual ocurre si y sólo si x satisface la proposición anterior para cada $k=1,2,3,\ldots$ Por lo tanto, los elementos de $\boldsymbol{C}$ son aquellos puntos de $[0,1]$ en cuya expansión ternaria sólo aparecen 0 y 2.

En los puntos con expansión ternaria de la forma

$$0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k1000\ldots,$$

$$0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k1222\ldots$$

se puede presentar ambigüedad, la cual se elimina al escoger las expansiones ternarias

$$0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k0222\ldots,$$

$$0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k2000\ldots,$$

respectivamente.

Proposición 2.2. *$\boldsymbol{C}$ es no numerable.*

Demostración. Consideremos $x\in[0,1]$ y sea $x=0.b_1b_2b_3\ldots$ su expansión binaria, esto es, $b_i\in\{0,1\}$, donde tomamos la expansión binaria 0.11111.... para 1.

Sea $f:[0,1]\longrightarrow\boldsymbol{C}$ dada por $f(x)=f(0.b_1b_2b_3\ldots)=0.(2b_1)(2b_2)(2b_3)\ldots$ donde $0.(2b_1)(2b_2)(2b_3)\ldots$ se interpreta como una expansión ternaria para un elemento de $[0,1]$.

- *f es uno a uno*: Sean $x, y \in [0,1]$, donde

$$x = 0.x_1x_2x_3\ldots$$

$$y = 0.y_1y_2y_3\ldots$$

son sus expansiones binarias. Supongamos que $f(x) = f(y)$, luego,

$$\begin{aligned} f(x) &= 0.(2x_1)(2x_2)(2x_3)\ldots \\ &= 0.(2y_1)(2y_2)(2y_3)\ldots \\ &= f(y) \end{aligned}$$

donde esta expansión debe interpretarse como una expansión ternaria. Como la representación ternaria usando 0 y 2 es única, se sigue que

$$2x_1 = 2y_1, 2x_2 = 2y_2, 2x_3 = 2y_3, \ldots,$$

por lo tanto

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots,$$

y así, $x = y$.

- *f es sobre*: Sea $c \in \boldsymbol{C}$. Si $c = 0.c_1c_2c_3\ldots$, donde $c_i \in \{0,2\}$, entonces

$$x = 0.\frac{c_1}{2}\frac{c_2}{2}\frac{c_3}{2}\ldots$$

es un elemento de $[0,1]$ tal que $f(x) = c$.

De esta manera, concluimos que f es biyectiva, y por lo tanto, $\boldsymbol{C}$ es no numerable.

□

Proposición 2.3. *$\boldsymbol{C}$ es un conjunto de medida de Lebesgue cero.*

Demostración.

$$\boldsymbol{C} = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$$

donde cada C_k es cerrado, pues

$$C_k = \bigcup_{m=1}^{2^k} I_{r_m}^k$$

y cada $I^k_{r_m}$ es un intervalo cerrado. Así $I^k_{r_m}$ es Lebesgue medible, pues es un boreliano (ver sección 5.2), por lo que C_k es también Lebesgue medible ya que es unión finita de medibles. Vemos entonces que C es medible por ser intersección numerable de medibles.

Sea λ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

Como

$$C = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\lambda(C) &= \lambda\left([0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \\ &= \lambda([0,1]) - \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\end{aligned}$$

pues

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \infty$$

Luego

$$\begin{aligned}\lambda(C) &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \lambda(E_n)^k \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}(\frac{1}{3})^n = 1 - \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^{n-1} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = 0\end{aligned}$$

□

2.3 Algunos puntos conocidos de C

Como ya mencionamos, los puntos $0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \frac{1}{27}, \frac{2}{27}, \frac{7}{27}, \frac{8}{27}, \frac{19}{27}, \frac{20}{27}, \ldots$ y, en general, todos los puntos que son extremos de los intervalos $I^k_{r_j}$ que usamos en la construcción de C son elementos de C.

Pero notemos que la expansión ternaria de $\frac{1}{4}$ es

$$\left(\frac{1}{4}\right)_3 = 0.020202\ldots$$

por lo que $\frac{1}{4} \in C$.

Pero multiplicar por 3 en base 3 equivale a recorrer el punto ternario un lugar hacia la derecha, así

$$\frac{1}{4} \times 3 = 0.2020202\ldots = \left(\frac{3}{4}\right)_3,$$

lo cual nos indica que $\frac{3}{4} \in C$. Notemos también que $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$ son simétricos en [0,1] con respecto al punto $\frac{1}{2}$, hecho éste que es de importancia, como veremos enseguida.

Similarmente, dividir entre 3 equivale a recorrer el punto un lugar hacia la izquierda y tenemos

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = 0.00202020\ldots = \left(\frac{1}{12}\right)_3,$$

es decir, $\frac{1}{12} \in C$.

Observemos ahora que $\frac{11}{12} \in C$, pues $(\frac{11}{12})_3 = 0.22020202\ldots$ y de nuevo $\frac{1}{12}$ y $\frac{11}{12}$ son simétricos en [0,1] con respecto a $\frac{1}{2}$.

Lo anterior sugiere que está presente cierta simetría en el Conjunto de Cantor y, de hecho, este es el caso, como lo demostramos a continuación.

En efecto, decimos que un sistema posee cierta *simetría* o que es *simétrico* con respecto a una transformación, si al aplicar la transformación al sistema, éste no cambia, es decir, queda invariante.

Consideremos la siguiente transformación

$$T : [0,1] \longrightarrow [0,1] \text{ tal que}$$

$$x \longmapsto 1 - x$$

Podemos notar que $\frac{1}{2}$ es un punto fijo para T.

Apliquemos esta transformación al conjunto de Cantor: Sea $x \in C$ y supongamos que

$$x = 0.b_1b_2b_3\ldots$$

es la expansión ternaria para x, con $b_i \in \{0,2\}, i = 1,2,\ldots$

En este caso,

$$T(x) = 1 - x = (0.22222\ldots)_3 - (0.b_1b_2b_3\ldots)_3$$

y como $b_i = 2$ ó $b_i = 0$, para cada $i \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$T(x) = (0.c_1c_2c_3\ldots)_3$$

donde $c_i \in \{0,2\}$, $i \in \mathbb{N}$

De esta manera, vemos que $T(x) \in \boldsymbol{C}$ y concluimos así que T deja invariante a $\boldsymbol{C}$. Esto nos dice que el conjunto de Cantor es simétrico con respecto al punto $\frac{1}{2} \in [0,1]$.

De este modo es fácil verificar que

$$\left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{12}, \frac{11}{12}, \frac{1}{36}, \frac{35}{36}, \frac{11}{36}, \frac{25}{36}, \frac{1}{108}, \frac{107}{108}, \frac{97}{108}, \frac{11}{108}, \frac{25}{108}, \frac{83}{108}, \ldots\right\} \subset \boldsymbol{C}.$$

Ya hemos dado ejemplos de números racionales en $\boldsymbol{C}$, demos ahora algunos ejemplos de irracionales en $\boldsymbol{C}$:

$$\begin{array}{l} 0.20220222022220\ldots \\ 0.220220022000220000\ldots \\ 0.02202222002222220\ldots \\ 0.002002200222002222200\ldots \\ \vdots \end{array}$$

Obviamente, si recorremos el punto ternario una posición hacia la izquierda en cualquiera de estos números, tendremos irracionales.

Capítulo 3

Preliminares topológicos

En este capítulo introducimos algunos de los conceptos topológicos que serán utilizados para probar propiedades importantes de C en el capítulo 4. Además se citan algunos resultados muy conocidos que nos serán de gran utilidad, como lo es el Teorema de Heine-Borel, y se prueban algunos resultados sobre *sistemas límite inverso*, en los cuales se involucra la topología producto; todo esto culminará con el Teorema 3.21, que para nuestros fines, es el más importante de este capítulo, pues establece que dos espacios métricos, compactos, perfectos y totalmente disconexos son homeomorfos. Veremos que estas propiedades caracterizan al conjunto de Cantor.

3.1 Conceptos básicos

Recordemos que un **espacio topológico** es una pareja (X, τ) que consiste de un conjunto X y una colección τ de subconjuntos de X, llamados **conjuntos abiertos**, que satisfacen los siguientes axiomas:

1. La unión de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
2. La intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
3. X y el conjunto vacío $\emptyset$ son conjuntos abiertos.

La colección τ es llamada una **topología** para X.

En adelante, cuando se diga que X es un espacio topológico, deberá entenderse que se está suponiendo que se tiene una topología definida en X; sólo cuando sea necesario especificar cuál es esa topología lo haremos de manera explícita.

En un espacio topológico X, un subconjunto de X es **cerrado** si su complemento es un abierto en la topología de X.

Es posible dar ejemplos de espacios topológicos en los que un subconjunto puede ser abierto y cerrado a la vez.

Un concepto muy relacionado con el de conjunto abierto es el de *vecindad*. En un espacio topológico X, una **vecindad** U de un punto x es cualquier abierto que contiene a x.

Sea (X, τ) un espacio topológico. Una **base** para esta topología es una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X (llamados **elementos básicos**) tales que

1. Para cada $x \in X$, existe al menos un elemento básico B que contiene a x.

2. Si x pertenece a la intersección de dos elementos básicos B_1 y B_2, entonces existe un elemento básico B_3 que contenga a x tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

La topología $\mathcal{K}$ generada por $\mathcal{B}$ se describe como sigue: Un subconjunto U de X se dice ser abierto en X (esto es, un elemento de $\mathcal{K}$) si para cada $x \in U$, existe un elemento básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $B \subset U$.

Una **base local** en el punto $x \in X$ es una colección de vecindades de x con la propiedad de que cada conjunto abierto que contiene a x contiene algún conjunto de la colección.

Sea X un espacio topológico. Si Y es un subconjunto de X, entonces es posible definir una topología para Y en términos de la topología de X. En efecto, los conjuntos abiertos en Y son de la forma $U \cap Y$, donde U es una abierto en X. Con esta topología Y es llamado un **subespacio** de X, y la topología es llamada la **topología relativa** de Y con respecto a X .

Puntos límite

Sea X un espacio topológico. Un punto $p \in X$ es un **punto límite** o de **acumulación** de un conjunto A si cada conjunto abierto que contenga a p, contiene al menos un punto de A distinto de p.

Un punto $p \in X$ se dice ser un **punto límite de una sucesión** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X, si cada conjunto abierto que contenga a p contiene a todos, excepto a una cantidad finita de términos de la sucesión. Se dice entonces que la sucesión **converge** al punto p.

Si A es un subconjunto de un espacio topológico X, el **conjunto derivado** de un conjunto A, que denotaremos por A', es la colección de todos los puntos límite de A. Cualquier punto en A que no esté en el conjunto derivado es llamado un **punto aislado**. Si un conjunto no tiene puntos aislados, se dice que es **denso en sí mismo**. Un conjunto es **perfecto** si es cerrado y todos sus puntos son de acumulación.

Cerraduras e interiores

La **cerradura** de un conjunto A se define como el conjunto A junto a sus puntos de acumulación, y se denota por $\overline{A}$. Como un conjunto que contiene todos sus puntos límites es cerrado, la cerradura de un conjunto puede ser definida, de forma equivalente, como el conjunto cerrado más pequeño que contiene a A. Análogamente, se define el **interior** de un conjunto A, denotado por A°, como el conjunto abierto más grande que está contenido en A, o equivalentemente como la unión de todos los conjuntos abiertos en A.

Dos conjuntos A y B que tienen la propiedad de que $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$, son llamados **conjuntos separados**.

Propiedades de numerabilidad

Un conjunto A se dice ser **denso** en un espacio X si $X = \overline{A}$.

Un conjunto A es **denso en ninguna parte** si $(\overline{A})^{\circ} = \emptyset$.

Un conjunto se dice ser de **primera categoría** en X si es la unión numerable de subconjuntos X los cuales son densos en ninguna parte. Si ese no es el caso, diremos que el conjunto es de **segunda categoría**.

Un espacio topológico es **separable** si contiene un subconjunto denso numerable.

Se dice que un espacio topológico satisface el **segundo axioma de numerabilidad** o que es **segundo numerable** si tiene una base numerable. Si el sistema de vecindades de cada punto tiene una base local numerable, entonces se dice que el espacio satisface el **primer axioma de numerabilidad** o que es **primero numerable**.

Funciones

Una función f de un espacio topológico (X, τ) a un espacio (Y, σ) se dice ser **continua** si la imagen inversa de cada conjunto abierto es un abierto. Esto es equivalente a pedir que la imagen inversa de conjuntos cerrados en Y sea cerrada en X.

Otra condición equivalente a las anteriores la podemos dar de la siguiente manera: La función $f : X \longrightarrow Y$ es continua si para cada $x \in X$ y cada vecindad V de $f(x)$, existe una vecindad U de x tal que $f(U) \subset V$. Si esta última condición sólo se cumple para un punto particular p, entonces se dice que la función es **continua en el punto** p.

Una función f de (X, τ) a (Y, σ) es **abierta** si la imagen bajo f de cada conjunto abierto en X es abierto en Y; la función se llama **cerrada** si la imagen bajo f de cada conjunto cerrado es, a su vez, cerrada.

Una función biyectiva $f : X \longrightarrow Y$ es un **homeomorfismo** si f y f^{-1} son continuas, o equivalentemente, si f es continua y abierta, o bien si $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ para toda $A \subset X$. En tal caso, X y Y se dicen ser **topológicamente equivalentes** u **homeomorfos**.

Una propiedad de un espacio topológico es **topológicamente invariante** o **propiedad topológica** si cualquier otro espacio homeomorfo al anterior también posee esa misma propiedad. Por ejemplo, la conexidad y la compacidad son invariantes topológicos.

3.2 Axiomas de Separación

Los **Axiomas de Separación** o axiomas T_i son condiciones progresivamente más fuertes que se imponen a los espacios topológicos y que nos ayudan a diferenciarlos. A continuación presentamos estos axiomas que fueron introducidos por Alexandroff y Hopf.

En lo que sigue X denotará un espacio topológico.

Axioma T_0 : Si $a, b \in X$, existe un conjunto abierto $O \in \tau$ tal que se cumple que $a \in O$ y $b \notin O$ ó $b \in O$ y $a \notin O$.

Axioma T_1 : Si $a, b \in X$, existen conjuntos abiertos $O_a, O_b \in \tau$ que contienen a a y a b respectivamente, tales que $b \notin O_a$ y $a \notin O_b$.

Axioma T_2 : Si $a, b \in X$, existen conjuntos ajenos abiertos O_a y O_b que contienen a a y a b respectivamente.

Axioma T_3 : Si A es un conjunto cerrado y b es un punto que no pertenece a A, existen conjuntos abiertos ajenos O_A y O_b que contienen a A y a b respectivamente.

Axioma T_4 : Si A y B son conjuntos cerrados ajenos en X, existen conjuntos abiertos ajenos O_A y O_B que contienen a A y a B respectivamente.

Axioma T_5 : Si A y B son conjuntos separados de X, existen conjuntos abiertos ajenos O_A y O_B que contienen a A y a B respectivamente.

Si X satisface un axioma T_i, entoces X es llamado un **espacio T_i**, a excepción de los espacios T_4 y T_5, para los cuales pedimos que también satisfagan el axioma T_1.

Un espacio T_0 es a veces llamado un **espacio de Kolmogorov** y un espacio T_1 se dice ser un **espacio de Fréchet**. Si el espacio, satisface el axioma T_2, entonces se le conoce como **espacio Hausdorff**.

Condiciones equivalentes al axioma T_2 son las siguientes:

1. La intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a un punto de X es el punto mismo.

2. La *diagonal* $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,x) \in X \times X\}$ es un conjunto cerrado en el *espacio producto* $X \times X$.

Para ver más detalles sobre la *topología producto*, ver sección 3.4.

En estas condiciones, es fácil ver que se cumple el siguiente resultado:

Proposición 3.1. *Sean f y g funciones continuas de un espacio topológico X en un espacio Hausdorff Y. Entonces el conjunto de todos los elementos $x \in X$ para los cuales $f(x) = g(x)$, es cerrado en X.*

La idea de la demostración es la siguiente: Si $F : X \longrightarrow Y \times Y$ es la función dada por $x \longmapsto (f(x), g(x))$, entonces esta función es continua y el conjunto $\{x \in X | f(x) = g(x)\}$ es precisamente la imagen inversa de la diagonal de $Y \times Y$, la cual es un conjunto cerrado pues $Y \times Y$ es Hausdorff (ver proposición 3.11).

Proposición 3.2. *Sea X un espacio topológico y supongamos que para cada par de puntos distintos $x, \hat{x} \in X$ existe una función continua $f : X \longrightarrow Y$, donde Y es un espacio Hausdorff, de tal manera que $f(x) \neq f(\hat{x})$. Entonces X es Hausdorff.*

Demostración. Si V y W son dos vecindades en Y de $f(x)$ y $f(\hat{x})$, respectivamente, entonces $f^{-1}(V)$ y $f^{-1}(W)$ son dos vecindades ajenas de x y de $\hat{x}$ en X, respectivamente. □

De esto se sigue inmediatamente que todo subespacio de un espacio Hausdorff, es a su vez Hausdorff. En efecto, si A es un subespacio de X, aplicamos el resultado anterior a la inclusión natural $i : A \longrightarrow X$ y se sigue que A es Hausdorff si X lo es.

3.3 Compacidad y Conexidad

Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un espacio X se dice que **cubre** a X, o que es una **cubierta** de X, si la unión de los elementos de $\mathcal{A}$ es igual a X. $\mathcal{A}$ es una **cubierta abierta** de X si sus elementos son subconjuntos abiertos de X. Un espacio topológico X es **compacto** si toda cubierta abierta $\mathcal{A}$ de X contiene una colección finita que también cubre a X.

Una condición más fuerte que la hipótesis de intersecciones finitas y que es equivalente a compacidad la damos en la definición siguiente:

Definición 3.1. *Sea X un espacio topológico y Λ un conjunto de índices. Se dice que X satisface la* **propiedad de intersecciones finitas** *si dada cualquier colección de subconjuntos cerrados de X, digamos $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, de tal manera que toda intersección de un número finito de $A'_\alpha s$ es no vacía, entonces*

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \neq \emptyset$$

No es difícil probar que un espacio topológico X es compacto si y sólo si satisface la propiedad de intersecciones finitas. Ver por ejemplo [17], p. 19.

Dos resultados muy conocidos y muy utilizados en topología y que también usarermos en este trabajo, son los siguientes:

Lema 3.3. *Cada subconjunto compacto de un espacio Hausdorff es cerrado.*

Lema 3.4. *La imagen de un espacio compacto bajo una función continua es compacta.*

La demostración de estos lemas puede encontrarse en cualquier libro de topología, en particular puede consultarse las referencias [20, 17].

Lema 3.5. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua biyectiva. Si X es compacto y Y es Hausdorff, entonces f es homeomorfismo.*

Demostración. Probaremos que las imágenes inversas de conjuntos cerrados de X bajo f^{-1} son cerrrados en Y.
Sea A cerrado en X, entonces A es compacto, pues X lo es.
Además $f(A)$ es compacto por ser la imagen de un compacto bajo una función continua.
Como Y es Hausdorff, $f(A)$ es cerrado en Y, ya que cada compacto en un espacio Hausdorff es cerrado. □

Una cubierta $\{V_\beta\}$ de un espacio X es un **refinamiento** de una cubierta $\{U_\alpha\}$ si para cada V_β existe un U_α tal que $V_\beta \subset U_\alpha$.

CONEXIDAD

Sea X un espacio topológico. Una **separación** de X es una pareja (U, V) donde U y V son subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos de X, tales que $U \cup V = X$. El espacio X se dice ser **conexo** si no existe una separación de X. Un espacio conexo X es **degenerado** si consiste de un sólo punto. Un subconjunto en un espacio topológico X es un conjunto conexo si no es la unión de dos subconjuntos separados de X. Dos puntos de X son **conexos en** X si existe un conjunto conexo que los contenga. Esta relación entre los puntos de un espacio es una relación de equivalencia, ya que la unión de una familia de conjuntos conexos que tenga intersección no vacía es conexa. Las clases de equivalencia son llamadas las **componentes** (o "componentes conexas") de X. Las componentes de X son precisamente los máximos subconjuntos conexos de X.

Un espacio es **totalmente disconexo** si sus únicos subconjuntos conexos son los conjuntos formados por un sólo punto.

Decimos que X es **totalmente separado** si para cada par de puntos $a, b \in X$ existe una separación (U, V) tal que $a \in U$ y $b \in V$.
Un espacio Hausdorff en el cual la cerradura de cada conjunto abierto es abierto es llamado **extremadamente disconexo**; equivalentemente, un espacio Hausdorff es extremadamente disconexo si y sólo si el interior de cada conjunto cerrado es cerrado, o si conjuntos abiertos ajenos tienen cerraduras ajenas.

Espacios métricos

Una **métrica** para un conjunto X es una función

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisface las siguientes condiciones para todo $x, y, z \in X$:

1. $d(x, x) = 0$
2. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. si $x \neq y, d(x, y) > 0$.

Llamamos a $d(x, y)$ la **distancia** entre x y y.

Una métrica muy conocida es la denominada *métrica euclidiana* en $\mathbb{R}^n$, la cual está definida de la siguiente forma:

$$d(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + \cdots + (\xi_n - \eta_n)^2},$$

donde $x = (\xi_i)_{i=1}^n, y = (\eta_i)_{i=1}^n$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Es posible usar una métrica para definir una topología en X tomando como base todas las **bolas abiertas**

$$B_\epsilon(x) = \{y \in X | d(x, y) < \epsilon\}.$$

Un espacio topológico junto con la métrica que induce su topología, y que denotaremos por (X, d), es llamado un **espacio métrico**.

El **diámetro** de un subconjunto no vacío A del espacio métrico (X, d) se define como el número

$$\operatorname{diam}(A) = \operatorname{Sup}\{d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}.$$

Cuando el diámetro de A es finito, se dice que A es **acotado**.

Una función $f : X \longrightarrow Y$, donde (X, d) y $(Y, \overline{d})$ son espacios métricos, se dice **continua** en $x_0 \in X$, si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\overline{d}(f(x), f(x_0)) < \epsilon \text{ siempre que } d(x, x_0) < \delta.$$

Un espacio topológico (X, τ) se dice **metrizable** si existe una métrica d la cual induce la topología τ. Un espacio topológico tiene una **base σ-localmente finita** si tiene una base que es la unión numerable de familias localmente finitas.

Decimos que un espacio topológico (X, τ) es **topológicamente completo** si existe una métrica d, que induce la topología τ tal que (X, d) es un espacio métrico completo.

Citamos ahora un resultado que es muy utilizado en Análisis y Topología, cuya demostración no incluimos aquí pues es bastante conocida. Ver por ejemplo [15].

Teorema 3.6. *(Heine-Borel) Sea $K \subset \mathbb{R}^m$, con la métrica usual (euclidiana), entonces K es compacto si y sólo si K es cerrado y acotado.*

3.4 Espacios producto

Sea Λ una familia de índices y sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de espacios topológicos X_α, con $\alpha \in \Lambda$.

El **producto** de los X_α se define como el conjunto

$$\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha = \left\{ f : \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \mid f(\alpha) \in X_\alpha \right\}. \tag{3.1}$$

Como un caso particular, podemos verificar que si Λ es finito, entonces (3.1) coincide con el producto cartesiano de la teoría elemental de conjuntos: Sea $\Lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$. Luego ,

$$\prod_{i=1}^{n} X_i = \left\{ f : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} X_i \mid f(i) \in X_i,\ i = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

Si hacemos $f(i) \equiv x_i$, entonces cada elemento $f \in \prod X_\alpha$ podemos identificarlo con un punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$.

