Universidad de Sonora

Departamento de Matemáticas

Juegos Matriciales con Sensibilidad al Riesgo

TESIS

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta

ELIZABETH LAVENANT BRAU

Director: Dr. Agustín Brau Rojas

Hermosillo, Sonora Agosto 2005

Este trabajo fue financiado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) dentro del proyecto "Control Adaptado de Sistemas Estocásticos", con número de referencia 37239E, bajo la dirección del Dr. Jesús Adolfo Minjarez Sosa.

Índice general

Introducción

¿Ha leído usted el periódico de hoy? Si lo hizo, probablemente encontró en la página principal un reportaje de alguna controversia política, o tal vez describiendo un conflicto armado y acciones violentas por parte de un grupo de personas o países. Las páginas interiores reportarán acciones por parte de grupos de presión para cambiar las políticas sociales, o describirán las decisiones del gobierno acerca de esas políticas -financiamiento en el sector salud, por mencionar alguna. En las páginas financieras encontrará cambios en los precios de los bienes, o intentos del gobierno para controlar los mercados financieros.

¿Qué es lo que todos estos reportajes tienen en común? Todos describen conflictos de intereses entre personas o grupos de personas tales como partidos políticos, gobiernos, y empresarios. A los modelos teóricos de estos conflictos de intereses se les llama *juegos*, y a los participantes de estos conflictos se les llama jugadores. Un modelo es, por definición, una pequeña imitación del objeto verdadero. Esto nos dice que en un juego de lo que se trata es de extraer los problemas esenciales en el conflicto de nuestro interés. La *Teoría de juegos* consiste en las maneras de analizar estos problemas. Obviamente, muchos conflictos son demasiado complicados como para incluir todas las facetas involucradas en el modelo correspondiente, pero aún así, un juego puede sernos útil al describir los varios tipos de decisiones que los participantes pueden tomar, y los resultados posibles dadas las decisiones tomadas. Para algunos juegos, la teoría de juegos puede sugerir una "solución"para el juego, que es la mejor forma de jugar el juego para cada persona involucrada; pero para la mayoría de los juegos que describen problemas reales lo único que puede hacer es desechar algunos tipos de decisiones y posiblemente sugerir qué jugadores trabajarán juntos.

Estos modelos teóricos de un conflicto son llamados juegos porque podemos identificar facilmente los conflictos de interés en juegos recreacionales tales como el Poker, Gato, o Monopoly; y algunos de los juegos de mesa, como el ajedrez, de hecho fueron desarrollados como modelo de una guerra. En cierta forma, es una elección del nombre un tanto desafortunada, porque la palabra juego tiene conotaciones de entretenimiento, y de una contienda recreacional. Los juegos de los que trata la teoría de juegos cubren un área mucho más grande que aquella que ocupan los juegos de mesa. Consideran problemas de economía y negocios, tácticas y logísticas de la guerra, política nacional e internacional, y la política social como candidatos para ser modelados como juegos.

En este trabajo, supondremos que el objetivo de cada jugador será el obtener el mayor beneficio posible, los jugadores realizan sus jugadas simultáneamente y la jugada de cada jugador es independiente de la de su oponente. A estos juegos se les conoce como *no cooperativos.*

Dada la gran variedad de juegos estudiados por la teoría de juegos, uno puede toparse con juegos que tienen tan sólo dos jugadores, como es el caso del Gato, e inclusive millones de ellos, como es el caso de algunos problemas de política internacional. Así como en un juego puede variar el número de jugadores, también varía en el número de opciones a elegir por cada uno de los jugadores; por poner un ejemplo podemos pensar en el juego de piedra, papel o tijeras: claramente vemos que este es un juego de dos jugadores, donde cada uno posee tres opciones a elegir.

En este trabajo, nos restringiremos al estudio de juegos con únicamente dos participantes, a los que por brevedad llamaremos I y II, y con la característica de que cada jugador únicamente tiene dos decisiones a elegir.

En el Capítulo 1 daremos un breve repaso de la teoría básica de los juegos 2×2 suma cero, incluyendo cuáles son las estrategias óptimas para este tipo de juegos, junto con algunas demostraciones de importancia. Por su parte, el Capítulo 2 daremos los elementos necesarios para definir la función de utilidad, necesaria para saber si un jugador es adverso o proclive al riesgo. En el Capítulo 3 estudiaremos los juegos de suma no-cero; em estos juegos puede encontrarse más de una solución, por lo que describimos algunos criterios utilizados para escoger entre las soluciones posibles.

CAPíTULO 1

Juegos matriciales neutrales al riesgo

En este capítulo nos restringiremos al estudio de aquellos juegos en los que la ganancia de un jugador es la pérdida del otro, razón por la cual son conocidos como *juegos de suma cero.* Claro, ateniéndonos a las especificaciones del tipo de juego a estudiar mencionado en la introducción. Daremos los conceptos básicos y veremos un método para encontra la mejor forma en que cada jugador puede jugar el juego.

1. Modelo del Juego y Estrategias

Para familiarizarnos con los elementos que intervienen en el estudio de los juegos mencionados anteriormente, empezaremos por el análisis de un Ejemplo, para posteriormente presentar las Definiciones y resultados de una manera formal.

EJEMPLO 1.1 (Juego de monedas). *Dos individuos, los jugadores I y II, sostienen una moneda legal cada uno, y las muestran simultáneamente. Si las monedas coinciden en el sentido de que ambas muestran cara o ambas muestran cruz, entonces I se queda con ambas monedas; de lo contrario, II se queda con las monedas.*

Intuitivamente, este juego es justo en el sentido de que ningún jugador tiene ventaja sobre el otro. Más aún, si el juego es jugado una sola vez, ningún jugador posee una decisión que le asegure una ganancia positiva, así como tampoco existen decisiones que le aseguren una pérdida.

La situación cambia si el juego es jugado muchas veces. Como ningún jugador tiene una estrategia que le garantice salir bien librado a la larga, los jugadores podrían sentirse tentados a tomar la misma decisión cada vez que jugaran el juego. Tal es el caso si I decidiera mostrar consistentemente el lado de la moneda con el símbolo de cara. En ese caso, tan pronto como II notara este comportamiento en I, II estaría seguro de poder ganar mostrando siempre el símbolo de cruz de su moneda. Podemos decir que no es bueno que un jugador tome decisiones predecibles, pues eso no lo favorecería en el sentido de que su oponente podría tomar ventaja de esto. En otras palabras, cuando este juego se repite muchas veces los jugadores deberían jugar sus opciones con una frecuencia de $\frac{1}{2}$ y hacer sus decisiones impredecibles. Una manera en la que el jugador puede hacer esto es lanzando su moneda al aire en lugar de simplemente decidir qué lado de la moneda quiere mostrar. Podemos representar este juego mediante la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Los elementos de esta matriz representan la ganancia del jugador I, de la siguiente manera: para el jugador I, elegir cara o cruz será equivalente a escoger el primero o segundo renglón repectivamente. Similarmente, para el jugador II, elegir cara o cruz será equivalente a escoger la primera o segunda columna. Los elementos $a_{ii}, i = 1, 2$ de la matriz muestran que en el juego, las monedas fueron ambas cara o cruz, mientras que los elementos $a_{ij}, i \neq j$ muestran que las monedas tuvieron distinto símbolo. Como las ganancias de I son las pérdidas de II, y viceversa, este arreglo describe completamente todos los posibles resultados de una jugada de este juego.

DEFINICIÓN 1.2 (Juego suma cero). *Definiremos un juego suma cero para dos personas, como una matriz* 2×2 *de la forma*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{2}$$

donde a, b, c, d *son números arbitrarios y los renglones de la matriz representan las opciones de jugada del jugador* I *(el jugador* I *puede elegir entre el primer y el segundo renglón), mientras que las columnas representan las opciones del jugador* II.

Debido a esta representación, a los juegos que estamos estudiando también se les conoce como *juegos matriciales* 2×2. Cada jugada individual del juego consiste en un par de selecciones, la selección de uno de los renglones por parte de I, y de una de las columnas por parte de II. El renglón y columna seleccionadas constituyen el resultado de la jugada y su ganancia es la entrada de la matriz que se encuentra en ambas selecciones. El número mencionado representará la ganancia de I y la pérdida de II. Así, I buscará maximizar la ganancia, y II buscará minimizarla.

Cuando un mismo juego se repite muchas veces, los jugadores pueden elegir la frecuencia con la que eligen cada una de sus opciones disponibles, *i. e.*, asignarle una probabilidad a cada opción. A estas probabilidades se les llama *estrategias*. Las estrategias se dividen en estrategias mixtas (aleatorizadas) y estrategias puras de acuerdo a la naturaleza de las decisiones de cada jugador.

DEFINICIÓN 1.3 (Estrategias Mixtas). *Sea* $0 \leqslant x \leqslant 1$. *La estrategia de un jugador es mixta si es de la forma* $[x, 1-x]$, *donde* x *representa la probabilidad de que el jugador elija su primera opción, y* $1-x$ *representa la probabilidad de la elección de la segunda opción.*

DEFINICIÓN 1.4 (Estrategias puras). *Una estrategia pura es una estrategia mixta* $[x, 1-x]$ *en la cual* x *toma valores en* $\{0, 1\}$.

De ahora en adelante, las estrategias de I serán representadas como $[p, 1-p]$, mientras que las de II se representarán como $[q, 1-q]$

2. Ganancias Esperadas

Cuando ambos jugadores tienen una estrategia específica, estamos en situación de calcular la ganancia esperada, esto es, la ganancia promedio de cada jugador cuando el número de juegos tiende a infinito. Denotaremos con $e(p, q)$ la ganancia esperada del jugador I para el juego definido en la Definición 1.2. Teniendo en mente que estamos tratando con juegos no cooperativos, en los cuales la decisión de cada jugador es independiente de la decisión de su oponente, observamos que:

- La probabilidad de que I obtenga la ganancia a es la probabilidad de que I elija el primer renglón y II elija la primera columna, esto es $p \times q$.
- La probabilidad de que I obtenga la ganancia b es $p \times (1-q)$
- La probabilidad de que I obtenga la ganancia c es $(1-p) \times q$
- La probabilidad de que I obtenga la ganancia d es $(1-p) \times (1-q)$

y que los cuatro eventos correspondientes son mutuamente excluyentes y cubren todas las posibilidades, se sigue que la ganancia esperada de I es

$$e(p,q) = pqa + p(1-q)b + (1-p)qc + (1-p)(1-q)d$$

EJEMPLO 1.5. *Para el Ejemplo 1.1 con las estrategias* $[,3,,7]$ *para* I*, y* $[,6,,4]$ *para* II*, la ganancia esperada correspondiente es:*

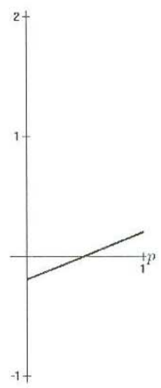
$$e(,3,,6) = (,3)(,6)(1) + (,3)(,4)(-1) + (,7)(,6)(-1) + (,7)(,4)(1) = -,08$$

Observe que cuando I y II utilizan las estrategias dadas, la ganancia esperada para I es $-,08$, en otras palabras, I le paga a II ,08 pesos. Ahora, si I hubiera sabido que II utilizaría la estrategia $[,6,,4]$, hubiera podido modificar su estrategia para obtener una mejor ganancia. Pero no se trata de que I se ponga a experimentar con cuanta estrategia le venga a la mente para ver cuál le conviene más, existe un sencillo método con el que cualquier jugador puede encontrar una estrategia óptima dado que conoce la estrategia a utilizar por su adversario.

Volviendo al Ejemplo anterior, vemos que si II utiliza la estrategia $[,6,,4]$, la ganancia esperada de I dado que utilizó la estrategia $[p, 1-p]$, es la siguiente:

$$e(p,,6) = p(,6)(1) + p(,4)(-1) + (1-p)(,6)(-1) + (1-p)(,4)(1) = ,4p - ,2$$

En otras palabras, la ganancia esperada de I como función de p es $,4p - ,2$. La misión de I es maximizar esta ganacia. Para ver cuál será la mejor estrategia para I nos fijaremos en la forma de la gráfica de $,4p - ,2$. Dado que p es una probabilidad, p toma valores entre 0 y 1.



La gráfica nos muestra que la mayor ganancia esperada para I se dá cuando $p = 1$, con una ganancia esperada de ,2.

Nótese que en el Ejemplo anterior la estrategia óptima para el jugador I dada la estrategia fija de II, resultó ser una estrategia pura. El siguiente Teorema nos dice que este resultado es válido en general.

TEOREMA 1.6. *En cualquier juego suma cero* 2×2*, para cada estrategia de un jugador, su oponente posee una contraestrategia óptima que es pura.*

Demostración: Sea un juego suma cero 2×2 con la siguiente matriz de pago:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Supongamos que II tiene la estrategia $[q, 1-q]$. Entonces, la ganancia esperada de I al utilizar una estrategia $[p, 1-p]$ es la siguiente:

$$\begin{aligned} e(p,q) &= pqa + p(1-q)b + (1-p)qc + (1-p)(1-q)d \\ &= (a-b-c+d)pq + (b-d)p + (c-d)q + d \\ &= ((a-b-c+d)q + b - d)p + (c-d)q + d \end{aligned}$$

Dado que q es una constante, tenemos que la ecuación de la ganancia esperada de I es una función que depende únicamente de p, y que esta es la ecuación de una recta. Dado que p es una probabilidad, a la recta $e(p,q)$ únicamente se le permite correr desde la recta $p = 0$ hasta la recta $p = 1$. Así, $e(p,q)$ encontrará su valor máximo en $p = 0$ o $p = 1$, dependiendo del signo de su pendiente.

Queda así demostrado el Teorema anterior. □

Por el Teorema anterior, I sabe que para cada estrategia $[p, 1-p]$ que utilice, II tiene una contraestrategia pura que le regresa a I la menor ganancia posible dadas las dos estrategias puras de II. Sean $r_1(p)$ y $r_2(p)$ la ganancia esperada de I dadas las estrategias puras de II $[1,0]$ y $[0,1]$ respectivamente. Calculamos entonces

$$r_1(p) = p(1)a + (1-p)(1)c = (a-c)p + c$$

$$r_2(p) = p(1)b + (1-p)(1)d = (b-d)p + d$$

Es obvio que II elegirá la estrategia pura que le permita minimizar la ganancia esperada de I.

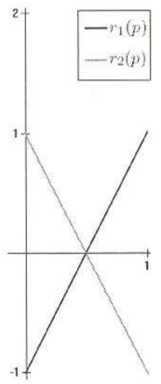
Dado que la variable independiente p aparece en las expresiones de $r_1(p)$ y $r_2(p)$ con grado a lo más 1, las gráficas de estas funciones son líneas rectas. Como p denota una probabilidad, tenemos $0 \leqslant p \leqslant 1$, y así estas gráficas consisten de los segmentos de recta que van de $p = 0$ a $p = 1$. Más específicamente, dado que

$$r_1(0) = (0)(1)a + (1-0)(1)c = c$$

$$r_1(1) = (1)(1)a + (1-1)(1)c = a$$

se sigue que la gráfica de $r_1(p)$ es el segmento de recta que une los puntos $(0, c)$ y $(1, a)$. Similarmente, la gráfica de $r_2(p)$ consiste del segmento de línea que une $(0, d)$ y $(1, b)$

EJEMPLO 1.7. *De nuevo para el Ejemplo 1.1, veamos las siguientes gráficas para $r_1(p)$ y $r_2(p)$:*



Definición 1.8 ($E_R(p)$). *La gráfica de $E_R(p)$ consiste en aquella línea tal que, para cada valor posible de p, contiene el más bajo de los dos puntos $(p, r_1(p))$ y $(p, r_2(p))$. Es decir, $E_R(p) = min\{r_1(p), r_2(p)\}$.*

Dado que II busca minimizar sus pérdidas, *i. e.* las ganancias de I, la gráfica de $E_R(p)$ nos dá la pérdida esperada elegida por II entre $r_1(p)$ y $r_2(p)$.

Definición 1.9 (Estrategia Maximin). *Si (x, w) es el punto más alto dentro de la gráfica de $E_R(p)$ entonces $[x, 1-x]$ es una estrategia maximin para I, y w es la ganancia maximin esperada de I.*

Si I emplea la estrategia maximin $[x, 1-x]$ entonces puede esperar ganar, a la larga, al menos w en promedio.

La razón para esta nomenclatura es que cada punto de esta gráfica es el mínimo de las dos cantidades a perder posibles de II, y cuando I elige el punto más alto de la gráfica está maximizando la pérdida mínima de II.

Observando la gráfica anterior, podemos notar que la estrategia maximin para I en el Ejemplo 1.1 es $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, y su valor maximin es cero.

II sabe que para cualquier estrategia $[q, 1-q]$ que emplee en un juego 2×2 puede esperar que I utilice una contraestrategia que le regrese la mayor de las ganancias provenientes de las dos estrategias puras de las que dispone. Sean $c_1(q)$ y $c_2(q)$, respectivamente, las ganancias esperadas provenientes de las estrategias puras de I $[1, 0]$ y $[0, 1]$. Entonces, tendríamos

$$c_1(q) = 1(q)(a) + 1(1-q)(b) = (a-b)q + b$$

$$c_2(q) = 1(q)(c) + 1(1-q)(d) = (c-d)q + d$$

Observemos que las gráficas de $c_1(q)$ y $c_2(q)$ son líneas rectas. Como q denota una probabilidad, $0 \leqslant q \leqslant 1$, y por lo tanto estas gráficas consisten de los segmentos de recta que van de $q = 0$ a $q = 1$. Más específicamente, como

$$c_1(0) = 1(0)(a) + 1(1-0)(b) = b$$

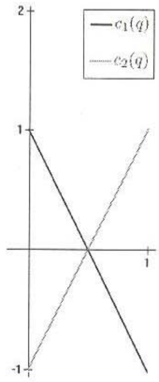
$$c_1(1) = 1(1)(a) + 1(1-1)(b) = a$$

se sigue que la gráfica de $c_1(q)$ es el segmento de recta que une los puntos $(0, b)$ y $(1, a)$. Similarmente, como

$$c_2(0) = 1(0)(c) + 1(1-0)(d) = d$$
$$c_2(1) = 1(1)(c) + 1(1-1)(d) = c$$

se sigue que la gráfica de $c_2(q)$ es el segmento de recta que une los puntos $(0, d)$ y $(1, c)$.

EJEMPLO 1.10. *Basándonos nuevamente en el Ejemplo 1.1, las gráficas para* $c_1(q)$ *y* $c_2(q)$ *son las siguientes:*



DEFINICIÓN 1.11 ($E_C(q)$). *La gráfica de* $E_C(q)$ *consiste en aquella línea que, para cada valor posible de* q*, contiene el más alto de los dos puntos* $(q, c_1(q))$ *y* $(q, c_2(q))$*. Es decir,* $E_C(q) = max\{c_1(q), c_2(q)\}$*.*

$E_C(q)$ denota la ganancia esperada elegida por I entre $c_1(q)$ y $c_2(q)$. Nótese que en este caso la ganancia esperada está en términos de q, es decir, de la estrategia de II.

DEFINICIÓN 1.12 (Estrategia Minimax). *Si* (x, z) *es el punto más bajo de la gráfica de* $E_C(q)$ *entonces* $[x, 1-x]$ *es una estrategia minimax para* II*, y* z *es la ganancia minimax esperada para* I*.*

Si II emplea la estrategia minimax $[x, 1-x]$ entonces puede esperar que la ganacia promedio de I no sea mayor que z.

La razón para esta nomenclatura es que cada punto de esta gráfica es el máximo de las dos ganancias posibles de I, y cuando II elige el punto más bajo en esta gráfica está minimizando la ganancia máxima de I.

En la gráfica anterior, vemos que la estrategia minimax para II es $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, y su valor minimax es cero.

En el Ejemplo 1.1, el valor maximin y el minimax son iguales, situación que se observa siempre en los juegos de suma cero 2×2, como se enuncia en el siguiente Teorema:

TEOREMA 1.13 (Teorema minimax 2×2). *Para cada juego de suma cero* 2×2 *existe un número* v *que tiene las siguientes propiedades:*

- *La estrategia maximin le garantiza a I una ganancia esperada de al menos v.*
- *La estrategia minimax le garantiza a II que la ganancia esperada de I será a lo más v.*

El número v mencionado en el teorema anterior es llamado el *valor del juego.* Juntos, la estrategia maximin $[\bar{p},1\text{-}\bar{p}]$ de I, la estrategia minimax $[\bar{q},1\text{-}\bar{q}]$ de II y el valor del juego, conforman la *solución* del juego.

