UNIVERSIDAD DE SONORA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

"EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE RESPECTO AL COSTO Y RESPECTO AL TIEMPO"

TESIS

Que para obtener el Título de
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Presenta:

Marcelino Dórame Aguilar

Hermosillo, Sonora. Julio 1996.

A mis padres
Manuel Dórame Quijada.
Remedios Aguilar de Dórame.

Quienes supieron enseñarme el camino del estudio, la honradez y dedicación. A ellos dedico este pequeño y modesto estudio, en agradecimiento a sus sacrificios.

Con especial afecto al **M.C. Pedro Flores Pérez**, agradeciéndole infinitamente los consejos y apoyo que siempre me ha brindado.

A mis **hermanos, compañeros, maestros y amigos** con inolvidable recuerdo...

Finalmente quiero manifestar mi gratitud que siento por la **Universidad de Sonora**, pero en especial al **Departamento de Matemáticas**, porque me brindó la oportunidad de lograr una de mi más anelada meta de mi vida...

INTRODUCCION

La finalidad de este trabajo es el de contribuir de alguna manera en el desarrollo que ha tenido en últimas fechas nuestro estado y esto es debido a la firma del acuerdo de libre comercio firmado por los paises de México, Estados Unidos de América y Canada. Nuestro estado por estar situado en la parte fronteriza con Estados Unidos de América, es una de las rutas por donde pasan los diferentes productos que se comercializan en los tres mercados más grandes del mundo. Por lo anterior las compañías transportistas requieren que los centros de investigación consideren y formalicen teóricamente el problema de distribución de artículos de las fuentes de suministro a los puntos demandantes lo más eficiente posible para poder competir con las demás y así dar un mejor servicio al usuario.

El objetivo de esta tesis consiste básicamente en mostrar y demostrar la convergencia de algunos algoritmos que nos sirven para resolver el Problema de Transportar un determinado producto de varios puntos suminitros a un número dado de puntos demandantes a un costo mínimo y también consideramos un algoritmo que nos resuelve el problema de la distribución de algún producto de un número dado de puntos orígenes a varios puntos de consumo en un tiempo mínimo.

En algunas materias de matemáticas del área de ciencias e ingeniería se tiene el problema que únicamente se contempla la parte teórica y el estudiante no tiene una visión de las aplicaciones de ésta. Ante esta necesidad de materias, considero que esta tesis ayudará a mostrar a los alumnos que cursen la materia de Algebra Lineal, un tipo de problemas que pueden resolverse utilizando el contenido teórico de esta asignatura.

Al inicio de cada uno de los capítulos hacemos una introducción del contenido a contemplarse y después los desarrollamos ejemplificando y justificando los resultados obtenidos.

Los contenidos de cada capítulo lo podemos resumir de la siguiente forma:

En el capítulo I presentaremos algunos ejemplos para tener una idea del tipo de problemas que podemos resolver utilizando la teoría contemplada en este trabajo, haciendo el análisis para cada uno de los ejemplos y, basados en éstos, hacemos la generalización para problemas de m orígenes con n destinos; posteriormente, formulamos el modelo matemático para el problema generalizado. Finalmente, hacemos algunas observaciones de las diferencias del Problema de Transporte con Respecto a los Costos y el Problema de Transporte con Respecto a los Tiempos.

En el capítulo II analizamos la estructura de la matriz de coeficientes tecnológicos del Problema de Transporte y las propiedades de triangularidad, unimodularidad y el rango de las matrices básicas, demostramos además que en el proceso que se sigue, para llegar a la solución, óptima siempre se deben considerar arreglos acíclicos.

El capítulo II es el marco teórico del Problema de Transporte que nos garantiza que el Método que utilizaremos para resolverlo realmente converge a la solución óptima y que es una modificación del Método Simplex en donde se aprovecha la estructura especial que éste tiene.

En el capítulo III enunciamos la condición de factibilidad del Problema de Transporte, el Método de Mínimo Costo para encontrar la solución inicial, demostrando que con este Método siempre obtenemos la asignación a m+n-1 variables, con arreglos acíclicos, presentando además un criterio para conocer si la solución inicial es la óptima y el proceso de generar otra solución básica, en caso de que la solución inicial no lo sea y posteriormente enunciamos los pasos del Método de Combinatoria para obtener la solución óptima de Problema del Transporte con Respecto a los Costos y finalmente tenemos un apartado dedicado al Método para determinar los ciclos en la Tabla del Problema de Transporte.

En el capítulo IV consideramos el Problema de Transportar un determinado producto de varios puntos suministros a un número dado de puntos demandantes a un tiempo mínimo en su distribución total. En la primera sección estudiamos distintas formas de llegar a la solución básica inicial y elegimos el proceso más conveniente (La Tabla Pequeña). En la segunda sección enunciamos el algoritmo para encontrar la solución óptima y en el último apartado, demostramos que el algoritmos de solución óptima del Problema de Transporte con Respecto al Tiempo realmente converge.

Como conclusión de este apartado, quiero recalcar que el objetivo de este trabajo fundamentalmente es el de presentar, explicar e ilustrar los algoritmos para resolver el Problema de Transporte con Réspeto a los Costos y el Problema de Transporte con Respecto a los Tiempos, para después seguir trabajando en un paquete computacional que nos facilite los cálculos en problemas practicos de regular tamaño.

CONTENIDO

CAPITULO I

EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE

En este capítulo mostraremos algunos ejemplos que nos ayuden a formarnos una idea del tipo de problemas que estudiaremos en este trabajo. En base a estos ejemplos modelaremos en forma natural el Problema del Transporte con Respecto al Costo (PTRC), también llamado el Problema Clásico del Transporte, de una manera general, es decir, donde se tenga que hacer la distribución de un producto determinado de m puntos de suministro a n puntos de demanda a un costo mínimo. Para el análisis del Problema del Transporte con Respecto al Tiempo estudiaremos los ejemplos elementales a los que hacemos referencia en la primera sección y apoyados en éstos, formularemos matemáticamente el problema,de manera general, donde se tenga que hacer la distribución total de un determinado producto de m almacenes a n puntos de demanda y que se efectúe a un mínimo tiempo.

Finalmente basándonos en los ejemplos y modelos de cada problema, se enumerarán y analizarán las características que hace diferentes a cada problema en particular.

1.1 ANTECEDENTES

El Problema del Transporte es una de las aplicaciones más exitosas de la Programación Lineal por sus métodos de solución, las diferentes formas de plantearlo y la gran variedad de problemas que se pueden adaptar al proceso de solución.

El primer trabajo enfocado al Problema del Transporte fué desarrollado por L. Hitchcock en 1941 titulado "The Distribution Of A Product From Several Sources To Numerous Locatities". En este trabajo Hitchcock trata de resolver el Problema del Transporte utilizando el Método Simplex sín aprovechar la estructura que tiene la matriz de los coeficientes tecnológicos del Problema del Transporte. Posteriormente en 1947 T.C Koopman presentó su trabajo "Optimun Utilization Of The Transportation System" en forma diferente a lo que trabajó Hitchcock. Este utilizó detalladamente la estructura que tiene el Problema del Transporte.

Las anteriores contribuciones ayudarón al desarrollo de los modelos de Transporte, que comprenden muchos sitios de embarque y muchos puntos destinos. El planteamiento general y la utilización de la estructura para determinar la solución al Problema del Transporte fué hecho por G. B. Dantzing que modificó y adaptó el Método Simplex al Problema del Transporte para encontrar la solución óptima.

Otro investigador que contribuyó en esta dirección fué E. Egervary, quien trabajó con la matriz de los coeficientes tecnológicos haciéndole permutaciones de ceros y unos.Fué hasta 1955 cuando H. W. Kuhn, ayudado por el trabajo de Egevary, desarrolló un método alterno en la solución al problema llamado Método de Ford y Fulkerson.

En la actualidad existen una gran diversidad de métodos para encontrar la solución óptima al problema, y cada uno de ellos es de alguna manera una modificación al Método Simplex para aprovechar la estructura del problema.

1.2 EJEMPLOS DEL PROBLEMA DEL TRANSPORTE CON RESPECTO AL COSTO Y CON RESPECTO AL TIEMPO.

El objetivo de esta sección es mostrar algunos ejemplos para que tengamos una idea más clara de lo que abordaremos en este trabajo.

Consideremos el siguiente ejemplo del **PTRC** donde se tienen dos orígenes y tres destinos.

EJEMPLO 1.2.1

Supongamos que tenemos el problema de distribuir el producto de dos almacenes a tres lugares de consumo, las cantidades de producto que se tiene en cada almacén son conocidas, de igual manera, los requerimientos de los puntos de consumo, y el costo unitario de embarque de cada almacén a cada punto de consumo.

La tabla 1.2.1 muestra los costos de transportación de cada orígen a cada destino.

		PTOS. DE CONSUMO			
		1	2	3	
ALMACENES	1	1	2	7	14
	2	8	4	6	15
REQUERIMIENTOS →		5	11	3	SUMINISTROS

Tabla 1.2.1

En la tabla 1.2.1, el número cuatro que se encuentra en el segundo renglón y segunda columna representa el costo al enviar una unidad de producto del segundo origen al segundo destino, una interpretación análoga se le puede dar al resto de los números de la tabla.

El objetivo es encontrar un plan de transportación de tal manera que el costo de distribución total sea mínimo. Este es un ejemplo de un Problema del Transporte con Respecto al Costo, el planteamiento de cada ejemplo los analizaremos en la sección 1.3.

En el siguiente ejemplo no interesa el gasto económico en la la distribución del producto, sino el tiempo que tarda en la colocación total del producto desde los puntos de suministro a los puntos de demanda.

EJEMPLO 1.2.2

Supongamos que se tienen corrales de engorda de ganado localizados en Hermosillo, Culiacán y Puebla. En cada una de estas ciudades se sacrifica y distribuye la carne a vendedores localizados en varias ciudades del país. La demanda mensual estimada por pedidos en canales es como sigue.

DEMANDA DE CANALES PARA EL PROXIMO MES

CIUDAD	NUM. DE CANALES
Mexicalí	30
Nvo. León	55
Nayarit	50
D.F	65

*Las cantidades estan dadas en miles

Tabla 1.2.2

Los tiempos que tardan en la transportación por ferrocarril entre los corrales de engorda y los vendedores son:

TIEMPOS DE TRANSPORTE

DESDE \ HACIA	MEXICALI	NAYARIT	NVO. LEON	D.F
HERMOSILLO	14	16	12	20
CULIACAN	12	14	10	8
PUEBLA	10	16	8	15

* Los tiempos estan dados en dìas.

Tabla 1.2.3

Actualmente se cuenta con el siguiente suministro de canales disponibles:

SUMINISTRO DE CANALES DISPONIBLES

CORRALES	SUMINISTRO
HERMOSILLO	100
CULIACAN	40
PUEBLA	60

* Las cantidades estan dadas en miles

Tabla 1.2.4

El problema sería entonces cómo construír un plan de envío de tiempo mínimo entre los corrales de engorda y los puntos de demanda. El ejemplo anterior es un Problema del Transporte considerando el Tiempo.

Si observamos tanto en el ejemplo 1.2.1 como en 1.2.2 el número total de unidades ofertadas es igual al número totalde unidades demandadas, cuando los problemas tienen ésta característica diremos que el Problema del Transporte esta balanceado.

En el ejemplo 1.2.2 se da el número de canales suministrado, el número de canales demandado y el tiempo necesario que se requiere para llevar un cargamento del origen i al destino j (con i=1,2,3 y j=1,2,3,4). Siempre supondremos que el tiempo no depende del número de unidades a transportar.

Al leer detenidamente los ejemplos 1.2.1 y 1.2.2 podemos observar cierta similitud entre los problemas, en otras palabras, para los dos ejemplos se tiene un determinado número de origenes ofertantes y algunos puntos demandantes de un producto dado y el objetivo en cada caso es encontrar un plan de distribución del producto optimizando algún recurso. Un Problema donde sea necesario Transportar cierto producto de varios sitios a un determinado número de destinos se puede plantear de las dos formas, es decir, considerando los costos y también considerando los tiempos en su distribución, como lo ilustraré en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 1.2.3

Consideremos el enunciado del ejemplo 1.2.2 con las restricciones de demanda y suministro dados en las tablas 1.2.2 y 1.2.4 repectivamente.

Los costos en la transportación por ferrocarril entre los corrales de engorda a los vendedores son

COSTOS DE TRANSPORTE

DESDE \ HACIA	MEXICALI	NAYARIT	NVO. LEON	D.F
HERMOSILLO	42	39	40	43
CULIACAN	46	30	38	34
PUEBLA	50	37	45	40

* Los costos estan dados en miles.

El objetivo en este caso es como hacer la distribución del producto de los puntos de suministro a los puntos de demanda de tal manera que el costo sea mínimo.

El problema que surge ahora es como modelar este tipo de problemas en notación matemática.

Iniciaremos con los dos ejemplos elementales 1.2.1 y 1.2.2 vistos anteriormente formulándolos para posteriormente plantearlos en forma general, es decir, con m puntos de suministro y n puntos de consumo.

1.3 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DEL TRANSPORTE CON RESPECTO AL COSTO.

Analicemos el ejemplo 1.2.1 donde se tiene una demanda de 29 unidades de cierto producto con igual número de unidades suministradas, conocemos además los costos de transportar una unidad del producto de cada origen a cada destino como se muestra en la figura siguiente:

PTOS. DE CONSUMO

		1	2	3	
ALMACENES	1	1	2	7	14
	2	8	4	6	15
REQUERIMIENTOS →		10	11	8	↑ SUMINISTROS

Sea x_{ij} es el número de unidades de producto que se envian del almacen i al punto de consumo j.

La demanda de 10 unidades de producto del primer punto de consumo será abastecido por dos almacenes, en notación algebraica se expresa de la siguiente forma:

$$x_{11}+x_{21}=10$$

En el segundo punto la demanda de producto es abastecido por los dos almacenes y ésto lo expresamos:

$$x_{12}+x_{22}=11$$

De la misma forma para el tercer punto de consumo

$$x_{13}+x_{23}=8$$

En resumen las ecuaciones de suministro quedarían

$$x_{11}+x_{21}=10$$

$$x_{12}+x_{22}=11$$

$$x_{13}+x_{23}=8$$

Todo lo que se encuentra almacenado en los puntos suministros deberá de ser entregado a los tres puntos de consumo. Por ejemplo, las 14 unidades de producto con que cuenta el primer almacén deberán ser repartidos en los tres puntos de consumo, en términos algebraicos

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=14$$

De forma análoga para el segundo almacén

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=15$$

Las ecuaciones de demanda son:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=14$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=15$$

Por otro lado,como se conocen los costos de envio de cada orígen a cada destino, el costo de la distribución del primer destino quedaría

$$x_{11}+8x_{21}$$

y para los dos destinos restantes los costos serían

$$2x_{12}+4x_{22};$$

$$7x_{13}+6x_{23}$$

Respectivamente.

Con las restricciones anteriores donde se tiene que distribuir todo el producto de los dos almacenes y abastecer las demandas de cada uno de los puntos destinos a un costo mínimo, el modelo nos quedaría:

$$\text{Minimizar } Z=x_{11}+2x_{12}+7x_{13}+8x_{21}+4x_{22}+6x_{23}$$

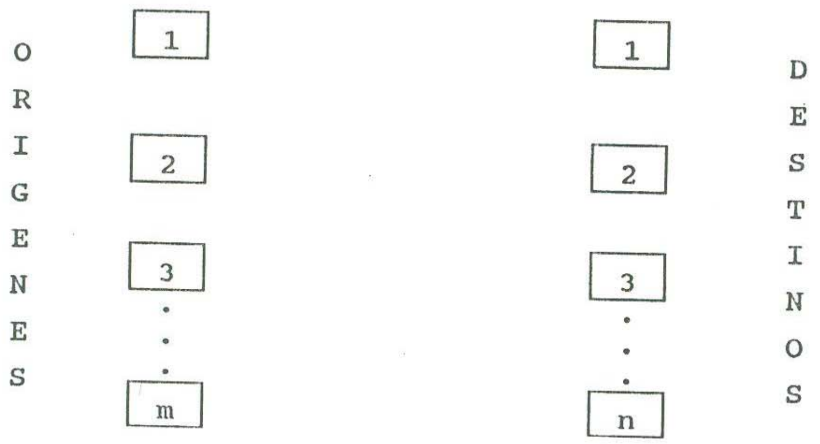
Sujeto a:

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{21}=10 \\ x_{12}+x_{22}=11 \\ x_{13}+x_{23}=\ 8 \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{Restricciones}\\ \text{de}\\ \text{Requerimiento}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{12}+x_{13}=14 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=15 \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{Restricciones}\\ \text{de}\\ \text{Oferta}\end{array}$$

El Problema general del Transporte con respecto al Costo con m origenes y n destinos se puede formular de manera análoga que el ejemplo ilustrativo anterior. A continuación veremos su generalización.

Consideremos el problema de distribuir cierto producto de m-puntos de suministro a n-puntos de demanda, como se muestra en la gráfica que sigue



Se conoce la producción de cada uno de los puntos orígenes y la demanda de cada uno de los puntos destinos, además, setienen los costos unitarios de cada origen a cada punto de consumo.

El problema sería encontrar un plan de distribución de tal manera que el costo sea mínimo.

1.3 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA GENERAL DEL TRANSPORTE CON RESPECTO AL COSTO.

Supongamos que se tiene cierta cantidad de un producto distribuidos en m almacenes, donde el almacén uno puede abastecer a_1 unidades de producto, el almacén dos puede abastecer a_2 unidades de producto y así sucesivamente hasta el almacén m-ésimo que tiene a_m unidades disponibles de este producto. De la misma forma se tienen n puntos de consumo con una demanda de b_1 unidades de producto el primero, b_2 es la demanda del segundo punto de consumo y así sucesivamente hasta el n-ésimo punto de consumo que tiene una demanda de b_n unidades de este producto, conocemos además el costo de transportar una unidad de producto de cualquier almacén a cualesquiera de los n punto de consumo.

Consideremos el PTRC donde cada origen puede abastecer a lo más el número de unidades que se demandán y los puntos de abastecimiento le deben de surtir a lo más las necesidades que se tiene de este producto.

El problema planteado de esta forma es como en la realidad se nos presenta.

El interes primordial es determinar cuantas unidades de producto se van ha enviar de cierto origen a un destino determinado de tal manera que la distribución total se efectué con un mínimo costo.