Recíprocamente, dado $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, existe una función $g \in \prod X_i$ tal que

$$\begin{aligned} g(1) &= y_1, \\ g(2) &= y_2, \\ &\vdots \\ g(n) &= y_n. \end{aligned}$$

por lo que

$$\prod_{i=1}^{n} X_i \equiv \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in X_i\} = X_1 \times X_2 \times \ldots X_n.$$

Supongamos ahora que $\Lambda = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. En este caso se tiene

$$\prod_{i=0}^{\infty} X_i = \left\{ f : \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \longrightarrow \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i \,|\, f(i) \in X_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots \right\}$$

Si hacemos

$$\begin{aligned} f(0) &\equiv x_0 \\ f(1) &\equiv x_1 \\ &\vdots \\ f(n) &\equiv x_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

entonces cada elemento $f \in \prod_{i=0}^{\infty} X_i$ podemos identificarlo con un punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$.

Recíprocamente, dada una colección infinita $(y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ con $y_i \in X_i$, existe $g \in \prod_{i=0}^{\infty} X_i$ tal que

$$\begin{aligned} g(0) &= y_0, \\ g(1) &= y_1, \\ &\vdots \\ g(n) &= y_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

y de esta manera

$$\prod_{i=1}^{\infty} X_i \equiv \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \mid x_i \in X_i\}.$$

En el caso general, un punto $x \in \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ lo representaremos como

$$x = (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}.$$

Definimos la **proyección** π_β de $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ sobre X_β como la función

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \longrightarrow X_\beta \tag{3.2}$$

tal que

$$\pi_\beta(f) = f(\beta).$$

La **topología producto** en $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ se define como la mínima topología que hace continuas a las proyecciones (3.2).

De esta manera, si $V_\beta \subset X_\beta$ es un abierto, entonces, en la topología producto,

$$\pi_\beta^{-1}(V_\beta) = \left\{ f \in \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \mid \pi_\beta(f) \in V_\beta \right\}$$

es abierto en $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$.

Notemos que si V_α es un abierto en X_α para cada $\alpha \in \Lambda$, entonces los básicos para la topología producto son los conjuntos

$$\prod_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha,$$

donde la notación $\prod V_\alpha$ significa que $V_\alpha = X_\alpha$, excepto para un número finito de índices.

Probaremos a continuación un resultado que usaremos con bastante frecuencia en este trabajo y generaliza un hecho muy conocido para funciones de un espacio métrico X en un producto $Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_n$ de espacios métricos: la función

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_n \\ x &\longmapsto (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)) \end{aligned}$$

es continua si y sólo si cada una de las funciones componentes $g_1, g_2, \ldots, g_n$ lo es, donde $g_i : X \longmapsto Y_i$ está dada por $g_i(x) = (\pi_i \circ g)(x)$, y la función π_i es la proyección en la componente Y_i.

Proposición 3.7. *Sea $f : A \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ una función tal que $f(a) = (f_\alpha(a))_{\alpha\in\Lambda}$, donde $f_\alpha : A \longrightarrow X_\alpha$ para cada α. Supongamos que $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ tiene la topología producto. Entonces la función f es continua si y sólo si cada función f_α es continua.*

Demostración. Supongamos que f es continua. Sabemos que

$$f_\beta = \pi_\beta \circ f$$

pero π_β y f son continuas, luego su composición, f_β, es continua.

Supongamos ahora que f_α es continua para cada $\alpha \in \Lambda$. Por ser π_β continua, si tomamos U_β abierto en X_β, entonces $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ es un elemento sub-básico para la topología producto en X_α. Luego

$$f^{-1}(\pi_\beta^{-1}(U_\beta)) = (\pi_\beta \circ f)^{-1}(U_\beta) = f^{-1}(U_\beta).$$

Como f_β es continua, $f_\beta^{-1}(U_\beta)$ es un abierto en A, en consecuencia, f es continua. □

De esta proposición se sigue directamente el resultado siguiente:

Proposición 3.8. *Sean $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ dos familias de espacios topológicos y supongamos que para cada $\alpha \in \Lambda$ se tiene definida una función $f_\alpha : X_\alpha \longrightarrow Y_\alpha$. Una condición necesaria y suficiente para que la función*

$$\begin{aligned} f : \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha &\longrightarrow \prod_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha \\ (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} &\longmapsto (f_\alpha(x_\alpha))_{\alpha\in\Lambda} \end{aligned}$$

sea continua en el punto $q = (q_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, es que f_α sea continua en q_α para cada $\alpha \in \Lambda$

Demostración. Supongamos que f es continua. Para cada $\gamma \in \Lambda$ sea

$$g_\gamma : X_\gamma \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$$

de tal manera que

$$\begin{aligned}\pi_\gamma(g_\gamma(x_\gamma)) &= x_\gamma \\ \pi_\alpha(g_\gamma(x_\gamma)) &= q_\alpha \qquad \text{para} \quad \alpha \neq \gamma\end{aligned}$$

Notemos que en el primer caso se trata de la función identidad y en el segundo caso de una función constante, y como sabemos, ambas son continuas. Luego, por la proposición anterior, se sigue que g_γ es continua. Pero $f_\gamma = \pi_\gamma \circ f \circ g_\gamma$ es continua en q_γ pues es composición de funciones continuas.

Recíprocamente, si cada f_γ es continua y si $x = (x_\alpha)$, entonces f es la función dada por

$$x \longmapsto f_\alpha(\pi_\alpha(x)),$$

y la proposición anterior nos dice que f es continua. □

Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función arbitraria. Recordemos que la **gráfica** de la función f es el conjunto

$$G_f \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, f(x)) \in X \times Y\}$$

y G_f, con la tpología relativa, es un subespacio topológico del espacio producto $X \times Y$.

Un resultado que es consecuencia de la proposición 3.7 y que involucra la gráfica de una función es el siguiente:

Proposición 3.9. *Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función entre estos dos espacios. Entonces f es continua si y sólo si la función*

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow G_f \\ x &\longmapsto (x, f(x)) \end{aligned}$$

es un homeomorfismo.

Demostración. (*Necesidad*). Es trivial probar que g es biyectiva. La continuidad de g se sigue del hecho de que sus funciones componentes son la identidad y f, por lo que si f es continua, entonces la proposición 3.7 nos asegura la continuidad de g. Además, notemos que g^{-1} es la restricción de π_1 en G_f:

$$\begin{aligned} g^{-1} : G_f &\longrightarrow X \\ (x, f(x)) &\longmapsto x \end{aligned}$$

y es claro que

$$g^{-1} \equiv \pi_1|_{G_f}$$

donde

$$\begin{aligned} \pi_1|_{G_f} : G_f &\longrightarrow X \\ (x, f(x)) &\longmapsto x \end{aligned}$$

es la restricción a G_f de $\pi_1 : X \times Y \longrightarrow X$, la proyección en la primera componente. De esta manera, es claro que g^{-1} es continua.

(*Suficiencia*). Como $f = \pi_2 \circ g$ y g es un homeomorfismo, se sigue que f es continua. □

Como un corolario inmediato de este resultado se tiene:

Proposición 3.10. *Sean X y Y espacios topológicos. Para cada $q \in Y$ la función*

$$\begin{aligned} h : X &\longrightarrow X \times Y \\ x &\longmapsto (x, q) \end{aligned}$$

es un homeomorfismo de X en el subespacio $X \times \{q\}$ de $X \times Y$.

Demostración. La prueba es inmediata pues basta aplicar la proposición 3.9 a la función constante

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto q. \end{aligned}$$

la cual es continua, pues $G_f = X \times \{q\}$ y $h(X) = X \times \{q\}$. □

Probaremos ahora otro resultado que nos será de gran utilidad en la siguiente sección. Sin embargo, antes de enunciarlo haremos algunas observaciones.

Si $x, y \in X = \prod_\alpha X_\alpha$ son dos puntos en el producto, entonces podemos representarlos como $x = (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ y $y = (y_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ y

$$\pi_\beta(x) = x_\beta \in X_\beta$$

$$\pi_\beta(y) = y_\beta \in X_\beta$$

Luego, es claro que si $x \neq y$, existe $\gamma \in \Lambda$ tal que

$$\pi_\gamma(x) \neq \pi_\gamma(y).$$

Por otra parte, las proposiciones 3.7 y 3.8 nos permiten generalizar la proposición 3.10 para productos arbitrarios. De esta manera, si $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia de espacios topológicos, entonces cada X_α es homeomorfo a un subespacio del producto $\prod_\alpha X_\alpha$. Usaremos enseguida estos resultados.

Proposición 3.11. *Todo producto de espacios Hausdorff es de nuevo un espacio Hausdorff. Recíprocamente, si un producto de espacios no vacíos es Hausdorff, entonces cada uno de los factores es un espacio Hausdorff.*

Demostración. Sea $X = \prod_\alpha X_\alpha$ un producto de espacios topológicos. Si x y y son dos puntos distintos de X, entonces para algún índice γ se tiene $\pi_\gamma(x) \neq \pi_\gamma(y)$ y la proposición 3.2 nos dice que si los X_α son Hausdorff, entonces X también lo es. Para probar lo recíproco, basta observar que si X es Hausdorff y cada X_α es no vacío y además, cada X_α es homeomorfo a un subespacio de X y, por lo tanto, X_α es Hausdorff. Ver detalles en [6], pp. 77, 78. □

3.5 Sistemas límite inverso

Sea $X_0, X_1, X_2, \cdots$ una colección numerable de espacios topológicos, y supongamos que para cada $n > 0$ existe una función continua

$$f_n : X_n \longrightarrow X_{n-1}$$

La sucesión de espacios y funciones $\{X_n, f_n\}$ recibe el nombre de **sucesión límite inversa** y podemos representarla por medio del siguiente diagrama:

$$\cdots \xrightarrow{f_{n+1}} X_n \xrightarrow{f_n} X_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_3} X_2 \xrightarrow{f_2} X_1 \xrightarrow{f_1} X_0$$

Notemos que si $n > m$, entonces existe una función continua

$$f_{n,m} : X_n \longrightarrow X_m$$

dada por la composición

$$f_{n,m} = f_{m+1} \circ f_{m+2} \circ \ldots \circ f_{n-1} \circ f_n$$

$$\cdots \longrightarrow X_n \xrightarrow{f_n} X_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots \xrightarrow{f_{m+2}} X_{m+1} \xrightarrow{f_{m+1}} X_m \xrightarrow{f_m} X_{m-1} \longrightarrow \cdots$$

Consideremos la sucesión $(x_0, x_1, \ldots x_n, \ldots)$ de tal manera que $x_n \in X_n$ y $x_n = f_{n+1}(x_{n+1})$ para todo $n \geq 0$. Podemos identificar esta sucesión con un punto en el espacio producto $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$ al considerar la función

$$\varphi : \{0, 1, 2, \ldots\} \longrightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$$

dada por

$$\varphi(n) = x_n$$

De esta manera, el conjunto de todas estas sucesiones forman un subconjunto del espacio $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$, el cual es un subespacio topológico con la topología relativa, al cual se le llama el **espacio límite inverso de la sucesión** $\{X_n, f_n\}$ y lo denotaremos por X_∞.

Lema 3.12. *Sea $\{X_n, f_n\}$ una sucesión límite inversa. Si cada f_n es una función sobre y si $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ es un conjunto de puntos tales que $x_{n_i} \in X_{n_i}$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$ y tal que $i < j$ implica que $f_{n_j n_i}(x_{n_j}) = x_{n_i}$, entonces existe un punto en X_∞ cuya coordenada en X_{n_i} es x_{n_i}, $i = 1, 2, 3, \ldots$.*

Demostración. Es necesario distinguir dos casos en la prueba de este resultado.
Caso I: $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots\}$ es infinito.
Sea $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ arbitrario. Entonces existe $n_j \in \{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\}$ tal que $n_j \geq n$.

De esta manera, si $n_j = n$, hacemos $x_n \stackrel{\text{def}}{=} x_{n_j}$ y si $n_j > n$, entonces definimos $x_n \stackrel{\text{def}}{=} f_{n_j,n}(x_{n_j})$. En estas condiciones, la sucesión $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ es un elemento de X_∞.

En efecto, para probar esto, es necesario verificar que

(i) $x_k \in X_k$

(ii) $f_{k+1}(x_{k+1}) = x_k$

para $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Si damos $n = 0$, entonces existe n_j tal que $n_j \geq 0$ y

- Si $n_j = 0$, entonces $x_0 = x_{n_j} \in X_{n_j} = X_0$. Luego $x_0 \in X_0$.
- Si $n_j > 0$, entonces $x_0 = f_{n_j,0}(x_{n_j})$ pues
$$f_{n_j,0} : X_{n_j} \longrightarrow X_0$$
$$f_{n_j,0} = f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_{n_j}$$
por lo que $x_0 = f_{n_j,0}(x_{n_j}) \in X_0$.

Si ahora suponemops que $n = 1$, entonces existe n_j tal que $n_j \geq 1$ y

- Si $n_j = 1$, entonces $x_1 = x_{n_j} \in X_{n_j} = X_1$, por lo que $x_1 \in X_1$ Como $n_j > 0$,
$$x_0 = f_{n_j,0}(x_n) = f_{1,0}(x_1) = f_1(x_1),$$
por lo tanto, $x_0 \in X_0$.
- Si $n_j > 1, entonces x_1 = f_{n_j,1}(x_{n_j})$
$$f_{n_j,1} : X_{n_j} \longrightarrow X_1,$$
por lo que
$$f_{n_j}(x_{n_j}) = x_1 \in X_1.$$
Como $n_j > 0, se tiene x_0 = f_{n_j,0}(x_{n_j})$ y
$$f_{n_j,0} : X_{n_j} \longrightarrow X_0$$
y se sigue
$$f_{n_j,0}(x_{n_j}) = x_0 \in X_0$$
Veamos ahora que $f_1(x_1) = x_0$: Tenemos
$$f_{n_j,0} = f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_{n_j}$$
y
$$f_{n_j,1} = f_2 \circ f_3 \circ \ldots \circ f_{n_j}.$$
Luego,
$$(f_1 \circ f_{n_j,1})(x_{n_j}) = f_1(f_{n_j,1}(x_{n_j})) = f_1(x_1)$$
$$f_1 \circ f_{n_j,1} = f_1 \circ (f_2 \circ f_3 \circ \ldots \circ f_{n_j}) = f_{n_j,0}.$$
Así,
$$(f_1 \circ f_{n_j,1})(x_{n_j}) = f_{n_j,0}(x_{n_j}) = x_0,$$
por lo tanto $f_1(x_1) = x_0$.

Si $n = 2$, entonces existe $n_j \geq 2$, y de esta manera,

- para $n_j = 2$, se tiene $x_2 = x_{n_j} \in X_{n_j}$, por lo que $x_2 \in X_2$.
  Como $2 = n_j > 1$, se tiene $x_1 = f_{n_j,1}(x_{n_j}) = f_{2,1}(x_2) \in X_1$; así, $f_{2,1} = f_2$, por lo que $f_2(x_2) = x_1$.
  Además $2 = n_j > 0$, luego $x_0 = f_{n_j,0}(x_{n_j}) = f_{2,0}(x_2) \in X_0$ y $f_{2,0} = f_1 \circ f_2$, por lo que

$$f_{2,0}(x_2) = f_1(f_2(x_2)) = f_1(x_1) = x_0.$$

- si $n_j > 2$, entonces $x_2 = f_{n_j,2}(x_{n_j})$. Pero

$$f_{n_j,2} : X_{n_j} \longrightarrow X_2.$$

  De este modo, $x_2 \in X_2$.

Es claro que si continuamos este proceso de manera indefinida obtenemos una sucesión

$$(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

de manera tal que $f_{n+1}(x_{n+1}) = x_n$ y $x_n \in X_n$.
Caso II : Supongamos que el conjunto $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots\}$ es finito.
En estas condiciones, existe n_k que es el mayor de los índices $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$, y para $n < n_k$ definimos

$$x_n = f_{n_k,n}(x_{n_k})$$

Así,

$$\begin{aligned} x_0 &= f_{n_k,0}(x_{n_k}) \\ x_1 &= f_{n_k,1}(x_{n_k}) \\ &\vdots \\ x_n &= f_{n_k,n}(x_{n_k}) \end{aligned}$$

No es difícil verificar que $f_{i+1}(x_{i+1}) = x_i$, con $x_i \in X_i$. Esto nos define los primeros $(n+1)$ términos de la sucesión, y tenemos así la base para una prueba por inducción.

Supongamos ahora que se ha definido x_m para $m \geq n_k$ y que cumple con las propiedades requeridas. Sabemos que cada f_k es sobre y se tiene, además, que $x_m \in X_m$ y que $f_m(x_m) = x_{m-1}$.

Como

$$f_{m+1} : X_{m+1} \longrightarrow X_m$$

es sobre, existe $x \in X_{m+1}$ tal que

$$f_{m+1}(x) = x_m \in X_m.$$

Definimos $x_{m+1} \equiv x$.

Así, $x_{m+1} \in X_{m+1}$ y cumple $f_{m+1}(x_{m+1}) = x_m$. Por lo tanto, se ha completado el proceso de inducción y se tiene definida una sucesión $(x_0, x_1, \ldots, x_m, \ldots)$ que es un punto de X_∞. □

La hipótesis de que cada función f_n debe ser sobre en el lema anterior no se puede omitir, pues de ser así el espacio X_∞ pudiera ser el vacío y presentamos un ejemplo concreto donde se ilustra este caso.

Consideremos una sucesión de espacios discretos numerables

$$X_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{x_{n,m}\}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Definimos una familia de funciones

$$f_n : X_n \longrightarrow X_{n-1}$$

de la siguiente manera:

$$f_n(x_{n,m}) = x_{n-1,m+1}.$$

Claramente, esta es una sucesión límite inversa. Veamos ahora que las funciones f_n no son sobre.

En efecto, si empezamos con un punto $x_{0,j} \in X_0$ e intentamos formar un punto de X_∞, entonces sólo podríamos construir las primeras j coordenadas pues

$$\begin{aligned}
f_1(x_{1,j-1}) &= x_{0,j} \\
f_2(x_{2,j-2}) &= x_{1,j-1} \\
f_3(x_{3,j-3}) &= x_{2,j-2} \\
&\vdots \\
f_{j-1}(x_{j-1,1}) &= x_{j-2,2}
\end{aligned}$$

y nos vemos forzados a parar este proceso pues si intentamos construir la coordenada $j+1$ se debiera tener

$$f_j(x_{j,0}) = x_{j-1,1}$$

lo cual no es posible ya que $x_{j,0}$ es un punto indefinido pues para cada j, $x_{j,0} \notin X_j$. Notemos ademas que esto no depende de la numeración de los elementos de $x_{n,m}$ de cada X_n. La figura siguiente puede ayudar a visualizar lo que acabamos de explicar:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
X_j & \xrightarrow{f_j} & X_{j-1} & \xrightarrow{f_{j-2}} & X_{j-2} & \xrightarrow{f_{j-2}} & \dots & \xrightarrow{f_4} & X_3 & \xrightarrow{f_3} & X_2 & \xrightarrow{f_2} & X_1 & \xrightarrow{f_1} & X_0 \\
 & & x_{j-1,1} & \longmapsto & x_{j-2,2} & \longmapsto & & \longmapsto & x_{3,j-3} & \longmapsto & x_{2,j-2} & \longmapsto & x_{1,j-1} & \longmapsto & x_{o,j}
\end{array}$$

Como no podemos construir más allá de la coordenada j-ésima debido a que no todas las funciones f_n son sobre, es claro que X_∞ no posee elemento alguno.

Ahora probaremos un resultado que nos asegura que el espacio límite inverso X_∞ es no vacío si los espacios X_n satifacen ciertas condiciones.

Teorema 3.13. *Sea $\{X_n, f_n\}$ una sucesión límite inversa, de tal manera que cada X_n es un espacio Hausdorff, compacto. Entonces X_∞ es no vacío.*

Demostración. Para cada $n \geq 1$, definimos Y_n como el conjunto de todas las sucesiones $(p_0, p_1, p_2, \dots, p_n, \dots)$ tales que

$$f_j(p_j) = p_{j-1}$$

para $1 \leq j \leq n$.

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \{(p_0, p_1, p_2, \dots) \mid f_1(p_1) = p_0\} \\
Y_2 &= \{(p_0, p_1, p_2, \dots) \mid f_2(p_2) = p_1, f_1(p_1) = p_0\} \\
Y_3 &= \{(p_0, p_1, p_2, p_3, \dots) \mid f_3(p_3) = p_2, f_2(p_2) = p_1, f_1(p_1) = p_0\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Notemos que

$$Y_1 \supset Y_2 \supset Y_3 \supset Y_4 \dots$$

Cada Y_k es un subconjunto de $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$, y además, Y_k es cerrado para cada k. En efecto, para probar esto esto, mostraremos que $\prod_{n=0}^{\infty} X_n \setminus Y_k$ es abierto. Sea $q \in \prod_{n=0}^{\infty} X_n \setminus Y_k$ para algún k dado. De este modo, podemos suponer que

$$q = (q_0, q_1, q_2, q_3, \dots) \in \prod_{n=0}^{\infty} X_n$$

Como $q \notin Y_k$, existe j con $1 \leq j < k$ tal que

$$f_{j+1}(q_{j+1}) \neq q_j$$

donde $q_{j+1} \in X_{j+1}$ y $f_{j+1} : X_{j+1} \longrightarrow X_j$.

Pero X_j es Hausdorff, por lo que existen abiertos U_j y V_j en X_j tales que $q_j \in U_j, f_{j+1}(q_{j+1}) \in V_j$ y además $U_j \cap V_j = \emptyset$.

Sean $V_{j+1} = f_{j+1}^{-1}(V_j)$ y U_q un elemento básico de $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$, tal que $q \in U_q$, pero además con U_j y V_{j+1} como factores de U_q.

Si $p = (p_0, p_1, p_2, \dots) \in Y_n$ y además $p = (p_0, p_1, p_2, \dots) \in U_q$ entonces se tiene $p_{j+1} \in V_{j+1}$ y $p_j \in V_j$ pues, por definición, $V_{j+1} = f_{j+1}^{-1}(V_j)$ y dado que $p = (p_0, p_1, p_2, \dots) \in Y_n$ se tiene $f_k(p_k) = p_{k-1}$ para $1 \leq k < n$.

Si $k = j + 1$, entonces $f_{j+1}(p_{j+1}) = p_j$ y

$$f_{j+1}(V_{j+1}) = f_{j+1}(f_{j+1}^{-1}(V_j)) \subset V_j$$

Pero $p_{j+1} \in V_{j+1}$, así, $f_{j+1}(p_{j+1}) \in V_j$. Por otro lado, $f_{j+1}(p_{j+1}) = p_j$, luego $p_j \in V_j$. Además como $p = (p_0, p_1, p_2, \dots) \in U_q$ se tiene que $p_j \in U_j$ (pues el j-ésimo factor de U_q es U_j). Así, $p_j \in U_j \cap V_j$, lo cual contradice el hecho de que U_j y V_j sean ajenos.

Esta contradicción viene de suponer que $p = (p_0, p_1, p_2, \dots) \in U_q$, por lo tanto $U_q \cap Y_k = \emptyset$.

