Universidad de Sonora

Departamento de Matemáticas

Conceptos y Aplicaciones de Teoría de Juegos

Tesis que para obtener el grado de

Licenciado en Matemáticas

Presenta

Bonifacio Pillado Soto

Director
Dr. Martín Gildardo García Alvarado

Hermosillo, Sonora, México

11 de Septiembre, 2000

Universidad de Sonora

Departamento de Matemáticas

Conceptos y Aplicaciones de Teoría de Juegos

Tesis que para obtener el grado de

Licenciado en Matemáticas

Presenta

Bonifacio Pillado Soto

Director
Dr. Martín Gildardo García Alvarado

Hermosillo, Sonora, México

11 de Septiembre, 2000

Presentación

A cualquiera que lea las paginas siguientes le será difícil dejar de percibir el ambiente de entusiasmo, la alegría del descubrimiento y la convicción de éxito que llena el campo actual de la Teoría de Juegos.

La Teoría de Juegos fue desarrollada durante los años veinte y creció rápidamente durante la segunda Guerra mundial en respuesta a la necesidad de desarrollar métodos formales de pensamiento sobre estrategia militar. Su precursor fue John Von Neumann quien junto a Oscar Morgenstern desarrollaron este campo que actualmente es de suma importancia en Economía, Política, Biología, Psicología, entre otras.

¿Que es la Teoría de Juegos? Es el análisis de las situaciones donde intervienen dos o más jugadores o agentes que tienen objetivos opuestos. Esta teoría analiza la forma en que dos o más jugadores eligen cursos de acción o estrategias que afectan conjuntamente a cada uno de los participantes.

El objetivo de la Teoría de Juegos es el de mostrar situaciones estratégicas complejas en un modelo simplificado. Su más largo alcance es el de llegar al corazón del problema.

En los siguientes capítulos se divide la Teoría de Juegos en dos partes "*juegos de suma cero*" y "*juegos de suma no cero*". En los juegos de suma cero se desarrolla la mayor parte de la teoría que nos sirve para resolver los dos tipos de problemas. Pero los problemas reales son los que se modelan mas fácilmente con juegos de suma no cero.

"El pensamiento estratégico es el arte de vencer al adversario, sabiendo que éste está tratando de hacer lo mismo que uno."

Avinash Dixit y Barry Nalebuff.

CONTENIDO

Capítulo 1
Conceptos Básicos

En este capítulo presentamos los conceptos básicos de la Teoría de Juegos. En la Sección 1.1, después de describir algunas generalidades, se proponen los primeros ejemplos de juegos; en la Sección 1.2 se discute la manera de modelar los juegos que permite su análisis y en la Sección 1.3 se analiza con cierto detalle uno de los juegos presentados en la Sección 1.1, con el propósito de motivar algunas de las cuestiones que serán el objeto de estudio de los capítulos siguientes.

1.1.- Introducción

En la Teoría de Juegos, la palabra juego se refiere a un tipo especial de conflicto en el que toman parte n individuos o grupos (conocidos como jugadores). Hay ciertas reglas del juego que dan las condiciones para que éste comience: las posibles jugadas legales durante las distintas fases del juego, el número total de jugadas que constituye una partida completa y los posibles resultados cuando la partida finaliza.

Un juego puede ser de dos tipos:
(a) *Cooperativo*: cuando los jugadores pueden llegar a un acuerdo. Generalmente los juegos cooperativos en donde participan empresas son regulados o bien prohibidos.
(b) *No cooperativo*. En donde no es posible llegar a un acuerdo. No hay información entre los jugadores hasta después de haber realizado la jugada cada jugador tiene la incertidumbre de lo que su(s) contrincante(s) hará(n).

Todo juego tiene tres elementos básicos:
(a) *Jugadores* : son los tomadores de decisiones. Pueden ser individuos, compañías e incluso naciones. Tales jugadores se caracterizan por ser capaces de escoger de entre un conjunto de acciones posibles, la que más le convenga.
(b) *Estrategia*: es el plan de las acciones que tomará cada jugador para tomar ventaja sobre su(s) adversario(s).

(c) *Resultados*: Generalmente los resultados se miden en niveles de utilidad obtenidos, aunque también se miden en pagos monetarios. Un jugador en actitud racional buscará siempre el mayor pago obtenible.

Empecemos este trabajo conociendo algunos juegos donde a los participantes les llamaremos jugadores. En todos nuestros juegos habrá dos, a los que les llamaremos Jugador I y Jugador II. Se supondrá que cada jugador está luchando por ganar tanto como le sea posible y que tiene varias opciones o estrategias que puede ejecutar una a la vez en su intento por obtener alguna porción de los recursos. Y por último cada jugador gana lo que su oponente pierde.

1.- **Juego de las monedas**: Los Jugadores I y II tienen cada uno, un peso, y lo muestran simultáneamente. Si las monedas coinciden, en el sentido de que ambas muestran águila o ambas muestran sello, entonces el Jugador I se lleva las dos monedas. En caso contrario se las lleva el Jugador II.

2.- **Piedra-Papel-Tijera**: Los Jugadores I y II se colocan frente a frente y simultáneamente muestran una de las siguientes tres figuras: Un puño, que representa una piedra; los dedos índice y medio extendidos en forma de tijera;o la palma de la mano, que representa una hoja de papel. La piedra le gana a la tijera, ya que la piedra puede destruirla, la tijera le gana al papel debido a que pueden cortarlo y el papel le gana a la piedra puesto que puede envolverla. El ganador recibe un peso de su oponente y, en caso de empate, no hay movimiento de dinero.

3.- **El juego de dos dedos**: en cada jugada el Jugador I y el Jugador II extienden simultáneamente uno o dos dedos y dicen un número. El jugador que dice el número igual al número de dedos extendidos gana esa cantidad de pesos. En caso de que ningún jugador le atine al número de dedos mostrados o que ambos jugadores digan el mismo número, no hay movimiento de dinero.

4.- **El juego de los bombarderos**: El Jugador I y el Jugador II son generales de ejércitos enemigos. Cada día, el Jugador I envía una misión de bombarderos, que consiste en un avión bombardero fuertemente armado y un avión de apoyo más pequeño. La misión tiene el objetivo de dejar caer una sola bomba sobre las fuerzas del Jugador II. Sin embargo, un avión de combate del Jugador II está a la espera y va a dirigir un ataque sobre uno de los aviones del Jugador I cada vez. El bombardero tiene una probabilidad de 80% de sobrevivir al ataque, y si sobrevive, con seguridad dejará caer una bomba en el blanco correcto. El Jugador I también tiene la opción de colocar la bomba en el avión de apoyo. En este caso, debido a que el armamento del avión es más ligero y a que el avión carece del equipo adecuado, la bomba alcanzará su blanco con una probabilidad solo del 50% o del 90% dependiendo de si es atacado o no, respectivamente por el avión del Jugador II.

1.2.- Modelación Matemática

Presentamos ahora una manera de modelar matemáticamente los juegos descritos en la Sección 1.1.

El Juego 1 puede modelarse mediante la siguiente tabla:

		Jugador II	
		Águila	Sello
Jugador I	Águila	1	-1
	Sello	-1	1

La entrada 1 denota la ganancia de un peso para el Jugador I y la entrada −1 denota la pérdida de un peso para el Jugador I. Como el Jugador I gana lo que pierde el Jugador II, y viceversa, este arreglo describe completamente los posibles resultados de un solo juego. Los resultados del Juego 2 se pueden tabular como sigue:

		Jugador II		
		Piedra	Tijeras	Papel
Jugador I	Piedra	0	1	-1
	Tijeras	-1	0	1
	Papel	1	-1	0

Una entrada positiva denota una ganancia para el Jugador I, mientras que una entrada negativa denota una ganancia para el Jugador II. El cero representa que los dos mostraron la misma figura.

El Juego 3 lo podemos representar tabularmente de la siguiente manera:

Jugador II

Jugador I	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)
(1,2)	0	2	-3	0
(1,3)	-2	0	0	3
(2,3)	3	0	0	-4
(2,4)	0	-3	4	0

Donde la opción (i,j) significa que el jugador correspondiente extendió i dedos y dijo el numero j.

Y por último el Juego 4 queda simbolizado de la siguiente manera:

Frecuencia de Ataque

Frecuencia de colocación de la bomba	Bombardero	Avión de Apoyo
Bombardero	80%	100%
Avión de Apoyo	90%	50%

El Jugador I sabe que si coloca la bomba consistentemente en el bombardero, puede esperar, razonablemente, que el 80% de las misiones sean exitosas. Seguramente, los observadores en el ejército del Jugador II notarán el sesgo y van a dirigir el ataque siempre sobre el bombardero, con lo que las expectativas del 80% del Jugador I no serán correctas. Sin embargo, el Jugador I puede decidir engañarlos colocando la bomba ocasionalmente en el avión de apoyo. Supongamos que lo hace así un 25% de las veces. Ahora el Jugador II tendrá un dilema. Sus observadores le han informado la nueva estrategia del Jugador I, y el sospecha que sería conveniente atacar algunas veces el avión de apoyo del Jugador I, pero, ¿con qué frecuencia deberá hacerlo? En la Sección 1.3 consideraremos algunas respuestas a esta pregunta.

Supongamos que el Jugador II decide enfrentar la maniobra de engaño del Jugador I, atacando el avión de apoyo del Jugador I la mitad de las veces. En este caso la situación queda como sigue:

	(0.5) Bombardero	(0.5) Apoyo
(0.75) Bombardero	80%	100%
(0.25) Apoyo	90%	50%

En la Sección 1.3 haremos un análisis de este juego que nos permitirá los conceptos y cuestiones centrales de la Teoría de Juegos.

1.3.- Análisis de un Caso.

Como el Jugador I y el Jugador II toman diariamente sus decisiones independientemente uno del otro, se sigue que en una sola misión las probabilidades de cada una de las cuatro posibles situaciones que puedan ocurrir son como las que se muestran en la tabla siguiente:

Tabla 1.1

MISIONES DE BOMBARDEO

Evento	Probabilidad del evento	Probabilidad de éxito de la misión
La bomba esta en el bombardero y el Jugador II ataca el bombardero	0.75 x 0.50 = 0.375	80%
La bomba esta en el bombardero y el Jugador II ataca el avión de apoyo	0.75 x 0.50 = 0.375	100%
La bomba esta en el avión de apoyo y el Jugador II ataca el bombardero	0.25 x 0.50 = 0.125	90%
La bomba esta en el avión de apoyo y el Jugador II ataca el avión de apoyo	0.25 x 0.50 = 0.125	50%

Por tanto, bajo estas circunstancias, cuando la bomba se coloque en el avión de apoyo 25% de las veces y este avión sea atacado por el ejército del Jugador II 50% de las veces, el porcentaje de misiones exitosas es:

$$0.375 \times 0.8 + 0.375 \times 1 + 0.125 \times 0.9 + 0.125 \times 0.5 = .85 = 85\%$$

Así, esta respuesta del Jugador II a la táctica del Jugador I ha creado una situación en la que se espera que la misión de bombardeo tenga éxito el 85% de las veces. Si se compara esto con el 80% de probabilidad de éxito que se tiene si la bomba se coloca consistentemente en el bombardero, se ve que la estrategia del Jugador I es conveniente.

Sin embargo, el Jugador II puede cambiar su patrón de respuesta. Podría, digamos, decidir disminuir la frecuencia de ataques sobre el avión de apoyo a sólo 1/5 de las veces, llevando a la situación:

	Frecuencias de ataque 0.80 bombardero	0.20 Avión de apoyo
0.75 bombardero	80%	100%
0.25 Avión de apoyo	90%	50%

En este caso, el porcentaje de misiones exitosas, calculado con base al Jugador I en la Tabla 1.2 es:

$$0.60 \times 0.80 + 0.15 \times 1 + 0.20 \times 0.90 + 0.05 \times 0.50 = 0.835 = 83.5\%$$

Tabla 1.2

MISIONES DE BOMBARDEO

Evento	Probabilidad del evento	Probabilidad de éxito de la misión
La bomba está en el bombardero y el Jugador II ataca el bombardero	0.75 x 0.80 = 0.60	80%
La bomba está en el bombardero y el Jugador II ataca el avión de apoyo	0.75 x 0.20 = 0.15	100%

6

7

perdida de la utilidad de cada jugada siempre desde el punto de vista del Jugador I. Así,

La bomba está en el avión de apoyo y el Jugador II ataca el bombardero	0.25 x 0.80 = 0.20	90%
La bomba está en el avión de apoyo y el Jugador II ataca el avión de apoyo	0.25 x 0.20 = 0.05	50%

Así que al disminuir la frecuencia de ataques sobre el avión de apoyo, el Jugador II crea una situación en la que sólo el 83.5% de las misiones serian exitosas. Desde la perspectiva del Jugador II, esto representa una mejoría comparada con el 85% calculado antes. Una pregunta natural es: ¿Será posible incrementar la mejoría disminuyendo los ataques sobre el avión de apoyo?. Supongamos que estos ataques (sobre el avión de apoyo) son completamente eliminados. Entonces la situación es:

		Frecuencia de ataque	
		1 bombardero	0 Avión de apoyo
Frecuencia de colocación de la bomba	0.75 bombardero	80%	100%
	.25 Avión de apoyo	90%	50%

Tabla 1.3

MISIONES DE BOMBARDEO

Evento	Probabilidad del evento	Probabilidad de éxito de la misión
La bomba está en el bombardero y el Jugador II ataca el bombardero	0.75 x 1.0 = 0.75	80%
La bomba está en el bombardero y el Jugador II ataca el avión de apoyo	0.75 x 0 = 0	100%
La bomba está en el avión de apoyo y el Jugador II ataca el bombardero	0.25 x 1 = 0.25	90%
La bomba está en el avión de apoyo y el Jugador II ataca el avión de apoyo	0.25 x 0 = 0	50%

Por tanto el porcentaje de misiones exitosas es:

$$0.75 \times 0.80 + 0 \times 1 + 0.25 \times 0.90 + 0 \times 0.50 = 0.825 = 82.5\%$$

Esto parece indicar que cuando el Jugador I decide engañar 25% de las veces, el Jugador II deberá ignorar el avión de apoyo y dirigir sus ataques exclusivamente sobre el bombardero. Más aún, estos cálculos indican que esta estrategia le permite al Jugador I mejorar la tasa de efectividad de 80% de su bombardero en un 2.5%. De estos análisis se desprenden varias preguntas que guiarán el desarrollo de los siguientes capítulos. ¿ Podrá el Jugador I mejorar el 82.5% con una estrategia diferente?. ¿Cuál es la mejor respuesta del Jugador II para que cada estrategia específica del Jugador I?. ¿Habrá una estrategia que sea la mejor de todas para el Jugador II, independientemente de la estrategia que escoja el Jugador I?.

La búsqueda de repuestas a estas preguntas constituye una de las motivaciones centrales para el presente trabajo

Capítulo 2

Juegos de Suma Cero

En este Capítulo se presenta la Teoría de los Juegos de Suma Cero. En la Sección 2.1 se presentan las definiciones formales relacionadas con este tipo de juegos, como son, los conceptos de juego, estrategias, ganancia esperada, entre otras. En la Sección 2.2 se introduce el concepto de estrategias óptimas y se formaliza una manera de encontrarlas. También se presentan los conceptos de estrategias maximin y minimax, y el de valor de un juego, y se ilustra con varios ejemplos cómo se determinan a partir de las definiciones correspondientes. En la Sección 2.3 se discute un método más eficiente para encontrar la solución de un juego de suma cero

2.1.- Definiciones

Definición 2.1.1.- Si m y n son dos enteros positivos entonces *un juego de tamaño* $m \times n$ es un arreglo rectangular de mn números con m renglones y n columnas. Cada uno de los m renglones representa una opción para el jugador I y cada una de la n columnas representa una opción para el Jugador II.

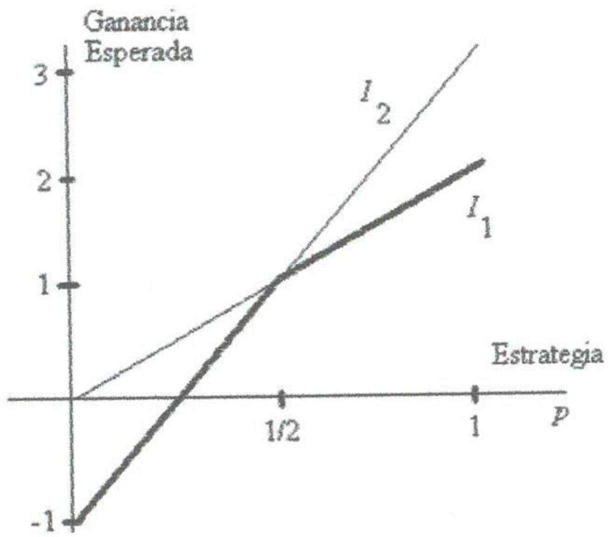
Definición 2.1.2.- Una *jugada* consiste en una elección de cada uno de los jugadores de alguna de sus opciones.

Definición 2.1.3.- Si en una jugada, el Jugador I escoge su opción j y el Jugador II escoge su opción k, entonces la entrada jk del arreglo tabular es *la utilidad* correspondiente a la jugada. Cuando, como resultado de una jugada, la utilidad de un jugador es positiva, decimos que ese jugador ha obtenido una *ganancia*; si la utilidad es negativa, decimos que ha obtenido una *pérdida*

Definición 2.1.4.- Un juego se llama *de suma cero* si, en cada jugada, la ganancia de un Jugador es la pérdida del otro.

Con el propósito de ahorrar el tener que estar haciendo aclaraciones tediosas, en este trabajo adoptaremos el convenio siguiente. Nos referiremos al carácter de ganancia o pérdida de la utilidad de cada jugada siempre desde el punto de vista del Jugador I. Así,

Figura 2.3



I es la estrategia pura [1-1,1]=[0,1]. La esperanza maximin, es decir, la coordenada y del punto más alto, es 2.

Ejemplo 2.2- Para el juego abstracto

3	1
-1	-2

$$I_1(p)=(-1-3)p+3=-4p+3,$$
$$I_2(p)=(-2-1)p+1=-3p+1.$$

La gráfica de $E_I(p)$ aparece en la Figura 2.4.

En este caso, tenemos que la gráfica de $E_I(p)$ coincide con la gráfica de $I_2(p)$ para todo $0 \leq p \leq 1$. Esto significa que independientemente de la decisión del Jugador I, el Jugador II siempre debe escoger su segunda columna.

cuando digamos que una cierta jugada representa una ganancia de C, estaremos diciendo que el Jugador I gana C y, en consecuencia, el Jugador II pierde C como resultado de la jugada en cuestión.

De la Definición 2.1.4 y del convenio anterior se deduce que la utilidad de cada jugada, es decir, cada entrada del arreglo tabular que modela al juego, es un número con signo.

Así, por ejemplo,

0	1	-1
-1	0	1
1	-1	0

es un juego de suma cero de 3×3. Si el Jugador I selecciona el tercer renglón y el Jugador II selecciona la segunda columna, entonces el Jugador I debe dar 1 (un peso, digamos) al Jugador II.

El conflicto al que se hace referencia al inicio de Sección 1.1 con respecto a la noción de "juego" consiste en que el Jugador I debe buscar la manera de maximizar sus ganancias, mientras que el Jugador II debe tratar minimizar sus pérdidas. Para lograr esto, vamos a tomar como punto de partida el hecho de que los Jugadores I y II jugarán el juego *muchas veces*. En esta situación es en la que surge el concepto de *estrategia*. En términos informales una estrategia se puede describir como un plan que cada jugador hace con respecto a la frecuencia relativa con la que escogerá cada una de sus opciones. Por ejemplo, en un juego de tamaño 2×2, una estrategia para el Jugador I podría ser el decidir escoger su primera opción (es decir, la primera fila) el 35% de las veces, y, por tanto, su segunda opción el 65% de la veces que se juegue el juego. De manera que la definición general de estrategia se puede plantear como sigue.

Definición 2.1.5.- Dado un juego $m \times n$ de suma cero, una *estrategia* para el Jugador I es una lista ordenada de números $[p_1, p_2, \ldots, p_m]$ tales que $0 \leq p_i \leq 1$, para todo $i = 1, 2, \ldots, m$ y $p_1 + p_2 + \cdots p_m = 1$ donde p_i denota la frecuencia con la que el Jugador I escoge el i-ésimo renglón. Similarmente, una *estrategia* para el Jugador II es un lista ordenada de números $[q_1, q_2, \ldots, q_n]$ tales que $0 \leq q_j \leq 1$, para todo $j = 1, 2, \ldots, n$ y $q_1 + q_2 + \cdots q_n = 1$, donde q_j denota la frecuencia con la que el Jugador II escoge la *j*-ésima columna.

