UNIVERSIDAD DE SONORA

EL SABER DE MIS HIJOS HARÁ MI GRANDEZA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

DETERMINACIÓN DEL DUAL DE ALGUNOS ESPACIOS CLÁSICOS EN ANÁLISIS

T E S I S

Que para obtener el título de:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

P r e s e n t a

JESSICA YUNIVER SANTANA BEJARANO

Director de Tesis:

DRA. MARTHA DOLORES GUZMÁN PARTIDA

Hermosillo, Sonora, México

Agosto 2006

DETERMINACIÓN DEL DUAL DE ALGUNOS ESPACIOS CLÁSICOS EN ANÁLISIS

JESSICA YUNIVER SANTANA BEJARANO
UNIVERSIDAD DE SONORA

A MIS PADRES
Vitaliano Santana Rojas
Margarita Bejarano Murrieta

A ellos por su constante dedicación y esfuerzo en formarme y educarme.

A mis hermanos
Vitaliano, Dupret, Hildegardo,
Uriel, Edna, Cinthya, Jaziel y Belem.

A mis compañeros
Enrique Rodríguez Castillo
Marysol Navarro Burruel

A la memoria de mi abuela
Belem Murrieta Reyna

AGRADECIMIENTOS

Agradezco profundamente el apoyo brindado por mi directora de tesis

Dra. Martha Dolores Guzmán Partida

Por orientarme y conducirme a desarrollar el tema de este trabajo académico. Además, por el tiempo que me brindo no sólo para abordar el presente trabajo sino también por haber sido una de mis maestras, cuya calidad humana e intelectual, me motivaron e influyeron en mi formación universitaria.

Agradezco también al comité de revisión de tesis:

Dr. Martín Gildardo García Alvarado
M. C. Carlos Alberto Robles Corbalá
M. C. Eduardo Tellechea Armenta

Por sus observaciones al presente trabajo.

Además, los exhorto a que sigan preparando profesionistas como lo han hecho hasta ahora, que sigan despertando en ellos el gusto y sed de aprender las maravillas de las matemáticas y con todo lo anterior llegar a cultivar en ellos la emoción, entusiasmo y construcción del conocimiento de esta área de la ciencia, que un verdadero matemático forma en sus discípulos.

Índice general

Introducción

El objetivo de este trabajo es dar una presentación rigurosa y detallada de los duales topológicos de algunos espacios clásicos en el Análisis Matemático, tales como los espacios de sucesiones l^p, el espacio de funciones continuas $C([a,b])$ y los espacios de funciones L^p. Como veremos a lo largo del trabajo, el estudio de cada uno de estos casos particulares lleva consigo el manejo de herramienta matemática que incluso por sí misma reviste un gran interés, además de su trascendencia. Tal es el caso del Teorema de Hahn-Banach, de las bases de Schauder, del Teorema de Radon-Nikodým, sólo por mencionar algunas.

Cuando se estudian espacios normados X, típicamente uno está interesado en el estudio de los funcionales lineales continuos del espacio en el campo base, es decir, en el estudio del espacio dual continuo X^*, el cual resulta ser un espacio de Banach. Como es bien sabido, cuando X tiene dimensión finita, X y X^* coinciden lo cual ya no ocurre en dimensión infinita. Los ejemplos que se abordan en este trabajo lo ponen de manifiesto.

El espacio dual X^* puede ser utilizado para definir nuevas topologías en X (tal es el caso de la topología débil), que nos permitan "subsanar" carencias topológicas de X, en relación a propiedades de compacidad o convergencia. Asimismo, propiedades del dual se pueden ver reflejadas en el espacio original, tal es el caso de la separabilidad.

Los espacios duales juegan un papel muy importante en el Análisis Funcional, en la teoría de Ecuaciones Diferenciales Parciales y en la Física Matemática; por ejemplo, en modelos de sistemas físicos los posibles estados del sistema pueden ser asociados a funcionales lineales continuos en espacios de Banach apropiados.

Por estas razones y porque revisten interés en sí mismos, los espacios duales se han estudiado ampliamente. Hay dos posibles direcciones en las que se puede proceder: determinando los duales de espacios de Banach particulares, o bien, demostrando resultados que relacionen propiedades del espacio con propiedades de su dual. Como lo comentamos anteriormente, nosotros procederemos en la primera dirección abordando los ejemplos mencionados.

Este trabajo está dividido en cuatro capítulos y la lectura y comprensión de éste supone del lector solamente un bagaje mínimo de Análisis y Algebra Lineal.

En el Capítulo 1 se presentan algunos de los conceptos y resultados que serán utilizados a lo largo del trabajo. De mención especial es el teorema de Hahn-Banach y algunas de sus consecuencias.

En el capítulo 2, usando el concepto de base de Schauder determinamos los duales de los espacios de sucesiones l^p, $1 \leq p < \infty$, que son los parientes infinito-dimensionales más cercanos de los espacios de dimensión finita.

En el Capítulo 3 determinamos el dual del espacio de funciones continuas $C([a,b])$. El espacio obtenido, $NBV([a,b])$ resulta ser un subespacio notable del conocido espacio de funciones de variación acotada en $[a,b]$. Debe comentarse que no presentamos aquí la versión clásica del Teorema de Riesz-Markov que establece que $C([a,b])^*$ es el espacio de medidas de Borel complejas en $[a,b]$; en su lugar, presentamos una versión que todavía nos proporciona funciones para la representación del dual. Sin embargo, puede demostrarse que existe una correspondencia biyectiva entre medidas de Borel complejas en $[a,b]$ y el espacio de $NBV([a,b])$ (ver [8, Teo. 19.48]).

Finalmente, en el Capítulo 4 determinamos los duales de los espacios $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$, $1 \leq p < \infty$. Presentamos dos demostraciones de este resultado. La primera de ellas, es la clásica prueba que utiliza el Teorema de Radon-Nikodým y además, el hecho de que la medida μ es $\sigma-$finita. La segunda demostración, que funciona sólo para el caso $1 < p < \infty$, se debe a E. J. McShane (ver [10] y [8, Sección 15]) y no requiere que μ sea σ-finita. Lo interesante de esta prueba es que utiliza herramienta elemental de Análisis y Teoría de la Medida y no requiere de un resultado tan sofisticado como el Teorema de Radon-Nikodým.

Esperamos que este trabajo de tesis pueda servir como referencia para el estudiante y el profesor en los cursos de Análisis Matemático y Análisis Funcional de la Licenciatura en Matemáticas.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo consta de siete secciones en las que haremos un recuento de algunos conceptos y resultados, como por ejemplo los conceptos de espacio normado, espacio de Banach, el espacio $L(X,Y)$, espacio dual, bases de Hamel. Un resultado fundamental en el Análisis Funcional lo constituye el Teorema de Hahn-Banach, el cual enunciaremos y demostraremos en este capítulo, además de exhibir algunas consecuencias notables. Los resultados aquí presentados serán utilizados en los capítulos posteriores de este trabajo.

1.1. Espacios Normados

Sea X un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Una norma en X es una función

$$\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que satisface las siguientes condiciones:

1. $\|x\| \geq 0$ para toda $x \in X$.

2. Si $\|x\| = 0$ entonces $x = 0$.

3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ para toda $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in X$.

4. La **desigualdad del triángulo:**

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ para toda } x, y \in X.$$

La pareja $(X, \|.\|)$ se llama **espacio normado.**

Si $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función que verifica las propiedades 3 y 4 llamamos a p una **seminorma.** Evidentemente, toda norma es una seminorma, sin embargo el recíproco no es válido en general.

1.2. Espacios de Banach

Ahora podemos hablar de **espacios normados** lineales como espacios métricos.

Definición 1.1 *Diremos que un espacio métrico* (X, d) *es completo si toda* ***sucesión de Cauchy*** *en* X *converge en* X.

Una pregunta que nos podemos hacer es si el espacio es completo o no.

Definición 1.2 *Sea* $(X, \|.\|)$ *un* ***espacio normado****. Diremos que* $(X, \|.\|)$ *es un* ***espacio de Banach*** *si* (X, d) *es un espacio métrico completo donde* d *es la distancia inducida por la norma, es decir,* $d(x, y) = \|x - y\|$.

Ejemplos de **espacios de Banach** son:

1.- Sea $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, ..., x_n) : x_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, ..., n\}$ y

$$\|x\|_2 = \left[\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

2.- $(C([a, b]), \|.\|_\infty)$ es de **Banach**, donde

$C([a, b]) = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{K} \; / \; f \text{ es continua}\}$ y

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

3.- $(B([a, b]), \|.\|_\infty)$ es de **Banach**, aquí:

$B([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{K} \ / \ f \ \text{ es acotada}\}$ y

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|\,.$$

Como $[a,b]$ es compacto, tenemos que $C([a,b]) \subset B([a,b])$, es decir $C([a,b])$ es un subespacio de $B([a,b])$.

4.- Si $1 \leq p < \infty$ $\left(l^p, \|\cdot\|_p\right)$ es de **Banach**, donde

$$l^p = \left\{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty\right\} \text{ y}$$

$$\|x\|_p = \left[\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

En este caso, para ver que efectivamente $\|x\|_p$ es una norma para l^p se hace uso de las siguientes desigualdades:

Lema 1.1 *(Desigualdad de Young): Sean a, b números reales no negativos, $p > 1$ y q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.*

Un par de números con la propiedad que cumplen p y q en la **desigualdad de Young** se llaman exponentes conjugados.

La desigualdad anterior se usa para demostrar la siguiente desigualdad:

Lema 1.2 *(Desigualdad de **Hölder**): Sean* $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ *números reales,* $p > 1$ *y* $q \in \mathbb{R}$ *tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Para probar el siguiente resultado se hace uso de la **desigualdad de Hölder**:

Lema 1.3 *(Desigualdad de **Minkowski**): Sean* $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ *números reales,* $p > 1$. *Entonces.*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

5.- $(l^\infty, \|.\|_\infty)$ es de **Banach**, donde

$l^\infty = \left\{x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : (x_n) \text{ está acotada}\right\}$ y

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

6.- $(c, \|.\|_\infty)$ es de **Banach**. En este ejemplo,

$c = \left\{x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : (x_n)_{n=1}^\infty \text{ converge}\right\}$ y

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

7.- $(c_0, \|.\|_\infty)$ es de **Banach**. En este ejemplo,

$c_0 = \left\{x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N} : x_n \longrightarrow 0\right\}$ y

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| .$$

8.- Si $1 \leq p < \infty$ $\left(L^p(X,\mathcal{F},\mu), \|.\|_p\right)$ es de **Banach,** donde

$L^p(X,\mathcal{F},\mu) = \left\{[f] : \int |f|^p \, d\mu < \infty\right\}.$

Aquí $(X,\mathcal{F},\mu)$ es un espacio de medida, f es medible,

$[f] = \{g : f = g \;\; \mu\text{-casi en todas partes}\}$ y

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} .$$

9.- $(L^\infty(X,\mathcal{F},\mu), \;\; \|.\|_\infty)$ es de **Banach,** aquí

$L^\infty(X,\mathcal{F},\mu) = \{[f] : \exists\, M \;\; \text{tal que } |f(x)| \leq M \;\; \mu\text{-c.t.p.}\}$

donde $(X,\mathcal{F},\mu)$ es un espacio de medida, f es medible,

$[f] = \{g : f = g \;\; \mu\text{-c.t.p.}\}$ y

$$\|f\|_\infty = \text{ínf}\,\{M : \mu\,\{x : |f(x)| > M\} = 0\} .$$

Si $f \in L^{\infty}$, f se llama esencialmente acotada.