Hemos probado entonces que para cualquier $q \in \prod_{n=0}^{\infty} X_n \setminus Y_k$, existe un abierto U_q totalmente contenido en $\prod_{n=0}^{\infty} X_n \setminus Y_k$. Así, $\prod_{n=0}^{\infty} X_n \setminus Y_k$ es abierto. Por lo tanto Y_k es cerrado.

En consecuencia, tenemos que cada Y_n es cerrado y que $Y_1 \supset Y_2 \supset Y_3 \supset \dots$. Además $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$ es compacto, pues cada X_n lo es (Teorema de Tychonoff) y $\{Y_n\}$ satisface la hipótesis de intersecciones finitas, por lo tanto

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n \neq \emptyset.$$

Pero, por otro lado, es fácil ver que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n = X_\infty$$

pues si x está en esa intersección, entonces $x \in Y_n$ para toda $n = 1, 2, \ldots$ y $x = (x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots)$ por lo que se satisface $f_{k+1}(x_{k+1}) = x_k$ por la defición de la colección $\{Y_n\}$.

Esto prueba que $X_\infty \neq \emptyset$. $\square$

Sean $\{A_n, f_n\}, \{B_n, g_n\}$ dos sucesiones límite inversas.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{f_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{f_n} & A_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & A_{n-2} & \xrightarrow{f_{n-2}} & \cdots & \xrightarrow{f_2} & A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_n} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{n-2}} & & & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_0} \\
\cdots & \xrightarrow[g_{n+1}]{} & B_n & \xrightarrow[g_n]{} & B_{n-1} & \xrightarrow[g_{n-1}]{} & B_{n-2} & \xrightarrow[g_{n-2}]{} & \cdots & \xrightarrow[g_2]{} & B_1 & \xrightarrow[g_1]{} & B_0
\end{array}$$

Una función $\Phi : \{A_n, f_n\} \longrightarrow \{B_n, g_n\}$ es una colección $\{\varphi_n\}$ de funciones continuas $\varphi_n : A_n \longrightarrow B_n$ tales que

$$g_n \circ \varphi_n = \varphi_{n-1} \circ f_n$$

para cada n.

Φ induce una función

$$\varphi : A_\infty \longrightarrow B_\infty,$$

de la siguiente manera:

Si $(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ es un elemento de A_∞, entonces

$$\begin{aligned}
\varphi(a) &= \varphi(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots) \\
&\stackrel{\text{def}}{=} (\varphi_0(a_0), \varphi_1(a_1), \varphi_2(a_2), \varphi_3(a_3), \ldots)
\end{aligned}$$

y debemos probar que $\varphi(a) \in B_\infty$.

Pero vemos que

$$\varphi_0(a_0) \in B_0,$$

$$\varphi_1(a_1) \in B_1,$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n(a_n) \in B_n,$$

$$\vdots$$

y además, es necesario verificar que

$$g_1(\varphi_1(a_1)) = \varphi_0(a_0),$$

$$g_2(\varphi_2(a_2)) = \varphi_1(a_1),$$

$$\vdots$$

lo cual se se sigue del caso general, si vemos que

$$g_n(\varphi_n(a_n)) = \varphi_{n-1}(a_{n-1})$$

para cada n.

Pero notemos que

$$g_n(\varphi_n(a_n)) = (g_n \circ \varphi_n)(a_n) = (\varphi_{n-1} \circ f_n)(a_n) = \varphi_{n-1}(f_n(a_n)) = \varphi_{n-1}(a_{n-1}),$$

por lo que se tiene el resultado.

La función φ que induce Φ, satisface una propiedad muy importante en topología:

Teorema 3.14. *La función $\varphi : A_\infty \longrightarrow B_\infty$ inducida por $\Phi : \{A_n, f_n\} \longrightarrow \{B_n, g_n\}$ es continua.*

Demostración. B_∞ es un subespacio topológico del espacio producto $\prod_{n=0}^{\infty} B_n$. De esta manera, la función inducida $\varphi : A_\infty \longrightarrow B_\infty$ la podemos ver como una función

$$\varphi : A_\infty \longrightarrow \prod_{n=0}^{\infty} B_n$$

Si $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \in A_\infty$, entonces

$$\varphi(a) = (\varphi_0(a_0), \varphi_1(a_1), \varphi_2(a_2), \ldots, \varphi_n(a_n), \ldots).$$

. En cada coordenada, $\varphi(a)$ está definida por medio de una función continua

$$\varphi_n : A_n \longrightarrow B_n$$

$\varphi_0(a_0)$ es la primera coordenada de $\varphi(a)$, pero $\varphi_0 : A_0 \longrightarrow B_0$ es una función continua, por hipótesis.
$\varphi_1(a_1)$ es la segunda coordenada de $\varphi(a)$ y $\varphi_1 : A_1 \longrightarrow B_1$ es continua.
En general $\varphi_n(a_n)$ es la $(n+1)$-ésima coordenada de $\varphi(a)$ y $\varphi_n : A_n \longrightarrow B_n$ es continua. De aquí se sigue que φ es continua. □

Un concepto que generaliza el de sucesión límite inversa es el de sistema límite inverso que definimos a continuación.

Sea Γ un conjunto parcialmente ordenado por una relación $<$. Si para cualquier par de elementos $\alpha, \beta \in \Gamma$ existe $\gamma \in \Gamma$ tal que se cumplen las dos condiciones $\alpha < \gamma$ y $\beta < \gamma$, entonces Γ se dice ser un **conjunto dirigido**.

Supongamos ahora que para cada $\alpha \in \Gamma$ existe un único conjunto X_α en una colección de conjuntos $\mathcal{A}$ (decimos que $\mathcal{A}$ está indexado por Γ), y supongamos que siempre que $\alpha < \beta$ en Γ, existe una función continua

$$f_{\beta\alpha} : X_\beta \longrightarrow X_\alpha$$

de tal manera que se satisface lo siguiente:

(*i*) $f_{\alpha\alpha}$ es la transformación identidad para cada $\alpha \in \Gamma$.

(*ii*) $f_{\gamma\beta} \circ f_{\beta\alpha} = f_{\gamma\alpha}$ siempre que $\alpha < \beta < \gamma$.

Si F denota la colección $\{f_{\beta\alpha}\}$ de todas estas funciones, entonces el par $X_\Gamma = \{\mathcal{A}, F\}$ se llama un **sistema límite inverso sobre el conjunto dirigido** Γ.

Al igual que en el caso de los espacios límite inverso X_∞ que identificábamos con un subespacio de $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$, en este caso podemos identificar X_Γ con el subconjunto de $\prod_\alpha X_\alpha$ que consiste de aquellos puntos x tales que

$$\pi_\alpha(x) = f_{\beta\alpha}(\pi_\beta(x))$$

siempre que $\alpha < \beta$, lo cual se ilustra en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\prod_\alpha X_\alpha & \xrightarrow{\pi_\beta} & X_\beta \\
{\scriptstyle id}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f_{\beta\alpha}} \\
\prod_\alpha X_\alpha & \xrightarrow{\pi_\alpha} & X_\alpha
\end{array}$$

Der esta manera, es claro que un espacio límite inverso es un caso particular de un sistema límite inverso sobre el conjunto dirigido de los números naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. En efecto, si $\Gamma = \mathbb{N}$ con el orden usual de los números naturales, entonces las fuciones $f_{\beta\alpha}$ son precisamente $f_{n,m}$ donde $m < n$ y una composición

$$X_n \xrightarrow{f_{n,m}} X_m \xrightarrow{f_{m,l}} X_l$$

satisface

$$f_{n,m} \circ f_{m,l} = f_{n,l}$$

para $l < m < n$, que es lo análogo de

$$f_{\gamma\beta} \circ f_{\beta\alpha} = f_{\gamma\alpha}.$$

para $\alpha < \beta < \gamma$.

Ahora estamos en condiciones de probar el siguiente resultado:

Proposición 3.15. *Sea $X_\Gamma = \{\mathcal{A}, F\}$ un sistema límite inverso, donde $\mathcal{A} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ es una colección de espacios topológicos. Si cada X_α es un espacio Hausdorff, entonces X_Γ es un espacio Hausdorff y es un subespacio cerrado de $\prod_\alpha X_\alpha$.*

Demostración. Si cada espacio X_α es Hausdorff, entonces, de acuerdo con la proposición 3.11, el producto $\prod_\alpha X_\alpha$ es también Hausdorff y como X_Γ es un subespacio de éste, se sigue que X_Γ es Hausdorff pues ya lo habíamos probado en los comentarios que siguen a la proposición 3.2. Para mostrar que X_Γ es cerrado en $\prod_\alpha X_\alpha$, sea $A_{\alpha\beta}$ $(\alpha < \beta)$ el subconjunto de $\prod_\alpha X_\alpha$ que consiste de aquellos puntos x para los cuales $\pi_\alpha(x) = f_{\beta\alpha}(\pi_\beta(x))$. Por la proposición 3.1, $A_{\alpha\beta}$ es cerrado para cada α y la intersección de ellos es X_Γ por lo que éste es un subespacio cerrado del producto. $\square$

Lema 3.16. *El espacio límite inverso de un sistema límite inverso de espacios de Hausdorff compactos, es también un espacio de Hausdorff compacto, y si todo espacio del sistema es no vacío, entonces el espacio límite es no vacío.*

Demostración. Si X_Γ es un sistema límite inverso para el conjunto dirigido Γ y los espacios X_α, $\alpha \in \Gamma$, entonces X_Γ es un subespacio cerrado de $\prod_\alpha X_\alpha$ y éste último es compacto; luego X_Γ es compacto. También es claro que si $X_\alpha \neq \emptyset$ para toda α, entonces X_Γ es no vacío por la propiedad de intersecciones finitas. $\square$

En lo que sigue probaremos algunos resultados que nos servirán para caracterizar los espacios métricos compactos, perfectos y totalmente disconexos (Teorema 3.21), para lo cual también usaremos la teoría de sistemas límite inversos que hemos desarrollado.

Lema 3.17. *Si $\mathcal{U}$ es un recubrimiento abierto del espacio métrico M, y si n es un número natural cualquiera, entonces existe un refinamiento $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$ formado por conjuntos abiertos de diámetro menor que $\frac{1}{n}$. Si M es compacto, entonces $\mathcal{V}$ puede tomarse finito.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ un recubrimiento abierto de M y sea $n \in \mathbb{N}$ fijo. Tomemos $\delta < \frac{1}{n}$. Es claro que

$$\{B_\delta(x) : x \in M\}$$

es una colección de bolas abiertas que cubre a M.
Sea

$$\mathcal{V} = \{B_\delta(x) \cap U_\alpha \mid U_\alpha \in \mathcal{U},\ \S \in \mathcal{M}\} \equiv \{\mathcal{V}_{\alpha,\delta}\}_{\alpha\in\mathcal{I}}.$$

$\mathcal{V}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$ y $\mathrm{diam}(V_{\alpha,\delta}) < \frac{1}{n}$. Si M es compacto, y como $\mathcal{V}$ es recubrimiento de M, entonces existen

$$\{V_1, V_2, \ldots, V_k\} \subseteq \{V_{\alpha,\delta}\}_{\alpha\in I}$$

tales que $V_1, V_2, \ldots, V_k$ cubren a M y además $\mathrm{diam}(V_i) < \frac{1}{n}$. □

Proposición 3.18. *Sea M un espacio métrico, compacto y totalmente disconexo. Entonces M admite una sucesión $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ de recubrimientos finitos, en donde $\mathcal{U}_n$ es una familia de conjuntos ajenos, de diámetro menor que $\frac{1}{n}$, abiertos y cerrados a la vez, y $\mathcal{U}_{n+1}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}_n$ para cada n.*

Demostración. Notemos que si C es una componente de M, y si U es un conjunto abierto tal que $C \subset U$, entonces existe V, abierto y cerrado a la vez, tal que $C \subset V \subset U$.
En efecto, dado que C es una componente conexa, C es un conexo maximal en M, es decir, no existe un conexo B tal que $C \subset B$. Sea U abierto tal que $C \subset U$. Luego U no es conexo, entonces existe un conjunto V tal que

$$U = (U - V) \cup V$$

con V y $U-V$ abiertos en U. Además $V \supset C$, pues C es componente conexa. Como $U-V$ es abierto, V es cerrado en U. Así $C \subset V \subset U$ con V cerrado y abierto.

Sea $\mathcal{U}_0$ un recubrimiento de M. Entonces todo punto x de M pertenece a un conjunto abierto U_x de $\mathcal{U}_0$.
Existe un conjunto abierto y cerrado, V_x, de diámetro menor que 1, tal que $x \in V_x \subset U_x$.

Por la compacidad de M, un número finito de estos conjuntos, $V_1, \dots, V_j$ rcubren a M, aunque estos V_i no necesariamente son ajenos.
Consideremos los conjuntos

$$U_1 = V_1,$$
$$U_2 = V_2 - V_1,$$
$$\vdots$$
$$U_j = V_j - (\bigcup_{i=1}^{j-1} V_i).$$

Cada U_k es un conjunto abierto menos un conjunto cerrado, luego es abierto, pero al mismo tiempo es un conjunto cerrado menos un abierto, luego también es cerrado. Así los U_k's son ajenos dos a dos, pues dados U_i y U_j, con $i < j$, se tiene $U_i \subset V_i$ y $U_j \subset M - V_i$.

Notemos que también se cumple que

$$\text{diam} U_i \leq \text{diam}(V_i) < 1.$$

Ahora hacemos

$$\mathcal{U}_1 = \{U_i\}_{i=1}^{j}.$$

y se tiene que $\mathcal{U}_1$ es un refinamiento de $\mathcal{U}_0$. Tenemos así la base para una prueba por inducción.

Supongamos ahora que existen $\{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_k\}$, recubrimientos finitos de M, tal que $\mathcal{U}_n$ es una familia de conjuntos ajenos, de diámetro menor que $\frac{1}{n}$, que son abiertos y cerrados a la vez, y además que $\mathcal{U}_{n+1}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}_n$ para $n = 1, 2, \dots, k-1$.

Como $\mathcal{U}_k$ es recubrimiento de M, entonces todo punto x^k de M pertenece a un abierto U_x^k de $\mathcal{U}_k$. Luego, existe un conjunto abierto y cerrado $V_{x^k}^k$, cuyo diámetro es menor que $\frac{1}{k+1}$ tal que $x \in V_{x^k}^k \subset U_{x^k}$.

Por la compacidad de M, un número finito de estos conjuntos $V_1^k, V_2^k, \ldots, V_m^k$ cubren a M, aunque estos V_i^k no necesariamente son ajenos.
Consideremos los conjuntos

$$U_1^k = V_1^k,$$
$$U_2^k = V_2^k - V_1^k,$$
$$\vdots$$
$$U_m^k = V_m^k - (\bigcup_{i=1}^{m-1} V_i^k).$$

Cada U_j^k es un conjunto abierto y cerrado, con diámetro menor que $\frac{1}{k+1}$. Pero también los conjuntos U_j^k son ajenos dos a dos. Tomamos

$$\mathcal{U}_{k+1} = \{U_i^k\}_{i=1}^m.$$

$\mathcal{U}_{k+1}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}_k$, que cumple las propiedades deseadas y esto termina la prueba. □

Probaremos ahora un resultado importante para nuestros propósitos pues nos caracteriza los espacios métricos compactos, totalmente disconexos, en términos de espacios límite inversos de espacios topológicos discretos, finitos:

Proposición 3.19. *Sea M un espacio métrico, compacto y totalmente disconexo. Entonces M es homeomorfo al espacio límite inverso de una sucesión límite inversa de espacios finitos y discretos.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2,\ldots$ una sucesión de recubrimientos de M, como la dada en la Proposición 3.18. Para todo n, designemos por $\mathcal{U}_n^*$ el espacio discreto cuyos puntos son los conjuntos abiertos de $\mathcal{U}_n$.
Definimos una función

$$f_n : \mathcal{U}_n^* \longrightarrow \mathcal{U}_{n-1}^*,$$

para $n > 1$.
Si $U_{n,i}$ es un elemento de $\mathcal{U}_n$, entonces existe un único elemento $U_{n-1,j}$ de $\mathcal{U}_{n-1}$ tal que $U_{n,i} \subset U_{n-1,j}$ pues los elementos de $\mathcal{U}_{n-1}$ son ajenos.
Hagamos $f_n(U_{n,i}) = U_{n-1,j}$, considerando ahora estos conjuntos como puntos de $\mathcal{U}_n^*$ y $\mathcal{U}_{n-1}^*$, respectivamente.
Las funciones f_n así definidas son continuas, pues $\mathcal{U}_n^*$ tiene la topología discreta, por lo tanto, es claro que $\{\mathcal{U}_n^*, f_n\}$ es una sucesión límite inversa y

además, cada $\mathcal{U}_n^*$ es compacto, pues si $\{U_{n,i}\}_{i\in I}$ es una cubierta para $\mathcal{U}_n^*$, entonces

$$\mathcal{U}_n^* = \{U_{n,j}\}_{j=1}^{k_n} \subset \{U_{n,i}\}_{i\in I},$$

y se sigue que $\mathcal{U}_n^*$ es compacto.

Por otro lado $\mathcal{U}_k^*$ es Hausdorff, pues $\mathcal{U}_k^*$ tiene la topología discreta. Tenemos así todas las condiciones que exige el Teorema 3.13, por lo que aplicándolo en este caso nos garantiza que el espacio límite inverso U_∞ no es vacío, y por el lema 3.16, se tiene que U_∞ es un espacio Hausdorff, compacto.

Definamos ahora la función

$$h : U_\infty \longrightarrow M$$

Si $p = (U_{1,n_1}, U_{2,n_2}, \ldots)$ es un punto de U_∞, entonces los conjuntos $U_{1,n_1}, U_{2,n_2}, \ldots$ de M, forman una sucesión de conjuntos cerrados, y cada uno contiene al siguiente. También

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} U_{j,n_j} \neq \emptyset \tag{3.3}$$

pues M es compacto, y satisface la propiedad de intersecciones finitas.

Como $\operatorname{diam}(U_{j,n_j}) < \frac{1}{j}$, existe un único punto q en la intersección en 3.3, es decir,

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} U_{j,n_j} = q$$

Esto es precisamente lo que nos permite definir la función h:

$$h(p) \stackrel{\text{def}}{=} q.$$

Probaremos ahora que h es un homeomorfismo.

h es inyectiva: pues si p es un punto de U_∞, entonces $h(p)$ pertenece a cada uno de los elementos de M que son las coordenadas de p. Luego, si $p, p' \in U_\infty$, de forma tal que p y p' son diferentes en la n-ésima coordenada, es decir,

$$p = (U_{1,n_1}, U_{2,n_2}, \ldots, U_{n,n_n}, U_{n+1,n_{n+1}}, \ldots),$$
$$p' = (U'_{1,n_1}, U'_{2,n_2}, \ldots, U'_{n,n_n}, U'_{n+1,n_{n+1}}, \ldots),$$

entonces

$$h(p) = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_{j,n_j} \neq \bigcap_{k=1}^{\infty} U'_{k,n_k} = h(p')$$

con $U'_{k,n_k} = U_{k,n_k}$ excepto para $k = n$. Así es claro que $h(p) \neq h(p')$ pues los elementos de $\mathcal{U}_n$ son ajenos.

h es sobre: Sea $q \in M$, luego $q \in \mathcal{U}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (pues $\mathcal{U}_n$ cubre a M). Así q pertenece a un único conjunto $U_{j,n_j} \in \mathcal{U}_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$ (pues $\mathcal{U}_j$ es una familia de conjuntos ajenos); luego,

$$q \in \bigcap_{j=1}^{\infty} U_{j,n_j}$$

Si hacemos $p = (U_{1,n_1}, U_{2,n_2}, \ldots) \in U_\infty$, vemos que existe $p \in U_\infty$ tal que $h(p) = q$ y por lo tanto, h es sobre.

h es continua: La familia de conjuntos $U_{j,i}$ es una base de la topología de M. Basta demostrar entonces que para todo $U_{j,i}$ de $\mathcal{U}_j$, se cumple que $h^{-1}(U_{j,i})$ es un abierto en U_∞.

Pero notemos que $h^{-1}(U_{j,i})$ consta de los puntos de U_∞ que tienen a $U_{j,i}$ por coordenada j-ésima pues

$$h^{-1}(U_{j,i}) = \{p \in U_\infty | h(p) \in U_{j,i}\};$$

pero

$$h(p) = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_{k,n_k}$$

con $p = (U_{1,n_1}, U_{2,n_2}, \ldots) \in U_\infty$. Luego $h(p) \in U_{k,n_k}$ para todo $k = 1, 2, \ldots$. Tenemos así que $h(p) \in U_{j,i}$ y además que $h(p) \in U_{k,n_k}$ para todo $k = 1, 2, \ldots$. La única manera de que esto ocurra es que $U_{j,i} = U_{j,n_j}$ para todo n_j. Es decir, los puntos p que tengan $U_{j,i}$ por coordenada j-ésima.

Sabemos que $U_\infty \subset \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n^*$, por lo que un conjunto A es abierto en U_∞ si

$$A = U_\infty \cap P,$$

donde P abierto en $\prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n^*$ y si denotamos por $(\prod_n \mathcal{U}_n^*)_j$ al producto

$$\mathcal{U}_1^* \times \mathcal{U}_2^* \times \cdots \times \mathcal{U}_{j-1}^* \times U_{j,i} \times \mathcal{U}_{j+1}^*,$$

entonces $(\prod_n \mathcal{U}_n^*)_j$ es abierto en $\prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n^*$.

Notemos que

$$(\prod_n \mathcal{U}_n^*)_j \cap U_\infty = h^{-1}(U_{j,i})$$

Luego $h^{-1}(U_{j,i})$ es abierto en U_∞.

Tenemos entonces que h es continua y biyectiva. Como U_∞ es un espacio Hausdorff, compacto, y además M es Hausdorff, se sigue del Lema 3.5 que h es un homeomorfismo. □

Lema 3.20. *Si U es un conjunto abierto de un espacio topológico perfecto y totalmente disconexo, entonces U es unión de n conjuntos abiertos no vacíos ajenos.*

Demostración. Procederemos por inducción en n.
Para $n = 1$, el mismo U satisface la proposición. Supongamos que para $n = k$ se tiene

$$U = U_1 \cup \ldots \cup U_k,$$

donde los U_i son abiertos, ajenos y no vacíos. El conjunto U_k no puede ser conexo pues el espacio es totalmente disconexo y un punto no es abierto. Luego

$$U_k = U_{k,1} \cup U_{k,2},$$

con $U_{k,1} \cap U_{k,2} \neq \emptyset$ (por definición de no conexidad).
Cada uno de estos abiertos es abierto en U_k, luego, también son abiertos en el espacio. Así, U es unión de $k + 1$ conjuntos abiertos, no vacíos y ajenos

$$U = U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_{k-1} \cup U_{k,1} \cup U_{k,2}.$$

□

Toda la teoría que hemos desarrollado hasta aquí, nos servirá para demostrar el siguente teorema, que es el más importante del capítulo, y a través del cual caracterizaremos a los espacios mtericos perfectos, compactos y totalmente disconexos, pues cualesquiera dos de ellos son homeomorfos, lo que probamos a continuación.