Así, en el Juego 2 de la Sección 1.1, la estrategia [0.6,0.3,0.1] denota la decisión hecha por cualquier jugador, de escoger "Piedra" el 60% de las veces, "Tijera" el 30% de las veces y "Papel" el 10% de las veces.

Queremos enfatizar el hecho de que un Jugador se decida por una estrategia, no implica que sea posible saber cuál será con exactitud su siguiente jugada. De lo único que se puede estar seguro es de la frecuencia relativa con la que cada posible opción será seleccionada.

Existen algunos tipos de estrategias

Definición 2.1.6.- Una *estrategia pura* es una en la que se utiliza un solo renglón o una sola columna.

En un juego de 2×2 hay dos estrategias puras: [1,0], en la que se utiliza sólo el primer renglón o la primera columna, y [0,1], en la que se utiliza sólo el segundo renglón o la segunda columna.

Definición 2.1.6.- Una estrategia que no es pura se llama *mixta*.

Por ejemplo, en un juego de 2×2, la estrategia [.3,.7] es mixta.

Cada una de tales elecciones de estrategias específicas por parte de ambos jugadores, lleva las cosas a un punto donde es posible calcular la *ganancia esperada*.

Supongamos que el Jugador I emplea la estrategia $[p_1, p_2, \ldots, p_m]$ y que el Jugador II emplea la estrategia $[q_1, q_2, \ldots, q_n]$ en un juego abstracto de suma cero $m \times n$. Si a_{ij} denota la ganancia en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna, entonces, la probabilidad de que esta ganancia tome lugar es la probabilidad de que el Jugador I escoja el i-ésimo renglón y el Jugador II la j-ésima columna, la cual es, por supuesto, $p_i \times q_j$. De modo que la contribución de este resultado específico a la ganancia esperada es $p_i \times q_j \times a_{ij}$. Consecuentemente, la *ganancia esperada* se obtiene sumando todas estas contribuciones, y es igual a

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i \times q_j \times a_{ij} .$$

Definición 2.1.7.- Llamamos *diagrama auxiliar* de un juego al arreglo que resulta cuando se indica en el arreglo tabular del juego qué estrategias ha escogido cada Jugador.

La principal utilidad de un diagrama auxiliar está en que nos facilita calcular la ganancia esperada correspondiente a las estrategias esperadas

Por ejemplo, el diagrama auxiliar cuando el Jugador I emplea la estrategia [0.2, 0.3,0.5] y el Jugador II emplea la estrategia [0.1,0.7,0.2] en el juego Piedra-Tijera-Papel es

	0.1	0.7	0.2
0.2	0	1	-1
0.3	-1	0	1
0.5	1	-1	0

y la ganancia esperada con tales estrategias es:

$$0.2\times 0.1\times 0+0.2\times 0.7\times 1+0.2\times 0.2\times(-1)+0.3\times 0.1\times -1+0.3\times 0.7\times 0+$$
$$0.3\times 0.2\times 1+0.5\times 0.1\times 1+0.5\times 0.7\times(-1)+0.5\times 0.2\times 0=-0.17.$$

En otras palabras, bajo esas circunstancias, el Jugador II espera ganar 0.17 de peso en promedio por jugada.

2.2.- Estrategias Óptimas

A continuación, iniciamos la búsqueda de una estrategia óptima de un jugador en un juego de suma cero, analizando la situación en la que se conoce la estrategia de su enemigo. Conocer la estrategia de su oponente no significa que sea posible predecir la siguiente decisión de éste. Una estrategia es simplemente, como veíamos en la sección anterior, una lista que especifica la frecuencia con la que se escoge cada una de las opciones.

En el juego de las misiones de bombardeos, considerábamos la pregunta de qué podría hacer el Jugador II si descubría que el Jugador I colocaba la bomba en el avión de apoyo ¼ de las veces. Ahora reconsideremos esta pregunta en una manera algo más formal. Esta decisión del Jugador I es equivalente a adoptar la estrategia [0.75,0.25] y la búsqueda del Jugador II de una respuesta se reduce a encontrar una estrategia $[1-q,q]$ tal que la correspondiente ganancia esperada del Jugador I (es decir, la taza de misiones exitosas) sea la más baja posible. El diagrama auxiliar que describe esta situación es el siguiente.

	1-q	Q
.75	80%	100%
.25	90%	50%

Y la ganancia esperada es:

$$(0.75)(1-q)(0.80)+(0.75)(q)(1)+(0.25)(1-q)(0.90)+(0.25)(q)(0.50)=$$
$$0.825+0.5q$$

Esto significa que la mejor respuesta del Jugador II a la estrategia del Jugador I es hacer $q=0$ en su estrategia general $[1-q,q]$. Es decir, debe ignorar el intento de engaño que hace el Jugador I y atacar consistentemente el bombardeo.

Supongamos que, en vez de engaño de ¼, el Jugador I decide colocar la bomba en el avión de apoyo ½ de la veces; es decir, supongamos que el Jugador I escoge la estrategia [0.5,0.5]. ¿Cuál es la mejor estrategia para el Jugador II en este caso? Ahora el diagrama auxiliar es:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1\text{-}q & Q \end{array} \\ \begin{array}{c} .5 \\ .5 \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 80\% & 100\% \\ \hline 90\% & 50\% \\ \hline \end{array} \end{array}$$

y la ganancia esperada es:

$$(0.5)(1-q)(0.80)+(0.5)(q)(1)+(0.5)(1-q)(0.90)+(0.5)(q)(0.50)=$$
$$0.85-0.1q$$

Como la estrategia del Jugador II consiste en tratar de minimizar la ganancia del Jugador I, es claro que le conviene asignarle a q el mayor valor posible, es decir, 1. Esto significa que, bajo estas circunstancias, la mejor estrategia del Jugador II es $[1-1,1]=[0,1]$. En otras palabras, si el Jugador I coloca la bomba (de manera aleatoria) en cualquiera de sus aviones con una frecuencia de ½, entonces al Jugador II le conviene atacar consistentemente el avión de apoyo.

Definición 2.2.1.- Una vez que el Jugador I ha decidido una estrategia específica, llamaremos *contraestrategia óptima del* Jugador II a aquella estrategia que produce la mínima ganancia esperada para el Jugador I. Similarmente, una vez que el Jugador II ha escogido una estrategia específica, la estrategia que produce la máxima ganancia esperada para el Jugador I se llama *contraestrategia óptima del* Jugador I.

Así, la conclusión de la decisión anterior es que cuando el Jugador I emplea la estrategia mixta [.75,.25] la contraestrategia óptima del Jugador II es [1,0]. Que ambas contraestrategias sean puras no es una coincidencia y podemos formular el principio general como un teorema.

Teorema 2.2.1.- *Para cada estrategia existe una contraestrategia óptima pura.*

La demostración del Teorema 2.2.1 aparece en el Apéndice, página 96.

Por ejemplo, encontremos una respuesta óptima para el Jugador II si se sabe que el Jugador I ha escogido la estrategia [.2, .3,.5] en el juego Piedra-Tijera-Papel.

Sabemos que el Jugador II tiene una contraestrategia óptima pura, de manera que podemos calcular las ganancias esperadas correspondientes a las tres estrategias puras que él tiene disponibles. Haciendo uso de los diagramas auxiliares siguientes, e ignorando las columnas que se usan con frecuencia 0, tenemos:

	1	0	0
.2	0	-1	1
.3	-1	0	1
.5	1	-1	0

Para [1,0,0] , la ganancia esperada es:

$$0.2\times 1\times 0+0.3\times 1\times -1+0.5\times 1\times 1=0.2,$$

Para [0,1,0] la ganancia esperada es:

$$0.2\times 1\times(-1)+0.3\times 1\times 0+0.5\times 1\times(-1)=-0.7$$

Y para [0,0,1] la ganancia esperada es:

$$0.2\times 1\times 1+0.3\times 1\times 1+0.5\times 1\times 0=0.5$$

Como la ganancia esperada denota ganancias para el Jugador I, el Jugador II debe optar por la ganancia mínima de –0.7, escogiendo la estrategia [0,1,0], es decir, el Jugador II debe mostrar consistentemente Tijera.

Ahora propondremos y justificaremos una estrategia buena para el Jugador I cuando él juega el juego de suma cero

a	b
c	d

Por el Teorema anterior, el Jugador I sabe que para cualquier estrategia $[1-p,p]$ que él use puede esperar que el Jugador II busque una estrategia que le reditúe (a él) la mínima de las ganancias entre las dos estrategias puras de que el Jugador II dispone. Sean $I_1(p)$ y $I_2(p)$ las ganancias esperadas que resultan de las estrategias puras [1,0] y [0,1], respectivamente, del Jugador II. Aquí los diagramas auxiliares son:

	1	0
1-p	a	b
P	c	d

$I_1(p)$

	0	1
1-p	A	b
p	C	d

$I_2(p)$

y calculamos

$$I_1(p) = (1-p)a + pc = (c-a)p + a,$$
$$I_2(p) = (1-p)b + dp = (d-b)p + b.$$

Si $E_I(p)$ denota la ganancia esperada, seleccionada de $I_1(p)$ y $I_2(p)$, por el Jugador II, entonces, dado que el Jugador II procura minimizar esta ganancia tanto como sea posible,

$$E_I(p) = \min\{I_1(p), I_2(p)\}.$$

Esto determina completamente la ganancia esperada del Jugador I, $E_I(p)$ como función de p, es decir como función de su estrategia. La gráfica de esta función nos sugiere una estrategia para el Jugador I. Como la variable independiente p aparece en las expresiones para $I_1(p)$ y $I_2(p)$ con exponente a lo más uno, las gráficas de estas funciones son líneas rectas. Como p representa una probabilidad, tenemos que $0 \leq p \leq 1$, de modo que estas gráficas consisten en segmentos rectos que están sobre el intervalo [0,1] del eje p. Más específicamente, como $I_1(0) = a$, $I_1(1) = c$, se sigue que la gráfica de $I_1(p)$ es el segmento recto que une los puntos $(0,a)$ y $(1,c)$. Similarmente, como $I_2(0) = b$, $I_2(1) = d$, se sigue que la gráfica de $I_2(p)$ es el segmento recto que une los puntos $(0,b)$ y $(1,d)$. La gráfica de $E_I(p)$ también se obtiene fácilmente de acuerdo a la siguiente observación: la gráfica de $E_I(p)$ consiste de aquella línea que, para cada valor permitido de p, contiene el más bajo de los puntos de $(p, I_1(p))$ y $(p, I_2(p))$.

A continuación presentamos un par de ejemplos para ilustrar cómo de estas gráficas podemos obtener mucha información.

Para el juego de las monedas,

	Águila	Sello
Águila	1	-1
Sello	-1	1

la gráfica de $E_I(p)$ es la línea quebrada gruesa de la Figura. 2.1

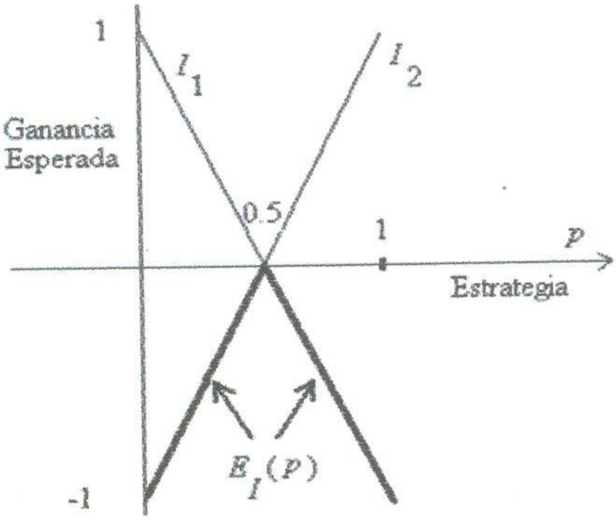


Figura 2.1

Como esta gráfica coincide con la de $I_2(p)$ cuando $0 \leq p \leq .5$ se sigue que si el Jugador I emplea la estrategia $[1-p, p]$ con $p < 0.5$ entonces el Jugador II debería responder con la estrategia pura [0,1]. En otras palabras, si el Jugador I prefiere mostrar águila, entonces el Jugador II debe responder mostrando sello todas las veces. Por otro lado, si el Jugador I emplea la estrategia con $p > 0.5$, es decir si prefiere mostrar sello con mayor frecuencia que águila , entonces como la gráfica coincide ahora con la de $I_1(p)$, se sigue que el Jugador II debería emplear la estrategia pura [1,0], y mostrar águila todas las veces. Cuando $p = 0.5$ la gráfica de $E_I(p)$ coincide tanto con la de $I_1(p)$ como con la de $I_2(p)$, así que no importa cual estrategia sea empleada por el Jugador II. Resumimos esto, diciendo que:

[0,1] es una contraestrategia óptima para el Jugador II cuando $p \leq 0.5$

[1,0] es una contraestrategia óptima para el Jugador II cuando $p \geq 0.5$

Además, como el punto más alto de la gráfica de $E_I(p)$ es el que corresponde a $p = 0.5$, esta gráfica nos dice que al Jugador I le conviene emplear la estrategia [0.5,0.5], pues de esta manera puede asegurar la máxima ganancia esperada, que es cero.

Para el Juego 2 de la Sección 1.1,

80%	100%
90%	50%

tenemos:

$$I_1(p) = (0.9 - 0.8)p + 0.8 = 0.1p + 0.8$$
$$I_2(p) = (0.5 - 1)p + 1 = -0.5p + 1$$

y así la gráfica de $E_I(p)$ es la línea gruesa quebrada que aparece en la Figura 2.2.

El punto donde se interceptan las gráficas lo sacamos de la siguiente manera; igualando $I_1(p)$ y $I_2(p)$ de aquí $p = 1/3$ .Por tanto,

[1,0] es una contraestrategia óptima para el Jugador II cuando $p \leq 1/3$

[0,1] es una contraestrategia óptima para el Jugador II cuando $p \geq 1/3$

Como la intersección de las gráficas de $I_1(p)$ y $I_2(p)$ es también el punto más conveniente de las decisiones del Jugador I. Con la estrategia $[1 - 1/3, 1/3] = [2/3, 1/3]$ el Jugador I puede garantizar obtener la máxima ganancia esperada posible. El valor exacto de esta máxima ganancia esperada se obtiene evaluando cualquiera de las funciones $I_1(p)$

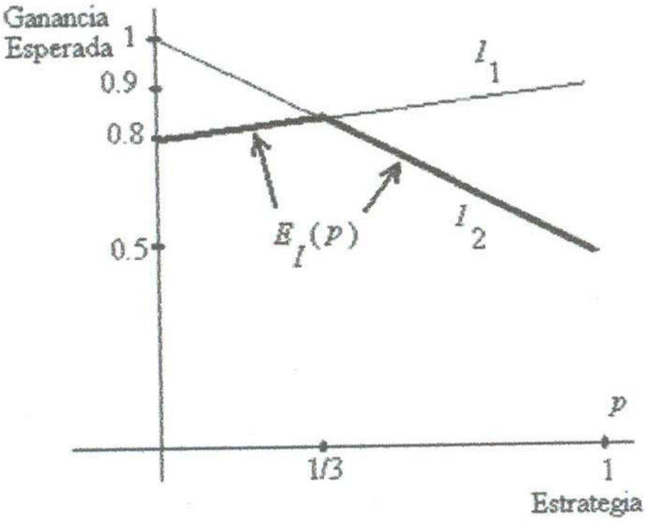


Figura 2.2

o $l_2(p)$ en $p=1/3$:

$$l_1(1/3)=0.1\times(1/3)+0.8=0.833...=83.3\%$$
$$l_2(1/3)=-0.5\times(1/3)+1=0.833...=83.3\%$$

Definición 2.2.2.- Si (x,y) es el punto más alto de la gráfica de $E_I(p)$, entonces, $[1-x,x]$ es una *estrategia maximin* para el Jugador I e y es *la esperanza maximin* del Jugador I.

Nótese que la estrategia maximin se puede describir como la estrategia $[1-p,p]$ que usa el Jugador I para maximizar su ganancia esperada cuando el Jugador II intenta minimizar la ganancia esperada del Jugador I.
Si el Jugador I emplea la estrategia maximin $[1-x,x]$, entonces, puede esperar ganar, en promedio, al menos y en cada jugada.

El siguiente ejemplo ilustra que la estrategia maximin no necesariamente corresponde a la intersección de $I_1(p)$ y $I_2(p)$.

Puede observarse que, para continuar con la discusión, no es necesario particularizar las opciones que cada Jugador tiene a su disposición, y que basta con indicar la utilidad que representa la elección de cada posible elección.

Definición 2.2.3.- Llamaremos *juego abstracto* a la representación tabular de un juego. El número de filas y columnas de la tabla indican la cantidad de opciones que cada Jugador tiene para formar su estrategia.

Ejemplo 2.1.- En el juego abstracto

0	-1
2	3

tenemos que:

$$I_1(p) = (2-0)p + 0 = 2p,$$
$$I_2(p) = (3-(-1))p + (-1) = 4p - 1.$$

La gráfica de $E_I(p)$ es la línea gruesa quebrada de la Figura 2.3.
Para encontrar la intersección de las gráficas $I_1(p)$y $I_2(p)$ hacemos $I_1(p) = I_2(p)$ y despejamos p y nos queda que $p = 1/2$.

Así que el Jugador II debe emplear la estrategia pura [1,0] o [0,1], dependiendo de si el Jugador I favorece su segunda o su primera opción, respectivamente.

En este caso, el punto más alto de la gráfica de $E_I(p)$ no es el punto de intersección de $I_1(p)$ y $I_2(p)$. En este caso es el punto (1,2). Por tanto, la estrategia maximin del Jugador

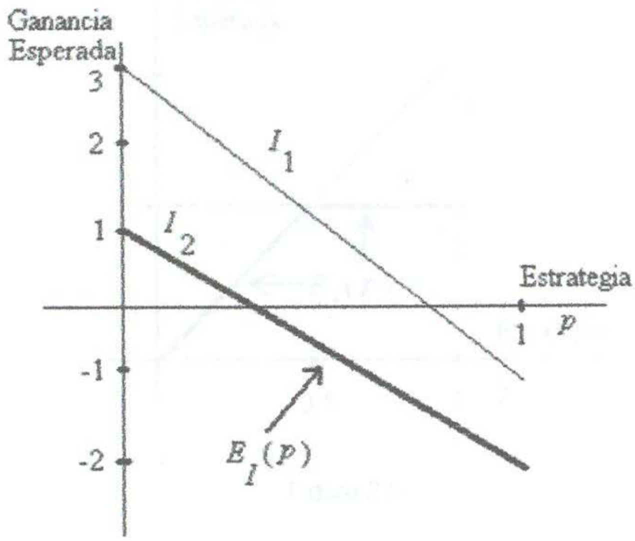


Figura 2.4

La estrategia maximin del Jugador I, la que le reditúa la máxima ganancia esperada, viene del extremo izquierdo de la gráfica de $E_I(p)$, es decir, del punto que corresponde a $p=0$.

De manera que es la estrategia pura [1-0,0]=[1,0]. Se sigue que esta estrategia le garantiza al Jugador I una ganancia esperada de 1.

Ejemplo 2.3.- Para el juego abstracto

0	1
2	1

$$I_1(p)=(2-0)p+0=2p,$$
$$I_2(p)=(1-1)p+1=1$$

La gráfica de $E_I(p)$ aparece en la Figura 2.5.

El punto de intersección se obtiene haciendo $I_1(p)=I_2(p)$ y nos queda que $2p=1$ de donde $p=0.5$.

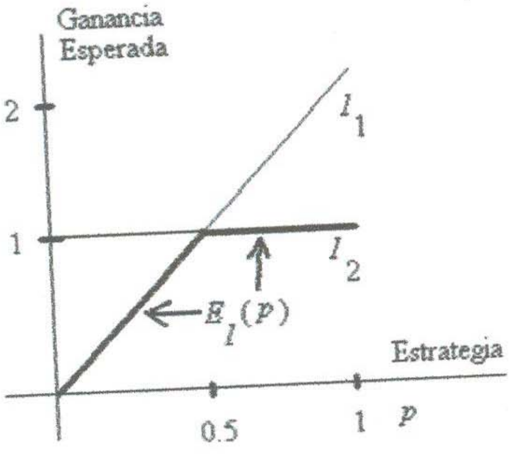


Figura 2.5

Por tanto cualquier estrategia $[1-p, p]$ con $p \geq 0.5$ es una estrategia maximin para el Jugador I, incluyendo la estrategia mixta $[0.5, 0.5]$ y la estrategia pura $[0,1]$. Cualquiera de estas estrategias le garantiza al Jugador I una ganancia esperada de 1.