1.3. El Espacio $L(X,Y)$

Sean X,Y **espacios normados** sobre $\mathbb{K}$ y consideremos el conjunto:

$L(X,Y) = \{T : X \longrightarrow Y \ : \ T$ es lineal y continua$\}$

$L(X,Y)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con las operaciones:

$(T+S)(x) = T(x) + S(x)$ para $x \in X$, $T, S \in L(X,Y)$

$(\alpha T)(x) = \alpha T(x)$ para $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in X$ y $T \in L(X,Y)$.

Además, $L(X,Y)$ es él mismo un **espacio normado** con la norma:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} \|Tx\| .$$

Se puede ver fácilmente que $T \in L(X,Y)$ si y solamente si T envía conjuntos acotados de X en conjuntos acotados de Y. Por esta razón a veces se llama a los elementos de $L(X,Y)$ operadores lineales acotados. También $L(X,Y)$ es un **espacio de Banach** si Y es de **Banach.** Podemos observar entonces que no es necesario que X sea completo para que $L(X,Y)$ lo sea, siempre y cuando, claro, Y sea completo.

Otra observación que vale la pena hacer es que si el **espacio normado** X tiene dimensión finita entonces cualquier transformación lineal $T : X \longrightarrow Y$ es también continua. Ésto se debe fundamentalmente al hecho de que en dimensión finita todas las normas son equivalentes.

1.4. Espacios Duales

Definición 1.3 *Sea $Y = \mathbb{K}$. En este caso denotamos $L(X, \mathbb{K}) = X^*$. Sus elementos se llaman funcionales lineales acotados y constituyen un* ***espacio normado*** *con la norma:*

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} |f(x)| \, .$$

X^* se llama el ***espacio dual de X****.*

Podemos observar que debido a la completez de $\mathbb{K}$ el espacio dual de un espacio normado X es un espacio de Banach.

Como veremos, la determinación del dual de un espacio normado nos permitirá conocer propiedades importantes del espacio mismo y justamente el objetivo de esta tesis es hacer el cálculo específico del dual de ciertos espacios normados clásicos.

1.5. Orden Parcial

Definición 1.4 *Sean A un conjunto no vacío y $\preccurlyeq$ una relación que satisface:*

(i) $a \preccurlyeq a$ *para toda* $a \in A$ *(reflexividad)*

(ii) *Si* $a \preccurlyeq b$ *y* $b \preccurlyeq a$ *entonces* $a = b$ *para toda* $a, b \in A$ *(antisimetría)*

(iii) *Si* $a \preccurlyeq b$ *y* $b \preccurlyeq c$ *entonces* $a \preccurlyeq c$ *(transitividad)*

A $\preccurlyeq$ se le llama **orden parcial** en A y a la pareja $(A, \preccurlyeq)$ se le conoce como un **conjunto parcialmente ordenado.**

Observemos que cualquier subconjunto no vacío de un conjunto parcialmente ordenado es él mismo un conjunto parcialmente ordenado con respecto al orden parcial original.

Algunos ejemplos de conjuntos parcialmente ordenados son:

1.- El conjunto $\mathbb{R}$ con la relación ordinaria $\leq$.

Así, $(\mathbb{R}, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

2.- El conjunto potencia $\mathcal{P}(X)$ donde X es un conjunto fijo. $\mathcal{P}(X)$ está parcialmente ordenado por $\subset$. A ésto se le llama ordenación parcial por inclusión.

3.- El conjunto $\mathbb{N}$ con la relación $a < b \Leftrightarrow a$ es divisor de b está parcialmente ordenado.

4.- Sea E el conjunto de todas las funciones f con dominio $D_f \subset X$ e imagen $R_f \subset Y$. Aquí $g \prec f$ se refiere al hecho de que f es una extensión de g, es decir, $g \subset f$. Así, $(E, \prec)$ es parcialmente ordenado.

Definición 1.5 *Sean* $(A, \preccurlyeq)$ *un conjunto parcialmente ordenado y* $a, b \in A$. *Si* $a \preccurlyeq b$ *ó* $b \preccurlyeq a$, *entonces se dice que* a *y* b *son comparables.*

Definición 1.6 *Un subconjunto* C *de* A *se dice que es totalmente ordenado si para todo* $a, b \in C$ a *y* b *son comparables. Además, si* C *es totalmente ordenado decimos que es una cadena.*

Ejemplos:

1.- La pareja $(\mathbb{R}, \leq)$ forma una cadena.

2.- El subconjunto $\{1, n, n^2, n^3, ...\}$, $n \in \mathbb{N}$ es una cadena.

Diremos que un elemento c de un conjunto parcialmente ordenado A es una cota superior de un subconjunto C de A si para todo $b \in C$ se verifica que $b \preccurlyeq c$. Se dice que un elemento $m \in A$ es un elemento maximal de A si para toda $x \in A$ tal que $m \leq x$, se tiene necesariamente que $x = m$.

Después de introducir la terminología anterior podemos establecer el Lema de Zorn, una herramienta de uso frecuente en matemáticas.

Lema 1.4 *(Zorn): Todo conjunto parcialmente ordenado, no vacío, en el cual cada cadena tiene una cota superior, posee un elemento maximal.*

1.6. Bases de Hamel

En esta parte nuestro objetivo es demostrar que todo espacio vectorial $X \neq (0)$ posee una **base de Hamel**. Supondremos siempre que X es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Definición 1.7 *Sea $A \subset X$ un conjunto finito, $A \neq \emptyset$ digamos que $A = \{x_1, ..., x_n\}$. Decimos que A es linealmente independiente si*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0, \ \lambda_i \in \mathbb{K} \quad \forall i = 1, ..., n$$

implica que $\lambda_i = 0 \ \ \forall i = 1, ..., n$.

Definición 1.8 *Sea $B \subset X$, $B \neq \emptyset$. Decimos que B es linealmente independiente si todo subconjunto finito $\emptyset \neq A \subset B$ es linealmente independiente.*

Definición 1.9 *Sea $\emptyset \neq C \subset X$. Diremos que C es maximal linealmente independiente si C es linealmente independiente y además si D es tal que $C \subset D$, $C \neq D$ entonces D no es linealmente independiente.*

Definición 1.10 *Un subconjunto maximal linealmente independiente de X, se llama una **base de Hamel** de X.*

Algunos ejemplos de **bases de Hamel** son:

1.- Si $X = \{P : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ P$ es un polinomio con coeficientes reales$\}$

entonces X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y una **base de Hamel** es:

$\mathfrak{B} = \{g_i\}_{i=0}^{\infty}$ donde $g_i(x) = x^i$.

2.- $X = c_{00} = \{(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{K} : x_n = 0 \ \forall n$ excepto posiblemente un número finito$\}$.

X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y una **base de Hamel** es:

$\mathfrak{B} = \{e^n\}_{n=1}^{\infty}$ donde $e^n = (e^n_m)_{m=1}^{\infty}$ con $e^n_m = \delta_{nm}$, la δ de Kronecker.

3.- Si $X = l^p$, $1 \leq p < \infty$, el conjunto $\mathfrak{B}$ del ejemplo anterior NO es **base de Hamel** para l^p.

El teorema sobre existencia de **bases de Hamel** es importante, sin embargo, no provee una construcción de la **base de Hamel**, de hecho, el problema de encontrar **bases de Hamel** explícitas no es sencillo de resolver.

Enseguida probaremos la existencia de **bases de Hamel** para X:

Teorema 1.5 *Todo espacio vectorial $X \neq (0)$ posee una* ***base de Hamel****.*

Demostración. La demostración de este teorema hará uso del Lema de Zorn.

Como $X \neq (0)$ existe $x \in X$ tal que $x \neq 0$. Evidentemente $\{x\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Ahora, sea $Z = \{A : \ A \subset X \ \text{ y } \ A$ es linealmente independiente$\}$, $Z \neq \emptyset$ por que $\{x\} \in Z$.

Ahora, definamos un orden parcial en Z: para A, $B \in Z$ diremos que $A \leq B \Longleftrightarrow A \subset B$. Es muy sencillo verificar que $\leq$ es un orden parcial en Z.

Enseguida, tomemos una cadena $C \subset Z$ y sea $A = \bigcup_{A_i \in C} A_i$.

Veamos que $A \in Z$: Sea $B \subset A$ un subconjunto finito, $B \neq \emptyset$. Puesto que C es totalmente ordenado, existe $A_i \in C$ tal que $B \subset A_i$ y A_i es linealmente independiente. Así A es linealmente independiente y por tanto $A \in Z$.

Además, es claro que A es cota superior de C. Por el lema de Zorn, Z tiene un elemento maximal, digamos M y éste constituye una **base de Hamel** de X. ■

Teorema 1.6 *Sea A una* ***base de Hamel*** *de X. Entonces, para cada $x \in X$, $x \neq 0$, existen $n \in \mathbb{N}$, elementos únicos $x_1, ..., x_n$ de A y escalares $\lambda_1, ..., \lambda_n$ únicos, tales que $|\lambda_i| > 0$ y $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.*

Demostración. Demostraremos primero la existencia de tal representación.

Sea $x \in X$, $x \neq 0$. Si $x \in A$, una tal representación es clara con $n = 1$, $x_1 = x$ y $\lambda_1 = 1$.

Supongamos ahora que $x \notin A$. Entonces, el subconjunto $A \cup \{x\}$ de X contiene propiamente a A y ya que A es maximal linealmente independiente, se tiene que $A \cup \{x\}$ no es linealmente independiente, luego existe $B \subset A \cup \{x\}$, B finito y no vacío tal que B no es linealmente independiente. Forzosamente $x \in B$, pues de otro modo tendríamos $B \subset A$ y así B debería ser linealmente independiente, lo cual es imposible.

Supongamos que $B = \{x, x_1, ..., x_n\}$. Como B no es linealmente independiente existen escalares $\lambda, \lambda_1, ..., \lambda_n$ no todos cero tales que

$$\lambda x + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0.$$

Afirmamos que $\lambda \neq 0$ porque en otro caso tendríamos que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$ con $x_i \in A$ $\forall i = 1, ..., n$ y siendo A linealmente independiente tendríamos que $\lambda_i = 0$ $\forall i = 1, ..., n$, lo cual es una contradicción.