Teorema 3.21. *Dos espacios métricos, compactos, perfectos y totalmente disconexos son homeomorfos.*

Demostración. Supongamos que X y Y dos espacios métricos compactos, perfectos y totalmente disconexos.
Sean

$$\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3, \ldots \tag{3.4}$$

y

$$\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3, \ldots \tag{3.5}$$

dos sucesiones de recubrimientos de X y Y, respectivamente, donde

$$\mathcal{U}_k = \{U_{k,1}, \ldots, U_{k,n_k}\}$$

y

$$\mathcal{V}_k = \{V_{k,1}, \ldots, V_{k,m_k}\}$$

son tales como aparecen en la demostración de la proposición 3.19.

Primero vamos a probar que es posible tomar las dos sucesiones de recubrimientos de X y Y en (3.4) y (3.5) de tal manera que $\mathcal{U}_j$ y $\mathcal{V}_j$ tengan exactamente el mismo número de elementos. Para ello procedemos por inducción:

Si $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{V}_1$ tienen el mismo número de elementos, entonces hacemos

$$\mathcal{U}_1' = \mathcal{U}_1$$

y

$$\mathcal{V}_1' = \mathcal{V}_1.$$

Si $n_1 > m_1$ por el lema anterior, $V_{1,1}$ es unión de $n_1 - m_1 + 1$ conjuntos ajenos, abiertos y cerrados a la vez.

Hacemos $\mathcal{U}_1' = \mathcal{U}_1$ y $\mathcal{V}_1'$ constará de $V_{1,2}, \ldots, V_{1,m_1}$ junto con los conjuntos en que se ha descompuesto $V_{1,1}$. De esta manera, $\mathcal{U}_1' = \mathcal{U}_1$ y $\mathcal{V}_1'$ tienen el mismo número de elementos.

Si $m_1 > n_1$, los papeles de $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{V}_1$ se intercambian.

Supongamos ahora que $\mathcal{U}_j'$ y $\mathcal{V}_j'$ han sido definidos de modo que tengan el mismo número de elementos (hipótesis de inducción).

Como los elementos de

$$\mathcal{U}_j' = \{U_{j,1}', \ldots, U_{j,n_j}'\}$$

son cerrados y ajenos, y además el diámetro de $U_{j,l}' < \frac{1}{j}$, existe un número natural $m > j$ de tal manera que ningún conjunto de diámetro menor que $\frac{1}{m}$ intersecta dos cualesquiera $U_{j,i}'$, y, similarmente, existe un número natural m' para $\mathcal{V}_j'$.

Sea m el mayor de estos números. Luego, $\mathcal{U}_m$ refina a $\mathcal{U}_j'$ y $\mathcal{V}_m$ refina a $\mathcal{V}_j'$. Consideremos los elementos de $\mathcal{U}_m$ contenidos en $U_{j,i}'$ y los de $\mathcal{V}_m$ contenidos en $V_{j,i}'$ para cada i.

Si hay el mismo número de estos elementos para un i dado, los dejamos como están. Si hay más elementos de $\mathcal{U}_m$ en $U'_{j,i}$ que elementos de $\mathcal{V}_m$ en $V'_{j,i}$, aplicamos de nuevo el Lema 3.20 para descomponer uno de los elementos de $\mathcal{V}_m$.

Si realizamos este proceso para cada $i \leq n_j$, obtenemos recubrimientos $\mathcal{U}'_{j+1}$ y $\mathcal{V}_{j+1}\prime$, que refinan a $\mathcal{U}'_j$ y $\mathcal{V}'_j$, repectivamente, y que tienen la propiedad de que para cada i, $U'_{j,i}$ y $V'_{j,i}$ contienen el mismo número de elementos de $\mathcal{U}'_{j+1}$ y $\mathcal{V}'_{j+1}$, respectivamente.

La definición inductiva de las sucesiones

$$\mathcal{U}'_1, \mathcal{U}'_2, \mathcal{U}'_3, \ldots$$

y

$$\mathcal{V}'_1, \mathcal{V}'_2, \mathcal{V}'_3, \ldots$$

está completa.

Sean $\mathcal{U}^*_1, \mathcal{U}^*_2, \ldots$ y $\mathcal{V}^*_1$, $\mathcal{V}^*_2, \ldots$ las sucesiones asociadas de espacios discretos, tales como se definieron en la demostración de la proposición 3.19.

Definamos por inducción una función

$$\Phi : \{\mathcal{U}^*_n\} \longrightarrow \{\mathcal{V}^*_n\}$$

Para $n = 1$, sea

$$\varphi_1 : \mathcal{U}^*_1 \longrightarrow \mathcal{V}^*_1$$

cualquier correspondencia biunívoca entre estos conjuntos, la cual es posible establecer pues $\mathcal{U}^*_1$ y $\mathcal{V}^*_1$ tienen el mismo número de elementos.

Supongamos que se ha definido φ_{n-1}.

Consideremos la sucesión límite inversa $\{\mathcal{U}^*_n, f_n\}$, donde para cada $U_{n,i} \in \mathcal{U}^*_n$, se tiene $f_n(U_{n,i}) = U_{n-1,j}$ con $U_{n-1,j}$ el único elemento de $\mathcal{U}^*_{n-1}$ que cumple $U_{n,i} \subset U_{n-1,j}$. Análogamente, para la sucesión límite inversa $\{\mathcal{V}^*_n, g_n\}$, para cada $V_{n,i} \in \mathcal{V}^*_n$, con $g_n(V_{n,i}) = V_{n-1,j}$, donde$V_{n-1,j}$ el único elemento de $\mathcal{V}^*_{n-1}$ tal que $V_{n,i} \subset V_{n-1,j}$.

Tenemos entonces el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \mathcal{U}^*_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] & \mathcal{U}^*_n \arrow[r, "f_n"] & \mathcal{U}^*_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "f_3"] & \mathcal{U}^*_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\varphi_2"] & \mathcal{U}^*_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \\
\cdots \mathcal{V}^*_{n+1} \arrow[r, "g_{n+1}"] & \mathcal{V}^*_n \arrow[r, "g_n"] & \mathcal{V}^*_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "g_3"] & \mathcal{V}^*_2 \arrow[r, "g_2"] & \mathcal{V}^*_1
\end{tikzcd}$$

Tenemos que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ son funciones biyectivas y continuas, pues el dominio es discreto.

Ahora vamos a definir

$$\varphi_n : \mathcal{U}_n^* \longrightarrow \mathcal{V}_n^*.$$

Queremos que

$$\varphi_{n-1} \circ f_n = g_n \circ \varphi_n,$$

lo cual equivale a pedir que el anterior diagrama conmute.

Definimos φ_n de tal manera que cumpla

$$\varphi_{n-1} \circ f_n = g_n \circ \varphi_n$$

Tomemos $U_{n,j} \in \mathcal{U}_n^*$, con $f_n(U_{n,j}) \in \mathcal{U}_{n-1}^*$. Se tiene $\varphi_{n-1}(f_n(U_{n,j})) \in \mathcal{V}_{n-1}^*$.
Hagamos $A = \varphi_{n-1}(f_n(U_{n,j}))$. Existe un elemento $A_n \in \mathcal{V}_n^*$ tal que $A_n \subset A$ (en realidad puede haber muchos pero siempre es posible escoger uno sólo sin ambigüedad). Además $g_n(A_n) = A$.

Así, definimos

$$\varphi_n(U_{n,j}) = A_n.$$

φ_n es uno a uno: pues dados $U_{n,j} \neq U_{n,k}$, donde $U_{n,j}$, $U_{n,k} \in \mathcal{U}_n^*$.
$f_n(U_{n,j}) = O$ y $f_n(U_{n,k}) = O'$ donde O y O' pueden ser iguales. Para $U_{n,j}$ escogemos $A_n \subset O$ y para $U_{n,k}$ escogemos $B_n \subset O'$, con $A_n \neq B_n$. Luego $A_n \in \mathcal{V}_n^*$ y $\varphi_n(U_{n,j}) = A_n$; $B_n \in \mathcal{V}_n^*$ y $\varphi_n(U_{n,k}) = B_n$.

φ_n es sobre: pues

$$\varphi_n : \mathcal{U}_n^* \longrightarrow \mathcal{V}_n^*$$

es inyectiva, y $\mathcal{U}_n^*$, $\mathcal{V}_n^*$ tienen el mismo número de elementos.

φ_n es continua: pues $\mathcal{U}_n^*$ es discreto.

Como $\mathcal{U}_k^*$ es compacto y $\mathcal{V}_k^*$ es Hausdorff, para cada k, aplicamos el Lema 3.5 para asegurar que φ_k es un homeomorfismo.

De este modo,$\Phi = \{\varphi_n\}$ es una función de las sucesiones límites inversas $\{\mathcal{U}_n^*, f_n\}$ y $\{\mathcal{V}_n^*, g_n\}$.

$\{\varphi_n\}$ inducen una función

$$\varphi : U_\infty \longrightarrow V_\infty$$

para cada $a = (a_1, a_2, \ldots) \in U_\infty$ se tiene $\varphi(a) = (\varphi_1(a_1), \varphi_2(a_2), \ldots)$.

φ es biyectiva: sean $a, b \in U_\infty$, con a $\neq b$ y

$$a = (a_1, a_2, \ldots),$$

$$b = (b_1, b_2, \ldots).$$

De esta manera, existen a_k, b_k tales que $a_k \neq b_k$, y como φ_k es uno a uno $\varphi_k(a_k) \neq \varphi_k(b_k)$; así,

$$\varphi(a) \neq \varphi(b).$$

Sea $c \in V_\infty$, con $c = (c_1, c_2, \ldots)$, de tal manera que $c_k \in \mathcal{V}_k^*$, para cada k. Como φ_k es sobre, existe $d_k \in \mathcal{U}_k^*$ tal que $\varphi_k(d_k) = c_k$ para cada k. Hacemos $d = (d_1, d_2, \ldots) \in U_\infty$ y así $\varphi(d) = c$.

φ es continua: este es un resultado inmediato del teorema 3.14.

Por el lema 3.16, U_∞ y V_∞ son Hausdorff y compactos. Luego por el lema 3.5, φ es un homeomorfismo entre U_∞ y V_∞.

Por la proposición 3.19, U_∞ es homeomorfo a X y V_∞ es homeomorfo a Y y concluimos que X y Y son homeomorfos. $\square$

Este teorema es importante pues nos permitirá probar que cualquier espacio métrico perfecto, compacto y totalmente disconexo es homeomorfo al conjunto de Cantor $\boldsymbol{C}$, (Teorema 4.9). Esto nos permite caracterizar a $\boldsymbol{C}$ y en el siguiente capítulo haremos más comentarios sobre este hecho.

Por otra parte, la prueba que hemos dado aquí es bastante general y nos muestra que la teoría de sistemas límite inverso, a pesar de ser bastante abstracta, es útil. Para mayores detalles remitimos al lector interesado a las referencias [6], [17].

Capítulo 4

Propiedades topológicas de C

En este capítulo se estudian algunas propiedades topológicas del Conjunto de Cantor, tales como que C es perfecto, compacto y totalmente disconexo.

Consideraremos a C con su topología inducida y lo trataremos entonces como espacio topológico, el cual posee propiedades muy particulares como es el caso de que sea homeomorfo a n copias de sí mismo, hecho que no se da entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$, para $n \geq 2$.

4.1 Algunas propiedades de C

Recordemos que en el segundo capítulo se introdujeron conjuntos C_k con los cules construimos el conjunto de Cantor, donde

$$C_k = I_{r_1}^k \cup I_{r_2}^k \cup ... \cup I_{r_{2^k}}^k,$$

y los intervalos $I_{r_j}^k$ se definen como

$$I_{r_j}^k = [\frac{r_{j-1}}{3^k}, \frac{r_j}{3^k}],$$

con

$$F_0 = \{1\}$$

y

$$F_j = \{3s - 2, 3s\},$$

y $s \in F_{j-1}, j = 1, 2, 3, ...$ De esta manera, los conjuntos C_k son la unión de 2^k intervalos.

Proposición 4.1. *C es perfecto.*

Demostración. Como C es cerrado, se sigue que $\overline{C} = C$.
Si $x \in C$, entonces $x \in C_k$ para toda k, de donde se tiene

$$x \in \bigcup_{j=i}^{2^k} I_{r_j}^k,$$

es decir, $x \in I_{r_j}^k$, para algún j. Así, dado $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo N tal que $(\frac{1}{3})^N < \varepsilon$ y un entero positivo $N(k)$ que garantizan

$$I_N^{N(k)} \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon).$$

Luego, los puntos extremos de $I_N^{N(k)}$ pertenecen a $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ y también a C, por lo que para todo $\varepsilon > 0$

$$[(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \setminus \{x\}] \bigcap C \neq \emptyset.$$

Esto nos dice que x es un punto de acumulación de C, y siendo x arbitrario, se sigue que $C' = C$. Por lo tanto, C es perfecto. $\square$

Proposición 4.2. *C es compacto.*

Demostración. Esta es una consecuencia inmediata del teorema de Heine-Borel (teorema 3.6), pues C es cerrado y acotado. $\square$

Proposición 4.3. *C es totalmente disconexo*

Demostración. Consideremos cada uno de los conjuntos C_k, que son uniones de 2^k intervalos, cada uno de longitud $(\frac{1}{3})^k$. Como $C \subset C_k$ para toda k, si C contiene algún intervalo (a, b), entonces $(a, b) \subset C_k$ para toda k, por lo que $(a, b) \subset I_{r_j}^k$ para algún j y para cada k. Por la conexidad del intervalo (a, b), existe en cada C_k un único intervalo que lo contiene. Pero $I_{r_j}^k$ es de longitud $(\frac{1}{3})^k$ y $(\frac{1}{3})^k \longrightarrow 0$ cuando $k \longrightarrow \infty$ de donde es claro que $(a, b) \not\subseteq C$.
Como los únicos conexos de $\mathbb{R}$ son los intervalos y los puntos, las componentes conexas de C son sus puntos, es decir, C es totalmente disconexo. $\square$

Proposición 4.4. *C es denso en ninguna parte.*

Demostración. Como C es cerrado, $\overline{C} = C$ y $(\overline{C})^\circ = C^\circ = \emptyset$ pues C no contiene intervalos abiertos, y por lo tanto, C es denso en ninguna parte. $\square$

Sea $A = \{0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, ...\}$, es decir, los puntos extremos de intervalos que fueron removidos en la construcción de C, además de 0 y 1. Sabemos que todos esos puntos pertenecen a C y se conocen como *puntos de primer género* para el conjunto de Cantor.

Proposición 4.5. *A es denso en C.*

Demostración. Sea $x \in C$. Si $x \in A$, entonces tomamos la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} = \{x, x, x, ...\} \subset A$ y claramente $x_n \longrightarrow x$.
Supongamos ahora que $x \notin A$. Construiremos una sucesión de elementos de A que converjan a x.
En el primer paso que se dió en la construcción de C, se omitió el tercio medio de [0,1] y, para nuestros fines, tomamos el tercio que contenga a x, digamos $[\frac{r_j^1 - 1}{3^1}, \frac{r_j^1}{3^1}]$, donde $j \in \{1, 2\}$ y $r_j^1 \in F_j$.
Elegimos el extremo de este intervalo que esté más próximo a x; llamémosle x_1 a este extremo y este será el primer elmento de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Notemos que $|x - x_1| < \frac{1}{2^1}$.

En el segundo paso se omite el tercio medio del intervalo $[\frac{r_j^1 - 1}{3^1}, \frac{r_j^1}{3^1}]$ con $j \in \{1, 2^1\}$ y $r_j^1 \in F_j$ y nos quedamos con el tercio medio que contenga a x, digamos $[\frac{r_j^2 - 1}{3^2}, \frac{r_j^2}{3^2}]$ donde $j \in \{1, 2, ..., 2^2\}$ y $r_j^2 \in F_j$. Elegimos el extremo de este intervalo que esté más próximo a x; llamémosle x_2 a este extremo, el cual será el segundo elemento de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. De nuevo, notemos que $|x - x_2| < \frac{1}{2^2}$.
Seguimos con este procedimiento hasta obtener x_n. Se tiene que

$$x \in [\frac{r_j^{n-1} - 1}{3^{n-1}}, \frac{r_j^{n-1}}{3^{n-1}}],$$

donde $j \in \{1, 2, ..., 2^{n-1}\}$ y $r_j^{n-1} \in F_j$. Omitimos el tercio medio de este intervalo y nos quedamos con el tercio que contenga a x, digamos $[\frac{r_j^n - 1}{3^n}, \frac{r_j^n}{3^n}]$ con $j \in \{1, 2, ..., 2^n\}$ y $r_j^n \in F_j$. Elegimos el extremo de este intervalo que esté más próximo a x;llamémosle a este extremo x_n. Se tiene que $x_n \in A$ y este será el n-ésimo elemento de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y observemos que $|x - x_n| < \frac{1}{2^n}$.

Continuando este proceso indefinidamente, tenemos que dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$ y $|x - x_n| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ para todo $n > N$ y concluimos que para todo $x \in \boldsymbol{C}$, existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ t.q. $x_n \longrightarrow x$; esto nos muestra que A es denso en $\boldsymbol{C}$. □

El conjunto de Cantor $\boldsymbol{C}$ cumple además con otras propiedades topológicas, por ejemplo:

1. $\boldsymbol{C}$ es un espacio métrico completo, pues es un subespacio cerrado de [0,1], el cual es completo.

2. Al ser $\boldsymbol{C}$ completo, satisface todos los axiomas T_i.

3. $\boldsymbol{C}$ satisface el segundo axioma de numerabilidad, pues el intervalo unitario lo cumple.

4. $\boldsymbol{C}$ es de primera categoría, pues es denso en ninguna parte.

5. Es de segunda categoría en sí mismo, ya que es un espacio métrico completo en sí mismo.

6. Es separable, pues el conjunto A, definido anteriormente, es un subconjunto denso numerable en $\boldsymbol{C}$.

7. Es totalmente separable, ya que ai $a < b$ son dos puntos en $\boldsymbol{C}$, existe un número real $r \notin \boldsymbol{C}$ tal que $a < r < b$. Entonces $A = \boldsymbol{C} \cap [0, r)$ y $B = \boldsymbol{C} \cap (r, 1]$ es una separación de $\boldsymbol{C}$ donde $a \in A$ y $b \in B$.

8. $\boldsymbol{C}$ no es extremadamente disconexo, pues $\boldsymbol{C} \cap [0, \frac{1}{4})$ y $\boldsymbol{C} \cap (\frac{1}{4}, 1]$ son subconjuntos abiertos ajenos de $\boldsymbol{C}$ cuya cerradura no es ajena, ya que $\frac{1}{4}$ pertenece a ambas cerraduras.

4.2 $\boldsymbol{C}$ es homeomorfo a $\boldsymbol{C}^n$

Si consideramos $\mathbb{R}$ con la métrica usual ($d(x, y) = |x - y|$ para todo par de elementos $x, y \in \mathbb{R}$), ésta induce una topología que es la usual en $\mathbb{R}$ (que tiene como base todos los intervalos (x, y), $x, y \in \mathbb{R}$); de esta manera, $\boldsymbol{C}$ viene a ser un espacio métrico (como subespacio de $\mathbb{R}$) y la topología en $\boldsymbol{C}$ inducida por su métrica es la topología relativa de $\boldsymbol{C}$ respecto a $\mathbb{R}$. $\boldsymbol{C}$ con esta topología es llamado *discontinuo de Cantor*, el cual es homeomorfo a cualquier número finito de copias de sí mismo (incluso una cantidad numerable), como lo probaremos más adelante. Sabemos que esta propiedad no se da entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n (n > 1)$, por ejemplo.

Lema 4.6. *C^2 es homeomorfo a C*

Demostración. La función $f : C \times C \longrightarrow C$ dada por

$$f(x,y) = f(0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots,\ 0.\beta_1\beta_2\beta_3\ldots) = 0.\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3\ldots$$

es el homeomorfismo, donde $0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ y $0.\beta_1\beta_2\beta_3\ldots$ son las expansiones ternarias de x y y respectivamente, $\alpha_i, \beta_i \in \{0, 2\}$.

f es uno a uno:

Sean (x, y) y $(u, v) \in C \times C$, donde $0.x_1x_2x_3\ldots = x, y = 0.y_1y_2y_3\ldots, u = 0.u_1u_2u_3\ldots,\ v = 0.v_1v_2v_3\ldots$ son tales que

$$f(x,y) = f(u,v).$$

Luego,

$$f(0.x_1x_2x_3\ldots, 0.y_1y_2y_3\ldots) = f(0.u_1u_2u_3\ldots, 0.v_1v_2v_3\ldots),$$

así,

$$0.x_1y_1x_2y_2x_2x_3y_3\ldots = 0.u_1v_1u_2v_2u_3v_3\ldots$$

y como la representación ternaria de elementos de C en términos de 0's y 2's es única, se sigue que $(x, y) = (u, v)$.

f es sobre:

Sea $z = 0.z_1z_2z_3\ldots$ un elemento de C.

Consideremos los elementos z^1 y z^2 que fueron obtenidos *desenlazando* las representaciones $0.z_1z_2z_3\ldots$ de z, es decir

$$z^1 = 0.z_1z_3z_5\ldots$$

y

$$z^2 = 0.z_2z_4z_6\ldots$$

De esta manera,

$$f(z^1, z^2) = 0.z_1z_2z_3\ldots = z.$$

f es continua:
Sea la sucesión $((u^i, v^i))_i$, con $i = 1, 2, 3, \ldots$ y supongamos que converge a (u, v), donde:

$$u^i = 0.u_1^i u_2^i u_3^i \ldots,$$
$$v^i = 0.v_1^i v_2^i v_3^i \ldots$$

y

$$u = 0.u_1 u_2 u_3 \ldots$$
$$v = 0.v_1 v_2 v_3 \ldots$$

De esta manera, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$, tal que

$$0.u_1^m u_2^m u_3^m \ldots u_n^m = 0.u_1 u_2 u_3 \ldots u_n$$
$$0.v_1^m v_2^m v_3^m \ldots v_n^m = 0.v_1 v_2 v_3 \ldots v_n$$

Pero entonces, esto muestra que $(f(u^i, v^i))_i$ converge a $f(u, v)$, y por lo tanto, se sigue que f es continua.
f^{-1} es continua:

$$f^{-1} : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C} \tag{4.1}$$
$$f^{-1}(0.w_1 w_2 w_3 w_4 w_5 w_6 \ldots) = (0.w_1 w_3 w_5 w_7 \ldots, 0.w_2 w_4 w_6 w_8)$$

Sea $\{w^n\}_{n=1}^{\infty} \subset \boldsymbol{C}$ tal que $w^n \longrightarrow w$, con

$$w^n = 0.w_1^n w_2^n w_3^n \ldots$$

y

$$w = 0.w_1 w_2 w_3 \ldots$$

En estas condiciones, existe k tal que para $n > N(\varepsilon)$

$$0.w_1^n w_2^n w_3^n \ldots w_k^n = 0.w_1 w_2 w_3 \ldots w_k$$

Notemos que esta relación nos asegura que a partir de cierto n, los primeros k términos de cada elemento de la sucesión $\{w^n\}$ coinciden con los primeros k términos en la expansión ternaria de w. Aclaremos un poco esta afirmación. De (4.1) vemos que

$$f^{-1} = (g, h),$$

donde

$$g : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C} \qquad h : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}$$
$$g = \pi_1 \circ f^{-1} \qquad h = \pi_2 \circ f^{-1}$$

con $\pi_i : C \times C \longrightarrow C$, la i-ésima proyección, $i = 1, 2$.