Decimos que un juego es estrictamente determinado cuando las estrategias minimax y maximin resultan ser estrategias puras, y en un juego 2×2, esto desemboca en el siguiente Teorema:

TEOREMA 1.14. *Un juego 2×2 de suma cero es estrictamente determinado si y solo si contiene una entrada s la cual es un mínimo para su renglón y un máximo para su columna.*

Esta entrada s tiene inclusive un nombre particular:

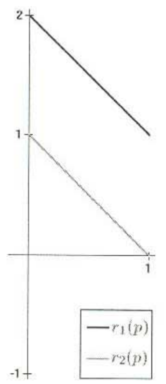
DEFINICIÓN 1.15 (Punto Silla). *Una entrada en un juego 2×2 que es un mínimo para su renglón y un máximo para su columna, es llamado un* punto silla

EJEMPLO 1.16. *Consideremos el juego determinado por la siguiente matriz:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

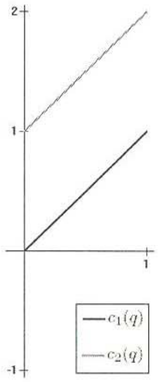
Podemos observar que la entrada correspondiente al segundo renglón y segunda columna es un mínimo para su renglón y un máximo para su columna, y por lo tanto es un punto silla.

Resulta de interés encontrar las estrategias minimax y maximin de esta matriz.



es fácil ver que la estrategia maximin de I es $[0, 1]$, y su valor maximin es 1.

Veamos ahora la siguiente gráfica, perteneciente al mismo ejemplo:



podemos ver que la estrategia minimax de II es $[0,1]$, y su valor minimax es 1.

TEOREMA 1.17. *El punto silla de un juego 2×2 estrictamente determinado es también su valor, y el renglón y la columna de el punto silla constituyen estrategias puras maximin y minimax, respectivamente.*

Demostración: Dada una matriz estrictamente determinada de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

siempre podemos suponer que el punto silla es a. Entonces, y dado que $c \leqslant a \leqslant b$, tenemos que la gráfica de $r_1(p)$ es una recta con pendiente mayor o igual a cero. No sabemos mucho acerca de cómo se comporta $r_2(p)$, pero sabemos que a partir de algún punto entre cero y uno se encontrará por encima o al menos sobre la recta $r_1(p)$, y por lo tanto tenemos que $(1, a)$ es el punto más alto dentro de la gráfica de $E_R(p)$, demostrando que $[1, 0]$ es una estrategia maximin para I, y a su valor maximin.

Basándonos de nuevo en que $c \leqslant a \leqslant b$, la gráfica de $c_1(q)$ es una recta con pendiente menor o igual a cero, y en algún punto entre cero y uno, la recta $c_2(q)$ se encontrará por debajo o sobre la recta $c_1(q)$. Entonces, tendríamos que $(1, a)$ es el punto más bajo de $E_C(q)$, demostrando que $[1, 0]$ es una estrategia minimax para II, y a su valor minimax. $\square$

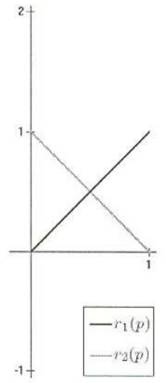
LEMA 1.18. *Si el juego no tiene una estrategia maximin pura para I, entonces tiene*

- *estrategia maximin dada por* $[\frac{d-c}{a-b-c+d}, \frac{a-b}{a-b-c+d}]$
- *valor maximin igual a* $\frac{ad-bc}{a-b-c+d}$

Demostración: Supongamos que tenemos un juego sin estrategia maximin pura, i.e., sin puntos silla. Entonces, podemos reacomodar las entradas de la matriz de tal forma que nos quede de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

con $d \geq a > c \geq b$. Observamos que $r_1(p)$ tiene pendiente mayor que cero, mientras que $r_2(p)$ tiene pendiente menor que cero, y ambas rectas se cruzan en el intervalo $(0, 1)$, como ilustra la siguiente gráfica:



Es fácil ver que el punto más alto de la gráfica de $E_R(p)$ es aquel donde $r_1(p) = r_2(p)$, esto es,

$$
\begin{aligned}
&(a-c)p + c = (b-d)p + d \\
&(a-c-b+d)p = d-c \\
&p = \frac{d-c}{a-b-c+d} \\
&1-p = 1 - \frac{d-c}{a-b-c+d} = \frac{a-b}{a-b-c+d} \\
&r_1(\frac{d-c}{a-b-c+d}) = \frac{(b-d)(d-c)}{a-b-c+d} + c \\
&r_1(\frac{d-c}{a-b-c+d}) = \frac{ad-bc}{a-b-c+d}
\end{aligned}
$$

Quedando demostrado así el Lema anterior. □

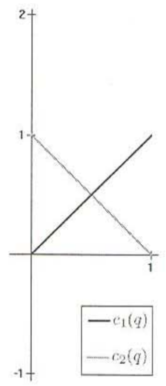
LEMA 1.19. *Si el juego no tiene una estrategia minimax pura para II, entonces tiene*

- *estrategia minimax dada por* $[\frac{d-b}{a-b-c+d}, \frac{a-c}{a-b-c+d}]$
- *valor minimax igual a* $\frac{ad-bc}{a-b-c+d}$

Demostración: Supongamos que tenemos un juego sin estrategia minimax pura. Reacomodaremos las entradas de la matriz de ganancias de tal forma que nos quede de la forma

$$
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},
$$

con $d \geq a > c \geq b$. Observemos que $c_1(q)$ tiene pendiente mayor que cero, mientras que la pendiente de $c_2(q)$ es menor que cero. Estas dos rectas llegan a cruzarse dentro del intervalo $(0, 1)$, como se observa en la siguiente gráfica:



Nótese que el punto más bajo de la gráfica de $E_C(q)$ es aquel donde $c_1(q) = c_2(q)$, esto es,

$$\begin{aligned}
&(a-b)q + b = (c-d)q + d \\
&(a-c-b+d)q = d-b \\
&q = \frac{d-b}{a-b-c+d} \\
&1-q = 1 - \frac{d-b}{a-b-c+d} = \frac{a-c}{a-b-c+d} \\
&c_1\left(\frac{d-b}{a-b-c+d}\right) = \frac{(a-b)(d-b)}{a-b-c+d} + b \\
&c_1\left(\frac{d-b}{a-b-c+d}\right) = \frac{ad-bc}{a-b-c+d}
\end{aligned}$$

Quedando demostrado así el Lema anterior. □

3. Pares de equilibrio

Una de las propiedades interesantes de las estrategias maximin y minimax en estos juegos de dos personas suma cero es que si ambos jugadores están usando estas estrategias, a ninguno le conviene cambiar su estrategia si su oponente se mantiene utilizando su estrategia maximin o minimax, según sea el caso. Así, si I está jugando con su estrategia maximin $\bar{p}$, y II está jugando con su estrategia minimax $\bar{q}$, si I cambia a otra estrategia p pero II se mantiene con su estrategia $\bar{q}$, no le irá mejor que si se hubiera quedado con su estrategia $\bar{p}$, y viceversa. Puede decirse que las estrategias maximin y minimax de los jugadores se encuentran en equilibrio. Esto también implica que I puede anunciar que utilizará la estrategia $\bar{p}$, y, con esta información, II no podrá hacer nada mejor que utilizar su estrategia $\bar{q}$, en respuesta a la estrategia de I. Estas estrategias son a prueba de espías, pues no importa si tu oponente sabe que utilizarás tu estrategia maximin, aún así tienes garantizada una ganancia mínima v. Únicamente las estrategias maximin y minimax tienen esta propiedad, pero antes de demostrarlo, daremos la definición formal de un par de estrategias en equilibrio.

DEFINICIÓN 1.20 (Pares de equilibrio). *Un par de estrategias* $[\bar{p}, 1-\bar{p}]$ *(perteneciente a las estrategias de I), y* $[\bar{q}, 1-\bar{q}]$ *(perteneciente a las estrategias de II) son un par de equilibrio si para cualquier estrategia* $[p, 1-p]$ *de I, y cualquier estrategia* $[q, 1-q]$ *de II, tenemos*

$$e(p, \bar{q}) \leqslant e(\bar{p}, \bar{q}) \leqslant e(\bar{p}, q)$$

LEMA 1.21. *Si* (p_1, q_1) *y* (p_2, q_2) *son pares de equilibrio, entonces* $e(p_1, q_1) = e(p_2, q_2)$.

Demostración: Como (p_1, q_1) es un par de equilibrio, tenemos:

$$e(p_2, q_1) \leqslant e(p_1, q_1) \leqslant e(p_1, q_2)$$

y dado que $e(p_2, q_2)$ también es un par de equilibrio,

$$e(p_1, q_2) \leqslant e(p_2, q_2) \leqslant e(p_2, q_1)$$

combinando obtenemos:

$$e(p_2, q_2) \leqslant e(p_2, q_1) \leqslant e(p_1, q_1) \leqslant e(p_1, q_2) \leqslant e(p_2, q_2)$$

De donde se sigue que $e(p_1, q_1) = e(p_2, q_2)$. □

TEOREMA 1.22. *Si* $([\bar{p}, 1-\bar{p}], [\bar{q}, 1-\bar{q}])$ *son un par de estrategias en un juego* 2×2*, entonces* $(\bar{p}, \bar{q})$ *es un par de equilibrio si y solo si* $(\bar{p}, \bar{q}, e(\bar{p}, \bar{q}))$ *es una solución del juego.*

Demostración: Supongamos que $[\bar{p}, 1\text{-}\bar{p}]$ es una estrategia maximin y $[\bar{q}, 1\text{-}\bar{q}]$ es una estrategia minimax. Entonces, para cualesquiera otras estrategias p, q de I y II

$$e(\bar{p}, \bar{q}) \leqslant e(\bar{p}, q)$$

pues sabemos que si I utiliza su estrategia maximin, ganará cuando menos v, que es $e(\bar{p}, \bar{q})$. Además,

$$e(\bar{p}, \bar{q}) \geq e(p, \bar{q})$$

pues si II utiliza su estrategia minimax, perderá a lo más $e(\bar{p}, \bar{q})$. De todo esto se sigue que

$$e(p, \bar{q}) \leqslant e(\bar{p}, \bar{q}) \leqslant e(\bar{p}, q)$$

y por lo tanto, $(\bar{p}, \bar{q})$ es un par de equilibrio.

Ahora, sea $(\bar{p}, \bar{q})$ un par de equilibrio, y $(\breve{p}, \breve{q}, e(\breve{p}, \breve{q}))$ una solución del juego.

Por la primera parte de la demostración, sabemos que $(\breve{p}, \breve{q})$ es un par de equilibrio, y por el Lema 1.22, $e(\bar{p}, \bar{q}) = e(\breve{p}, \breve{q})$. También, dado que $(\bar{p}, \bar{q})$ es un par de equilibrio, tenemos lo siguiente:

$$c_1(\bar{q}) = e(1, \bar{q}) \leqslant e(\bar{p}, \bar{q}) \leqslant e(\bar{p}, 1) = r_1(\bar{p})$$

$$c_2(\bar{q}) = e(0, \bar{q}) \leqslant e(\bar{p}, \bar{q}) \leqslant e(\bar{p}, 0) = r_2(\bar{p})$$

$$e(\breve{p}, \breve{q}) = min\{r_1(\breve{p}), r_2(\breve{q})\} = e(\bar{p}, \bar{q}) \leqslant min\{r_1(\bar{p}), r_2(\bar{p})\}$$

de donde concluimos que

$$min\{r_1(\breve{p}), r_2(\breve{q})\} = min\{r_1(\bar{p}), r_2(\bar{p})\}$$

ya que, de otra forma, $e(\breve{p},\breve{q})$ no sería el punto más alto en $E_R(p)$. Si en nuestro juego no hay punto silla, sabemos que

$$e(\breve{p},\breve{q}) = r_1(\breve{p}) = r_2(\breve{p}) = min\{r_1(\bar{p}), r_2(\bar{p})\},$$

y como estamos tratando con rectas con pendiente distinta de cero, se concluye que $\breve{p}$=$\bar{p}$. Ahora, si en el juego tuviéramos un punto silla, tenemos:

$$min\{r_1(\bar{p}), r_2(\bar{p})\} = e(\breve{p},\breve{q}) = r_1(\breve{p}) \leqslant r_2(\breve{p}),$$

concluyendo que $\breve{p}$=$\bar{p}$.

$$e(\breve{p},\breve{q}) = max\{c_1(\breve{p}), c_2(\breve{q})\} = e(\bar{p},\bar{q}) \geq max\{c_1(\bar{q}), c_2(\bar{q})\}$$

de donde concluimos que

$$max\{c_1(\breve{p}), c_2(\breve{q})\} = max\{c_1(\bar{q}), c_2(\bar{q})\}$$

ya que, de otra forma, $e(\breve{p},\breve{q})$ no sería el punto más bajo en $E_C(p)$. Si en nuestro juego no hay punto silla, sabemos que

$$e(\breve{p},\breve{q}) = c_1(\breve{q}) = c_2(\breve{q}) = max\{c_1(\bar{q}), c_2(\bar{q})\},$$

y como estamos tratando con rectas con pendiente distinta de cero, se concluye que $\breve{q}$=$\bar{q}$. Si tuviéramos un punto silla,

$$max\{c_1(\bar{q}), c_2(\bar{q})\} = e(\breve{p},\breve{q}) = c_1(\breve{q}) \geq c_2(\breve{q}),$$

concluyendo que $\breve{q}$=$\bar{q}$.

□

CAPÍTULO 2

Funciones de Utilidad

1. Relaciones de Preferencia.

Como hemos visto, el modelo matemático que se expone en este trabajo estudia un problema en el que uno o varios individuos, de manera independiente, toman decisiones cuyas consecuencias son aleatorias. El esquema en esta clase de problemas generalmente es el siguiente: los individuos deben escoger una de un conjunto de decisiones o estrategias y cada estrategia ϕ tendrá como consecuencia un resultado $o \in O$ de acuerdo a una distribución de probabilidad P^{ϕ} (sobre O) determinada por la estrategia . Al escoger entre varias estrategias, usualmente una persona se basa tanto en *el valor que para ella tienen los diferentes resultados* posibles de cada estrategia, como en la probabilidad de que estos resultados ocurran (prefiriendo las estrategias que representan un mayor valor para ella: lo que se supone es un comportamiento 'racional'). El método utilizado para escoger la estrategia a tomar constituye un patrón de preferencias.

La teoría de utilidad demuestra que si el patrón de preferencias satisface ciertas condiciones entonces el valor de todos los resultados en O se podrá establecer mediante una función numérica definida sobre O (llamada *función de utilidad*) y que las preferencias entre las estrategias estarán basadas solamente en el valor esperado de la función de utilidad con respecto a las estrategias. Las condiciones sobre la escala de preferencias a que nos referimos constituyen esencialmente requisitos de consistencia o coherencia en la actitud frente al azar (o los riesgos derivados del azar). Matemáticamente, un patrón de preferencias se representa mediante una *relación de orden* en un subconjunto apropiado de $\mathcal{P}(O)$, el espacio de distribuciones de probabilidad sobre O. El caso mas simple, que es el que se aplica en el problema tratado en esta tesis, considera un conjunto O finito y el espacio $\mathcal{P}(O)$ en su totalidad.

Dada una relación de orden $\preccurlyeq$ sobre $\mathcal{P}(O)$ y $P, Q \in \mathcal{P}(O)$, escribiremos como es usual $P \sim Q$ si $P \preccurlyeq Q$ y $Q \preccurlyeq P$ y escribiremos $P \prec Q$ si $P \preccurlyeq Q$ pero no $Q \preccurlyeq P$. Definimos además, la operación de 'mezcla' (combinación convexa) de dos distribuciones de probabilidad P y Q para $\alpha \in [0,1]$ de una manera natural mediante

$$\alpha(P + (1-\alpha)Q)(\{o\}) := P(\{o\}) + (1-\alpha)Q(\{o\}), \quad \forall o \in O. \tag{3}$$

Con estas convenciones, una relación de orden $\preccurlyeq$ sobre $\mathcal{P}(O)$ se dice una *relación de preferencia* si satisface las siguientes propiedades (llamadas 'axiomas de racionalidad'):

A.1 La relación $\preccurlyeq$ es completa (lineal) y transitiva.
A.2 Si $P_1 \sim P_2$, entonces para toda $\alpha \in [0,1]$ y para toda $P \in \mathcal{P}$,

$$\alpha P_1 + (1-\alpha)P \sim \alpha P_2 + (1-\alpha)P. \tag{4}$$

A.3 Si $P_1 \prec P_2$, entonces para toda $\alpha \in (0,1]$ y para toda $P \in \mathcal{P}$,

$$\alpha P_1 + (1-\alpha)P \prec \alpha P_2 + (1-\alpha)P. \tag{5}$$

A.4 Si $P_1 \prec P_2 \prec P_3$, entonces existe $\alpha \in (0,1)$ tal que,

$$\alpha P_1 + (1-\alpha)P_3 \sim P_2. \tag{6}$$

Se desprende claramente de las propiedades del operador esperanza matemática que cualquier función $U : O \to \mathbb{R}$ determina una relación de preferencia $\preccurlyeq_U$ sobre $\mathcal{P}(O)$ mediante

$$P \preccurlyeq_U Q \quad \text{si y solo si} \quad E^P[U] \leqslant E^Q[U], \tag{7}$$

donde $E^P[U]$ representa la esperanza de U con respecto a P. La cuestión importante es si es válida la afirmación recíproca: dada una relación de preferencia $\preccurlyeq$, ¿existe siempre una función $U : O \to \mathbb{R}$ tal que $\preccurlyeq_U = \preccurlyeq$? El Teorema de Von neumann-Morgestern da una respuesta afirmativa: toda relación de preferencia esta determinada por una función de utilidad. Definiremos la *utilidad de una distribución* P como el número $E^P[U]$.

DEFINICIÓN 2.1. *Diremos que dos funciones de utilidad son estratégicamente equivalentes si inducen o generan la misma relación de preferencia en el espacio de distribuciones correspondiente.*

Nótese que una función de utilidad es estratégicamente equivalente a cualquier transformación afín positiva de ella, es decir, para todo $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$ las funciones de utilidad U y $aU + b$ son estratégicamente equivalentes.

2. Sensibilidad al riesgo

En vista de lo anterior, supondremos que las preferencias de nuestros jugadores están determinadas por una función de utilidad. Es importante señalar que en nuestro modelo, el conjunto O de resultados será un subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que $1 \leqslant |O| \leqslant 4$ (las entradas de la matriz de ganancias) y que la distribución P sobre O estará determinada por las acciones o decisiones tomadas por los dos jugadores. Podemos también pensar los resultados de las acciones de los jugadores como los valores de una v.a. real X con distribución $P_X = P$. De esa manera, la utilidad de la v.a. X estará dada por el número $E[U(X)]$.

Supondremos por simplicidad que los resultados nuestros jugadores son ganancias monetarias y que por lo tanto las funciones de utilidad consideradas están dadas por funciones $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crecientes.

Un caso particular importante es desde luego el de la función de utilidad identidad $U(x) = x$. En ese caso, la utilidad de una v.a X está dada por $E[X]$, el valor esperado de X; es decir, la escala de valores de los resultados posibles está determinada exclusivamente (linealmente) por la magnitud relativa entre estos valores. A una persona con esta función de utilidad, le resultaría completamente indiferente, por ejemplo, ganar a cambio de un servicio una cantidad de \$1000 en efectivo o recibir un boleto para una rifa en la cual tiene una probabilidad de 1/2 de ganar \$0 pesos y una probabilidad de 1/2 de ganar \$2000. Esta utilidad tipifica una actitud de neutralidad al riesgo. Obsérvese que en este caso la utilidad de una v.a. es igual a su valor esperado.