Así, $\lambda \neq 0$ y por consiguiente

$$x = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i.$$

Ahora, demostraremos la unicidad. Supongamos que existen $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$ y elementos $x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n$ tales que $x_i \in A$ $\forall i = 1, ..., m$ y $y_j \in A$ $\forall j = 1, ..., n$ y sean $\lambda_1, ..., \lambda_m, \mu_1, ..., \mu_n$ escalares tales que $|\lambda_i| > 0$ $\forall i = 1, ..., m$ y $|\mu_j| > 0$ $\forall j = 1, ..., n$, y $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j$.

Si fuese $m > n$ entonces, existe $i \leq m$ tal que $x_i \neq y_j$ $\forall j = 1, ..., n$, luego λ_i debe ser igual a cero pues de otro modo quedaría expresado x_i en téminos de los restantes elementos lo cual es imposible pues constituyen un subconjunto linealmente independiente de A. Con ésto se contradice que $|\lambda_i| > 0$. Así $m \leq n$. De igual forma $n \leq m$ y por tanto $n = m$.

Ahora, sea i tal que $1 \leq i \leq m$. Si $x_i \neq y_j$ para cada $1 \leq j \leq n$ entonces $\lambda_i = 0$ ya que de otro modo quedaría expresado x_i en términos de los otros elementos y ésto es imposible. De nuevo contradecimos el hecho de que $|\lambda_i| > 0$. Así, para cada $1 \leq i \leq m$ existe i_j, $1 \leq i_j \leq n$ tal que $x_i = y_{i_j}$. De nuevo, la independencia lineal asegura que $\lambda_i = \mu_{ij}$. ■

1.7. Teorema de Hahn-Banach

Un problema que con frecuencia nos encontramos en Matemáticas es el siguiente: Dados un conjunto no vacío X, un subconjunto propio M de X y una función f definida en M que satisfaga cierta condición para cada $x \in M$, ¿Es posible encontrar una extensión F de f a todo X tal que F satisfaga dicha condición para cada $x \in X$? En general, este problema no necesariamente tiene una solución. Resolveremos dicho problema cuando X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, M es un subespacio propio de X y f es una funcional lineal en M adecuadamente *controlada*. Este resultado se conoce como **Teorema de Hahn-Banach**.

Como podremos ver, el **Teorema de Hahn-Banach** no requiere de considerar una topología específica en el espacio vectorial X, su interés es solamente extender una funcional lineal y su demostración hace uso del Lema de Zorn.

Definición 1.11 *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una funcional sublineal es una función $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica las siguientes condiciones:*

a) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ *para cada* $x, y \in X$.

b) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ *para cada* $x \in X$ *y cada* $\alpha \geq 0$.

Nótese que toda seminorma es una funcional sublineal.

Teorema 1.7 ***(Hahn-Banach)*** *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y p una funcional sublineal en X. Si M es un subespacio vectorial de X y $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una funcional lineal tal que $f(x) \leq p(x)$ para toda $x \in M$, entonces existe una funcional lineal $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que F extiende a f y $F(x) \leq p(x)$ para cada $x \in X$.*

Antes de empezar la demostración de este teorema, hacemos el siguiente comentario.

Debe observarse que el interés de este teorema radica fundamentalmente no en el problema de la existencia de la extensión, sino en el hecho de que puede encontrarse una extensión lineal que siga dominada por p. El problema de encontrar una extensión lineal para f es sencillo de resolver:

Sea $\{e_i\}$ una **base de Hamel** para M y sean $\{f_j\}$ vectores en X tales que $\{e_i\} \cup \{f_j\}$ constituyen una **base de Hamel** para X. Definiendo $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por : $F\left(\sum \alpha_i e_i + \sum \beta_j f_j\right) = f\left(\sum \alpha_i e_i\right) = \sum \alpha_i f\left(e_i\right)$ (nótese que las sumas son finitas), logramos una extensión lineal de f.

Más aún, si $\{r_j\}$ es cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$, entonces:

$F\left(\sum \alpha_i e_i + \sum \beta_j f_j\right) = f\left(\sum \alpha_i e_i\right) + \sum \beta_j r_j$ es también una extensión lineal de f y de hecho, cualquier extensión lineal de f tiene esta forma. La dificultad estriba en el hecho de que debemos encontrar una de estas extensiones que esté dominada por p.

Demostración. Sea P el conjunto cuyos elementos son las parejas (M', f') donde M' es un subespacio de X que contiene a M y f' es una funcional lineal en M' que extiende a f y satisface $f' \leq p$ en M'. Claramente P es un conjunto no vacío ya que $(M, f) \in P$ pues $M \subset M'$ y $f' |_M = f$.

Definamos el siguiente orden $\preccurlyeq$ en P:

$$(M', f') \preccurlyeq (M'', f'') \Longleftrightarrow M' \subset M'' \text{ y } f'' = f' \text{ en } M'.$$

Fácilmente se demuestra que $\preccurlyeq$ es un orden parcial en P.

Sea $\mathcal{C} = \{(M_i, f_i) : i \in I\}$ una cadena en P y sea $\mathcal{M} = \bigcup_{i \in I} M_i$.

Debido a que $\mathcal{C}$ es una cadena, $\mathcal{M}$ resulta ser un espacio vectorial:

Supongamos que $x,\ y \in \bigcup_{i\in I} M_i$ así, para algunos i,j tenemos que $x \in M_i$ y $y \in M_j$ pero ya que $\mathcal{C}$ es totalmente ordenado $M_i \subset M_j$ ó $M_j \subset M_i$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $M_i \subset M_j$, entonces ya que M_j es un subespacio tendremos: $x + \alpha y \in M_j \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Por tanto, $\mathcal{M}$ es un subespacio vectorial de X.

Además, si definimos $h : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ como $h(x) = f_i(x)$ si $x \in M_i$, entonces h *está bien definida*:

Supongamos que $x \in M_i$ y $x \in M_j$.

Por definición de h tenemos: $h(x) = f_i(x)$ y $h(x) = f_j(x)$.

Pero, como $\mathcal{C}$ está totalmente ordenado, f_i extiende a f_j ó f_j extiende a f_i. En cualquier caso: $f_i(x) = f_j(x)$ y h está bien definida.

h es lineal: Sean $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ y $x,\ y \in M_i$:

$h(\alpha x + \beta y) = f_i(\alpha x + \beta y) = \alpha f_i(x) + \beta f_i(y) = \alpha h(x) + \beta h(y)$.

Entonces h extiende a f y satisface $h(x) \leq p(x)\ \forall x \in \mathcal{M}$.

Así, $(\mathcal{M},\ h) \in P$ y es una cota superior para $\mathcal{C}$, es decir, $\forall\ f_i \in \mathcal{C}\ \ f_i \preccurlyeq h$.

Por el Lema de Zorn, P tiene un elemento maximal $\left(\widetilde{\mathcal{M}},\ F\right)$.

Demostremos que $\widetilde{\mathcal{M}} = X$:

Supongamos que $\widetilde{\mathcal{M}}$ es un subconjunto propio de X y sea $x_1 \in X - \widetilde{\mathcal{M}}$.

Consideremos el conjunto $\widetilde{\mathcal{M}}_1 = \left\{x + tx_1 : x \in \widetilde{\mathcal{M}},\ t \in \mathbb{R}\right\}$.

Es claro que $\widetilde{\mathcal{M}}_1$ es un espacio vectorial que contiene propiamente a $\widetilde{\mathcal{M}}$. Además, si $x,\ y \in \widetilde{\mathcal{M}}$

$$F(x) + F(y) = F(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x - x_1) + p(x_1 + y)$$

lo cual implica

$$F(x) - p(x - x_1) \leq p(y + x_1) - F(y) \tag{1.1}$$

Sea $\alpha = \sup\left\{F(x) - p(x - x_1) : x \in \widetilde{\mathcal{M}}\right\}$, entonces

$$F(x) - \alpha \leq p(x - x_1) \text{ para todo } x \in \widetilde{\mathcal{M}} \tag{1.2}$$

y

$$F(y) + \alpha \leq p(y + x_1) \text{ para todo } y \in \widetilde{\mathcal{M}} \tag{1.3}$$

Definiendo $F_1 : \widetilde{\mathcal{M}}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ como:

$$F_1(x + tx_1) = F(x) + t\alpha \tag{1.4}$$

obtenemos una funcional lineal en $\widetilde{\mathcal{M}}_1$ tal que F_1 restringida a $\widetilde{\mathcal{M}}$ coincide con F.

Finalmente, si tomamos $t > 0$ y reemplazamos x por $t^{-1}x$ en (1.2) y por $t^{-1}y$

en (1.3) y multiplicamos las desigualdades resultantes por t obtenemos:

$$F(x) - t\alpha \leq p(x - tx_1)$$

$$F(y) + t\alpha \leq p(y + tx_1)$$

para cada $x,\ y \in \widetilde{\mathcal{M}}$ y cada $t > 0$. Usando (1.4) concluimos que

$$F_1(z) \leq p(z) \quad \text{para toda } z \in \widetilde{\mathcal{M}}_1.$$

Así, hemos encontrado un elemento$\left(\widetilde{\mathcal{M}}_1,\ F_1\right)$ en P que mayora a $\left(\widetilde{\mathcal{M}},\ F\right)$ y $\left(\widetilde{\mathcal{M}}_1,\ F_1\right) \neq \left(\widetilde{\mathcal{M}},\ F\right)$, lo cual contradice la maximalidad de $\left(\widetilde{\mathcal{M}},\ F\right)$.

Por lo tanto $\widetilde{\mathcal{M}} = X$. ∎

Hay una extensión del teorema anterior para espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$. Uno debería empezar notando que si X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, entonces también es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Del mismo modo, si $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$-lineal, entonces $\mathrm{Re}(f) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es $\mathbb{R}$-lineal. La relación precisa entre ambas situaciones la proporciona el siguiente lema.

Lema 1.8 *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.*

(a) Si $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es $\mathbb{R}$-lineal, entonces $f(x) = u(x) - iu(ix)$ es $\mathbb{C}$-lineal y $u = \mathrm{Re}(f)$.

(b) Si $g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$-lineal, $u = \mathrm{Re}(g)$ y f está definida como en (a) entonces

$f = g$.

(c) Si p es una seminorma en X y u, f son como en (a) entonces

$$|u(x)| \leq p(x) \ \forall x \in X \Longleftrightarrow |f(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X.$$

(d) Si X es un ***espacio normado*** *y u, f son como en (a) entonces* $\|u\| = \|f\|$.

Demostración.

(a) Demostremos por ejemplo que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, cuando $\lambda = \alpha + i\beta$ con $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ y $x \in X$.

$$\begin{aligned}
f(\lambda x) &= u(\lambda x) - iu(i\lambda x) = u[(\alpha + i\beta)x] - iu[i(\alpha + i\beta)x] \\
&= u[\alpha x + \beta(ix)] - iu[-\beta x + \alpha(ix)] \\
&= \alpha u(x) + \beta u(ix) + i\beta u(x) - i\alpha u(ix) \\
&= \alpha\,(u(x) - iu(ix)) + i\beta(u(x) - iu(ix)) \\
&= (\alpha + i\beta)(u(x) - iu(ix)) \\
&= \lambda f(x).
\end{aligned}$$

Claramente, $u = \mathrm{Re}(f)$.