Por la proposición 3.7 se tiene que f^{-1} es continua si y sólo si g y h lo son. Como C es un espacio métrico, la continuidad de estas dos funciones es equivalente a pedir que $\{g(y_n)\} \longrightarrow g(y)$ para cualquier sucesión $\{y_n\}$ en C que converja a $y \in C$, y lo análogo para la función h.

$$\begin{aligned}
f^{-1}(w^n) &= f^{-1}(0.w_1^n w_2^n w_3^n ... w_k^n w_{k+1}^n ...) \\
&= f^{-1}(0.w_1 w_2 w_3 ... w_k w_{k+1}^n w_{k+2}^n ...) \\
&= (0.w_1 w_3 w_5 ... w_{2i+1} w_{2(i+1)+1}^n w_{2(i+2)+1}^n ..., \\
&\qquad 0.w_2 w_4 w_6 ... w_{2i} w_{2(i+1)+2}^n w_{2(i+2)+2}^n ...)
\end{aligned}$$

con $i = [\frac{k}{2}]$ (la parte entera de $\frac{k}{2}$).

Hacemos

$$x_1 = 0.w_1 w_3 w_5 ... w_{2i+1} w_{2(i+1)+1}^n w_{2(i+2)+1}^n \cdots$$

y

$$y_1 = 0.w_2 w_4 w_6 ... w_{2i} w_{2(i+1)+2}^n w_{2(i+2)+2}^n \cdots$$

$$\begin{aligned}
f^{-1}(w) &= f^{-1}(0.w_1 w_2 w_3 w_4 w_5 ...) \\
&= (0.w_1 w_3 w_5 w_7 ... w_{2i+1} w_{2(i+1)+1} ..., \\
&\qquad 0.w_2 w_4 w_6 ... w_{2i} w_{2(i+1)+2} ...)
\end{aligned}$$

Asimismo, hacemos

$$x_2 = 0.w_1 w_3 w_5 w_7 ... w_{2i+1} w_{2(i+1)+1} \cdots$$

y

$$y_2 = 0.w_2 w_4 w_6 ... w_{2i} w_{2(i+1)+2} \cdots$$

Así,

$$d(f^{-1}(w^n), f^{-1}(w)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \varepsilon,$$

por lo tanto, $f^{-1}(w_n) \longrightarrow f^{-1}(w)$ y se sigue que f^{-1} es continua. □

Lema 4.7. *C^n es homeomorfo a C, para todo número natural n.*

Demostración. La prueba se hace por inducción en n y el Lema 4.6 nos da la base para el proceso de inducción.
Supongamos que $\boldsymbol{C}^k$ es homeomorfo a $\boldsymbol{C}$. Así existe un homeomorfismo

$$\varphi : \boldsymbol{C}^k \longrightarrow \boldsymbol{C}$$

Debemos probar que $\boldsymbol{C}^{k+1}$ es también homeomorfo a $\boldsymbol{C}$.
Para ello definimos la función

$$\Phi : \boldsymbol{C}^k \times \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}$$

como $\Phi(u,t) = (\varphi(u), t)$
donde $u \in \boldsymbol{C}^k, u = (u_1, u_2, ..., u_k)$.

Φ *es biyectivo :*
Sean (u,t) y $(v,s) \in \boldsymbol{C}^k \times \boldsymbol{C}$ donde $u = (u_1, u_2, ..., u_k)$ y $v = (v_1, v_2, ..., v_k)$
tales que $\Phi(u,t) = \Phi(v,s)$
entonces $(\varphi(u), t) = (\varphi(v), s)$
por lo tanto $\varphi(u) = \varphi(v)$ y $t = s$
pero φ es un homeomorfismo, así $u = v$.
Así $(u,t) = (v,s)$ y entonces Φ es uno a uno.

Sea $(x,t) \in \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}$, como φ es un homeomorfismo, $\varphi^{-1} : \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}^k$ existe, y así existe un $u = (u_1, u_2, ..., u_k) \in \boldsymbol{C}^k$ tal que $\varphi^{-1}(x) = u$ entonces $(x,t) = (\varphi(u), t)$, así existe $(u,t) \in \boldsymbol{C}^k \times \boldsymbol{C}$ tal que $\Phi(u,t) = (\varphi(u), t) = (x,t)$.
Por lo tanto Φ es sobre.
Como Φ es uno a uno y sobre se sigue que es biyectivo.

Φ *es continuo :*
Sea la sucesión $((u^n, t^n))_n \subset \boldsymbol{C}^k \times \boldsymbol{C}$ tal que

$$(u^n, t^n) \longrightarrow (u,t) \quad , \quad (u,t) \in \boldsymbol{C}^k \times \boldsymbol{C}$$

entonces $\Phi(u^n, t^n) = (\varphi(u^n), t^n) \longrightarrow (\varphi(u), t) = \Phi(u,t)$
ya que $\varphi(u^n) \longrightarrow \varphi(u)$ pues φ es continua y $t^n \longrightarrow t$ por hipótesis.
Así Φ es continuo.

Φ^{-1} *es continuo :*

$$\Phi^{-1} : \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{C}^k \times \boldsymbol{C}$$

Sea la sucesión $((\alpha^i, \beta^i))_i \subset C \times C$ tal que

$$(\alpha^i, \beta^i) \longrightarrow (\alpha, \beta),$$

$(\alpha, \beta) \in C \times C$, entonces
$\Phi^{-1}(\alpha^i, \beta^i) = (\varphi^{-1}(\alpha^i), \beta^i) \longrightarrow (\varphi^{-1}(\alpha), \beta) = \Phi^{-1}(\alpha, \beta)$
pues φ^{-1} es continua, así $\varphi^{-1}(\alpha^i) \longrightarrow \varphi^{-1}(\alpha)$, además $\beta^i \longrightarrow \beta$.
Por lo tanto Φ^{-1} es continuo.

Hemos probado así que Φ es un homeomorfismo entre $C^k \times C$ y $C \times C$, es decir $C^{k+1} \approx C^2$ pero como $C^2 \approx C$ se sigue que $C^{k+1} \approx C$. Esto completa el proceso de inducción y concluimos que $C^n \approx C$ para toda $n \in \mathbb{N}$. □

Teorema 4.8. *El producto numerable $C^{\aleph_0}$ del discontinuo de Cantor C es homeomorfo a C.*

Una manera intuitiva de justificar este teorema es la siguiente:
Definamos una función

$$F : C^{\aleph_0} \longrightarrow C$$

y si $(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, ...)$ es un elemento de $C^{\aleph_0}$ donde

$$\begin{array}{rcl} x^1 & = & 0.x_1^1 \ x_2^1 \ x_3^1 \ x_4^1 \ x_5^1 \ x_6^1 \ x_7^1 \ x_8^1 \ \cdots \\ x^2 & = & 0.x_1^2 \ x_2^2 \ x_3^2 \ x_4^2 \ x_5^2 \ x_6^2 \ x_7^2 \ x_8^2 \ \cdots \\ x^3 & = & 0.x_1^3 \ x_2^3 \ x_3^3 \ x_4^3 \ x_5^3 \ x_6^3 \ x_7^3 \ x_8^3 \ \cdots \\ x^4 & = & 0.x_1^4 \ x_2^4 \ x_3^4 \ x_4^4 \ x_5^4 \ x_6^4 \ x_7^4 \ x_8^4 \ \cdots \\ x^5 & = & 0.x_1^5 \ x_2^5 \ x_3^5 \ x_4^5 \ x_5^5 \ x_6^5 \ x_7^5 \ x_8^5 \ \cdots \end{array}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

entonces definimos $F(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, ...)$ intercalando diagonalmente, es decir,
$F(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, ...) = 0.x_1^1x_2^1x_1^2x_3^1x_2^2x_1^3x_4^1x_3^2x_2^3x_1^4x_5^1x_4^2x_3^3x_2^4x_1^5x_6^1x_5^2x_4^3\cdots$

F es uno a uno :

Sean $u, v \in C^{\aleph_0}$, donde
$u = (u^1, u^2, u^3, u^4, u^5, \cdots)$, $v = (v^1, v^2, v^3, v^4, v^5, \cdots)$
con $u^1 = 0.u_1^1u_2^1u_3^1u_4^1u_5^1\cdots$, $v^1 = 0.v_1^1v_2^1v_3^1v_4^1v_5^1\cdots$
$u^2 = 0.u_1^2u_2^2u_3^2u_4^2u_5^2\cdots$, $v^2 = 0.v_1^2v_2^2v_3^2v_4^2v_5^2\cdots$
. . . .
$u^n = 0.u_1^nu_2^3u_3^nu_4^nu_5^n\cdots$, $v^n = 0.v_1^nv_2^nv_3^nv_4^nv_5^n\cdots$

tales que $F(u) = F(v)$

Así $0.u_1^1u_2^1u_1^2u_3^1u_2^2u_1^3u_4^1u_3^2u_2^3u_1^4u_5^1\cdots = 0.v_1^1v_2^1v_1^2v_3^1v_2^2v_1^3v_4^1v_3^2v_2^3v_1^4v_5^1\cdots$
como la representación ternaria de elementos de C en términos de 0's y 2's es única, se sigue que $u = v$.

F es sobre :
Sea $z = 0.z_1z_2z_3\cdots$ un elemento de C.
Consideremos los elementos $z^1, z^2, z^3, \cdots$ que fueron obtenidos *desenredando* la repersentación $0.z_1z_2z_3\cdots$ de z, es decir
$z^1 = 0.z_1z_2z_4z_7z_{11}z_{16}z_{22}\cdots$
$z^2 = 0.z_3z_5z_8z_{12}z_{17}z_{23}\cdots$
$z^3 = 0.z_6z_9z_{13}z_{18}z_{24}z_{31}\cdots$
$z^4 = 0.z_{10}z_{14}z_{19}z_{25}z_{32}z_{40}\cdots$
. . . .
De aquí que
$F(z^1, z^2, z^3, \cdots) = 0.z_1z_2z_3z_4z_5\cdots = z$

F es continua :
Sea la sucesión $((x_1^i, x_2^i, x_3^i, \cdots))_{i=1}^{\infty}$ que converja a $(x^1, x^2, x^3, \cdots)$, donde
$x_1^i = 0.x_{1,1}^ix_{1,2}^ix_{1,3}^ix_{1,4}^i\cdots$, $x^1 = 0.x_1^1x_2^1x_3^1x_4^1\cdots$
$x_2^i = 0.x_{2,1}^ix_{2,2}^ix_{2,3}^ix_{2,4}^i\cdots$, $x^2 = 0.x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2\cdots$
$x_3^i = 0.x_{3,1}^ix_{3,2}^ix_{3,3}^ix_{3,4}^i\cdots$, $x^1 = 0.x_1^3x_2^3x_3^3x_4^3\cdots$
. . . .
Por lo tanto, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathbb{N}, n \geq m$ t.q.
$0.x_{1,1}^mx_{1,2}^mx_{1,3}^mx_{1,4}^m\cdots x_{1,n}^m = 0.x_1^1x_2^1x_3^1x_4^1\cdots x_n^1$
$0.x_{2,1}^mx_{2,2}^mx_{2,3}^mx_{2,4}^m\cdots x_{2,n}^m = 0.x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2\cdots x_n^2$
$0.x_{3,1}^mx_{3,2}^mx_{3,3}^mx_{3,4}^m\cdots x_{3,n}^m = 0.x_1^3x_2^3x_3^3x_4^3\cdots x_n^3$
. . . .
Pero entonces, esto muestra que $(F(x_1^i, x_2^i, x_3^i, \cdots))_{i=1}^{\infty}$ converge a $F(x^1, x^2, x^4, \cdots)$, por lo que F es continua.

Como $C^{\aleph_0} = \prod_{n=1}^{\infty} C$ y C es compacto, aplicamos el Teorema de Tychonoff, para asegurar que $C^{\aleph_0}$ es compacto.
Además C es Hausdorff, y al ser F biyectiva y continua por el Lema 3.5 F es un homeomorfismo.
Así $C^{\aleph_0}$ y C son homeomorfos.

Una manera más formal de probar el anterior teorema, es usando los resultados del capítulo anterior.

Sabemos que $C^{\aleph_0}$ es compacto.

$C^{\aleph_0}$ es un subconjunto de $\prod_{n=1}^{\infty}[0,1]$.

Un punto $x \in \prod_{n=1}^{\infty}[0,1]$, lo podemos identificar como $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$.

$x \in \overline{\prod_{n=1}^{\infty} C}$ si existe $c_n \in \prod_{n=1}^{\infty} C$ tal que $c_n \longrightarrow x$.
$c_1 = (c_1^1, c_1^2, c_1^3, c_1^4, \ldots)$
$c_2 = (c_2^1, c_2^2, c_2^3, c_2^4, \ldots)$
. . . .
$c_n = (c_n^1, c_n^2, c_n^3, c_n^4, \ldots)$
. . . .
$\{c_n^1\}$ es una sucesión en C que converge a $x_1 \in C$, pues C contiene a todos sus puntos de acumulación.
$\{c_n^2\}$ converge a $x_2 \in C$.
. . . .
$\{c_n^k\}$ converge a $x_k \in C$.
. . . .
Luego $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, \ldots) \in \prod_{n=1}^{\infty} C$, es decir, todos los puntos de $C^{\aleph_0}$ son de acumulación, así es perfecto.
Ahora, sea V abierto en $\prod_{n=1}^{\infty}[0,1]$, $V = \prod_{j=i}^{\infty} V_j$, donde V_j es abierto en [0,1], $V_j = [0,1]$ excepto por un número finito.
Si $C^{\aleph_0}$ contiene un abierto V, entonces existe un abierto en [0,1], digamos V_j tal que $V_j \neq [0,1]$ y $V_j \subset C$.
V_j debe contener un intervalo $(a-\epsilon, a+\epsilon)$.
Por lo tanto $(a-\epsilon, a+\epsilon) \subset C$, esto contradice que C sea totalmente disconexo.
Por lo tanto $C^{\aleph_0}$ es totalmente disconexo.

Aplicando el Teorema 3.21 podemos asegurar que $C^{\aleph_0}$ y C son homeomorfos.

Un resultado que generaliza lo que acabamos de probar es el siguiente:

Teorema 4.9. *Todo espacio métrico perfecto, totalmente disconexo y compacto, es homeomorfo al conjunto de Cantor.*

Demostración. Esta es una consecuencia inmediata del Teorema 3.21 y de las propiedades de C que se han demostrado en este capítulo. □

Este teorema nos caracteriza los espacios métricos perfectos, compactos y totalmente disconexos. Más aún, también se sigue de las propiedades del conjunto de Cantor que cualquier espacio métrico compacto y totalmente disconexo es homeomorfo a un subconjunto de C.

En efecto, si M es un espacio métrico compacto y totalmente disconexo, entonces $M \times C$ es un espacio métrico compacto, totalmente disconexo y perfecto, por lo que el teorema 4.9 nos da un homeomorfismo $h : M \times C \longrightarrow C$. Si definimos el homeomorfismo $i : M \longrightarrow M \times C$ dado por $i(x) = (x, 0)$, entonces

$$h \circ i : M \longrightarrow C$$

nos da el homeomorfismo deseado.

Por otra parte, nuestra prueba del teorema 4.9 se basa totalmente en el teorema 3.21 que probamos en el capítulo anterior y para probar éste utilizamos la teoría de sistemas límite inverso. Sin embargo, debemos mencionar que la demostración que aquí se hizo de 4.9 no es la única.

Por ejemplo, en [13] es posible encontrar otra prueba del teorema de caracterización 4.9. En este caso, los autores prueban algunos resultados que son tembién interesantes. Por ejemplo, en la página 281 es posible encontrar la demostración de que C es homeomorfo al *cubo* A^ω donde A es el espacio discreto de los elementos $0, 1$, es decir,

$$A^\omega = \prod_{n=1}^{\infty} A = \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\}\}.$$

Además, en la prueba del teorema 5.11 (pp. 284, 285) se pueden ver ciertas similitudes con la prueba que presentamos del teorema 3.21 pues también se toman cubiertas y se producen refinamientos de ellas, en los cuales los conjuntos que las forman tienen diámetros decrecientes.

Finalmente, debemos decir que el teorema de caracterización en [13], que sería el teorema 5.12 en ese texto, establece que todo espacio no vacío Y es homeomorfo al *disontinuo de Cantor* C si y sólo si Y es compacto métrico, totalmente disconexo y denso en sí mismo.

Para la prueba se toman cubiertas de Y y de C con el mismo número de elementos y cuyos abiertos son de diámetro menor a $\frac{1}{2}$ y a partir de una biyección arbitraria entre estas cubiertas, se producen otras cubiertas cuyos elementos son de diámetro menor que $\frac{1}{4}$ y se continúa este proceso, el cual nos recuerda también la prueba del teorema 3.21.

Algo que también se debe mencionar es que la manera en que lo hacemos en este trabajo es bastante más general y elegante pues con la ayuda de los sistemas límite inverso nos fue posible probar que cualesquiera dos espacios métricos compactos, perfectos y totalmente disconexos son homeomorfos (teorema 3.21).

Capítulo 5

La Función Ternaria de Cantor

El objetivo de este capítulo es mostrar que el conjunto de Cantor se puede utilizar para definir una función que sea el límite uniformeme de una sucesión de funciones absolutamente continuas aunque la función límite, que llamaremos la función ternaria de Cantor, no es absolutamente continua, a pesar de ser el límite de funciones que sí lo son.

Esta misma función se usará para probar que la σ-álgebra de Borel no es completa, siendo la σ-álgebra de Lebesgue su completación.

Además veremos que la propiedad de tener medida cero no se preserva bajo homeomorfismos, es decir, no es una propiedad topológica.

5.1 La Función Ternaria de Cantor

Vamos a definir una función

$$\Psi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$$

de tal manera que si E_n^j es uno de los intervalos abiertos que se eliminaron en la construcción de C, entonces para $y \in E_n^j$, definimos

$$\Psi(y) = \Psi(\frac{3s_j - 2}{3^n}) = \Psi(\frac{3s_j - 1}{3^n})$$

y para cada $x \in C$, con expansión ternaria $x = 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3...$, definimos

$$\Psi(x) = 0.\frac{\alpha_1}{2}\frac{\alpha_2}{2}\frac{\alpha_3}{2}\ldots$$

donde la expresión de la derecha se debe interpretar como una expansión binaria en términos de los dígitos 0 y 1.

A la función Ψ se le llama la *función ternaria de Cantor* y en lo que sigue estudiaremos sus propiedades.

Sea E_n^j el j-ésimo tercio medio abierto omitido en el paso n de la construcción de C, donde $s_j \in F_{n-1}$ para $j = 1, 2, ...2^{n-1}, n = 1, 2, 3, ...$ Los extremos de este intervalo son $\frac{3s_j-2}{3^n}$ y $\frac{3s_j-1}{3^n}$, y pertenecen al conjunto de Cantor.

Como $s_j \in F_{n-1}, s_j$ puede tener dos formas:
1)$s_j = 3k$ para algún $k \in F_{n-2}$ ó
2)$s_j = 3k - 2$ para algún $k \in F_{n-2}$.
(Vease la construcción de C).

Si $s_j = 3k$ para algún $k \in F_{n-2}$

$\frac{3s_j-2}{3^n} = \frac{3\times 3k-2}{3^n} = \frac{9k}{3^n} = 0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}1 = 0.\alpha_1\alpha_2\ldots\ \alpha_{n-1}0222\ldots$
con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1} \in \{0, 2\}$.
Así $\quad \Psi(\frac{3s_j-2}{3^n}) = \Psi(0.\alpha_1\alpha_2\ \ldots\alpha_{n-1}0222\ldots) = 0.\frac{\alpha_1}{2}\frac{\alpha_2}{2}\ \ldots \frac{\alpha_{n-1}}{2}\frac{0}{2}\frac{2}{2}\frac{2}{2}\frac{2}{2}\ \ldots$

$= 0.\frac{\alpha_1}{2}\frac{\alpha_2}{2}...\frac{\alpha_{n-1}}{2}01111... = 0.\frac{\alpha_1}{2}\frac{\alpha_2}{2}...\frac{\alpha_{n-1}}{2}1$

$$\frac{3s_j-1}{3^n} = \frac{3\times 3k-1}{3^n} = \frac{9k-1}{3^n} = 0.\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}2$$

entonces $\Psi(\frac{3s_j-1}{3^n}) = \Psi(0.\alpha_1\alpha_2\ldots\ \alpha_{n-1}2) = 0.\frac{\alpha_1}{2}\frac{\alpha_2}{2}\ldots\ \frac{\alpha_{n-1}}{2}\frac{2}{2}$

$= 0.\frac{\alpha_1}{2}\frac{\alpha_2}{2}\ldots\ \frac{\alpha_{n-1}}{2}1$

$\therefore \Psi(\frac{3s_j-2}{3^n}) = \Psi(\frac{3s_j-1}{3^n})$

Si $s_j = 3k - 2$ para algún $k \in F_{n-2}$

$\frac{3s_j-2}{3^n} = \frac{3(3k-2)-2}{3^n} = \frac{9k-6-2}{3^n} = \frac{9k-8}{3^n} = 0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}1$

$= 0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}0222\ldots$
con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1} \in \{0, 2\}$.

Luego $\Psi(\frac{3s_j-2}{3^n}) = \Psi(0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}0222\ldots) = 0.\frac{\alpha_1}{2}\frac{\alpha_2}{2}\ldots\frac{\alpha_{n-1}}{2}\frac{0}{2}\frac{2}{2}\frac{2}{2}\frac{2}{2}\ldots$

$= 0.\frac{\alpha_1}{2}\frac{\alpha_2}{2}\ldots\frac{\alpha_{n-1}}{2}0111\ldots = 0.\frac{\alpha_1}{2}\frac{\alpha_2}{2}\ldots\frac{\alpha_{n-1}}{2}1$

También

$\frac{3s_j-1}{3^n} = \frac{3(3k-2)-1}{3^n} = \frac{9k-6-1}{3^n} = \frac{9k-7}{3^n} = 0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}2$

Entonces $\Psi(\frac{3s_j-1}{3^n}) = \Psi(0.\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}2) = 0.\frac{\alpha_1}{2}\frac{\alpha_2}{2}\ldots\frac{\alpha_{n-1}}{2}\frac{2}{2}$

$= 0.\frac{\alpha_1}{2}\frac{\alpha_2}{2}\ldots\frac{\alpha_{n-1}}{2}1.$

Por lo tanto $\Psi(\frac{3s_j-2}{3^n}) = \Psi(\frac{3s_j-1}{3^n})$.