Otras actitudes típicas sensibles al riesgo que son de interés en este trabajo están caracterizadas precisamente en términos de la utilidad de las v.a.'s:

• Un jugador se dice *adverso al riesgo* si siempre prefiere recibir con certeza el valor esperado de una v.a. (no-degenerada) a recibir el valor que pueda tomar la v.a., es decir, si la utilidad del valor esperado de X es mayor que la utilidad de X:

$$U(E[X]) > E[U(X)].$$

• Un jugador se dice *proclive al riesgo* si siempre prefiere recibir el valor que pueda tomar una v.a. (no-degenerada) a recibir con certeza el valor esperado de esa v.a., es decir, si la utilidad de X es mayor que la utilidad del valor esperado de X:

$$E[U(X)] > U(E[X]).$$

El siguiente criterio es útil para conocer el tipo de sensibilidad al riesgo determinado por una función de utilidad.

PROPOSICIÓN 2.2. *Un jugador es adverso [proclive] al riesgo si y solo si su función de utilidad es estrictamente cóncava [convexa].*

Definamos ahora algunos conceptos útiles para caracterizar la actitud al riesgo inherente a una función de utilidad.

DEFINICIÓN 2.3. *El equivalente seguro de una v.a. X se define como el número $\mathcal{S}[X]$ tal que el jugador es indiferente entre esa cantidad con certeza y la v.a., es decir, el número $\mathcal{S}[X]$ tal que*

$$U(\mathcal{S}[X]) = E[U(X)].$$

Equivalentemente

$$\mathcal{S}[X] := U^{-1}E[U(X)].$$

Obsérvese que U determina aversión al riesgo si y solo si $\mathcal{S}[X] < E[X]$ y lo contrario es válido para la inclinación al riesgo.

DEFINICIÓN 2.4. *El Premium de riesgo de una v.a. X es el número $\mathcal{R}(X)$ tal que*

$$U(E[X] - \mathcal{R}[X]) = E[U(X)].$$

Equivalentemente

$$\mathcal{R}[X] := E[X] - \mathcal{S}[X].$$

Obviamente, U determina aversión, inclinación o neutralidad al riesgo si $\mathcal{R}[X]$ es positivo, negativo o cero respectivamente. Intuitivamente, para un adverso al riesgo que recibirá el resultado de una v.a. por ejemplo, el Premium de riesgo es la cantidad que el jugador esta dispuesto a que se le quite o descuente del valor esperado de X con tal de no correr los riesgos asociados a esa v.a. (el proclive al riesgo pide una cantidad $|\mathcal{R}[X]|$ adicional a $E[X]$ para deshacerse de su v.a.).

Supongamos que para dos jugadores sus respectivos Premiums de Riesgo $\mathcal{R}_1[X]$ y $\mathcal{R}_2[X]$ son tales que $\mathcal{R}_1[X] > \mathcal{R}_2[X]$ para toda v.a. X. Es razonable entonces afirmar que el primer jugador es mas adverso al riesgo que el segundo. Por otra parte, de la Proposición 2.2 podemos ver que si U tiene segunda derivada continua entonces el jugador es adverso, proclive o neutral al riesgo dependiendo de si U''

es positiva, negativa o identicamente cero respectivamente. Esto parece sugerir que U'' podría utilizarse de alguna manera para medir (localmente) la sensibilidad al riesgo. Evidentemente, $|U''(x)|$ no sería apropiado para el propósito deseado, ya que como es fácil comprobar, se puede tener $|U_1''(x)| \neq |U_2''(x)|$ para funciones de utilidad U_1 y U_2 estratégicamente equivalentes. Pratt[**2**] encontró que en la función definida por la razón

$$r(x) := -\frac{U''(x)}{U'(x)},$$

se elimina lo arbitrario y se conserva lo esencial de la sensibilidad al riesgo en $|U''(x)|$. Llamaremos a esta función la *función de riesgo* de U o del jugador cuya función de utilidad es U.

Nótese que como estamos considerando que U es creciente, tenemos que $U'(x) > 0$ para toda x. Por lo tanto si $r(x)$ es positivo, negativo o cero para toda x, entonces U es cóncava, convexa o una linea recta, respectivamente, es decir, el jugador es adverso, proclive o neutral al riesgo, respectivamente.

Para convencernos de que la función de riesgo funciona como una medida local de sensibilidad al riesgo, consideremos una v.a. X de valor absoluto pequeño con un capital inicial x_0. Denotemos con α el Premium de riesgo de la v.a. $x_0 + X$, es decir, $\alpha := \mathcal{R}[x_0 + X]$. Entonces tenemos que por definición

$$U(x_0 - \alpha) = E[U(x_0 + X)].$$

Tomando el desarrollo en series de Taylor a ambos lados de la igualdad anterior, se obtiene que

$$U(x_0 - \alpha) = U(x_0) - \alpha U'(x_0) + \frac{\alpha^2}{2!}U''(x_0) + \cdots \tag{8}$$

y

$$E[U(x_0 + X)] = E\left[U(x_0) + U'(x_0)X + \frac{1}{2!}U''(x_0)X^2 + \frac{1}{3!}U'''(x_0)X^3 + \cdots\right] \tag{9}$$

Igualando las ecuaciones (8) y (9) y descartando los términos de orden mayor que 1 obtenemos

$$-\alpha U'(x_0) \approx \frac{1}{2}E[X^2]\,U''(x_0). \tag{10}$$

Tomando en cuenta que $E[X^2]$ es igual a σ_X^2, la varianza de X, y reordenando, la ecuación anterior queda

$$\mathcal{R}[x_0 + X] \approx \frac{1}{2}\sigma_X^2\, r(x_0).$$

Con palabras, la ecuación anterior dice que el Premium de Riesgo del jugador con un capital inicial x_0 para una v.a. X de rango pequeño y de media 0 es, en una aproximación de primer orden, $r(x_0)$ veces la mitad de la varianza de X.

Consideremos ahora dos funciones de utilidad U_1 y U_2 y sus respectivas funciones de riesgo r_1 y r_2. Si para un nivel de referencia x_0, se tiene que $r_1(x_0) > r_2(x_0)$ entonces, para cualquiera v.a. X de rango relativamente pequeño y de media cero, el Premium de Riesgo de la v.a. 'alrededor de x_0' de U_1, es decir, $\mathcal{R}_1[x_0 + X]$ es mayor que el correspondiente Premium de Riesgo $\mathcal{R}_2[x_0+X]$ de U_2. Esta conclusión se puede extender a cualquiera v.a. si la condición sobre las funciones de riesgo se cumple para toda x, como lo establece el siguiente teorema.

TEOREMA 2.5. *Si las respectivas funciones de riesgo de dos jugadores cumplen con que $r_1(x) > r_2(x)$ para toda x, entonces $\mathcal{R}_1[x+X] > \mathcal{R}_2[x+X]$ para toda x y para toda v.a. X.*

Demostración: Supongamos entonces que $r_1(x) > r_2(x)$. Entonces como

$$r_2(x) - r_1(x) = -\frac{d}{dx}\log U_2'(x) + \frac{d}{dx}\log U_1'(x) \tag{11}$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\log \frac{U_1'(x)}{U_2'(x)}\right], \tag{12}$$

entonces la derivada de $\log[U_1'(x)/U_2'(x)]$ es negativa y por lo tanto esta función es decreciente. Obsérve además que

$$\frac{d}{dt}U_1(U_2^{-1}(t)) = \frac{U_1'(U_2^{-1}(t))}{U_2'(U_2^{-1}(t))},$$

de donde la derivada es decreciente en t, ya que $\log[U_1'(x)/U_2'(x)]$. Por lo tanto, $U_1'(U_2^{-1}(t))$ es una función cóncava de t.

Desarrollando ahora la desigualdad a la que queremos llegar obtenemos, por definición,

$$\mathcal{R}_i[x+X] = x + E[X] - U_i^{-1}\big(E[U_i(x+X)]\big), \qquad i = 1, 2,$$

y restando los términos correspondientes de las dos igualdades

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1[x+X] - \mathcal{R}_2[x+X] &= U_2^{-1}\big(E[U_2(x+X)]\big) - U_1^{-1}\left(E[U_1(x+X)]\right)\\ &= U_2^{-1}(E[Y]) - U_1^{-1}\big(E[U_1U_2^{-1}(Y)]\big),\end{aligned}$$

donde $Y = U_2(x+X)$. Como $U_1(U_2^{-1}(t))$ es cóncava, de la desigualdad de Jensen se sigue que

$$E[U_1U_2^{-1}(Y)] < U_1U_2^{-1}(E[Y]).$$

Substituyento esto último en la expresión previa, vemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1[x+X] - \mathcal{R}_2[x+X] &> U_2^{-1}(E[Y]) - U_1^{-1}U_1U_2^{-1}(E[Y])\\ &= U_2^{-1}(E[Y]) - U_2^{-1}(E[Y])\\ &> 0,\end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar. □

Una clase importante de funciones de utilidad es aquella para las cuales la función de riesgo es constante, es decir, el Premium de riesgo $\mathcal{R}[x_0+X]$ no depende de x_0. A partir de la definicion de $r(x)$ puede demostrarse que la función de utilidad debe ser necesariamente de una de las siguientes formas:

- $U(x) = ax + b$. (Neutralidad al riesgo)
- $U(x) = e^{-bx}$ con $b < 0$. (Proclividad al riesgo)
- $U(x) = -e^{-bx}$ con $b > 0$. (Aversión al riesgo)

donde b es el coeficiente de sensibilidad al riesgo.

Además de ser funciones matemáticamente mas manejables, por ser analíticas, se ha comprobado en algunas aplicaciones que estas funciones modelan razonablemente bien el comportamiento de los individuos ante el riesgo derivado del azar .

Por esta razón, en el presente trabajo se considerarán jugadores con sensibilidad al riesgo dada por una función de utilidad.

CAPíTULO 3

Juegos de suma no-cero

En este capítulo nos enfocaremos a la discusión de los juegos no cooperativos de suma no cero con dos jugadores, a los que llamaremos simplemente juegos de suma no cero. Podemos decir que los juegos suma no cero son aquellos que no son juegos suma cero, esto es, en un juego suma no cero la ganancia de un jugador no es la pérdida de su adversario.

En estos juegos los jugadores no son antagonistas por completo, puede darse el caso de que ambos se encuentren más felices con un resultado que con otro. Como veremos más adelante, algunos de los resultados válidos para suma cero, ya no lo son para suma no cero, por ejemplo:

- Un par maximin no es necesariamente un par de equilibrio, o vice versa.
- No todos los pares de equilibrio tienen las mismas ganancias, y
- no hay un concepto obvio de solución para el juego.

Los juegos de suma no cero también son modelados mediante un jugador I que selecciona un renglón y un jugador II que selecciona una columna de un arreglo rectangular dado. Sin embargo, como la ganancia de un jugador ya no es necesariamente la pérdida del otro, la ganancia del juego ya no podrá ser descrita por un solo número.

DEFINICIÓN 3.1 (Juegos suma no cero). *Definiremos un juego de dos personas suma no cero como un arreglo de la forma*

$$\begin{pmatrix} (a_1, b_1) & (a_2, b_2) \\ (a_3, b_3) & (a_4, b_4) \end{pmatrix} \tag{13}$$

donde el resultado de que I elija el renglón i y II elija la columna j es el par de ganancias

$$(a_i, b_i),$$

donde a_i denota la ganancia de I y b_i denota la ganancia de II. Recordemos que en el caso de suma cero I buscaba maximizar su ganancia y, dado que las ganancias de I eran las pérdidas de II, II buscaba minimizar esa misma ganancia. En el caso de suma no cero, dado que las ganancias de los jugadores son independientes una de otra, supondremos que cada jugador basa sus decisiones unicamente en sus propias ganancias.

DEFINICIÓN 3.2 (Principio de Racionalidad). *Cada jugador está motivado sólo por el deseo de terminar el juego con la mayor ganancia posible.*

Un ejemplo de este principio es que, en un juego, ningún jugador disminuirá su ganancia con tal de disminuir la de su oponente. Una consecuencia del principio de racionalidad es que cada jugador ejecutará su decisión sin tomar en cuenta la ganancia que pudiera obtener su adversario; así, podemos pensar en que I enfrenta el juego de suma cero

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

contra algún oponente irrelevante, siendo los renglones de la matriz sus estrategias puras, mientras que II enfrenta el juego de suma cero

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

donde su objetivo, al igual que el de I es el de maximizar su ganancia, y sus estrategias puras son las columnas de la matriz. Como consecuencia, ambos jugadores tienen estrategias maximin.

1. Estrategias puras

En esta sección veremos algunos tipos de estrategias, todas ellas puras. También analizaremos un ejemplo de un juego 2×2 suma no cero, donde por sus características sólo les es posible a los jugadores utilizar estrategias puras.

DEFINICIÓN 3.3 (Valor maximin). *El par de ganancias en el resultado determinado por las dos soluciones maximin del juego es llamado el valor maximin del juego.*

EJEMPLO 3.4 (Dilema de los prisioneros). *Dos hombres son arrestados y acusados de cierto robo. Su perseguidor sólo tiene evidencia suficiente como para condenarlos por el robo, pero se cree que los ladrones traían armas al momento del robo, haciéndolos aplicables a una sentencia mayor por robo a mano armada. Los prisioneros se encuentran en celdas separadas y no pueden comunicarse el uno con el otro. A cada uno de ellos se le ofrece el mismo trato: si testificas que tu compañero estaba armado al momento del robo, pero él no testifica en contra tuya, tu sentencia se suspenderá pero él pasará quince años en prisión. Si ambos testifican en contra del otro, ambos serán sentenciados a diez años, y si ninguno de ustedes testifica, pasarán cinco años en prisión. Ambos prisioneros están enterados de que ese trato se le ofreció a los dos. Se les ha dado algo de tiempo para pensar qué decidirán, pero ninguno de ellos está enterado de la decisión del otro.*

Este juego claramente es de suma no cero, y puede describirse con la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} (-5,-5) & (-15,0) \\ (0,-15) & (-10,-10) \end{pmatrix}$$

donde la ganancia de $-x$ implica pasar x años en la cárcel. Ahora encontraremos las estrategias maximin de estos dos hombres, a los que llamaremos I y II. La matriz de ganancias de I es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} -5 & -15 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}$$

Es fácil observar que la estrategia maximin de I es $[0,1]$, pues la entrada -10 es un mínimo para su renglón y un máximo para su columna. Por otro lado, la matriz de ganancias de II es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -15 & -10 \end{pmatrix}$$

Podemos ver que la estrategia maximin de II es $[0,1]$, ya que la entrada -10 es un mínimo para su columna y un máximo para su renglón. Así, las estrategias maximin recomiendan que ambos prisioneros acepten el trato, garantizando diez años de prisión a cada uno. La experiencia nos dicta que frecuentemente esta es la decisión hecha por las personas en este tipo de circunstancias. Ahora, si ambos hubieran optado por rechazar el trato y no testificar, se les hubiera dado cinco años de prisión, una sentencia más corta para ambos. Por esta razón decimos que el par de ganancias $(-5,-5)$ es *mejor* que el par de ganancias $(-10,-10)$.

DEFINICIÓN 3.5. *En cualquier juego de suma no cero, un par de ganancias* (a,b) *se dice mejor que un par de ganancias* (a',b') *si tenemos alguna de las siguientes condiciones:*

$$(a > a' \text{ y } b \geq b') \quad \text{ó} \quad (a \geq a' \text{ y } b > b').$$

DEFINICIÓN 3.6 (Juegos óptimos de Pareto). *El resultado de un juego se dice óptimo de Pareto si el juego no posee otro resultado con mejor ganancia.*

Es claro que cuando los jugadores de un juego son tratados en grupo, son deseables los resultados óptimos de Pareto, ya que con un resultado óptimo de Pareto se garantiza que no hay forma de aumentar la ganancia de un jugador sin minimizar la ganancia del otro.

EJEMPLO 3.7. *Para el Ejemplo 3.4, encontremos las estrategias óptimas de Pareto.*

$$\begin{pmatrix} (-5,-5) & (-15,0) \\ (0,-15) & (-10,-10) \end{pmatrix}$$

Notemos que no existe un resultado que sea mejor que $(-5,-5)$, y que lo mismo pasa con $(-15,0)$ y $(0,-15)$. Sin embargo, sabemos que $(-5,-5)$ es mejor que $(-10,-10)$, por lo que el único resultado dentro de la matriz que no es óptimo de Pareto es $(-10,-10)$, que es precisamente el valor maximin del juego.

DEFINICIÓN 3.8 (Puntos de equilibrio de Nash). *En un juego de suma no cero, un resultado se dice ser un "punto de equilibrio de Nash"si su par de ganancias* (a_i, b_i) *es tal que* a_i *es un máximo para su columna, y* b_j *es un máximo para su renglón.*

Este punto de equilibrio de Nash es el análogo al "punto silla.estudiado en el capítulo anterior. También, este punto tiene la deseada propiedad de "no arrepentimiento"pues, dado que II eligió la columna j, I no tiene ninguna razón para arrepentirse de haber elegido el renglón i, ya que ninguna otra selección de I le hubiera dado una mejor ganancia. Similarmente, dado que I seleccionó el renglón i, II no tiene ninguna razón para arrepentirse de haber elegido la columna j, pues ninguna otra elección hecha por II le hubiera dado una mayor ganancia.

Para los juegos 2×2 suma no cero, es fácil deducir que lo ideal sería que los jugadores eligieran una estrategia pura tal que les permitiera obtener un par de ganancias que fueran un punto de equilibrio de Nash. Lamentablemente, no todos los puntos de equilibrio de Nash proporcionan ganancias máximas a los jugadores, como se observa en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 3.9. *En el Ejemplo 3.4, observamos que el único punto de equilibrio de Nash es* $(-10,-10)$, *obtenido cuando los jugadores utilizan las estrategias* $[0,1]$

y $[0,1]$. *Pero si los jugadores hubieran utilizado las estrategias* $[1,0]$ *y* $[1,0]$, *habrían obtenido una condena de cinco años cada uno, menor que la sentencia de diez años del punto de equilibrio de Nash.*

2. Estrategias mixtas

Al igual que en el caso de suma cero, en los juegos de suma no cero se pueden utilizar estrategias mixtas.

Las estrategias mixtas de I y II de nuevo se denotarán por $[p,1-p]$ y $[q,1-q]$, respectivamente. Nos referiremos a ese par de estrategias como un par de estrategias mixtas. Cuando I y II emplean estas estrategias mixtas en un juego de suma no cero el par de ganancias esperado se calcula de la misma manera en la que se calculaba en el caso de suma cero.

DEFINICIÓN 3.10 (Ganancias esperadas). *Cuando el par de estrategias mixtas es* $([p,1-p],[q,1-q])$, *la ganancia esperada de* I *se denota por* $e_R(p,q)$ *y la ganancia esperada de* II *se denota por* $e_C(p,q)$, *es decir,*

$$\begin{aligned} e_R(p,q) &= a_1pq + a_2p(1-q) + a_3(1-p)q + a_4(1-p)(1-q) \\ &= (a_1 - a_2 - a_3 + a_4)pq + (a_2 - a_4)p + (a_3 - a_4)q + a_4 \end{aligned} \tag{14}$$

y

$$\begin{aligned} e_C(p,q) &= b_1pq + b_2p(1-q) + b_3(1-p)q + b_4(1-p)(1-q) \\ &= (b_1 - b_2 - b_3 + b_4)pq + (b_2 - b_4)p + (b_3 - b_4)q + b_4 \end{aligned} \tag{15}$$

Como las ganancias de I y II en un juego de suma no cero son independientes la una de la otra, en general no exisitirá relación entre los valores maximin de I y II. Esto, por supuesto, es totalmente diferente a lo que sucede en el caso suma cero, donde el valor de juego de un jugador es el negativo del otro. Entonces, en el juego de suma no cero no existe un análogo del teorema minimax analizado en el capítulo anterior.

Luego de que el juego repetido termina, cada jugador buscará estar seguro de que ninguna otra estrategia habría resultado en una mejor ganancia esperada.

TEOREMA 3.11. *En cualquier juego de suma no cero* 2×2, *existe un par de estrategias mixtas* $([\bar{p},1-\bar{p}],[\bar{q},1-\bar{q}])$ *tales que*

$$e_R(\bar{p},\bar{q}) \geq e_R(p,\bar{q}) \text{ para toda } p,\ 0 \leqslant p \leqslant 1$$

y

$$e_C(\bar{p},\bar{q}) \geq e_C(\bar{p},q) \text{ para toda } q,\ 0 \leqslant q \leqslant 1$$

La primera desigualdad nos dice que, habiendo empleado la estrategia recomendada $[\bar{p},1-\bar{p}]$, I no tiene razones para arrepentirse dado que II utilizó la estrategia $[\bar{q},1-\bar{q}]$. Y la segunda desigualdad nos dice que II no tiene razón para arrepentirse de haber utilizado la estrategia $[\bar{q},1-\bar{q}]$ dado que I utilizó la estrategia $[\bar{p},1-\bar{p}]$.