(b) Para toda $z \in \mathbb{C}$, donde $z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$, tenemos:

$iz = -\operatorname{Im}(z) + i\operatorname{Re}(z)$, de donde $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z)$,

de donde $\operatorname{Im}(z) = -\operatorname{Re}(iz)$.

Así,

$$\begin{aligned} g(x) &= \operatorname{Re}(g(x)) + i\operatorname{Im}(g(x)) \\ &= \operatorname{Re}(g(x)) - i\operatorname{Re}(ig(x)) \\ &= \operatorname{Re}(g(x)) - i\operatorname{Re}(g(ix)) \\ &= u(x) - iu(ix). \\ &= f(x) \end{aligned}$$

(c) Si $|f(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X$, usando el hecho de que $|u(x)| \leq |f(x)|$ se sigue que $|u(x)| \leq p(x) \ \forall x \in X$.

Por otra parte, si $|u(x)| \leq p(x) \ \forall x \in X$, sea $f(x) = e^{i\theta}\,|f(x)|$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq |f(x)| = e^{-i\theta} f(x) = f(e^{-i\theta}x) \\ &= \operatorname{Re} f(e^{-i\theta}x) = u(e^{-i\theta}x) \\ &\leq p(e^{-i\theta}x) = p(x) \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

(d) Para toda $x \in X$ y como X es un **espacio normado** tenemos que

$$|u(x)| \leq |f(x)| \leq \|f\| \, \|x\| \Longrightarrow \|u\| \leq \|f\| \, .$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= f(e^{-i\theta}x) \\ &= \operatorname{Re} f(e^{-i\theta}x) \\ &= u(e^{-i\theta}x) \\ &\leq \|u\| \, \|x\| \, . \end{aligned}$$

entonces $\|f\| \leq \|u\|$.

Por tanto, $\|u\| = \|f\|$. ■

Ahora, podemos probar la siguiente consecuencia del **Teorema de Hahn-Banach**:

Corolario 1.9 *Sean X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, M un subespacio de X y $p : X \longrightarrow [0, \infty)$ una seminorma. Si $f : M \longrightarrow \mathbb{K}$ es una funcional lineal tal que $|f(x)| \leq p(x)$ $\forall x \in M$, entonces existe una funcional lineal $F : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que F extiende a f y $|F(x)| \leq p(x)$ $\forall x \in X$.*

Demostración. Supongamos primero que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Como $f(x) \leq |f(x)| \leq p(x)$ para cada $x \in M$, el **Teorema de Hahn-Banach** asegura la existencia de una extensión lineal $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x) \leq p(x) \;\; \forall x \in X$. Así,

$$-F(x) = F(-x) \leq p(-x) = p(x)$$

por lo que $|F(x)| \leq p(x) \;\; \forall x \in X$.

Ahora, supongamos que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y sea $u = \text{Re}(f)$. Debido a (c) del Lema 1.8, se tiene $|u| \leq p$ y el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ asegura la existencia de una funcional $\mathbb{R}$-lineal $F_1 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que extiende a u y satisface $|F_1| \leq p$. Sea $F(x) = F_1(x) - iF_1(ix)$ para cada $x \in X$. De nuevo, la parte (c) del Lema 1.8 implica que $|F| \leq p$ y además F extiende a f. ■

Corolario 1.10 *Si X es un **espacio normado** sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, M es un subespacio lineal de X y $f : M \longrightarrow \mathbb{K}$ es una funcional lineal acotada, entonces existe un elemento $F \in X^*$(es decir una funcional lineal continua en X) tal que F extiende a f y $\|F\| = \|f\|$.*

Antes de empezar con la demostración de este resultado, es necesario precisar que las normas de F y f se calculan con relación a los dominios de F y f, explícitamente:

$$\|f\| = \sup \left\{ \frac{|f(x)|}{\|x\|} : x \in M, \, x \neq 0 \right\},$$

$$\|F\| = \sup\left\{\frac{|F(x)|}{\|x\|} : x \in X,\, x \neq 0\right\}.$$

Demostración.

Consideremos $p(x) = \|f\|\,\|x\|$ para cada $x \in X$; como $f : M \longrightarrow \mathbb{K}$ es una funcional lineal acotada tenemos que $|f(x)| \leq \|f\|\,\|x\| = p(x)$ $\forall x \in M$. Luego por el Corolario 1.9, existe una funcional lineal $F : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que F extiende a f y $|F(x)| \leq p(x)$ $\forall x \in X$, es decir $|F(x)| \leq p(x) = \|f\|\,\|x\|$ $\forall x \in X$, de aquí se sigue que $\|F\| \leq \|f\|$.

Además como F es una extensión de f, se verifica que $\|f\| \leq \|F\|$.

Por lo tanto, existe un elemento $F \in X^*$(es decir una funcional lineal continua en X) tal que F extiende a f y $\|F\| = \|f\|$. ■

Corolario 1.11 *Si X es un* ***espacio normado****, $\{x_1, ..., x_n\}$ es un subconjunto linealmente independiente de X y $\alpha_1, ..., \alpha_n$ son escalares arbitrarios, entonces existe $f \in X^*$ tal que $f(x_i) = \alpha_i$ para toda $i = 1, ..., n$.*

Demostración. Sea M el subespacio generado por $\{x_1, ..., x_n\}$ y defínase $g : M \longrightarrow \mathbb{K}$ así $g\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i$.

Es claro que g es lineal y puesto que $\dim(M) < \infty$ se sigue que g es continua.

Así, como X es un **espacio normado**, M es un subespacio de X y $g : M \longrightarrow \mathbb{K}$ es una funcional lineal acotada. Por el Corolario 1.10, existe $F = f \in X^*$ tal que f extiende a g y $\|f\| = \|g\|$.

Luego, $f(x_i) = \alpha_i$ para toda $i = 1, ..., n$. ■

Una consecuencia importante de este corolario es que si X es un **espacio normado**, entonces X^* no es un espacio vectorial trivial si X no es trivial, más aún, existe un número suficientemente grande de funcionales lineales continuas en X, lo que da pie a la posibilidad de definir diferentes topologías tanto en X como en X^*.

Corolario 1.12 *Sea X un **espacio normado**. Entonces para cada $x \in X$*

$$\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in X^* \ \ y \ \ \|f\| \leq 1\}.$$

Además, este supremo se alcanza.

Demostración. Sea $\alpha = \sup\{|f(x)| : f \in X^* \ \text{y} \ \|f\| \leq 1\}$. Si $f \in X^*$ y $\|f\| \leq 1$, entonces $|f(x)| \leq \|f\| \, \|x\| \leq \|x\|$ por lo que $\alpha \leq \|x\|$.

Por otra parte, si $M = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{K}\}$ y definimos $g : M \longrightarrow \mathbb{K}$ como $g(\lambda x) = \lambda \|x\|$ entonces $g \in M^*$ y $\|g\| = 1$.

Finalmente, el Corolario 1.10 asegura la existencia de $f \in X^*$ tal que $\|f\| = \|g\| = 1$ y $f(x) = g(x) = \|x\|$ con lo cual tenemos que $\|x\| \leq \alpha$. ■

Capítulo 2

El Dual de los Espacios l^p

En este capítulo determinaremos el dual de los espacios de sucesiones l^p, los cuales constituyen una generalización natural del espacio $\mathbb{R}^n$.

En el Análisis Funcional es un principio fundamental, el que la investigación de un espacio esté asociada a la investigación de su **espacio dual**. La razón de ésto se debe no sólo al hecho de que propiedades importantes de X^* se reflejan en X, sino también al hecho de que frecuentemente resulta más conveniente adoptar un punto de vista que permita manejar los elementos de un espacio como elementos de algún **espacio dual**. Para poder determinar el **dual de un espacio normado** recurrimos a un concepto de vital importancia que es el de isomorfismo isométrico.

Definición 2.1 *Un isomorfismo isométrico de un* ***espacio normado*** X *en un* ***espacio normado*** $\widetilde{X}$ *es un operador lineal biyectivo* $T : X \longrightarrow \widetilde{X}$ *que preserva la* *norma, es decir,*

$$\|Tx\| = \|x\| \quad \forall x \in X.$$

En tal caso decimos que X es isométricamente isomorfo a $\widetilde{X}$, de donde X y $\widetilde{X}$ son llamados **espacios normados** isométricamente isomorfos. En otras palabras, X y $\widetilde{X}$ son "idénticos". A veces ésto se expresa diciendo que X y $\widetilde{X}$ son congruentes.

El siguiente resultado, demuestra que el espacio dual de $\mathbb{R}^n$ es $\mathbb{R}^n$. Como veremos en la demostración, con un fuerte sabor a Álgebra Lineal, el uso de **bases de Hamel** es crucial.

Teorema 2.1 *El espacio dual de $\mathbb{R}^n$ es $\mathbb{R}^n$ (esto es, $(\mathbb{R}^n)^*$ es isométricamente isomorfo a $\mathbb{R}^n$).*

Demostración. Tenemos que encontrar una función $\psi : (\mathbb{R}^n)^* \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que ψ sea isomorfismo de espacios vectoriales y además ψ sea isometría. Notando que para una base de $\mathbb{R}^n$, digamos que la base canónica $\{e_1, ..., e_n\}$ la función lineal $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ está determinada por sus valores en $f(e_j)$ $(j = 1, ..., n)$, proponemos $\psi(f) = (f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$, $f \in (\mathbb{R}^n)^*$.

ψ es lineal: Sean $f, g \in (\mathbb{R}^n)^*$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\psi(\alpha f + \beta g) = ((\alpha f + \beta g)(e_1), ..., (\alpha f + \beta g)(e_n))$$

$$= \alpha(f(e_1), ..., f(e_n)) + \beta\,(g(e_1), ..., g(e_n))$$

$$= \alpha\psi(f) + \beta\psi(g).$$

ψ es 1-1: Sea $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ tal que $\psi(f) = 0$.

Entonces $(f(e_1), ..., f(e_n)) = (0, ..., 0) \Longrightarrow f(e_j) = 0 \quad \forall j = 1, ..., n$.

Luego, si $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$

$$f(x) = f(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = 0 \Longrightarrow f \equiv 0.$$

ψ es sobre: Dado $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, la transformación $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(e_i) = x_i$, $i = 1, .., n$ está unívocamente determinada como funcional lineal.

Así $\psi(f) = (f(e_1), ..., f(e_n)) = (x_1, ..., x_n) = x$ y además $f \in (\mathbb{R}^n)^*$, pues $\mathbb{R}^n$ tiene dimensión finita.

Por tanto, f es un isomorfismo de espacios vectoriales.