Veamos algunos ejemplos:

$$\Psi(\frac{1}{3}) = \Psi(0.0222...) = 0.0111... = 0.1 = \Psi(0.2) = \Psi(\frac{2}{3})$$

$$\Psi(\frac{1}{9}) = \Psi(0.00222...) = 0.00111... = 0.01 = \Psi(0.02) = \Psi(\frac{2}{9})$$

$$\Psi(\frac{7}{9}) = \Psi(0.20222...) = 0.10111... = 0.11 = \Psi(0.22) = \Psi(\frac{8}{9})$$

Ψ es una función creciente:

Sean $x, y \in [0,1]$ tales que
$x = 0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p\ldots$, su expansión ternaria $\alpha_i \in \{0,2\}$
$y = 0.\beta_1\beta_2\ldots\beta_p\ldots$, su expansión ternaria $\beta_i \in \{0,2\}$
y que $x \leq y$, entonces
$0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p\ldots \leq 0.\beta_1\beta_2\ldots\beta_p\ldots$
$0.\frac{\alpha_1}{2}\frac{\alpha_2}{2}\ldots\frac{\alpha_p}{2}\ldots \leq 0.\frac{\beta_1}{2}\frac{\beta_2}{2}\ldots\frac{\beta_p}{2}\ldots$

Así $\Psi(x) \leq \Psi(y)$

Ψ es sobre:

$$\Psi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$$

Sea $x \in [0,1]$ con $x = 0.b_1b_2b_3\ldots$ su expansión binaria, entonces $0.(2b_1)(2b_2)(2b_3)\ldots$, interpretado como expansión ternaria, es un $y \in [0,1]$ tal que

$\Psi(y) = \Psi(0.(2b_1)(2b_2)(2b_3)\ldots) = 0.b_1b_2b_3\ldots \; = x$

Ψ *es continua*:

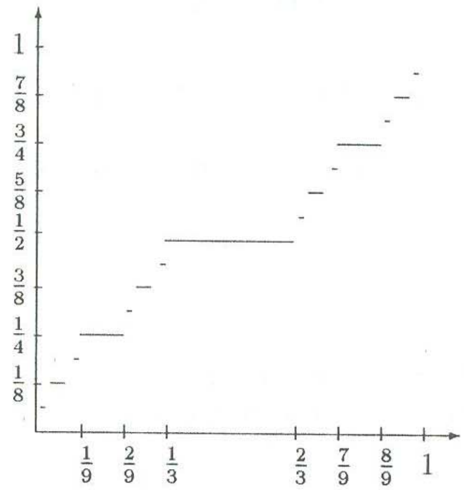
Supongamos que existe $x_0 \in [0,1]$ tal que Ψ no es continua en x_0. Como Ψ es creciente, sabemos que las discontinuiddes de las funciones monótonas definidas en algún un intervalo $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ son *saltos*, [2], p. 78.

De esta manera, existen los límites $\Psi(q+)$ y $\Psi(q-)$, aunque la función tiene un salto en q pues estamos suponiendo que es discontinua allí. Así, existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier $x \in [0,1]$ con $x \neq q$ se tiene

$$\Psi(x) \notin (\Psi(q) - \varepsilon, \Psi(q) + \varepsilon) \subset [0,1]$$

Esto contradice el hecho de que Ψ es sobre. Por lo tanto, Ψ es continua.

Notemos además que Ψ tiene derivada cero casi en todas partes, pues es constante en [0,1], excepto por un conjunto de medida cero.



Bosquejo de la Gráfica de $\Psi(x)$

5.2 Aplicaciones

En esta sección haremos uso de la función ternaria de Cantor para probar que

- La σ-álgebra de Borel no es completa.

- El límite uniforme de una sucesión de ua sucesiń de funciones absolutamente continuas, no es necesariamente una función absolutamente continua.

En particular, se derivará de nuestro análisis el siguiente resultado:

Lema 5.1. *El conjunto de los Borel-medibles es un subconjunto propio de los Lebesgue-medibles.*

Primeramente, recordemos la constucción de la medida de Lesbesgue:
Sea $\mathcal{F}$ la familia de subconjuntos de $\mathbb{R}$ cuyos elementos pueden escribirse como uniones finitas de conjuntos de la forma:

$$(a,b], \quad (-\infty,b],(a,+\infty) \quad \text{o}(-\infty,+\infty)$$

Definiremos la noción de longitud en $\mathcal{F}$:
$\ell : \mathcal{F} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ t.q.
$\ell((a,b]) = b-a,$
$\ell((-\infty,b]) = \ell((a,+\infty)), \ell((-\infty,+\infty)) = +\infty.$
$\mathcal{F}$ es un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$ y ℓ es una medida σ-finita en $\mathcal{F}$

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(-n,n], \ell((-n,n] = 2n < \infty.$$

Por los teoremas de Carathéodory y Hahn [4], existe una σ-álgebra $\mathcal{F}^*$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ tal que $\mathcal{F}^* \supset \mathcal{F}$ y una medida ℓ^* en $\mathcal{F}^*$ tal que $\ell^* = \ell$ en $\mathcal{F}$. Además ℓ^* es única. ℓ^* se llama la *medida de Lebesgue* en $\mathbb{R}$, la cual hemos denotado hasta ahora como λ, y $\mathcal{F}^*$ se llama la *familia de conjuntos Lebesgue medibles* de la recta.

Por otra parte, la medida λ es completa, es decir, si $E \in \mathcal{F}^*$ y $\lambda^*(E) = 0$ y además $B \subset E$, entonces $B \in \mathcal{F}^*$ y por supuesto $\lambda^*(B) = 0$.

Como bien sabemos, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, la σ-álgebra de Borel, es la σ-álgebra generada por los intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ y sus elementos son los conjuntos Borel-medibles.

Sea Ψ la Función Ternaria de Cantor. Definimos la función Ω como:

$$\begin{aligned} \Omega : [0,1] &\longrightarrow [0,2] \\ \Omega(x) &\stackrel{\text{def}}{=} x + \Psi(x) \end{aligned}$$

Como Ψ es creciente y continua en $[0,1]$, Ω es estrictamente creciente y uno-a-uno, con inversa Ω^{-1}, continua en $[0,2]$.

Cada intervalo removido de $[0,1]$ en la construcción del conjunto de Cantor $\boldsymbol{C}$ es enviado por Ω a un intervalo de $[0,2]$, de la misma longitud que el original pues esta función es sobre.

En efecto, sea $(\frac{3s_j-2}{3^n}, \frac{3s_j-1}{3^n})$ el n-ésimo intervalo removido en la construcción de $\boldsymbol{C}$. Entonces se tiene

$$\lambda\left(\frac{3s_j-2}{3^n}, \frac{3s_j-1}{3^n}\right) = \frac{3s_j-1}{3^n} - \frac{3s_j-2}{3^n} = \frac{1}{3^n}.$$

Además

$$\Omega\left(\frac{3s_j-2}{3^n}\right) = \frac{3s_j-2}{3^n} + \frac{m}{2^k},$$

$$\Omega\left(\frac{3s_j-1}{3^n}\right) = \frac{3s_j-1}{3^n} + \frac{m}{2^k},$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\Omega\left(\frac{3s_j-2}{3^n}, \frac{3s_j-1}{3^n}\right)\right) &= \lambda\left(\frac{3s_j-2}{3^n} + \frac{m}{2^k}, \frac{3s_j-1}{3^n} + \frac{m}{2^k}\right) \\
&= \frac{3s_j-1}{3^n} + \frac{m}{2^k} - \frac{3s_j-2}{3^n} - \frac{m}{2^k} \\
&= \frac{1}{3^n}
\end{aligned}$$

De esta manera

$$\lambda\left(\Omega([0,1] \setminus \boldsymbol{C})\right) = \lambda\left([0,1] \setminus \boldsymbol{C}\right) = 1,$$

Pero veremos a continuación que

$$\lambda(\Omega(C)) = 1,$$

En efecto, notemos que

$$\lambda\left(\Omega[0,1]\right) = \lambda\left([0,2]\right) = 2,$$

en consecuencia, si $I = [0,1]$, entonces

$$\lambda\left(\Omega(I \setminus \boldsymbol{C})\right) = \lambda\left(I \setminus \boldsymbol{C}\right) = 1.$$

Además,

$$\begin{aligned}\lambda(\Omega(I \setminus C)) &= \lambda(\Omega(I) \setminus \Omega(C)) \\ &= \lambda(\Omega(I)) - \lambda(\Omega(C)) \\ &= 2 - \lambda(\Omega(C))\end{aligned}$$

por lo que

$$\lambda(\Omega(C)) = 2 - 1 = 1.$$

Como C es un conjunto de medida cero, Ω es un ejemplo de un homeomorfismo que envía un conjunto de medida cero en un conjunto de medida positiva.
Sea D un subconjunto no-medible de $\Omega(C)$. Entonces $\Omega^{-1}(D)$ es un subconjunto de C y es así también un conjunto Lebesgue medible de medida cero (pues λ es completa). Por lo tanto Ω es un ejemplo de un homeomorfismo que envía un conjunto medible en un conjunto no-medible. $\Omega^{-1}(D)$ es un conjunto Lebesgue-medible, pero como es la imagen bajo un homeomorfismo de un conjunto que no es Borel-medible, $\Omega^{-1}(D)$ no es un conjunto de Borel. Concluimos así que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ no es completa y además que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathbb{F}^*$. (En realidad $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tiene c elementos, c es la cardinalidad de $\mathbb{R}$, mientras que $\mathbb{F}^*$ tiene 2^c; es decir, hay 2^c conjuntos Lebesgue-medibles que no son Borel-medibles. A pesar de ello, la σ-álgebra de Lebesgue no es, por mucho, la familia de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$: por cada conjunto Lebesgue-medible de medida mayor que cero existe otro no-medible según Lebesgue).

Vamos a definir ahora, una sucesión de funciones absolutamente continuas cuyo límite uniforme será precisamente la función Ψ.

Sean $E_1, E_2, \ldots$ los intervalos removidos de [0,1] en la construcción del conjunto de Cantor. Definimos las funciones

$$\Psi_n : [0,1] \longrightarrow [0,1]$$

como sigue: Sean $A_1, A_2, \ldots, A_{2^n-1}$ los subintervalos de $\cup_{i=1}^m E_i$, colocados en orden creciente.

Por ejemplo, si $n = 3$, entonces

$$\begin{aligned}E_1 \cup E_2 \cup E_3 &= (\frac{1}{27}, \frac{2}{27}) \cup (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{27}, \frac{8}{27}) \cup (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cup (\frac{19}{27}, \frac{20}{27}) \\ &\quad \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}) \cup (\frac{25}{27}, \frac{26}{27}) \\ &= A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_7.\end{aligned}$$

Definimos

$$\begin{aligned} \Psi_n &= 0 \\ \Psi_n(x) &= \tfrac{k}{2^n} \quad \text{si} \quad x \in A_k,\ k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1, \\ \Psi_n(1) &= 1. \end{aligned}$$

y la definición de Ψ_n se completa por medio de interpolación lineal.

De este modo

$$\Psi_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2}x & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Un bosquejo de la gráfica de esta función se puede ver en la siguiente figura:

Ahora definimos Ψ_3:

$$\Psi_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \frac{1}{27} \le x \le \frac{2}{27} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{9} \le x \le \frac{2}{9} \\ \frac{3}{8} & \frac{7}{27} \le x \le \frac{8}{27} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3} \\ \frac{5}{8} & \frac{19}{27} \le x \le \frac{20}{27} \\ \frac{3}{4} & \frac{7}{9} \le x \le \frac{8}{9} \\ \frac{7}{8} & \frac{25}{27} \le x \le \frac{26}{27} \\ \frac{27}{8}x & 0 \le x \le \frac{1}{27} \\ \frac{27}{8}x - \frac{1}{8} & \frac{2}{27} \le x \le \frac{1}{9} \\ \frac{27}{8}x - \frac{1}{2} & \frac{2}{9} \le x \le \frac{7}{27} \\ \frac{27}{8}x - \frac{5}{8} & \frac{8}{27} \le x \le \frac{1}{3} \\ \frac{27}{8}x - \frac{7}{4} & \frac{2}{3} \le x \le \frac{19}{27} \\ \frac{27}{8}x - \frac{15}{8} & \frac{20}{27} \le x \le \frac{7}{9} \\ \frac{27}{8}x - \frac{9}{4} & \frac{8}{9} \le x \le \frac{25}{27} \\ \frac{27}{8}x - \frac{19}{8} & \frac{26}{27} \le x \le 1 \end{cases}$$

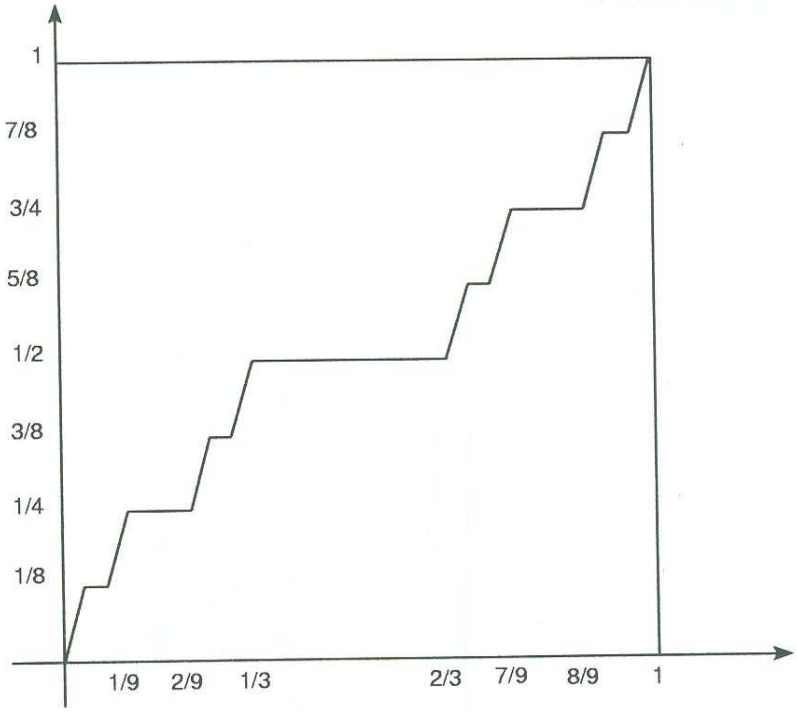


Figure 5.3: Gráfica de Ψ_3

Veamos ahora que la sucesión $(\Psi_k)_{k=1}^{\infty}$ converge uniformemente en [0,1] a la función ternaria de Cantor,Ψ.

En efecto, sea $x \in [0,1]$ y supongamos que $x \notin \boldsymbol{C}$, luego x está en alguno de los intervalos removidos de [0,1] en la construcción de $\boldsymbol{C}$.
Digamos que

$$x \in E_m^j = \left(\frac{3s_j - 2}{3^n}, \frac{3s_j - 1}{3^n}\right), \quad s_j \in F_{m-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}.$$

Luego Ψ_m es constante en E_m^j y coincide con Ψ.
Así $\Psi_m(x) = \Psi(x)$.
Por lo que $|\Psi_n(x) - \Psi(x)| = 0$ para toda $n \geq m$, es decir, $\Psi_k(x) \longrightarrow \Psi(x)$.

Supongamos entonces que $x \in C$.
Omitimos el tercio medio de [0,1] y nos quedamos con el tercio medio que contiene a x, digamos $\left[\frac{r_j^1-1}{3}, \frac{r_j^1}{3}\right]$, donde $j \in \{1,2\}$ y $r_j^1 \in F_j$.
Sabemos que

$$\Psi_1\left(\frac{r_j^1-1}{3}\right) \leq \Psi_1(x) \leq \Psi_1\left(\frac{r_j^1}{3}\right),$$

pues Ψ_1 es creciente.
Además $\Psi_1\left(\frac{r_j^1}{3}\right) - \Psi_1\left(\frac{r_j^1-1}{3}\right) = \frac{1}{2}$.
De esta forma

$$\Psi_1\left(\frac{r_j^1-1}{3}\right) = \Psi\left(\frac{r_j^1-1}{3}\right) \leq \Psi(x) \leq \Psi\left(\frac{r_j^1}{3}\right) = \Psi_1\left(\frac{r_j^1}{3}\right).$$

Luego $|\Psi_1(x) - \Psi(x)| \leq \frac{1}{2}$.

Continuamos omitiendo el tercio medio del intervalo

$$\left[\frac{r_j^1-1}{3}, \frac{r_j^1}{3}\right] \text{ con } j \in \{1,2\} \text{ y } r_j \in F_j$$

y nos quedamos con el tercio medio que contiene a x.
Digamos

$$\left[\frac{r_j^2-1}{3^2}, \frac{r_j^2}{3^2}\right] \text{ donde } j \in \{1,2,3,4\} \text{ y } r_j^2 \in F_j.$$

Vemos que

$$\Psi_2\left(\frac{r_j^2-1}{3^2}\right) \leq \Psi_2(x) \leq \Psi_2\left(\frac{r_j^2}{3^2}\right) \quad \text{y}$$

$$\Psi_2\left(\frac{r_j^2}{3^2}\right) - \Psi_2\left(\frac{r_j^2-1}{3^2}\right) = \frac{1}{4}$$

Además

$$\Psi_2\left(\frac{r_j^2-1}{3^2}\right) = \Psi\left(\frac{r_j^2-1}{3^2}\right) \leq \Psi(x) \leq \Psi\left(\frac{r_j^2}{3^2}\right) = \Psi_2\left(\frac{r_j^2}{3^2}\right)$$

Por lo que $|\Psi_2(x) - \Psi(x)| \leq \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$.

Si seguimos este procedimiento, en el paso n omitimos el tercio medio de

$$\left[\frac{r_j^{n-1}-1}{3^{n-1}}, \frac{r_j^{n-1}}{3^{n-1}}\right]$$

y nos quedamos con el intervalo que contiene a x.
Digamos

$$\left[\frac{r_j^n-1}{3^n}, \frac{r_j^n}{3^n}\right] \text{ con } j \in \{1,2,\ldots,2^n\} \text{ y } r_j^n \in F_j.$$

Además

$$\Psi_n\left(\frac{r_j^n-1}{3^n}\right) \leq \Psi_n(x) \leq \Psi_n\left(\frac{r_j^n}{3^n}\right),$$

$$\Psi_n\left(\frac{r_j^n}{3^n}\right) - \Psi_n\left(\frac{r_j^n-1}{3^n}\right) = \frac{1}{2^n}.$$

Pero también

$$\Psi_n\left(\frac{r_j^n-1}{3^n}\right) = \Psi\left(\frac{r_j^n-1}{3^n}\right) \leq \Psi(x) \leq \Psi\left(\frac{r_j^n}{3^n}\right) = \Psi_n\left(\frac{r_j^n}{3^n}\right)$$

Así que $|\Psi_n(x) - \Psi(x)| \leq \frac{1}{2^n}$.

Continuando este proceso indefinidamente, tenemos que dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ y

$$|\Psi_k(x) - \Psi(x)| < \frac{1}{2^k} < \varepsilon \quad \forall \quad k \geq n.$$

Es decir Ψ_k converge uniformemente a Ψ.

Definición 5.1. *Sea f una función definida en $[a,b] \subset \mathbb{R}$.*
Si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier colección de intervalos

$$(a_k, b_k) \subset [a,b], k = 1,2,...,n$$

ajenos por pares, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$$

implica que

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

entonces se dice que f es **absolutamente continua**.

Teorema 5.2. *La función Ternaria de Cantor Ψ no es absolutamente continua.*

Demostración. Como C es un conjunto de medida cero, para cada $\delta > 0$, existe una colección numerable $\{I_\mu : \mu = 1, 2, \dots\}$ de intervalos abiertos tales que $C \subset \bigcup_{\mu=1}^{\infty} I_\mu$ y $\sum_{\mu=1}^{\infty} \Delta I_\mu < \delta$, donde ΔI_μ es la longitud del intervalo I_μ.
C es compacto, luego un subconjunto finito de esta colección cubre a C. Reemplazando los intervalos que se traslapan, obtenemos una colección finita de intervalos ajenos abiertos $\{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_r, b_r)\}$ que cubren a C y tales que

$$\sum_{v=1}^{r} (b_v - a_v) < \delta.$$

Si suponemos que $b_v < a_{v+1}$, para $v = 1, 2, \dots, r-1$, entonces ya que estos intervalos cubren a C, se sigue que para cada v, los puntos b_v y a_{v+1} están en el mismo intervalo abierto removido de C. Por lo tanto $\Psi(b_v) = \Psi(a_{v+1})$. Además como Ψ es creciente, $\Psi(b_v) \geq \Psi(a_v)$.
Si extendemos Ψ tal que $\Psi(x) = 0$ para $x < 0$ y $\Psi(x) = 1$ para $x > 1$.
Tenemos que
$\sum_{v=1}^{r} |\Psi(b_v) - \Psi(a_v)| = \Psi(b_1) - \Psi(a_1) + \Psi(b_2) - \Psi(a_2) + \cdots + \Psi(b_{r-1}) - \Psi(a_{r-1}) + \Psi(b_r) - \Psi(a_r) = \Psi(b_r) - \Psi(a_1) = 1 - 0 = 1.$

Así Ψ no es absolutamente continua. □

Sin embargo para cada k, Ψ_k es una función absolutamente continua. Vemos así que aun cuando $(\Psi_k)_{k=1}^{\infty}$ sea una sucesión de funciones absolutamente continuas que converja uniformemente a Ψ, su límite, es decir, Ψ no es absolutamente continuo.

Capítulo 6

El Conjunto de Cantor como fractal

El objetivo de este capítulo es calcular la dimensión fractal de C, para este fin se introducen conceptos de manera intuitiva, y se deriva partiendo de objetos conocidos, una fórmula para calcular la dimensión. En la primera y segunda sección se formalizan un poco estas ideas y se exhibe una nueva fórmula para calcular la dimensión fractal de C, la cual coincide con la anterior.

Grosso modo, podemos decir que un fractal es un objeto geométrico que tiene la propiedad de autosimilitud y puede tener dimensión no entera (a diferencia de un intervalo abierto de los reales que tiene dimensión 1, por ejemplo).

Para calcular la dimensión fractal de un objeto, hagamos una analogía con algunos objetos conocidos.

Si consideramos un segmento de recta, que tiene dimensión 1, y lo dividimos en N partes de igual tamaño y r es la razón de escalamiento, entonces se tiene

$$Nr = 1$$

Por ejemplo, el segmento puede tener longitud 1 y lo dividimos en cuatro piezas iguales, entonces $r = \frac{1}{4}$ y $4(\frac{1}{4}) = 1$.
Esto lo podemos repetir para un cuadrado, que es de dimensión 2. Si usamos una escala de $r = \frac{1}{3}$ y dividimos cada uno de los lados en tres partes iguales, entonces el cuadrado original se parte en 9 cuadrados más pequeños. Pero

observamos que $9(\frac{1}{3})^2 = 1$. En general

$$Nr^2 = 1$$

Para un objeto de dimensión 3, la relación será

$$Nr^3 = 1$$

En cada caso, N es el número de veces que se reproduce el objeto inicial en la primera partición y r es el factor de escalamiento. El exponente de r es la dimensión del objeto bajo estudio.
De esta manera, se deriva la relación

$$Nr^d = 1$$

por lo que $\quad d = \frac{\log(N)}{\log(\frac{1}{r})}$

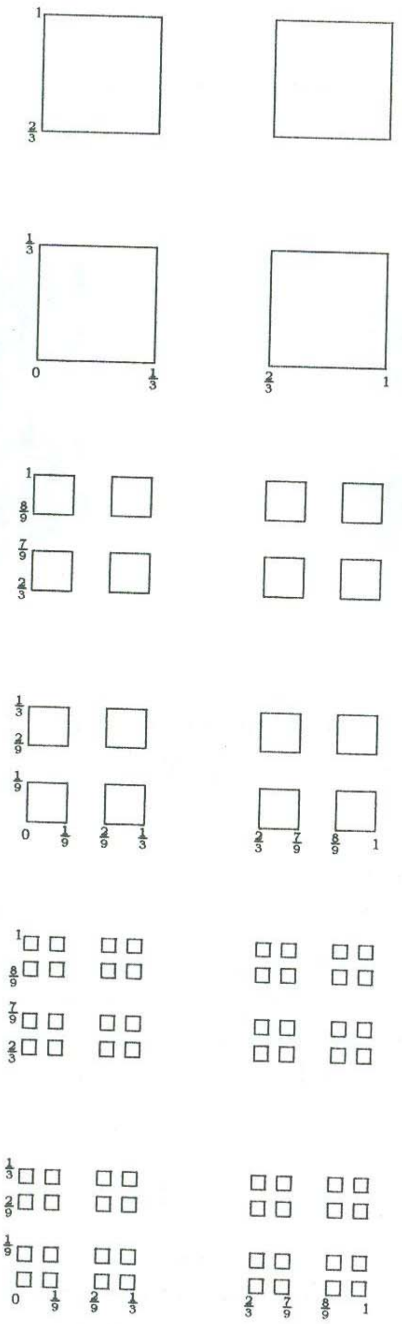
Aplicando esta fórmula al conjunto de Cantor, en la primera partición quedan 2 intervalos similares al [0,1] ($N = 2$), pero a escala $r = \frac{1}{3}$ del original. Por lo tanto, la dimensión fractal de $\boldsymbol{C}$ es

$$d = \frac{\log(2)}{\log(\frac{1}{1/3})} = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.63092975\ldots$$

Esto nos dice que el conjunto de Cantor *está casi a medio camino* de ser un conjunto discreto de puntos como los racionales y ser un intervalo continuo.