1.4 FORMULACION MATEMATICA DEL PROBLEMA DEL TRANSPORTE CON RESPECTO AL COSTO.

La formulación del Problema del Transporte clásico planteado en forma general, como se describió en la sección alterior donde se tienen m puntos de suministro de algún producto y n puntos de demanda de este producto quedaría expresado:

$$\text{Min } Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn}.$$

Sujeto a:

$$
\begin{array}{llllll}
x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} & & & & \le a_1 & (1) \\
 & x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} & & & \le a_2 & (2) \\
 & & & & & \\
 & & & x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} & \le a_m & (m) \\
x_{11} & + x_{21} & & + x_{m1} & \ge b_1 & (m+1) \\
+ x_{12} & + x_{22} & & + x_{m2} & \ge b_2 & (m+2) \\
 & & & & & \\
+ x_{1n} & + x_{2n} & & + x_{mn} & \ge b_n & (m+n)
\end{array}
$$

Donde Z es la función objetivo que tratamos de minímizar y representa los costos en la distribución total. La ecuación (1) representa que todo el producto existente en el primer almacén tiene que ser distribuido en los n puntos de demanda, la ecuación (2) representa que todo el producto existente en el segundo origen tiene que ser distribuidos en los n puntos de demanda, el mismo significado tienen las otras ecuaciones hasta la m-ésima. La ecuación (m+1) significa que la demanda que tiene el primer punto de consumo tendrá que ser abastecido por los m almacenes, la ecuación (m+2) significa que el déficit que tiene el segundo punto de demanda tendrá que ser abastecido por los m almacenes y así sucesivamente hasta la (m+n) ecuación que nos indica lo que se requieré de producto en el n-ésimo punto de consumo será abastecido por los m almacenes.

Para el Problema del Transporte existen m+n ecuaciones quecomo veremos más adelante en este trabajo, son Linealmente Dependientes (L.D), es decir, alguna de ellas se puede expresar en términos de las restantes.

Después de agregar variables de holgura, el módelo del problema se transforma en un Sistema de Ecuaciones Lineales de la forma:

$$\text{Min } Z= c_{11}x_{11}+ c_{12}x_{12}+\ldots+ c_{1n}x_{1n}+ c_{21}x_{21}+ c_{22}x_{22}+\ldots+ c_{2n}x_{2n}+$$
$$c_{m1}x_{m1}+ c_{m2}x_{m2}+\ldots+c_{mn}x_{mn}.$$

Sujeto a:

$$\begin{array}{lllll}
x_{11}+ x_{12}+\ldots+ x_{1n} & & & & =a_1 \\
 & x_{21}+ x_{22}+\ldots+ x_{2n} & & & =a_2 \\
 & & & & \\
 & & & x_{m1}+ x_{m2}+\ldots+ x_{mn} & =a_m \\
x_{11} & + x_{21} & & + x_{m1} & =b_1 \\
\quad + x_{12} & \quad + x_{22} & & \quad + x_{m2} & =b_2 \\
 & & & & \\
\qquad + x_{1n} & \qquad + x_{2n} & & \qquad + x_{mn} & =b_n
\end{array}$$

En forma compacta quedaría:

$$\text{Min } Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}= a_i \qquad i=1,2,3,\ldots,m \text{ (Restricciones de suministro)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}= b_j \qquad j=1,2,3,\ldots,n \text{ (Restricciones de demanda)}$$

$$x_{ij}\geq 0 \qquad \text{(Restricciones de no negatividad)}$$

Donde:

x_{ij}- Es el número de unidades del producto a transportar del origén i-ésimo hacia el destino j-ésimo.

c_{ij}- Es el costo de transportar un cargamento del i-ésimo origen al j-ésimo destino.

a_i - Es el número de unidades disponibles de un cierto producto en el origen i-ésimo.

b_j- Es el número de unidades de producto requeridas por el j-ésimo destino.

En forma matricial el Problema del Transporte quedaría expresado:

$$\text{Min } Z=CX$$

Sujeto a:

$$AX=b$$

$$X\geq 0$$

Donde:

$$C=(c_{11},\ c_{12},\ldots,\ c_{1n},\ c_{21},\ c_{22},\ldots,\ c_{2n},\ldots,\ c_{m1},\ c_{m2},\ldots,\ c_{mn})$$

$$X^t=(x_{11},\ x_{12},\ldots,\ x_{1n},\ x_{21},\ x_{22},\ldots,\ x_{2n},\ldots,x_{m1},\ x_{m2},\ldots,\ x_{mn})$$

$$b^t=(a_1,\ a_2,\ldots,\ a_m,\ b_1,b_2,\ldots,\ b_n)$$

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & a_{11} & a_{12} & a_{1n} & a_{21} & a_{22} & a_{2n} & a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \\
A= & \multicolumn{9}{c}{\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & 1 & \ldots 1 & 0 & 0 & \ldots 0 & \ldots\ldots 0 & 0 & \ldots 0 \\
0 & 0 & \ldots 0 & 1 & 1 & \ldots 1 & \ldots\ldots 0 & 0 & \ldots 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 & \ldots 0 & \ldots\ldots 1 & 1 & \ldots 1 \\
1 & 0 & \ldots 0 & 1 & 0 & \ldots 0 & \ldots\ldots 1 & 0 & \ldots 0 \\
0 & 1 & \ldots 0 & 0 & 1 & \ldots 0 & \ldots\ldots 0 & 1 & \ldots 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots 1 & 0 & 0 & \ldots 1 & \ldots\ldots 1 & 0 & \ldots 1
\end{array}\right]}
\end{array}$$

Como se observa, la matriz A de los coeficientes tecnológicos del Problema del Transporte, tiene una estructura especial, es decir, sus componentes constan únicamente de ceros y unos. Aprovechando esta configuración posteriormente, se nos facilitarán los cálculos para llegar a la solución óptima, como se expondrá en este trabajo.

En la siguiente sección plantearemos el PTRT donde se tienen un producto determinado en m almacenes y se tienen n puntos de demanda, conocemos además el tiempo que se requiere paraenviar un cargamento del origen i-ésimo al destino j-ésimo. Se quiere conocer qué almacén debe surtir a qué punto de consumo, de tal forma que todos los puntos de demanda sean abastecidos en el menor tiempo posible.

1.5 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DEL TRANSPORTE CON RESPECTO AL TIEMPO.

Para numerosos problemas prácticos, el tiempo en la distribución de algún producto juega un papel de gran importancia. Por mencionar algunos ejemplos; la distribución de ganado, frutas, hielos, granos, etc. De alguna manera se requiere que su distribución se efectué en el menor tiempo posible debido a que son necesarios para su procesamiento, o que el costo esta relacionado con el tiempo de entrega y, como es sabido, entre más se tarde su distribución, mayores serán las perdidas para el productor.

Antes de hacer un planteamiento del **PTRT** en forma general analizaremos el ejemplo 1.2.2 explicado en la sección 1.2.

Para este ejemplo conocemos la cantidad de producto que puede suministrar cada uno de los puntos orígenes y la cantidad de producto que demandan los puntos de consumo. Como se muestran en las tablas 1.2.4 y 1.2.2 respectivamente. conocemos además el tiempo que se requiere para enviar un cargamento de cada origen a cada punto de demanda, como se observa en la tabla 1.2.3.

Los puntos de suministro son Hermosillo, Culiacán y Puebla que tienen disponible 100, 40 y 60 mil canales respectivamente, que van a ser repartidos en Mexicalí, Nuevo León, Nayarit, Distrito Federal y tienen una demanda de 30, 55, 50 y 65 mil canales respectivamente.

Supongamos que tenemos todas las posibles soluciones $[x_{ij}]$ y su matriz asociada de tiempos $T=[t_{ij}]$. Se elige, de entre todas las soluciones, aquella en la cual, el viaje que requiere más tiempo en su distribución sea el más corto posible y ésta será la solución óptima.

Con ayuda del ejemplo ilustrativo anterior, podemos ahora hacer descripción del PTRT en forma general, es decir, donde se tengan varios origenes de suministros y varios puntos de demanda. A continuación hacemos este planteamiento.

Supongamos que tenemos m-origenes con una oferta de un determinado producto de a_1 unidades en el primero, a_2 unidades en el segundo,..., a_m unidades en el m-ésimo respectivamente, y se tienen además n puntos de destinos con una demanda de este producto de b_1 unidades en el primer punto de demanda, b_2 unidades el segundo punto de demanda,...,b_n unidades en el n-ésimo punto de demanda respectivamente y sea x_{ij} la cantidad enviada del origen i al destino j y t_{ij} el tiempo (Medido en minutos, hrs., días, etc.) que se tarda en la distribución de un cargamento del i-ésimo origen al j-ésimo destino, con sus respectivos tiempos t_{ij} para cada uno de los embarques.

El problema consiste en encontrar de entre todas las soluciones factibles $[x_{ij}]$ y su matriz asociada de tiempos $T=[t_{ij}]$, aquella en la cual el viaje que requiere más tiempo sea el más corto posible.

Observese que el número de unidades de producto que pueden ser abastecidos por los tres puntos orígenes, es igual al número de unidades demandadas por los cuatro puntos de consumo, es decir,el Problema del Transporte está balanceado.

Por lo general, todos los algoritmos existentes para resolver el Problema del Transporte requiere que el Problema esté Balaceado. Cabe señalar que cuando un problema es no balanceado se puede modificar para obtener otro balanceado y equivalente.

El objetivo en la siguiente sección, es como modelar este problema en términos matemáticos, para después dar el método que nos dé la solución al Problema.

1.6 FORMULACION MATEMATICA DEL PROBLEMA DEL TRANSPORTE CON RESPECTO AL TIEMPO.

Antes de hacer el planteamiento general del **PTRT**, consideraremos el ejemplo 1.2.2 descrito en la sección anterior. Para este caso se tienen tres puntos de suministro que van a abastecer los cuatro lugares de demanda, suponiendo que todo lo que se suministra de producto en los tres orígenes se distribuyen en los cuatro puntos de demanda y que todas las necesidades son satisfechas.

La ciudad de Hermosillo puede abastecer a los cuatro puntos de consumo y se expresa como sigue:

(1).... $x_{HM}+x_{HL}+x_{HN}+x_{HD}=100$

De igual forma para Culiacán y Puebla

(2).... $x_{CM}+x_{CL}+x_{CN}+x_{CD}=40$

(3).... $x_{PM}+x_{PL}+x_{PN}+x_{PD}=60$

Las ecuaciones anteriores son restricciones de suministro.

La ciudad de Mexicalí tiene una demanda de 30 mil canales que serán abastecidos por los tres puntos de suministro, lo anterior se puede expresar:

(4).... $x_{HM}+x_{CM}+x_{PM}=30$

De manera análoga para Nuevo León, Nayarit y Distrito Federal

(5).... $x_{HL}+x_{CL}+x_{PL}=55$

(6).... $x_{HN}+x_{CN}+x_{PN}=50$

(7).... $x_{HD}+x_{CD}+x_{PD}=65$

A las ecuaciones (4), (5), (6) y (7) se le llama restricciones de demanda.

Conocemos además los tiempos para transportar un cargamento de cada origen a cualquier destino, en otras palabras, se nos da la matriz de Tiempos $T=[t_{ij}]$.

Al iterar algún método de solución, para cada solución $X^*=[x^*_{ij}]$ se tiene asociada una matriz de tiempos $T^*=[t^*_{ij}]$ que satisfacen

$$t^*_{ij} > t_{ij} \quad \text{si } x_{ij}>0; \qquad t^*_{ij}=0 \qquad \text{si } x_{ij}=0$$

Encontrando todas las soluciones $X=[x_{ij}]$ y su asociada matriz de tiempos $T=[t_{ij}]$ elijiremos aquella en la cuál el viaje que requiere mayor tiempo en su distribución se efectue en el menor tiempo posible.

La formulación del PTRT, en forma general, se puede modelar en forma análoga al ejemplo ilustrativo.

Conocemos la cantidad de cargamentos que puede suministrar cada uno de los m puntos origen a los n puntos de demanda (como en el PTRC). Las restricciones de suministro son:

$$\begin{array}{lllr}
x_{11}+x_{12}+\dots+x_{1n} & & & =a_1 \\
 & x_{21}+x_{22}+\dots+x_{2n} & & =a_2 \\
 & & \ddots & \\
 & & x_{m1}+x_{m2}+\dots+x_{mn} & =a_m
\end{array}$$

En el PTRT al igual que cuando se consideran los Costos, conocemos las demandas de cada uno de los puntos destinos. Las restricciones de demanda son:

$$
\begin{array}{lllllllll}
x_{11} & & + x_{21} & & & + x_{m1} & & & =b_1 \\
& + x_{12} & & + x_{22} & & & + x_{m2} & & =b_2 \\
\\
& & + x_{1n} & & + x_{2n} & & & + x_{mn} & =b_n
\end{array}
$$

Otras de las restricciones que se imponen al **PTRT** es que esté balanceado, es decir:

$$a_1+a_2+\ldots+a_m=b_1+b_2+\ldots+b_n$$

Se da inicialmente una matriz de tiempos

$T=[t_{11},\ t_{12},\ldots,\ t_{1n},\ t_{21},\ t_{22},\ldots,t_{2n},\ldots,t_{m1},\ t_{m2},\ldots,t_{mn}]$

Cualquier solución al problema tiene asociada una matriz de tiempos.

El problema es encontrar una distribución de tal manera que el viaje que requiere mayor tiempo en su distribución sea el menor posible.

El módelo anterior lo podemos expresar en forma compacta de la siguiente manera:

Las restricciones de suministro

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i \qquad i=1,2,3,\ldots,m \qquad (1)$$

Restricciones de demanda

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j \qquad j=1,2,3,\ldots,n \qquad (2)$$

Las constantes a_i y b_j satisfacen la condición

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (3)$$

Se da inicialmente una matriz de tiempos

$$T=[\ t_{ij}]$$

Toda solución $[x_{ij}]$ tiene asociada una matriz de tiempos $T^*=[t^*_{ij}]$ cuyos elementos t^*_{ij} satisfacen:

$$t^*_{ij} > t_{ij} \quad \text{si } x_{ij}>0; \qquad t^*_{ij}=0 \quad \text{si } x_{ij}=0$$

El problema es encontrar entre todas las posibles soluciones $X'=[x_{ij}]$ y su asociada matriz de tiempos $T'=[t_{ij}]$, alguna de la cuál el t^*_{ij}, que es el mayor tiempo en la distribución del i-ésimo origén al j-ésimo destino este tome el valor más pequeño.

Observación: La condición (3) restringe a que el Problema del Transporte esté balanceado, en caso de que no lo esté, se le puede aumentar un destino ó un origen, ficticio como se explicará en la sección 3.1.

En la siguiente sección con el planteamiento y formulación del PTRC y del PTRT analizados anteriormente, estamos en condiciones para enumerar las diferencias y características de cada problema en particular.

1.7 DIFERENCIAS ENTRE EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE CON RESPECTO AL COSTO Y EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE CON RESPECTO AL TIEMPO.

Tanto enel PTRC como en el PTRT se minimiza algún recurso, para los dos problemas se utilizan algoritmos diferentes de solución, ya que al tratar de minimizar los tiempos en la distribución de algún producto, la expresión $t_{ij}x_{ij}$ usando el algoritmo para minimizar costos, no tiene sentido. Por ejemplo, eslo mismo enviar 10 unidades a enviar una unidad de cierto producto si se consideran los tiempos.

En el PTRC, es de interés primordial determinar cuantas unidades de producto se van a enviar de cierto origen a un destino determinado suponiendo que se tiene un costo por transportar una unidad de producto de cada punto suministro a cada punto de consumo, en cambio en el Problema del Transporte tomando en cuenta el Tiempo no interesa el número de unidades a transportar, pués se supone que el tiempo de transporte no depende del tamaño del lote a transportar.

Cuando trabajamos con el Problema del Transporte considerando los Costos nos interesa que la distribución total se haga con la menor inversion económica posible, en cambio, cuando se toma en cuenta el tiempo se requiere hacer ciertos ajustes en la distribución de tal suerte que el viaje que requiere mayor tiempo en su distribución sea en el menor posible.

Al analizar los ejemplos 1.2.2 y 1.2.3 observamos que lo único que se modifica es el objetivo a optimizar, quedando las restricciones del problema iguales por lo tanto, para encontrar la solución factible inicial utilizaremos el mismo proceso y al iterar el proceso de solución óptima en los dos problemas, se pasa de una solución factible a otra mejorando la función objetivo en cada paso, como estudiaremos más adelante en este trabajo. Debido a que los procesos de solución son muy parecidos, contemplaremos primero teóricamente el PTRC y después lo haremos con el Problema del Transporte considerando los Tiempos.

CAPITULO II

TEORIA BASICA DEL PROBLEMA DEL TRANSPORTE CON RESPECTO A LOS COSTOS.

En este capítulo presentaremos una estructuración teórica del Problema del Transporte, demostrando algunas propiedades que satisfacen la matriz de los coeficientes de las restricciones del problema, que nos ayudarán posteriormente en el capítulo III a encontrar la solución óptima del Problema.

Una vez logrados los objetivos que nos proponemos en este capítulo, habremos construido un marco teórico del Problema del Transporte que nos garantice matemáticamente que los resultados obtenidos son realmente una solución óptima del problema.

Cabe agregar que los aspectos teoricos de este capitulo se utilizan tambien para resolver el PTRT.

2.1 ESTRUCTURA DE LA MATRIZ DE LOS COEFICIENTES TECNOLOGICOS DEL PROBLEMA DEL TRANSPORTE.

En esta sección analizaremos las restricciones que se obtienen en la formulación del Problema del Transporte con m puntos de suministro y n puntos de consumo. Aprovechando la estructuración que tiene la matriz de coeficientes tecnológicos del Problema del Transporte, obtendremos un método alterno al Simplex para obtener la solución óptima del Problema, con menos cálculos en cada iteración, como veremos en el capítulo III de este trabajo.

Las restricciones del Problema del Transporte después de agregar las variables de holgura forman un Sistema de Ecuaciones Lineales que tiene la siguiente forma:

$$
\begin{array}{llllll}
x_{11}+x_{12}+\dots+x_{1n}+ & & & & & =a_1 \\
 & x_{21}+x_{22}+\dots+x_{2n} & & & & =a_2 \\
 & & & & & \\
 & & & +x_{m1}+x_{m2}+\dots+x_{mn} & & =a_m \\
x_{11} & +x_{21} & & +x_{m1} & & =b_1 \\
\quad +x_{12} & \quad +x_{22} & & \quad +x_{m2} & & =b_2 \\
 & & & & & \\
\qquad +x_{1n} & \qquad +x_{2n} & & & +x_{mn} & =b_n
\end{array}
$$

La matriz de los coeficientes para este Sistema de Ecuaciones Lineales tiene la forma:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccccc} P_{11} & P_{12} & & P_{1n} & P_{21} & P_{22} & & P_{2n} & & P_{m1} & P_{m2} & & P_{mn} \end{array} \\
A= & \begin{bmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

A la matriz anterior suele llamarsele matriz de Transporte.