ψ preserva la norma: Sea $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ y sea $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left|\sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j)\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|\,|f(e_j)| \leq \left[\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=1}^{n} |f(e_j)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \|x\|_{\mathbb{R}^n} \, \|\psi\,(f)\|_{\mathbb{R}^n} . \end{aligned}$$

Esto es,

$$|f(x)| \leq \|x\|_{\mathbb{R}^n} \|\psi(f)\|_{\mathbb{R}^n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

entonces:

$$\|f\|_{(\mathbb{R}^n)^*} \leq \|\psi(f)\|_{\mathbb{R}^n}. \tag{2.1}$$

Para obtener la otra desigualdad tomemos una x muy particular:

$x = (f(e_1), ..., f(e_n)) \quad (f \in (\mathbb{R}^n)^*$ dada)

Entonces:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^{n} |f(e_j)|^2 \\ &= \|(f(e_1), ..., f(e_n))\|_{\mathbb{R}^n}^2 \\ &= \|x\|_{\mathbb{R}^n} \|\psi(f)\|_{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

Ahora, $|f(x)| = \|x\|_{\mathbb{R}^n} \|\psi(f)\|_{\mathbb{R}^n}$ así,

$$\|f\|_{(\mathbb{R}^n)^*} \geq \frac{|f(x)|}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}} = \|\psi(f)\|_{\mathbb{R}^n} \tag{2.2}$$

De (2.1) y (2.2) tenemos que: $\|f\|_{(\mathbb{R}^n)^*} = \|\psi(f)\|_{\mathbb{R}^n}$. ■

En espacios de dimensión infinita la situación es diferente, pues requerimos substituir el concepto de **base de Hamel** por el de base de Schauder. La razón para ello es que en espacios de Banach de dimensión algebraica infinita, las bases de Hamel son no numerables.

Definición 2.2 *Sea $(X, \|.\|)$ un **espacio normado**. Si $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de vectores en X con la propiedad de que para cada $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que $\|x - (\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n)\| \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, decimos que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ es una **base de Schauder** para X. En tal caso, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ cuya suma es x, se llama la expansión de x con respecto a $(e_n)_{n=1}^{\infty}$.*

Enseguida, veremos algunos ejemplos de **Bases de Schauder**:

Proposición 2.2 *La sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ donde $e_n = \left(e_n^{(j)}\right)_{j=1}^{\infty}$ tal que $e_n^{(j)} = \delta_{nj}$ es una **base de Schauder** para l^1.*

Demostración. Sea $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l^1$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$.

Sea $\varepsilon > 0$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$ $\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k| < \varepsilon$. Así $\forall n \geq N$

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\|_1 &= \|(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ...) - (x_1, ..., x_n, 0, 0, 0, ...)\|_1 \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Veamos que la representación es única:

Supongamos que $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$, $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones de escalares tales que:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \text{ (en la norma de } l^1) \tag{2.3}$$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n \text{ (en la norma de } l^1) \tag{2.4}$$

Dado $\varepsilon > 0$ (por (2.3) y (2.4)) existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq N$ y $\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \right\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$

Entonces

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \beta_k) e_k \right\|_1 &\leq \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|_1 + \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \right\|_1 \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

siempre que $n \geq N$.

Entonces $\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - \beta_k| < \varepsilon$ $\forall n \geq N$. Tomando límite cuando $n \longrightarrow \infty$ tenemos:

$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k - \beta_k| \leq \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0 \Longrightarrow \alpha_k = \beta_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$. ■

Proposición 2.3 *La sucesión* $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ *donde* $e_n = \left(e_n^{(j)}\right)_{j=1}^{\infty}$ *tal que* $e_n^{(j)} = \delta_{nj}$ *es una base de* ***Schauder*** *para* l^p, $1 < p < \infty$.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p < \varepsilon$.

Entonces

$$\begin{aligned}\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\|_p^p &= \|(x_1, x_2, ...) - (x_1, ..., x_n, 0, 0, ...)\|_p^p \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p < \varepsilon\end{aligned}$$

luego $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in l^p$.

Ahora, veamos que la representación es única:

Supongamos que $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$, $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones de escalares tales que:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \text{ (en la norma de } l^p) \tag{2.5}$$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n \text{ (en la norma de } l^p) \tag{2.6}$$

Dado $\varepsilon > 0$ (por (2.5) y (2.6)) existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \right\|_p < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N$.

Entonces

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-\beta_k)\,e_k\right\|_p &\leq \left\|x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\right\|_p+\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\beta_k e_k\right\|_p\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

siempre que $n \geq N$. Tomando límite cuando $n \longrightarrow \infty$ obtenemos:

$$0 \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k-\beta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon\ \forall\varepsilon>0 \Longrightarrow \alpha_k=\beta_k\ \forall k\in\mathbb{N}.$$ ■

Proposición 2.4 *La sucesión* $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ *donde* $e_n=\left(e_n^{(j)}\right)_{j=1}^{\infty}$ *tal que* $e_n^{(j)}=\delta_{nj}$ *es una* ***base de Schauder*** *para* c_0.

Demostración. Sea $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}\in c_0$.

Debemos demostrar que $\left\|x-\sum\limits_{k=1}^{n}x_k e_k\right\|_{\infty} \longrightarrow 0$ cuando $n\longrightarrow\infty$ y que los x_k's son únicos. En efecto, como $x\in c_0$, dado $\varepsilon>0$ existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $\forall n\geq N$ $|x_n|<\varepsilon$. Entonces $\sup\limits_{n\geq N}|x_n|\leq\varepsilon$. Luego

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}x_k e_k\right\|_{\infty}=\sup_{j\geq n+1}|x_n|\leq\varepsilon\quad\forall n\geq N.$$

Ahora, veamos que la representación es única:

Supongamos que $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$, $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones de escalares tales que:

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n \text{ (en la norma de } c_0) \tag{2.7}$$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n \text{ (en la norma de } c_0) \tag{2.8}$$

Dado $\varepsilon > 0$ (por (2.7) y (2.8)) existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N$.

Entonces

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \beta_k) e_k \right\|_\infty &\leq \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|_\infty + \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \right\|_\infty \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

siempre que $n \geq N$. Así para cada $k \in \mathbb{N}$ $|\alpha_k - \beta_k| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \Longrightarrow \alpha_k = \beta_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$. ■

Ahora, ya estamos en condiciones de formular y demostrar los resultados principales de este capítulo.

Teorema 2.5 *El dual de l^1 es l^∞ (esto es, $(l^1)^*$ es isométricamente isomorfo a l^∞).*

Demostración. En la Proposición 2.2 vimos que la sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ donde $e_n = \left(e_n^{(j)}\right)_{j=1}^{\infty}$ tal que $e_n^{(j)} = \delta_{nj}$ es una **base de Schauder** para l^1.

Así, dado $x \in l^1$ existe una única sucesión de escalares $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ en la norma de l^1.

Luego, dado $f \in (l^1)^*$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = f\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n). \end{aligned}$$

Lo anterior nos dice que cualquier $f \in (l^1)^*$ queda totalmente determinada por su acción en cada e_n, $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, necesitamos $\psi : (l^1)^* \longrightarrow l^\infty$ tal que ψ sea isomorfismo de espacios vectoriales y preserve la norma.

Proponemos $\psi(f) = (f(e_n))_{n=1}^{\infty}$.

Veamos que $\psi(f) \in l^\infty$: Sea $n \in \mathbb{N}$

$|f(e_n)| \leq \|f\|_{(l^1)^*} \|e_n\|_{l^1} = \|f\|_{(l^1)^*}$, luego

$$\|\psi(f)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(e_n)| \leq \|f\|_{(l^1)^*}\,.$$

Por tanto $\psi(f) \in l^\infty$.

ψ es lineal: Sean $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$ y $f, g \in (l^1)^*$.

$$\psi(\alpha f + \beta g) = (\alpha f(e_n) + \beta g(e_n))_{n=1}^{\infty}$$

$$\begin{aligned} &= \alpha\left(f(e_n)\right)_{n=1}^{\infty} + \beta\left(g(e_n)\right)_{n=1}^{\infty} \\ &= \alpha\psi(f) + \beta\psi(g). \end{aligned}$$

ψ es 1-1: Sea $f \in (l^1)^*$ tal que $\psi(f) = 0 \in l^\infty$.

Entonces $(f(e_n))_{n=1}^{\infty} = (0,0,...) \Longrightarrow f(e_j) = 0 \ \forall j \in \mathbb{N}$.

Así, para toda $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l^1$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n) = 0 \Longrightarrow f \equiv 0$.

ψ es sobre: Sean $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in l^\infty$ y $f : l^1 \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $f\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$.

Luego, $f \in (l^1)^*$ porque :

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ converge $\forall x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l^1$ pues

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|y\|_\infty \|x\|_1 \quad \forall x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l^1,$$

así

$$|f(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\,|y_n| \leq \|y\|_\infty \|x\|_1,$$

por lo que $\|f\|_{(l^1)^*} \leq \|y\|_\infty$.

ψ preserva la norma: Sean $f \in (l^1)^*$ y $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l^1$.

$$|f(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\,|f(e_n)| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(e_n)| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|\psi(f)\|_\infty \|x\|.$$

Entonces $\|f\|_{(l^1)^*} \leq \|\psi(f)\|_\infty$.

Ahora, $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f(e_n)| \leq \|f\|_{(l^1)^*} \|e_n\|_1 = \|f\|_{(l^1)^*}$.

Luego,

$$\|\psi(f)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(e_n)| \leq \|f\|_{(l^1)^*}\,.$$

■

Teorema 2.6 *Sea* $1 < p < \infty$ *y* p' *tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *El dual de* l^p *es* $l^{p'}$, *esto es,* $(l^p)^*$ *es isométricamente isomorfo a* $l^{p'}$.

Demostración. Observamos primero que por la Proposición 2.3 $(e_n)_{n=1}^\infty$ es **base de Schauder** para l^p.

Como en el teorema anterior si $f \in (l^p)^*$ y $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in l^p$ entonces $f(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n f(e_n)$.

Ahora, definamos $\psi : (l^p)^* \longrightarrow l^{p'}$ tal que $\psi(f) = (f(e_n))_{n=1}^\infty \in l^{p'}$.

Consideramos la sucesión $(z_n)_{n=1}^\infty \in l^p$ tal que $z_n = \left(\xi_k^{(n)}\right)_{k=1}^\infty$, para ver que efectivamente $\psi(f) \in l^{p'}$ donde

$$\xi_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{|f(e_k)|^{p'}}{f(e_k)} & si \;\; f(e_k) \neq 0 \;\; y \;\; k \leq n \\ 0 & si \;\; f(e_k) = 0 \;\; o \;\; k > n \end{cases}.$$

Así,

$$f(z_n) = \sum_{k=1}^\infty \xi_k^{(n)} f(e_k) = \sum_{k=1}^n |f(e_k)|^{p'} \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

También

$$\begin{aligned} f(z_n) &= |f(z_n)| \leq \|f\|_{(l^p)^*} \|z_n\|_p \\ &= \|f\|_{(l^p)^*} \left(\sum_{k=1}^{n} \left| \xi_k^{(n)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\|_{(l^p)^*} \left[\sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|^{(p'-1)p} \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\|_{(l^p)^*} \left[\sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|^{p'} \right]^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

(pues $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \Longrightarrow \frac{1}{p} = \left(1 - \frac{1}{p'}\right) \Longrightarrow p' = (p'-1)\,p$).