Ahora consideraremos la situación del Jugador II y proponemos una buena estrategia para él.

Debido al Teorema 2.2.1, el Jugador II sabe que para cualquier estrategia [1-q,q] que el emplee en el juego

a	b
c	d

puede esperar que el Jugador I busque una contraestrategia que le reditúe a él la mayor de las ganancias que pueden resultar de las dos estrategias puras que él tiene disponible.

Denotemos con $\Pi_1(q)$ y $\Pi_2(q)$ las ganancias esperadas que resultan de las estrategias puras [1,0] y [0,1] del Jugador I, respectivamente. Aquí los diagramas auxiliares son

$$\begin{array}{c|c|c|} & 1\text{-}q & q \\ \hline 1 & a & b \\ \hline 0 & c & d \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|c|c|} & 1-q & q \\ \hline 0 & a & b \\ \hline 1 & c & d \\ \hline \end{array}$$

$$\Pi_1(q) \qquad\qquad\qquad \Pi_2(q)$$

y las ganancias esperadas son:

$$\Pi_1(q) = (b-a)q + a$$
$$\Pi_2(q) = (d-c)q + c.$$

Si $E_{II}(q)$ denota la ganancia esperada seleccionada de $\Pi_1(q)$ y $\Pi_2(q)$ por el Jugador I, entonces, dado que el Jugador I procura maximizar esta ganancia tanto como sea posible,

$$E_{II}(q) = \max\{\Pi_1(q), \Pi_2(q)\}.$$

Esto determina completamente la ganancia esperada $E_{II}(q)$, como función de q, es decir, como función de la estrategia del Jugador II.

Usaremos la gráfica de esta función para sugerir una estrategia para el Jugador II. Como la variable independiente q aparece en las expresiones para $\Pi_1(q)$ y $\Pi_2(q)$ con exponente entero a lo más uno, las gráficas de estas funciones son líneas rectas. Como q representa una probabilidad, tenemos que $0 \le q \le 1$, de modo que estas gráficas consisten en segmentos rectos que están sobre el intervalo [0,1] del eje q. Más específicamente, como $\Pi_1(0) = a$, $\Pi_1(1) = b$, se sigue que la gráfica de $\Pi_1(q)$ es el segmento recto que une los puntos $(0,a)$ y $(1,b)$. Similarmente, como $\Pi_2(0) = c$ y $\Pi_2(1) = d$, se sigue que la gráfica es el segmento recto que une a los puntos $(0,c)$ y $(1,d)$. La gráfica de $E_{II}(q)$ también se obtiene fácilmente, de acuerdo a la siguiente observación. La gráfica de $E_{II}(q)$ consiste de aquella línea recta que, para cada valor permitido de q, contiene el más alto de los puntos

$(q, II_1(q))$ y $(q, II_2(q))$. Ahora examinemos cada uno de los juegos anteriores desde el punto de vista de Jugador II.

Para el juego de las monedas

	Águila	Sello
Águila	1	-1
Sello	-1	1

la gráfica de $E_{II}(q)$ es la Figura 2.6.

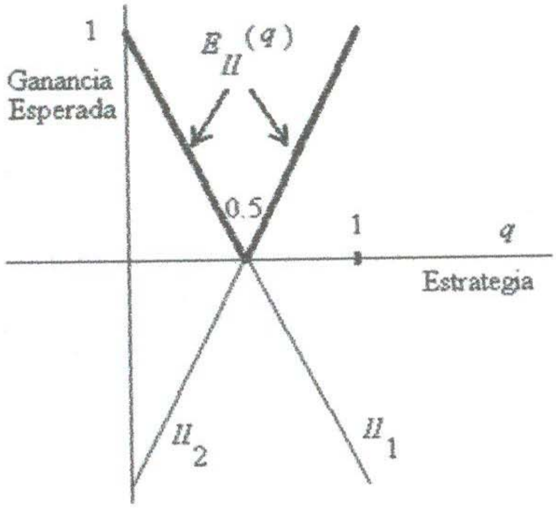


Figura 2.6

Como esta gráfica coincide con la de $II_1(q)$ cuando $0 \leq q \leq 0.5$ se sigue que si el Jugador II emplea la estrategia $[1-q, q]$ con $q < 0.5$ entonces el Jugador I debe responder con la estrategia pura [1,0]. Por otro lado, si el Jugador II emplea una estrategia con $q > 0.5$ es decir que la gráfica de $E_{II}(q)$ coincide ahora con la de $II_2(q)$, se sigue que el Jugador I debe emplear la estrategia pura [0,1]. Cuando $q = 0.5$ todas las estrategias del Jugador I producirían la misma ganancia esperada. Esta gráfica nos dice que al Jugador II le conviene emplear la estrategia [0.5,0.5], pues esta es la que garantiza la mínima posible ganancia esperada para el Jugador I, que es cero.

Para el juego de los bombarderos

80%	100%
90%	50%

$$II_1(q) = 0.2q + 0.8$$
$$II_2(q) = -0.4q + 0.9$$

La gráfica de $E_{II}(q)$ aparece en la Figura 2.7.

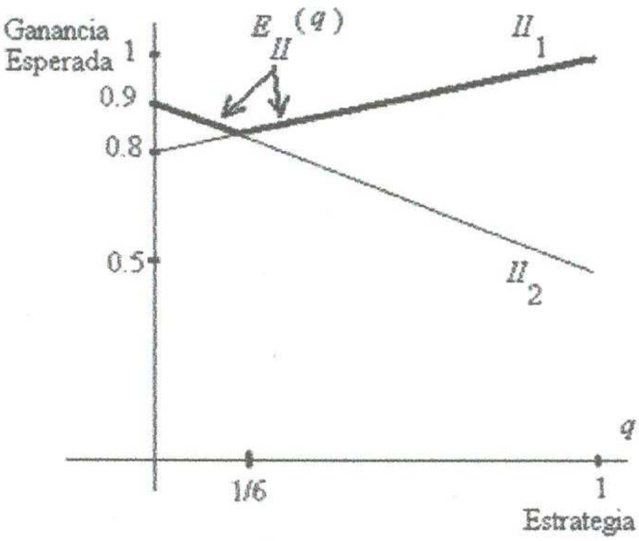


Figura 2.7

Como la gráfica de $E_{II}(q)$ coincide con la de $II_2(q)$ para valores pequeños de q, se sigue que cuando el Jugador II emplea la estrategia $[1-q,q]$, con q pequeño, el Jugador I debe contestar con la estrategia pura [0,1], y cuando q es cercano a 1, el Jugador I debe usar la estrategia [1,0]. El punto de cambio es el valor de q para el que las gráficas $II_1(q)$ y $II_2(q)$ se interceptan. Este valor se obtiene resolviendo la ecuación $II_1(q) = II_2(q)$ y obtenemos. Como la intersección de las gráficas de $II_1(q)$ y $II_2(q)$ es también el punto más bajo de la gráfica de $E_{II}(q)$, este punto corresponde a la más conveniente de las decisiones del Jugador II con la estrategia [1-(1/6),1/6]=[5/6,1/6] el Jugador II minimiza la ganancia esperada del Jugador I. El valor exacto de esta mínima ganancia esperada se obtiene evaluando cualquiera de las funciones $II_1(q)$ o $II_2(q)$ en $q = 1/6$:

$$II_1(1/6) = 0.2 \times (1/6) + 0.8 = 0.8333.... = 83.3\%$$
$$II_2(1/6) = -0.4 \times (1/6) + 0.9 = 0.8333.... = 83.3\%$$

Definición 2.2.4.- Si (x, y) es el punto más bajo de la gráfica de $E_{II}(q)$ entonces $[1 - x, x]$ es una *estrategia minimax* para el Jugador II, e y es *la esperanza minimax* de Jugador II.

Nótese que la estrategia minimax es la estrategia que debe usar el Jugador II para minimizar la ganancia esperada del Jugador I sabiendo que el Jugador I intenta maximizar su ganancia esperada (usando alguna de las estrategias puras que tiene disponibles).

Si el Jugador II emplea la estrategia Minimax $[1 - x, x]$, entonces puede esperar que el Jugador I gane, en promedio, no más de y en cada jugada.

De manera que la estrategia Minimax en el juego de las monedas es [1/2,1/2] y la esperanza Minimax del Jugador I es 0.

Similarmente, la estrategia Minimax en el juego de los bombarderos es [5/6,1/6] y la esperanza Minimax del Jugador I es 83.3%.

El siguiente ejemplo muestra que si el Jugador I no es cuidadoso, entonces aunque el Jugador II emplee la estrategia Minimax, él puede ganar menos que la esperanza Minimax.

En el juego del Ejemplo 2.1

0	-1
2	3

$$II_1(q) = -q$$
$$II_2(q) = q + 2$$

La gráfica de $E_{II}(q)$ aparece en la Figura 2.8

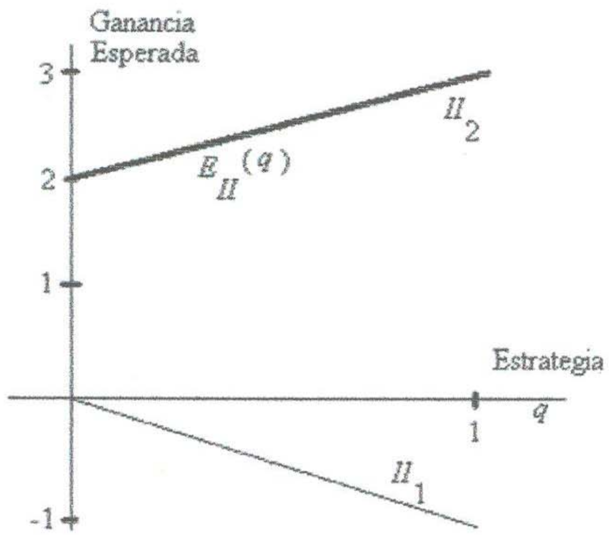


Figura 2.8

En la figura se ve que la gráfica de $E_{II}(q)$ coincide con la $II_2(q)$. Como el punto más bajo de esta gráfica corresponde a $q = 0$ se sigue que la estrategia Minimax del Jugador II es la estrategia pura [1,0]. La esperanza Minimax, es decir, la coordenada y del punto (0,2), que es el punto más bajo de la gráfica de $E_{II}(q)$ es 2.

En el juego del Ejemplo 2.2,

3	1
-1	-2

$$II_1(q) = -2q + 3$$
$$II_2(q) = -1 - q$$

La gráfica de $E_{II}(q)$ aparece en la Figura 2.9:

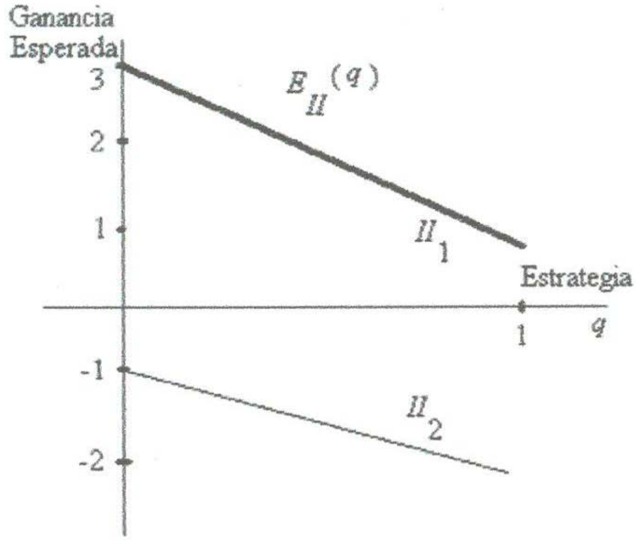


Figura 2.9

En esta figura se ve que la gráfica de $E_{II}(q)$ coincide con la gráfica de $II_1(q)$.

La estrategia Minimax del Jugador II, la que le reditúa la mínima ganancia esperada al Jugador I viene del extremo derecho de la gráfica de $E_{II}(q)$, es decir del punto que corresponde a $q = 1$. De manera que es la estrategia pura [1-1,1]=[0,1]. Como la entrada más grande de la correspondiente segunda columna es 1, esto implicará que el Jugador II va a conseguir mantener la ganancia del Jugador I en a lo más 1 por jugada.

Los ejemplos anteriores contienen aparentemente una coincidencia: para cada uno de esos juegos la esperanza Maximin del Jugador I y la esperanza Minimax del Jugador II son iguales.

La coincidencia de las utilidades para juegos repetidos es el teorema central de la teoría de los juegos. Presentaremos y discutiremos este Teorema primero en el contexto de juegos de 2×2 y lo reformularemos en un contexto más general más adelante en este capítulo.

Teorema 2.2.2.- *Para todo juego de* 2×2 *de suma cero existe un número* v *tal que*

i. La estrategia Maximin le garantiza al Jugador I una utilidad esperada de al menos v.

ii. La estrategia Minimax le garantiza al Jugador II que la utilidad esperada del Jugador I no excederá a v

(Para una demostración de este Teorema, véase [8], sección 5.3, pp. 107-110)

Estas afirmaciones implican que si ambos jugadores emplean sus estrategias recomendadas entonces la utilidad esperada será exactamente v.

Definición 2.2.4.- Al número v se le llama *valor del juego*. El valor del juego, junto con las estrategias Maximin y Minimax constituyen *la solución* del juego.

Así, por ejemplo, la solución al juego de las monedas es:

Valor = 0; estrategia Maximin: [0.5,0.5]; estrategia Minimax: [0.5,0.5].

Similarmente, la solución para el juego de los bombarderos es:

Valor = 83.33%; estrategia Maximin: [2/3,1/3]; estrategia Minimax: [5/6,1/6].

Antes de dejar esta sección queremos insistir en el significado de la solución de un juego.

Por ejemplo, en el juego de los bombarderos, el valor del juego de 83.33% significa que el porcentaje máximo de misiones exitosas que puede esperar obtener el Jugador I es de 83.333% y que ese porcentaje se obtendrá cuando él use la estrategia maximin [2/3,1/3] y el Jugador II use la estrategia minimax [5/6,1/6]

2.3.- Solución de Juegos de 2×2.

Presentaremos otro método para encontrar la solución de cualquier juego de 2×2 de suma cero. Para esto es necesario clasificar los juegos de 2×2 en dos tipos.

Definición 2.3.1.- Un *juego* 2×2 *estrictamente determinado*, es aquél para el que, el Jugador I tiene una estrategia Maximin pura (y, en consecuencia, el Jugador II tiene una estrategia Minimax pura).

Gráficamente esto significa que los segmentos rectos que corresponden a $I_1(p)$ y $I_2(p)$ o no se intersectan o se intersectan en un punto extremo común, o bien, su punto de intersección no es el punto más alto de la gráfica de $E_I(p)$. La razón de esta nomenclatura es que, como las estrategias son puras, cada jugador sabe con completa seguridad cual será su siguiente opción seleccionada, que es la indicada en la estrategia pura.

Definición 2.3.2.- Un *juego* 2×2 *no estrictamente determinado*, es uno para el cual la estrategia Maximin (y en consecuencia, también la estrategia Minimax) no es pura.

Gráficamente esto significa que los segmentos rectos que corresponden a $I_1(p)$ y $I_2(p)$ se intersectan en el interior del intervalo $[0,1]$ y el punto de intersección es mayor que cualquier otro punto de la gráfica de $E_I(p)$. En otras palabras, estos segmentos rectos forman una especie de "X". Tal es el caso del juego de las monedas y el juego de los bombarderos.

Los juegos estrictamente determinados tienen una caracterización estructural muy conveniente que los hace fáciles de reconocer.

Teorema 2.3.1.- *Un juego de* 2×2 *de suma cero es estrictamente determinado si y solo si contiene una entrada que es la minimal de su fila y la maximal de su columna.*

(Para su demostración véase [8], Corolario 2, p. 110)

Definición 2.3.3.- Una entrada en un juego de 2×2 que es minimal de su fila y maximal de su columna se llama *punto silla.*

Así, la entrada 2 es un punto silla en el juego del Ejemplo 2.1

0	-1
2	3

Similarmente, la entrada 1 es un punto silla del juego del Ejemplo 2.2

3	1
-1	-2

Nótese que estas entradas también constituyen los valores de estos juegos, y esto no es una coincidencia.

Teorema 2.3.2.- *El punto silla de un juego de* 2×2 *estrictamente determinado es también su valor; además su fila y columna constituyen las estrategias Maximin y Minimax puras, respectivamente.*

(Para una demostración de este Teorema, véase [5], pp. 44-45)

El siguiente procedimiento sirve para prescindir de las gráficas y de los ensayos en la tarea de reconocer y resolver juegos estrictamente determinados.

Dado un juego, escríbanse en la parte baja de cada columna la entrada máxima de esa columna y escríbanse a la derecha de cada fila la entrada mínima de esa fila. Si alguno de los máximos de las columnas es igual a alguno de los mínimos de las filas, el juego es estrictamente determinado, esa entrada común es el punto silla y el valor del juego. Su fila y columna constituyen las estrategias puras Maximin y Minimax, respectivamente del juego.

Tabla 2.1

(*a*)

5	3	3
4	1	1
5	3	

Valor = 3
Estrategia Maximin: [1,0]
Estrategia Minimax: [0,1]

(*b*)

2	3	3
4	1	1
4	3	

Juego no
Estrictamente
Determinado

(*c*)

-2	0	-2
-1	1	-1
-1	1	

Valor = -1
Estrategia Maximin: [0,1]
Estrategia Minimax: [1,0]

Los juegos de 2×2 de suma cero no estrictamente determinados son sujeto de un procedimiento de solución tan sencillo como el que se usa para resolver los juegos estrictamente determinados.

Definición 2.3.4.- Supongamos que el juego

a	b
c	d

es no estrictamente determinado y consideremos los pares

$$[d-c, a-b] \text{ o } [c-d, b-a]$$

Aquel de estos pares que consistan de números positivos le llamaremos *remanentes* del Jugador I.

La existencia de los remanentes está garantizada por el siguiente teorema.

Teorema 2.3.3.- El juego

a	b
c	d

es no estrictamente determinado, si y sólo si

$$(d-c)\cdot(a-b)>0.$$

La demostración del Teorema 2.3.3 aparece en el Apéndice, página 96.

Ejemplo 2.4.- En el juego (b) no estrictamente determinado de la Tabla 2.1, los remanentes del Jugador I son $[4-1,3-2]=[3,1]$.

Mientras que para el juego no estrictamente determinado

5	-2
1	4

los remanentes del Jugador I son $[4-1,5-(-2)]=[3,7]$.

La importancia de los remanentes se desprende del siguiente teorema.

Teorema 2.3.4.- En un juego no estrictamente determinado, la estrategia maximin del Jugador I se obtiene de los remanentes cuando cada uno de ellos se divide por su suma. (Para una demostración de este Teorema, véase [5], pp 46-48)

Por ejemplo, en el juego (b) de la tabla 1 la estrategia Maximin es $\left[\frac{3}{3+1},\frac{1}{3+1}\right]=\left[\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right]=[.75,.25]$. De los remanentes $[3,7]$ del juego anterior se obtiene la estrategia Maximin $\left[\frac{3}{3+7},\frac{7}{3+7}\right]=\left[\frac{3}{10},\frac{7}{10}\right]=[.3,.7]$.

Los remanentes del Jugador II se definen de manera similar a como se definen los remanentes del Jugador I.

Definición 2.3.5.- Supongamos que el juego

a	b
c	d

es no estrictamente determinado y consideremos los pares

$$[d-b, a-c] \text{ o } [b-d, c-a]$$

Aquél de estos pares que consistan de números positivos se llama *remanentes* del Jugador II.

Estos remanentes se convierten en la estrategia Minimax de manera similar a como los remanentes del Jugador I se convierten en la estrategia maximin.

Así, para el juego (b) anterior, los remanentes del Jugador II son $[3-1, 4-2]=[2,2]$ y su estrategia Minimax es $\left[\frac{2}{2+2}, \frac{2}{2+2}\right]=\left[\frac{2}{4}, \frac{2}{4}\right]=[.5, .5]$.

El valor de un juego no estrictamente determinado de 2×2 de suma cero se calcula a partir del diagrama auxiliar basado en las estrategias Maximin y Minimax.