De la figura 1 notamos que en la $n-$ésima etapa de la construcción de $\boldsymbol{C}$ se *ve* lo mismo que en la $(n-1)-$ésima etapa, pero a una escala menor. Esto sugiere que $\boldsymbol{C}$ exhibe cierta autosimilitud y como ya se vió, tiene asociado un número no entero al que llamaremos más adelante emphdimensión fractal. Luego, a reserva de probar algunos resultados, podríamos decir que $\boldsymbol{C}$ es un fractal.

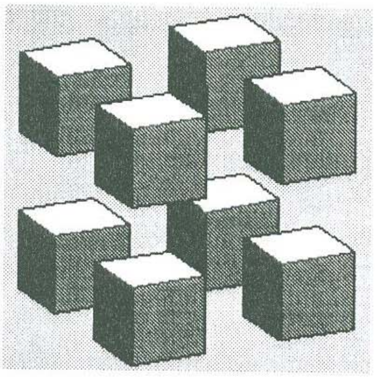
Si hacemos un proceso análogo a la construcción de $\boldsymbol{C}$, pero ahora para $[0,1] \times [0,1]$, entonces en el primer paso quitamos el tercio medio de cada uno de estos intervalos; en el segundo paso omitimos los tercios medios de los subintervalos restantes en cada factor del producto cartesiano, vemos que $N = 4$ y $r = \frac{1}{3}$; este procedimiento lo ilustramos en la siguiente figura:

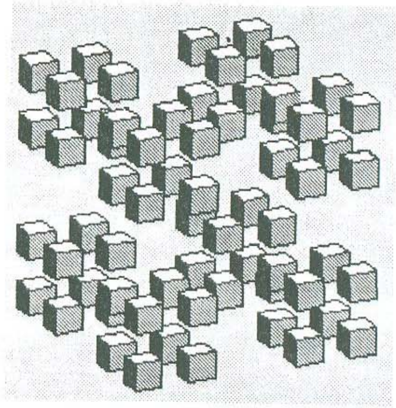


En este caso, al final del proceso obtenemos $C \times C$, que es un objeto fractal de dimensión mayor que 1, de hecho este objeto tiene dimensión

$\frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.261859$.

Lo mismo podemos hacer para $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$, y se muestran las dos primeras etapas a continuación:





En este caso, la dimensión del conjunto $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}$ es $\frac{\log 8}{\log 3} \approx 1.89278$, que es menor a la de una superficie, aquí $N = 8$ y $r = \frac{1}{3}$.

6.1 Dimensión fractal

En esta sección trataremos de dar formailidad al concepto de dimensión fractal, partiremos de la idea intuitiva de querer conocer *qué tan lleno es un espacio.* Veremos que esto depende de la escala de funciones que se considere y del orden de crecimiento en 0 de estas funciones.

Dado un conjunto P definimos la función

$$P(\varepsilon) = \bigcup_{x \in P} B_{\varepsilon}(x) \tag{6.1}$$

donde $B_{\varepsilon}(x)$ denotan las bolas de radio ε alrededor de x.

Si U es un intervalo denotaremos como $L(U)$ a la medida o longitud de U.

Sean f y g dos funciones en (0,b]. Supongamos que su límite cuando x tiende a 0 es precisamente 0.

1. Se dice que f converge a 0 más rápido que g, o bien que el *orden de crecimiento* de f a 0 es más alto que el de g si y sólo si $\lim_{x \to 0} \mid \dfrac{f(x)}{g(x)} \mid = 0$. Lo cual denotamos por $f \succ g$ o $g \prec f$.

2. Por otro lado, f y g son equivalentes si existen dos constantes c_1, c_2 tales que para toda x, se cumple que $0 < c_1 < \frac{f(x)}{g(x)} < c_2$. Y lo denotamos como $f \simeq g$.

3. Finalmente si existe una constante c tal que para toda x, $\frac{f(x)}{g(x)} \leq c$, escribimos $f \succeq g$ o también $g \preceq f$.

Por ejemplo, las dos funciones x y $2x + 3x^2$ son equivalentes alrededor de 0. Pero su orden de crecimiento es más alto que el orden de $\sqrt{x}$. Si α y β son dos números reales positivos, entonces $x^\alpha \succ x^\beta$ si y sólo si $\alpha > \beta$.

En lo que sigue, denotaremos por $L(E(\varepsilon))$ la medida del conjunto $E(\varepsilon)$ que cubre a E, de acuerdo con (6.1).

Dados dos conjuntos E_1, E_2 de medida nula, decimos que el grado de *llenado del espacio* de E_1 es más alto que el de E_2 si la convergencia a 0 de $L(E_1(\varepsilon))$ cuando ε tiende a 0 es más lento que la convergencia a 0 de $L(E_2(\varepsilon))$.

ORDENES DE CRECIMIENTO Y DIMENSIÓN

Una pregunta natural es si existe un método para cuantificar el grado de *llenado del espacio*. La respuesta sería afirmativa si dados dos órdenes de crecimiento pudiéramos decir si el primero es más alto, es el más bajo o si ambos son equivalentes. Pero esto no siempre es posible, ya que pueden construirse dos funciones cuyo cociente no tenga límite en 0; por ejemplo, un límite superior igual a infinito y un límite inferior igual a 0. De esta manera, estamos obligados a restringirnos a una familia de funciones comparables, que dan lugar a la noción de *escala de funciones*.

Una **escala de funciones** alrededor de 0 es una familia $\mathcal{F}$ de funciones definidas en una vecindad de 0 tal que para cualesquiera dos funciones f y g en $\mathcal{F}$ se tiene : $f \simeq g$; o $f \succ g$ o $f \preceq g$.

Con respecto a esta escala, el *orden de crecimiento* de una función puede ser definido por una subfamilia de funciones equivalentes. Un orden de crecimiento es un **corte** en la escala de funciones dada. Esto es, una partición de esta escala en dos subfamilias $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$, tales que cada función de $\mathcal{F}_1$ es de un orden más alto que cualquier función de $\mathcal{F}_2$, y cada función de $\mathcal{F}_2$ es de un orden más bajo que cualquier función de $\mathcal{F}_1$.

Escala de Hardy. Consideraremos las funciones x^α (α real),exp(x), y $\log x$ como una base para esta escala. Sea $\mathcal{F}$ la familia de funciones construidas a partir de esta base usando sumas finitas ($(f+g)(x) = f(x)+g(x)$), productos finitos ($fg(x) = f(x)g(x)$), y composiciones finitas ($(f \circ g)(x)) = f(g(x))$).

Sin contar a las funciones periódicas, esta familia contiene casi todas las funciones que se encuentran en cualquier curso clásico de cálculo.

Puede demostrarse que todas las funciones de esta familia, las cuales están definidas alrededor de 0, son comparables. La prueba de esto no es fácil (Teorema de Hardy). Su idea es demostrar que todas estas funciones tienen límites (eventualmente infinito) cuando x tiende a 0. De este modo, obtenemos una escala de funciones alrededor de 0. Esta escala es amplia, tan amplia como para dar una noción efectiva para cuantificar el grado de *llenado del espacio.* No obstante, es fácil encontrar funciones que no sean comparables a algunas funciones de $\mathcal{F}$ (tales funciones no pertenecen a $\mathcal{F}$). Por ejemplo, la función $x \sin \frac{1}{x}$ no está en $\mathcal{F}$ pues no se puede obtener como composición o suma finita de las funciones básicas para esta escala; además, no es comparable a x.

Escala logarítmica. Una escala de funciones más pequeña en la cual la comparación de los grados de crecimiento es más sencillo, está dada por la escala de doble índice:

$$\mathcal{F} = \{f_{\alpha,\beta}(x) = x^\alpha(\log_n \frac{1}{x})^\beta,\ \alpha > 0, n \geq 0\text{entero}, \beta\text{real}\}.$$

La notación $\log_n$ indica iteración del logaritmo: $\log_0(x) = 1$, $\log_1(x) = \log(x), \log_2(x) = \log(\log(x)), \ldots; \log_n(x) = \log(\log_{n-1}(x))$ es iterar n-veces el logaritmo. En este caso, un ejemplo de corte en $\mathcal{F}$ es el siguiente: $\mathcal{F}_1$ es el conjunto de funciones que crecen más rápido a 0 que una función dada de tipo $|\log x|^{-\beta}, \beta > 0$; $\mathcal{F}_2$ es el conjunto de funciones que crecen más despacio a 0 que una función de tipo $x^\alpha, \alpha > 0$. *De hecho, es imposible encontrar en $\mathcal{F}$ una función f cuyo orden de crecimiento esté en medio de estas dos. (Mientras que en la escala de Hardy sí es posible, por ejemplo, la función* $\exp(-(\log_2(\frac{1}{x}))^2)$, *está en medio de $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$).* Ver [9], p. 21.

Una escala más simple y también muy usada es la siguiente:

Escala de funciones potencia. Esta se define como

$$\mathcal{F} = \{f_\alpha(x) = x^\alpha, \alpha > 0\}.$$

La comparación en esta escala es directa. Dadas dos funciones f_α y f_β, tienen el mismo orden de crecimiento si y sólo si $\alpha = \beta$ y f_α crece más rápido a 0 que f_β si y sólo si $\alpha > \beta$. Aquí cada clase de equivalencia contiene un único elemento. Además, como el conjunto de números reales es *completo*, es decir, es igual al conjunto de sus cortes, por lo tanto cada orden de crecimiento en esta escala es igual a un número real α.

Dada esta escala como referencia, tenemos un método simple para calcular el orden de crecimiento de una función, probando que ese orden existe:
La función $f(x)$ tiene orden de crecimiento α en 0 si:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log f(x)}{\log x} = \alpha.$$

Por ejemplo, el orden de crecimiento de la función $x^{\frac{ax+b}{cx+d}}$ en 0 es igual a $\frac{b}{d}$.

De manera directa, podemos definir una dimensión *fraccionaria*, esto es, una dimensión cuyo valor no siempre es un entero. El grado de *llenado del espacio* de un conjunto E de la recta real es más grande si el orden de crecimiento de la función $L(E(\varepsilon))$ en 0, en la escala de funciones potencia, es más pequeño. Este orden es el límite de

$$\frac{\log L(E(\varepsilon))}{\log \varepsilon}$$

cuando ε tiende a 0.
Así, podemos definir la dimensión fraccionaria como:

$$\text{dimensión de } E = 1\text{- orden de crecimiento de } L(E(\varepsilon)),$$

si este orden existe. El número real, definido por esta dimensión, es una buena medida del grado de *llenado del espacio*. A través del tiempo, este número ha tenido diferentes nombres. G. Bouligand, que la definió en 1928, la llamó *orden de Cantor-Minkowski*, porque se originó de las ideas de Cantor en medida. También ha sido llamada *dimensión fraccionaria, densidad logarítmica*, y a veces *entropía* y *capacidad*. Actualmente es conocida como *dimensión fractal*, aunque existen muchos conceptos de dimensión fractal.

Nosotros la llamaremos simplemente **dimensión** y la denotaremos como Δ. Así,

$$\Delta(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(1 - \frac{\log L(E(\varepsilon))}{\log \varepsilon}\right)$$

es la dimensión de E, si este límite existe.

DEFINICIÓN EQUIVALENTE DE DIMENSIÓN

Es conveniente tener una definición alternativa para calcular $\Delta(E)$, la cual se usará para facilitar el cómputo de la dimensión.

Supongamos que para toda ε, E puede ser cubierto por $N(E)$ intervalos de longitud ε con interiores ajenos tales que cada intervalo contiene por lo menos un elemento de E. Si E es un conjunto infinito, entonces $N(E)$ tiende a infinito cuando ε tiende a 0.

Sin importar cómo se escogieron esos intervalos:

$$\Delta(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{|\log \varepsilon|}$$

Como los intervalos son ajenos y están incluidos en $E(\varepsilon)$, esos intervalos verifican que $\varepsilon N(\varepsilon) \leq L(E(\varepsilon))$.

Triplicando la longitud de cada intervalo, podemos cubrir $E(\varepsilon)$, así :

$$L(E(\varepsilon)) \leq 3\varepsilon N(\varepsilon).$$

Estas dos desigualdades son suficientes para probar que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log L(E(\varepsilon))}{\log \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(1 + \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon}\right)$$

por lo que se prueba la afirmación anterior.

En otras palabras,

> *La dimensión fractal de E es el orden de crecimiento a infinito cuando ε tiende a 0 del número $N(\varepsilon)$ de intervalos de longitud ε que se necesitan para cubrir a E.*

Esta definición alterantiva nos ayudará a calcular la dimensión de $\boldsymbol{C}$.

Ejemplos de cálculo de la dimensión

- Si E contiene sólo un punto, entonces $\Delta(E) = 0$.
- Si E es un intervalo, o más generalmente de longitud diferente de cero, entonces $L(E(\varepsilon)) \geq L(E)$ para toda ε. Por lo tanto $\Delta(E) = 1$ es la dimensión máxima de un subconjunto de la recta real.
- Sea E un conjunto perfecto simétrico de razón constante $a < \frac{1}{2}$. E es cubierto por 2^n intervalos de longitud a^n, con $N(a^n) = 2^n$. Tenemos que $\Delta(E) = \frac{\log 2}{|\log a|}$, el cual puede tomar todos los valores entre 0 y 1 (sin incluirlos).

Este último ejemplo podemos aplicarlo al conjunto de Cantor, sólo tomamos $a = \frac{1}{3}$ y tenemos que

$$\Delta(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$$

la cual coincide con la dimensión calculada en la sección anterior.

6.2 Otra manera de definir dimensión

En esta parte definiremos la dimensión Hausdorff, calcularemos la dimensión de C y veremos que coincide con lo hecho hasta ahora. Para este fin, nos ayudaremos de algunos teoremas cuyas demostraciones pueden encontrarse en [14].

Sea (X, d) un espacio métrico. Una función $f : X \longrightarrow X$ es una **similaridad** si y sólo si existe $r > 0$ tal que

$$d(f(x), f(y)) = rd(x, y)$$

para toda $x, y \in X$. r es llamada la **proporción** de f.

Por otra lado una **lista de proporciones** $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ es una lista finita de números positivos. Si $r_i < 1$ para toda i, $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ es llamada una lista hiperbólica de proporciones.

Un **sistema de funciones iteradas** (*SFI*) el cual realiza una lista de proporciones $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ en X, es un sistema $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ donde $f_i : X \longrightarrow X$ es una similaridad con proporción r_i.

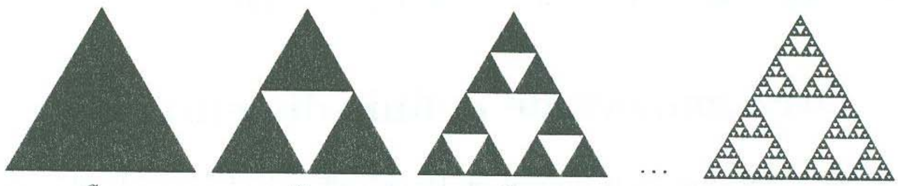
Si $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ es hiperbólico, llamaremos a F un *SFI* hiperbólico. Sólo consideraremos *SFI* hiperbólico.

Usaremos $F[A]$ para denotar $\bigcup_{i=1}^{m} f_i[A]$.

Para ejemplificar estos conceptos, notemos que si

$$
\begin{aligned}
&f_L(x,y) = \tfrac{1}{2}(x,y),\\
&f_R(x,y) = \tfrac{1}{2}(x,y) + (\tfrac{1}{2},0),\\
&f_U(x,y) = \tfrac{1}{2}(x,y)(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4}\sqrt{3})
\end{aligned}
$$

Entonces $F = \{f_L, f_R, f_U\}$ es un SFI hiperbólico que realiza $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. El conjunto invariante S, tal que $S = F[S]$ es el *Triángulo de Sierpinski.* Para ver esto, nos ayudamos del paquete Maple iterando varias veces las funciones. A continuación se muestran las primeras etapas del proceso.



S_0 S_1 S_2 S

Un resultado importante es el siguiente :

Proposición 6.1. *Sea X un espacio métrico completo y $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ un* SFI *hiperbólico que realice $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ en X. Entonces existe un único conjunto K,compacto no vacío que quede invariante bajo F, esto es $K = F[K]$.*

Demostración. Se aplica el Teorema de Punto fijo de Banach a F y al espacio $\mathbb{K}(X)$ de subconjuntos compactos no vacíos de X. Para más detalles ver referencia [14]. $\square$

Definición 6.1. *Sea X un espacio métrico, $p \geq 0$ y $\delta > 0$. Para $A \subset X$, sea*

$$H_{p,\delta}(A) = \inf\{\sum_i (\text{diam } G_i)^p\},$$

donde el ínfimo es tomado sobre todas las cubiertas numerables de A, con conjuntos G_i tales que diam $G_i < \delta$. *La medida exterior de Hausdorff p-dimensional de A es*

$$H_p(A) = \lim_{\delta \to 0} H_{p,\delta}(A).$$

Un resultado que se cumple es que si $H_p(A) < \infty$, entonces $H_q(A) = 0$ para toda $q > p$. Si $H_p(A) > 0$, entonces $H_q(A) = \infty$ para toda $q < p$.

Definición 6.2. *La dimensión Hausdorff de un conjunto A se define como*

$$\begin{aligned} \dim_H A &= \inf\{p \geq 0 : H_p(A) = 0\} \\ &= \sup\{p \geq 0 : H_p(A) = \infty\}. \end{aligned}$$

Aplicaremos estos resultados para calcular la dimensión Hausdorff del conjunto de Cantor.
Cada conjunto C_k puede ser cubierto por 2^k intervalos de longitud 3^{-k}. Así

$$H_{s,3^{-k}}(\boldsymbol{C}) \leq 2^k 3^{-sk},$$

el cual es un número positivo y finito para toda k si y sólo si $s = \frac{\log 2}{\log 3}$.
Para encontrar una cota inferior, necesitamos considerar las colecciones finitas de intervalos abiertos $\{U_i\}$ que cubren a $\boldsymbol{C}$.
Para U_i sea k un entero tal que

$$3^{-(k+1)} \leq \text{diam } U_i < 3^{-k}.$$

Entonces U_i puede intersectar a lo más un intervalo de C_k, ya que los intervalos están separados en al menos 3^{-k}. Si $j \geq k$ entonces U_i intersecta a lo más

$$2^{j-k} = 2^j 3^{-sk} \leq 2^j 3^s (\text{diam } U_i)^s$$

intervalos de C_j. Escojamos j tal que $3^{-(j+1)} \leq$ diam U_i para toda U_i. Ya que $\{U_i\}$ intersecta todos los 2^j intervalos de C_j,

$$2^j \leq \sum_i 2^j 3^s \ (\text{diam } U_i)^s,$$

lo cual da

$$\sum_i (\text{diam } U_i)^s \geq 3^{-s} = \frac{1}{2}.$$

Luego $H_s(\boldsymbol{C}) \geq \frac{1}{2}$.
Por lo que $\dim_H(\boldsymbol{C}) = s = \frac{\log 2}{\log 3}$.

Lema 6.2. *Si* $A \subset \mathbb{R}^n$ *y* $r > 0$ *entonces* $H_s(rA) = r^s H_s(A)$, *donde* $rA = \{rx : x \in A\}$.

Este lema también es útil para calcular la dimensión Hausdorff de $\boldsymbol{C}$. Podemos dividir al conjunto de Cantor en dos partes :
$C_L = \boldsymbol{C} \cap [0, \frac{1}{3}]$ y $C_R = \boldsymbol{C} \cap [\frac{2}{3}, 1]$,
ambas similares a $\boldsymbol{C}$ y a escala $\frac{1}{3}$. La unión $\boldsymbol{C} = C_L \cup C_R$ es ajena, así que

$$\begin{aligned} H_s(\boldsymbol{C}) &= H_s(C_L) + H_s(C_R) \\ &= H_s(\tfrac{1}{3}\boldsymbol{C}) + H_s(\tfrac{1}{3}\boldsymbol{C}) \\ &= 2H_s(\tfrac{1}{3}\boldsymbol{C}) = 2(\tfrac{1}{3})^s H_s(\boldsymbol{C}). \end{aligned}$$

Si $0 < H_s(\boldsymbol{C}) < \infty$, entonces $1 = 2(\frac{1}{3})^s$, lo cual lleva a que $\dim_H \boldsymbol{C} = s = \frac{\log 2}{\log 3}$.

Definición 6.3. *Sea* $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ *un* SFI *hiperbólico que realice* $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$. *La dimensión de similaridad del conjunto invariante de* F, $K = F[K]$, *es* $\dim_S K = s$ *donde*

$$\sum_{i=1}^{m} r_i^s = 1.$$

Definición 6.4. *Sea* $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ *un* SFI *hiperbólico.* F *satisface la condición de conjunto abierto si existe un conjunto abierto no vacío* V *tal que*
i)$f_i[V] \cap f_j[V] = \emptyset$ *para toda* $i \neq j$,
ii)$V \supset \bigcup_{i=1}^{m} f_i[V] = F[V]$.

Lema 6.3. *Si* F *satisface la condición de conjunto abierto, entonces* $\dim_H K = \dim_S K$. *Además,* $0 < H_s(K) < \infty$, *para* $s = \dim_S K$.

Con ayuda de estos resultados podemos calcular la dimensión de $C \times C$. Definimos las funciones:
$f_1(x,y) = \frac{1}{3}(x,y) + \frac{1}{2}(1,1)$, $f_2(x,y) = \frac{1}{3}(x,y) + \frac{1}{2}(-1,1)$,

$f_3(x,y) = \frac{1}{3}(x,y) + \frac{1}{2}(1,-1)$, $f_4(x,y) = \frac{1}{3}(x,y) + \frac{1}{2}(-1,-1)$

$F = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ es entonces un SFI que realiza $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ con $C \times C$ como conjunto invariante.
La dimensión de $C \times C$ es d, dada por $4(\frac{1}{3})^d = 1$, de aquí que $d = \frac{\log 4}{\log 3}$.
Auxiliándonos con Maple pudimos ver que $C \times C$ es el conjunto invariante.

Capítulo 7

Conjuntos de Cantor generalizados

Este capítulo trata sobre conjuntos de Cantor generalizados, en el sentido de que es posible construir conjuntos que sean perfectos y densos en ninguna parte, al igual que C, pero con medida positiva.