Por tanto,

$$\sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|^{p'} = f(z_n) \leq \|f\|_{(l^p)^*} \left[\sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|^{p'} \right]^{\frac{1}{p}}$$

entonces

$$\left[\sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|^{p'} \right]^{1-\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{(l^p)^*},$$

así $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left[\sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|^{p'} \right]^{\frac{1}{p'}} \leq \|f\|_{(l^p)^*} \tag{2.9}$$

Por consiguiente, $(f(e_n))_{n=1}^{\infty} \in l^{p'}$.

Veamos que ψ es lineal: Sean $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$ y $f, g \in (l^p)^*$.

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha f + \beta g) &= (\alpha f(e_n) + \beta g(e_n))_{n=1}^{\infty} \\
&= \alpha\,(f(e_n))_{n=1}^{\infty} + \beta\,(g(e_n))_{n=1}^{\infty} \\
&= \alpha\psi(f) + \beta\psi(g).
\end{aligned}$$

ψ es 1-1: Claramente es inyectiva porque si $f \in (l^p)^*$ y $\psi(f) = 0$, entonces $(f(e_n))_{n=1}^{\infty} = 0$, luego $f(e_j) = 0 \;\; \forall j \in \mathbb{N}$.

Así, para $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in l^p$, tendremos que $f(x) = 0$, es decir, $f = 0$.

ψ es sobre: Sea $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in l^{p'}$. Podemos considerar la funcional $g : l^p \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que si $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l^p$ entonces $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$; g está bien definida pues por la desigualdad de Hölder:

$$\begin{aligned}
|g(x)| &\le \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\,|y_n| \\
&\le \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \|x\|_p \, \|y\|_{p'} \,.
\end{aligned}$$

Así $\forall x \in l^p \quad |g(x)| \le \|x\|_p \|y\|_{p'} \Longrightarrow \|g\|_{(l^p)^*} \le \|y\|_{p'}$.

Ésto muestra que, $g \in (l^p)^*$ y además $\psi(g) = (g(e_n))_{n=1}^{\infty} = (y_n)_{n=1}^{\infty} = y$ puesto que $g(e_n) = \sum_{k=1}^{\infty} e_n^{(k)} y_k = y_n$.

Resta mostrar que ψ preserva la norma, esto es, $\|\psi(f)\|_{p'} = \|f\|_{(l^p)^*}$ $\forall f \in (l^p)^*$. Sean $f \in (l^p)^*$ y $x \in l^p$, $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\,|f(e_n)| \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f(e_n)|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \|x\|_p \,\|(f(e_n))_{n=1}^{\infty}\|_{p'} \\
&= \|x\|_p \,\|\psi(f)\|_{p'}.
\end{aligned}
$$

Esto es, $|f(x)| \leq \|\psi(f)\|_{p'} \|x\|_p$ $\forall x \in l^p$. Entonces $\|f\|_{(l^p)^*} \leq \|\psi(f)\|_{p'}$ y por (2.9) tenemos $\|\psi(f)\|_{p'} \leq \|f\|_{(l^p)^*}$. Por tanto, $\|\psi(f)\|_{p'} = \|f\|_{(l^p)^*}$. ■

Teorema 2.7 *El dual de c_0 es l^1, esto es, $(c_0)^*$ es isométricamente isomorfo a l^1.*

Demostración. Por la Proposición 2.4 tenemos que la sucesión $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ donde $e_n = \left(e_n^{(j)}\right)_{j=1}^{\infty}$ tal que $e_n^{(j)} = \delta_{nj}$ es una **base de Schauder** para c_0.

Si $f \in (c_0)^*$ entonces para $x \in c_0$, $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$

$$f(x) = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n).$$

Proponemos $\psi : (c_0)^* \longrightarrow l^1$ tal que $\psi(f) = (f(e_n))_{n=1}^{\infty}$.

Veamos que $(f(e_n))_{n=1}^{\infty} \in l^1$: Sea $(z_n)_{n=1}^{\infty} \in l^1$ tal que $z_n = \left(\xi_k^{(n)}\right)_{k=1}^{\infty}$ donde

$$\xi_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{\overline{f(e_k)}}{|f(e_k)|} & \text{si} \quad f(e_k) \neq 0 \quad \text{y} \quad 1 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si} \quad f(e_k) = 0 \quad \text{o} \quad k > n \end{cases}.$$

z_n es de la forma $z_n = \left(\frac{\overline{f(e_1)}}{|f(e_1)|}, ..., \frac{\overline{f(e_n)}}{|f(e_n)|}, 0, 0, ...\right)$, donde algún $\frac{\overline{f(e_k)}}{|f(e_k)|}$ pudiera ser 0.

$$f(z_n) = f\left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(n)} e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(n)} f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} |f(e_k)|,$$

pero

$$\sum_{k=1}^{n} |f(e_k)| = f(z_n) = |f(z_n)| \leq \|f\|_{(c_0)^*} \|z_n\|_{\infty} = \|f\|_{(c_0)^*}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} |f(e_k)| \leq \|f\|_{(c_0)^*} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ y tomando límite si } n \longrightarrow \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(e_n)| \leq \|f\|_{(c_0)^*} \tag{2.10}$$

Por lo que $\psi(f) = (f(e_n))_{n=1}^{\infty} \in l^1$.

ψ *es lineal:* Sean $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$ y $f,g \in (c_0)^*$.

$$\begin{aligned}
\psi(\alpha f+\beta g) &= (\alpha f(e_n)+\beta g(e_n))_{n=1}^{\infty} \\
&= \alpha (f(e_n))_{n=1}^{\infty} + \beta (g(e_n))_{n=1}^{\infty} \\
&= \alpha\psi(f)+\beta\psi(g).
\end{aligned}$$

ψ *es 1-1:* Sea $f \in (c_0)^*$ tal que $\psi(f)=0 \in l^1$.

Entonces $(f(e_n))_{n=1}^{\infty} = (0,0,...) \Longrightarrow f(e_j)=0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$.

Así, $\forall x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$, tenemos que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n) = 0$

$\Longrightarrow f \equiv 0$.

ψ *es sobre:* Sean $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in l^1$ y definamos $f : c_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que

$f\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$.

Efectivamente, $f \in (c_0)^*$ porque la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ converge $\forall x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$

pues

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| = \|x\|_{\infty} \|y\|_1 \quad \forall x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$$

$\Rightarrow |f(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\,|y_n| \leq \|x\|_{\infty}\|y\|_1$ entonces $\|f\|_{(c_0)^*} \leq \|y\|_1$.

Finalmente, ψ *preserva la norma:* Sean $f \in (c_0)^*$ y $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$.

$$|f(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\,|f(e_n)|$$

$$\begin{aligned} &\le \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \sum_{n=1}^{\infty} |f(e_n)| \\ &= \|x\|_\infty \|\psi(f)\|_1 . \end{aligned}$$

Entonces, $\|f\|_{(c_0)^*} \le \|\psi(f)\|_1$.

(2.10) dice que $\|\psi(f)\|_1 \le \|f\|_{(c_0)^*}$, luego, $\|f\|_{(c_0)^*} = \|\psi(f)\|_1$. ■

Hasta el momento, no hemos determinado $(l^\infty)^*$. Uno estaría tentado a pensar que $(l^\infty)^*$ es l^1, sin embargo, con la ayuda del **Teorema de Hahn-Banach**, veremos que l^1 está propiamente incluido en $(l^\infty)^*$, en otras palabras, existen funcionales lineales continuas en $(l^\infty)^*$ que no están determinados por elementos de l^1.

Teorema 2.8 *Dada $y = (y_n)_{n=1}^\infty \in l^1$, y induce una funcional lineal $\Lambda_y : l^\infty \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $\Lambda_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in l^\infty$. Esta funcional lineal es continua, es decir $\Lambda_y \in (l^\infty)^*$. Así, la función $\varphi : l^1 \longrightarrow (l^\infty)^*$ tal que $\varphi(y) = \Lambda_y$ es lineal, continua, preserva la norma, pero no es sobre.*

Demostración. Primero veamos que $\Lambda_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ *está bien definida:*

$$\begin{aligned} |\Lambda_y(x)| &\le \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\,|y_n| \\ &\le \|x\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| \\ &= \|x\|_\infty \|y\|_1 < \infty. \end{aligned}$$

Λ_y es lineal en l^∞: Sean $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$ y $x = (x_n)$, $z = (z_n) \in (l^\infty)^*$.

$$\begin{aligned}
\Lambda_y(\alpha x + \beta z) &= \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha x_n + \beta z_n) y_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha x_n y_n + \sum_{n=1}^{\infty} \beta z_n y_n \\
&= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} z_n y_n \\
&= \alpha\Lambda_y(x) + \beta\Lambda_y(z).
\end{aligned}$$

Λ_y es continua:

$$|\Lambda_y(x)| \leq \|y\|_1 \|x\|_\infty \ \forall x \in l^\infty \Longrightarrow \|\Lambda_y\|_{(l^\infty)^*} \leq \|y\|_1 .$$

Sea

$$\begin{aligned}
\varphi &: l^1 \longrightarrow (l^\infty)^* \\
\varphi(y) &= \Lambda_y.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Veamos que φ es lineal: Si $y_1, y_2 \in l^1$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ entonces

$$\varphi(\lambda y_1 + \mu y_2) = \Lambda_{\lambda y_1 + \mu y_2} = \lambda\Lambda_{y_1} + \mu\Lambda_{y_2} = \lambda\varphi(y_1) + \mu\varphi(y_2).$$

φ preserva la norma (con ésto tendremos que es una isometría y por lo tanto es 1-1 y continua):

Demostremos que para toda $y \in l^1$ tenemos que $\|\varphi(y)\|_{(l^\infty)^*} = \|y\|_1$. Primero, tenemos que $\|\varphi(y)\|_{(l^\infty)^*} = \|\Lambda_y\|_{(l^\infty)^*} \leq \|y\|_1$.

Para mostrar la igualdad consideremos la sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty \in l^\infty$ definida así:

$$x_n = \begin{cases} \frac{\overline{y_n}}{|y_n|} & \text{si} \quad y_n \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y_n = 0 \end{cases}$$

Claramente, $|x_n| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y además:

$$\Lambda_y\left((x_n)_{n=1}^\infty\right) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n = \sum_{n=1}^\infty |y_n| = \|y\|_1 \Longrightarrow \|\Lambda_y\|_{(l^\infty)^*} = \|y\|_1 .$$

Por tanto, φ es isometría, luego también es 1-1.