DEFINICIÓN 3.12 (Equilibrio mixto de Nash). *El par de estrategias*

$$([\bar{p},1\text{-}\bar{p}],[\bar{q},1\text{-}\bar{q}])$$

descritas en el Teorema 3.11 constituyen un equilibrio mixto de Nash.

Los números $(e_R(\bar{p},\bar{q}), e_C(\bar{p},\bar{q}))$ son el par de valor mixto del juego. Juntos, el equilibrio de Nash y el par de valor mixto son una solución de equilibrio de Nash para el juego.

Una pregunta de interés sería el querer saber qué pasa con la solución de equilibrio cuando se sabe que $\bar{p},\bar{q} \in \{0,1\}$.En este caso, observamos que

$$e_R(\bar{p},\bar{q}) = a_i, \text{ para alguna } i \in 1,2,3,4$$

$$e_C(\bar{p},\bar{q}) = b_j, \text{ para alguna } j \in 1,2,3,4$$

Como

$$e_R(\bar{p},\bar{q}) \geq e_R(p,\bar{q}),\ 0 \leqslant p \leqslant 1,$$

se concluye que a_i es un máximo para su columna.

Similarmente, como

$$e_C(\bar{p},\bar{q}) \geq e_C(\bar{p},q),\ 0 \leqslant q \leqslant 1,$$

se concluye que b_j es un máximo para su renglón.

Por lo tanto, tenemos que cuando $\bar{p},\bar{q} \in \{0,1\}$, $(e_R(\bar{p},\bar{q}), e_C(\bar{p},\bar{q}))$ es un punto de equilibrio de Nash. Así notamos que el punto de equilibrio de Nash es un caso particular del par de valor mixto del juego.

3. Solución de los juegos 2×2 suma no cero

TEOREMA 3.13. *Para cada estrategia de un jugador de un juego de suma no cero, su oponente posee una contraestrategia óptima que es pura.*

Demostración: Supongamos que II utiliza una estrategia $[q', 1-q']$. Entonces, la ganancia esperada de I es:

$$e_R(p,q') = (a_1 - a_2 - a_3 + a_4)pq' + (a_2 - a_4)p + (a_3 - a_4)q' + a_4$$

Como q' está fija, podemos ver a $e_R(p,q')$ de la siguientes forma

$$e_R(p,q') = mp + c, \text{ donde}$$

$$m = (a_1 - a_2 - a_3 + a_4)q' + (a_2 - a_4), \text{ y}$$

$$c = (a_3 - a_4)q' + a_4$$

Observamos que la gráfica que describe el comportamiento de $e_R(p,q')$ como función de p tiene la forma de una línea recta, por lo que encontrará su máximo en $p = 0$ o $p = 1$, dependiendo del signo de m. □

Cuando el jugador que tiene fija su estrategia es I, se utiliza un método similar para demostrar que la contraestrategia óptima de II es pura.

A continuación mostraremos un método para encontrar estrategias de equilibrio de Nash en los juegos 2×2 suma no cero, y lo ilustraremos con algunos ejemplos.

OBSERVACIÓN 3.14. *Para cualesquiera m, c, fijos, y $0 \leqslant x \leqslant 1$, $mx + c$ alcanzará su valor máximo para*

$$\textit{únicamente } x = 0 \textit{ si } m < 0$$

$$\textit{cualquier } 0 \leqslant x \leqslant 1 \textit{ si } m = 0$$

$$\textit{únicamente } x = 1 \textit{ si } m > 0$$

Los puntos de equilibrio de Nash de los juegos 2×2 suma no cero se encontrarán como la intersección de dos gráficas. Una de estas gráficas describe todas las estrategias mixtas que hacen que I no se sienta arrepentido dado que II utilizó una estrategia dada, y la otra gráfica describe todas las estrategias mixtas que hacen que II no se sienta arrepentido dado que I utilizó una estrategia dada.

Supongamos que la estrategia de II ya está fija, y basándonos en la demostración del Teorema 3.13, podemos escribir

$$e_R(p,q) = mp + c,$$

donde $m = (a_1 - a_2 - a_3 + a_4)q + a_2 - a_4$. Es evidente que I no se sentirá arrepentido en los siguientes tres casos:

$$p = 0 \text{ si } m < 0, \quad 0 \leqslant p \leqslant 1 \text{ si } m = 0 \text{ y } p = 1 \text{ si } m > 0$$

Las estrategias correspondientes pueden ser graficadas en un sistema de coordenadas cartesianas con p en el eje horizontal, y q en el vertical.

Ahora, supongamos que la estrategia de I está fija. Basándonos en el Teorema 3.13, la ganancia esperada de II puede escribirse de la siguiente manera:

$$e_C(p,q) = m'q + c'$$

donde

$$m' = (b_1 - b_2 - b_3 + b_4)p + ((b_3 - b_4)$$

II no podrá arrepentirse en los siguientes tres casos:

$$q = 0 \text{ si } m' < 0, \quad 0 \leqslant q \leqslant 1 \text{ si } m' = 0 \text{ y } q = 1 \text{ si } m' > 0$$

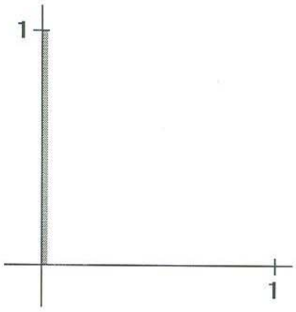
Las estrategias mixtas que no le ocasionan arrepentimiento a II pueden ahora ser graficadas dentro del mismo sistema de coordenadas $p - q$ que fue usado para la gráfica de no arrepentimiento de I.

La gráfica de no arrepentimiento de cada jugador consiste en aquellos pares de estrategias mixtas $([p, 1-p], [q, 1-q])$ que ponen a cada jugador en la posición de no tener que arrepentirse de su propia decisión. Dado que los puntos de equilibrio de Nash consisten en aquellos pares de estrategias $([p, 1-p], [q, 1-q])$ que no causan arrepentimiento a ningún jugador, estos puntos constituyen la intersección de las gráficas de no arrepentimiento de I y II.

EJEMPLO 3.15. *Encontraremos la solución de equilibrio de Nash para el Ejemplo 3.4.*

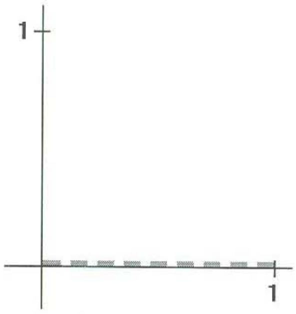
$$e_R(p,q) = -5p + 10q$$

dado que la pendiente de $e_R(p,q)$ es negativa para cualquier valor de q, obtenemos la siguiente gráfica de no arrepentimiento para I

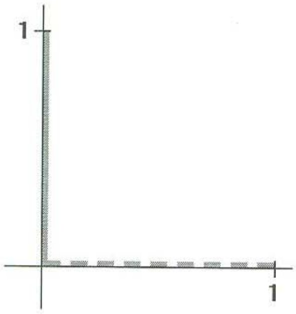


$$e_C(p,q) = 10p - 5q$$

Similarmente, como la pendiente de $e_C(p,q)$ es negativa para cualquier valor de p, obtenemos la siguiente gráfica de no arrepentimiento para II



Notemos que estas estrategias fueron particularmente fáciles de graficar, dado que la pendiente de ambas es constante. Sobreponiendo ambas gráficas, obtenemos lo siguiente



Así, vemos que estas gráficas se intersectan únicamente en $p = q = 0$, diciéndonos que el único par de valor mixto del juego es $(-10,-10)$, que es precisamente el valor del juego.

Pero no todos los juegos suma no cero poseen un único equilibrio mixto de Nash, a continuación veremos un ejemplo de esta situación.

EJEMPLO 3.16. *Consideremos la siguiente matriz de pago*

$$\begin{pmatrix} (3,2) & (2,1) \\ (0,3) & (4,4) \end{pmatrix}$$

De donde obtenemos:

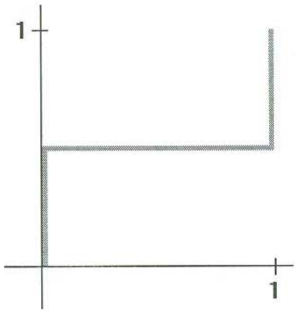
$$e_R(p,q) = (5q-2)p - 4q + 4$$

$$e_C(p,q) = (2p-1)q - 3p + 4$$

Así, la gráfica de no arrepentimiento de I es la intersección del cuadrado unitario con los siguientes conjuntos de puntos:

- $\{\ (0,q)$ cuando $5q-2<0\}$, esto es, cuando $q<\frac{2}{5}$.
- $\{\ (p,q)$ cuando $5q-2=0\}$, esto es, cuando $q=\frac{2}{5}$.
- $\{\ (1,q)$ cuando $5q-2>0\}$, esto es, cuando $q>\frac{2}{5}$.

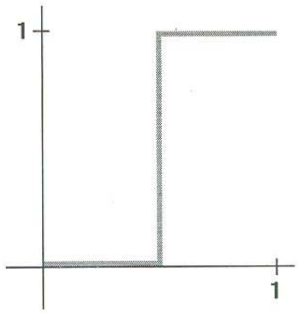
Dado que $0<\frac{2}{5}<1$, la gráfica de no arrepentimiento para I tiene la siguiente forma:



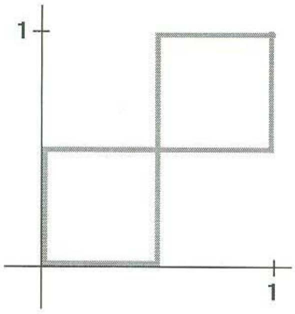
Ahora, la gráfica de no arrepentimiento de II es la intersección del cuadrado unitario con los tres siguientes conjuntos de puntos:

- $\{\ (p,0)$ cuando $2p-1<0\}$, esto es, cuando $p<\frac{1}{2}$.
- $\{\ (p,q)$ cuando $2p-1=0\}$, esto es, cuando $p=\frac{1}{2}$.
- $\{\ (p,1)$ cuando $2p-1>0\}$, esto es, cuando $p>\frac{1}{2}$.

De nuevo, tenemos que $0<\frac{1}{2}<1$, lo que nos dá una gráfica de no arrepentimiento para II de la siguiente forma:



y la intersección de ambas gráficas de arrepentimiento es la siguiente:



Podemos observar que se encontraron tres equilibrios mixtos de Nash. En la siguiente sección mostraremos algunos criterios para elegir uno de estos equilibrios, pero antes analizaremos un ejemplo con un único equilibrio mixto de Nash, que nos será de gran utilidad para el siguiente capítulo.

EJEMPLO 3.17. *Consideremos la siguiente matriz de ganancias:*

$$\begin{pmatrix} (a_1, b_1) & (a_2, b_2) \\ (a_3, b_3) & (a_4, b_4) \end{pmatrix},$$

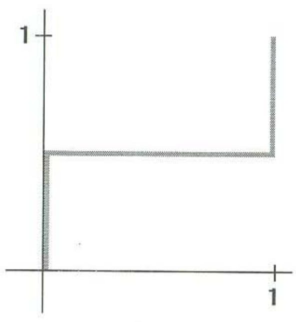
con las siguientes características:

$$a_4 > a_1 > a_3 > a_2, \qquad y \qquad b_4 < b_1 < b_3 < b_2$$

Utilizando el método descrito, tenemos que la gráfica de no arrepentimiento de I es la intersección del cuadrado unitario con los tres siguientes conjuntos de puntos:

- $\{\ (0,q)$ cuando $(a_1 - a_2 - a_3 + a_4)q + a_2 - a_4 < 0\}$, esto es, cuando $q < \frac{a_4 - a_2}{a_1 - a_2 - a_3 + a_4}$.
- $\{\ (p,q)$ cuando $(a_1 - a_2 - a_3 + a_4)q + a_2 - a_4 = 0\}$, esto es, cuando $q = \frac{a_4 - a_2}{a_1 - a_2 - a_3 + a_4}$.
- $\{\ (1,q)$ cuando $(a_1 - a_2 - a_3 + a_4)q + a_2 - a_4 > 0\}$, esto es, cuando $q > \frac{a_4 - a_2}{a_1 - a_2 - a_3 + a_4}$.

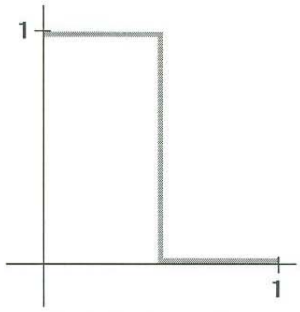
Dado que $0 < \frac{a_2 - a_4}{a_1 - a_2 - a_3 + a_4} < 1$, la gráfica de no arrepentimiento para I tiene la siguiente forma:



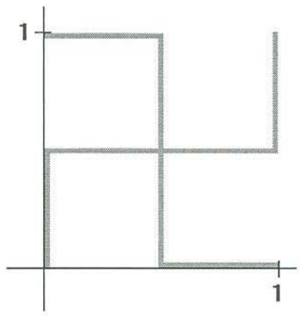
Ahora, la gráfica de no arrepentimiento de II es la intersección del cuadrado unitario con los tres siguientes conjuntos de puntos:

- $\{\ (p, 0)$ cuando $(b_1 - b_2 - b_3 + b_4)p + b_3 - b_4 < 0\}$, esto es, cuando $p > \frac{b_4 - b_3}{b_1 - b_2 - b_3 + b_4}$.
- $\{\ (p, q)$ cuando $(b_1 - b_2 - b_3 + b_4)p + b_3 - b_4 = 0\}$, esto es, cuando $p = \frac{b_4 - b_3}{b_1 - b_2 - b_3 + b_4}$.
- $\{\ (p, 1)$ cuando $(b_1 - b_2 - b_3 + b_4)p + b_3 - b_4 > 0\}$, esto es, cuando $p < \frac{b_4 - b_3}{b_1 - b_2 - b_3 + b_4}$.

De nuevo, tenemos que $0 < \frac{b_4 - b_3}{b_1 - b_2 - b_3 + b_4} < 1$, lo que nos dá una gráfica de no arrepentimiento para II de la siguiente forma:



y la intersección de ambas gráficas de arrepentimiento es la siguiente:



En este caso, vemos que el único equilibrio mixto de Nash es

$$([\frac{b_4 - b_3}{b_1 - b_2 - b_3 + b_4}, \frac{b_1 - b_2}{b_1 - b_2 - b_3 + b_4}], [\frac{a_4 - a_2}{a_1 - a_2 - a_3 + a_4}, \frac{a_1 - a_3}{a_1 - a_2 - a_3 + a_4}])$$

Hasta el momento hemos analizado ejemplos con uno y tres equilibrios mixtos de Nash, pero no hemos analizado ejemplos que no tengan equilibrio alguno. Esto se debe a que todos los juegos 2×2 tienen un equilibrio mixto de Nash:

TEOREMA 3.18. *Cada juego 2×2 de suma no cero tiene al menos un equilibrio mixto de Nash.*

Demostración: Para realizar esta demostración, haremos uso del teorema del punto fijo, enunciado a continuación

TEOREMA 3.19 (del punto fijo). *Sea una función f, $f : S \rightarrow S$. Si S es un conjunto cerrado, acotado y convexo, y si f es contínua, entonces existe al menos un punto $x \in S$ tal que $f(x) = x$.*

Ahora, volviendo a la demostración, definamos a S de la siguiente forma:

$$S := \{(p, q) | p \in P, \quad q \in Q\}$$

Donde P es el conjunto de estrategias de I, y Q el conjunto de estrategias de II. Es fácil ver que S es cerrado, acotado y convexo. Ahora, para cada $p \in P$, $q \in Q$, definamos:

$$c_i(p,q) = max\{0, e_R(E_i, q) - e_R(p,q)\}$$
$$d_i(p,q) = max\{0, e_C(p, E_i) - e_C(p,q)\}$$

Donde $i = 1,2$, y $E_1 = 1$, $E_2 = 0$.

$$f(p,q) = (p', q')$$
$$p' = \frac{p + c_1(p,q)}{1 + \sum_{i=1}^{2} c_i(p,q)}$$
$$q' = \frac{q + d_1(p,q)}{1 + \sum_{i=1}^{2} d_i(p,q)}$$

f es contínua, y por el Teorema del punto fijo sabemos que existe un punto $(p^*, q^*) \in S$ tal que $f(p^*, q^*) = (p^*, q^*)$.

No podemos tener $e_R(E_i, q^*) > e_R(p^*, q^*)$ para toda i, obtendríamos

$$\begin{aligned} e_R(p^*, q^*) &= p^*q^*a_1 + p^*(1-q^*)a_2 + (1-p^*)q^*a_3 + (1-p^*)(1-q^*)a_4 \\ &= p^*(q^*a_1 + (1-q^*)a_2) + (1-p^*)(q^*a_3 + (1-q^*)a_4) \\ &= p^*e_R(E_1, q^*) + (1-p^*)e_R(E_2, q^*) > p^*e_R(p^*, q^*) + (1-p^*)e_R(p^*, q^*) \\ &= e_R(p^*, q^*) \end{aligned}$$

lo cual es claramente una contradicción. Por lo tanto, concluímos que $e_R(E_i, q^*) \leqslant e_R(p^*, q^*)$ para al menos una i, $i = 1,2$.

De igual manera, sabemos que no podemos tener $e_C(p^*, E_i) > e_C(p^*, q^*)$ para toda i, pues entonces

$$\begin{aligned} e_C(p^*, q^*) &= p^*q^*b_1 + p^*(1-q^*)b_2 + (1-p^*)q^*b_3 + (1-p^*)(1-q^*)b_4 \\ &= q^*(p^*b_1 + (1-p^*)b_3) + (1-q^*)(p^*b_2 + (1-p^*)b_4) \\ &= q^*e_C(p^*, E_1) + (1-q^*)e_C(p^*, E_2) > q^*e_C(p^*, q^*) + (1-q^*)e_C(p^*, q^*) \\ &= e_C(p^*, q^*) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $e_C(p^*, E_i) \leqslant e_C(p^*, q^*)$ para al menos una i, $i = 1,2$.

Ahora, sabemos que

$$p^* = \frac{p^* + c_1(p^*, q^*)}{1 + \sum_{i=1}^{2} c_i(p^*, q^*)}$$

Si $p^* = 0$, tenemos

$$0 = \frac{c_1(p^*, q^*)}{1 + \sum_{i=1}^{2} c_i(p^*, q^*)} \Rightarrow c_1(p^*, q^*) = 0,$$

y también,

$$c_2(0, q^*) = max\{0, e_R(E_2, q^*) - e_R(0, q^*)\} = max\{0, e_R(0, q^*) - e_R(0, q^*)\} = 0$$

Así, cuando $p^* = 0$ tenemos que $c_1 = c_2 = 0$.

En el caso en que $p^* \neq 0$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} p^* = \frac{p^* + c_1(p^*, q^*)}{1 + \sum_{i=1}^{2} c_i(p^*, q^*)} &\Rightarrow p^* + p^*c_1(p^*, q^*) + p^*c_2(p^*, q^*) = p^* + c_1(p^*, q^*) \\ &\Rightarrow p^*c_1(p^*, q^*) + p^*c_2(p^*, q^*) = c_1(p^*, q^*) \end{aligned}$$

Sabemos que al menos una $c_i(p^*, q^*) = 0$, si suponemos que $c_1(p^*, q^*) = 0$, se concluye inmediatamente que $c_2(p^*, q^*) = 0$. Ahora, si suponemos $c_2(p^*, q^*) = 0$, tenemos que $c_1(p^*, q^*) = 0$, siempre y cuando $p^* \neq 1$. Pero si $p^* = 1$, tenemos lo siguiente:

$$c_1(1, q^*) = max\{0, e_R(E_1, q^*) - e_R(1, q^*)\} = max\{0, e_R(1, q^*) - e_R(1, q^*)\} = 0$$

Concluímos entonces que $e_R(E_i, q^*) \leqslant e_R(p^*, q^*)$ para toda i, y por lo tanto, $e_R(p, q^*) \leqslant e_R(p^*, q^*)$ para toda $p \in P$, sin importar el valor que tome p^*.