Además se estudian conjuntos homeomorfos a C, cuya construcción tiene una variante: en lugar de omitir el tercio medio de [0,1], se remueve cualquier intervalo centrado en [0,1] con longitud menor que 1; veremos que estos conjuntos son perfectos, compactos y densos en ninuguna parte.

7.1 Conjuntos de Cantor de medida positiva

Sea $0 < \alpha < 1$. Para construir un conjunto de Cantor de medida positiva, primero removamos del [0,1] el intervalo $I_{1,1} = (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\alpha, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\alpha)$ de longitud $\frac{1}{2}\alpha$ y punto medio $\frac{1}{2}$.
De los dos intervalos cerrados restantes: $J_{1,1} = [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\alpha]$ y $J_{1,2} = [\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\alpha, 1]$, cada uno de longitud $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}\alpha)$, removamos los intervalos medios abiertos $I_{2,1} = (\frac{1}{4} - \frac{3}{16}\alpha, \frac{1}{4} - \frac{1}{16}\alpha)$, $I_{2,2} = (\frac{3}{4} + \frac{1}{16}\alpha, \frac{3}{4} + \frac{3}{16}\alpha)$, cada uno de longitud $\frac{1}{8}\alpha$. Entonces de los cuatro intervalos restantes $J_{2,1} = [0, \frac{1}{4} - \frac{3}{16}\alpha]$, $J_{2,2} = [\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\alpha, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\alpha]$, $J_{2,3} = [\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\alpha, \frac{3}{4} + \frac{1}{16}\alpha]$, $J_{2,4} = [\frac{3}{4} + \frac{3}{16}\alpha, 1]$, cada uno de ellos de longitud $\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\alpha)$, quitemos los intervalos ,medios abiertos cada uno de longitud $\frac{\alpha}{32}$.
De los 8 intervalos restantes, cada uno de longitud $\frac{1}{8}(1 - \frac{1}{12}\alpha - \frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{8}\alpha)$,

removamos los intervalos medios abiertos, cada uno de longitud $\frac{\alpha}{128}$.

Después de n etapas quedan 2^n intervalos ajenos cerrados $J_{n,1}, J_{n,2}, \ldots, J_{n,2^n}$ cada uno de longitud menor que $\frac{1}{2^n}$ y la medida de la unión de los intervalos removidos es $\alpha(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots \frac{1}{2^n})$, y entonces la medida de todos los intervalos removidos al hacer el procedimiento anterior una infinidad de veces es: $\alpha(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots) = \alpha \times 1 = \alpha$. La medida del conjunto de Cantor restante es $1 - \alpha$.

Sean $V_n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k}$, $P_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} J_{n,k}$, $P = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$

Los conjuntos de Cantor P definidos en esta forma se llaman *Conjuntos de Cantor de medida positiva.* Todos ellos son conjuntos perfectos, densos en ninguna parte, y además son homeomorfos.
En efecto, cada P_n es cerrado, así que P es cerrado y acotado y por lo tanto compacto.
Ya que P_n no contiene ningún intervalo de longitud $\geq \frac{1}{2^n}$ y $P \subset P_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se sigue que P no contiene intervalos. Es por tanto totalmente disconexo. Además $(\overline{P})^\circ = P^\circ = \emptyset$, es decir, P es denso en ninguna parte em $\mathbb{R}$.
Sea $x \in P$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $x \in P_n$, así que existe k_n tal que $x \in J_{n,k_n}$. Así que, dado $\varepsilon > 0$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, y además los puntos extremos de J_{n,k_n} están ambos en $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$. Pero estos puntos extremos están en P, por lo tanto x es un punto límite de P. Concluimos así que P es perfecto.

Aparentemente, podríamos pensar que esta construcción es muy parecida a la del conjunto de Cantor clásico, por lo que estarímos tentados a pensar que al final obtenemos un conjunto de medida cero. Sin embargo, debemos notar que en este caso, la longitud de los intervalos que se van eliminando *converge más lento a cero* que en el caso del conjunto ternario, pues lo que eliminamos está dada por

$$\sum_{n=1} \infty \frac{\alpha}{2^n} = \alpha$$

7.2 Conjuntos de Cantor del α-medio

En esta sección estudiaremos una familia de conjuntos de Cantor del α-medio y trataremos de mostrar que no todos estos conjuntos tienen el mismo "tamaño". Estos conjuntos son una generalización directa del conjunto de Cantor clásico del cual nos ocupamos en los capítulos anteriores.

Para definirlos en el intervalo [0,1], primero escogemos $\alpha \in (0,1)$, hacemos $\beta = \frac{1-\alpha}{2}$ y entonces definimos las funciones

$$T_0(x) = \beta x \quad \text{y} \quad T_1(x) = \beta x + (1-\beta).$$

Sea $I_0 = [0,1]$, para $n \geq 1$ definimos inductivamente

$$I_n = T_0(I_{n-1}) \cup T_1(I_{n-1})$$

Entonces el conjunto de Cantor del α-medio en el intervalo [0,1] está definido como

$$\boldsymbol{C}_\alpha = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n.$$

Notemos que $T_0(I_0) = [0,\beta]$ y $T_1(I_0) = [1-\beta,1]$, así que $I_1 = [0,\beta] \cup [1-\beta,1]$. El "hueco" en I_1 tiene longitud $1-2\beta = \alpha$. Así que otra manera de describir I_1 es decir que removemos de la mitad de I_0 un intervalo abierto de longitud α, dejando dos intervalos cerrados de longitud β.

Es fácil ver que $T_0(I_1) = [0,\beta^2] \cup [\beta(1-\beta),\beta]$ y que $T_1(I_1) = [1-\beta, \beta^2(1-\beta)] \cup [(1-\beta)+\beta(1-\beta),1]$. Obtenemos I_2 removiendo de la mitad de cada componente de I_1 un intervalo de longitud $\alpha\beta$. Cada una de las cuatro componentes de I_2 tiene longitud β^2.

En general, I_n es la unión de 2^n intervalos cerrados ajenos de longitud β^n y obetnemos I_{n+1} removiendo de la mitad de cada componente de I_n un intervalo abierto de longitud $\alpha\beta^n$.

La colección $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de subconjuntos compactos anidados de [0,1] y satisface la propiedad de intersecciones finitas, así que por la compacidad de [0,1], $\boldsymbol{C}_\alpha$ es no vacío. Cada $\boldsymbol{C}_\alpha$ es un subconjunto compacto, nunca denso y perfecto de la recta real y es por tanto un conjunto de Cantor.

Consideremos ahora los conjuntos de Cantor de $\frac{9}{10}$ medios y $\frac{1}{10}$ medios. Uno se ve "más grande" que el otro. Pero ¿Cómo podemos demostrarlo? Podríamos tratar de comparar el número de puntos en los dos conjuntos, pero como sabemos, tienen la misma cardinalidad. Por lo que no podemos usar la cardinalidad para comparar los tamaños de los diferentes conjuntos de Cantor del α-medio.

Otra forma de comparar el tamaño de dos conjuntos es comparar los valores de su medida de Lebesgue. Pero cada conjunto de Cantor del α-medio tiene medida de Lebesgue cero, como veremos a continuación: sea $\alpha \in (0,1)$, cada conjunto I_n cubre a $\boldsymbol{C}_\alpha$. I_n contiene 2^n componentes, cada una de longitud β^n. Así que la longitud total de I_n es $2^n\beta^n = (2\beta)^n$ para toda n. Además $\alpha \in (0,1)$ implica que $\beta \in (0, \frac{1}{2})$, entonces $2\beta < 1$ y por lo tanto la longitud total de los I_n se va a cero cuando n tiende a infinito. Esto quiere decir que la medida de Lebesgue de $\boldsymbol{C}_\alpha$ es cero.
Así que no podemos usar la medida de Lebesgue para comparar los tamaños de los conjuntos de Cantor del α-medio.

RD T83

De este modo, vemos que no podemos usar la cardinalidad o la medida de Lebesgue para distinguir la diferencia entre los conjuntos de Cantor del α-medio. Necesitamos utilizar otro método para comparar estos conjuntos, para eso nos ayudaremos de las fórmulas para calcular la dimensión fractal de un objeto que estudiamos el capítulo anterior.
Veamos, en el conjunto de Cantor de $\frac{9}{10}$-medios $\alpha = \frac{9}{10}$ y $\beta = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1}{20}$, así que este conjunto lo podemos dividir en dos partes:

$$C^L_{\frac{9}{10}} = \boldsymbol{C}_{\frac{9}{10}} \cap [0, \tfrac{1}{20}] \quad \text{y} \quad C^R_{\frac{9}{10}} = \boldsymbol{C}_{\frac{9}{10}} \cap [\tfrac{19}{20}, 1],$$

ambos similares a $\boldsymbol{C}_{\frac{9}{10}}$ pero a escala $\frac{1}{20}$.
La unión $\boldsymbol{C}_{\frac{9}{10}} = C^L_{\frac{9}{10}} \cup C^R_{\frac{9}{10}}$ es ajena, así que

$$\begin{aligned} H_s(\boldsymbol{C}_{\frac{9}{10}}) &= H_s(C^L_{\frac{9}{10}}) + H_s\,(C^R_{\frac{9}{10}}) \\ &= H_s(\frac{1}{20}\boldsymbol{C}_{\frac{9}{10}}) + H_s(\frac{1}{20}\boldsymbol{C}_{\frac{9}{10}}) \\ &= 2H_s(\frac{1}{20}\boldsymbol{C}_{\frac{9}{10}}) = 2(\frac{1}{20}^s)H_s(\boldsymbol{C}_{\frac{9}{10}}). \end{aligned}$$

Luego $1 = 2(\frac{1}{20})^s$, lo cual lleva a que $\dim_H(\boldsymbol{C}_{\frac{9}{10}}) = \frac{\log 2}{\log 20} \approx 0.231378$.

En el caso del conjunto de Cantor de $\frac{1}{10}$-medios $\alpha = \frac{1}{10}$ y $\beta = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{9}{20}$, luego este conjunto lo podemos dividir en:

$$C^L_{\frac{1}{10}} = \boldsymbol{C}_{\frac{1}{10}} \cap [0, \tfrac{11}{40}] \quad \text{y} \quad C^R_{\frac{1}{10}} = \boldsymbol{C}_{\frac{1}{10}} \cap [\tfrac{31}{40}, 1],$$

ambos similares a $\boldsymbol{C}_{\frac{9}{10}}$ pero a escala $\frac{9}{20}$.

La unión $\boldsymbol{C}_{\frac{1}{10}} = C^L_{\frac{1}{10}} \cup C^R_{\frac{1}{10}}$ es ajena, así que

$$\begin{aligned} H_s(\boldsymbol{C}_{\frac{1}{10}}) &= H_s(C^L_{\frac{1}{10}}) + H_s\,(C^R_{\frac{1}{10}}) \\ &= H_s(\frac{9}{20}\boldsymbol{C}_{\frac{1}{10}}) + H_s(\frac{9}{20}\boldsymbol{C}_{\frac{1}{10}}) \\ &= 2H_s(\frac{9}{20}\boldsymbol{C}_{\frac{1}{10}}) = 2(\frac{9}{20}^{s})H_s(\boldsymbol{C}_{\frac{1}{10}}). \end{aligned}$$

Luego $1 = 2(\frac{9}{20})^s$, lo cual lleva a que $\dim_H(\boldsymbol{C}_{\frac{1}{10}}) = \frac{\log 2}{\log \frac{20}{9}} \approx 0.868053$. Vemos que de esta forma podemos distinguir las diferencias entre dos conjuntos de Cantor.

Anexo A

Anexo

Además de las propiedades que ya mencionamos anteriormente, el Conjunto de Cantor cumple con otras propiedades, enseguida se hace una lista de algunas de las más comunes. Varias de éstas ya fueron demostradas en los pasados capítulos, el lector interesado puede consultar la demostración de las restantes propiedades en la referencia [7]. Se inlcuye además las definiciones de las propiedades de C que no han sido estudiadas en el presente trabajo.

Un **conjunto** F_σ es un conjunto que puede ser expresado como la unión de una colección numerable de conjuntos cerrados y un **conjunto** G_δ es un conjunto que puede ser espresado como la intersección de una colección numerable de conjuntos abiertos.

Una **sub-base** $\mathcal{S}$ para una topología en X es una colección de subconjuntos de X cuya unión es igual a X. La topología generada por la sub-base $\mathcal{S}$ está definida como la colección $\mathcal{J}$ de todas las uniones de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$.

Si dos bases (o sub-bases) generan la misma topología, se dice que son **equivalentes**.

Ejemplos particulares de puntos límite son los **puntos** ω **de acumulación**, para los cuales cada conjunto abierto que contenga a p debe contener una infinidad de puntos de A.

Espacios regulares y normales

Más importante que los axiomas de separación por sí mismos, es el hecho de que puedan ser empleados para definir propiedades más fuertes. Por ejemplo un espacio X se llama **regular** o T_3, si es un espacio T_1 y satisface el axioma T_3; X es **normal** o T_4, si es un espacio T_1 y satisface el axioma T_4. Diremos que X es **completamente normal** si es un espacio T_1 y se cumple el axioma T_5.

ESPACIOS COMPLETAMENTE HAUSDORFF

Axioma $T_{2\frac{1}{2}}$: Si a y b son dos puntos de un espacio topológico X, existen conjuntos abiertos O_a y O_b que contienen a a y a b, respectivamente, tales que $\overline{O}_a \cap \overline{O}_b = \emptyset$.

Un espacio $T_{2\frac{1}{2}}$ es llamado un **espacio completamente Hausdorff.**

ESPACIOS COMPLETAMENTE REGULARES

Otra variación de los axiomas de separación concierne a la existencia de ciertas funciones continuas de valores reales. Sean A y B, subconjuntos ajenos de un espacio X,Una **función Urysohn** para A y B es una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f|_A = 0$ y $f|_B = 1$.

Axioma $T_{3\frac{1}{2}}$: Si A es un subconjunto cerrado de un espacio X y b es un punto que no pertenence a A, entonces existe una función Urysohn para A y { b } .

Un espacio que sea T_1 y $T_{3\frac{1}{2}}$ será llamado **completamente regular** o **Tychonoff.**

PROPIEDADES DE SEPARACIÓN ADICIONALES

Llamaremos a un espacio con una función Urysohn para cualesquiera dos puntos un **espacio Urysohn.**

Un espacio T_4 en el que cada conjunto cerrado es un G_δ es comúnmente llamado **perfectamente** T_4. Un espacio perfectamente T_4 el cual es también T_1 será llamado **perfectamente normal.**

Denominaremos **semirregular** a todos los espacios T_2 para los cuales los conjuntos abiertos regulares formen una base para la topología.

Dos generalizaciones de compacidad pueden ser obtenidas debilitando la hipótesis de que la subcubiertas sean finitas. Un espacio topológico es llamado $\sigma -$ **compacto** si es la unión de una cantidad numerable de conjuntos compactos, mientras que un espacio es llamado **Lindelöf** si cada cubierta abierta tiene una subcubierta numerable.

Un espacio topológico es **numerablemente compacto** si se satisface cualesquiera de las siguientes condiciones, las cuales son equivalentes:

1. Cada cubierta abierta numerable de X tiene una subcubierta finita.
2. Cada conjunto infinito tiene un punto ω de acumulación en X.
3. Cada sucesión tiene un punto de acumulación en X.
4. Cada colección numerable de conjuntos cerrados con intersección vacía tiene una subfamilia finita con intersección vacía.

Otras dos condiciones relacionadas, pero no equivalentes a compacidad numerable, son las siguientes: un espacio topológico es **secuencialmente compacto** si cada sucesión tiene una subsucesión converegente, y es **débil numerablemente compacto** si cada conjunto infinito tiene un punto límite.

Finalmente, un espacio X es llamado **pseudocompacto** si cada función continua de valores reales en X es acotada.

PROPIEDADES DE COMPACIDAD LOCAL

Un espacio topológico se dice **localmente compacto** si cada punto está contenido en una vecindad compacta.

Una variante (no equivalente) de la definición de compacidad local requiere que cada punto esté contenido en un conjunto abierto cuya cerradura es compacta. Llamaremos a este concepto **compacidad local fuerte**.

Cuando X es σ-compacto y localmente compacto es llamado **σ-localmente compacto**.

AXIOMAS DE NUMERABILIDAD Y SEPARABILIDAD

Una propiedad especial que es estrictamente más débil que separabilidad es la **condición de cadena numerable**, la cual dice que cada familia ajena de conjuntos abiertos es numerable.

PARACOMPACIDAD

Una cubierta es **punto finita** si cada punto pertenece únicamente a una cantidad finita de conjuntos en la cubierta, y es **localmente finita** si cada punto tiene alguna vecindad que intersecta únicamente a una cantidad finita de miembros de la cubierta.

Un espacio es llamado **metacompacto** si cada cubierta abierta tiene un refinamiento de punto finito abierto, **paracompacto** si cada cubierta abierta tiene un refinamiento localmente finito abierto. Las condiciones de **metacompacidad numerable** y **paracompacidad numerable** requieren únicamente que cada cubierta abierta numerable tenga el tipo de refinamiento deseado.

Decimos que un espacio X es **conexo entre dos puntos** si cada separación de X incluye un conjunto abierto que contenga a ambos puntos. Esta también es una relación de equivalencia entre los puntos de un espacio; llamaremos a las clases de equivalencia **cuasicomponentes**.

Dados dos puntos x y y de un espacio X, una **trayectoria** en X del punto x al punto y es una función continua $f : [a, b] \longrightarrow X$ de algún intervalo cerrado $[a, b]$ de la recta real en X, de tal manera que $f(a) = x$ y $f(b) = y$. Un espacio es **conexo por trayectorias** si cada par de puntos de X puede ser unida por una trayectoria en X.

Un conjunto que no tiene conjuntos abiertos ajenos se dice ser **hiperconexo** y un conjunto que no tiene conjuntos cerrados ajenos se dice ser **ultraconexo**.

X es **localmente conexo** si las componentes de los subconjuntos abiertos de X son abiertas en X.

Un espacio X es **localmente conexo por trayectorias** si las componentes de las trayectorias de subconjuntos abiertos de X son abiertos en X.

DISCONEXIDAD

Un espacio es **totalmente disconexo por trayectorias** si las únicas funciones continuas del intervalo unitario en X son constantes.

Un espacio es de **dimensión cero** si tiene una base que consiste de conjuntos que son abiertos y cerrados a la vez. Un espacio es llamado **disperso** si no contiene subconjuntos no vacíos densos en sí mismos.

BICONEXIDAD

Un conjunto conexo se dice ser **biconexo** si no es la unión de dos subconjuntos conexos ajenos no degenerados. Un punto p de un conjunto conexo X es llamado un **punto de dispersión** si $X - \{p\}$ es totalmente disconexo.

Un resultado muy conocido que usaremos en los siguientes capítulos, asegura que un subconjunto I de $\mathbb{R}$ es conexo si y sólo si I es un intervalo o consta de un sólo punto.

Propiedad	C cumple esta propiedad	C no cumple esta propiedad
Axioma T_0		
Axioma T_1	$\times$	
Axioma T_2	$\times$	
Axioma $T_{2\frac{1}{2}}$	$\times$	
Axioma T_3	$\times$	
Axioma $T_{3\frac{1}{2}}$	$\times$	
Axioma T_4	$\times$	
Axioma T_5	$\times$	
Espacio Urysohn	$\times$	
Semirregular	$\times$	
Regular	$\times$	
Completamente regular	$\times$	
Normal	$\times$	
Completamente normal	$\times$	
Perfectamente normal	$\times$	
Compacto	$\times$	
σ-compacto	$\times$	
Lindelof	$\times$	
Numerablmente compacto	$\times$	
Secuencialmente compacto	$\times$	
Débil numerablemente compacto	$\times$	
Pseudocompacto	$\times$	
Localmente compacto	$\times$	
Compacidad local fuerte	$\times$	
σ-localmente compacto	$\times$	
Separable	$\times$	
Segundo numerable	$\times$	
Primer numerable	$\times$	
Condición de cadena	$\times$	

Continúa en la siguiente página...

Viene de la página anterior

Propiedad	C cumple esta propiedad	C no cumple esta propiedad
numerable	×	
Paracompacto	×	
Metacompacto	×	
Numerablemente paracompacto	×	
Numerablemente metacompacto	×	
Completamente normal	×	
Completamente T_4	×	
Conexo		×
Conexo por trayectorias		×
Arco conexo		×
Hiperconexo		×
Ultraconexo		×
Localmente conexo por trayectorias		×
Localmente arco conexo		×
Biconexo		×
Tiene puntos de dispersión		×
Totalmente disconexo por trayectorias	×	
Totalmente disconexo	×	
Totalmente separado	×	
Extremadamente disconexo		×
Dimensión cero	×	
Disperso		×
Discreto		×
Metrizable	×	
Base σ-localmente finita	×	
Topológicamente completo	×	
Segunda categoría	×	
Numerable		×
Cardinalidad $= c$	×	

Continúa en la siguiente página...

Viene de la página anterior		
Propiedad	C cumple esta propiedad	C no cumple esta propiedad
Fuertemente conexo		×

Bilbliografía

[1] Abian A., *Products of Cantor's discontinuum.* Iranian Math. Soc. Vol 13 No. 162, pp. 37-42.

[2] Apostol, T. M., *Mathematical Analysis. A Modern Approach to Advanced Calculus*, Cuarta Impresión, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1957.

[3] Ash, R. B., *Real Analysis and Probability*, Academisc Press, Inc. USA 1972.

[4] Bartle. R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1966.

[5] Belcastro S., Green M., *The Cantor set contains* $\frac{1}{4}$?. College Mathematics Journal 32(2001), pp. 55-56.

[6] Bourbaki, N., *Elements of Mathematics. General Topology*, Part I, Hermann, Addison-Wesley, Paris, 1966.

[7] Buchan A., Haugen C., Benett R., Scheuermann C., *Fractals and the Cantor set*, 1990.

[8] Burrill C., Knudsen J., *Real Variables*, Holt, Rinehart and Winston Inc., 1969 USA.

[9] Claude Tricot, *Curves and Fractal Dimension*, Springer, New York, 1995.

[10] Coppel, W. *An interesting Cantor ser* The American Mathematical Monthly, Volume 90, Number 7, August-September 1983.

[11] Fleron, J. F., *A note on the History of the Cantor Set and Cantor Function*, Mathematics Magazine, Volume 67, Apr., 1994, pp. 136-140.

[12] Galavíz, *Miscelánea Matemática*. Instituto de Matemáticas de la UNAM 24(1996).

[13] García Máynez, A., Tamariz Mascarúa, A., *Topología General*, Porrúa, México, D. F., 1988.

[14] Gerald, E., *Measure, Topology, and Fractal Geometry*, 1990.

[15] Hewitt, E, Stromberg, K. *Real Analysis*, Springer, New York, 1965.

[16] Hjelle, G. A., *Self-similar Fractals*, University of Helsinki, 2001.

[17] Hocking, J. G., Young, G., S., *Topology*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1961.

[18] Kolmogorov, A. N. *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*, MIR Moscú, 1975.

[19] Kraft, R. L., *What's the Difference between Cantor Sets?*, The American Mathematical Monthly, Volume 101, Issue 7, Aug.-Sep. 1994, pp. 640-650.

[20] Munkres, J. R., *Topology a first course*, Prentice-Hall, New Jersey, 1975.

[21] Olmsted, J. M. H., *Counterexamples in Analysis*, Holden-Day., 1964.

[22] Steen L. A., Seebach, J. A., *Counterexamples in Topology*, 2da. edición, Springer, New York, 1978.