Para el juego (b) de la tabla 2.1 este diagrama es:

	0.5	0.5
0.75	2	3
0.25	4	1

y entonces el valor del juego es:

$$0.75\times 0.5\times 2+0.75\times 0.5\times 3+0.25\times 0.5\times 4+0.25\times 0.5\times 1=2.5$$

Revisemos un par de ejemplos

Ejemplo 2.5.- Para encontrar la solución del juego

0	-3
4	1

primero debemos revisar si este juego es estrictamente determinado, y éste es ciertamente el caso

$$\begin{array}{|c|c|c} \hline 0 & -3 & -3 \\ \hline 4 & 1 & \underline{1} \\ \hline \multicolumn{1}{c}{4} & \multicolumn{1}{c}{\underline{1}} & \end{array}$$

Consecuentemente este juego tiene valor 1. La estrategia Maximin del Jugador I es [0,1] y las estrategia Minimax del Jugador II es [0,1].

Ejemplo 2.6.- Para el juego

0	3
4	1

el diagrama siguiente muestra que es no estrictamente determinado.

$$\begin{array}{|c|c|c} \hline 0 & 3 & 0 \\ \hline 4 & 1 & \underline{1} \\ \hline \multicolumn{1}{c}{4} & \multicolumn{1}{c}{\underline{3}} & \end{array}$$

Consecuentemente los remanentes del Jugador I son [4-1,3-0]=[3,3] y su estrategia Maximin es $\left[\frac{3}{6},\frac{3}{6}\right]=[.5,.5]$. Los remanentes del Jugador II son [3-1,4-0]=[2,4] y la estrategia Minimax es $\left[\frac{2}{6},\frac{4}{6}\right]=\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$. El valor del juego se obtiene a partir del diagrama auxiliar

$$\begin{array}{c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{1/3} & \multicolumn{1}{c}{2/3} \\ \cline{2-3} 0.5 & 0 & 3 \\ \cline{2-3} 0.5 & 4 & 1 \\ \cline{2-3} \end{array}$$

y está dado por:

$$0.5\times(1/3)\times 0+0.5\times(2/3)\times 3+0.5\times(1/3)\times 4+0.5\times(2/3)\times 1=2$$

Nota. *El cálculo del valor de un juego no estrictamente determinado puede simplificarse aun más si se observa que, como el pico de la gráfica de* $E_I(p)$ *corresponde tanto a* $I_1(p)$ *como a* $I_2(p)$, *cualquiera de las estrategias puras* [1,0] *o* [0,1] *puede sustituir a la estrategia Minimax del Jugador II. En otras palabras, el diagrama auxiliar de la figura anterior puede reemplazarse por cualquiera de los diagramas*

$$\begin{array}{c|c|c|} & 1 & 0 \\ \hline 0.5 & 0 & 3 \\ \hline 0.5 & 4 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|c|c|} & 0 & 1 \\ \hline 0.5 & 0 & 3 \\ \hline 0.5 & 4 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Ciertamente a partir de estos diagramas se obtienen los valores

$$0.5\times1\times0+0.5\times1\times4=2$$
$$\text{y}$$
$$0.5\times1\times3+0.5\times1\times1=2$$

respectivamente, que coinciden con el valor obtenido antes. Similarmente la estrategia Maximin del Jugador I puede reemplazarse por cualquiera de las estrategias [1,0] o [0,1], produciendo los diagramas auxiliares siguientes:

$$\begin{array}{c|c|c|} & 1/3 & 2/3 \\ \hline 1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 4 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|c|c|} & 1/3 & 2/3 \\ \hline 0 & 0 & 3 \\ \hline 1 & 4 & 1 \\ \hline \end{array}$$

y los valores

$$1\times\frac{1}{3}\times0+1\times\frac{2}{3}\times3=2$$
$$1\times\frac{1}{3}\times4+1\times\frac{2}{3}\times1=2$$

Ahora presentaremos el enunciado del teorema Minimax de Von Neumann

Teorema 2.3.5.- *(Minimax) Para cada juego* $m \times n$ *de suma cero existe un número* v *que tiene la siguiente propiedad:*

a) El Jugador I tiene una estrategia mixta que le garantiza una ganancia esperada de al menos v.

b) El Jugador II tiene una estrategia mixta con la que puede garantizar que la ganancia esperada del Jugador I será a lo más v.

(para su demostración véase [8], Sección 5.5, pp 111-114)

En este Teorema al igual que en el Teorema 2.2.2 el número v es el *valor* del juego. Las estrategias mencionadas en las partes a) y b) son las estrategias Maximin y Minimax, respectivamente. El valor del juego junto con las estrategias Maximin y Minimax se llama *solución* del juego.

La noción de un juego de 2×2 estrictamente determinado se extiende a dimensiones más altas sin dificultad alguna. Como se menciono en la definición 2.3.3 una entrada de un juego que es minimal para su fila y maximal para su columna se llama *punto silla*. Así, las entradas 2 y -1 son puntos sillas respectivos para los juegos de la Tabla 2.2.

Tabla 2.2
Dos juegos estrictamente determinados

(a)

9	-2	-5	-5
5	1	-9	-9
3	2	5	2
-5	0	1	-5
9	2	5	

(b)

5	-2	1	-3	4	-3
0	-2	5	0	-1	-2
9	-1	0	2	1	-1
9	-1	5	2	4	

El mismo procedimiento de comparar los mínimos de las filas con los máximos de las columnas sirve para localizar los puntos sillas de juegos grandes. De manara similar como lo hacíamos en un Juego de 2×2 (Definición 2.3.3 y Teorema 2.3.2), definimos un punto silla para un juego de tamaño $m\times n$ de la siguiente manera:

Definición 2.3.6.- Un juego que tiene un punto silla se llama *estrictamente determinado* La entrada que esta en el punto silla es el *valor del juego*. Su fila y su columna constituyen la *estrategia Maximin* del Jugador I y la *estrategia Minimax* del Jugador II, respectivamente.

De modo que la solución de los dos juegos de la Tabla 2 .2 es:

Juego	(a)	(b)
Valor	2	-1
Estrategia Maximin	[0,0,1,0]	[0,0,1]
Estrategia Minimax	[0,1,0]	[0,1,0,0,0]

El método gráfico para encontrar la solución de juegos de 2×2 de suma cero, se puede usar para resolver cualquier juego de $2\times n$ que sea no estrictamente determinado. Sólo es necesario recordar que en tales casos el Jugador II tiene que seleccionar de entre n estrategias puras disponibles, en vez de sólo 2. En consecuencia, si, para $j=1,2,3,\ldots,n$, $I_j(p)$ denota la ganancia esperada cuando el Jugador I emplea la estrategia $[1-p,p]$ consistentemente seleccionando la $j-ésima$ columna y si $E_I(p)$ denota la ganancia que el Jugador I puede razonablemente esperar cuando él utiliza la estrategia $[1-p,p]$, entonces: $E_I(p)=min\{I_1(p),I_2(p),\ldots,I_n(p)\}$ y la gráfica de $E_I(p)$ coincide, para cada p, con el punto, más bajo de las gráficas de $I_j(p)$ para alguna j *donde* $j=1,2,\ldots,n$. Si la $j-ésima$ columna del juego es

$$\boxed{\begin{array}{c} g \\ \hline h \end{array}}$$

entonces la gráfica de $I_j(p)$ es un segmento de recta que une los puntos $(0,g)$ y $(1,h)$

Antes de ver ejemplos definiremos lo que es un *subjuego.*

Definición 2.3.7.- El arreglo que se obtiene eliminando filas y/o columnas de un juego, irrelevantes para algún propósito, se llama *subjuego* del juego en cuestión.

En nuestro caso la intención es, dado un juego (de tamaño grande), buscar qué columnas y/o filas eliminar para obtener un subjuego cuya solución nos ayude a determinar la solución del juego original.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.7 encontremos la solución del juego

-2	0	-1	2
3	1	0	-1

El anterior diagrama implica que el juego es no estrictamente determinado porque no existe un punto silla en él. Entonces podemos usar el método gráfico para encontrar la solución.

La gráfica de la ganancia esperada es la línea gruesa quebrada de la Figura 2.10. El punto más alto de la gráfica de la ganancia del Jugador I, que es el que se usa para determinar la estrategia Maximin del Jugador I, es la intersección de $I_3(p)$ y $I_4(p)$. El correspondiente valor de p se puede obtener resolviendo la ecuación $I_3(p)=I_4(p)$, pero aquí funciona mejor el método de los remanentes . Nótese que las gráficas de $I_1(p)$ y $I_2(p)$ pasan ambas por encima del pico encerrado en él circulo. Se sigue entonces que sus columnas son irrelevantes para la estrategia Minimax del Jugador II, pues el seleccionar cualquiera de ellas seria ventajoso para el Jugador I. Así que la estrategia Minimax del Jugador II debe ser de la forma $[0,0,1-q,q]$ para $0 \leq q \leq 1$. Como las columnas 1 y 2 nunca se van a usar, pueden ser borradas del arreglo original y así resulta el subjuego reducido de 2×2 siguiente:

-1	2
0	-1

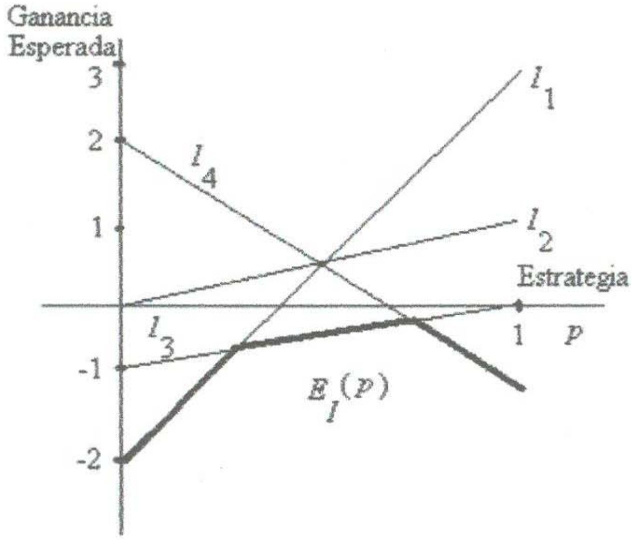


Figura 2.10

Este subjuego tampoco tiene punto silla y por tanto también puede ser resuelto por el método de los remanentes. Los remanentes del Jugador I en este caso son [1,3], de manera que su estrategia Maximin, tanto para el subjuego como para el juego original es [.25,.75]. El valor del juego original es el mismo que el del subjuego, cuyo diagrama auxiliar es:

	1	0
0.25	-1	2
0.75	0	-1

de donde obtenemos el valor

$$0.25\times 1\times(-1)+0.75\times 1\times 0=-0.25$$

Ejemplo 2.8.- Encontremos la solución del juego

0	1	-2
2	-1	1

Se puede verificar con toda facilidad que este juego no tiene punto silla. Entonces debemos analizar la gráfica en la Figura 2.11

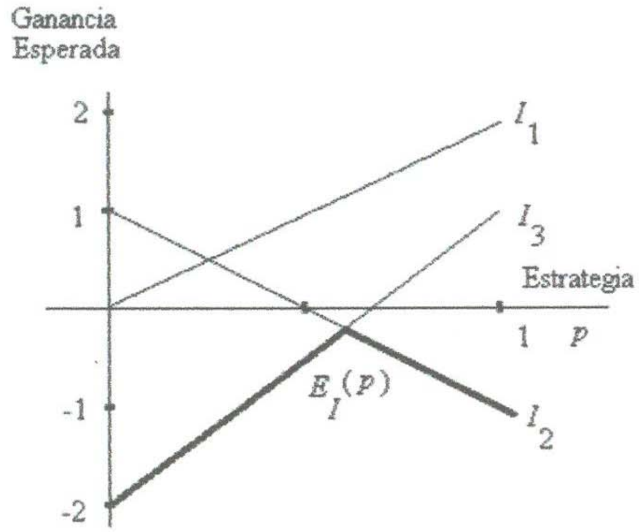


Figura 2.11

Como el punto más alto de la gráfica ocurre en la intersección de $I_2(p)$ y $I_3(p)$ se sigue que podemos restringir nuestra atención al subjuego

1	-2
-1	1

Este subjuego es no estrictamente determinado y los remanentes del Jugador I son [2,3]. Entonces la estrategia Maximin para este juego es [0.4,0.6] y del diagrama auxiliar:

	1	0
0.4	1	- 2
0.6	-1	1

encontramos que el valor del juego es:

$$0.4\times1\times1+0.6\times1\times(-1)=-0.2$$

que también es el valor del juego original con la estrategia Maximin [0.4,0.6]

Sorprendentemente, es posible reducir un juego de $2\times n$ no estrictamente determinado a un subjuego estrictamente determinado. Esto puede ocurrir sólo si el pico de la gráfica de $E_I(p)$ es de hecho un segmento horizontal y en este caso excepcional, se debe ser cuidadoso. Veamos un ejemplo

Ejemplo 2.9 el siguiente juego de 2×3 no tiene punto silla

0	1	2
3	1	0

Para este juego su gráfica es la Figura 2.12.

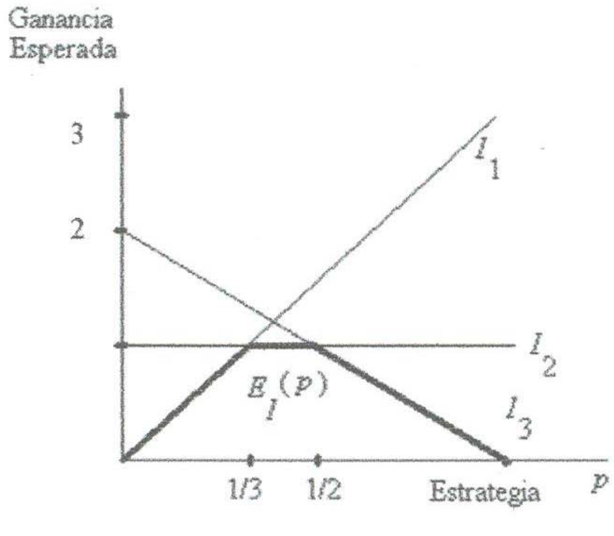


Figura 2.12

y tiene un segmento horizontal y no un pico. Si decidiéramos trabajar con la intersección de las gráficas de $I_1(p)$ y $I_2(p)$ obtendríamos el subjuego

0	1
3	1

que claramente tiene punto silla El juego dado tiene la interesante propiedad adicional de que su estrategia Maximin no es única. Cualquier punto en el segmento de la gráfica de $I_2(p)$ que este entre las intersecciones con $I_1(p)$ e $I_3(p)$ da una estrategia Maximin. Estos puntos de intersección se pueden obtener con el método de los remanentes, aún cuando los subjuegos no son no estrictamente determinados. Así, el extremo izquierdo corresponde al subjuego anterior, del que se obtienen los remanentes [3-1,1-0]=[2,1] y estrategia Maximin [2/3,1/3] para el Jugador I. El extremo derecho corresponde al subjuego

1	2
1	0

en el cual los remanentes del Jugador I son [1-0,2-1]=[1,1] de donde la estrategia Maximin es [0.5,0.5]. Así que cualquier estrategia de la forma $[1-p,p]$ con $\frac{1}{3} \leq p \leq \frac{1}{2}$ servirá como estrategia Maximin. El valor del juego es el valor $E_I(p)$ para esos valores de p, y en la Figura 2.12 vemos que es 1.

De estos ejemplos vemos que cuando se esta resolviendo un juego $2 \times n$ de suma cero, si una estrategia Maximin esta determinada por la intersección de dos de las $I_j{}'s$ entonces el correspondiente valor de p se puede encontrar por el método de los remanentes.

El proceso de encontrar la solución de juegos $m \times 2$ es similar al de los juegos de $2 \times n$, la diferencia principal es que ahora nos debe guiar el punto de vista del Jugador II. Así para cada $i = 1,2,\ldots,m$ $II_i(q)$ denota la ganancia esperada del Jugador II cuando el Jugador I emplea consistentemente la $i-ésima$ fila contra la estrategia mixta arbitraria $[1-q,q]$ del

Jugador II, con $0 \le q \le 1$, y si $E_{II}(q)$ denota la ganancia esperada del Jugador II, entonces $E_{II}(q) = max\{II_1(q), II_2(q), ..., II_m(q)\}$.

La gráfica de $E_{II}(q)$ coincide, para cada q con el más alto de los puntos de las gráficas de $II_1(q), II_2(q), ..., II_m(q)$. Si la $i-ésima$ fila del juego es

g	h

Entonces la gráfica de $II_i(q)$ es un segmento recto que une a los puntos $(0, g)$ y $(1, h)$

Ejemplo 2.10 en el juego

3	0
2	3
-1	4

es no estrictamente determinado y la ganancia esperada del Jugador II es la línea gruesa quebrada de la Figura 2.13

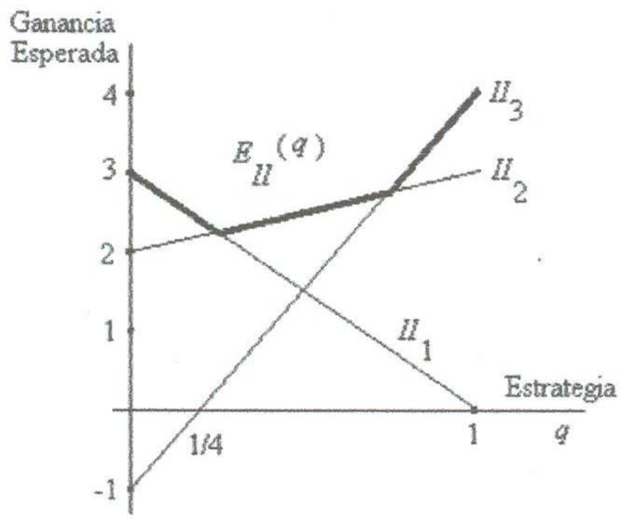


Figura 2.13

El punto más cercano de esta gráfica, que es el que determina la estrategia Minimax del Jugador II, es la intersección de $II_1(q)$ y $II_2(q)$. En consecuencia es posible restringir nuestra atención al subjuego

3	0
2	3

que consiste en las primeras dos filas del juego dado. Para este subjuego, los remanentes del Jugador II son [3-0,3-2]=[3,1] lo que implica que la estrategia Minimax es [0.75,0.25]. el valor del juego coincide con el valor del subjuego

$$1\times 0.75\times 3+1\times 0.25\times 2=2.25$$

Es posible que un juego no estrictamente determinado se reduzca a un subjuego estrictamente determinado, como ocurre en el caso que la gráfica de $E_{II}(q)$ tiene un segmento recto en vez de un único punto bajo, cuando esto ocurre, los extremos del segmento recto pueden determinarse por el método de los remanentes.

De este ejemplo vemos que cuando se esta resolviendo un juego $m\times 2$ de suma cero, si la estrategia Minimax esta determinada por el punto de intersección de dos de los II_i´s, entonces el correspondiente valor de q se puede determinar por el método de los remanentes.

Ejemplo 2.11.- Encontremos la solución del juego

1	1
-2	2
2	-2

La gráfica de $E_{II}(q)$ es la línea gruesa quebrada de la Figura 2.14.

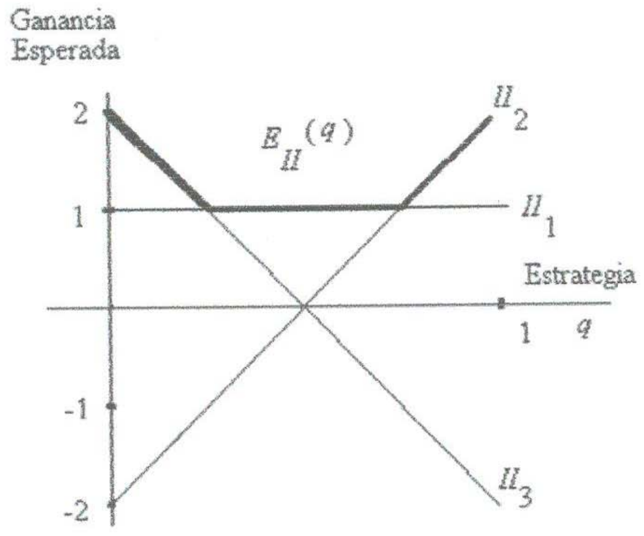


Figura 2.14

El extremo izquierdo del fondo plano se obtiene de los remanentes del Jugador II en el subjuego

1	1
2	-2

Estos remanentes son [1-(-2),2-1]=[3,1], de donde se obtiene la estrategia Minimax $\left[\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right]$ o $q=\frac{1}{4}$.

El extremo derecho del fondo plano se obtiene de los remanentes del Jugador II en el subjuego determinado por la primera y segunda fila

1	1
-2	2

Estos remanentes son [2-1,1-(-2)]=[1,3], lo que da una estrategia Minimax $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$ o $q=\frac{3}{4}$

El valor del juego es el valor de $E_{II}(q)$ para cualquier valor de q entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$, y mirando la Figura 2.14 podemos decir que este valor es 1.