OBSERVACIONES DE LA ESTRUCTURA DE LA MATRIZ A.

a) Las componentes de la matriz A constan únicamente de ceros y unos.

b) Cada columna de la matriz A tiene dos unos y los demás coeficientes son ceros.

c) En la parte inferior de la matriz A se forman submatrices identidades de tamaño nxn.

d) En cada renglón, de los m primeros de la matriz A, se tienen n unos consecutivos y los demás son ceros.

Como se observa, la matriz A de coeficientes tecnológicos del Problema del Transporte tiene una estructura especial, este hecho es de suma importancia, pués nos facilitará los cálculos para llegar a la solución óptima del problema.

Por su estructura la matriz A tiene diversas propiedades, entre ellas está el que cualquier renglón de los m+n de la matriz A, se puede expresar en combinación lineal de los m+n-1 restantes, lo que nos indica que son Linealmente

Dependientes.

Por ejemplo, de la matriz A, el renglón uno se puede expresar en Combinación Lineal de los m+n-1 restantes, como sigue:

$$R_1 = R_{m+1} + R_{m+2} + \ldots + R_{m+n} - R_2 - R_3 - R_4 - \ldots - R_m$$

Esta propiedad es debido a que todo lo que se suministra en los m orígenes es igual a lo que se demanda en los n destinos, en otras palabras

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

En los problemas de Programación Lineal las bases juegan un papel muy importante en la solución del problema que se esta trabajando, y siendo el Problema del Transporte un problema de Programación Lineal clásico, la estructura determinará propiedades adicionales de las bases, por lo tanto, a continuación comentaremos sobre las bases del Problema del Transporte.

2.2 RANGO DE LA MATRIZ DEL PROBLEMA DEL TRANSPORTE.

En el Método Símplex se empieza con una solución inicial completando una base ficticia. Después, se implementa este método Simplex hasta llegar a una solución óptima (sí es que existe) y en cada paso se cambia de una base a otra. Por lo anterior cuando se trabaja con un Problema de Programación Lineal es de interés saber cuáles vectores componen la base. Para el Problema del Transporte el número de vectores Linealmente Independientes que se involucrán en cada solución es igual a m+n-1 como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema. Una base en el Problema del Transporte consta de $m+n-1$ vectores Linealmente Independientes.

Demostración. Para la prueba del teorema basta encontrar una submatriz B de A de $m+n-1\times m+n-1$ que tenga inversa*.

De la matriz A del Problema del Transporte podemos eliminar algún renglón, pués como comentamos anteriormente los $m+n$ renglones son Linealmente Dependientes. Por tal razón descartemos el primer renglón y escojamos algunas columnas de la matriz A, de tal manera que nos queden unos en la diagonal principal. Por ejemplo, elijamos las columnas P_{21}, P_{31} , P_{41} , y así sucesivamente hasta P_{m1} y continuamos con las columnas P_{11}, P_{12}, y así sucesivamente hasta la columna P_{1n} y obtenemos la submatriz B de A con la siguiente estructura

$$B=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} P_{21} & P_{31} & P_{41} & \cdots\cdots P_{m1} & P_{11} & P_{12} & \cdots\cdots P_{1n} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots\cdots 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots\cdots 1 & 1 & 0 & \cdots\cdots 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots 0 & 0 & 1 & \cdots\cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ m \\ m+1 \\ m+2 \\ \vdots \\ m+n \end{array}$$

* Resultados de Algebra Lineal.

Observese que B es de m+n-1 renglones con m+n-1 columnas, la matriz B se puede expresar en forma campacta de la manera siguiente:

$$B=\left[\begin{array}{c|c} I_{m-1\times m-1} & 0_{m-1\times n} \\ \hline 1_{1\times m-1} & \\ \cline{1-1} 0_{n-1\times m-1} & I_{n\times n} \end{array}\right]$$

Donde:

I -Es la matriz identidad.

0 -Es la matriz cero.

1 -Es la matriz renglón que consta de unos.

Como B es triangular, su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal y por lo tanto es diferente de cero entonces B tiene inversa* y con esto se demuestra el teorema.

Ilustraremos el resultado anterior con un ejemplo donde se tienen dos puntos de suministros y tres puntos de consumo.

$$\begin{array}{cccc|ccc}
x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & & & & =6 \\
\cline{1-4}
\multicolumn{1}{|c}{} & & & x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & =4 \\
\multicolumn{1}{|c}{x_{11}} & & & x_{21} & & & =5 \\
\multicolumn{1}{|c}{} & x_{12} & & & x_{22} & & =2 \\
\multicolumn{1}{|c}{} & & x_{13} & & & x_{23} & =3 \\
\cline{1-4}
\end{array}$$

Tomemos la submatriz B de A que la obtenemos de los coeficientes de las restricciones de las variables encerradas en el recuadro del ejemplo prototipo y veamos que la matriz B es no singular ya que su determinate es diferente de cero.

Para encontrar una submatriz B de A de tamaño 2+3-1x2+3-1 (m+n-1xm+n-1), denotemos por P_{ij} a la columna de la matriz asociada a la variable x_{ij}, para el ejemplo, escojamos las columnas P_{11}, P_{12}, P_{13} y P_{21} de la matriz A, obteniendose

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} P_{21} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \end{array} \\
B= & \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\end{array}
$$

Observese que si se cálcula el determinante de B a lo largo de la columna P_{21} su determinante es distinto de cero lo cuál nos garantiza que tiene inversa.

Otra de las propiedades con las que goza la matriz A del Problema del Transporte, es que el valor del determinate de cualquier submatriz cuadrada es 0, 1 ó -1 que es una de las características más importantes. Debido a esta propiedad, es posible encontrar un método alterno al Simplex con el cual,se puede llegar a la solución óptima con menos iteraciones.

En la siguiente sección detallaremos la demostración de este hecho.

2.3 UNIMODULARIDAD DEL LA MATRIZ A DEL PROBLEMA DEL TRANSPORTE

La matriz A del Problema del Transporte, por su estructura tiene un gran número de propiedades entre las cuales se encuentra la **UNIMODULARIDAD TOTAL**. Una matriz A diremos que es de unimodularidad total si para cualquier submatriz B su determinante es +1, -1 ó 0. Para el caso de la matriz A del Problema del

Transporte, como sus componentes son ceros y unos entonces, para toda submatriz de 1X1 el valor de su determinante es cero ó uno. En el caso de que la matriz B sea de tamaño m+nxm+n el valor de su determinante es cero puesto que sus renglones son Linealmente Dependientes. Lo que restaría demostrar que el determinante de B cumple con esta propiedad donde el tamaño de B es de kxk con

$$0<k<m+n-1$$

Demostraremos que toda submatriz B_{kxk} de A cumple con la condición de que su determinante tiene el valor de 0, +1 ó -1. La demostración se hará por el Método de Inducción Matemática.

Se sabe que el determinante de B cuando su tamaño es de 1X1 es igual a 0 ó 1. Consideremos verdadera la propidad cuando B es de tamaño K-1XK-1. En La matriz B puede ocurrir que cada columna no tenga unos, que tenga un uno ó que posea dos unos. Si alguna columna tiene solo ceros entonces el determinante de la matriz B es igual a cero. En el caso de que alguna columna de B contenga un sólo uno entonces, desarrollando el determinante por menores obtenemos:

$$\det B_{kxk} = \pm \det B_{k-1xk-1}$$

y como la matriz B de tamaño k-1xk-1 cumple con esta propiedad entonces el det B_{kxk} también la cumple. En el caso de que cada columna conste de dos unos entonces un uno ocurre en un renglón origen y el otro uno en el renglón destino, en este caso la suma de los renglones orígenes es igual a la suma de los destinos, por lo tanto los renglones son Linealmente Dependiente, es entonces que el determinante de la matriz B es igual a cero y es lo que se quería demostrar.

2.4 TRIANGULARIDAD DE LA MATRIZ BASICA

Como es sabido de Algebra Lineal, si se tiene un Sistema de Ecuaciones Lineales (SEL) y se lleva a la matriz de sus coeficientes en su forma escalonada con operaciones elementales, es muy fácil encontrar la solución del Sistema Ecuaciones Lineales en forma recursiva de sustitución hacia atrás. A continuación demostraremos que si se tiene una submatriz básica **B** de la matriz **A** de coeficientes de las restricciones del Problema del Transporte, siempre es posible llevarla a la forma escalonada. Este resultado facilitará los cálculos cuando utilizemos el método Símplex en la solución del Problema del Transporte, ya que se tienen que resolver tres Sistemas de Ecuaciones Lineales, en partícular el Sistema $BX_B=b$.

Proposición 2.1 Sea **A** la matriz de los coeficientes de las restricciones del Problema del Transporte y **B** una submatriz Básica de **A**, entonces aplicando permutaciones en los renglones y las columnas siempre se puede llevar a la matriz **B** a su forma escalonada.

Demostración. Sea $B_{m+n-1 \times m+n-1}$ una matriz básica del Problema del Transporte y como su determinante es diferente de cero entonces en alguna columna deberá existir sólo un uno, porque de otra forma su determinate sería igual a cero, pero por la propiedad de la sección anterior esto no puede pasar. Haciendo intercambios de renglones y columnas obtenemos

$$B = \begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & B_{m+n-2} \end{bmatrix}$$

Trabajando con la submatriz B_{m+n-2} deberá tener está alguna columna con un solo uno ya que el determinante de la matriz **B** es diferente de cero, intercambiado renglones y columnas obtenemos

$$B_{m+n-2} = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & B_{m+n-3} \end{bmatrix}$$

Siguiendo este proceso para la submatriz B_{m+n-3}

$$B_{m+n-3} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & B_{m+n-4} \end{bmatrix}$$

Consideremos a $r=(r_1, r_2, r_3)$ y $s=(s_1, s_2)$ agrupandolo en una matriz tenemos que

$$B = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_2 & r_3 \\ 0 & 1 & s_1 & s_2 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{bmatrix}$$

Siguiendo con este proceso y dado que m y n son finitos llegaremos después de hacer varias iteraciones, a la matriz en forma triangular y es lo que se quería demostrar.

Consideremos el ejemplo de la sección 2.2 para ilustrar la anterior proposición. Sea **A** la matriz del Problema del Transporte con dos origenes y tres destinos

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \end{array} \\
A= & \left[\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Por comentarios que hemos vertido anteriormente, el primer renglón se puede omitir, ya que se puede expresar en combinación lineal de los demás, es decir, $R_1=R_3+R_4+R_5-R_2$, con esta modificación obtenemos:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \end{array} \\
A'= & \left[\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

De la matriz **A'** elijamos las columnas P_{11}, P_{12}, P_{13} y P_{21} para obtener la matriz de m+n-1xm+n-1, que en este caso sería:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{21} \end{array} \\
B= & \left[\begin{array}{cccc}
0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

En el ejemplo, la solución para las variables básicas las obtenemos del conjunto de restricciones siguiente

$$
\begin{array}{|cccc|c}
\hline
 & & & x_{21} & =4 \\
x_{11} & & & x_{21} & =5 \\
 & x_{12} & & & =2 \\
 & & x_{13} & & =3 \\
\hline
\end{array}
$$

Observese que son los coeficientes de las restricciones encerradas en el recuadro del ejemplo prototipo cuya solución es

$$x_{21}=4$$

$$x_{11}=5-x_{21}$$

$$x_{12}=2$$

$$x_{13}=3$$

Como se observa podemos resolver este Sistema de Ecuaciones Lineales en forma recursiva, por la triangularidad de la matriz y se obtendrá una solución para las variables básicas.

La propiedad de triangularidad de las matrices básicas es de gran importancia ya que se pueden conocer rápidamente los valores de las variables básicas.

Cuando utilizamos el Método Simplex en cualquier Problema de Programación Lineal, se tienen que resolver dos Sistemas de Ecuaciones Lineales, un izquierdo y un derecho en cada iteración del método. En el Problema del Transporte por ser un Problema clásico de la Programación Lineal, y por tener la propiedad de triangularidad se ahorran considerablemente cálculos excesivos al resolver los Sistemas de Ecuaciones Lineales.

La solución del Problema del Transporte siempre asumirá valores enteros si las ofertas y las demandas son enteros. Lo anterior se justifica, ya que para arreglar a la matriz básica a su forma triangular únicamente se utilizarón intercambios de renglones y de columnas, además los coeficientes de las x_B son unos, es por ello que siempre obtenemos valores enteros. Otra forma de visualizar lo anterior es utilizando la regla de Cramer, para conocer el valor de cada una de las variables básicas por medio de la expresión:

$$x_{ijk} = \frac{\det B_k}{\det B}$$

Donde b_k se obtiene reemplazando la k-ésima columna de **B** por la columna P_{ij} de la matriz **A**.

Por la propiedad de unimodularidad de la matriz **A**, el valor de los determinantes serán +1 ó -1, por lo anterior cualquier variable básica asumirá valores enteros.

En la siguiente sección expondremos algunos conceptos elementales de los que haremos uso en los siguientes apartados de este trabajo.

2.5 DEFINICIONES BASICAS Y PROPIEDADES DE LOS ARREGLOS

Consideremos la tabla 2.5.1 que suele llamarsele tabla del Problema del Transporte, que es una forma práctica que simplifica y ahorra considerablemente espacio en los cálculos, para llegar a la solución óptima del Problema del Transporte, y apoyados en ésta ilustraremos las definiciones y propiedades que a continuación enunciaremos

D E M A N D A S

S U M I N I S T R O S

j / i	b_1	b_2	b_3	...	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	...	c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	...	c_{2n} x_{2n}
a_3	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	...	c_{3n} x_{3n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	...	c_{mn} x_{mn}

tabla 2.5.1

En el primer renglón de la tabla 2.5.1 se escriben cada una de las demandas de los puntos destinos y en la primera columna la cantidad de producto que puede abastecer cada punto de suministro, en los demás rectángulos de la tabla nos muestran el precio que se tiene al transportar una unidad de producto de cierto origen a un determinado destino y la cantidad de producto que se debe enviar, es decir, en la tabla del Problema del Transporte a cada celda le corresponde una variable x_{ij} de la matriz solución **X** y un c_{ij} de la matriz de costos **C**.

Por ejemplo en el rectángulo que se encuentra en el cuarto renglón tercera columna de la tabla 2.5.1

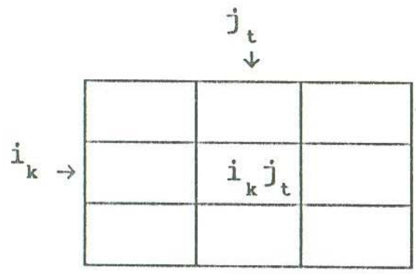
c_{32} x_{32}

nos indica el costo de enviar una unidad de producto del tercer origen al segundo punto de demanda y además la cantidad de producto que debería enviarse. La interpretación para los demás rectángulos es análoga.

Para desarrollar algunas definiciones supondremos que $m \leq n$, ya que, por lo general, cuando se trabaja con Sistemas de Ecuaciones Lineales, el número de ecuaciones es menor ó igual al número de variables.

Definición 1. Una celda es una pareja de números naturales $i_k j_t$.

Graficamente:



La pareja de números $i_k j_t$ representa la celda que esta en el renglón i_k columna j_t.

tabla 2.5.2

Definición 2. Un arreglo es una colección de celdas. A un arreglo que tenga la forma:

$i_1 j_1,\ i_1 j_2,\ i_2 j_2,\ i_2 j_3 \ldots$ se le llama **cadena**.

Ilustraremos geometricamente el anterior concepto, ayudado con la tabla 2.5.3

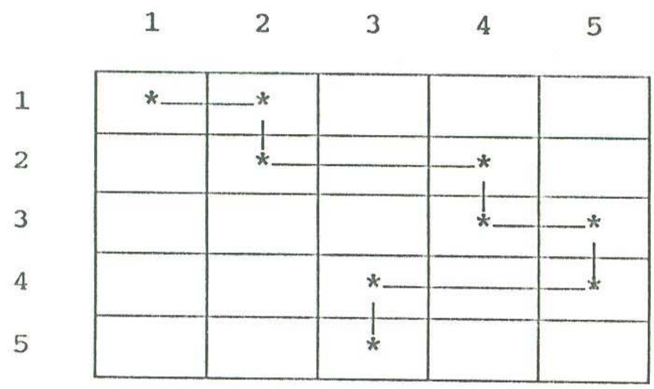


tabla 2.5.3

La cadena que se representa en la tabla 2,5,3 sería:

$$i_1j_1,\ i_1j_2,\ i_2j_2,\ i_2j_4,\ i_3j_4,\ i_3j_5,\ i_4j_5,\ i_4j_3,\ i_5j_3.$$

Observese que para formar una cadena es necesario que cuando menos dos renglones y dos columnas consecutivos sean considerados en la tabla del Problema del Transporte.

Definición 3. A una cadena que tenga la forma

$$i_1j_1,\ \ i_1j_2,\ldots,i_tj_t,\ \ i_tj_1$$

le llamaremos **cadena cerrada.**

Definición 4. A cualquier cadena cerrada le llamaremos **ciclo** y los ciclos los denotaremos con @.

Definición 5. Diremos que un arreglo es **cíclico** si tiene por lo menos un ciclo de lo contrario le llamaremos acíclico.

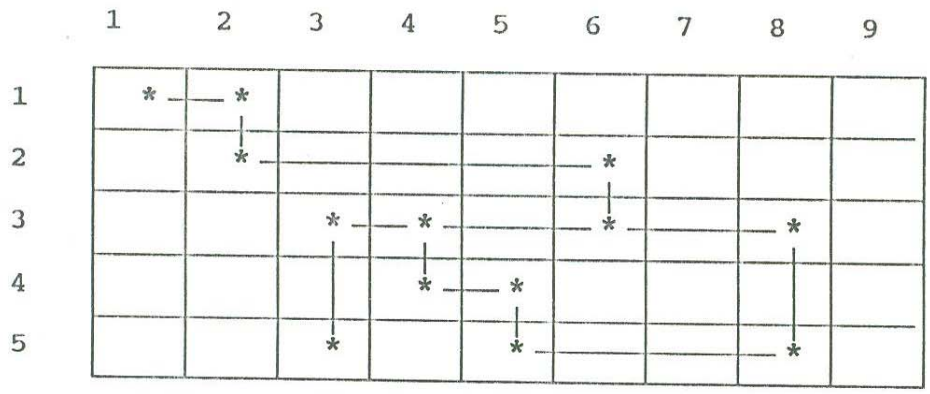


figura 2.5.4

La fígura 2.5.4 muestra una cadena cíclica. El ciclo de la fígura estaría representado por:

$$i_3j_4,\ i_3j_6,\ i_3j_8,\ i_5j_8,\ i_5j_5,\ i_4j_5,\ i_4j_4.$$

Los elementos de un ciclo se enumerarán en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj.