Ahora demostraremos que $e_C(p^*, q) \leqslant e_C(p^*, q^*)$ para toda $q \in Q$.

$$q^* = \frac{q^* + d_1(p^*, q^*)}{1 + \sum_{i=1}^{2} d_i(p^*, q^*)}$$

Si $q^* = 0$, tendríamos lo siguiente:

$$0 = \frac{d_1(p^*, q^*)}{1 + \sum_{i=1}^{2} d_i(p^*, q^*)} \Rightarrow d_1(p^*, q^*) = 0$$

también:

$$d_2(p^*, 0) = max\{0, e_C(p^*, E_2) - e_C(p^*, 0)\} = max\{0, e_C(p^*, 0) - e_C(p^*, 0)\} = 0$$

Así, cuando $q^* = 0$, tenemos que $d_1(p^*, q^*) = d_2(p^*, q^*) = 0$. Ahora, cuando $q^* \neq 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} q^* = \frac{q^* + d_1(p^*, q^*)}{1 + \sum_{i=1}^{2} d_i(p^*, q^*)} &\Rightarrow q^* + q^* d_1(p^*, q^*) + q^* d_2(p^*, q^*) = q^* + d_1(p^*, q^*) \\ &\Rightarrow q^* d_1(p^*, q^*) + q^* d_2(p^*, q^*) = d_1(p^*, q^*) \end{aligned}$$

Como al menos una $d_i(p^*, q^*)$ es igual a cero, se concluye que ambas lo son. Así, $e_C(p^*, q) \leqslant e_C(p^*, q^*)$ para toda $q \in Q$. Esta conclusión, aunada a la análoga para $c_i(p^*, q^*)$, nos dice que (p^*, q^*) es un par de equilibrio, quedando así demostrado el Teorema de equilibrio de Nash.

□

4. Conceptos de solución para juegos de suma no cero

Ahora ya podemos encontrar los equilibrios mixtos de Nash y pares maximin para los juegos 2×2. De cualquier forma, la idea "maximin-maximin"de una solución ya no tiene mucho sentido, porque supone que un jugador está tratando de minimizar la ganancia de su oponente y maximizar la suya, a la vez. Esto no pueden cumplirse siempre, como ya se ha visto en algunos ejemplos. Los equilibrios mixtos de Nash son considerados el concepto de solución más aceptable, pero la dificultad con ellos es que, usualmente, hay más de uno en un juego. Varios autores han sugerido elegir, como una solución del juego, un subconjunto de los equilibrios mixtos de Nash que cumplan con ciertas propiedades. Describiremos brevemente tres de estas sugerencias.

4.1. Soluciones en el sentido de Nash.

DEFINICIÓN 3.20. *Un juego tiene una solución en el sentido de Nash si cada equilibrio mixto de Nash es intercambiable. Esto es, dados dos equilibrios mixtos de Nash* (p_1, q_1), (p_2, q_2), *tenemos que* (p_1, q_2) *y* (p_2, q_1) *también lo son. La solución es ahora el conjunto de equilibrios mixtos.*

Para el Ejemplo 3.16 no encontramos ninguna solución en el sentido de Nash. En el caso de que un juego tenga una solución en el sentido de Nash, no nos sirve de mucho, ya que en ninguna forma nos ayuda a hacer más pequeño el conjunto de equilibrios a elegir.

4.2. Soluciones en el sentido estricto.

DEFINICIÓN 3.21. *Un juego tiene una solución en el sentido estricto si:*

- *Entre los pares óptimos de Pareto, existe un equilibrio mixto de Nash, y*
- *Todos los equilibrios mixtos de Nash óptimos de Pareto son intercambiables, y tienen las mismas ganancias. La solución es entonces el conjunto de equilibrios mixtos óptimos de Pareto*

Para el Ejemplo 3.16 tenemos que el único equilibrio mixto de Nash óptimo de Pareto es ([0,1],[0,1]) y, dado que es uno solo, es intercambiable. Así, la solución en el sentido estricto de la matriz del Ejemplo 3.16 es ([0,1],[0,1]).

4.3. Soluciones en el sentido completamente débil. La idea aquí es que si alguno de los jugadores tiene una estrategia maximin pura, entonces la otra estrategia pura que le queda no le servirá para ganar más dinero, por lo tanto, la puede eliminar. Así, nos queda una matriz reducida, que es la que usaremos para la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.22. *Un juego* 2×2 *es soluble en el sentido completamente débil, si su matriz reducida es soluble en el sentido estricto.*

Al reducir la matriz del Ejemplo 3.16 obtenemos que la solución en el sentido completamente débil es ([0,1],[0,1]), que a su vez también es la solución en el sentido estricto.

Cabe señalar que muchas veces la matriz de ganancias es irreducible, por lo que el juego tendrá una solución en el sentido completamente débil únicamente si la tiene en el sentido estricto.

CAPÍTULO 4

Juegos suma cero con sensibilidad al riesgo

En el capítulo anterior tratamos los juegos donde los jugadores escogían sus estrategias con el único fin de maximizar su ganancia esperada. Pero debemos recordar que la ganancia esperada es el promedio de lo que el jugador ganaría cuando el número de juegos tiende a infinito. En muchas aplicaciones, los jugadores no juegan un número muy grande de veces de tal forma que obtengan, en promedio, su ganancia esperada. Lo anterior determina otros factores que intervienen en la selección de la estrategia del jugador: uno de estos factores es la actitud que cada jugador asume frente a la incertidumbre de los resultados azarosos, aunado al hecho de que los recursos de los jugadores son generalmente limitados. Nuestra experiencia en los juegos de azar (directa o indirecta) nos dice que generalmente hay dos tipos de jugadores: los arriesgados, que apuestan sumas fuertes de dinero con la esperanza de aumentar rápidamente sus ganancias, pero corriendo el riesgo de perder una suma fuerte de dinero (la apostada)en caso de llegar a perder; y aquellos que prefieren pagar una módica cantidad, perdiendo así la oportunidad de ganar una buena cantidad de dinero, pero también garantizando que sus pérdidas serán mínimas. Podemos caracterizarlos diciendo que el primer tipo de jugador es proclive al riesgo, mientras que el otro es adverso al riesgo.

En este capítulo estudiaremos en particular cómo el grado de adversidad al riesgo afecta la ganancia esperada en los juegos que pueden modelarse con matrices dos por dos. Aquí es donde entrarán en juego las funciones de utilidad, que nos ayudarán a modelar el comportamiento de jugadores cuya sensibilidad al riesgo es no nula. Pero antes de eso, veremos una demostración crucial para la comprensión de la forma en que estudiaremos este caso:

1. Una demostración importante

El objetivo de esta sección es demostrar que dada una matriz de pago de la forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

sin puntos silla, es posible reacomodarla a ella o a su transpuesta en una matriz de pago de la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

con $x_4 \geq x_1 > x_3 \geq x_2$, donde $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ es un reordenamiento de $\{A, B, C, D\}$.

Nos resultará conveniente para fines de agilizar la demostración, el demostrar que dada una matriz sin punto silla, siempre podemos suponer que $A > C$ y $D > B$. Si $A \leqslant C$ y $B < D$, esto nos llevaría a encontrar un punto silla ubicado en el segundo renglón. Si suponemos $A > C$ y $B \geq D$, encontraríamos un punto silla ubicado en el primer renglón. Ahora, si tenemos $A \leqslant C$ y $B \geq D$, y dado que nuestra matriz no contiene puntos silla, en realidad tendríamos $A < C$ y $B > D$. Podemos reacomodar esta matriz para que nos quede:

$$\begin{pmatrix} B & A \\ D & C \end{pmatrix}$$

Ahora ya podemos proceder con la demostración que nos interesa.

Dividiremos esta demostración en varios casos. Supongamos primero que tenemos una matriz de pago sin punto silla

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

tal que no es de la forma $D \geq A > C \geq B$. Entonces caemos en uno de los siguientes casos:

1.1. $A > D > B$, $A > C \geq B$. Podemos dividir este caso en dos subcasos:

$A > C > D > B$. Si se diera este caso, tendríamos un punto silla ubicado en la primer columna. Y dado que nuestra matriz carece de puntos silla, desechamos este caso.

$A > D > C \geq B$. No hay forma de acomodar la matriz

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

de tal forma que $x_4 \geq x_1 > x_3 \geq x_2$. Lo que podemos hacer es utilizar la matriz transpuesta, la cual sí se puede reacomodar de la forma deseada:

$$\begin{pmatrix} -B & -D \\ -A & -C \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -A & -C \\ -B & -D \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -C & -A \\ -D & -B \end{pmatrix}$$

siendo ésta la matriz de pagos del jugador II, con los renglones de esta nueva matriz como las estrategias puras del jugador II. Nótese que $-B \geq -C > -D > -A$. Queda así demostrado que para el caso $A > D > B$, $A > C \geq B$, siempre tenemos una matriz de pago (ya sea la de I o la de II) con $x_4 \geq x_1 > x_3 \geq x_2$.

1.2. $D \geq A > C$, $D > B > C$. Esta relación nos lleva a dos subcasos:

$D \geq B > A > C$. De presentarse este caso, tendríamos un punto silla localizado en la primer columna, haciendo que nos enfoquemos unicamente en el siguiente subcaso:

$D \geq A > B > C$. En este caso, tampoco podemos reacomodar columnas y/o renglones de la matriz de pago de I para obtener las propiedades deseadas en las entradas, por lo que de nuevo utilizaremos la transpuesta:

$$\begin{pmatrix} -B & -D \\ -A & -C \end{pmatrix}$$

Nótese que en esta matriz de pagos para el jugador II, $-C > -B > -A \geq -D$, de donde concluímos que dada una matriz de la forma $D \geq A > C$, $D > B > C$, siempre es posible obtener una de la forma $x_4 \geq x_1 > x_3 \geq x_2$.

1.3. $A > D > B > C$. Aquí no es necesario utilizar la matriz transpuesta, basta con acomodar de otra forma las estrategias puras de I y II, quedándonos con la siguiente matriz de pago para I:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix}$$

Notemos que $A > D > B > C$, obteniendo así una matriz de pagos de la forma $x_4 \geq x_1 > x_3 \geq x_2$.

Habiendo estudiado todos los casos, podemos ahora afirmar que dada una matriz de pagos de 2×2 que no contenga puntos sillas, siempre se puede modificar de forma que obtengamos una matriz

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

en donde $x_4 \geq x_1 > x_3 \geq x_2$.

Además, dentro de este análisis se demostró que, dada una matriz

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

con $D \geq A > C \geq B$, su transpuesta no puede ser reacomodada de tal forma que quede

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

con $x_4 \geq x_1 > x_3 \geq x_2$.

En esta tésis, supondremos que las funciones de utilidad de ambos jugadores son exponenciales. Esta suposición no es arbitraria; se han adoptado las funciones de utilidad exponenciales dado que, como vimos antes, estas funciones tienen propiedades analíticas que facilitan el tratamiento matemático y además, se ha observado que este tipo de funciones describen razonablemente las preferencias de los jugadores en muchas situaciones.

Así, si denotamos por $U(x)$ la función de utilidad de un jugador, tendríamos $U(x) = -e^{-bx}$, $b > 0$ para los adversos al riesgo y $U(x) = e^{-bx}$, $b < 0$ para los proclives al riesgo, donde b es el coeficiente de sensibilidad al riesgo del jugador. Será de particular interés estudiar los casos en los cuales el valor absoluto del coeficiente de sensibilidad al riesgo tiende a cero, así como cuando tiende a infinito.

Sean $U_I(x)$, $U_{II}(x)$ las funciones de utilidad de los jugadores I y II. Estudiaremos la matriz de ganancias del jugador I, concentrándonos ahí en la ganancia esperada de I, que como sabemos es el negativo de la ganancia esperada de II.

Divideremos el estudio del efecto de las funciones de utilidad de cada jugador sobre la ganancia esperada en dos casos: primeramente, el caso muy particular en que $U_I(x) = -U_{II}(-x)$, y después el caso en que $U_I(x) \neq -U_{II}(-x)$.

2. $U_I(x) = -U_{II}(-x)$

Resulta de interés estudiar este caso debido a que cuando $U_I(x) = -U_{II}(-x)$, el juego preserva su condición de suma cero con respecto a utilidades. Esto es debido a que con esta condición, la utilidad esperada de I es el negativo de la utilidad esperada de II. La condición $U_I(x) = -U_{II}(-x)$ excluye la posibilidad de que ambos jugadores sean adversos al riesgo, ya que en ese caso tendríamos

$$-e^{-b_I x} = -(-e^{-b_{II}(-x)}) \Rightarrow -e^{-b_I x} = e^{b_{II} x}$$

lo que, claramente, es una contradicción, pues la función exponencial sólo toma valores positivos.

Similarmente, con la condición inicial dada ambos jugadores no pueden ser proclives al riesgo.

Primeramente, veremos qué pasa cuando I es proclive al riesgo y II es adverso, para luego estudiar el caso con I adverso al riesgo y II proclive. Es necesario estudiar los dos casos ya que la propiedad de que la matriz de pago de I sea de la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

con $x_4 \geq x_1 > x_3 \geq x_2$, es utilizada durante todo el análisis, y al invertir los roles es como si estudiáramos la matriz transpuesta, la cual no tiene esa propiedad.

De hecho, también podemos eliminar el caso $x_4 = x_1 > x_3 = x_2$ ya que, en este caso, tendríamos una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

, ya que nos haría obtener los valores $p = q = \frac{1}{2}$, para cualquier tipo de sensibilidad al riesgo de los jugadores. Por lo tanto nos limitaremos al estudio de matrices de pagos de la forma $x_4 > x_1 > x_3 > x_2$.

2.1. I proclive, II adverso.

Cuando I es proclive y II es adverso al riesgo, tenemos lo siguiente:

$$e^{-b_I x} = -(-e^{-b_{II}(-x)}) \Rightarrow e^{-b_I x} = e^{b_{II} x} \Rightarrow -b_I x = b_{II} x \Rightarrow b_I = -b_{II}$$

Esta igualdad no nos lleva a contradicciones, pues sabemos que $b_I < 0$, y $b_{II} > 0$.

Sea $b = -b_I = b_{II} > 0$. Las matrices de utilidad para I y II son entonces, respectivamente, las siguientes:

$$\begin{pmatrix} e^{bA} & e^{bB} \\ e^{bC} & e^{bD} \end{pmatrix} \qquad y \qquad \begin{pmatrix} -e^{-b(-A)} & -e^{-b(-B)} \\ -e^{-b(-C)} & -e^{-b(-D)} \end{pmatrix}$$

Así, es suficiente estudiar la matriz

$$\begin{pmatrix} e^{bA} & e^{bB} \\ e^{bC} & e^{bD} \end{pmatrix}$$

concientes de que la "ganancia" de I será la "pérdida" de II. Dada esta propiedad, es que decimos que este es un juego suma cero en términos de utilidades. Tomando en cuenta los resultados obtenidos en el Ejemplo 3.17, tenemos que las estrategias de equilibrio están dadas por

$$p = \frac{e^{bD} - e^{bC}}{e^{bD} + e^{bA} - e^{bC} - e^{bB}}$$

$$q = \frac{e^{bD} - e^{bB}}{e^{bD} + e^{bA} - e^{bC} - e^{bB}}$$

y la utilidad y ganancia esperadas W_I, V_I, correspondientes a I serán, respectivamente

$$W_I = pqe^{bA} + p(1-q)e^{bB} + (1-p)qe^{bC} + (1-p)(1-q)e^{bD}$$

$$V_I = pqA + p(1-q)B + (1-p)qC + (1-p)(1-q)D$$

Conviene enfatizar que el objetivo de esta tésis es presentar el modo en que la utilidad afecta la ganancia monetaria esperada (V_I, V_{II}) de los jugadores, por lo que no nos ocuparemos de la utilidad esperada W_I.

Analicemos primero el comportamiento de la estrategia de equilibrio y la ganancia esperada en la situación límite cuando $b \to 0$. Por el teorema de L'Hospital, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{b\to 0} p &= \lim_{b\to 0} \frac{e^{bD} - e^{bC}}{e^{bD} + e^{bA} - e^{bC} - e^{bB}} \\ &= \lim_{b\to 0} \frac{De^{bD} - Ce^{bC}}{De^{bD} + Ae^{bA} - Ce^{bC} - Be^{bB}} \\ &= \frac{D-C}{D+A-C-B} \end{aligned} \tag{16}$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{b\to 0} q &= \lim_{b\to 0} \frac{e^{bD} - e^{bB}}{e^{bD} + e^{bA} - e^{bC} - e^{bB}} \\ &= \lim_{b\to 0} \frac{De^{bD} - Be^{bB}}{De^{bD} + Ae^{bA} - Ce^{bC} - Be^{bB}} \\ &= \frac{D-B}{D+A-C-B} \end{aligned} \tag{17}$$

Nótese que, como era de esperarse, estas son las estrategias del juego cuando la sensibilidad al riesgo es nula. De igual manera, la ganancia esperada en el límite cuando $b \to 0$ es la ganancia esperada para las estrategias de equilibrio de riesgo nulo:

$$\lim_{b\to 0} V_I = \frac{AD - BC}{D+A-C-B}$$

Analicemos ahora el comportamiento límite para un coeficiente de sensibilidad al riesgo de magnitud grande, es decir, cuando $b \to \infty$.

(18)

$$
\begin{aligned}
\lim_{b\to\infty} p &= \lim_{b\to\infty} \frac{e^{bD}-e^{bC}}{e^{bD}+e^{bA}-e^{bC}-e^{bB}} \\
&= \lim_{b\to\infty} \Big(\frac{e^{bD}}{e^{bD}+e^{bA}-e^{bC}-e^{bB}} - \frac{e^{bC}}{e^{bD}+e^{bA}-e^{bC}-e^{bB}}\Big) \\
&= \lim_{b\to\infty} \Big(e^{bD}\cdot\frac{1}{e^{bD}+e^{bA}-e^{bC}-e^{bB}} - e^{bC}\cdot\frac{1}{e^{bD}+e^{bA}-e^{bC}-e^{bB}}\Big) \\
&= \lim_{b\to\infty} \Big(\frac{1}{e^{-bD}}\cdot\frac{1}{e^{bD}+e^{bA}-e^{bC}-e^{bB}} - \frac{1}{e^{-bC}}\cdot\frac{1}{e^{bD}+e^{bA}-e^{bC}-e^{bB}}\Big) \\
&= \lim_{b\to\infty} \Big(\frac{1}{e^{b(D-D)}+e^{b(A-D)}-e^{b(C-D)}-e^{b(B-D)}} \\
&\quad - \frac{1}{e^{b(D-C)}+e^{b(A-C)}-e^{b(C-C)}-e^{b(B-C)}}\Big) \\
&= \lim_{b\to\infty} \Big(\frac{1}{1+e^{b(A-D)}-e^{b(C-D)}-e^{b(B-D)}} \\
&\quad - \frac{1}{e^{b(D-C)}+e^{b(A-C)}-1-e^{b(B-C)}}\Big) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

y

(19)

$$
\begin{aligned}
\lim_{b\to\infty} q &= \lim_{b\to\infty} \frac{e^{bD}-e^{bB}}{e^{bD}+e^{bA}-e^{bC}-e^{bB}} \\
&= \lim_{b\to\infty} \Big(\frac{e^{bD}}{e^{bD}+e^{bA}-e^{bC}-e^{bB}} - \frac{e^{bB}}{e^{bD}+e^{bA}-e^{bC}-e^{bB}}\Big) \\
&= \lim_{b\to\infty} \Big(e^{bD}\cdot\frac{1}{e^{bD}+e^{bA}-e^{bC}-e^{bB}} - e^{bB}\cdot\frac{1}{e^{bD}+e^{bA}-e^{bC}-e^{bB}}\Big) \\
&= \lim_{b\to\infty} \Big(\frac{1}{e^{-bD}}\cdot\frac{1}{e^{bD}+e^{bA}-e^{bC}-e^{bB}} - \frac{1}{e^{-bB}}\cdot\frac{1}{e^{bD}+e^{bA}-e^{bC}-e^{bB}}\Big) \\
&= \lim_{b\to\infty} \Big(\frac{1}{e^{b(D-D)}+e^{b(A-D)}-e^{b(C-D)}-e^{b(B-D)}} \\
&\quad - \frac{1}{e^{b(D-B)}+e^{b(A-B)}-e^{b(C-B)}-e^{b(B-B)}}\Big) \\
&= \lim_{b\to\infty} \Big(\frac{1}{1+e^{b(A-D)}-e^{b(C-D)}-e^{b(B-D)}} \\
&\quad - \frac{1}{e^{b(D-B)}+e^{b(A-B)}-e^{b(C-B)}-1}\Big) \\
&= 1,
\end{aligned}
$$

ya que estamos tomando $D > A > C > B$.