Algunos juegos $m \times n$ se pueden resolver identificando y descartando filas y columnas irrelevantes. Vamos a ilustrar esto primero con un ejemplo y después enunciaremos el principio general.

Ejemplo 2.12.- Consideremos el juego

-5	4	6
3	- 2	2
2	-3	1

Obsérvese que el Jugador I no debe escoger nunca la tercera fila, pues siempre le iría mejor si selecciona la segunda fila independientemente de la elección que haga el Jugador II. La razón de esto es, que cada entrada de la tercera fila es menor que la correspondiente entrada de la segunda fila, y el Jugador I debe siempre buscar la máxima ganancia posible. Similarmente, el Jugador II nunca debería escoger la tercera columna, pues cada una de sus entradas es mayor que la correspondiente entrada de la segunda columna. Esto es así pues el Jugador II debe procurar mantener las ganancias del Jugador I lo más bajo posible. En consecuencia, cada jugador debe restringir su atención a sus primeras dos opciones, reduciendo así el juego al subjuego

-5	4
3	-2

que puede ser fácilmente resuelto por el método de los remanentes. La idea que está en el fondo de esto es la *dominancia*.

Definición 2.3.8.- Dada dos listas de igual longitud

$$L_1 = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ y } L_2 = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

decimos que L_1 *domina a* L_2(o que L_2 *es dominada por* L_1) si $a_i \geq b_i$ para todo $i = 1,2,\ldots,n$

Así la segunda fila del juego anterior domina a la tercera mientras que la tercera columna domina a la segunda. La siguiente observación se justifica por el hecho de que el Jugador I siempre busca la máxima utilidad, mientras que el Jugador II siempre busca minimizar las ganancias del Jugador I.

El significado de dominancia presentado en la definición 2.3.8 implica que en cualquier juego de suma cero que contenga alguna fila dominada o columna dominante, se puede reducir a un subjuego equivalente el cual no contenga fila dominada ni columna dominante.

Veamos el último ejemplo de este Capítulo.

Ejemplo 2.13.- Encontremos la solución del juego 4×4

3	-2	2	-1
1	-2	2	0
0	6	0	7
-1	5	0	8

Como este juego es no estrictamente determinado, procedemos a buscar dominancia entre sus filas y columnas. La cuarta columna domina a la segunda, de modo que, después de eliminarla, tenemos el subjuego

3	-2	2
1	- 2	2
0	6	0
-1	5	0

En este subjuego no hay máas columnas dominantes, pero si hay dominancia entre las filas. Vemos que la primera fila domina a la segunda y que la tercera domina a la cuarta, de manera que después de eliminar a las filas dominadas obtenemos el subjuego

3	-2	2
0	6	0

Y aquí vemos que la primera columna domina a la tercera, después de eliminar la columna dominante nos queda

-2	2
6	0

Los remanentes del Jugador I en este subjuego son [6,4]. Como las filas de este subjuego se obtuvieron de la primera y tercera filas del juego original vemos que la estrategia Maximin original es [.6,0,.4,0]. Similarmente, los remanentes del Jugador II son [2,8], de donde obtenemos que la estrategia Minimax para el juego original es [0,.2,.8,0]. El valor del juego original es el valor del subjuego. Usando el diagrama auxiliar

	0	1
0.6	-2	2
0.4	6	0

Encontramos que este valor común es:

$$0.6 \times 2 \times 1 = 1.2$$

2.4.- Conclusión.

En este Capítulo se presentó la Teoría para estudiar juegos de suma cero, se han analizado las utilidades desde el punto de vista de cada jugador y se fijaron métodos que nos llevan a encontrar estrategias para encontrar soluciones óptimas de juegos de tamaño 2×2 y algunos de tamaño $m\times n$. Uno de los conceptos más importantes y sutiles que se han presentado en el contexto de juegos de suma cero es el de estrategia, y en particular, el de estrategia maximin. Este concepto será central en el estudio de juegos de suma no cero que se presenta en el capítulo siguiente.

Capítulo 3

Juegos de Suma no cero

En este capítulo haremos un estudio de juegos de suma no cero. Este tipo de juegos es muy importante dado que se presentan con mayor frecuencia en la práctica. En la Sección 3.1 estudiamos estrategias maximin puras y equilibrios de Nash obtenidos de estrategias puras. En la sección 3.2 estudiamos estrategias maximin mixtas y equilibrios de Nash obtenidos a partir de estrategias mixtas. En la Sección 3.3 presentamos un interesante método gráfico para contestar la pregunta básica y no trivial de cómo encontrar el equilibrio de Nash mixto.

3.1.- Estrategias Puras

Se ha hecho un esfuerzo considerable en intentar llevar parte de la teoría de juegos de suma cero a otros juegos, menos restrictivos, en particular, a juegos en los que la ganancia de un jugador no necesariamente es la pérdida del otro.

Definición 3.1.1.- Llamaremos *juegos de suma no cero* a aquellos en los que lo que un jugador gana no es necesariamente lo que el otro pierde, donde las ganancias pueden no ser cuantificables y donde las decisiones de un jugador pueden no ser independientes de las decisiones del otro.

Estos juegos también se modelan haciendo que el Jugador I seleccione una fila y el Jugador II seleccione una columna de un arreglo, rectangular adecuado. Sin embargo, como la ganancia de un jugador no es necesariamente la perdida del otro, la ganancia de cada resultado no puede ser descrita por un solo número. Si el Jugador I escoge la fila i y el Jugador II escoge la columna j, el resultado se describe por el par de utilidades:

$$(a_i, b_j)$$

donde a_i denota la utilidad del Jugador I y b_j denota la utilidad del Jugador II. De manera que, en general, un juego de tamaño 2×2 de suma cero puede modelar mediante un arreglo de la forma

	Jugador II	
Jugador I	(a_1, b_1)	(a_2, b_2)
	(a_3, b_3)	(a_4, b_4)

Como las utilidades de los jugadores son independientes, entre si podemos suponer que cada jugador basa sus decisiones en su utilidad solamente. Esta idea se formaliza en la definición siguiente.

Definición 3.1.2.- El *Principio de Racionalidad* establece que cada jugador desea salir del juego de la mejor manera posible.

Una consecuencia del principio de racionalidad es que cada jugador ignorará las ganancias de su oponente al momento de hacer sus decisiones. Así que podemos imaginar que el Jugador I está encarado con el juego de suma cero

Jugador I	a_1	a_2
	a_3	a_4

contra un oponente irrelevante, y que el Jugador II está encarando el juego de suma cero

Jugador II	
b_1	b_2
b_3	b_4

donde su objetivo es, como el caso del Jugador 1, *maximizar* sus ganancias. Consecuentemente, ambos jugadores deben buscar estrategias *Maximin*.

Definición 3.1.3.- El par de ganancias en el resultado determinado por las dos soluciones Maximin puras se llama *par de valores puros del juego.*

Las estrategias Maximin puras y los pares de valores puros de cualquier juego de suma no cero se determinan muy fácilmente.

Ejemplo 3.1.- Encontremos las estrategias Maximin puras y el par de valores puros del juego

(2,3)	(3,5)
(2,2)	(1,3)

Por el principio de racionalidad, las consideraciones del Jugador I se deben restringir al arreglo

Jugador I

2	3	<u>2</u>
2	1	1

En el lado derecho del arreglo estamos localizando el mínimo de cada renglón y subrayamos el máximo de ellos. De manera que su estrategia Maximin pura es [1,0], con un correspondiente valor Maximin de 2. Por otro lado, el análisis del Jugador II debe confinarse al arreglo

Jugador II

3	5
2	3
2	<u>3</u>

Obsérvese que la entrada en la parte baja de cada columna es el *mínimo* para esa columna y que el Jugador II debe escoger el mayor de estos mínimos. Entonces su estrategia Maximin es [0,1] con un correspondiente valor Maximin de 3.

El par de valores puros es por tanto la entrada de la primera fila y la segunda columna, (3,5). En los ejemplos siguientes las ganancias del Jugador I y del Jugador II los cálculos serán escritos a un lado del arreglo del juego original.

Ejemplo 3.2.- Para el juego

(-1,0)	(1,3)
(2,2)	(0,1)

los mínimos por fila del Jugador I y del Jugador II, aparecen a continuación, junto al arreglo del juego:

(-1,0)	(1,3)	-1
(2,2)	(0,1)	<u>0</u>
0	<u>1</u>	

Como el valor Maximin puro del Jugador I es 0 se sigue que la estrategia Maximin del Jugador I es escoger la segunda fila. El valor Maximin puro del Jugador II es 1 de modo que su estrategia Maximin pura también consiste en seleccionar la segunda columna en el arreglo; es decir, la segunda columna del juego dado. El par de valores puros es (0,1).

Un par de juegos clásicos son los siguientes:

Ejemplo 3.3.- (EL DILEMA DEL PRISIONERO). *Dos jóvenes son arrestados y puestos en prisión acusados de cierto robo. El fiscal tiene evidencias sólo para inculparlos del robo, pero cree que los delincuentes portaban armas de uso restringido, lo que los haría culpables del cargo, más severo aún, de asalto a mano armada. Los prisioneros son puestos en celdas separadas y no pueden comunicarse entre sí. A cada uno de ellos el fiscal les hace la siguiente proposición: "si tú declaras que tu compañero estaba armado pero él no declara en contra de ti, entonces tu sentencia será revocada, mientras que a él* *se le condenará a 15 años de carcél. Si ambos de ustedes declaran uno contra el otro, se les darán 10 años de cárcel a cada uno y si ninguno declara, se les condenara a 5 años de cárcel a ambos". Se les da a ambos un tiempo para que la piensen, pero ninguno de ellos puede saber cuál será la decisión de su compañero.*

Claramente esta situación puede verse como un juego de suma no cero y puede ser descrito con el siguiente arreglo:

	Rechazar El trato	Aceptar El trato
Rechazar el trato	(-5,-5)	(-15,0)
Aceptar el trato	(0,-15)	(-10,-10)

donde la utilidad $-x$ representa una condena de x años en la cárcel. La estrategia pura Maximin de cada jugador se deriva fácilmente.

(-5,-5)	(-15,0)	-15
(0,-15)	(-10,-10)	-<u>10</u>
-15	-<u>10</u>	

La estrategia pura Maximin [0,1] es para ambos jugadores. De manera que la estrategia Maximin recomienda que cada jugador acepte el trato propuesto por el fiscal, con lo que estarán seguros de recibir una sentencia condenatoria de 10 años en la cárcel. Tanto la experiencia como la experimentación respaldan el hecho de que ésta es con frecuencia la decisión tomada por personas en tales circunstancias. Esto es curioso porque si ambos jugadores rechazaran la propuesta, recibirían 5 años de cárcel, lo cuál es una sentencia significativamente mejor para ambos.

Ejemplo 3.4.- (EL JUEGO DEL "CHICKEN"). *Este juego describe una situación muy común. Dos adversarios están en una pista de colisiones en movimiento uno contra el otro. Si ambos persisten entonces seguramente ocurrirá un resultado desagradable, que puede* *incluso llegar a ser la aniquilación mutua. Si uno de los jugadores se desvía (es decir, "se raja"), se le llama "gallina" (chicken); él pierde el juego. Si ambos se desvían, el juego termina en empate*

Usualmente el ganar en este juego es simplemente el obtener un sentido de superioridad y el perder produce simplemente un sentido de cobardía, pero ambos resultados son no cuantificables. La posibilidad de aniquilación mutua, cuando ambos jugadores persisten, es lo que hace que este juego sea de suma no cero. En tal caso, ningún jugador gana; de hecho, con frecuencia, ambos pierden la vida.

Discutiremos algunos aspectos paradójicos de este juego. Para este efecto, pensaremos en la situación concreta que se presentó durante la crisis de los misiles cubanos, en Octubre de 1962, y que es uno de los más conocidos y más atemorizantes juegos del "chicken" que se haya jugado jamás. En ese mes, los Estados Unidos descubrieron que la URSS estaba construyendo una base de misiles en Cuba. Cuando una pequeña flota Soviética estaba en camino a la isla con los misiles, los Americanos pusieron un bloqueo naval. Es muy probable que si estas dos flotas se hubieran enfrentado, el conflicto hubiera escalado a grandes proporciones y, probablemente, se hubiera desatado una guerra nuclear. Ocurrió que los Soviéticos decidieron hacer retroceder sus naves y los Estados Unidos "ganaron". Había cuatro posibles resultados en la crisis de los misiles:

i) EE.UU retrocede, URSS retrocede;
ii) EE.UU retrocede, URSS persiste;
iii) EE.UU persiste, URSS retrocede;
iv) EE.UU persiste, URSS persiste.

Los "jugadores" podrían haber clasificado estos resultados en orden de preferencia como sigue: (1 denota lo menos deseable, 4 lo más deseable; "R" significa "retrocede", "P" significa "persiste"), estos resultados se presentan en la tabla 3.1

Tabla 3.1

EE.UU		URSS
EE.UU. (P),URSS (R)	4	EE.UU. (R),URSS (P)
EE.UU. (R),URSS (R)	3	EE.UU. (R),URSS (R)
EE.UU. (R),URSS (P)	2	EE.UU. (P),URSS (R)
EE.UU. (P),URSS (P)	1	EE.UU. (P),URSS (P)

Estas preferencias se pueden resumir en el siguiente juego de suma no cero.

		URSS Retroceder	URSS Persistir
EE.UU.	Retroceder	(3,3)	(2,4)
	Persistir	(4,2)	(1,1)

Aquí la "utilidad" (i, j) asociada con cualquier resultado denota el hecho de que los EE.UU. Asignan a este resultado la clasificación i en su lista de preferencias, mientras que la URSS le asigna la clasificación j. La solución Maximin de este juego recomienda que ambos jugadores retrocedan, con un par de ganancias (3,3).

Supongamos que el 27 de Octubre, un día antes de que la crisis terminara, se le hubiera notificado al presidente Kennedy que los espías de la Unión Soviética se habían infiltrado en el Departamento de Seguridad y que cualquier decisión que el tomara iba a ser conocida inmediatamente por el primer ministro Khruschev. Uno pensaría que esto hubiera causado consternación entre los americanos. Vamos a demostrar que el caso hubiera sido exactamente el opuesto y que, de hecho en el juego del "chicken", si un jugador conoce de antemano la decisión que tomará su oponente, es desventajoso para ese jugador, si el oponente está informado del conocimiento de su oponente.

Esta conclusión será obtenida con base en el principio de racionalidad. Dando por supuesto la infiltración de los espías Soviéticos, el presidente Kennedy habría razonado del modo siguiente:

i) Si yo retrocedo, Khruschev lo sabrá y, al escoger entre (3,3) y (2,4), él decidirá persistir, y el resultado tendrá una ganancia de (2,4).

ii) Si yo persisto, Khruschev lo sabrá y, al escoger entre (4,2) y (1,1), él decidirá retroceder, y el resultado tendrá una ganancia de (4,2).

Así, si Kennedy retrocede la ganancia será (2,4), mientras que si persiste la ganancia será (4,2). Entonces, decidirá persistir, resultando en una ganancia de (4,2), mientras los Soviéticos retrocederán.Esto es por supuesto, exactamente lo que ocurrió.

Se podría argumentar que mientras la URSS podría, con toda probabilidad, no haber sido ajena al proceso de decisión de los Americanos, sus líderes eran más sabios y más conscientes de las posibles consecuencias desastrosas del juego del chicken. El aspecto esencial de la hipótesis de la infiltración en el caso de la crisis de los misiles Cubanos es que la URSS no decide que opción tomar sino sólo después de que los EE.UU lo han hecho. En general, esta prerrogativa puede o no ser benéfica al jugador que la posee.

Ejemplo 3.5.- Ahora veamos un juego abstracto: Consideremos el juego

(5,2)	(3,0)	(8,1)	(2,3)
(6,3)	(5,4)	(7,4)	(1,1)
(7,5)	(4,6)	(6,8)	(0,2)

Supongamos primero, que el Jugador II está informado de la decisión del Jugador I cuando él hace la suya, y que el Jugador I está consciente de este hecho. Entonces el Jugador I razonará de la manera siguiente:

i) Si yo selecciono la fila 1, el Jugador II va a optar por el par de ganancias (2,3);

ii) Si yo selecciono la fila 2, el Jugador II va a optar por uno de los pares de ganancias (5,4) o (7,4);

iii) Si yo selecciono la fila 3, el Jugador II va a optar por el par de ganancias (6,8).

El Principio de Racionalidad inducirá entonces a que el Jugador I seleccione la tercera fila y a que el Jugador II escoja la columna 3, resultando en un par de ganancias (6,8).

Por otro lado, si el Jugador I es la que está informado de la decisión que hará el Jugador II al momento en que el deba tomar su propia decisión, y si el Jugador II está consciente de este hecho, entonces, él razonará de la manera siguiente:

i) Si yo selecciono la columna 1, el Jugador I va a optar por el par de ganancias (7,5);

ii) Si yo selecciono la columna 2, el Jugador I va a optar por el par de ganancias (5,4);

iii) Si yo selecciono la columna 3, el Jugador I va a optar por el par de ganancias (8,1);

iv) Si yo selecciono la columna 4, el Jugador I va a optar por el par de ganancias (2,3).

El Principio de Racionalidad hará entonces que el Jugador II escoja la columna 1 y que el Jugador I escoja la fila 3, para una par de ganancias de (7,5).

Si ninguno de los jugadores tiene información sobre las decisiones de su oponente entonces la estrategia Maximin del Jugador I indica que el seleccione la fila 1 para una ganancia de al menos 2. La estrategia Maximin del Jugador II le indica que seleccione la columna 1 para una ganancia de al menos 2.

El resultado del juego tendrá entonces el par de ganancias (5,2). Así que en este juego, el tener información sobre las decisiones del oponente representa una ventaja para cada jugador.

Veíamos en la discusión del juego del "chicken" que el análisis Maximin puede no describir apropiadamente el comportamiento humano en algunas situaciones de juegos. En retrospectiva, en ese caso particular, la falla se debió a la simplificación excesiva que ocurría cuando se suponía que los jugadores hacían sus decisiones independientemente y simultáneamente. Sin embargo, en muchas instancias de este juego, el comportamiento de cada jugador afecta mucho el comportamiento del otro. Se observan con frecuencia uno al otro y cuando uno retrocede el otro seguramente persistirá hasta el final. En vez de descalificar por completo la estrategia Maximin para tales juegos, se encontró una forma de adaptarla de manera que continúe proporcionando a los investigadores soluciones satisfactorias.

Algunos aspectos de los juegos de suma cero que estudiábamos en el Capítulo anterior, como son la solución pura y la solución Maximin mixta poseen un aspecto cualitativo que puede transferirse al contexto de juegos de suma no cero. Recuérdese que ambas producen una ganancia maximal; una ganancia esperada, en el caso mixto, pero garantizada al fin. En otras palabras, si el jugador busca garantías, entonces va a salir perdiendo (es decir, tendrá razón para lamentarse) si cambia a una estrategia no Maximin. Esta política de *no quejarse* o *no lamentarse* puede aplicarse también a juegos de suma no cero.

Definición 3.1.4.- En un juego de suma no cero, una salida se llama *Punto de Equilibrio de Nash* si su par de ganancias (a_i, b_j) es tal que a_i es el máximo de su columna y b_j es el máximo de su fila.

El punto de equilibrio de Nash tiene la deseada propiedad de *no lamentarse*. Dado que el Jugador II ha seleccionado la columna j, el Jugador I no tiene ninguna razón para lamentarse por haber escogido la fila i. Ninguna otra selección del Jugador I le hubiera redituado una mejor ganancia. Nótese que en esta definición de equilibrio de Nash a cada jugador le interesa no tener que lamentarse únicamente de sus propias decisiones. Cada jugador es totalmente insensible de las acciones de su oponente. La razón de esta limitación es que la incorporación de este tipo de sentimientos resultaría en muchas complicaciones.

Ejemplo 3.6.- Consideremos el siguiente ejemplo. Queremos encontrar los puntos de equilibrio de Nash del juego

(5,2)	(3,0)	(8,1)	(2,3)
(6,3)	(5,4)	(7,4)	(1,1)
(7,5)	(4,6)	(6,8)	(0,2)

Una manera de encontrar estos puntos es examinar todos los pares de ganancias (a_i, b_j) sucesivamente y marcar tanto los a_i que son máximos de sus columnas como los b_j que son máximos de sus filas. Los puntos de equilibrio de Nash son aquellos que tienen *ambas* entradas marcadas.