Definición 6. Sea el ciclo:

$$i_1j_1,\ i_1j_2,\ldots,i_tj_t,\ i_tj_1.$$

Los elementos con índices de la forma i_kj_k comprenden la **Semicadena Impar** $@_i$ de otra forma comprenden la semicadena par $@_p$.

De tal forma que de la cadena anterior los elementos

$$i_1j_1,\ i_2j_2,\ldots,i_tj_t.$$

Son los elementos de la **Semicadena Impar** $@_i$, y los elementos restantes comprenden la **Semicadena Par** $@_p$.

Consideremos la figura 2.5.4 para aclarar las anteriores definiciones.

Para etiquetar los elementos del ciclo se elige el primer elemento arbitrariamente y a partir de éste se siguen etiquetando los demás siguiendo el movimiento de las manecillas del reloj. Para nuestro ejemplo elijamos como primer elemento la casilla i_5j_8 y enumerando las demás casillas quedaría i_5j_5, i_4j_5, $i_4j_4, i_3j_4 i_3j_6$ e i_3j_8 donde los elementos i_5j_8, i_4j_5, i_3j_4, $i_3j_8$representan la semicadena impar y los elementos restantes comprenden la semicadena par.

En el proceso para encontrar la solución del Problema del Transporte los arreglos acíclicos de m+n-1 juegan un papel muy importante ya que hacen las veces de una base del Método Simplex para un Problema de Programación Lineal y como el Método de Combinatoria que utilizaremos en la solución del Problema del Transporte es una modificación del Método Simplex dedicaremos esta sección a definir y justificar algunas propiedades que tienen los arreglos y en la sección 2.6 discutiremos la analogía que éstos tienen con las Bases.

Antes de dar una definición formal de lo que es una solución básica, ilustraremos la relación entre un vector columna de la matriz **A** y una celda en la tabla del Problema del Transporte.

Consideremos nuevamente la matriz **A** de los coeficientes de las variables del Problema del Transporte

$$A=\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccc} P_{11} & P_{12} & & P_{1n} & P_{21} & P_{22} & & P_{2n} & & P_{m1} & P_{m2} & & P_{mn} \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots\ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots\ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\
1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots\ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots\ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\
\vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \\
0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots\ldots & 1 & 0 & \ldots & 1
\end{bmatrix}
\end{array}$$

La celda (s,t) corresponde a un vector columna de la matriz **A** que tiene la siguiente forma:

$$P_{st}=e_s+e_{m+t}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{Posición } s \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{Posición } m+t \\ \\ \\ \end{array}$$

(Donde m es el # de origenes del PT)

Las definiciones y propiedades siguientes tienen una estrecha relación con el conjunto de vectores Linealmente Independientes, esta relación la estudiaremos en la siguiente sección.

Definición 7. Denotaremos con **M** a un Arreglo acíclico de m+n-1 celdas.

Propiedad 1. Sea M_1 un arreglo de longitud (m+n-1) acíclico y supongamos que $(i,j) \notin M_1$. Entonces el arreglo M_2 obtenido agregando (i,j) al M_1 contiene uno y solo un ciclo.

Demostración. Consideremos el arreglo M_1 acíclico como el conjunto de vectores $M_1=\{P_1, P_2,...,P_{m+n-1}\}$ Linealmente Independientes en el espacio R^{m+n-1}, lo que se tiene que demostrar es que cualquier arreglo que tenga la forma $M_2=\{A_1,A_2,...,A_K\}$ con k>m+n-1 en al menos un número entero es Linealmente Dependientes en el espacio R^{m+n-1} y tiene al menos un ciclo.

Como $A_1,A_2,...,A_K$ son Linealmente Dependientes, es decir, que en la combinación lineal

$$\alpha_1 A_1+\alpha_2 A_2+...+\alpha_k A_K=0 \qquad (1)$$

existe al menos algún $\alpha_i \neq 0$ $i=1,2,3,...,k$

Por ser M_1 Linealmente Independiente se tiene que cada vector de M_2 lo podemos expresar en combinación lineal de los vectores de M_1, es decir

$$\begin{aligned} A_1&=a_{11}P_1+a_{12}P_2+...+a_{1m+n-1}P_{m+n-1} \\ A_2&=a_{21}P_1+a_{22}P_2+...+a_{2m+n-1}P_{m+n-1} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (2) \\ A_k&=a_{k1}P_1+a_{k2}P_2+...+a_{km+n-1}P_{m+n-1} \end{aligned}$$

Del Sistema de Ecuaciones Lineales (2) la igualdad (1) la podemos expresar de la forma:

$$\alpha_1(a_{11}P_1+a_{12}P_2+\ldots+a_{1\,m+n-1}P_{m+n-1})+$$
$$\alpha_2(a_{21}P_1+a_{22}P_2+\ldots+a_{2\,m+n-1}P_{m+n-1})+\ldots+ \qquad (3)$$
$$\alpha_k(P_{k1}+a_1\ P_{k2}+\ldots+a_{k\,m+n-1}\ P_{m+n-1})=0$$

De la igualdad (3) tenemos que

$$a_{11}\quad \alpha_1+a_{21}\quad \alpha_2+\ldots+a_{k1}\quad \alpha_k=0$$
$$a_{12}\quad \alpha_1+a_{22}\quad \alpha_2+\ldots+a_{k2}\quad \alpha_k=0 \qquad (4)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{1\ m+n-1}\alpha_1+a_{2\ m+n-1}\alpha_2+\ldots+a_{k\ m+n-1}\alpha_k=0$$

Por demostrar como mencionamos anteriormente que algún $\alpha_i \neq 0$ $i=1,2,3,\ldots,k$.

Dado este Sistema de Ecuaciones Lineales (4) tiene más variables que ecuaciones, entonces,por un resultado de Algebra Lineal, este Sistema de Ecuaciones Lineales tiene más soluciones que la trivial, por lo tanto el arreglo M_2 es Linealmente Dependiente y por el resultado de la proposición 2.2 tiene al menos un ciclo y es lo que se quería demostrar.

Lo anterior lo podemos visualisar geometricamente, es decir, en la solución que tenemos, existe un conjunto de arcos de los m origenes a los n destinos y al agregarle otro, alguno de los que ya tenemos tiene que ser eliminado.

Para aclarar la anterior propiedad consideremos la siguiente tabla:

	1	2	3	4	5
1	B	B			
2		B		B	
3				B	B
4			B		B
5			B		

Tabla 2.5.5

Analizando esta tabla observamos que no tiene ciclos y que es un arreglo de longitud m+n-1. Si le sumamos una celda cualesquiera que esta sea obtenemose uno y solo un ciclo.

Por ejemplo, agregandole la celda (i_4, j_1) obtenemos la tabla 2.5.6 con un solo ciclo

	1	2	3	4	5
1	B	B			
2		B		B	
3				B	B
4	B		B		B
5			B		

Tabla 2.5.6

Propiedad 2. Suponga que $(i_k, j_t) \neq (i, j)$ y que $(i_k, j_t) \in$ @ entonces el arreglo M_3 obtenido a partir de M_2 excluyendo la celda (i_k, j_t) nuevamente es un arreglo de longitud m+n-1 acíclico.

La demostración de esta propiedad es de forma análoga que la prueba de la propiedad anterior.

Esta propiedad se puede verificar en la tabla 2.5.6

Observese que los arreglos M_1 y M_2 de las tabla 2.5.5 y 2.5.6 respectivamente difieren de una sola celda.

Cuando se trabaja con un problema de Programación Lineal y se utiliza el Método Simplex, para resolverlo a cada solución factible es asociada una base. Cuando se pasa a otra solución cambia la base en un vector y se dice entonces que las bases son adyacentes. Las definiciones siguientes nos muestran como se relaciona el método que usaremos con los conceptos anteriores.

Definición 8. Dos arreglos de longitud (m+n-1) acíclicos que difieren de una sola celda se dice que son Adyacentes.

Definición 9. Los x_{ij} iguales a cero y para los cuales $(i,j) \in M$ se llaman ceros seleccionados. (para algún M de longitud m+n-1)

Los $x_{ij} \neq 0$ de una solución básica X junto con los ceros seleccionados (Para algún arreglo M de longitud m+n-1 acíclico que contiene todas aquellas (i,j) para las cuales $x_{ij} \neq 0$) se le llama **SELECCION DE X.**

Los elementos c_{ij} de la matriz **C** correspondiente a los elementos de una selección X se denomina **SELECCIONADOS POR X.**

Cuando estamos trabajando con el método Símplex para resolver un Problema de Programación Lineal se cambia de una base a otra de tal manera que la solución se mejore en cada iteración.

En la siguiente sección analizaremos como cambiar de base utilizando la tabla del Problema del Transporte sín resolver Sistemas de Ecuaciones Lineales, utilizando arreglos acíclicos de m+n-1 elementos, ilustrados en la tabla de Problema del Transporte. El interés en su estudio, es debido a la gran importancia que enmarcan en la solución del problema que estamos estudiando, pués corresponden a un conjunto de vectores Linealmente Independiente y los arreglos cíclicos en la tabla del Transporte se asocia un conjunto de vectores Linealmente Dependientes.

2.6 SOLUCIONES BASICAS EN EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE

Como en cualquier problema de Programación Lineal, las iteraciones del Problema del Transporte estan basada en cambios de base para cada solución posible.

La siguiente definición nos muestra qué columnas ó celdas elegir de la matriz **A** para tener una solución factible.

Definición 10. Le llamaremos Solución Básica a cualquier vector de m+n-1 componentes que satisfacen las restricciones del Problema del Transporte.

Proposición 2.2 Una Solución Básica X, presentada en la forma de una matriz cuyos elementos diferentes de cero, forman un Arreglo Acíclico en la tabla del Problema el Transporte.

Demostración. Probaremos por contradicción, es decir, supondremos que los vectores básicos forman un ciclo en la tabla del

Transporte y se llegará a una contradicción.

Consideremos el ciclo de la siguiente tabla

	w	q			z
u	i_u * j_w	i_u * j_q			
r		i_r * j_q			i_r * j_z
t	i_t * j_w				i_t * j_z

El ciclo representado en este cuadro es

$$i_u j_w,\ i_u j_q,\ i_r j_q,\ i_r j_z,\ i_t j_z,\ i_t j_w.$$

Al expresar los vectores del ciclo en combinación lineal obtenemos

$$i_r j_q - i_r j_z + i_t j_z - i_t j_w + i_u j_w - i_u j_q.$$

$$(e_r+e_{m+q})-(e_r+e_{m+z})+(e_t+e_{m+z})-(e_r+e_{m+w})+(e_u+e_{m+w})-(e_u+e_{m+q})=0$$

Lo cual nos indica que los vectores son Linealmente Dependientes (LD) es por eso que estos vectores no pueden estar en una base.

En conclusión, ninguna base del Problema del Transporte, representadas en la tabla del transporte puede contener ciclos, y por lo tanto las Soluciones Básicas tienen que ser arreglos acíclicos de m+n-1 componentes, como lo demostraremos en la siguiente sección.

En el método Símplex para cada solución factible se tiene asociado un conjunto de vectores Linealmente Independientes, cuando se cambia de solución, en el fondo lo que se hace es sacar un vector de este conjunto y cambiarlo por otro, mejorando así la solución del problema. Para el caso del Problema del Transporte se sigue un proceso análogo al Método Símplex. Por ejemplo,supongamos que el vector P_{xy} no se encuentra en la base y el objetivo es expresarlo en términos de los que estan en la base, debe existir un vector básico P_{xl} con un +1 en la posición i. Luego debe existir un vector de la forma P_{wl} con un -1 en la posición m+1 en la representación básica. Además debe existir otro vector básico de la forma P_{wu} que tenga un +1 en la posición w, para eliminar el -1 de la suma básica del vector anterior, este proceso se continua hasta encontrar en la base el vector P_{ky} con un +1 en la posición m+y. Lo anterior lo podemos resumir en:

$$P_{xy}=P_{xl}-P_{wl}+P_{wu}-P_{ku}+P_{ky}$$

Expresado cada vector en forma canonica se tiene

$$e_x+e_{m+y}=e_x+e_{m+l}-e_w-e_{m+l}+e_w+e_{m+u}-e_k-e_{m+u}+e_k+e_{m+j}$$

En forma compacta lo podemos representar de la forma

$$P_{xy}=\sum_{k=1}^{m+n-1}\propto_k B^k$$

Donde B^k son los vectores que estan en la base y los $\propto_k$ son los coeficientes de combinación lineal que asumen el valor de +1 ó -1. Tomará el valor de cero si existe algún vector que está en la base que no se utilizó para representar al vector P_{xy}.

Lo anterior, podemos representar en la tabla del Transporte, utilizando para ello la reprentación en celdas como lo muestra la siguiente figura:

	$i_w\ j_u$ B			$i_w\ j_t$ B	
$i_k\ j_y$ B	$i_k\ j_u$ B				
$i_x\ j_y$ *				$i_x\ j_l$ B	

Tabla 2.6.1

En la tabla 2.6.1 la celda $i_x\ j_y$, que no está en el arreglo acíclilo (tiene un esterisco), es expresado por las celdas que están en el arreglo acíclico (celdas que tienen una B).

Observese que se han incluido únicamente aquellas celdas del arreglo que se utilizaron para representar la celda $i_x j_y$ que no se encontraba en la base.

2.7 CONDICIONES QUE DEBEN CUMPLIR LAS SOLUCIONES BASICAS

Para llegar a la solución óptima es necesario considerar arreglos de m+n-1 celdas en las cuales no existan ciclos, esto lo fundamentamos con la siguiente proposición.

Proposición 2.3 Sea X una solución cíclica de elementos x_{ij} entonces existe Y otra solución con un arreglo cíclico de elementos diferentes de cero y_{ij} la cual es tal que $CX \leq CY$ y además la solución Y tiene más elementos diferentes de cero que X.

Donde C es la matriz de costos del Problema del Transporte.

Demostración. Antes de entrar en detalle en la prueba de la proposición aclarararemos la notación a usar:

Consideremos sin perdida de generalidad, que Y tiene un solo ciclo de elementos diferentes de cero. Haciendo una comparación de las sumas de costos en el ciclo $\sum_{@_p} c_{ij}$ y $\sum_{@_i} c_{ij}$ una debe ser mayor a la otra, enumeremosla de tal manera que

$$\sum_{@_p} c_{ij} \geq \sum_{@_i} c_{ij}$$

A partir de la matriz solución Y, generamos otra solución Y' haciendo los siguientes artificios en los elementos del ciclo @:

$$y^{*}{}_{i_1 j_1} = y_{i_1 j_1} + y_{ij}^{min}, \ldots, y^{*}{}_{i_t j_t} = y_{i_t j_t} + y_{ij}^{min}.$$
$$y^{*}{}_{i_1 j_2} = y_{i_1 j_2} - y_{ij}^{min}, \ldots, y^{*}{}_{i_t j_1} = y_{i_t j_1} - y_{ij}^{min}.$$

Donde: $i_1j_1, i_2j_2, \ldots, i_tj_t$, son la celdas de la semicadena impar $@_i$ e $i_1j_2, i_2j_3, \ldots, i_tj_1$ son la de la semicadena par $@_p$; y_{ij} es el valor del menor elemento de la semicadena par $@_p$.

Para todas las celdas ij que se encuentra fuera del ciclo Y sustituyamos $y'_{ij} = y_{ij}$.

La matriz Y' que se obtiene de Y sumando y restando el elemento x_{ij}^{min}, también será solución al Problema del Transporte, esto es debido a que a cada celda lo que estamos haciendo es sumando y restando la misma cantidad, dependiendo, claro, si esta es par e impar.

El número de elementos diferentes de cero en Y' es por lo menos, uno menor que el número de esos elementos en Y. Además

$$(CY') \leq (CY)$$

La desigualdad anterior se puede verificar desarrollando las sumatorias matriciales de los elementos que están en el ciclo y de los que no están incluidas en el ciclo para cada uno de los productos CY' Y CY, es decir

$$CY = CY_{\text{NO ESTAN EN EL CICLO}} + CY_{\text{ESTAN EN EL CICLO}}$$

$$CY' = CY_{\text{NO ESTAN EN EL CICLO}} + CY^{*}_{\text{ESTAN EN EL CICLO}}$$

Lo que tengo que ver es que:

$$CY_{\text{ESTAN EN EL CICLO}} \leq CY^{*}_{\text{ESTAN EN EL CICLO}}$$

$$CY^{*}_{\text{ESTAN EN EL CICLO}} = \sum_{@_i} (y_{ij} + y_{ij}^{min}) c_{ij} + \sum_{@_p} (y_{ij} - y_{ij}^{min}) c_{ij}$$

$$= \sum_{@_i} c_{ij} x_{ij} + \sum_{@_p} c_{ij} x_{ij} + \left[\sum_{@_i} c_{ij} - \sum_{@_p} c_{ij} \right] x_{ij}$$

y como

$$\sum_{@_i} c_{ij} - \sum_{@_p} c_{ij} < 0$$

de aquí que

$$CY' \leq CY$$

Así pues, repitiendo este proceso y después de un número finito de pasos, se llega a una solución X para la cuál no existen ciclos de elementos diferentes de cero. Como los arreglos acíclicos forman una Base, en otras palabras, son un conjunto de vectores Linealmente Independientes que geométricamente corresponden a las esquinas de la región factible y como estamos trabajando con ecuaciones lineales, en alguna de las esquinas encontraremos el óptimo del Problema del Transporte, en base a lo anterior surge el siguiente corolario.

Corolario. Para hallar una solución óptima, es suficiente considerar las matrices con arreglos acíclicos de elementos x_{ij} diferentes de cero.

En los capítulos siguentes aplicaremos los resultados teóricos obtenidos hasta ahora a problemas prácticos, haciendo referencia a qué modificaciones se tienen que hacer para que nuestra teoría se ajuste a problemas de transportar algún producto de varios puntos suministros a un número dado de destinos, en el menor tiempo posible.

CAPITULO III

SOLUCION OPTIMA DEL PROBLEMA DEL TRANSPORTE CON RESPECTO AL COSTO

En el capítulo anterior estudiamos las características que hacen especial al Problema del Transporte y que debido a éstas hace que tenga su propio método de solución, que es más eficiente que el Método Simplex. Al método que hacemos referencia es al Método de Combinatoria que, para problemas con pocos orígenes y destinos, se puede trabajar manualmente.