Podemos observar que tanto p como q tienden a 1, y por lo tanto V_I tiende a A. Notemos que a I le va mejor que en el caso de riesgo nulo, pues $A > \frac{AD-BC}{D+A-C-B}$. Efectivamente, si suponemos $A \leqslant \frac{AD-BC}{D+A-C-B}$, entonces

$$AD + A^2 - AC - AB \leqslant AD - BC,$$

es decir,

$$A(A-C) \leqslant B(A-C)$$

y por lo tanto $A \leqslant B$, ya que $A - C > 0$. Pero esto contradice nuestra hipótesis de que $A > B$, quedando demostrado entonces que $A \geq \frac{AD-BC}{D+A-C-B}$.

Analizaremos ahora el comportamiento de p, q y V_I cuando $0 < b < \infty$. Comencemos analizando q:

$$q = \frac{e^{bD} - e^{bB}}{e^{bD} + e^{bA} - e^{bC} - e^{bB}}$$

Sea $x = D - B$, $y = A - B$, $z = C - B$. Como $D > A > C > B$, tenemos $x > y > z > 0$

$$q = \frac{e^{bB}}{e^{bB}} \cdot \frac{e^{b(D-B)} - 1}{e^{b(D-B)} + e^{b(A-B)} - e^{b(C-B)} - 1} = \frac{e^{bx} - 1}{e^{bx} + e^{by} - e^{bz} - 1} \tag{20}$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q}{\partial b} &= \frac{xe^{bx}(e^{bx} + e^{by} - e^{bz} - 1) - (e^{bx} - 1)(xe^{bx} + ye^{by} - ze^{bz})}{(e^{bx} + e^{by} - e^{bz} - 1)^2} \\
&= \frac{xe^{2bx} + xe^{b(x+y)} - xe^{b(x+z)} - xe^{bx} - xe^{2bx} - ye^{b(x+y)} + ze^{b(x+z)} + xe^{bx} + ye^{by} - ze^{bz}}{(e^{bx} + e^{by} - e^{bz} - 1)^2} \\
&= \frac{(x-y)e^{b(x+y)} + ye^{by} - (x-z)e^{b(x+z)} - ze^{bz}}{(e^{bx} + e^{by} - e^{bz} - 1)^2}
\end{aligned}$$

Definamos ahora

$$r(c) = (x-y)(x+y-z)e^{c(y-z)} + y(y-z)e^{c(y-z-x)} - x(x-z)$$

Entonces

$$e^{cx}r(c) = (x-y)(x+y-z)e^{c(x+y-z)} + y(y-z)e^{c(y-z)} - x(x-z)e^{cx},$$

y de donde

$$\begin{aligned}
\int_0^b e^{cx}r(c)dc &= (x-y)(x+y-z)\int_0^b e^{c(x+y-z)} + y(y-z)\int_0^b e^{c(y-z)} - x(x-z)\int_0^b e^{cx} \\
&= [\frac{(x-y)(x+y-z)}{x+y-z}e^{c(x+y-z)} + \frac{y(y-z)}{y-z}e^{c(y-z)} - \frac{x(x-z)}{x}e^{cx}]_0^b \\
&= [(x-y)e^{c(x+y-z)} + ye^{c(y-z)} - (x-z)e^{cx}]_0^b \\
&= (x-y)e^{b(x+y-z)} + ye^{b(y-z)} - (x-z)e^{bx} - z
\end{aligned} \tag{21}$$

Así, podemos observar que

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{bz}}{(e^{bx} + e^{by} - e^{bz} - 1)^2} \cdot \int_0^b e^{cx}r(c)dc \\
&= \frac{e^{bz}((x-y)e^{b(x+y-z)} + ye^{b(y-z)} - (x-z)e^{bx} - z)}{(e^{bx} + e^{by} - e^{bz} - 1)^2} \\
&= \frac{(x-y)e^{b(x+y)} + ye^{by} - (x-z)e^{b(x+z)} - ze^{bz}}{(e^{bx} + e^{by} - e^{bz} - 1)^2} = \frac{\partial q}{\partial b}
\end{aligned}$$

Entonces, para analizar cuándo $q'(b)$ será mayor o menor que cero, es suficiente ver el comportamiento de $\int_0^b e^{cx} r(c)dc$. Más aún, como e^{cx} siempre es positivo, basta analizar la forma de la función $r(c)$. Cuando decimos que estudiar $q'(b)$ es similar a estudiar $\int_0^b r(c)dc$, nos referimos a que en el intervalo donde esta integral sea negativa, en ese intervalo $q'(b)$ será negativa también, y lo mismo pasa con el intervalo donde la integral es positiva. Ahora, la integral es negativa en un intervalo $(0, b)$, cuando el área del subintervalo de $(0, b)$ donde $r(c) < 0$ es mayor al área del subintervalo de $(0, b)$ donde $r(c) > 0$. Analizando la función $r(c)$ para $x = D - B$, $y = A - B$, y $z = C - B$, obtenemos lo siguiente:

(22)
$$\begin{aligned}
&\lim_{c\to\infty} r(c) = \lim_{c\to\infty}[(x-y)(x+y-z)e^{c(y-z)} + y(y-z)e^{c(y-z-x)} - x(x-z)] \\
&= (x-y)(x+y-z)\lim_{c\to\infty}[e^{c(y-z)}] + y(y-z)\lim_{c\to\infty}[e^{c(y-z-x)}] - x(x-z) = \infty
\end{aligned}$$

(23)
$$\begin{aligned}
&\lim_{c\to-\infty} r(c) = \lim_{c\to-\infty}[(x-y)(x+y-z)e^{c(y-z)} + y(y-z)e^{c(y-z-x)} - x(x-z)] \\
&= (x-y)(x+y-z)\lim_{c\to-\infty}[e^{c(y-z)}] + y(y-z)\lim_{c\to-\infty}[e^{c(y-z-x)}] - x(x-z) \\
&= -x(x-z) > 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r(0) &= (x-y)(x+y-z)e^{0(y-z)} + y(y-z)e^{0(y-z-x)} - x(x-z) \\
&= (x-y)(x+y-z) + y(y-z) - x(x-z) \\
&= x^2 + xy - xz - xy - y^2 + yz + y^2 - yz - x^2 + xz = 0
\end{aligned}$$

y

$$r'(b) = (x-y)(y-z)(x+y-z)e^{b(y-z)} + y(y-z)(y-z-x)e^{b(y-z-x)}.$$

Por lo tanto

(24)
$$\begin{aligned}
r'(b) = 0 &\Leftrightarrow (x-y)(y-z)(x+y-z)e^{b(y-z)} = -y(y-z)(y-z-x)e^{b(y-z-x)} \\
&\Leftrightarrow \frac{e^{b(y-z)}}{e^{b(y-z-x)}} = \frac{-y(y-z)(y-z-x)}{(x-y)(y-z)(x+y-z)} \\
&\Leftrightarrow e^{bx} = \frac{-y(y-z)(y-z-x)}{(x-y)(y-z)(x+y-z)} \\
&\Leftrightarrow b = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{-y(y-z-x)}{(x-y)(x+y-z)}\right) := b_1
\end{aligned}$$

Nótese que la existencia de b_1 está condicionada a que se dé la condición $\frac{-y(y-z-x)}{(x-y)(x+y-z)} > 0$, y dada la forma en que definimos x, y y z, esta condición siempre se cumple. Además,

$$r''(b) = (x-y)(y-z)^2(x+y-z)e^{b(y-z)} + y(y-z)(y-z-x)^2e^{b(y-z-x)}$$

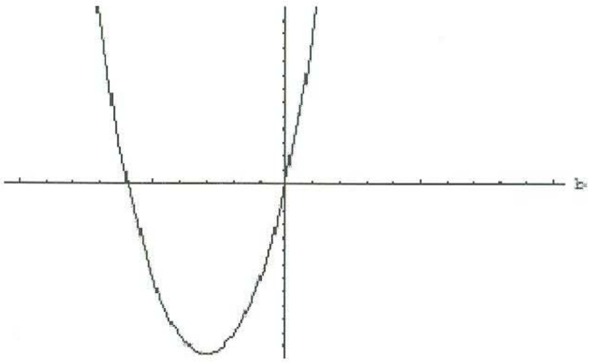
y

$$(25)\quad \begin{aligned} r''(b_1) &= (x-y)(y-z)^2(x+y-z)e^{\frac{1}{x}\ln(\frac{-y(y-z-x)}{(x-y)(x+y-z)})(y-z)} \\ &\quad + y(y-z)(y-z-x)^2 e^{\frac{1}{x}\ln(\frac{-y(y-z-x)}{(x-y)(x+y-z)})(y-z-x)} \\ &= (x-y)(y-z)^2(x+y-z)(\frac{-y(y-z-x)}{(x-y)(x+y-z)})^{\frac{y-z}{x}} \\ &\quad + y(y-z)(y-z-x)^2(\frac{-y(y-z-x)}{(x-y)(x+y-z)})^{\frac{y-z-x)}{x}}, \end{aligned}$$

de donde se puede ver que $r''(b_1) > 0$. Por lo tanto b_1 es un mínimo de $r(b)$. Haciendo ahora las sustituciones necesarias, tenemos que

$$b_1 = \frac{1}{D-B}\ln(\frac{(A-B)(D+C-B-A)}{(D-A)(D+A-B-C)})$$

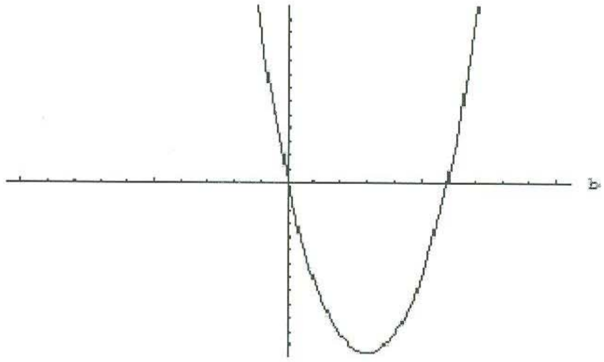
Como $r(b)$ tiene un único mínimo (b_1), a partir de él la función será no decreciente. Si $b_1 \leqslant 0$, la gráfica de $r(c)$ tendría esta forma:



Notemos que $\int_0^b e^{cx} r(c)dc > 0$ para toda $b > 0$, por lo que $q'(b) > 0$ para toda $b > 0$, de donde concluímos que $q(b)$ es una función creciente monótona. Pero, ¿cuándo sucede que $b_1 \leqslant 0$?

$$\begin{aligned} b_1 = \frac{1}{D-B}\ln(\frac{(A-B)(D+C-B-A)}{(D-A)(D+A-B-C)}) \leqslant 0 &\quad \Leftrightarrow \\ \ln(\frac{(A-B)(D+C-B-A)}{(D-A)(D+A-B-C)}) \leqslant 0 &\quad \Leftrightarrow \\ (A-B)(D+C-B-A) < (D-A)(D+A-B-C) &\quad \Leftrightarrow \\ AD+AC-AB-A^2-BD-BC+B^2+AB \leqslant & \\ D^2+AD-BD-CD-AD-A^2+AB+AC &\quad \Leftrightarrow \\ B^2-BC \leqslant BC-AD-DC+AB &\quad \Leftrightarrow \\ (D+B)(B-D) \leqslant (B-D)(A+C) &\quad \Leftrightarrow \\ D+B \geq A+C & \end{aligned}$$

Si $b_1 > 0$, la gráfica de $r(c)$ tiene la siguiente forma:



así, $\int_0^b e^{cx} r(c)dc < 0$ al menos hasta $b = b_2 > b_1$,donde $r(b_2) = 0$ por tanto $q'(b) < 0$ para $b \in (0, b_2)$, y la función $q(b)$ será creciente monótona para $b > b_2$. Tenemos asegurada la existencia de este b_2 pues la función no puede ser eternamente decreciente, ya que $q(b)$ tiende a 1 cuando b tiende a infinito. Así, existe $b_3 > b_2$, $q'(b_3) = 0$, $q'(b) > 0$ para $b > b_3$. Pero, ¿cuándo sucede que $b_1 > 0$?

$$\begin{aligned}
b_1 = \frac{1}{D-B}\ln(\frac{(A-B)(D+C-B-A)}{(D-A)(D+A-B-C)}) > 0 \Leftrightarrow \\
\ln(\frac{(A-B)(D+C-B-A)}{(D-A)(D+A-B-C)}) > 0 \Leftrightarrow \\
(A-B)(D+C-B-A) > (D-A)(D+A-B-C) \Leftrightarrow \\
AD + AC - AB - A^2 - BD - BC + B^2 + AB > \\
D^2 + AD - BD - CD - AD - A^2 + AB + AC \Leftrightarrow \\
B^2 - BC > BC - AD - DC + AB \Leftrightarrow \\
(D+B)(B-D) > (B-D)(A+C) \Leftrightarrow \\
D + B < A + C
\end{aligned}$$

Ya que analizamos el comportamiento de q, nos será más fácil ver cómo se comporta p:

$$p = \frac{e^{bD} - e^{bC}}{e^{bD} + e^{bA} - e^{bC} - e^{bB}}$$

Sea $x = D - C$, $y = A - C$, $z = B - C$. Como $D > A > C > B$, tenemos $x > y > 0 > z$.

$$p = \frac{e^{bC}}{e^{bC}} \cdot \frac{e^{b(D-C)} - 1}{e^{b(D-C)} + e^{b(A-C)} - e^{b(B-C)} - 1} = \frac{e^{bx} - 1}{e^{bx} + e^{by} - e^{bz} - 1}$$

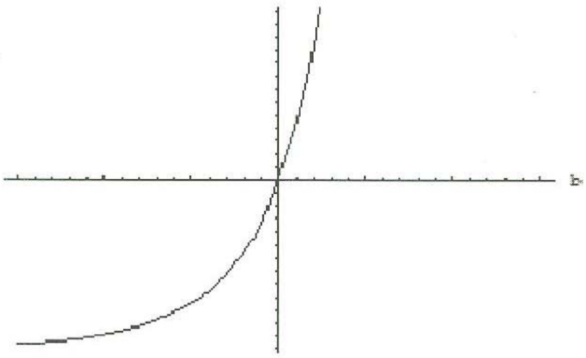
$$\frac{\partial p}{\partial b} = \frac{xe^{bx}(e^{bx} + e^{by} - e^{bz} - 1) - (e^{bx} - 1)(xe^{bx} + ye^{by} - ze^{bz})}{(e^{bx} + e^{by} - e^{bz} - 1)^2}$$

Dada la forma en que definimos x, y y z, tenemos que el analizar $p(b)$ es exactamente igual a analizar $q(b)$, por lo tanto sólo tenemos que analizar el comportamiento de $r(b)$. Sabemos que $r(0) = 0$, y que

$$\begin{aligned}\lim_{c\to\infty} r(c) &= \lim_{c\to\infty}[(x-y)(x+y-z)e^{c(y-z)} + y(y-z)e^{c(y-z-x)} - x(x-z)]\\ &= (x-y)(x+y-z)\lim_{c\to\infty}[e^{c(y-z)}] + y(y-z)\lim_{c\to\infty}[e^{c(y-z-x)}] - x(x-z) = \infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{c\to-\infty} r(c) &= \lim_{c\to-\infty}[(x-y)(x+y-z)e^{c(y-z)} + y(y-z)e^{c(y-z-x)} - x(x-z)]\\ &= (x-y)(x+y-z)\lim_{c\to-\infty}[e^{c(y-z)}] + y(y-z)\lim_{c\to-\infty}[e^{c(y-z-x)}] - x(x-z)\\ &= -x(x-z) < 0\end{aligned}$$

$r(b)$ tiene un mínimo en $b_1 = \frac{1}{x}\ln(\frac{-y(y-z-x)}{(x-y)(x+y-z)})$, pero la existencia de b_1 está condicionada a que $\frac{-y(y-z-x)}{(x-y)(x+y-z)} > 0$, y dada la forma en que definimos x, y y z, esta condición se cumple únicamente cuando $D+B > A+C$. Cuando $D+B < A+C$, la gráfica de $r(c)$ tiene esta forma:



$\int_0^b r(c)dc > 0$ para toda $b > 0$, eso implica que $p'(b) > 0$ para toda $b > 0$, de donde concluímos que $p(b)$ es una función creciente monótona.

Analizando ahora el caso cuando $D+B > A+C$, al sustituir variables nos queda el siguiente b_1:

$$b_1 = \frac{1}{D-C}\ln(\frac{(A-C)(D-C+B-A)}{(D-A)(D+A-B-C)})$$

Ahora encontraremos cuándo b_1 es menor que cero.

$$\begin{aligned}\frac{1}{D-C}\ln(\frac{(A-C)(D-C+B-A)}{(D-A)(D+A-B-C)}) < 0 \Leftrightarrow\\ \ln(\frac{(A-C)(D-C+B-A)}{(D-A)(D+A-B-C)}) < 0 \Leftrightarrow\\ (A-C)(D-C+B-A) < (D-A)(D+A-B-C) \Leftrightarrow\\ DA - AC + DB - BC < D^2 - C^2 \Leftrightarrow (A+B)(D-C) < (D-C)(D+C) \Leftrightarrow\\ A+B < D+C\end{aligned}$$

Es fácil ver que $A+B < D+C$ siempre, pues sabemos que $D > A > C > B$. Por lo tanto, $p(b)$ es monótona creciente para cualquier valor de A, B, C y D.

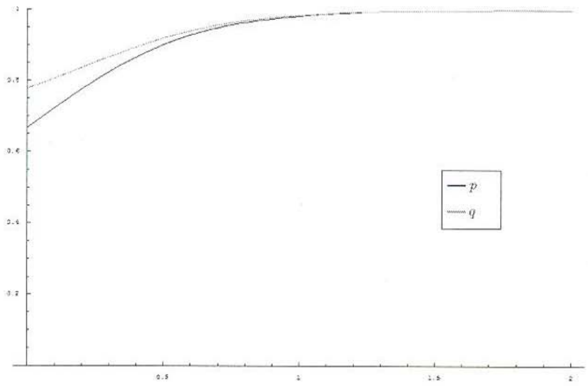
Para concluir esta sección, haremos un resúmen del comportamiento de p y q, y a partir de ahí deduciremos el comportamiento de V_I, incluyendo también un par de ejemplos para ilustrar los resultados teóricos.

Cuando $A+C \leqslant B+D$, p y q son crecientes monótonas, por lo que V_I también lo es. Así, la ganancia monetaria esperada del jugador I se incrementa junto con b. Podemos observar el comportamiento mencionado para $A+C \leqslant B+D$ en el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 4.1. *Dados los valores de las entradas de la matriz de ganancias, encontraremos las gráficas de* $p(b)$, $q(b)$ *y* $V_I(b)$.