Así, $\varphi : l^1 \longrightarrow (l^\infty)^*$ preserva la norma , es 1-1 y es continua.

Sin embargo, φ no es sobre. Para mostrar ésto usaremos el **Teorema de Hahn-Banach**.

Consideremos el siguiente subespacio c de l^∞ que consta de las sucesiones convergentes y sea $\Gamma : c \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que

$$\Gamma((x_n)_{n=1}^\infty) = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Claramente Γ es lineal: Sean α, $\beta \in \mathbb{K}$ y $x, z \in c$, tal que $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $z = (z_n)_{n=1}^{\infty}$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha x + \beta z) &= \Gamma(\alpha (x_n)_{n=1}^{\infty} + \beta (z_n)_{n=1}^{\infty}) \\
&= \lim_{n\to\infty} (\alpha x_n + \beta z_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \alpha x_n + \lim_{n\to\infty} \beta z_n \\
&= \alpha \lim_{n\to\infty} x_n + \beta \lim_{n\to\infty} z_n \\
&= \alpha\Gamma(x) + \beta\Gamma(z).
\end{aligned}$$

Γ es continua: si $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c$, tenemos:

$$|\Gamma((x_n)_{n=1}^{\infty})| = \left|\lim_{n\to\infty} x_n\right| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \|x\|_{\infty} \Longrightarrow |\Gamma(x)| \leq \|x\|_{\infty}$$

$\Longrightarrow \|\Gamma\|_{c^*} \leq 1.$

Más aún, $\|\Gamma\|_{c^*} = 1$, pues la sucesión $x_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ cumple con

$$|\Gamma((x_n))| = 1 = \|(x_n)\|_{\infty}.$$

Por el **Teorema de Hahn-Banach** existe $\widetilde{\Gamma} : l^{\infty} \longrightarrow \mathbb{K}$ lineal y continua tal que

$$\widetilde{\Gamma}\mid_c = \Gamma \text{ y } \left\| \widetilde{\Gamma} \right\|_{(l^\infty)^*} = \|\Gamma\|_{c^*} = 1.$$

Ahora bien, si la φ definida en (2.11) fuera sobre, entonces para $\widetilde{\Gamma} \in (l^\infty)^*$ debe existir $y \in l^1$ tal que $\varphi(y) = \widetilde{\Gamma}$, esto es, $\Lambda_y = \widetilde{\Gamma}$.

Por tanto, $\forall x = (x_n)_{n=1}^\infty \in l^\infty$, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \Lambda_y(x) = \widetilde{\Gamma}(x).$$

Tomando la sucesión $(e_n)_{n=1}^\infty \in l^\infty$, tal que $e_n = \left(e_n^{(k)}\right)_{k=1}^\infty$ donde $e_n^{(k)} = \delta_{nk}$ con $e_n \in c_0 \subset c$, tenemos:

$$0 = \Gamma(e_n) = \widetilde{\Gamma}(e_n) = \sum_{k=1}^{\infty} e_n^{(k)} y_k = y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Longrightarrow \Lambda_y \equiv 0$

$\Longrightarrow \widetilde{\Gamma} = 0 \Longrightarrow \left\|\widetilde{\Gamma}\right\|_{(l^\infty)^*} = 0$, lo que nos lleva a una contradicción. ■

De acuerdo al teorema anterior podemos decir que $l^1 \underset{\neq}{\hookrightarrow} (l^\infty)^*$.

Hasta este momento no hemos dicho quién es $(l^\infty)^*$; este problema lo abordaremos en el Capítulo 4, Sección 4.

Capítulo 3

El Espacio Dual de $C([a,b])$

En este capítulo obtendremos un teorema para representar a los funcionales lineales acotados en $C([a,b])$ con valores complejos. Demostraremos que todo funcional lineal acotado en $C([a,b])$ se puede representar de manera única por una función normalizada de **variación acotada**, vía una **integral de Riemann-Stieltjes.** Por esta razón, haremos un breve recuento de algunas definiciones y resultados sobre **funciones de variación acotada** e **integral de Riemann-Stieltjes** que serán utilizados para la demostración del teorema principal de este capítulo.

3.1. Funciones de Variación Acotada

Las funciones de **variación acotada** están estrechamente relacionadas con las funciones monótonas y son muy importantes en la teoría de integración de **Riemann-Stieltjes.**

Sea $\mathcal{P}([a,b])$ la colección de particiones del intervalo $[a,b]$.

Definición 3.1 *Sea f definida en $[a,b]$ y $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición de $[a,b]$. Sea $\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$, para $k = 1, 2, ..., n$. Si existe un número positivo M tal que*

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| \leq M \quad \forall P \in \mathcal{P}([a,b])$$

*entonces diremos que f es de **variación acotada** en $[a,b]$.*

El siguiente resultado nos proporciona ejemplos de funciones de variación acotada:

Teorema 3.1 *(a) Si f es monótona en $[a,b]$, entonces f es de variación acotada en $[a,b]$.*

(b) Si f es continua en $[a,b]$ y si f' existe y además $|f'(x)| \leq M \quad \forall x \in (a,b)$ y alguna constante M, entonces f es de variación acotada en $[a,b]$.

Demostración. (a) Si f es creciente, entonces para cada partición de $[a,b]$ tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|\Delta f_k| &= \sum_{k=1}^{n}\Delta f_k\\ &= \sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-f(x_{k-1})]\\ &= f(b)-f(a).\end{aligned}$$

Cuando f es decreciente la demostración es similar.

(b) Sea $P=\{x_0,x_1,...,x_n\}\in\mathcal{P}(\,[a,b]\,)$.

Por el Teorema del Valor Medio, tenemos que:

$$\Delta f_k = f(x_k)-f(x_{k-1}) = f'(t_k)(x_k-x_{k-1}),\ t_k\in(x_{k-1},x_k)\,.$$

Así,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|\Delta f_k| &= \sum_{k=1}^{n}|f'(t_k)|\,(x_k-x_{k-1})\\ &= \sum_{k=1}^{n}|f'(t_k)|\,\Delta x_k\\ &\leq M\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k\\ &= M(b-a).\end{aligned}$$

■

Es claro que toda función de variación acotada es acotada. Basta considerar la partición $\{a,\ x,\ b\}$ de $[a,b]$ donde $x \in (a,b)$.

1. En este ejemplo construiremos una función continua que **no es de variación acotada**. Sea

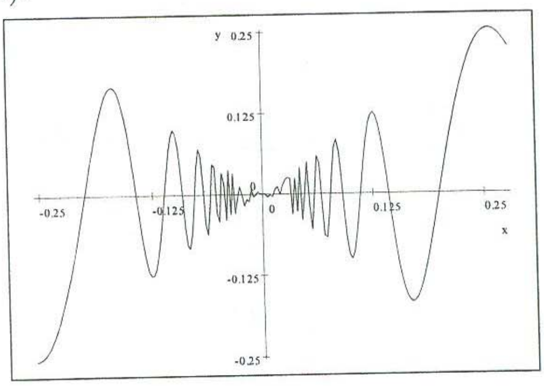
$$f(x) = \begin{cases} x\cos\left(\dfrac{\pi}{2x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Claramente f es continua en $[0,1]$. Si consideramos la partición de $2n$ subintervalos: $P = \left\{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, ..., \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$, se puede ver fácilmente que:

$$\sum_{k=1}^{2n} |\Delta f_k| = \tfrac{1}{2n} + \tfrac{1}{2n} + \tfrac{1}{2n-2} + \tfrac{1}{2n-2} + ... + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{1}{2} + ... + \tfrac{1}{n}$$

la cual es una suma no acotada ya que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge. Por lo tanto, f no es de variación acotada.

Gráficamente $f(x)$:



Definición 3.2 *Sea f una función de variación acotada en $[a,b]$ y sea $\sum(P)$ la suma $\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k|$ correspondiente a la partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a,b]$. El*

número $V_f(a,b) = \sup\{\sum(P) : P \in \mathcal{P}([a,b])\}$ *se llama variación total de* f *en el intervalo* $[a,b]$.

Observemos que como f es de variación acotada en $[a,b]$, el número V_f es finito. Además $V_f \geq 0$, y también $V_f(a,b) = 0$ si y sólo si f es constante en el intervalo $[a,b]$.

Es muy sencillo demostrar que la suma de dos funciones de variación acotada es de variación acotada, al igual que su diferencia y su producto.

También, se puede demostrar que la variación total es aditiva. De hecho si f es de variación acotada en $[a,b]$ y $c \in (a,b)$, entonces f es de variación acotada en $[a,c]$ y en $[c,b]$ y además

$$V_f(a,b) = V_f(a,c) + V_f(c,b).$$

Se tiene también el siguiente resultado:

Teorema 3.2 *Sea* f *una función de variación acotada en* $[a,b]$ *y defínase* $V : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *así:*

$$V(x) = \begin{cases} V_f(a,x) & si \quad a < x \leq b \\ 0 & si \quad x = a \end{cases}.$$

Entonces:

(i) V *es una función creciente en* $[a,b]$.

(ii) $V - f$ es una función creciente en $[a,b]$.

Demostración. (i) Si $a < x < y \leq b$, tenemos:

$$V_f\,(a,y) = V_f\,(a,x) + V_f\,(x,y)\,.$$

Así:

$$\begin{aligned} V(y) - V(x) &= V_f(a,x) + V_f(x,y) - V_f(a,x) \\ &= V_f(x,y) \end{aligned}$$

Luego, $V(x) \leq V(y)$, ya que $V_f(x,y) \geq 0$.

Por lo tanto, V es una función creciente en $[a,b]$.

Para demostrar (ii), sea

$$D(x) = V(x) - f(x) \text{ si } x \in [a,b]\,.$$

Entonces, si $a \leq x < y \leq b$, tenemos:

$$\begin{aligned} D(y) - D(x) &= V(y) - V(x) - [f(y) - f(x)] \\ &= V_f(x,y) - [f(y) - f(x)]\,. \end{aligned}$$

Luego, por definición de variación total tenemos que:

$$V_f(x, y) - [f(y) - f(x)] \geq 0$$

Así, $D(y) - D(x) \geq 0$.

Por lo tanto, $V - f$ es creciente en $[a, b]$. ■

La siguiente caracterización se obtiene de modo inmediato del Teorema 3.2:

Teorema 3.3 *Sea f definida sobre $[a, b]$. Entonces f es de variación acotada en $[a, b]$ si y sólo si f puede expresarse como diferencia de dos funciones crecientes.*

3.2. Integral de Riemann-Stieltjes

Definición 3.3 *Sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición de $[a, b]$, sea t_k un punto del subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ y sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada. Una suma de la forma:*

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta\alpha_k$$

se llama suma de Riemann-Stieltjes de f respecto de α. Diremos que f es Riemann-Integrable respecto de α en $[a, b]$, lo cual denotamos por $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$ si existe un número A que satisface la siguiente propiedad: para cada $\varepsilon > 0$, existe una partición P_ε de $[a, b]$ tal que, para cada partición P más fina que P_ε y para cada elección de los puntos t_k del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, se tiene $|S(P, f, \alpha) - A| < \varepsilon$.