Este apartado y el siguiente, tienen como finalidad darle una aplicación a la teoría desarrollada en el capítulo II de este trabajo. En la primera sección mostramos la característica principal que debe cumplir el Problema del Transporte para que tenga solución y en las secciones 3.2 y 3.3 desarrollamos el Método que utilizaremos para encontrar la solución básica de inicio. En las secciones subsecuentes estudiamos la forma de encontrar la solución óptima del Problema del Transporte aprovechando las características que éste tiene para la simplificación del proceso.

3.1 BALANCEO DEL PROBLEMA DEL TRANSPORTE

Para encontrar la solución básica inicial al Problema del Transporte utilizando cualquier método, es necesario que el número de unidades de producto que suministran los m orígenes sea igual al número de unidades de producto que demandan en los n destinos. Cuando cumple esta condición entonces decimos que el PT esta Balanceado.

En problemas prácticos pueden suceder los siguientes casos:

a) Que la oferta sea mayor que la demanda, cuando esto sucede agregamos un destino fictício que absorve el excedente de producto con un costo de envio de cada punto de suministro al destino fictício igual a cero, es decir, cuando $\sum a_i > \sum b_j$ entonces, la cantidad de producto $\sum a_i - \sum b_j$ será enviado a b_{n+1} con $c_{i,n+1} = 0$ $i=1,\dots,m$.

b) Cuando se presenta la situación en que la demanda sea mayor que el suministro, para balancearlo agregamos un punto suministro a_{m+1} que abastecerá la demanda $\sum b_j - \sum a_i$.

Normalmente cuando no se cumple con la demanda de un producto asignamos valores adicionales a la distribución, ya que se han pagado mano de obra en el proceso del producto no abastecido, por cuestiones teóricas consideraremos los costos de envio iguales a cero, es decir $c_{m+1,j} = 0$ $j=1,\dots,n$

Cuando tenemos el Problema del Transporte balanceado se garantiza que al menos el Problema tiene una solución posible, como lo muestra el siguiente teorema.

teorema 1. Bajo la suposición de que la demanda es igual al suministro de un determinado producto entonces el Problema del Transporte siempre tiene una solución factible.

Demostración. Por demostrar que las restricciones del Problema del Transporte se satisfacen.

Dado que el Problema del Transporte esta balanceado tenemos que

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = k$$

y sea la solución

$$x_{ij} = \frac{a_i \, b_j}{k} \qquad \forall \ (i,j)$$

Las restriccionnes de suministro se satisfacen, como se puede ilustrar algebraicamente, sumando en la solución sobre todos los destinos, es decir

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i \, b_j}{k} = \frac{a_i \sum_{j=1}^{n} b_j}{\sum_{j=1}^{n} b_j} = a_i \qquad i=1,2,3,\ldots,m$$

De igual manera podemos verificar que las restricciones de demanda se satisfacen, sumando sobre todos los puntos suministros de la solución, como se observa

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i \, b_j}{k} = \frac{b_j \sum_{i=1}^{m} a_i}{\sum_{i=1}^{m} a_i} = b_j \qquad j=1,2,3,\ldots,n$$

más aún, si X es un vector factible cada componente x_{ij} está acotado, es decir $x_{ij} = \min \{a_i, \ b_j\}$ y por resultados de Programación Lineal, tenemos que todo Problema de Programación

Lineal acotado con solución factible tiene solución óptima.

Faltaría por demostrar que si el Problema del Transporte tiene solución factible, entonces esta balanceado.

Dado que el PT tiene solución factible cumple con las siguientes restricciones:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i=1,2,\ldots,m \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j=1,2,\ldots,n \qquad (2)$$

En la ecuación (1) sumando sobre todos los origenes y en la ecuación (2) sumando sobre todos los destinos obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i \qquad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (4)$$

Observese la parte izquierda de las ecuaciones (3) y (4) son iguales, esto implica que:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Lo anterior nos indica que el PT esta balanceado y esto es lo que queriamos demostrar.

3.2 SOLUCION BASICA INICIAL.

Cuando se trabaja con un Problema de Programación Lineal, para resolverlo es necesario empezar con una solución inicial, obtenida con el Método de las Dos Fases ó por medio del Método de la Gran M, y después continuar el proceso utilizando el Método

Simplex para llegar a la solución óptima.

Para el Problema del Transporte, por ser un problema clásico de Programación Lineal, también se requiere encontrar una solución inicial, pero por estructura y propiedades con que goza, no utilizaremos los métodos anteriores mencionados.

En la actualidad existen una gran variedad de métodos para obtener la solución inicial del PT, entre los más usados están: El de la Esquina Noroeste y Método de Vogel. Una de las desventajas al utilizar estos métodos es que la solución que generan está muy alejada de la solución óptima.

El Método de Mínimo Costo que presentamos en este trabajo para encontrar la solución básica inicial, tiene la ventaja de que la solución que genera está próxima a la solución óptima, otra de las virtudes del Método de Mínimo Costo es que la solución inicial, siempre el número de variables básicas es igual a $m+n-1$. Lo anterior lo explicaremos en detalle después de presentar los pasos del método.

3.3 METODO DE MINIMO COSTO PARA ENCONTRAR LA SOLUCION INICIAL

En esta sección estudiaremos el Método de Mínimo Costo que usaremos para encontrar la solución inicial al Problema del Transporte.

Para empezar a utilizar el Método de Mínimo Costo, es necesario que el Problema del Transporte este balanceado.

El procedimiento de Mínimo Costo realiza iteraciones a partir de los renglones de la matriz solución X.

PASO 1. Se examina el primer renglón de la matriz de costos C y encontramos el elemento mínimo. Supongamos que es el C_{1J_1}, entonces sustituímos

$$x_{1J_1}=\text{mín}(a_1, b_{J_1})$$

PASO 2. Si $a_1>b_J$, encontramos el siguiente elemento C_1j más pequeño ó igual al anterior en el mismo renglón, que satisfaga la condición $c_{1J_2}\geq c_{1J_2}$, y escribimos

$$x_1j_2=\text{mín}(a_1-x_{1J_1},\ b_{J_2})$$

PASO 3. Se continua con este proceso hasta que el primer suministro se halla agotado, es decir

$$a_1 = \sum_{J=1}^{n} x_{1J}$$

En caso de que el residuo de a_1 sea igual a algún b_{Jk}, entonces sustituímos x_{1J_k} igual a este residuo, $x_{1J_k}=b_{Jk}$ y ponemos ceros en la siguiente celda, es decir, en la siguiente en magnitud c_{1J}.

A continuación pasamos al segundo renglón, repítiendo este procedimiento, después al tercero, y así sucesivamente. Los ceros no se escriben en las columnas cuya cuota ya se ha llenado.

Consideremos el siguiente ejemplo para ilustrar los pasos del Método de Mínimo Costo antes descritos, y a partir de ahora lo tomaremos como el ejemplo prototipo para el análisis en las siguientes secciones.

Sea el Problema de Transportar un determinado producto, desde tres puntos de suministro a cuatro puntos de demanda, los suministros, las demandas de cada origen y cada destino son conocidos, como se muestra en la tabla 3.3.1.

El objetivo es encontrar la primera selección básica.

	D_1	D_2	D_3	D_4	Suministro
O_1	2	3	4	2	20
O_2	1	3	5	4	10
O_3	2	1	4	7	5
Requerimiento →	5	20	5	5	35

Tabla 3.3.1

En la tabla 3.3.1 el último renglón de números nos indican las demandas de producto que tienen los cuatro puntos de consumo y la última columna de números nos señalan la cantidad de producto que puede suministrar cada uno de los orígenes. Los números que se encuentran en los cuadros de la tabla son los costos por enviar una unidad de producto de un determinado origen a un destino dado. Por ejemplo, el número siete que esta en el tercer renglón cuarta columna, nos indica que para enviar una unidad de producto del tercer origen al cuarto destino se tiene un costo de siete unidades, la misma interpretación tienen los otros números.

Iniciaremos por encontrar la solución inicial de este problema.

PASO 1. Analizemos los costos del primer renglón (2,3,4,2).

Observese que el mínimo es el dos que se encuentra en el posición uno y en la posición cuatro, en este caso existen dos mínimos, por lo que tomaremos arbitrariamente el que esta en la posición uno y a la variable x_{11} le asignaremos el mínimo de (20 y 5) en este caso es cinco. Como la demanda del primer punto de consumo ya se abasteció, esta columna no volverá a involucrar en el proceso del Método de Mínimo Costo.

PASO 2. Como el a_1 no se agotó, entonces buscamos el siguiente costo que sea mayor ó igual en magnitud al costo de la casilla elegida anteriormente, en este caso es el dos que se encuentra en la posición $i_1 j_4$ entonces, asignamos a la variable x_{14} el mínimo entre (15 y 5) en este caso es el cinco.

PASO 3. Nuevamente como el a_1 no se agotó buscamos el siguiente costo que sea mayor ó igual en magnitud al costo de la casilla elegida anteriormente, en este caso es el tres que se encuentra en el primer renglón segunda columna, y a esta variable se le asigna el mínimo entre (10 y 20) que para este caso es el diez. Como se ha suministrado todo el a_1 entonces las variables restantes de este renglón quedán sín asignación, además, a partir de ahora ya no se utiliza el primer renglón, la primera y tercera columna (En el Método de Mínimo Costo), como se muestra en la tabla 3.3.2.

	D_1	D_2	D_3	D_4	Suministro
O_1	2 5	3 10	4	2 5	20
O_2	1	3	5	4	10
O_3	2	1	4	7	5
Requerimiento →	5	20	5	5	35

Tabla 3.3.2

PASO 4. A continuación nos pasamos a verificar los costos del segundo renglón que son (1, 3, 5, 4) y observamos que el mínimo es el uno, pero la demanda de esta columna ya se agotó, por lo tanto nos pasamos al siguiente costo mayor ó igual al anterior y este es el tres, asignamos el mínimo de (10 y 10) que son el suministro y consumo del segundo origen y segunda demanda respectivamente, en este caso es el 10, por esto asignamos a $x_{22}=10$, como el a_2 y el b_2 se agotarón simulataneamente, entonces, buscamos el siguiente costo que sea mayor ó igual en magnitud al costo de la casilla elejida anteriormente, en este caso es el 5, que se encuentra en el segundo origen tercer destino y sustituímos $x_{23}=0$, como se ha agotado todo el suministro del segundo origen tenemos la siguiente distribución mostrada en la tabla 3.3.3.

	D_1	D_2	D_3	D_4	Suministro
O_1	2 5	3 10	4	2 5	20
O_2	1	3 10	5 0	4	10
O_3	2	1	4	7	5
Requerimiento →	5	20	5	5	35

Tabla 3.3.3

Pasamos al tercer renglón para hacerle el mismo análisis y así sucesivamente para obtener la distribución básica inicial dada en la tabla 3.3.4

	D_1	D_2	D_3	D_4	Suministro
O_1	2 5	3 10	4	2 5	20
O_2	1	3 10	5 0	4	10
O_3	2	1	4 5	7	5
Requerimiento →	5	20	5	5	35

Tabla 3.3.4

La solución básica inicial es de $x_{11}=5$, $x_{12}=10$, $x_{14}=5$, $x_{22}=10$, $x_{23}=0$, $x_{33}=5$.

El costo para esta distribución es:

$c_1=2(5)+3(10)+2(5)+3(10)+5(0)+4(5)=100.$

Se observa en la tabla 3.3.4 que la solución inicial obtenida no tiene ciclos y además el número de variables que le fuerón asignado valores es igual a m+n-1, es decir, 3+4-1=6.

Si a la primera solución le asociamos otro elemento no escogido, digamos x_{ij} se forma uno y solo un ciclo (esta es una de las propidades de los arreglos).

Observaciones a) Según el proceso que se sigue en el Método de Mínimo Costo, la solución inicial obtenida nunca tiene ciclos, ya que para que exista un ciclo es necesario que un determinado renglón dos columnas en cuya variable se le haya asignado algún valor no sean canceladas. Analizando el proceso de Método de Mínimo Costo esto nunca sucede, es decir en cada iteración siempre existe una y solo una columna que no se cancela, exepto en el último paso ya que agotamos toda la oferta y abastecimos toda la demanda.

b) Utilizando el Método de Mínimo Costo siempre asignamos valores a m+n-1 variables donde m es el número de orígenes y n el número de destinos. Lo anterior se puede observar siguiendo el proceso del Método de Mínimo Costo. Después de cada iteración el número de celdas asignadas siempre es igual al número de columnas canceladas más uno, donde este +1 corresponde a una columna que nunca se cancela exepto en el último paso, es decir

Asignación de cada iteración	Columna cancelada	
K_1	$J_1+\boxed{1}$	
K_2	$J_2+\boxed{1}$	Estos son m+n-1 unos
$\vdots$	$\vdots$	
K_i	$J_i+\boxed{1}$	
$\vdots$	$\vdots$	
K_m	J_m	

Como la asignación no tiene ciclos, entonces las n columnas tienen una asignación, en otras palabras

$$J_1+J_2+\ldots+J_{i+1}+J_m=n$$

por lo tanto

$$J_1+J_2+\ldots+J_{i+1}+J_m+m-1=n+m-1$$

Cuando usamos el Método Símplex para resolver un Problema de Programación Lineal y conocemos la solución inicial asociada con un conjunto de vectores Linealmente Independientes, obtenida a partir del Método de las Dos Fases ó El Método de la Gran M, el proceso que sigue el Simplex es buscar qué vector debe entrar y decidir cuál debe salir, de tal manera que la solución mejore.

Para encontrar la solución básica inicial en el Problema del Transporte no es necesario usar los métodos utilizados en el Simplex y esto se debe a las características especiales con las que goza la matriz de las restricciones del Problema, estudiadas en el capítulo II.

En la siguiente sección determinaremos un proceso para conocer si la solución Básica inicial es óptima y en caso de no ser así, al igual que el Método Simplex, cómo decidir qué celda debe entrar en el arreglo y cuál debe salir, de tal forma que la nueva solución básica este más próxima a la óptima.

3.4 CRITERIO PARA CONOCER SI LA SOLUCION BASICA INICIAL ES OPTIMA.

En la sección anterior se analizó el Método de Mínimo Costo para encontrar la solución inicial. El proceso que sigue es de mostrar con el ejemplo prototipo como pasamos a otra solución más próxima a la solución óptima, y en las secciones siguientes generalizaremos el Problema del Transporte con m origenes y n destinos, demostrando los aspectos teóricos que contemplamos en el proceso.

Sea el ejemplo prototipo de Transportar desde tres origenes y cuatro destinos un determinado producto y consideremos la solución básica inicial obtenida en la sección anterior, como se muestra en la tabla 3.4.1

	D_1	D_2	D_3	D_4	Suministro
O_1	2 5	3 10	4	2 5	20
O_2	1	3 10	5 0	4	10
O_3	2	1	4 5	7	5
Requerimiento →	5	20	5	5	35

Tabla 3.4.1

El costo para esta distribución es

$c_1=2(5)+3(10)+2(5)+3(10)+5(0)+4(5)=100.$

Observese que la primera selección es un arreglo acíclico, que al unirle un elemento que no este contenido en el arreglo, se forma uno y solo un ciclo.

Empezaremos uniendole al arreglo de la solución inicial una casilla que no tiene asignación, para verificar si el costo en la distribución total disminuye y para ello seguiremos los siguientes pasos:

PASO 1. Al ejemplo de la tabla 3.4.1, uniendole a este arreglo cualesquiera de las casillas que no estan en la base, se forma un ciclo, por ejemplo la casilla i_2j_1, formandose el ciclo mostrado en la tabla 3.4.2

2 5	3 10	4	2 5
1	3 10	5 0	4
2	1	4 5	7

Tabla 3.4.2

PASO 2. enumeremos las componentes del ciclo, de la siguiente forma: al costo $c_{21}=1$, que unimos al arreglo le asignamos el número uno y continuamos etíquetando siguiendo la secuencia de las manecillas del reloj, de esta forma a los costos siguientes 2,3 y 3 le corresponden las etíquetas 2,3 y 4 respectivamente.

Los costos de la semicadena impar y par son:

Costos Impares 1 y 3.

Costos Pares 2 y 3.

Observación. Como se recordará de las secciones anteriores, los elementos en un ciclo los enumeramos empezando por el elemento que se está uniendo y siguiendo las manecillas del reloj.

PASO 3. Con los costos impares y pares obtenidos en el paso 2 hacemos el cálculo de la diferencia de la suma de los costos impares con la suma de los costos pares, que los denotaremos por Δ_{21}, es decir

$$\Delta_{21} = (1+3)-(2+3)=-1$$

PASO 4. Cuando verificamos cada una de las casillas no básicas utilizando los cálculos del paso 3, y sí todos ellos resultaran positivos, entonces la solución actual es la óptima. En nuestro ejemplo es negativo, lo cuál nos indica que al entrar a la base la variable x_{21} la solución del problema mejorará.

Al igual que el Método Simplex cuando estamos minimizando un problema, escojemos el coeficiente del costo más negativo lo que nos garantiza que, al entrar a la base esta variable, el método convergerá más rápido a la solución óptima. En nuestro problema, al hacer todas las evaluaciones de las casillas no básicas (paso 3), algunas de estas son negativas, entonces seleccionamos aquella casilla que tenga el valor más negativo para que entre a la base.

La transformación la efectuamos buscando el mínimo de los envios de los elementos pares, después sumamos esta cantidad a los impares y finalmente restamos esta cantidad a los pares (**A esto le llamaremos transladar**) dando comor resultado la distribución mostrada en la tabla 3.4.3

2	3 15	4	2 5
1 5	3 5	5 0	4
2	1	4 5	7

Tabla 3.4.3

Obteniendo los siguientes costo en la distribución:

$$CX=3(15)+2(5)+1(5)+3(5)+5(0)+4(5)=95$$

Observese que el costo disminuyó en 5 unidades y para conocer si estamos en el óptimo tenemos que aplicar nuevamente los pasos uno, dos y tres para las casillas que no consideramos en la segunda solución básica. Finalizaremos con el proceso hasta que en alguna iteración los cálculos del paso 3 son todos positivos, es decir, todos los $\Delta_{ij} \geq 0$.

Observese que este proceso tiene que terminar dado que existen un número finito de casillas.

Cuando hacemos los cálculos de la diferencia de la suma de los costos impares con la suma de los costos pares (paso 3)

$$\Delta_{ij} = \sum_{@_i} c_{ij} - \sum_{@_p} c_{ij}$$

reviste gran importancia en el proceso de encontrar la solución óptima del problema, como se ilustrará en las siguientes secciones.

Después de ilustrar el proceso con el ejemplo anterior, estamos en condiciones de hacer una generalización en la secuencia seguida para obtener la solución óptima.