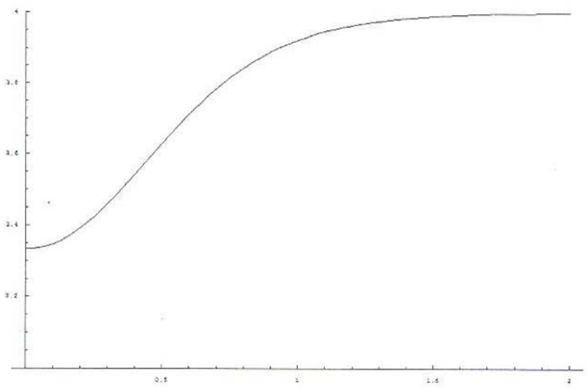
$$A = 4 \qquad B = 1 \qquad C = 2 \qquad D = 8$$

$$p(b) = \frac{e^{8b} - e^{2b}}{e^{8b} + e^{4b} - e^{2b} - e^{b}} \qquad q(b) = \frac{e^{8b} - e^{b}}{e^{8b} + e^{4b} - e^{2b} - e^{b}}$$



$$V_I = 4pq + p(1-q) + 2(1-p)q + 8(1-p)(1-q)$$

La siguiente es la gráfica de V_I



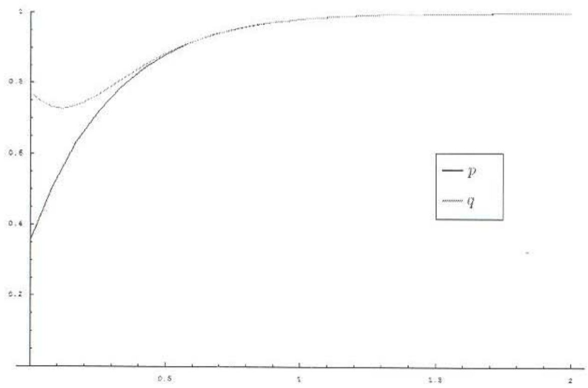
Cuando $A+C > B+D$, p sigue siendo creciente monótona, pero q decrece inicialmente hasta alcanzar un valor mínimo b^*, y a partir de ahí es creciente monótona. Dado que q decrece en un principio, V_I también lo hace, hasta que alcanza su valor mínimo para luego volverse creciente monótona. Así, en un principio al jugador I le va peor que como le iría en el caso de riesgo nulo, pero luego de cierto nivel de riesgo comienza a irle cada vez mejor. El siguiente ejemplo ilustra este caso

EJEMPLO 4.2. *Encontraremos las gráficas de p, q y V_I para los siguientes valores de las entradas de la matriz de ganancias*

$$A = 14 \qquad B = -6 \qquad C = 7 \qquad D = 18$$

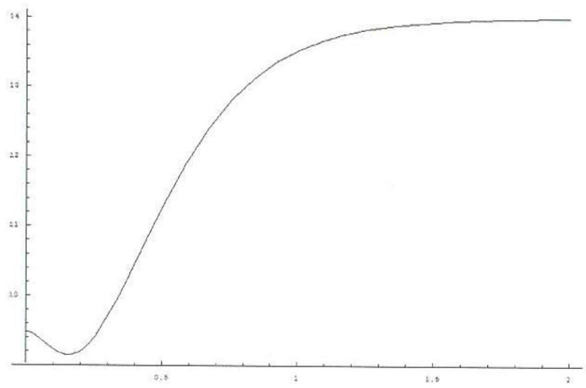
$$p = \frac{e^{18b} - e^{7b}}{e^{18b} + e^{14b} - e^{7b} - e^{-6b}} \qquad q = \frac{e^{18b} - e^{-6b}}{e^{18b} + e^{14b} - e^{7b} - e^{-6b}}$$

Las siguientes son las gráficas de $p(b)$ y $q(b)$:



$$V_I = 14pq - 6p(1-q) + 7(1-p)q + 18(1-p)(1-q)$$

Esta gráfica es la de V_I



2.2. I adverso, II proclive. Para estudiar el caso cuando I es adverso al riesgo y II es proclive, nos serviremos de los métodos utilizados en la sección pasada. Tomemos $b = b_I = -b_{II} > 0$. Ahora la matriz de utilidades será la siguiente:

$$\begin{pmatrix} -e^{-bA} & -e^{-bB} \\ -e^{-bC} & -e^{-bD} \end{pmatrix}$$

De donde obtenemos los siguientes valores para p y q:

$$p = \frac{e^{-bD} - e^{-bC}}{e^{-bD} + e^{-bA} - e^{-bC} - e^{-bB}}$$

$$q = \frac{e^{-bD} - e^{-bB}}{e^{-bD} + e^{-bA} - e^{-bC} - e^{-bB}}$$

Ahora, hay varios casos dignos de interés, tomemos por ejemplo cuando $b \to 0$. Por el teorema de L'Hospital, tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to 0} p &= \lim_{b\to 0} \frac{e^{-bD} - e^{-bC}}{e^{-bD} + e^{-bA} - e^{-bC} - e^{-bB}} \\
&= \lim_{b\to 0} \frac{-De^{-bD} + Ce^{-bC}}{-De^{-bD} - Ae^{-bA} + Ce^{-bC} + Be^{-bB}} \qquad (26) \\
&= \frac{D - C}{D + A - C - B}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to 0} q &= \lim_{b\to 0} \frac{e^{-bD} - e^{-bB}}{e^{-bD} + e^{-bA} - e^{-bC} - e^{-bB}} \\
&= \lim_{b\to 0} \frac{-De^{bD} + Be^{-bB}}{-De^{-bD} - Ae^{-bA} + Ce^{-bC} + Be^{-bB}} \qquad (27) \\
&= \frac{D - B}{D + A - C - B}
\end{aligned}$$

Nótese que estas son las estrategias del juego cuando la sensibilidad al riesgo es nula. De igual manera,

$$\lim_{b\to 0} V_I = \frac{AD - BC}{D + A - C - B}$$

Otro caso de interés es cuando $b \to \infty$:

(28)

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to\infty} p &= \lim_{b\to\infty} \frac{e^{-bD} - e^{-bC}}{e^{-bD} + e^{-bA} - e^{-bC} - e^{-bB}} \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{e^{-bD}}{e^{-bD} + e^{-bA} - e^{-bC} - e^{-bB}} - \frac{e^{-bC}}{e^{-bD} + e^{-bA} - e^{-bC} - e^{-bB}}\right) \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(e^{-bD}\frac{1}{e^{-bD} + e^{-bA} - e^{-bC} - e^{-bB}} - e^{-bC}\frac{1}{e^{-bD} + e^{-bA} - e^{-bC} - e^{-bB}}\right) \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{e^{bD}}\frac{1}{e^{-bD} + e^{-bA} - e^{-bC} - e^{-bB}} - \frac{1}{e^{bC}}\frac{1}{e^{-bD} + e^{-bA} - e^{-bC} - e^{-bB}}\right) \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{e^{-b(D-D)} + e^{-b(A-D)} - e^{-b(C-D)} - e^{-b(B-D)}}\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{e^{-b(D-C)} + e^{-b(A-C)} - e^{-b(C-C)} - e^{-b(B-C)}}\right) \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{1 + e^{-b(A-D)} - e^{-b(C-D)} - e^{-b(B-D)}}\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{e^{-b(D-C)} + e^{-b(A-C)} - 1 - e^{-b(B-C)}}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

y

(29)

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to\infty} q &= \lim_{b\to\infty} \frac{e^{-bD} - e^{-bB}}{e^{-bD} + e^{-bA} - e^{-bC} - e^{-bB}} \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{e^{-bD}}{e^{-bD} + e^{-bA} - e^{-bC} - e^{-bB}} - \frac{e^{-bB}}{e^{-bD} + e^{-bA} - e^{-bC} - e^{-bB}}\right) \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(e^{-bD}\frac{1}{e^{-bD} + e^{-bA} - e^{-bC} - e^{-bB}} - e^{-bB}\frac{1}{e^{-bD} + e^{-bA} - e^{-bC} - e^{-bB}}\right) \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{e^{bD}}\frac{1}{e^{-bD} + e^{-bA} - e^{-bC} - e^{-bB}} - \frac{1}{e^{bB}}\frac{1}{e^{-bD} + e^{-bA} - e^{-bC} - e^{-bB}}\right) \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{e^{-b(D-D)} + e^{-b(D-A)} - e^{-b(D-C)} - e^{-b(D-B)}}\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{e^{-b(D-B)} + e^{-b(A-B)} - e^{-b(C-B)} - e^{-b(B-B)}}\right) \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{1 + e^{-b(A-D)} - e^{-b(C-D)} - e^{-b(B-D)}}\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{e^{-b(D-B)} + e^{-b(A-B)} - e^{-b(C-B)} - 1}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

aquí podemos observar que p tiende a cero mientras que q tiende a uno, haciendo entonces que V_I tienda a C. Notemos que en el límite, a I le va peor que en el caso de riesgo nulo, pues $C < \frac{AD-BC}{D+A-C-B}$. La demostración es como sigue:

Demostración: Supongamos $C \geq \frac{AD-BC}{D+A-C-B}$, entonces

$$\begin{aligned}
CD + AC - C^2 - BC \geq AD - BC \Leftrightarrow \\
C(D-C) \geq A(D-C) \Leftrightarrow C \geq A
\end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción, pues sabemos que $A > C$, demostrando así que $C < \frac{AD-BC}{D+A-C-B}$.

□

Analizaremos ahora el comportamiento de p, q y V_I cuando $0 < b < \infty$. Para analizarlas, de nuevo utilizaremos la función $r(c)$, sólo que con los cambios que haremos en las variables, obtendremos la versión reflejada (dada una $x > 0$, $r(x)$ será la $r(-x)$ de la subsección 2.1) de la $r(c)$ estudiada en la subsección pasada.

Comencemos analizando q:

$$q = \frac{e^{-bD} - e^{-bB}}{e^{-bD} + e^{-bA} - e^{-bC} - e^{-bB}}$$

Sea $x = B - D$, $y = B - A$, $z = B - C$.

$$q = \frac{e^{-bB}}{e^{-bB}} \cdot \frac{e^{b(B-D)} - 1}{e^{b(B-D)} + e^{b(B-A)} - e^{b(B-C)} - 1} = \frac{e^{bx} - 1}{e^{bx} + e^{by} - e^{bz} - 1}$$

Nótese que de nuevo obtenemos el mismo valor de q que el obtenido en la ecuación 20 cuando cambiamos las variables. Entonces, sabemos que basta con analizar el comportamiento de $r(b)$, que ya sabemos tiene un mínimo en $b_1 = \frac{1}{x}\ln(\frac{-y(y-z-x)}{(x-y)(x+y-z)})$. Dada la forma en que definimos x, y y z, tenemos garantizada la existencia de este b_1.

$$
\begin{aligned}
(30)\quad b_1 = \frac{1}{B-D}\ln(\frac{(A-B)(D+C-B-A)}{(D-A)(D+A-B-C)}) < 0 \Leftrightarrow \\
\ln(\frac{(A-B)(D+C-B-A)}{(D-A)(D+A-B-C)}) > 0 \Leftrightarrow \\
(A-B)(D+C-B-A) > (D-A)(D+A-B-C) \Leftrightarrow \\
AD+AC-AB-A^2-BD-BC+B^2+AB > D^2+AD-BD-CD-AD-A^2+AB+AC \Leftrightarrow \\
-BC+B^2 > D^2-CD-AD+AB \Leftrightarrow \\
B^2-D^2 > BC-CD-AD+AB \Leftrightarrow \\
(D+B)(B-D) > (B-D)(A+C) \Leftrightarrow D+B < A+C
\end{aligned}
$$

De igual manera podemos ver que $b_1 > 0$ cuando $D+B > A+C$.

Ahora analizaremos el comportamiento de p.

$$p = \frac{e^{-bD} - e^{-bC}}{e^{-bD} + e^{-bA} - e^{-bC} - e^{-bB}}$$

Sea $x = C-D$, $y = C-A$, $z = C-B$.

$$p = \frac{e^{-bC}}{e^{-bC}} \cdot \frac{e^{b(C-D)} - 1}{e^{b(C-D)} + e^{b(C-A)} - e^{b(C-B)} - 1} = \frac{e^{bx} - 1}{e^{bx} + e^{by} - e^{bz} - 1}$$

Utilizando un método similar, concluimos que $p(b)$ es decreciente monótona.

Ahora, procederemos a resumir lo visto en cuanto al comportamiento de p, q, y V_I en el caso en que I es adverso al riesgo y II es proclive, ilustrándolo con un par de ejemplos.

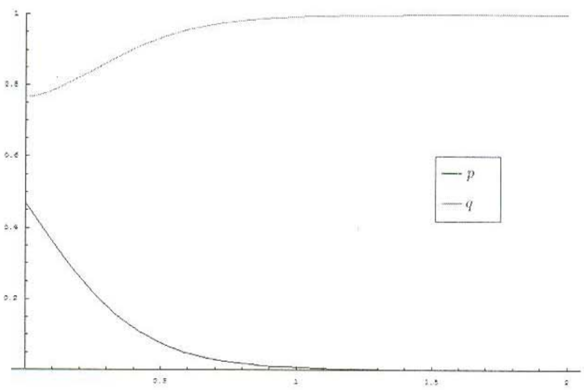
Cuando $A+C \geq B+D$, q es monótona creciente, pero p y V_I son monótonas decrecientes en b. En este caso, al jugador II le va cada vez mejor conforme aumenta el grado de sensibilidad al riesgo, como se observa en el siguiente ejemplo

Ejemplo 4.3. *Los valores para la matriz de ganancias son los siguientes*

$$A = 11 \qquad B = 2 \qquad C = 7 \qquad D = 15$$

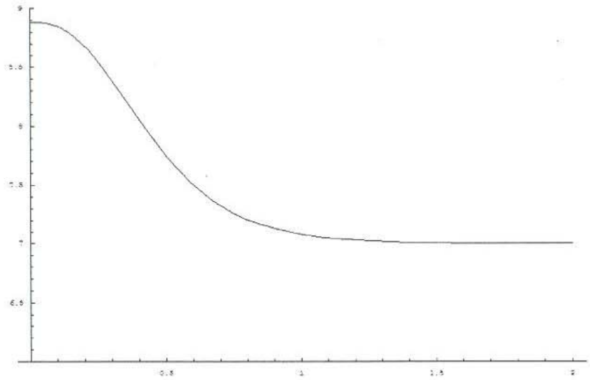
$$p = \frac{e^{-15b} - e^{-7b}}{e^{-15b} + e^{-11b} - e^{-7b} - e^{-2b}} \qquad q = \frac{e^{-15b} - e^{-2b}}{e^{-15b} + e^{-11b} - e^{-7b} - e^{-2b}}$$

La siguiente es la gráfica para $p(b)$ y $q(b)$



$$V_I = 11pq + 2p(1-q) + 7(1-p)q + 15(1-p)(1-q)$$

Veamos ahora la gráfica para V_I



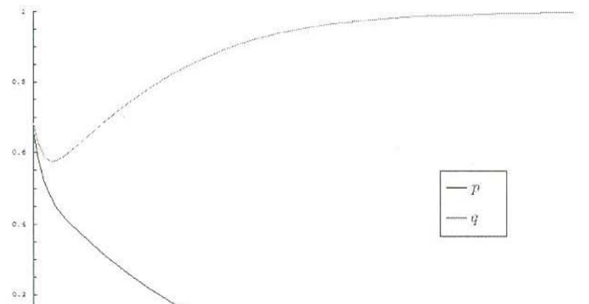
Cuando $A + C < B + D$, p sigue siendo monótona decreciente en b; q decrece inicialmente hasta que alcanza un mínimo para luego volverse creciente monótona; y V_I crece inicialmente hasta que alcanza un máximo, para luego volverse monótona decreciente. Nótese que al principio al jugador II le va peor que en el caso de riesgo nulo, pero luego de cierto grado de sensibilidad al riesgo, comienza a irle cada vez mejor. Esto se observa claramente en el siguiente ejemplo

EJEMPLO 4.4. *Graficaremos $p(b)$, $q(b)$ y V_I, dados los siguientes valores de las entradas de la matriz de ganancias*

$$A = 18 \qquad B = 6 \qquad C = 7 \qquad D = 30$$

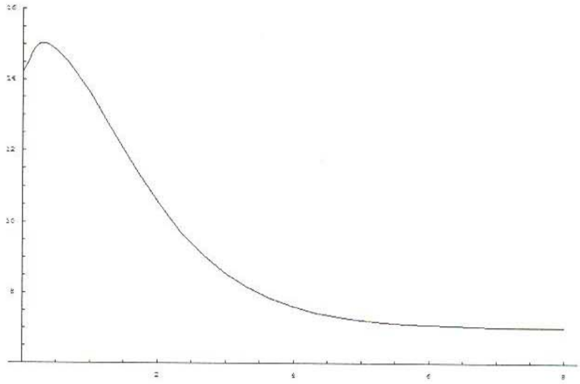
$$p = \frac{e^{-30b} - e^{-7b}}{e^{-30b} + e^{-18b} - e^{-7b} - e^{-6b}} \qquad\qquad q = \frac{e^{-30b} - e^{-6b}}{e^{-30b} + e^{-18b} - e^{-7b} - e^{-6b}}$$

Esta es la gráfica para $p(b)$ y $q(b)$



$$V_I = 18pq + 6p(1-q) + 7(1-p)q + 30(1-p)(1-q)$$

Con la siguiente gráfica para V_I



3. $U_I(x) \neq -U_{II}(-x)$

En esta sección, continuamos suponiendo que ambos jugadores tienen funciones de utilidad exponenciales, pero ahora no se exige la condición de suma cero en términos de utilidades.

Si $U_I(x)$ no necesariamente es igual a $-U_{II}(-x)$, podemos considerar los casos donde ambos jugadores son adversos al riesgo y donde ambos son proclives. Dado que la matriz de utilidad para los jugadores es

$$\begin{pmatrix} (U_I(A), U_{II}(-A)) & (U_I(B), U_{II}(-B)) \\ (U_I(C), U_{II}(-C)) & (U_I(D), U_{II}(-D)) \end{pmatrix},$$

con base a los resultados obtenidos en el capítulo de suma cero, tenemos que las estrategias de equilibrio son

$$p = \frac{U_{II}(-D) - U_{II}(-C)}{U_{II}(-D) + U_{II}(-A) - U_{II}(-C) - U_{II}(-B)} \tag{31}$$

y

$$q = \frac{U_I(D) - U_I(B)}{U_I(D) + U_I(A) - U_I(C) - U_I(B)} \tag{32}$$

Primeramente, supondremos que ambos jugadores tienen funciones de utilidad idénticas, y después estudiaremos el caso contrario.

3.1. Funciones idénticas. Comenzaremos suponiendo que ambos jugadores son adversos al riesgo, es decir, $b = b_I = b_{II} > 0$. Entonces la matriz de utilidades es:

$$\begin{pmatrix} (-e^{-bA}, -e^{bA}) & (-e^{-bB}, -e^{bB}) \\ (-e^{-bC}, -e^{bC}) & (-e^{-bD}, -e^{bD}) \end{pmatrix}$$

Consecuentemente, los valores para las estrategias de equilibrio p y q son:

$$p = \frac{e^{bD} - e^{bC}}{e^{bD} + e^{bA} - e^{bC} - e^{bB}}, \tag{33}$$

$$q = \frac{e^{-bD} - e^{-bB}}{e^{-bD} + e^{-bA} - e^{-bC} - e^{-bB}} \tag{34}$$

En el límite cuando $b \to 0$, observamos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to 0} p &= \lim_{b\to 0} \frac{e^{bD} - e^{bC}}{e^{bD} + e^{bA} - e^{bC} - e^{bB}} \\
&= \lim_{b\to 0} \frac{De^{bD} - Ce^{bC}}{De^{bD} + Ae^{bA} - Ce^{bC} - Be^{bB}} \\
&= \frac{D - C}{D + A - C - B}
\end{aligned} \tag{35}$$

y

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to 0} q &= \lim_{b\to 0} \frac{e^{-bD} - e^{-bB}}{e^{-bD} + e^{-bA} - e^{-bC} - e^{-bB}} \\
&= \lim_{b\to 0} \frac{De^{-bD} - Be^{-bB}}{De^{-bD} + Ae^{-bA} - Ce^{-bC} - Be^{-bB}} \\
&= \frac{D - B}{D + A - C - B}
\end{aligned} \tag{36}$$

También,

$$\lim_{b\to 0} V_I = \frac{AD - BC}{D + A - C - B}$$

Nótese que, al igual que en el caso de suma cero en utilidades, estos valores son los mismos que se observan en el caso de riesgo nulo.