(5,2)	(3,0)	(8*,1)	(2*,3*)
(6,3)	(5*,4*)	(7,4*)	(1,1)
(7*,5)	(4,6)	(6,8*)	(0,2)

Así que los puntos de equilibrio de Nash son aquellos cuyas ganancias son (5,4) y (2,3). Nótese que la ganancia (5,4) es claramente preferible sobre la otra. Sin embargo, esto no significa que necesariamente el Jugador I o el Jugador II intentarán obtener estas ganancias "mejores". Después de todo, al seleccionar la segunda fila (la del par (5,4)) el Jugador I se abre a la posibilidad de obtener una ganancia de sólo 1 si el Jugador II selecciona la columna 4. Similarmente, si el Jugador II hubiera seleccionada la segunda columna (la del par (5,4)), él se estaría abriendo a la posibilidad de ganar 0 si el Jugador I selecciona la fila 1.

El siguiente ejemplo demuestra que los puntos de equilibrio de Nash no necesariamente existen.

Ejemplo 3.7.- Encontremos los puntos de equilibrio de Nash del juego

(2,1)	(1,2)
(1,2)	(2,1)

Cuando marcamos el máximo de la fila en la primera entrada y el máximo de la columna en la segunda entrada obtenemos el siguiente patrón:

(2*,1)	(1,2*)
(1,2*)	(2*,1)

Como ningún par de ganancias tiene ambas entradas marcadas, se sigue que este juego no tiene equilibrios de Nash puros.

La lógica que esta detrás de los equilibrios de Nash es que cuando cada jugador observa las maniobras del otro, la situación gravitará naturalmente hacia un equilibrio de Nash. Tal era el caso en la crisis de los misiles cubanos. Mientras transcurrían los días de aquel mes de Octubre, los rusos se convencían cada vez más que los gringos estaban determinados a persistir, de manera que ellos tuvieron que retroceder. El siguiente diagrama demuestra que esta salida es de hecho uno de los dos equilibrios de Nash de la confrontación.

		URSS	
		Retroceder	Persistir
EE.UU.	Retroceder	(3,3)	(2*,4*)
	Persistir	(4*,2*)	(1,1)

El juego del dilema del prisionero tiene sólo un equilibrio de Nash con par de ganancia (-10,-10)

	Rechazar El trato	Aceptar el trato
Rechazar el trato	(-5,-5)	(-15,0*)
Aceptar el trato	(0*,-15)	(-10*,-10*)

Lo cuál es consistente tanto con la estrategia Maximin como con muchas situaciones observadas. Aquí por supuesto los jugadores no pueden verse entre *sí* al momento de tomar las decisiones. Sin embargo, el resultado que se observa con mas frecuencia que es el caso en el que ambos prisioneros aceptan el trato resulta ser un punto de equilibrio de Nash.

Los puntos de equilibrio de Nash se han convertido en una herramienta muy usada para economistas. El siguiente ejemplo ilustra cómo este concepto es usado en economía.

Ejemplo 3.8.- (LOS SOLICITANTES DE EMPLEO) *Las compañías 1 y 2 tienen un puesto disponible cada una, por los que ofrecen salarios 2a y 2b, respectivamente (el 2 se usa sólo para prevenir el uso de fracciones que aparecerían posteriormente).El Jugador I y el Jugador II pueden solicitar sólo una de las posiciones de trabajo y deben decidir simultáneamente si solicitan en la compañía 1 o en la compañía 2. Si uno de ellos solicita un trabajo, el trabajo se le asigna; si ambos solicitan el mismo trabajo, la compañía contrata a uno de ellos aleatoriamente*

Esta situación se modela con el siguiente juego 2×2 de suma no cero

		Jugador II solicita en:	
		Compañía 1	Compañía 2
Jugador I solicita en:	Compañía 1	(a,a)	$(2a,2b)$
	Compañía 2	$(2b,2a)$	(b,b)

Las entradas en el arreglo representan ganancias *esperadas* para cada jugador para cada elección. Las entradas $(2a,2b)$ y $(2b,2a)$ se explican por sí mismas. La entrada (a,a) se obtiene razonando de la manera siguiente. Si tanto el Jugador I como el Jugador II solicitan en la misma compañía, entonces, debido al supuesto de que la compañía seleccionará a un solicitante en forma aleatoria, cada jugador espera obtener una ganancia igual al salario, es decir, a. De manera similar se justifica la entrada (b,b).

No es de sorprender que el análisis del juego dependa de la relación entre los valores de a y b. Supongamos primero que:

$$a \leq 2b \quad y \quad b \leq 2a$$

En otras palabras, supongamos que ninguno de los salarios excede el doble del otro. Entonces, las dos entradas $(2a,2b)$ y $(2b,2a)$ son ambas equilibrios de Nash puros. Tal sería el resultado si, por ejemplo, el Jugador I y el Jugador II tuvieran conocimiento de la existencia del otro y llegaran a un acuerdo mutuo.

Por otro lado, si algún salario es mayor que el doble del otro, digamos

$$b > 2a$$

Entonces es la entrada (b,b) constituye el único equilibrio puro de Nash. Esto corresponde al caso en el que tanto el Jugador I como el Jugador II solicitan el mejor de los trabajos. El caso en el que $b=2a$ es intermedio y tiene a los tres resultados anteriores como sus equilibrios de Nash.

Así, este modelo altamente simplificado predice que si la disparidad entre los salarios no es muy grande entonces puede darse una distribución muy razonable de los puestos. Si un puesto es mucho mejor que el otro, entonces ambos solicitarán ese puesto, resultando en que uno de ellos seguirá desempleado.

3.2.- Estrategias Mixtas para Juegos de suma no cero. Equilibrios de Nash

Al igual que lo que ocurre con juegos de suma cero, los juegos de suma no cero pueden jugarse repetidamente y las estrategias pueden ser mixtas. En analogía con el contenido de los capítulos anteriores, discutiremos aquí estrategias maximin mixtas y equilibrios de Nash mixtos.

Como hicimos en nuestro estudio de juegos de suma cero, empezamos con juegos de suma no cero de tamaño 2×2.

Definición 3.2.1.- Una *estrategia mixta* para cada jugador del juego

	Jugador II	
Jugador I	(a_1,b_1)	(a_2,b_2)
	(a_3,b_3)	(a_4,b_4)

consiste de un par $[s,t]$ donde s y t son números no negativos tales que

$$s+t=1.$$

Cuando $s=0$ o $t=0$ para alguno de los jugadores, entonces la estrategia es *pura.*

Las estrategias mixtas generales de los Jugadores I y II serán denotadas nuevamente mediante $[1\text{-}p,p]$ y $[1\text{-}q,q]$, respectivamente. Nos referiremos a tal par de estrategias como *un par de estrategias mixtas*. Cuando los Jugadores I y II emplean estas estrategias mixtas en un juego de suma no cero, el par de ganancias esperadas se calcula de manera muy parecida a como se hacía en juegos de suma cero, excepto que ahora cada jugador se concentra en sus propias ganancias. Cuando el par de estrategias mixtas es $([1-p,p],[1-q,q])$, la utilidad esperada del Jugador I se denota con $\varepsilon_I(p,q)$ y la del Jugador II se denota con $\varepsilon_{II}(p,q)$.

Ejemplo 3.9.- Si los Jugadores I y II emplean el par de estrategias mixtas ([.3,.7],[.6,.4]) en el juego

(1,2)	(3,−2)
(−1,0)	(0,4)

se obtiene el diagrama auxiliar

	.6	.4
.3	(1,2)	(3,−2)
.7	(−1,0)	(0,4)

y las ganancias esperadas son

$$\varepsilon_I(.7,.4) = .3\times.6\times1+.3\times.4\times3+.7\times.6\times(-1)+.7\times.4\times0 = 0.12$$

y

$$\varepsilon_{II}(.7,.4) = .3\times.6\times2+.3\times.4\times(-2)+.7\times.6\times0+.7\times.4\times4 = 1.24$$

Anteriormente la estrategia maximin pura de cualquiera de los jugadores de un juego general de suma no cero era obtenida por cada jugador confinándose a su porción correspondiente del arreglo del juego, y ese también es el caso para estrategias maximin mixtas. Se supone que cada jugador está jugando el juego como un juego de suma cero en contra de un oponente irrelevante y la estrategia maximin mixta es aquella que le garantiza la mejor de las ganancias esperadas posibles. Esta ganancia constituye el *valor maximin mixto* para ese jugador en ese juego.

Ejemplo 3.10.- Ahora nos interesa encontrar las estrategias maximin y los valores del juego

(5,4)	(2,2)
(4,1)	(1,3)

En este juego, las ganancias del Jugador I son

5	2
4	1

Y este arreglo, cuando lo vemos como un juego de suma cero jugado por el Jugador I contra un oponente irrelevante, tiene un punto silla en la esquina superior derecha. Consecuentemente, la estrategia maximin mixta del Jugador I es la estrategia pura [1,0] y su valor maximin es 2.

Por otro lado, las ganancias del Jugador II aparecen en el arreglo

4	2
1	3

El cual no es estrictamente determinado. Como los remanentes son [3-2,4-1]=[1,3] se sigue que la estrategia maximin mixta es [.25,.75] y su valor maximin mixto es

$$.25\times 4+.75\times 2=2.5$$

Como las porciones del Jugador I y del Jugador II del arreglo de ganancias de cualquier juego de suma no cero son independientes entre sí, no habrá, en general, relación entre los valores maximin mixtos del Jugador I y del Jugador II.

Esto, por supuesto, representa un marcado contraste con lo que ocurre en juegos de suma cero, donde los valores mixtos son idénticos (o uno es el negativo del otro, como quiera verse).

Así que no existe un teorema de von Neumann análogo al del capítulo anterior para estrategias maximin mixtas. Sin embargo, en 1950, John Nash logró transferir el aspecto de "no lamentarse" del teorema de Von Neumann al contexto de juegos de suma no cero. La importancia de este logro fue reconocida en 1994, cuando ganó el premio Nobel de economía, disciplina en la que el concepto de punto de equilibrio se convirtió en una herramienta teórica indispensable.

El resto de esta sección está dedicado a estudiar el punto de vista de Nash. Daremos algunos ejemplos abstractos y una ilustración práctica.

Para formular esta nueva versión, supondremos otra vez que los jugadores están siendo guiados por el principio de "no lamentarse", enunciada en la Sección 3.1. En otras palabras, una vez que se ha terminado de jugar repetidamente el juego, cada jugador quiere irse a descansar con la seguridad de que ningún otro comportamiento de su parte le habría resultado en una mejor ganancia esperada.

Por razones de completes enunciaremos (sin demostrar) el Teorema de Nash en toda su generalidad, aunque algunos de sus términos podrán no ser entendidos aquí. Después de este enunciado general, propondremos la versión restringida que será con la que trabajaremos.

Teorema de Nash 3.2.1- *Cada juego de suma no cero finito de n personas tiene un punto de equilibrio.*

La discusión y los ejemplos que siguen están confinados principalmente a juegos de dos personas 2×2 de suma no cero.

Nuestra versión limitada del Teorema de Nash puede enunciarse del modo siguiente.

Teorema 3.2.2.- *En cualquier juego de tamaño* 2×2 *de suma no cero, existe un par de estrategias mixtas* $([1-\bar{p},\bar{p}],[1-\bar{q},\bar{q}])$ *tal que*

$$\varepsilon_I(\bar{p},\bar{q}) \geq \varepsilon_I(p,\bar{q}) \qquad 0 \leq p \leq 1 \tag{1}$$

$$\varepsilon_{II}(\bar{p},\bar{q}) \geq \varepsilon_{II}(\bar{p},q) \qquad 0 \leq q \leq 1 \tag{2}$$

La desigualdad (1) de este teorema establece que si ambos jugadores adoptan las estrategias estipuladas entonces la ganancia esperada del Jugador I no mejoraría en nada si el adopta cualquiera otra estrategia. En otras palabras, si emplea la estrategia $[1-\bar{p},\bar{p}]$ recomendada, el Jugador I no tendría ninguna razón para lamentarse, en tanto que el Jugador II escoja la estrategia $[1-\bar{q},\bar{q}]$.

La desigualdad (2) establece afirmaciones similares para su oponente: el Jugador II no tiene razón para lamentarse por haber empleado la estrategia $[1-\bar{q},\bar{q}]$. En tanto que el Jugador I se decida por la estrategia $[1-\bar{p},\bar{p}]$.

Definición 3.2.2.- El par de estrategias $[1-\bar{p},\bar{p}]$.,$[1-\bar{q},\bar{q}]$, descrito por el Teorema 3.2.2 constituye un *equilibrio mixto de Nash*. Los números $\varepsilon_I(\bar{p},\bar{q})$, $\varepsilon_{II}(\bar{p},\bar{q})$ *son el par de* *valores mixtos* del juego. Una *solución de equilibrio de Nash* de un juego consiste de los equilibrios mixtos de Nash junto con el par de valores mixtos.

Ninguna de las demostraciones conocidas del teorema de Nash es constructiva, es decir, no proporcionan un método para encontrar las estrategias mixtas. Sin embargo, con respecto al problema de encontrar una contraestrategia óptima puede hacerse una afirmación similar a la del Teorema 2.2.1.

Teorema 3.2.3.- *Para cada estrategia en un juego de suma no cero existe una contraaestrategia óptima pura.*

Ejemplo 3.11.- Supongamos que el Jugador I emplea la estrategia [.2,.8] en el juego

(3,2)	(2,1)
(0,3)	(4,4)

y que nos interesa encontrar una contraestrategia óptima para el Jugador II.

Sabemos que el Jugador II tiene una contraestrategia óptima que es pura de manera que podemos proceder a calcular las ganancias esperadas del Jugador II correspondientes a cada una de las dos estrategias puras disponibles para él.

Usamos los diagramas auxiliares siguientes para calcular las ganancias esperadas del Jugador II

	1	0
.2	2	1
.8	3	4

	0	1
.2	2	1
.8	3	4

Estas ganancias esperadas resultan ser 2.8 para la estrategia [1,0] y 3.4 para [0,1].

Como al Jugador II le interesa maximizar sus utilidades, se sigue que la estrategia pura [0,1], que es la que le reditúa mejor ganancia, es decir, [0,1] es la contraestrategia óptima.

Ejemplo 3.12.- Supongamos que el Jugador II emplea la estrategia [.7,.3] en el juego

(3,2)	(2,1)
(0,3)	(4,4)

La contraestrategia óptima para el Jugador I se encuentra del modo siguiente.
Como el Jugador I tiene una contraestrategia óptima que es pura, calculamos las utilidades correspondientes a las dos estrategias puras que están disponibles para él.
De los diagramas auxiliares siguientes

	.7	.3
1	3	2
0	0	4

	.7	.3
0	3	2
1	0	4

obtenemos que las ganancias esperadas del Jugador I son 2.7 para [1,0] y 1.2 para [0,1]. Como el Jugador I está interesado en maximizar su ganancia, se sigue que la estrategia pura [1,0], que es la que le reditúa una utilidad de 2.7, es una respuesta óptima para él.

Ahora volvemos a la cuestión de reconocer equilibrios de Nash. Supongamos que tu asesor matemático llega un día a tu oficina mostrándote un equilibrio de Nash mixto para un juego que te interesa. ¿Cómo puedes estar seguro de que el matemático no ha cometido un error y que ciertamente estás invirtiendo tu dinero en algo que vale la pena?
El Teorema 3.2.3 nos da un método directo para poner a prueba la estrategia propuesta. Lo único que uno necesita hacer es ver que ninguna de las estrategias puras que están a disposición de cada jugador le proporciona a ese jugador una mejor ganancia que la que resulta del equilibrio de Nash propuesto.

Ejemplo 3.13.- Verifiquemos que el par de estrategias mixtas ([.5,.5],[.4,.6]) es un equilibrio de Nash mixto para el juego

(3,2)	(2,1)
(0,3)	(4,4)

Las ganancias de los Jugadores I y II para el par de equilibrios de Nash propuesto son, respectivamente,

	.4	.6
.5	(3,2)	(2,1)
.5	(0,3)	(4,4)

$$\varepsilon_I(.5,.6) = .5\times.4\times3+.5\times.6\times2+.5\times.4\times0+.5\times.6\times4 = 2.4$$

y

$$\varepsilon_{II}(.5,.6) = .5\times.4\times2+.5\times.6\times1+.5\times.4\times3+.5\times.6\times4 = 2.5$$

¿Será posible que el Jugador I mejore su ganancia escogiendo alguna otra estrategia? Si así fuera, entonces debería existir una estrategia pura que le permitiría lograr esto.

Sin embargo, de los diagramas auxiliares siguientes obtenemos las ganancias

	.4	.6
1	(3,2)	(2,1)
0	(0,3)	(4,4)

	.4	.6
0	(3,2)	(2,1)
1	(0,3)	(4,4)

$$.4\times3+.6\times2 = 2.4 \quad \text{para} \quad [1,0]$$
$$.4\times0+.6\times4 = 2.4 \quad \text{para} \quad [0,1]$$

las cuales son ambas iguales al valor de $\varepsilon_I(.5,.6)$ calculado anteriormente.

Esto significa que el Jugador I no ganaría algo adicional si decidiera escoger una estrategia alternativa pura (o mixta). Así que el equilibrio de Nash propuesto hará que el Jugador I no tenga de que lamentarse.

Y el Jugador II, ¿tendrá de que lamentarse?

De los diagramas auxiliares siguientes calculamos las ganancias

	1	0
.5	(3,2)	(2,1)
.5	(0,3)	(4,4)

	0	1
.5	(3,2)	(2,1)
.5	(0,3)	(4,4)

$$.5\times 2+.5\times 3=2.5 \quad \text{para} \quad [1,0]$$
$$.5\times 1+.5\times 4=2.5 \quad \text{para} \quad [0,1]$$

Ambas de las cuales son iguales al valor de $\varepsilon_{II}(.5,.6)$ calculado anteriormente.

De manera que el Jugador II tampoco tiene de que lamentarse por haber usado la estrategia propuesta.

La conclusión es que el par de estrategias ([.5,.5],[.4,.6]) constituye un equilibrio de Nash para el juego dado.

En el siguiente ejemplo veremos una situación en la que el par de estrategias propuesto no constituye un equilibrio de Nash.

Ejemplo 3.14.- Consideremos el par de estrategias mixtas $\left(\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right],\left[\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right]\right)$ para el juego

(5,1)	(0,0)
(0,0)	(1,5)

Las ganancias esperadas para las estrategias dadas son

	1/6	5/6
1/3	(5,1)	(0,0)
2/3	(0,0)	(1,5)

$$\varepsilon_I\left(\frac{2}{3},\frac{5}{6}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\times 5+\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}\times 1=\frac{5}{6}$$

y

$$\varepsilon_{II}\left(\frac{2}{3},\frac{5}{6}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\times 1+\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}\times 5=\frac{17}{6}$$

Para ver si el Jugador I tiene alguna razón de lamentarse calculamos las ganancias de los diagramas auxiliares siguientes para obtener

	1/6	5/6
1	(5,1)	(0,0)
0	(0,0)	(1,5)

	1/6	5/6
0	(5,1)	(0,0)
1	(0,0)	(1,5)

$$1/6\times 5=5/6 \quad \text{para} \quad [1,0]$$
$$5/6\times 1=5/6 \quad \text{para} \quad [0,1]$$

Como estas ganancias alternativas son iguales al valor de $\varepsilon_{I}\left(\frac{2}{3},\frac{5}{6}\right)$ del Jugador I no ganará algo adicional si decide no usar la estrategia $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$.

Pasando al caso del Jugador II, los diagramas auxiliares para las ganancias esperadas de las estrategias puras alternativas dan

	1	0
1/3	(5,1)	(0,0)
2/3	(0,0)	(1,5)

	0	1
1/3	(5,1)	(0,0)
2/3	(0,0)	(1,5)

$$1/3\times 1=1/3 \quad \text{para} \quad [1,0]$$
$$2/3\times 5=10/3 \quad \text{para} \quad [0,1]$$

Como el valor de la segunda, $\frac{10}{3}=3.\overline{33}$ excede al valor $\frac{17}{6}=2.\overline{16}$ de $\varepsilon_{II}\left(\frac{2}{3},\frac{5}{6}\right)$ se sigue que el Jugador II puede mejorar su ganancia abandonando la estrategia propuesta $\left[\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right]$ en favor de la estrategia pura [0,1]. En consecuencia, el par de estrategias mixtas propuesto no constituye un equilibrio de Nash.

Presentamos a continuación una manera alternativa de visualizar las propiedades que definen a un equilibrio de Nash.