Consideremos el Problema del Transporte con m orígenes y n destinos de la manera siguiente:

Supongamos que hemos construido la primera solución básica X con el arreglo M_1 y su respectivo producto escalar CX_1, uniéndole un elemento c_{ij} al arreglo M_1, (que no se encontraba en el arreglo), formamos un ciclo.

Denotemos por Δ_{ij} a la diferencia que forman las sumas de los términos impares c_{ij}, con los términos pares c_{ij} del ciclo, es decir

$$\Delta_{ij} = \sum_{e_i} c_{ij} - \sum_{e_p} c_{ij}$$

En la enumeración de los elementos del ciclo tomamos como primer término del ciclo el c_{ij} que unimos al arreglo M_1. En el caso de que algún Δ_{ij} sea menor que cero nos indicaría que la solución anterior no es la óptima.

Se construye una segunda solución básica X_2 tomando el elemento mínimo x_{ij}^{min} de la primera solución básica y transladandolo de la semicadena par hacia la impar.

Entenderemos por **transladar**, al proceso de buscar el elemento x_{ij} mínimo entre todos los que tienen etíqueta par del ciclo, sumandoselos a los impares y restandoselo a los pares.

En el caso que en la semicadena par, existan varios elementos x_{ij} iguales al x_{ij}^{min}, pasamos entonces del arreglo M_1 aquel x_{ij}^{min} que encontramos primero cuando recorremos la semicadena par en el movimientos de las manecillas del reloj, substituyendo por la celda i_1j_1 correspondiente al $c_{i_1j_1}$, encontrado anteriormente X_2 se diferencia de X_1 sólo con la presencia del elemento $c_{i_1j_1}$, entonces CX_2 será menor a CX_1 en:

$$\left[\Delta_{ij}\right] x_{ij}^{min} = \left[\sum_{@_p} c_{ij} - \sum_{@_i} c_{ij}\right] x_{ij}^{min}$$

y será positiva la expresión anterior si

$$\sum_{@_p} c_{ij} \geq \sum_{@_i} c_{ij}$$

Como x_{ij}^{min} puede resultar cero, entonces $CX_1 \geq C'X_2$. Repitiendo este proceso encontramos que la secuencia de soluciones básicas:

$X_1,\ X_2, \ldots, X_k, \ldots$ tales que

$C^1X_1 \geq C^2X_2 \geq \ldots C^kX_k \geq \ldots$ Es una función decreciente.

Las soluciones básicas X_k con arreglo M_k es óptima, si para todo elemento c_{ij} que no es miembro de M_k tenemos que

$$\Delta_{ij} = \sum_{@_i} c_{ij} - \sum_{@_p} c_{ij} \geq 0$$

Cuando calculamos los Δ_{ij} para saber si estamos en el óptimo, realizamos un proceso análogo a calcular los costos normalizados en el Método Simplex.

Nótese que en cada iteración es necesario encontrar todos los ciclos en la tabla del P.T y este proceso resulta complicado cuando el problema es de regular tamaño, es por ello que en la sección 3.8 estudiaremos un Método para determinar los ciclos en la tabla del transporte.

Cuando obtenemos una solución básica inicial acíclica el proceso de unirle una celda a esta solución es la clave para encontrar la solución óptima.

3.5 CRITERIO DE DEGENERACION

En el caso cuando transferimos algún $x_{ij} \neq 0$, la función objetivo disminuye, como analizamos anteriormente con el ejemplo prototipo. Es de pensarse que al transferir un $x_{ij} = 0$ la solución no mejora, es decir, los costos no disminuyen aparentemente, pero esto no sucede, como lo mostraremos en el ejemplo prototipo. Consideremos la solución básica dada en la tabla 3.4.3

2	3 15	4	2 5
1 5	3 5	5 0	4
2	1	4 5	7

Tabla 3.4.3

Observese que a la variable x_{23} le asignamos el valor de cero, decimos entonces que es un problema **Degenerado**. Para este problema al calcular los Δ_{ij} existen algunos menores que cero, lo cual nos indica que no estamos en la solución óptima.

Construyamos un problema alterno al anterior donde la variable x_{23} le asignemos un valor muy pequeño, digamos ϵ diferente de cero. Notese, que los problemas son semejantes cuando el valor de la ϵ es demasiado pequeño. Lo anterior se ilustra en la tabla 3.4.4.

2	3 $15-2\epsilon$	4	2 $5+3\epsilon$
1 5	3 $5+2\epsilon$	5 $-\epsilon$	4
2	1	4 $5+\epsilon$	7

Tabla 3.4.4

La solución básica para el problema alterno es de:

$CX=3(15-\epsilon)+2(5+3\epsilon)+1(5)+3(5+2\epsilon)+5(-\epsilon)+4(5+\epsilon)=95+5\epsilon.$

Calculamos los Δ_{ij} para saber si estamos en la solución óptima y en caso de que no lo esté, decidir qué variable es la que entra a la base.

Para este problema los Δ_{ij} son:

$$\Delta_{11}= 1 \ , \ \Delta_{13}= -1, \ \Delta_{24}= 2, \ \Delta_{31}= 3, \ \Delta_{32}= -1 \text{ y } \Delta_{34}= 4$$

Se observa que las variables candidatas a entrar a la base son x_{12} y x_{32} con igual prioridad, ya que el valor que se le asigna a los Δ_{ij} de estas variables, es el mismo.

Elijamos arbitrariamente x_{13} obteniéndose la nueva solución mostrada en la tabla 3.4.5

2	3 $15-3\epsilon$	4 $-\epsilon$	2 $5+3\epsilon$
1 5	3 $5+\epsilon$	5	4
2	1	4 $5+3\epsilon$	7

Tabla 3.4.5

La solución básica para este caso es:

$CX=3(15-\epsilon)+4(-\epsilon)+2(5+3\epsilon)+1(5)+3(5+\epsilon)+4(5+\epsilon)$

$=95$

Para el problema anterior, aunque la solución no ha mejorado, el hecho de que todas las variables que están en la base x_{ij} tienen asignación diferente de cero, el problema se ha transformado a uno que es no Degenerado y como al hacer las transformaciones de las variables básicas transformando un $x_{ij} \neq 0$, la solución se aproxima en cada iteración cada vez más a la solución óptima, es decir, el costo disminuye en cada iteración.

El análisis hecho en el ejemplo anterior, lo generalizaremos con el resultado del siguiente teorema.

Teorema. Para la matriz $C=[c_{ij}]$ dada, con elementos reales, y $a_i>0$, $b_j>0$, la sucesión de soluciones básicas X_1, $X_2,\ldots,$ $X_k,\ldots$ Conduce, después de un número finito de pasos, a una solución óptima.

Demostración. La prueba de este teorema la dividiremos en dos partes, ya que puede suceder:

Primero. que en la sucesión de soluciones básicas no existan elementos cero.

Segundo. que en la sucesión de soluciones básicas existan elementos cero.

CASO 1. Sea la sucesión de soluciones básicas $X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots$ donde ninguna de ellas tiene término cero, entonces el término x_{ij}^{min} que transladamos a lo largo de la cadena, deberá ser diferente de cero, y como m y n son finitos sólo puede haber un número finito de arreglos M y cada uno de ellos determina una solución básica correspondiente, donde existen un número finito de términos en la sucesión. Dado que $x_{ij}^{min}>0$ entonces CX disminuye en cada paso, entonces, después de un número finito de pasos llegaremos a una solución óptima.

CASO 2. Sean $X_1, X_2, \ldots$ soluciones básicas en las que en algunas existe $x_{ij}^{min}=0$ tenemos el problema en que el producto escalar CX no disminuye aparentemente.

Consideremos el problema original y un problema artificial donde la matriz de costos C es la misma a la del problema original y sea:

$a'_i = a_i + \epsilon$ $\quad i=1,2,\ldots,m$

$b'_j = b_j$ $\quad j=1,2,\ldots,n-1$

$b'_n = b_n + m\epsilon$

Donde el número $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeño. Construiremos las soluciones básicas X_1 y X_1^{ε} para los dos problemas dados. Como ε es muy pequeño entonces el arreglo M_1 y el arreglo del problema artíficial, donde se usa ε, que es M_1^{ε} coinciden y no existirán $x_{ij}^{\varepsilon}=0$. Los elementos cero del problema original sólo se presentan cuando existen combinaciones de columnas y renglones, es decir, cuando la suma de algún subconjunto de las a_i es igual a la suma de algún subconjunto de las b_j, en otras palabras, cuando

$$\sum_{i=i_1}^{i=i_q} a_i = \sum_{j=j_1}^{j=j_p} b_j$$

En el problema donde relacionamos el número ϵ, sólo pueden ocurrir los elementos cero en uno de los casos siguientes:

1) $$\sum_{i=i_1}^{i=i_q} a_i + q\epsilon = \sum_{j=j_1}^{j=j_p} b_j$$

2) $$\sum_{i=i_1}^{i=i_q} a_i + q\epsilon = \sum_{j=j_1}^{j=j_p} b_j + b_n + m\epsilon$$

Si seleccionamos un ϵ menor que las raíces de cualquiera de las ecuaciones 1) y 2), se excluye la posibilidad de tener elementos cero en la selección X_1^{ϵ}. Como la matriz de costos C es la misma para los dos problemas y los elementos Δ_{ij} con los mayores valores negativos coincidén, lo mismo pasa con los ciclos formados por estos elementos y los elementos X_1 y X_1^{ϵ}, respectivamente, las posiciones en los arreglos M_1 y M_1^{ϵ} de los elementos x_{ij}^{min} y $x_{ij}^{\epsilon min}$ que deben pasarse en la cadena. De esta manera la transferencia de X_1 hacia X_2 en el primer problema es exactamente paralela a la transferencia de X_1^{ϵ} hacia X_2^{ϵ} del segundo problema.

Debido a que los problemas coiciden en cada iteración y como en el segundo problema (donde hacemos mención del ϵ) no existen elemento cero y esta acotado por mn, entonces usando la argumentación del caso 1 se llegará a una iteración en la cual estaremos en el óptimo.

3.6 TRANSFORMACIONES DE EQUIVALENCIA EN LA MATRIZ DE COSTOS

El proceso para encontrar la selección óptima visto en la sección anterior es bastante tediosa, ya que son necesarios un gran número de cálculos.

Lo que pretendemos en esta sección, es buscar un proceso en el cuál encontremos la solución óptima al Problema del Transporte con menos cálculos y en menos iteraciones que el expuesto en la sección anterior.

Para lograr el objetivo trazado es necesario utilizar el concepto de Transformaciones de Equivalencia de una matriz, y después justificar la invarianza de las transformaciones de equivalencia en el problema que estamos estudiando.

Definición. Supongamos que se da la matriz $C=[c_{ij}]$ y los números reales arbitrarios $r_1, r_2, \ldots, r_m$; $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Decimos que la matriz $D=[d_{ij}]$ es equivalente a la matriz C sí

$$d_{ij}=c_{ij}+r_i+s_j \qquad i=1,2,\ldots,m \qquad j=1,2,\ldots,n$$

La expresión $d_{ij}=c_{ij}+r_i+s_j$ nos indica que la matriz $C=[d_{ij}]$ es equivalente a la matriz $D=[d_{ij}]$, sí ésta (la matriz D) la obtenemos a partir de la matriz C sumandole los números reales r_i, con $i=1,2,\ldots,m$ y los números reales s_j con $j=1,2,\ldots,n$, es decir, las matrices C y D cumplen con:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \cdots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \cdots c_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} \cdots c_{mn} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} c_{11}+r_1+s_1 & c_{12}+r_1+s_2 \cdots c_{1n}+r_1+s_n \\ c_{21}+r_2+s_1 & c_{22}+r_2+s_2 \cdots c_{2n}+r_2+s_n \\ \cdots & \cdots \\ c_{m1}+r_m+s_1 & c_{m2}+r_m+s_2 \cdots c_{mn}+r_m+s_n \end{bmatrix}$$

Diremos entonces que las matrices C y D son equivalentes.

Para aclarar la definición anterior consideremos la matriz de costos C y los valores reales para los r_i y s_j dados por:

$r_1=1$, $r_2=2$ y $r_3=3$

$s_1=5$, $s_2=6$, $s_3=7$ y $s_4=8$

y sea la matriz

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} 1+1+5 & 2+1+6 & 3+1+7 & 4+1+8 \\ 5+2+5 & 6+2+6 & 0+2+7 & 7+2+8 \\ 2+3+5 & 3+3+6 & 1+3+7 & 4+3+8 \end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} 7 & 9 & 11 & 13 \\ 12 & 14 & 9 & 17 \\ 10 & 19 & 11 & 15 \end{bmatrix}$$ D es equivalente a C.

3.7 JUSTIFICACION DE LA INVARIANZA DE LAS TRANSFORMACIONES DE EQUIVALENCIA.

Con el siguiente teorema demostraremos la invarianza de la sucesión de selecciones en Transformaciones de Equivalencia de la matriz de costos.

Teorema. Una sucesión de selecciones es invariante bajo las transformaciones de equivalencia de la matriz de costos.

Demostración Dada la matriz de costos **C** y una matriz equivalente **D**. Construyamos la selección $X_1, X_2, \ldots, X_k$ adyacentes y X_k es óptima. Con la selección X_1, construyamos una sucesión de selecciones $X'_1, X'_2, \ldots, X'_k$ para la matriz D y X'_k es óptima. Por comprobar que la diferencia entre los valores de dos elementos correspondientes c^C_{ij} y c^D_{ij} que no son miembros de la selección X_1, es igual a cero:

$$\Delta^C_{ij} - \Delta^D_{ij} = \left[\sum_{@_i} c^c_{ij} - \sum_{@_p} c^c_{ij} \right] - \left[\sum_{@_i} (c^c_{ij} + r_i + s_j) - \sum_{@_p} (c^c_{ij} + r_i + s_j) \right]$$

$$\Delta^C_{ij} - \Delta^D_{ij} = \sum_{@_i} c_{ij} - \sum_{@_i} c_{ij} - \sum_{@_p} c_{ij} + \sum_{@_p} c_{ij} - \sum_{@_i} (r_i + s_j) + \sum_{@_p} (r_i + s_j)$$

$$= + \sum_{@_p} (r_i + s_j) - \sum_{@_i} (r_i + s_j) = 0$$

Los dos últimos términos son iguales en mágnitud y opuestos en signo, dado que cualquier r_i (ó s_j) contenido en la semicadena par, también estan contenidos en la semicadena impar ya que los valores de los elementos de las dos matrices **C** y **D** coincidén, de igual manera con los elementos del valor mínimo .

Podemos concluir entonces, que la transferencia de X_1 hacia X_2 en el primer sistema es idéntica a la transferencia de X_1 hacia X_2 en el segundo sistema y de aquí $X_2=X'_2$. Continuando con este proceso tenemos que $X_k=X'_k$ que es una solución óptima.

El proceso de encontrar la matriz de equivalencia D a partir de la matriz de costos C, nos permitirá saber si la solución básica en la que nos encontramos en esa iteración es la óptima y en caso de no ser, decidir cuál casilla debe entrar como básica, de tal forma que mejore la solución.

La matriz de equivalencia D la obtenemos enviando los elementos seleccionados por X hacia cero. (Los elementos seleccionados por X son los c_{ij} correspondientes a los elementos de la selección X). Para lo cuál es suficiente, sumar a los elementos de cada columna (ó renglón) un número igual en magnitud y opuesto en signo a la suma algebráica del número agregado al renglón (ó columna) y el elemento seleccionado por X (c_{ij}), que debe enviarse hacia cero, entonces la matriz Transformada es aquella en la cual todos los elementos seleccionados por X son cero.

Si todos los elementos de la matriz de costos Transformada son positivos, entonces esta matriz es una solución óptima. Como los costos de la matriz transformada son positivos esto nos indica que

$$\sum_{e_i} c_{ij} > \sum_{e_p} c_{ij}$$

y como demostramos en la sección 3.4, hemos llegado a la solución básica óptima.

En la siguiente sección ordenaremos el proceso y enumeraremos los pasos a seguir para llegar a la solución óptima del Problema del Transporte.

3.8 PASOS PARA HALLAR UNA SOLUCION OPTIMA

PASO 1. Escribase la información del Problema del Transporte en una tabla, como la que mostramos al inicio del trabajo.

PASO 2. Determinese la primera solución con el procedimiento visto en la sección 2.7

PASO 3. Llevar los elementos seleccionados por X de la matriz de costos hacia cero. en caso de que los elementos restantes de la matriz de costos transformada son positivos, entonces estamos en el óptimo.

PASO 4. Si la matriz de costos transformada tiene elementos negativos, seleccione el más negativo y fórmese el ciclo que contiene ese elemento negativo junto con los elementos seleccionados por X.

PASO 5. Constrúyase la segunda selección transladando el término menor x_{ij} en la semicadena par del ciclo del paso 4.

PASO 6. Dado que el mayor elemento negativo en la matriz de costos ahora se ha transformado en selección por X, le aplicamos otra transformación de equivalencia que lo lleve hacia cero y deje iguales a cero a los demás elementos seleccionados por X.

PASO 7. Repitiendo estos pasos y hasta que lleguemos a una selección para la cuál la matriz de costos transformada tenga todos los elementos selecionados por X iguales a cero y el resto positivos, entonces esta será la selección óptima.

PASO 8. Para calcular el costo del Transporte correspondiente a esta solución óptima, tomaremos el producto ascalar de la matriz de costos original y la matriz solución.

Analizando los pasos anteriores con el ejemplo prototipo al que ya le calculamos la solución básica inicial empleando el Método de Costo Mínimo, obtenemos la distribución de la tabla 3.7.1

2 / 5	3 / 10	4	2 / 5
1	3 / 10	5 / 0	4
2	1	4 / 5	7

Tabla 3.7.1

Transformando los elementos seleccionados por X a cero, sumando y restando números enteros, como se observa en la tabla 3.7.2

2 5	3 10	4	2 5	
1	3 10	5 0	4	
2	1	4 5	7	+1
−2	−3	−5	−2	

Tabla 3.7.2

Haciendo estas operaciones en la tabla 3.7.2 se transforma a la tabla 3.7.3

0 5	0 10	−1	0 5
−1	0 10	0 0	2
1	−1	0 5	6

Tabla 3.7.3

Observese que existen tres números negativos entonces esto nos indica que no estamos en el óptimo. Como existen tres números que tienen igual valor absoluto, tenemos que formar tres ciclos, como se muestra en la tabla 3.7.4.