Ahora analizaremos el caso cuando b toma valores muy grandes, es decir, cuando $b \to \infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to \infty} p &= \lim_{b\to \infty} \frac{e^{bD} - e^{bC}}{e^{bD} + e^{bA} - e^{bC} - e^{bB}} \\
&= \lim_{b\to \infty} \left(\frac{e^{bD}}{e^{bD} + e^{bA} - e^{bC} - e^{bB}} - \frac{e^{bC}}{e^{bD} + e^{bA} - e^{bC} - e^{bB}}\right) \\
&= \lim_{b\to \infty} \left(\frac{1}{e^{b(D-D)} + e^{b(A-D)} - e^{b(C-D)} - e^{b(B-D)}}\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{e^{b(D-C)} + e^{b(A-C)} - e^{b(C-C)} - e^{b(B-C)}}\right) \\
&= \lim_{b\to \infty} \left(\frac{1}{1 + e^{b(A-D)} - e^{b(C-D)} - e^{b(B-D)}}\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{e^{b(D-C)} + e^{b(A-C)} - 1 - e^{b(B-C)}}\right) \\
&= 1
\end{aligned} \tag{37}$$

y

$$
\begin{aligned}
\lim_{b\to\infty} q &= \lim_{b\to\infty} \frac{e^{-bD} - e^{-bB}}{e^{-bD} + e^{-bA} - e^{-bC} - e^{-bB}} \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{e^{-bD}}{e^{-bD} + e^{-bA} - e^{-bC} - e^{-bB}} - \frac{e^{-bB}}{e^{-bD} + e^{-bA} - e^{-bC} - e^{-bB}}\right) \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{e^{-b(D-D)} + e^{-b(D-A)} - e^{-b(D-C)} - e^{-b(D-B)}}\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{e^{-b(D-B)} + e^{-b(A-B)} - e^{-b(C-B)} - e^{-b(B-B)}}\right) \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{1 + e^{-b(A-D)} - e^{-b(C-D)} - e^{-b(B-D)}}\right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{e^{-b(D-B)} + e^{-b(A-B)} - e^{-b(C-B)} - 1}\right) \\
&= 1
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Aquí, podemos observar que tanto p como q tienden a 1, provocando que V_I tienda a A. Así, para valores muy grandes de b observamos que al jugador I le va mejor que en el caso de riesgo nulo.

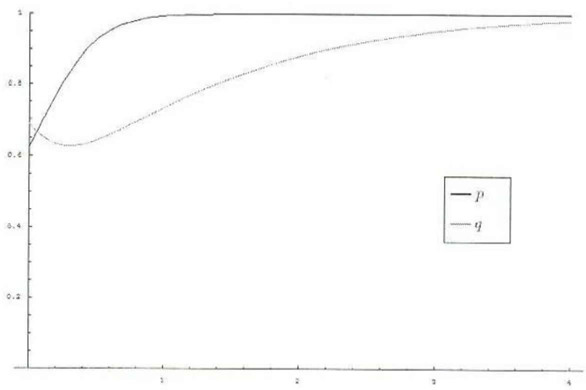
Ya que observamos el comportamiendo en ambos límites, pasamos al caso donde $0 < b < \infty$. Resultaría muy engorroso hacer todo el análisis, así que nos limitaremos a decir que el análisis de p es idéntico al que se hizo para p en el caso $U_I(x) = U_{II}(-x)$ con I proclive al riesgo y II adverso, mientras que el análisis de q es idéntico al que se hizo para q en el caso $U_I(x) = U_{II}(-x)$, con I adverso al riesgo y II proclive. Así, se concluye que cuando $A + C \geq B + D$, p, q y V_I son crecientes monótonas en b. En otras palabras, la ganancia esperada de I se incrementa junto con el coeficiente de adversión al riesgo. El ejemplo siguiente lo muestra claramente

Ejemplo 4.5. *Graficaremos $p(b)$, $q(b)$ y V_I para los siguientes valores de las entradas de la matriz de ganancias*

$$A = 11 \qquad B = 2 \qquad C = 7 \qquad D = 15$$

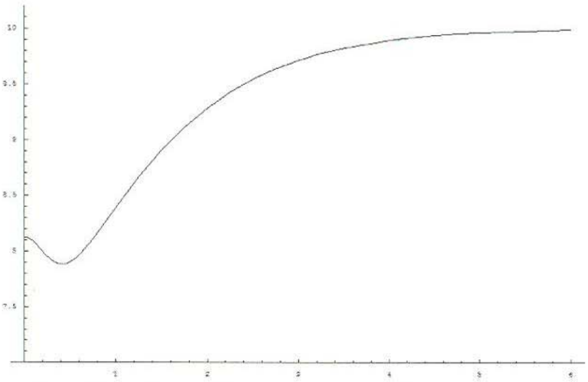
$$p = \frac{e^{15b} - e^{7b}}{e^{15b} + e^{11b} - e^{7b} - e^{2b}} \qquad q = \frac{e^{-15b} - e^{-2b}}{e^{-15b} + e^{-11b} - e^{-7b} - e^{-2b}}$$

Esta es la gráfica para $p(b)$ y $q(b)$



$$V_I = 18pq + 6p(1-q) + 7(1-p)q + 30(1-p)(1-q)$$

Con la siguiente gráfica para V_I



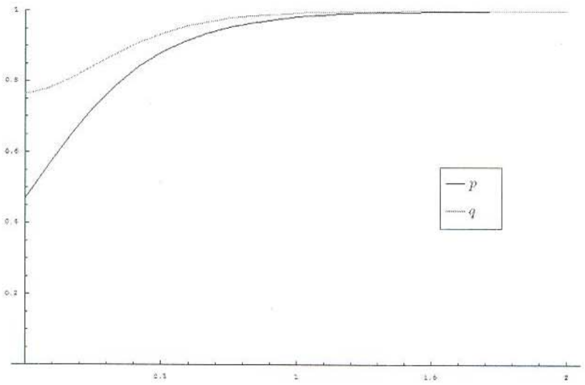
Cuando $A + C < B + D$, p sigue siendo creciente monónotona en b, pero q y V_I decrecen inicialmente antes de volverse creciente monótonas, tal y como sucede en el siguiente ejemplo

EJEMPLO 4.6. *Graficaremos $p(b)$, $q(b)$ y V_I para los siguientes valores de las entradas de la matriz de ganancias*

$$A = 10 \qquad B = 4 \qquad C = 5 \qquad D = 15$$

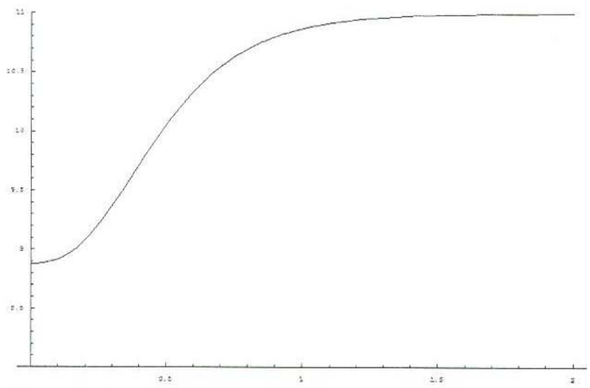
$$p = \frac{e^{15b} - e^{5b}}{e^{15b} + e^{10b} - e^{5b} - e^{4b}} \qquad q = \frac{e^{-15b} - e^{-4b}}{e^{-15b} + e^{-10b} - e^{-5b} - e^{-4b}}$$

Esta es la gráfica para $p(b)$ y $q(b)$



$$V_I = 18pq + 6p(1-q) + 7(1-p)q + 30(1-p)(1-q)$$

Con la siguiente gráfica para V_I



Ahora estudiemos el caso donde ambos jugadores son proclives al riesgo, con $b = -b_I = -b_{II} > 0$. En este caso, la matriz de utilidades es:

$$\begin{pmatrix} (e^{bA}, e^{-bA}) & (e^{bB}, e^{-bB}) \\ (e^{bC}, e^{-bC}) & (e^{bD}, e^{-bD}) \end{pmatrix}$$

y las estrategias son:

$$p = \frac{e^{-bD} - e^{-bC}}{e^{-bD} + e^{-bA} - e^{-bC} - e^{-bB}}$$

$$q = \frac{e^{bD} - e^{bB}}{e^{bD} + e^{bA} - e^{bC} - e^{bB}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{b\to 0} p &= \lim_{b\to 0} \frac{e^{-bD} - e^{-bC}}{e^{-bD} + e^{-bA} - e^{-bC} - e^{-bB}} \\ &= \lim_{b\to 0} \frac{-De^{-bD} + Ce^{-bC}}{-De^{-bD} - Ae^{-bA} + Ce^{-bC} + Be^{-bB}} \\ &= \frac{D - C}{D + A - C - B} \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} \lim_{b\to 0} q &= \lim_{b\to 0} \frac{e^{bD} - e^{bB}}{e^{bD} + e^{bA} - e^{bC} - e^{bB}} \\ &= \lim_{b\to 0} \frac{De^{bD} - Be^{bB}}{De^{bD} + Ae^{bA} - Ce^{bC} - Be^{bB}} \\ &= \frac{D - B}{D + A - C - B} \end{aligned} \tag{40}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{b\to\infty} p &= \lim_{b\to\infty} \frac{e^{-bD}-e^{-bC}}{e^{-bD}+e^{-bA}-e^{-bC}-e^{-bB}} \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{e^{-bD}}{e^{-bD}+e^{-bA}-e^{-bC}-e^{-bB}} - \frac{e^{-bC}}{e^{-bD}+e^{-bA}-e^{-bC}-e^{-bB}}\right) \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{e^{-b(D-D)}+e^{-b(A-D)}-e^{-b(C-D)}-e^{-b(B-D)}}\right. \\
&\left. - \frac{1}{e^{-b(D-C)}+e^{-b(A-C)}-e^{-b(C-C)}-e^{-b(B-C)}}\right) \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{1+e^{-b(A-D)}-e^{-b(C-D)}-e^{-b(B-D)}}\right. \\
&\left. - \frac{1}{e^{-b(D-C)}+e^{-b(A-C)}-1-e^{-b(B-C)}}\right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{41}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{b\to\infty} q &= \lim_{b\to\infty} \frac{e^{bD}-e^{bB}}{e^{bD}+e^{bA}-e^{bC}-e^{bB}} \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{e^{bD}}{e^{bD}+e^{bA}-e^{bC}-e^{bB}} - \frac{e^{bB}}{e^{bD}+e^{bA}-e^{bC}-e^{bB}}\right) \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{e^{b(D-D)}+e^{b(A-D)}-e^{b(C-D)}-e^{b(B-D)}}\right. \\
&\left. - \frac{1}{e^{b(D-B)}+e^{b(A-B)}-e^{b(C-B)}-e^{b(B-B)}}\right) \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{1+e^{b(A-D)}-e^{b(C-D)}-e^{b(B-D)}}\right. \\
&\left. - \frac{1}{e^{b(D-B)}+e^{b(A-B)}-e^{b(C-B)}-1}\right) \\
&= 1
\end{aligned} \tag{42}
$$

puede observarse que mientras mayor es el grado de adversión al riesgo, peor le va a I, pues $C < \frac{AD-BC}{D+A-C-B}$.

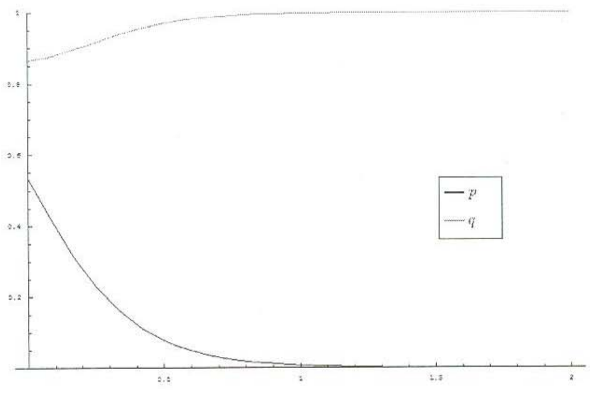
Y para ver el comportamiento de p cuando $0 < b < \infty$, basta echarle un vistazo al desarrollo que se hizo para p cuando $U_I(x) = U_{II}(-x)$, con I adverso al riesgo, y II proclive. Para el comportamiento de q, veremos el desarrollo que se hizo para q cuando $U_I(x) = U_{II}(-x)$, con I proclive al riesgo y II adverso. Cuando $A + C \leqslant B + D$, q es creciente monótona mientras que p es decreciente monótona, por lo que V_I es decreciente monótona. Así, en este caso vemos que la ganancia esperada de I decrece conforme aumenta el coeficiente de adversión al riesgo. Para dejarlo más claro, veamos este ejemplo

EJEMPLO 4.7. *Grafique $p(b)$, $q(b)$ y V_I para los siguientes valores de las entradas de la matriz de ganancias*

$$A = 9 \qquad B = 2 \qquad C = 7 \qquad D = 15$$

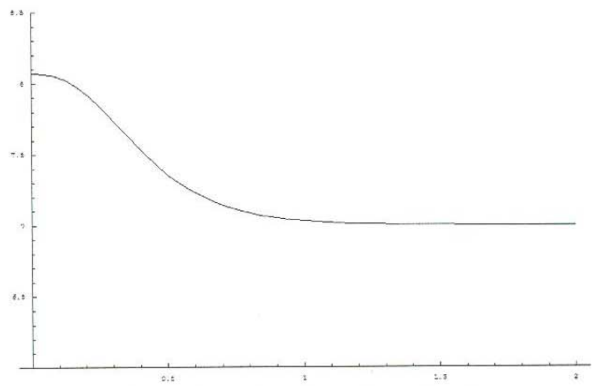
$$p = \frac{e^{-15b}-e^{-7b}}{e^{-15b}+e^{-9b}-e^{-7b}-e^{-2b}} \qquad\qquad q = \frac{e^{15b}-e^{2b}}{e^{15b}+e^{9b}-e^{7b}-e^{2b}}$$

Esta es la gráfica para $p(b)$ y $q(b)$



$$V_I = 9pq + 2p(1-q) + 7(1-p)q + 15(1-p)(1-q)$$

Con la siguiente gráfica para V_I

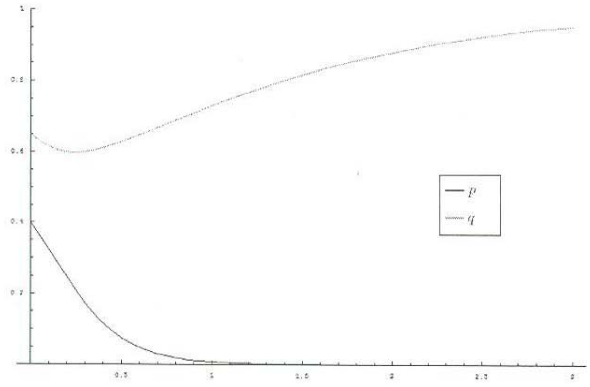


Ahora, cuando $A + C > B + D$, tenemos que p sigue siendo decreciente monótona, y q decrece inicialmente hasta alcanzar su valor mínimo, para luego volverse creciente monótona, por lo que V_I es creciente hasta encontrar su valor máximo, para luego volverse decreciente monótona. En este caso a I no le perjudica el ser ligeramente adverso al riesgo, pero cuando lo es mucho, disminuye su ganancia esperada. Desde el punto de vista de II, si va a ser adverso al riesgo, le conviene tener un coeficiente de adversión al riesgo lo suficientemente grande, pues si fuera chico, esto disminuiría su ganancia esperada. Ahora veamos un ejemplo para este caso

$$A = 14 \qquad B = 2 \qquad C = 7 \qquad D = 15$$

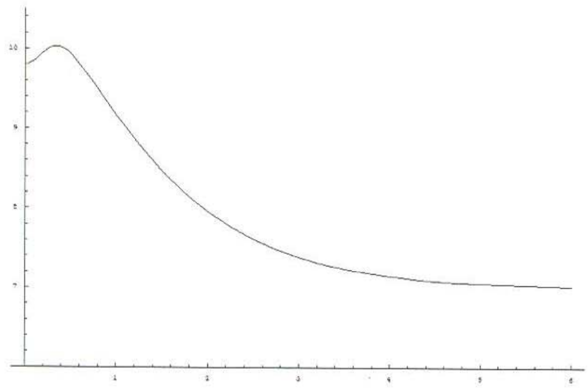
$$p = \frac{e^{-15b} - e^{-7b}}{e^{-15b} + e^{-14b} - e^{-7b} - e^{-2b}} \qquad\qquad q = \frac{e^{15b} - e^{2b}}{e^{15b} + e^{14b} - e^{7b} - e^{2b}}$$

Esta es la gráfica para $p(b)$ y $q(b)$



$$V_I = 14pq + 2p(1-q) + 7(1-p)q + 15(1-p)(1-q)$$

Con la siguiente gráfica para V_I



3.2. Funciones distintas. Si las funciones de utilidad de los jugadores no son idénticas, esto es, si sus coeficientes de adversión al riesgo no son iguales, el efecto de sus funciones de utilidad en V_I se puede investigar hallando p y q de 31 y 32, y determinando el valor resultante de V_I. Será de particular interés el efecto en V_I cuando la función de utilidad de un jugador se encuentra fija, mientras que la del otro está variando.

Supongamos primero que b_I está fijo, lo que implica que q está fijo. p variará conforme b_{II} cambie, y

$$\frac{\partial V_I}{\partial p} = q(D + A - C - B) + B - D \tag{43}$$

Denotando por q_0 al valor de q en el caso de riesgo nulo, podemos ver que

$$q_0(D + A - C - B) + B - D = 0$$

Así que $q(D+A-C-B)+B-D > 0$ para toda $q > q_0$, y $q(D+A-C-B)+B-D < 0$ para toda $q < q_0$.

Si $b_I = 0$, estamos en el caso de riesgo nulo, estudiado anteriormente.

Si $b_I > 0$, tenemos que q es creciente monótona cuando $A+C \geq B+D$, y decrece inicialmente para luego volverse creciente monótona cuando $A + C < B + D$. Esto nos dice que cuando $A + C \geq B + D$ V_I es creciente en p, y cuando $A + C < B + D$ V_I es una función decreciente en p para valores muy pequeños de b_I, pero para valores más grandes es una función creciente en p.

Si $b_I < 0$, tenemos que q es creciente monótona cuando $A+C \leqslant B+D$, y decrece inicialmente para luego volverse creciente monótona cuando $A + C > B + D$. Esto nos dice que cuando $A + C \leqslant B + D$ V_I es creciente en p, y cuando $A + C > B + D$ V_I es una función decreciente en p para valores muy cercanos a cero de b_I, pero para valores más lejanos es una función creciente en p.

Ahora, supongamos que b_{II} se encuentra fijo, y por lo tanto, p también lo está. q variará conforme b_I cambie, y

$$\frac{\partial V_I}{\partial q} = p(D + A - C - B) + C - D \tag{44}$$

Si $b_{II} > 0$, p es creciente monótona siempre, por lo que V_I es creciente en q.

Si $b_{II} < 0$, p es decreciente monótona siempre, por lo que V_I es decreciente en q.

Conclusiones

Resulta dificil de interpretar qué efectos tienen las funciones de utilidad no lineales en las estrategias de los jugadores. Por ejemplo, del presente trabajo sabemos que cuando un jugador es adverso al riesgo y el otro proclive, casi siempre le va mejor al que es proclive, aunque eso puede cambiar dependiendo de qué tan sensibles al riesgo sean los jugadores, y qué tipo de relaciones tienen las entradas de la matriz de pagos.

Lo que buscamos en este trabajo de tesis es presentar el modo en que la sensibilidad al riesgo de los jugadores afecta su ganancia monetaria esperada. Al no asignar valores a la matriz de pagos, nuestros resultados son muy generales. Estos resultados nos llevan a la siguiente conclusión:

Teniendo los resultados de esta tesis, las relaciones entre los valores de la matriz de pagos, y la información de si los jugadores son adversos o proclives al riesgo, podemos saber qué nivel de sensibilidad al riesgo conviene a cada jugador. La sensibilidad al riesgo es algo intrínseco de cada jugador, y no puede modificarla de acuerdo a la sensibilidad al riesgo de su contrincante. Lo que sí puede hacer es decidir si determinado juego le conviene o no, sabiendo que lo jugará de la manera precavida o arriesgada en la que gusta jugarlo.

Bibliografía

[1] ELIASBERG, J. y WINKLER, R. (1978), *The Role of Attitude Toward Risk in Strictly Competitive Decision-Making Situations*, Management Science, 24, 1231-1241

[2] PRATT, J. W. (1964), *Risk Aversion in the Small and in the Large*, Econometrica, 32, 122-136

[3] RAPOPORT, A. (1966), *Two Person Game Theory: The Essential Ideas*, University of Michigan Press

[4] STAHL, S. (1999), *A gentle introduction to game theory* AMS