Ejemplo 3.15.- Si calculamos los valores de $\varepsilon_I(p,q)$ y $\varepsilon_{II}(p,q)$ para p=0, 0.1, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0 y q=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0 para el juego

(3,1)	(1,5)
(1,2)	(4,1)

obtenemos la Tabla 3.2, en la que se muestran estos valores.

Tabla 3.2

	q	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	0	(3,1)	(2.6,1.8)	**(2.2,2.6)**	(1.8,3.4)	(1.4,4.2)	(1,5)
	0.2	(2.6,1.2)	(2.4,1.8)	**(2.2,2.4)**	(2,3)	(1.8,3.6)	(1.6,4.2)
	0.4	(2.2,1.4)	(2.2,1.8)	**(2.2,2.2)**	(2.2,2.6)	(2.2,3)	(2.2,3.4)
p	0.6	(1.8,1.6)	(2,1.8)	**(2.2,2)**	(2.4,2.2)	(2.6,2.4)	(2.8,2.6)
	0.8	**(1.4,1.8)**	**(1.8,1.8)**	**(2.2,1.8)**	**(2.6,1.8)**	**(3,1.8)**	**(3.4,1.8)**
	1.0	(1,2)	(1.6,1.8)	**(2.2,1.6)**	(2.8,1.4)	(3.4,1.2)	(4,1)

Obsérvese que en la columna q=0.4 la primera entrada de todos los pares de ganancias tiene el valor constante de 2.2 y en la fila de p=0.8 la segunda entrada de cada par de ganancias tiene el valor constante 1.8.

En consecuencia, el par de estrategia mixta ([.2,.8],[.6,.4]) es un equilibrio de Nash pues ningún jugador ganaría nada extra si decide cambiar de estrategia mixta.

El siguiente ejemplo, que ya analizamos antes, tiene el propósito de demostrar el amplio rango de aplicaciones de la noción de equilibrio mixto de Nash. Es un ejemplo en el campo de la Economía.

Ejemplo 3.16.- En el Ejemplo 3.8 de la Sección anterior modelábamos la situación en la que los Jugadores I y II solicitaban empleo en una de dos posiciones que ofrecían salarios $2a$ y $2b$, respectivamente, como el juego

Jugador II solicita en:

Jugador I solicita en:	Compañía 1	Compañía 2
Compañía 1	(a,a)	$(2a,2b)$
Compañía 2	$(2b,2a)$	(b,b)

Notábamos que este juego siempre tiene un equilibrio de Nash puro cuyo valor exacto depende de los valores relativos de a y b. Específicamente, si ningún salario excede el doble del otro, *i.e.*, sí

$$b \leq 2a \quad \text{y} \quad a \leq 2b$$

entonces los resultados correspondientes a las ganancias $(2a,2b)$ y $(2b,2a)$ constituyen equilibrios de Nash puros. Sin embargo, en este caso el juego también posee un equilibrio de Nash mixto cuyas estrategias son

$$\left[\frac{2a-b}{a+b}, \frac{2b-a}{a+b}\right]$$

Las componentes de esta estrategia común pueden interpretarse como las predicciones de este modelo para las probabilidades de que el Jugador I (o el Jugador II) soliciten en la respectiva compañía. Es decir, si $a \leq 2b$ y $b \leq 2a$

$\frac{2a-b}{a+b}$ es la probabilidad de que el Jugador I solicite en la compañía 1

$\frac{2b-a}{a+b}$ es la probabilidad de que el Jugador I solicite en la compañía 2

Por ejemplo, si las compañías 1 y 2 ofrecen salarios de \$20,000 y \$30,000, respectivamente, entonces a=\$10,000 y b=\$15,000, y este modelo predice que la probabilidad de un jugador solicite un puesto en la compañía 2 es

$$\frac{2\times 15{,}000-10{,}000}{10{,}000+15{,}000}=\frac{20{,}000}{25{,}000}=0.8$$

Por otro lado, si *a>2b* o *b>2a* o, en otras palabras, si uno de los salarios es más del doble que el otro, entonces todos los equilibrios de Nash son los equilibrios puros que ya discutimos en la sección anterior.

Este análisis proporciona a los economistas un punto de partida para una Investigación sobre la cuestión de qué efectos tienen los diferenciales de salarios sobre la cantidad de solicitantes a diferentes puestos. Los detalles de estas investigaciones caen fuera de las pretensiones de este trabajo.

3.3.- Juegos de suma no cero de tamaño $m\times n$

Todos los conceptos desarrollados hasta aquí para juegos de tamaño 2×2 se aplican también para juegos de tamaño más grande.

Definición 3.3.1.- Un *juego de suma no cero de tamaño* $m\times n$ es un arreglo de *m* filas y *n* columnas en el que cada entrada es un par de números.

La entrada en la *i*-ésima fila y en la *j*-ésima columna se denota con $(a_{i,j},b_{i,j})$.

Dado un par de estrategias mixtas $([p_1,p_2,\ldots,p_m],[q_1,q_2,\ldots,q_n])$, las ganancias esperadas del Jugador I y del Jugador II, denotadas respectivamente con ε_I y ε_{II} se calculan mediante

ε_I = suma de todos los $p_i\times q_j\times a_{i,j}$, $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$

ε_{II} = suma de todos los $p_i\times q_j\times b_{i,j}$, $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$

Ejemplo 3.17.- Calculemos las ganancias esperadas cuando los Jugadores I y II usan el par de estrategias mixtas([.5,.2,.3],[.1,.2,.3,.4]) en el juego de suma no cero

(1,2)	(0,1)	(3,1)	(-2,0)
(1,-3)	(0,0)	(2,1)	(-1,1)
(3,2)	(1,1)	(-1,1)	(3,-1)

Del diagrama auxiliar

	.1	.2	.3	.4
.5	(1,2)	(0,1)	(3,1)	(-2,0)
.2	(1,-3)	(0,0)	(2,1)	(-1,1)
.3	(3,2)	(1,1)	(-1,1)	(3,-1)

calculamos las ganancias esperadas

$$\varepsilon_I = 0.58$$

$$\varepsilon_{II} = 0.32$$

El Teorema 3.2.3 también ofrece una guía para la búsqueda de contraestrategias óptimas en este contexto.

Ejemplo 3.18- Si el Jugador I emplea la estrategia [.5,.3,.2] en el juego del Ejemplo 3.17, una contraestrategia óptima para el Jugador II se puede encontrar de la siguiente manera.
De los diagramas auxiliares

	1	0	0	0
.5	(1,2)	(0,1)	(3,1)	(-2,0)
.2	(1,-3)	(0,0)	(2,1)	(-1,1)
.3	(3,2)	(1,1)	(-1,1)	(3,-1)

	0	1	0	0
.5	(1,2)	(0,1)	(3,1)	(-2,0)
.2	(1,-3)	(0,0)	(2,1)	(-1,1)
.3	(3,2)	(1,1)	(-1,1)	(3,-1)

	0	0	1	0
.5	(1,2)	(0,1)	(3,1)	(-2,0)
.2	(1,-3)	(0,0)	(2,1)	(-1,1)
.3	(3,2)	(1,1)	(-1,1)	(3,-1)

	0	0	0	1
.5	(1,2)	(0,1)	(3,1)	(-2,0)
.2	(1,-3)	(0,0)	(2,1)	(-1,1)
.3	(3,2)	(1,1)	(-1,1)	(3,-1)

obtenemos las siguientes ganancias esperadas para el Jugador II

$$\begin{array}{lll} \varepsilon_{II} = 1 & \text{para} & [1,0,0,0] \\ \varepsilon_{II} = -0.2 & \text{para} & [0,1,0,0] \\ \varepsilon_{II} = 1 & \text{para} & [0,0,1,0] \\ \varepsilon_{II} = -0.1 & \text{para} & [0,0,0,1] \end{array}$$

Como 1 es la mayor de estas ganancias, se sigue que tanto [1,0,0,0] como [0,0,1,0] son contraestrategias óptimas para el Jugador II.

El procedimiento usado para verificar equilibrios de Nash para juegos 2×2 se puede usar en el contexto más general de juegos $m \times n$ también.

Ejemplo 3.19.- Verifiquemos que ([.4,.4,.2],[.2,.6,0,.2]) constituye un equilibrio de Nash para el juego de suma no cero

(0,1)	(1,0)	(1,0)	(0,1)
(1,0)	(0,1)	(1,0)	(2,-1)
(1,0)	(1,0)	(1,0)	(-1,2)

Del diagrama auxiliar

	.2	.6	0	.2
.4	(0,1)	(1,0)	(1,0)	(0,1)
.4	(1,0)	(0,1)	(1,0)	(2,-1)
.2	(1,0)	(1,0)	(1,0)	(-1,2)

obtenemos las ganancias

$$\varepsilon_I = 0.6$$
$$\varepsilon_{II} = 0.4$$

Por otro lado, si el Jugador II se queda con la estrategia [.2,.6,0,.2] y el Jugador I experimenta con sus estrategias puras, obtendrá las ganancias

.6 para [1,0,0],

.6 para [0,1,0],

.6 para [0,0,1],

todas las cuales son iguales al valor de ε_I. De manera que el Jugador I no tiene razón para abandonar la estrategia dada.

Si el Jugador I se queda con la estrategia [.4,.4,.2] y el Jugador II experimenta con sus estrategias puras, obtendrá las ganancias

.4 para [1,0,0,0],

.4 para [0,1,0,0],

0 para [0,0,1,0],

.4 para [0,0,0,1],

ninguna de las cuales es mejor que ε_{II} (de hecho, una de ellas es peor).

De manera que el Jugador II tampoco tiene ninguna razón para lamentarse por haberse quedado con la estrategia propuesta, así que la estrategia dada es ciertamente un equilibrio de Nash.

3.4.- Método gráfico para encontrar equilibrios de Nash.

Como se dijo anteriormente, ninguna de las pruebas conocidas del Teorema de Nash es constructiva. En otras palabras, se demuestra la existencia de un equilibrio de Nash pero no se proporciona un método para encontrar las estrategias que lo constituyen. De hecho, pudo notarse en los ejemplos discutidos en la sección 3.3 que, cuando se proponía un equilibrio de Nash para algún juego, *no* se decía cómo habían encontrado las estrategias que lo constituían. Hay un método gráfico para encontrar esos equilibrios y lo presentaremos ahora. Para ésto es conveniente tener una fórmula explícita para la utilidad esperada cuando se usa un par de estrategias mixtas dado. La discusión que sigue se refiere al juego

	Jugador II	
Jugador I	(a_1,b_1)	(a_2,b_2)
	(a_3,b_3)	(a_4,b_4)

Si los Jugadores I y II emplean el par de estrategias mixtas $([1-p,p],[1-q,q])$ en un juego general de tamaño 2×2 de suma no cero, entonces

$$\varepsilon_I(p,q)=(a_1-a_2-a_3+a_4)pq+(a_3-a_1)p+(a_2-a_1)q+a_1$$

$$\varepsilon_{II}(p,q)=(b_1-b_2-b_3+b_4)pq+(b_3-b_1)p+(b_2-b_1)q+b_1$$

La solución que vamos a describir está basada en la siguiente observación con respecto a los valores máximos de una función lineal.

Lema 3.4.1.- *Para cualesquiera valores de m y c fijos y cualquier variable* $x, 0 \leq x \leq 1$, *el valor de mx+c es máximo*

$$\begin{array}{lll} \text{sólo para } x = 0 & \text{si} & m < 0 \\ \text{para cualesquier } 0 \leq x \leq 1 & \text{si} & m = 0 \\ \text{sólo para } x = 1 & \text{si} & m > 0 \end{array}$$

La Figura 3.1 contiene gráficas típicas de los segmentos de recta $y=mx+c$, $0 \leq x \leq 1$ en cada uno de los casos descritos en el Lema 1, y la justificación de esta afirmación se sigue del hecho de que el valor máximo de $mx+c$ corresponde al punto más alto en la gráfica de $y=mx+c$.

Los equilibrios de Nash para juegos de suma no cero de tamaño 2×2 se localizan en la intersección de dos gráficas. Una de estas gráficas describe todos los pares de estrategias mixtas que harían que el Jugador I no tenga de qué lamentarse y la otra describe todos los pares de estrategias mixtas que harían que el Jugador II no tenga de qué lamentarse

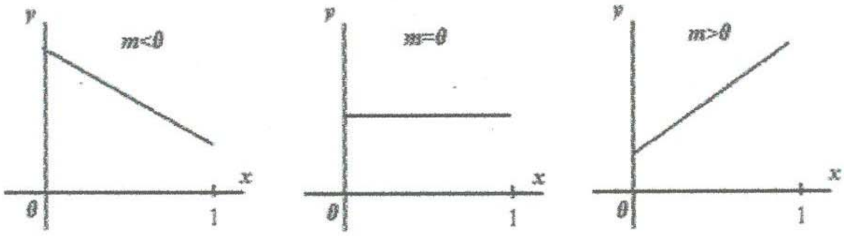


Figura 3.1

Gráfica del Jugador I para no lamentarse. ¿Cuál par de estrategias mixtas $([1-p, p],[1-q, q])$ servirá para que el Jugador I no se lamente? Cuando se emplea el par $([1-p, p],[1-q, q])$, la esperanza del Jugador I en el juego es

$$\varepsilon_I(p,q) = (a_1 - a_2 - a_3 + a_4)pq + (a_3 - a_1)p + (a_2 - a_1)q + a_1$$

Como el efecto sobre el valor de $\varepsilon_I(p,q)$ al cambiar p depende de los coeficientes de p, tiene entonces sentido factorizar la variable p siempre que sea posible y escribir

$$\varepsilon_I(p,q) = mp + c$$

donde

$$m = (a_1 - a_2 - a_3 + a_4)q + (a_3 - a_1) \quad , \quad c = (a_2 - a_1)q + a_1$$

Ahora, usando el Lema 3.4.1, se sigue que el Jugador I no tendrá de qué lamentarse en los siguientes tres casos:

$$p = 0 \ \text{ si } \ m < 0 \ ; \ 0 \le p \le 1 \ \text{ si } \ m = 0 \ ; \ p = 1 \ \text{ si } \ m > 0$$

El par de estrategias correspondiente $([1-p,p],[1-q,q])$ se puede graficar en un sistema cartesiano con p en el eje horizontal y q en el eje vertical.

Ejemplo 3.20.- Dibujemos la gráfica de "no lamentarse" para el Jugador I en el juego

	Jugador II	
Jugador I	(3,2)	(2,4)
	(2,3)	(4,–3)

En este caso

$$m = (a_1 - a_2 - a_3 + a_4)q + (a_3 - a_1) = 3q - 1$$

Entonces los 3 casos de (2) son

$$p = 0 \ \text{ si } \ m < 0 \ , \ \text{si } 3q - 1 < 0 \ , \ \text{si } 3q < 1 \ , \text{si } \ q < 1/3$$

$$0 \le p \le 1 \ \text{ si } \ m = 0 \ \text{ si } \ 3q - 1 = 0, \ \text{si } 3q = 1 \ , \ \text{si } \ q = 1/3$$

$$p = 1 \ \text{ si } \ m > 0 \ , \ \text{si } 3q - 1 > 0 \ , \ \text{si } 3q > 1 \ , \text{si } \ q > 1/3$$

Tomando en cuenta que $0 \leq q \leq 1$, la gráfica del Jugador I de ``no lamentarse" consiste en tres segmentos de recta que contienen, respectivamente, todos aquellos puntos *(p,q)* tales que

$$p = 0 \qquad\qquad 0 \leq p \leq 1 \qquad\qquad p = 1$$
$$0 \leq q \leq 1/3 \qquad\qquad q = 1/3 \qquad\qquad 1/3 \leq q \leq 1$$

Un dibujo de la gráfica del Jugador I de "no lamentarse" aparece en la Figura 3.2.

La Figura 3.2 debe interpretarse del modo siguiente. El segmento vertical sobre el eje q nos dice que el Jugador I debe emplear la estrategia pura [1,0] cuando el Jugador II escoja $q < 1/3$. El segmento horizontal significa que cuando el Jugador II use la estrategia [2/3,1/3] entonces la ganancia del Jugador I no dependerá de su estrategia. La ganancia esperada del Jugador I será de

$$c = (a_2 - a_1)q + a_1 = \frac{8}{3}$$

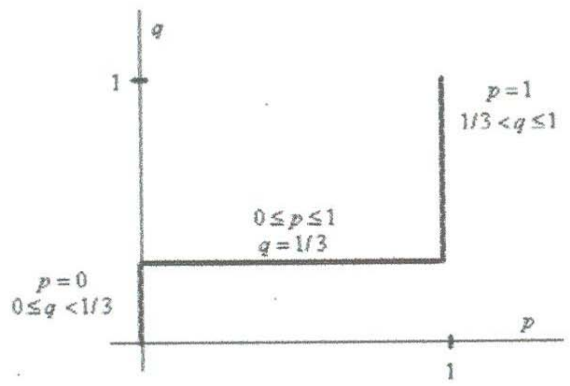


Figura 3.2.
Gráfica del Jugador I de "no lamentarse"

Independientemente de cómo se comporte el Jugador I. Finalmente, el segmento vertical sobre $p = 1$ nos dice que el Jugador I debe emplear la estrategia [0,1] cuando el Jugador II escoja $q > 1/3$.

Gráfica del Jugador II para no lamentarse.- ¿Cuál par de estrategias mixtas $([1-p,p],[1-q,q])$ servirá para que el Jugador II no tenga de qué lamentarse? Cuando se emplea el par $([1-p,p],[1-q,q])$, la esperanza del Jugador II en el juego es

$$\varepsilon_{II}(p,q)=(b_1-b_2-b_3+b_4)pq+(b_3-b_1)p+(b_2-b_1)q+b_1$$

Como el efecto sobre el valor de $\varepsilon_{II}(p,q)$ al cambiar q depende de los coeficientes de q, tiene sentido factorizar la variable q siempre que sea posible y escribir

$$\varepsilon_{II}(p,q)=m'q+c'$$

Donde

$$m'=(b_1-b_2-b_3+b_4)p+(b_2-b_1) \quad , \quad c'=(b_3-b_1)p+b_1$$

Del Lema 3.4.1 se sigue que el Jugador II no tendrá que lamentarse en los siguientes tres casos:

$$q=0 \text{ si } m'<0 \;;\; 0\le q\le 1 \text{ si } m'=0 \;;\; q=1 \text{ si } m'>0$$

Los pares de estrategias mixtas que harán que el Jugador II no tenga de qué lamentarse se puede graficar ahora en el sistema de coordenadas pq que se usó para la gráfica de no lamentarse del Jugador I.

Ejemplo 3.21.- La gráfica de no lamentarse para el Jugador II para el juego del Ejemplo 3.20,

(3,2)	(2,4)
(2,3)	(4,−3)

se obtiene del modo siguiente. Como

$$m'=(b_1-b_2-b_3+b_4)p+(b_2-b_1)=-8p+2$$

los tres casos de (3) son ahora:

$$q = 0 \text{ si } m' < 0 \text{ , si } -8p + 2 < 0 \text{ , si } -8p < -2 \text{ ,si } p > 1/4$$

$$0 \leq q \leq 1 \text{ si } m' = 0, \text{ si } -8p + 2 = 0, \text{ si } -8p = -2 \text{ , si } p = 1/4$$

$$q = 1 \text{ si } m' > 0 \text{ , si } -8p + 2 > 0 \text{ , si } -8p > -2 \text{ ,si } p < 1/4$$

Tomando en cuenta que $0 \leq p \leq 1$ la gráfica del Jugador II de no lamentarse consiste de los tres segmentos de recta que contienen, respectivamente, todos los puntos *(p,q)* tales que

$q = 0$	$0 \leq q \leq 1$	$q = 1$
$1/4 < p \leq 1$	$p = 1/4$	$0 \leq p \leq 1/4$

El dibujo de la gráfica de no lamentarse del Jugador II aparece en la Figura 3.3.

La gráfica de no lamentarse del Jugador II debe interpretarse de la manera siguiente. El segmento horizontal corto que está justo a la derecha del eje q nos dice que el Jugador II debe usar la estrategia pura [0,1] cuando el Jugador I usa $p < 1/4$. El segmento vertical se interpreta diciendo que si el Jugador I emplea la estrategia mixta [3/4,1/4] entonces la ganancia esperada del Jugador II no depende de su estrategia; él puede esperar la misma ganancia de

$$c' = (b_3 - b_1)p + b_1 = \frac{9}{4}$$

independientemente de su comportamiento. Finalmente, el segmento horizontal sobre el eje p nos dice que el Jugador II debe usar la estrategia pura [1,0] cuando Jugador I usa $p > 1/4$.