0 5	0 10	−1	0 5
−1	0 10	0 0	2
1	−1	0 5	6

Tabla 3.7.4

Haciendo los cálculos para excluir en cada caso el x_{ij} mínimo en la semicadena par de cada ciclo, es decir, en cada ciclo buscamos x_{ij} mínimo de los elementos de la semicadena par sumando este elemento a los elementos de la semicadena impar y restandoselos a los que tengan etíqueta par, obtenenmos la distribución mostrada en la tabla 3.7.5

0	0 5	-1 0	0 5	-1
-1 5	0	0 5	2	-2
1	-1 5	0	6	
+1 +2	+1	+2	+1	

Tabla 3.7.5

Transformando los elementos negativos a cero, sumando y restando números enteros en columnas y renglones como se muestra en la tabla 3.7.5 obtenemos la tabla 3.7.6

2	0 5	0 0	0 5
0 5	-1	0 5	1
4	0 5	2	7

Tabla 3.7.6

Como en la figura anterior obtenemos números negativos en la transformación, esto nos indica que no estamos en el óptimo, marcando en la tabla 3.7.6 el ciclo con un cuadro y buscando el mínimo de los elementos de la semicadena par, cuando recorremos en el sentido de las manecillas del reloj y transladandolo de la semicadena par hacia la impar, como explicamos en los parrafos anteriores obtenemos la distribución mostrada en la tabla 3.7.7

2	0	0 5	0 5	
0 5	- 1 5	0 0	1	
4	0 5	2	7	-1
	+1			

Tabla 3.7.7

Transformando los elementos de la selección de X a cero sumando y restando números enteros en renglones y columnas como se muestra en la tabla 3.7.7, ésta se transforma a la tabla 3.7.8

2	1	0 5	0 5
0 5	0 5	0 0	1
3	0 5	1	6

Tabla 3.7.8

Notese que en la tabla anterior no existen números negativos esto nos garantiza que estamos en el óptimo.

Cambiando los costos de la tabla 3.7.8 a los costos originales, se obtiene la tabla 3.7.9.

2	3	4 5	2 5
1 5	3 5	5 0	4
2	1 5	4	7

Tabla 3.7.9

El costo más económico en la distribución para este problema es:

CX=4(5)+2(5)+1(5)+3(5)+1(5)=55 unidades.

El costo anterior se debe a la distribución de cinco unidades de un producto del primer origen al tercer destino, cinco unidades de producto del primer origen al cuarto destino y así sucesivamente hasta distribuir cinco unidades de producto del tercer punto de suministro al segundo consumidor.

3.9 DETERMINACION DE LOS CICLOS EN LA TABLA DEL TRANSPORTE

Cuando en el Problema del Transporte existen gran número de orígenes y destinos los ciclos en la tabla del Problema del Transporte no los observamos a simple vista, es por ello que es necesario encontrar un algoritmo para descubrir los ciclos donde incluya el elemento más negativo de la tabla.

El procedimiento al que hacemos mención es el siguiente:

PASO 1. Basado en la tabla del Transporte tachamos todas las columnas que contienen un solo cero (Con exepción de la columna en la cual se en cuentra el elemento más negativo de la tabla).

PASO 2. Se examinan los renglones y tachamos aquéllos en los cuales queda un solo cero.

PASO 3. Se observa nuevamente las columnas y hacemos lo mismoque en el paso 1.

PASO 4. Se construye el ciclo, empezando en el elemento más negativo y trazando una línea a travez de él y de todos los demás ceros, uno por uno yendo en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj.

Ilustraremos los pasos anteriores con el siguiente ejemplo:

Supongamos que en un problema determinado tenemos la siguiente tabla.

Observese que no podemos detectar a simple vista los ciclos.

Utilizando los pasos anteriores eliminamos algunos ceros como se muestra en la siguiente figura (Los ceros que tienen un astérisco son los que fuerón eliminados).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1				0*		0*					
2		0*		0			0*	-7			
3			0*	0*							0*
4	0*								0*	0*	
5					0*						
6						0*					
7	0*										
8				0	0*			0			

Con el objeto de que se comprenda mejor los métodos utilizados para encontrar la solución óptima del Problema del Transporte describiremos en detalle un ejemplo encontrando inicialmente la solución básica de inicio, por medio del Método de Mínimo Costo, para después, utilizar el Método de Combinatoria que nos llevará a la solución óptima del problema.

Ejemplo. Encontrar un plan para transportar un determinado producto de cuatro origenes hacia seis destinos, el suministro de cada origen es conocido, la demanda de cada destino también es dada y de igual forma los costos en la distribución. La información es dada en la figura 1.

a_i \ b_j	5	2	3	5	4	2
6	5	4	1	3	8	2
4	3	1	3	2	3	3
7	5	4	1	2	5	1
4	6	3	3	1	4	3

Figura 1

Encontremos la solución básica inicial usando el Método de Mínimo Costo para este problema.

El proceso inicia revisando los costos en el primer renglón y estos son (5,4,1,3,8,2) eligiendo entre ellos el mínimo, en este caso es el uno, entonces le asignamos el mínimo de a_1=6 y b_3=3 el cual es el tres. Como el a_1 no se agotó, entonces pasamos a revisar nuevamente el primer renglón de costos para elegir el costo mínimo de los restantes ó igual al anterior, en este caso es el dos y a la variable x_{16} le asignamos el mínimo de lo que quedo de a_1 digamos $a_1'=3$ y $b_6=2$ y el dos. Como se observa el a_1 no se agotó, entonces buscamos el siguiente costo mínimo ó igual al anterior en el primer renglón, en este caso es el tres y a la variable x_{14} le asignamos el mínimo de $a''=1$ y $b_4=5$ y éste es el uno. Como el a_1 se terminó pasamos al segundo renglón y hacemos el mismo proceso que en el renglón uno, y después pasamos al siguiente hasta terminar con todos ellos obteniendo la distribución mostrada en la figura 2.

5	4	1 3	3 1	8	2 2
3	1 2	3	2 2	3	3
5 5	4	1	2 2	5 0	1
6	3	3	1	4 4	3

Figura 2

El proceso que sigue es determinar si la distribución anterior es la más económica y para ello utilizamos el Método de Combinatoria que consiste en transformar los costos de las variables básicas a cero sumando y restando números enteros en las columnas y renglones de la distribución anterior cono se muestra en la figura 3.

5	4	1 3	3 1	8	2 2	
3	1 2	3	2 2	3	3	+1
5 5	4	1	2 2	5 0	1	+1
6	3	3	1	4 4	3	+2
-5	-1	-1	-3	-6	-2	
-1	-2					

Figura 3

Obteniendose la figura 4

-1	2	0 3	0 1	2	0 2
-2	0 2	3	0 2	-2	2
0 5	3	1	0 2	0 0	0
2	3	4	0	0 4	3

Figura 4

Como en la figura 4 existen números negativos, entonces no se está en el óptimo y dado que son dos los números negativos de igual magnitud, marcamos dos ciclos con un cuadro en la figura 4.

Para cada ciclo transladamos el mínimo de las asignaciones de las varibles básicas de la semicadena par hacia la semicadena impar, ésto es, sumar el mínimo de la asignación de las varibles con etíqueta par a los que tienen etíqueta impar y restar este valor a los de la semicadena par. Haciendo los cálculos anterior tenemos la distribución mostrada en la figura 5.

-1	2	0 3	0 1	2	0 2	-2
-2 2	0 2	3	0	-2 0	2	
0 3	3	1	0 4	0	0	-2
2	3	4	0	0 4	3	-2
+2		+2	+2	+2	+2	

Tabla 5

Transformando los números negativos de la figura 5 a cero sumando y restando números enteros en las columnas y renglones de la tabla 5 obtenemos la figura 6.

-1	0	0 3	0 1	2	0 2
0 2	0 2	5	2	0 0	4
0 3	1	1	0 4	0	0
2	1	4	0	0 4	3

Figura 6

En la transformación de la figura 6 obtenemos un número negativo, lo cual indica que no estamos en el óptimo y marcamos el ciclo correspondiente ilustrado con un cuadro en la figura 6 y haciendo el translado para este ciclo obtenemos la figura 7.

-1	0	0 3	0	2	0 2	
0 2	0 2	5	2	0 0	4	-1
0 1	1	1	0 5	0	0	-1
2	1	4	0	0 4	3	-1
+1	+1		+1	+1		

Figura 7

Transformando a cero el número negativo sumando y restando números enteros en los renglones y columnas de la figura 7 se obtenemos la figura 8.

0	1	0	1	3	0
1		3			2
0	0	4	2	0	3
2	2			0	
0	1	0	0	0	-1
1			5		
2	1	3	0	0	2
				4	

figura 8

Como en la figura 8 existen números negativos entonces no estamos en el óptimo, por ello marcamos el ciclo con un cuadro como se muestra en la figura 8 y haciendo el translado para este ciclo obtenemos la distribución mostrada en la figura 9.

0	1	0	1	3	0	-1
2		3			1	
0	0	4	2	0	3	-1
2	2			0		
0	1	0	0	0	-1	
			5		1	
2	1	3	0	0	2	-1
				4		
+1	+1	+1		+1	+1	

Figura 9

Transformando a cero el número negativo de la figura 9 sumando y restando números enteros en la tabla anterior obtenemos la figura 10.

0 / 2	1	0 / 3	0	3	0 / 1
0 / 2	0 / 2	4	2	0 / 0	3
1	2	1	0 / 5	1	0 / 1
2	1	3	-1	0 / 4	2

figura 10

Siguiendo el mismo proceso se obtienen las figura 11 y 12.

0 / 3	1	0 / 3	0	3	0	
0 / 1	0 / 2	4	1	0 / 1	3	
1	2	1	0 / 4	1	0 / 4	-1
2	1	3	-1 / 1	0 / 3	2	
			+1			+1

Figura 11

0 3	1	0 3	1	3	1
0 1	0 2	4	2	0 1	4
1	1	0	0 4	0	0 4
2	1	3	0 1	0 3	3

Figura 12

Observese que en la figura 12 no se tienen valores para los costos transformados negativos, entonces, ésto nos garantiza que estamos en la distribución óptima.

Volviendo a los costos originales y con la distribución para las variables obtenidas en todo el proceso anterior se tiene la figura 13.

5 3	4	1 3	3	8	2
3 1	1 2	3	2	3 1	3
5	4	1	2 4	5	1 4
6	3	3	1 1	4 3	3

Figura 13

Finalmente la distribución total del producto más barata para este problema es de:

$CX=5(3)+1(3)+3(1)+1(2)+3(1)+2(4)+1(4)+1(1)+4(3).$

$=51$ unidades de costo.

En el análisis del ejemplo anterior se ha utilizado los aspectos teóricos del **PTRC** contemplados en los apartados anteriores.

En el siguiente capítulo estudiaremos el **PTRT**, que consiste en transportar un determinado producto de varios orígenes a un número dado de puntos de demanda en el menor tiempo posible.

Los aspectos teóricos para este problema son una modificación de los que utilizamos en el **PTRC**, como lo corroboraremos en las siguientes secciones.

CAPITULO IV

SOLUCION DEL PROBLEMA DEL TRANSPORTE CON RESPECTO AL TIEMPO

El objetivo de este capítulo es presentar y justificar un algoritmo que nos permita encontrar un plan óptimo en la distribución de algún producto de varios suministros a un número dado de puntos demandantes, de tal manera que el tiempo en la distribución total sea mínimo.

El contenido de este apartado reviste gran importancia en problemas prácticos, por ejemplo, cuando tenemos un producto perecedero o que por necesidades de demanda se requiere que la transportación de los orígenes a los puntos de consumo se efectúe en el menor tiempo posible, para que así las pérdidas económicas se reduzcan al mínimo.

4.1 SOLUCION BASICA INICIAL DEL PROBLEMA DEL TRANSPORTE CON RESPECTO AL TIEMPO.

En el Problema del Transporte con Respecto al Tiempo PTRT, al igual que cuando consideramos el Problema del Transporte respecto al Costo, tenemos una tabla que nos facilita el manejo de la información y nos ayuda en el proceso de resolución. La tabla a la que hacemos referencia tiene la siguiente estructura:

D E M A N D A S

S U M I N I S T R O S

j / i	b_1	b_2	b_3	...	b_n
a_1	x_{11} t_{11}	x_{12} t_{12}	x_{13} t_{13}	...	x_{1n} t_{1n}
a_2	x_{21} t_{21}	x_{22} t_{22}	x_{23} t_{23}	...	x_{2n} t_{2n}
a_3	x_{31} t_{31}	x_{32} t_{32}	x_{33} t_{33}	...	x_{3n} t_{3n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_m	x_{m1} t_{m1}	x_{m2} t_{m2}	x_{m3} t_{m3}	...	x_{mn} t_{mn}

Tabla 4.1.1

Observando la tabla 4.1.1 vemos que el primer renglón es para la demanda de cada uno de los puntos de consumo y en la primera columna de la tabla están las cantidades que puede ofrecer cada punto de suministro. En cada uno de los cuadros restante se indica, el tiempo requerido para la distribución de un cargamento de algún origen a un determinado destino.

Retomemos el ejemplo que hemos analizado en las secciones anteriores para aclarar la interpretación de los datos de la tabla.

Supongamos que tenemos tres almacenes con un determinado producto para distribuirse en cuatro zonas de demanda, conocemos además el tiempo que se tarda en llevar un cargamento de cada almacén a cada punto de demanda.

La información se resume en la tabla 4.1.2

Requerimiento →

	5	20	5	5
20	2	3	4	2
10	1	3	5	4
5	2	1	4	7

↑ Oferta

Tabla 4.1.2

En la tabla 4.1.2, el primer renglón de números nos indican la demanda de producto que tienen los cuatro puntos de consumo y los números de la primera columna nos señalan la cantidad de producto que puede suministrar cada uno de los orígenes. Los números que se encuentran en los cuadros de la tabla, nos indican el tiempo que se requiere al enviar un cargamento de producto de un determinado origen a un destino dado. Por ejemplo, el número siete que está en el cuarto renglón quinta columna nos indica que, para enviar un cargamento de producto del tercer origen al cuarto destino es necesario siete unidades de tiempo, de manera análoga podemos darle una interpretación a los otros números.

Para encontrar la solución inicial en al **PTRT** utilizaremos el Método de Mínimo Costo analizado y utilizado en el capítulo anterior, el proceso que se sigue es el mismo, lo único que modificamos es la tabla ya que en lugar de trabajar con la tabla de costos ahora lo hacemos considerando los tiempos.

Para nuestro ejemplo prototipo la primera solución Básica obtenida a partir del Método de Mínimo Costo se muestra en la tabla 4.1.3.

	5	20	5	5
20	2 5	3 10	4	2 5
10	1	3 10	5 0	4
5	2	1	4 5	7

Tabla 4.1.3

En esta solución básica inicial, el tiempo que se utiliza en la distribución total de los cargamentos, es de 4 unidades de tiempo, observando la distribución obtenida a partir de Método de Mínimo Costo mostrada en la tabla 4.1.3 nos damos cuenta que el tiempo que se utiliza en la distribución total de los cargamentos es de 4 unidades, aunque la variable x_{23} esté en la base, en esta dirección no fué enviado ningún cargamento, es por ello que este tiempo no es tomado en consideración.

La anterior solución factible también la podemos encontrar utilizando otro artificio, el cual consiste en plantear el problema como un Sistema de Ecuaciones Lineales.

Para aclarar este proceso, analizemos el ejemplo prototipo.

Consideremos las restricciones del problema

Restricciones de Suministros	20 =	x_{11}	$+x_{12}$	$+x_{13}$	$+x_{14}$								
	10 =					x_{21}	$+x_{22}$	$+x_{23}$	$+x_{24}$				
	5 =									x_{31}	$+x_{32}$	$+x_{33}$	$+x_{34}$
Restricciones de Demanda	5 =	x_{11}				x_{21}				x_{31}			
	20 =		x_{12}				x_{22}				x_{32}		
	5 =			x_{13}				x_{23}				x_{33}	
	5 =				x_{14}				x_{24}				x_{34}
Tiempos empleados para llevar un cargamento del origen i al destino j.	→	2	3	4	2	1	3	5	4	2	1	4	7

Figura 4.1.1

La asignación de cargamento del primer punto de suministro a los 4 puntos de demanda, empieza analizando los primeros 4 tiempos del último renglón de la figura 4.1.1, observamos que existen dos tiempos mínimos, en este caso es el dos que están asignados en las variables x_{11} y x_{14}, se elige cualesquiera de ellos , digamos el que está en la posición x_{11}, subiendo a lo largo de esta columna vemos que el valor que podemos asignarle a esta variable es de 20 ó 5, en este caso el 20 no puede ser asignado a la variable x_{11}, pués al hacer la resta de la primera ecuación a la cuarta nos quedaría un valor negativo, entonces para estos casos se elige el mínimo del suministro y la demanda.

Para hacer la asignación $x_{11}=5$ restamos la cuarta ecuación a la primera y al lado izquierdo del cuarto renglón, quedandonos $x_{11}=5$, como se muestra en la figura 4.1.2

$$
\begin{array}{rllll}
15 = & +x_{12}+x_{13}+x_{14} & -\ x_{21} & & -\ x_{31} \\
10 = & & x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} & & \\
5 = & & & & x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} \\
x_{11} = 5 & & x_{21} & & x_{31} \\
20 = & x_{12} & \quad x_{22} & & \quad x_{32} \\
5 = & \quad x_{13} & \qquad x_{23} & & \qquad x_{33} \\
5 = & \qquad x_{14} & \qquad\quad x_{24} & & \qquad\quad x_{34}
\end{array}
$$

Figura 4.1.2

Como el suministro del primer punto no se agotó buscamos el siguiente mínimo entre los 3 primeros tiempos (3,4,2), en este caso es el dos, efectuamos otra transformación de la misma forma que la anterior.

Trabajar con todas las variables de Sistema de Ecuaciones Lineales como lo hicimos en la primera iteración resulta demasiado tedioso, por lo que es conveniente utilizar lo que suele llamarse **LA TABLA GRANDE** que nos permitirá simplificar el trabajo.

La Tabla Grande para el ejemplo anterior, consiste en dos fajas horizontales y tres verticales que coincide con el número de puntos de suministros. En el primer renglón de la primera faja horizontal se escriben los subíndices de las variables y en la primera columna de la primera faja se escriben las capacidades de suministro de cada uno de los orígenes. En la primera columna de la sengunda faja horizontal se escriben las cantidades que se deben abastecer a cada uno de los destinos y en el último renglón encontramos los tiempos requeridois para abastecer un cargamento de producto, del origen i al destino j.

Para el ejemplo prototipo la tabla grande se muestra en la figura 4.1.4.

Variables

		11	12	13	14	21	22	23	24	31	32	33	34
ORIGENES	20	–	–	–	–								
	10					–	–	–	–				
	5									–	–	–	–
DESTINOS	X 11=5	–				–				–			
	20		–				–				–		
	5			–				–				–	
	5				–				–				–
		2	3	*4	2	1	3	5	4	2	1	4	7

Tiempos

Tabla 4.1.4

Por ejemplo, en la Tabla grande 4.1.4 del problema anterior el número señalado con un asterisco en la tabla, nos indica que se requieren cuatro horas para llevar un cargamento del primer origen al tercer destino, la misma interpretación tienen los demás números de este renglón.

Los signos menos que se encuentran en la primera faja nos indica lo que sobra en cada origen. Por ejemplo, lo que restaría por suministrar en el primer punto suministro sería

$$20-x_{11}-x_{12}-x_{13}-x_{14}$$

Los menos que se encuentran en la segunda faja horizontal indica el déficit en cada uno de los destinos. Por ejemplo, el faltante para el primer punto demadante en nuestro ejemplo sería

$$5-x_{11}-x_{21}-x_{31}$$

El proceso para encontrar la solución inicial utilizando la tabla grande consiste en lo siguiente:

Se empieza en la primera faja vertical buscando en el renglón de los tiempos (último renglón) aquel viaje que requiere menos tiempo, en este caso existen dos, por lo que eligiremos arbitrariamente a cualesquiera de ellos, por ejemplo el primer dos, subiendo a lo largo de esta columna vemos que existen dos menos, en la parte izquierda de estos, están dos números, 20 y 5 (primera columna de la tabla), de los cuales escogemos el mínimo, este es el 5, que se encuentra en el quinto renglón de la tabla, en la parte izquierda de este número escribimos x_{11} y atodo este renglón se lo restamos al primero y los signos de la columna 11 se borran, el proceso anterior es análogo a restarle a la primera ecuación la ecuación cuarta y borrar los signos de la columna 11 significa que a la variable de desición x_{11} se le asignó algún valor quedandonos como se muestra en la tabla 4.1.5

	11	12	13	14	21	22	23	24	31	32	33	34
15		–	–	–	+				+			
10					–	–	–	–				
5									–	–	–	–
$X_{11}=5$					–				–			
20		–				–				–		
5			–				–				–	
5				–				–				–
	2	3	4	2	1	3	5	4	2	1	4	7

Tabla 4.1.5

Como el suministro del primer origen no se ha agotado buscamos en el último renglón de la primera faja otro tiempo igual al mínimo anterior ó mayor a éste, que sea el más pequeño entre los restantes, en este caso es el dos y hacemos lo mismo que en la primera iteración, como se observa en la tabla 4.1.6

	11	12	13	14	21	22	23	24	31	32	33	34
10		–	–		+			+	+			+
10					–	–	–	–				
5									–	–	–	–
$X_{11}=5$					–				–			
20		–				–				–		
5			–				–				–	
$x_{14}=5$								–				–
	2	3	4	2	1	3	5	4	2	1	4	7

Tabla 4.1.6

Como el suministro del primer origen no se agotó, volvemos a hacer otra iteración obteniendose la tabla 4.1.7

	11	12	13	14	21	22	23	24	31	32	33	34
$x_{12}=10$			–		+			+	+			+
10					–	–	–	–				
5									–	–	–	–
$X_{11}=5$					–				–			
10			+		–	–		–	–	–		–
5			–				–				–	
$x_{14}=5$								–				–
	2	3	4	2	1	3	5	4	2	1	4	7

Tabla 4.1.7

En la tabla 4.1.7 vemos que el abastecimiento del primer origen se ha agotado, puesto que en el primer renglón ya se le asignó algún valor a la variable de desición ($x_{12}=10$), entonces pasamos a la segunda faja (segundo suministro) y hacemos el mismo proceso, para después pasar al siguiente y así sucesivamente hasta obtener la distribución mostrada en la tabla 4.1.8

	11	12	13	14	21	22	23	24	31	32	33	34
$x_{12}=10$			−		+			+	+			+
$x_{22}=10$					−			−				
$x_{33}=5$									−	−		−
$X_{11}=5$					−				−			
$x_{23}=0$			+		0			0	−	−		−
0=5			0		0			0	0	0		0
$x_{14}=5$								−				−
	2	3	4	2	1	3	5	4	2	1	$\boxed{4}$	7

Tabla 4.1.8

Antes de continuar analizando el problema haremos algunos comentarios referentes a los datos obtenidos hasta ahora.

Observaciones: a) Las distribuciones iniciales obtenidas en la tabla grande 4.1.8 y en la tabla pequeña 4.1.3 coinciden, por lo tanto podemos utilizar cualesquiera de las dos tablas (dependiendo del tamaño del problema).

b) Al final de la distribución inicial en la tabla grande (4.1.8) al menos uno de los renglones consta exclusivamente de ceros y esto es debido a que el Problema del Transporte está balanceado, es decir:

$$\sum a_i = \sum b_j$$

c) Revisando la distribución inicial, se observa que el tiempo máximo en la distribución es de cuatro unidades de tiempo (marcado en la tabla con un recuadro).

4.2 SOLUCION OPTIMA DEL PROBLEMA DEL TRANSPORTE CON RESPECTO AL TIEMPO.

En esta sección mostraremos un proceso que nos ayude a decidir si, dada una solución arbitraria, ésta es óptima y en caso contrario como obtener otra solución de tal forma que el tiempo en la distribución total disminuya.

Antes de hacer una generalización del proceso para obtener la solución óptima del PTRT, retomemos nuevamente la Tabla Grande 4.1.8 para analizarla y adecuarle un proceso que mejore la solución inicial obtenida, para decidir si la solución actual es la óptima. En la tabla 4.1.8 observamos que la variable x_{33} (con $t_{33}=4$), el tiempo puede decrecer sólo si esta varible es cambiada por x_{31} ó x_{32} ya que para formar un ciclo, al cancelar una varible (ó casilla) es necesario que en ese mismo renglón otra variable sea considerada. Las otras variables no son candidatas a entrar a la base ya que tienen tiempos mayores a la que se tienen en la solución actual. La mejor candidata de las variables anteriores (x_{31} y x_{32}) para que entrara a la base es x_{32}, ya que $t_{32}<t_{31}$. Observando en la tabla 4.1.8 la columna del x_{32} tenemos que no existen signos positivos, lo que nos indica que no puede hacerse una transformación de tal forma que x_{32} entre a la base. Para que una variable pueda entrar a la base es necesario que en esa columna existan signos más y signos menos, lo cual nos indica que

se puede hacer una transformación, pero si checamos los números que están a la izquierda de los signos menos, el mínimo de ellos es el cero, por lo tanto al hacer la trasformación, el tiempo no decrecerá, lo anterior nos lleva a suponer que se está en el óptimo.

El críterio es el mismo que en del Simplex pero sín tomar los costos normalizados.

Las conclusiones anteriores también pueden ser obtenidas a partir de la tabla pequeña y el proceso es como sigue: Primero se eligen las posibles variables que son candidatas, es decir, aquellas que tengan tiempos menores que el tiempo máximo, obtenido en la solucón actual y que esten en el mismo renglón que la variable de tiempo máximo, se elige aquella que tiene el menor tiempo y formamos el ciclo correspondiente, analizamos este ciclo para ver si a la variable que tiene el mayor tiempo, la cantidad que tiene asignada puede ser restada a las variables que tienen etíqueta impar del ciclo y sumada a las variables que tienen etíqueta par. Si en esta transformación no existen asignaciones negativas, hemos obtenido una nueva solución básica. A este tipo de transformaciones es a lo que se le llama **CADENA DE DESCARGA** como lo precisaremos en la siguiente definición.

Definición. Se le llama cadena de descarga a toda cadena que tiene la propiedad de que todo elemento de la semicadena impar es menor que el elemento t_{ij} máximo de la solución actual que debe excluirse.

Consideremos la solución inicial obtenida por el Método de Mínimo Costo mostrada en la tabla 4.1.3

	5	20	5	5
20	2 5	3 10	4	2 5
10	1	3 10	5 0	4
5	2	1	4 5	7

Tabla 4.1.3

Analizando la tabla 4.1.3 tenemos que $t_{33}=4$ puede decrecer solo si x_{31} ó t_{32} se le asigne valor. Formando los ciclos para estos tiempos obtenemos la tabla 4.2.1

2 5	3 10	4	2 5
1	3 10	5 0	4
2	1	4 5	7

a)

2 5	3 10	4	2 5
1	3 10	5 0	4
2	1	4 5	7

b)

Tabla 4.2.1

En la tabla anterior vemos que al hacer la transformación correspondiente el tiempo no decrecerá, lo que nos indica que la solución actual es la óptima.

A continuación resumiremos el proceso que se sigue para resolver el Problema del Transporte con respecto a los Tiempos.

PASOS PARA ENCONTRAR LA SOLUCION OPTIMA DEL PROBLEMA DEL TRANSPORTE CON RESPECTO AL TIEMPO.

Los pasos que a continuación exponemos son los que se llevan a cabo para encontrar la solución óptima del **PTRT**, utilizando la tabla pequeña, ya que para problemas de tamaño regular no se pueden trabajar utilizando la tabla grande, esto es debido a que al usar esta tabla se requiere demasiado espacio, aunque tenga la ventaja de poder visualizar facilmente la variable que debe entrar a la base y la que debe salir de ésta.

PASO 1. Resumir la información del problema en la tabla pequeña.

PASO 2. Cálcula la solución inicial utilizando el Método de Mínimo Costo.

PASO 3. De las variables que figuran en la solución inicial se determina el valor máximo t_1^{max}

PASO 4. Tachar con una cruz todas las celdas que contengan $t_{ij} > t_1^{max}$

PASO 5. Revisar si t_1^{max} puede ser uno de los miembros de una cadena de descarga cuyos otros miembros están en la tabla.

PASO 6. En caso de que exista una cadena de descarga, se construye una segunda solución.

PASO 7. Si se demuestra que no se puede reducir a cero el contenido de la celda correspondiente al t_1^{max} (es decir, reducir a cero la x_{ij} correspondiente), entonces la solución que se tiene es la óptima.

PASO 8. Si la celda correspondiente a t_1^{max} puede descargarse completamente, hallar t_2^{max} en la nueva solución.

En el caso de que no se optenga la solución óptima en el paso 8, se empieza de nuevo en el paso 4.

Consideremos el siguiente ejemplo para mostrar el proceso descrito anteriormente.

Una compañía tiene cuatro almacenes y cinco tiendas. Los almacenes juntos, tienen un exceso de 120 unidades de un producto dado, que se divide entre ellos como sigue:

Almacen	Exceso
1	30
2	25
3	45
4	20

las cinco tiendas juntas, necesitan 120 unidades del producto. Los requisitos individuales son:

Tienda	Requisitos
1	15
2	5
3	30
4	25
5	45

Los tiempos de enviar un cargamento de producto del almacen i a la tienda j se presentan de la siguiente manera

		Tienda				
		1	2	3	4	5
Almacen	1	5	2	1	9	3
	2	4	3	2	0	1
	3	3	4	3	1	2
	4	1	5	6	4	7

*Los tiempos estan dados en horas.

El problema ahora es encontrar entre todas las posibles, distribuciones aquella en la cual la entrega total del producto de los cuatro almacenes a las cinco tiendas se efectue en el menor tiempo posible.

Para el ejemplo anterior, apliquemos los pasos del algoritmo.

PASO 1. Resumiendo la información del problema en la tabla 4.2.2

5	2	1	9	3	30	S U M I
4	3	2	0	1	25	N I S
3	4	3	1	2	45	T R
1	5	6	4	7	20	O
15	5	30	25	45		

D E M A N D A

Tabla 4.2.2

La interpretación de los datos de la tabla 4.2.2 ya se explicó en la sección 4.1.

PASO 2. Aplicandole el Método de Mínimo Costo para encontrar la solución inicial y se obtiene la distribución mostrada en la tabla 4.2.3.

5	2 0	1 30	9	3	30	S U M
4	3	2	0 25	1 0	25	I N I
3	4 0	3	1	2 45	45	S T
1 15	$\boxed{5}$ 5	6	4	7	20	R O
15	5	30	25	45		

D E M A N D A

Tabla 4.2.3

PASO 3. En la solución inicial el tiempo necesario para la antrega total del producto es de cinco horas, indicado en la tabla 4.2.3 con un recuadro.

PASO 4. Eliminamos las celdas que contengan $t_{ij} > 5$. En nuestro caso marcaremos de negro las celdas eliminadas como se muestra en la figura 4.2.4.

5	2 0	1 30	9	3
4	3	2	0 25	1 0
3	4 0	3	1	2 45
1 15	5 5	6	4	7

Tabla 4.2.4

PASO 5. Revisando la tabla 4.2.4 se observa que únicamente se puede formar un ciclo ya que en el cuarto renglón existe una casilla sin asignación (x_{44}) y afortunadamente es una cadena de descarga lo que nos permite decrecer el tiempo.

PASO 6. Como sí pudimos formar una cadena de descarga, hacemos la transformación de la siguiente manera: enumeramos las componentes del ciclo en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj empezando por la casilla a eliminar, después, restando la cantidad asignada a la casilla que se quiere eliminar, a las que tienen etiqueta impar y sumando esta cantidad a las que tienen etiqueta par, obtenemos la transformación mostrada en la tabla 4.2.5.

5	2 / 0	1 / 30	9	3
4	3	2	0 / 20	1 / 5
3	$\boxed{4}$ / 5	3	1	2 / 40
1 / 15	5	6	$\boxed{4}$ / 5	7

Tabla 4.2.5

En la segunda solución básica obtenida, la distribución total del producto se efectúa después de 4 horas, como se señala en la tabla 4.2.5 con un recuadro, decreciendo el tiempo de la primera solución básica a la segunda en una hora.

PASO 7. En la distribución de la tabla 4.2.5 existen dos tiempos máximos iguales a 4, lo que nos indica que deben existir dos cadenas de descarga para que el tiempo en la distribución decresca, pero al tratar de formar una de ellas tomando a la casilla del tiempo $t_{44}=4$, obsevamos que no existen tiempos menores que 4, por lo tanto no podemos formar una cadena de descarga, lo que nos indica que la segunda solución es la óptima, entonces el tiempo necesario para hacer la distribución total del producto es de 4 unidades de tiempo.

La siguiente proposición justifica que, dada una solución básica y existiendo una cadena de Descarga el tiempo en la distribución de un recurso de varios origenes a un número dado de destinos disminuye.

4.3 JUSTIFICACION DEL ALGORITMO DE SOLUCION OPTIMA DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE CON RESPECTO A LOS TIEMPOS.

PROPOSICION. Sea X una solución básica acíclica e $i_p j_q \notin X$ con su respectivo $t_{pq} < t_{ps}$ con

$t_{ps} = \max_1 \{ t_{ij} \}$ $i=1,2,\ldots,m$ $j=1,2,\ldots,n$ y supongamos que al unirle a X la celda $i_p j_q$ se forma una cadena de descarga entonces al hacer la transformación, el tiempo total en la distribución del producto es menor que en la anterior distribución..

Demostración. Supongamos que un subconjunto de celdas de X tiene la estructura mostrada en la tabla (*)

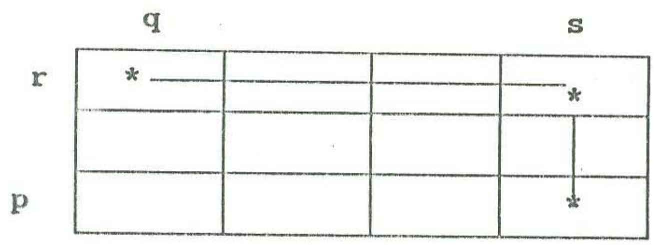


Tabla (*)

El correspondiente t_{ps} de la celda que uniremos a X tiene la característica que $t_{pq} < t_{ps}$ donde $t_{ps} = \max_1 \{t_{ij}\}$ $i=1,2,\ldots,m$ $j=1,2,\ldots,n$.

Al unirle la celda $i_p j_q$ se forma una cadena de descarga, es decir, lo que tiene asignada la variable X_{ps} (que es la variable del tiempo máximo) se puede hacer cero restando esta cantidad a los que tienen etíqueta impar y sumandosela a los de etíqueta par. En la nueva solución cambia $t_{ps} = \max_1\{t_{ij}\}$ $i=1,2,\ldots,m$ $j=1,2,\ldots,n$ por t_{pq}, donde t_{pq} se obtuvo de la cadena de descarga tal que $t_{pq} < t_{ps}$, es decir, $tmax_2 = \max_2 \{t_{ij}\} < tmax_1$ $i=1,2,\ldots,m$ $j=1,2,\ldots,n$ y es lo que se quería demostrar.

C O N C L U S I O N E S

En el tiempo que trabajamos en este texto me he dado cuenta de la basta aplicabilidad de las matemáticas y en especial el area de la Programación Lineal. Desgraciadamente, debido a la crisis por la que atraviesa el país y más concretamente nuestro estado, son pocas la compañías que utilizan la Programación Lineal para optimizar recursos ó la programación de estrategias para mejorar las ventas, salvo algunos centros de investigación. Si bien es cierto que estamos avanzando en esta dirección, ya que existen más trabajos publicados en el area de Investigación de Operaciones, más centros de computo enfocados en el área de investigación, un gran número de profesionistas interesados en el area de la Programación Lineal.

Considero que el hecho de que gran número de compañías extranjeras estén estableciendose en el estado, será, en un futuro, una fuente de empleo para la gente que estamos trabajando en el área de Investigación de Operaciones.

Como en cualquier trabajo de investigación, siempre existen objetivos sín contemplarse, en nuestro caso nos faltaría por hacer un paquete computacional para resolver el Problema del Transporte con Respecto a los Costos y el Problema del Transporte con Respecto a los Tiempos y una combinación de estos, es decir, contemplar la parte teórica del Problema del Transporte donde relacione la distribución de un artículo a un mínimo costo y que se satisfaga la condición de que la entrega sea efectuada en el menor tiempo posible. Finalmente enriquecer la parte teórica del Problema del Transporte con Respecto a los Tiempos ya que en la actualidad existe una escasa bibliografia que contempla este tema.

B I B L I O G R A F I A

[1] A Taha, Hamdy. "Investigación de operaciones"

[2] Bazaraa Mokhtar y Jarvis John J."Programación lineal y flujo en redes"

[3] E. Barsov. "Que es la programación lineal"

[4] Calvillo Vivies, Gilberto "Métodos de programación lineal"

[5] Gass, Saul. "Programación Lineal"

[6] Hillier, Frederick y Liberman, J. "Introducción a la investigación de operaciones"

[7] Howard, Anton "Introducción al Algebra Lineal"

[8] Shamblin James E.y Stevens G. T. "Investigación de operaciones un enfoque fundamental"

[9] Bazaraa Mokhtar y Jarvis John J."Programación lineal y flujo en redes"

[10] Prawda, Juan. "Métodos y modelos de la investigación de operaciones"