La gráfica de no lamentarse de cada jugador consiste de aquellos pares de estrategias mixtas $([1-p, p],[1-q, q])$ que ponen a ese jugador en la posición de no tener que lamentarse de su desición. Como el equilibrio de Nash consiste de aquellos pares de estrategias $([1-p, p],[1-q, q])$ que hacen que ninguno de los jugadores tengan que lamentarse, entonces el equilibrio de nash se encuentra en la intersección de las gráficas de no lamentarse del Jugador I y del Jugador II.

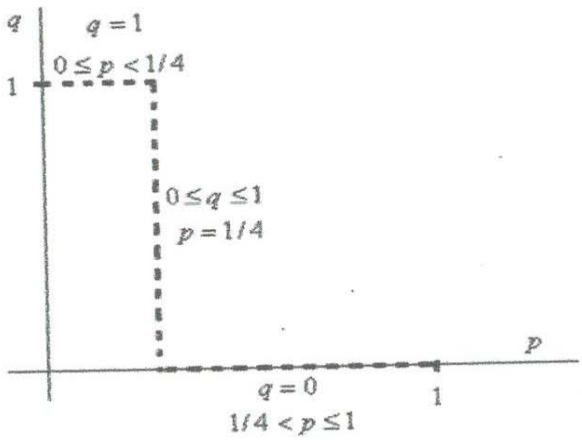


Figura 3.3

Gráfica del Jugador II de no lamentarse

Ejemplo 3.22.- Para encontrar el punto de equilibrio de Nash para el juego de los ejemplos anteriores es ahora solamente necesario sobreponer las gráficas de las Figuras 3.2 y 3.3 para obtener la Figura 3.4. Las gráficas de no lamentarse de los Jugadores I y II se intersectan en el punto (encerrado en un círculo) (1/4,1/3), que es el único punto de equilibrio de Nash de este juego.

En este equilibrio el Jugador I usará la estrategia mixta $\left[1-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]=\left[\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right]$ y el Jugador II usará la estrategia mixta $\left[1-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]=\left[\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right]$. Se puede verificar directamente que estas estrategias constituyen un equilibrio de Nash mixto:

$$\varepsilon_I(p,1/3) = (3-2-2+4)\times p\times 1/3 + (2-3)\times p + (2-3)\times 1/3 + 3$$
$$= p - p - 1/3 + 3 = 8/3$$
$$_{II}(1/4,q) = (2-4-3-3)\times q\times 1/4 + (4-2)\times q + (3-2)\times 1/4 + 2$$
$$= -2q + 1/4 + 2q + 2 = 9/4.$$

De manera que ninguno de los jugadores ganará nada extra si abandona la estrategia de Nash. De estos cálculos se sigue que el par de ganancias asociado con este equilibrio es (8/3,9/4).

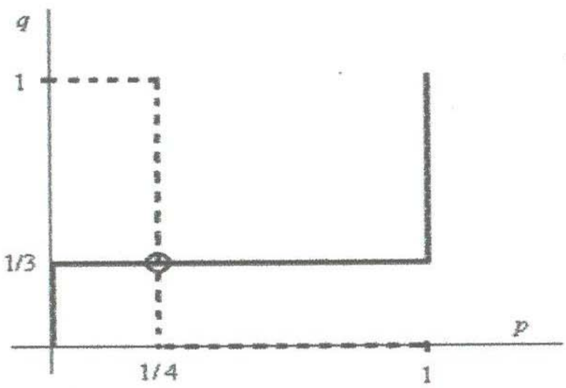


Figura 3.4.-

Localizando un Equilibrio de Nash

Como lo demuestra el siguiente ejemplo, un juego puede tener equilibrios de Nash tanto puros como mixtos

Ejemplo 3.23.- Encontremos los puntos de equilibrio de Nash del juego

(3,2)	(2,1)
(0,3)	(4,4)

Para construir la gráfica de no lamentarse del Jugador I calculamos

$$m = (3\text{-}2\text{-}0+4)q+(0\text{-}3) = 5q\text{-}3.$$

Se sigue de (2) que en la gráfica de no lamentarse del Jugador I se tiene

$$p=0 \ \text{ si } \ m<0 \ , \text{ si } 5q-3<0 \ , \text{ si } 5q<3 \ , \text{si } \ q<3/5$$

$$0 \leq p \leq 1 \ \text{ si } \ m=0 \ \textit{si} \ \ 5q-3=0, \text{ si } 5q=3 \ , \text{si } \ q=3/5$$

$$p=1 \ \text{ si } \ m>0 \ , \text{ si } 5q-3>0 \ , \text{ si } 5q>3 \ , \text{si } \ q>3/5$$

Tomando en cuenta que $0 \leq q \leq 1$, la gráfica del Jugador I de "no lamentarse" consiste en tres segmentos de recta que contienen, respectivamente, todos aquellos puntos *(p,q)* tales que

$p=0$	$0 \leq p \leq 1$	$p=1$
$0 \leq q \leq 3/5$	$q=3/5$	$3/5 \leq q \leq 1$

La gráfica del Jugador I de "no lamentarse" es la línea sólida que aparece en la Figura 3.5. Para construir la gráfica de no lamentarse del Jugador II calculamos

$$m' = (2-1-3+4)p+(1-2) = 2p-1$$

Se sigue de (3) que en la gráfica de no lamentrase del Jugador II se tiene

$$q=0 \ \text{ si } \ m'<0 \ , \text{ si } 2p-1<0 \ , \text{ si } 2p<1 \ , \text{si } \ p<1/2$$

$$0 \leq q \leq 1 \ \text{ si } \ m'=0, \ \textit{si} \ \ 2p-1=0, \text{ si } 2p=1 \ , \text{si } \ p=1/2$$

$$q=1 \ \text{ si } \ m'>0 \ , \text{ si } 2p-1>0 \ , \text{ si } 2p>1 \ , \text{si } \ p>1/2$$

Tomando en cuenta que $0 \leq p \leq 1$, la gráfica del Jugador II de "no lamentarse" consiste en tres segmentos de recta que contienen, respectivamente, todos aquellos puntos *(p,q)* tales que

$q=0$	$0 \leq q \leq 1$	$q=1$
$0 \leq p \leq 1/2$	$p=1/2$	$1/2 \leq p \leq 1$

La gráfica del Jugador II de "no lamentarse" es la línea punteada que aparece en la Figura 3.5.

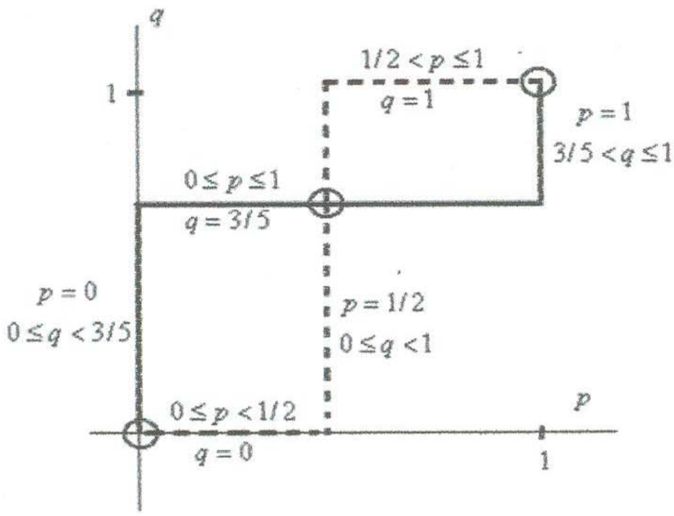


Figura 3.5.

Localizando Equilibrios de Nash

Los puntos de equilibrio de Nash están dados por las intersecciones (encerradas en círculos) de estas dos gráficas de no lamentarse. De manera que hay tres equilibrios, correspondientes a $O : (p=0,q=0)$, $A : (p=1/2,q=3/5)$ y $B : (p=1,q=1)$, respectivamente. En otras palabras, el equilibrio O indica que cada jugador debe usar la estrategia pura [1,0]; el equilibrio A indica que el Jugador I usa la estrategia [0.5,0.5] y el Jugador II usa [.4,.6] y en el equilibrio B ambos jugadores usan la estrategia pura [0,1]. Un simple vistazo al juego servirá para verificar que O y B constituyen equilibrios de Nash puros. También puede verificarse directamente que A es un punto de equilibrio:

$$\varepsilon_I(p,0.6) = (3-2-0+4)\times p\times .6+(0-3)\times p+(2-3)\times .6+3 = 3p-3p-.6+3 = 2.4$$

$$\varepsilon_{II}(0.5,q) = (2-1-3+4)\times q\times .5+(1-2)\times q+(3-2)\times .5+2 = q+.5-q+2 = 2.5$$

De manera que ninguno de los jugadores ganaría nada extra si escoje una estrategia diferente de la estrategia del equilibrio. De estos cálculos también se sigue que el par de ganancias asociadas con el equilibrio mixto de Nash A es (2.4,2.5)

La gráfica del siguiente ejemplo es muy diferente de las dos anteriores.

Ejemplo 3.24.- Encontremos el equilibrio de Nash del juego

(1,4)	(2,2)
(2,2)	(4,1)

Para construir la gráfica de no lamentarse del Jugador I calculamos

$$m = (1-2-2+4)q + (2-1) = q+1.$$

Se sigue de (2) que en la gráfica de no lamentarse del Jugador I se tiene

$$p=0 \text{ si } m<0 \text{ , si } q+1<0 \text{ , si } q<-1$$

$$0 \leq p \leq 1 \text{ si } m=0 \text{ si } q+1=0, \text{ si } q=-1$$

$$p=1 \text{ si } m>0 \text{ , si } q+1>0 \text{ , si } q>-1$$

Tomando en cuenta que $0 \leq q \leq 1$, las primeras dos posibilidades no representan ninguna contribución a la gráfica de no lamentarse del Jugador I. En consecuencia, esta gráfica consiste del segmento de recta

$$p=1$$
$$0 \leq q \leq 1$$

La gráfica del Jugador I de no lamentarse es la línea sólida que aparece en la Figura 3.6.

Para construir la gráfica de no lamentarse del Jugador II calculamos

$$m' = (4-2-2+1)p + (2-4) = p-2.$$

Se sigue de (3) que en la gráfica de no lamentarse del Jugador II se tiene

$$q = 0 \text{ si } m' < 0 \text{ , si } p - 2 < 0 \text{ , si } p < 2$$

$$0 \leq q \leq 1 \text{ si } m' = 0 \text{, si } p - 2 = 0 \text{, si } p = 2$$

$$q = 1 \text{ si } m' > 0 \text{ , si } p - 2 > 0 \text{ , si } p > 2$$

Tomando en cuenta que $0 \leq p \leq 1$, vemos que las ultimas dos posibilidades no representan ninguna contribución a la gráfica. En consecuencia, la gráfica de no lamentarse del Jugador II consiste del segmento de recta

$$q = 0$$
$$0 \leq p \leq 1$$

La gráfica del Jugador II de no lamentarse es la línea punteada que aparece en la Figura 3.6.

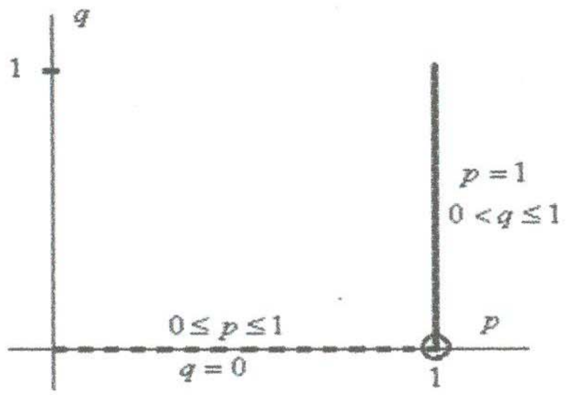


Figura 3.6.
Localizando Equilibrios de Nash

El punto de equilibrio de Nash está dado por la intersección (encerrada en un círculo) de las dos gráficas. En este punto tenemos $p=1$ y $q=0$. Consecuentemente este equilibrio de Nash consiste de las estrategias puras [0,1] para el Jugador I y [1,0] para el Jugador II con un par de ganancias de (2,2). Es interesante notar que las estrategias puras [1,0] para el

Jugador I y [0,1] para el Jugador II no constituyen un equilibrio, aunque con ellas se obtiene exactamente el mismo par de ganancias (2,2).

Ejemplo 3.25.- En el caso de los solicitantes de empleo, se modeló una situación en la que el Jugador I y el Jugador II podían solicitar trabajo en uno de dos puestos en los que se ofrecían salarios *2a y 2b*, respectivamente, mediante el juego

		Jugador II solicita en:	
		Compañía 1	Compañía 2
Jugador I solicita en:	Compañía 1	(a,a)	$(2a,2b)$
	Compañía 2	$(2b,2a)$	(b,b)

Notábamos que este juego siempre tiene un equilibrio de Nash puro cuyos valores exactos dependen de los valores relativos de *a y b*. Ahora diremos cómo encontrar el equilibrio de Nash. Para construir la gráfica de no lamentarse del Jugador I calculamos

$$m = (a\text{-}2a\text{-}2b + b)q + (2b\text{-}a) = -(a + b)q + (2b\text{-}a)$$

Se sigue de (2) que

$p = 0$ si $m < 0$, si $-(a+b)q + (2b-a) < 0$, si $-(a+b)q < -(2b-a)$, si $q > (2b-a)/(a+b)$.

$0 \leq p \leq 1$ si $m=0$ *si* $-(a+b)q + (2b-a) = 0$, si $-(a+b)q = -(2b-a)$, si $q = (2b-a)/(a+b)$.

$p = 1$ si $m > 0$, si $-(a+b)q + (2b-a) > 0$, si $-(a+b)q > -(2b-a)$, si $q < (2b-a)/(a+b)$.

Si $a < 2b$ y $b < 2a$

Entonces

$$0 < (2b-a)/(a+b) < 1.$$

En este caso, la gráfica de no lamentarse del Jugador I está representada en la gráfica sólida de la Figura 3.7. Como las posiciones del Jugador I y del Jugador II son intercambiables, mediante un argumento similar indica que la gráfica de no lamentarse del Jugador II está dada por la línea punteada de la Figura 3.7.

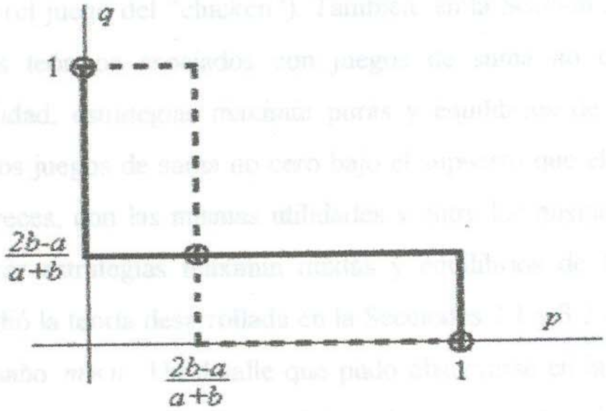


Figura 3.7.

Equilibrio de Nash ara los Solicitantes de Empleo

Dos de estos equilibrios de Nash son puros e idénticos a los que ya discutiamos en la sección anterior. El tercero,

$$\left[1-\frac{2b-a}{a+b},\frac{2b-a}{a+b}\right]=\left[\frac{2a-b}{a+b},\frac{2b-a}{a+b}\right]$$

es la estrategia equilibrio de Nash mixta tanto para el Jugador I como para el Jugador II. El significado de este equilibrio de Nash en este juego ya fue discutido.

3.5.- Conclusiones

Hemos presentado en este Capítulo algunos de los elementos para estudiar juegos de suma no cero. Como puede verse desde la misma definición, hecha en la Sección 3.1, la teoría de este tipo de juegos puede usarse para modelar situaciones reales importantes en áreas como Economía (el juego de los buscadores de empleo), Ciencias Sociales (el dilema del prisionero) y Política (el juego del "chicken"). También, en la Sección 3.1 presentamos los principales conceptos teóricos asociados con juegos de suma no cero, como son, el principio de racionalidad, estrategias maximin puras y equilibrios de Nash puros. En la sección 3.2 estudiamos juegos de suma no cero bajo el supuesto que el juego se repite una cantidad grande de veces, con las mismas utilidades y entre los mismos jugadores, y esto nos llevó a considerar estrategias maximin mixtas y equilibrios de Nash mixtos. En la Sección 3.3 se extendió la teoría desarrollada en la Secciones 3.1 y 3.2 al caso de juegos de suma no cero de tamaño $m \times n$. Un detalle que pudo observarse en la Sección 3.2 es que cuando se ejemplificaba el concepto de equilibrio de Nash mixto, siempre se partió del supuesto de que tal equilibrio era conocido. En la sección 3.4 se presentó un método gráfico para encontrar el equilibrio de Nash mixto y las estrategias que lo constituyen.

Apéndice

Teorema 2.2.1.- *Para cada estrategia existe una contraestrategia óptima pura.*

Prueba. Supongamos que el Jugador I usa la estrategia fija $[1-p_0, p_0]$ en el juego

a	b
c	d

El jugador II debe determinar qué estrategia $[1-q, q]$ usar para minimzar la ganancia esperada, $E_I(p_0, q)$, del Jugador I. Del diagrama auxiliar siguiente

	$1-q$	q
$1-p_0$	a	b
p_0	c	d

obtenemos

$$\begin{aligned} E_I(p_0,q) &= a(1-p_0)(1-q) + b(1-p_0)q + cp_0(1-q) + dp_0 q \\ &= \alpha q + \beta \end{aligned} \qquad (1)$$

donde $\alpha = -a + p_0 a + b - p_0 c + p_0 d$ y $\beta = a - p_0 a + p_0 c$.

Como (1) es una función lineal en la variable q y que varía en el rango $0 \le q \le 1$, vemos que (1) alcanza su máximo en $q = 0$ si $\alpha > 0$, en $q = 1$ si $\alpha < 0$ y en $q \in [0,1]$ si $\alpha = 0$.

Un argumento similar aplica si el Jugador II escoge una estrategia fija $[1-q_0, q_0]$ y el Jugador I debe buscar una contraestrategia óptima.

Teorema 2.3.3.- *El juego*

a	b
c	d

es no estrictamente determinado, si y sólo si

$$(d-c)\cdot(a-b)>0.$$

Prueba. Demostraremos esta afirmación considerando los siguientes casos.

$$a \text{ no es punto silla} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a>b \\ \text{o} \\ a<c \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a-b>0 \\ \text{o} \\ a-c<0 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ \\ (2) \end{matrix}$$

$$b \text{ no es punto silla} \Rightarrow \begin{Bmatrix} b>a \\ \text{o} \\ b<d \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} b-a>0 \\ \text{o} \\ b-d<0 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (3) \\ \\ (4) \end{matrix}$$

$$c \text{ no es punto silla} \Rightarrow \begin{Bmatrix} c>d \\ \text{o} \\ c<a \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} c-d>0 \\ \text{o} \\ c-a<0 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (5) \\ \\ (6) \end{matrix}$$

$$d \text{ no es punto silla} \Rightarrow \begin{Bmatrix} d>c \\ \text{o} \\ d<b \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} d-c>0 \\ \text{o} \\ d-b<0 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (7) \\ \\ (8) \end{matrix}$$

Si se satisface (1), entonces no se satisface (3), de manera que se debe satisfacer (4), pero entonces no se satisface (8), por lo que debe satisfacerse (7). Es decir, $a-b>0$ implica que $d-c>0$, y entonces se satisface la afirmación.

Si se satisface (2), no se satisface (6), por lo que debe satisfacerse (5); entonces no se satisface (7), por lo que se satisface (8); entonces no se satisface (4); entonces se satisface (3). Como se satisfacen (3) y (5), se sigue la conclusión del teorema.

Bibliografía.

[1.] Berge, C., Ghouila, H. A. *Programas, Juegos y sistemas de Transporte*. Compañía Editorial Continental, S. A., 1965.

[2.] Dixit, A., Nalebuff, B., *Thinking Strategically*, W.W. Norton & Company, NewYork, 1981 (Versión en castellano por Antonio Bosch, 1992)

[3.] Gass, S. I. *Programación Lineal*, CECSA, 1975.

[4.] Lipschitz, S., *Matemáticas Finitas*, MacGraw-Hill, 1972

[5.] Rorres, C., Anton, H., *Aplicaciones de Algebra Lineal*, LIMUSA, 1979

[6.] Samuelson, P., *Economía*, MacGraw-Hill, 1982

[7.] Sánchez Sánchez, F., *Introducción a la Matemática de los Juegos*, Siglo XXI Editores, 1993

[8.] Zen'kovitch S. S., Valencia, M. A., *Elementos de Programación Matemática*, Universidad de Sonora, 1995.