Cuando tal número A existe, es único y se representa por medio de $\int_a^b f d\alpha$. Se llama **la integral de Riemann-Stieltjes** de f respecto a α. A las funciones f y α se les llama integrando e integrador, respectivamente. Nótese que si $\alpha(x) = x$, obtenemos la integral de Riemann de f.

Puede verse fácilmente que la integral de Riemann-Stieltjes opera de forma lineal tanto sobre el integrando como sobre el integrador.

En las integrales de Riemann-Stieltjes existe una relación notable entre el integrando y el integrador. La existencia de $\int_a^b f d\alpha$ implica la existencia de $\int_a^b \alpha df$ y recíprocamente. De hecho:

Teorema 3.4 *(**Fórmula de Integración por Partes**) Si $f \in R(\alpha)$ en $[a,b]$, entonces $\alpha \in R(f)$ en $[a,b]$ y además:*

$$\int_a^b f d\alpha + \int_a^b \alpha df = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a).$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\int_a^b f d\alpha$ existe, podemos hallar $P_\varepsilon \in \mathcal{P}([a,b])$ tal que para cada P' más fina que P_ε, tenemos:

$$\left| S(P', f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha \right| < \varepsilon \tag{3.1}$$

Si P es otra partición más fina que P_ε tendremos:

$$S(P,\alpha,f)=\sum_{k=1}^{n}\alpha(t_k)\Delta f_k=\sum_{k=1}^{n}\alpha(t_k)f(x_k)-\sum_{k=1}^{n}\alpha(t_k)f(x_{k-1}), \tag{3.2}$$

Sea $A=f(b)\alpha(b)-f(a)\alpha(a)$. Así:

$$A=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\alpha(x_k)-\sum_{k=1}^{n}f(x_{k-1})\alpha(x_{k-1}). \tag{3.3}$$

Sustrayendo (3.2) de (3.3) obtenemos:

$$A-S(P,\alpha,f)=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\left[\alpha(x_k)-\alpha(t_k)\right]+\sum_{k=1}^{n}f(x_{k-1})\left[\alpha(t_k)-\alpha(x_{k-1})\right].$$

Las dos sumas de la derecha pueden combinarse en una sola suma de la forma $S(P',f,\alpha)$, en donde P' es la partición de $[a,b]$ obtenida juntando los puntos x_k y t_k. Entonces P' es más fina que P y por lo tanto más fina que P_ε. Luego, por (3.1) tendremos que:

$$\left|A-S(P,\alpha,f)-\int_a^b f d\alpha\right|<\varepsilon$$

siempre que P sea más fina que P_ε. Así $\displaystyle\int_a^b \alpha df$ existe y es igual a $A-\displaystyle\int_a^b f d\alpha$.

■

Cuando α es una función creciente, podemos considerar sumas superiores e inferiores, como en el caso de la integral de Riemann, ya que $\Delta\alpha_k \geq 0$ $\forall k$.

Definición 3.4 *Sea P una partición de $[a,b]$ y sean:*

$$M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \quad m_k(f) = \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Los números

$$U(P,f,\alpha) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\Delta\alpha_k \quad y \quad L(P,f,\alpha) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\Delta\alpha_k$$

se llaman, respectivamente, sumas superior e inferior de Stieltjes de f con respecto a α para la partición P.

La integral superior de f respecto a α es:

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \text{ínf}\{U(P,f,\alpha) : P \in \mathcal{P}([a,b])\}.$$

La integral inferior de f respecto de α es:

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha = \sup\{L(P,f,\alpha) : P \in \mathcal{P}([a,b])\}.$$

Definición 3.5 *Diremos que f satisface la condición de Riemann respecto de α en $[a,b]$ si, para cada $\varepsilon > 0$, existe una partición P_ε tal que si P es más fina que P_ε implica $0 \leq U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \varepsilon$.*

Se puede demostrar la equivalencia de los siguientes enunciados (ver [1]):

1. $f \in R(\alpha)$ en $[a,b]$.

2. f satisface la condición de Riemann respecto de α en $[a,b]$.

3. $\overline{\int_a^b} f d\alpha = \underline{\int_a^b} \alpha df$

El siguiente teorema nos da condiciones suficientes para la existencia de la integral de Riemann-Stieltjes:

Teorema 3.5 *Si f es continua en $[a,b]$ y si α es de* ***variación acotada*** *en $[a,b]$, entonces $f \in R(\alpha)$ en $[a,b]$.*

Demostración. Basta demostrar el resultado cuando α es creciente y $\alpha(a) < \alpha(b)$.

Como f es continua en $[a,b]$ es uniformemente continua ahí, luego dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un $\delta > 0$ (que depende sólo de ε) tal que si $|x-y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{A}$, en donde $A = 2\,[\alpha(b) - \alpha(a)]$.

Si P_ε es una partición de norma $\|P_\varepsilon\| < \delta$, entonces para P más fina que P_ε tendremos $M_k(f) - m_k(f) \leq \frac{\varepsilon}{A}$, ya que

$$M_k(f) - m_k(f) = \sup\{f(x) - f(y) : x,\, y \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Así:

$$U(P,f,\alpha) - L(P,f,\alpha) < \frac{\varepsilon}{A}\sum_{k=1}^{n} \Delta\alpha_k = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

y por lo tanto se verifica la condición de Riemann. Luego, $f \in R(\alpha)$ en $[a,b]$. ∎

Concluimos esta sección con el siguiente resultado que nos será de mucha utilidad posteriormente:

Proposición 3.6 *Si $f \in R(\alpha)$ en $[a,b]$ donde α es de* ***variación acotada*** *en $[a,b]$ y V_α designa la variación total de α en $[a,b]$, entonces:*

$$\left|\int_a^b f d\alpha\right| \leq \|f\|_\infty V_\alpha.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, existe $P_\varepsilon \in \mathcal{P}([a,b])$ tal que para toda $P \supset P_\varepsilon$ donde $P = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ y $\forall t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tenemos:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta\alpha_k - \int_a^b f d\alpha\right| < \varepsilon.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f d\alpha\right| &\leq \left|\int_a^b f d\alpha - \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta\alpha_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta\alpha_k\right| \\
&< \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} |f(t_k)|\,|\Delta\alpha_k| \\
&\leq \varepsilon + \|f\|_\infty V_\alpha.
\end{aligned}$$

Así, para todo $\varepsilon > 0$ tenemos que: $\left|\int_a^b f d\alpha\right| \leq \varepsilon + \|f\|_\infty V_\alpha$,

entonces: $\left|\int_a^b f d\alpha\right| \leq \|f\|_\infty V_\alpha.$ ■

3.3. El Espacio Dual de $C([a,b])$

En esta sección probaremos que toda funcional lineal acotada f en el espacio $C([a,b])$ se puede representar por medio de una **función normalizada de variación acotada** g definida en $[a,b]$, esto es, para todo $x \in C([a,b])$,

$$f(x) = \int_a^b x(t)dg(t),$$

donde esta integral es de Riemann-Stieltjes.

Denotemos por

$$BV([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{C} \ / \ f \text{ es de variación acotada en } [a,b]\}.$$

Para $x \in BV([a,b])$ definimos

$$\|x\| = V_x + |x(a)|,$$

donde V_x es la variación total de x en $[a,b]$.

De hecho, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.7 *$(BV([a,b]), \|.\|)$ es un espacio de **Banach**.*

Demostración. Primero, *observemos que $BV([a,b])$ es un espacio vectorial sobre*

$\mathbb{K}$ ya que la suma de funciones de variación acotada es de variación acotada e igualmente αg es de variación acotada si $\alpha \in \mathbb{K}$ y $g \in BV([a,b])$.

Ahora, mostremos que $\|.\|$ *es una norma:*

Sea $f \in BV([a,b])$. Claramente $\|f\| \geq 0$ pues $V_f \geq 0$ por definición y $|f(a)| \geq 0$.

Si $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \|\lambda f\| &= V_{\lambda f} + |\lambda f(a)| \\ &= |\lambda| V_f + |\lambda| |f(a)| \\ &= |\lambda| (V_f + |f(a)|) \\ &= |\lambda| \|f\| . \end{aligned}$$

También, si $\|f\| = 0$, entonces $V_f = 0$ y $|f(a)| = 0$, pero si $V_f = 0$ entonces f debe de ser constante en $[a,b]$ ya que $\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| = 0$, luego como $f(a) = 0$ forzosamente $f = 0$. Finalmente,

$$\begin{aligned} \|f+g\| &= V_{f+g} + |(f+g)(a)| \\ &\leq V_f + V_g + |f(a)| + |g(a)| \\ &= V_f + |f(a)| + V_g + |g(a)| \\ &= \|f\| + \|g\| . \end{aligned}$$

Veamos que $(BV([a,b]), \|.\|)$ *es un* **espacio de Banach:**

Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $BV([a,b])$.

Así, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq N$, $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$, esto es,

$$V_{f_n - f_m} + |f_n(a) - f_m(a)| < \varepsilon \text{ si } n, m \geq N. \tag{3.4}$$

Ésto implica que $(f_n(a))_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$ y por tanto existe $f(a) \in \mathbb{K}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(a) \equiv f(a) \in \mathbb{K}.$$

Consideremos ahora $a < x \leq b$ y sea $P = \{a, x, b\} \in \mathcal{P}([a,b])$.

De (3.4) tenemos que :

$$|f_n(a) - f_m(a)| + |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(a)|$$

$$+ |(f_n - f_m)(b) - (f_n - f_m)(x)| < \varepsilon.$$

Si $n, m \geq N$ entonces:

$$|f_n(a) - f_m(a)| + |(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(a)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |(f_n - f_m)(a)| + |(f_n - f_m)(x)| - |(f_n - f_m)(a)| < \varepsilon.$$

Luego:

$$|(f_n - f_m)(x)| < \varepsilon \ \ \forall n, m \geq N \ y \ x \in [a,b]\,.$$

Así, $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$ y por tanto existe

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Veamos que $f \in BV\,([a,b])$.

Sea $P \in \mathcal{P}(\,[a,b]\,)$ digamos $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ y fijemos $n \geq N$.

Se tiene que:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{r} |(f_n - f)(x_k) - (f_n - f)(x_{k-1})| \\
= & \sum_{k=1}^{r} \lim_{m\to\infty} |(f_n - f_m)(x_k) - (f_n - f_m)(x_{k-1})| \\
= & \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{r} |(f_n - f_m)(x_k) - (f_n - f_m)(x_{k-1})| \\
\leq & \ \overline{\lim_{m\to\infty}} V_{f_n - f_m} \\
\leq & \ \varepsilon \quad \text{por (3.4).}
\end{aligned}$$

Entonces $f_n - f \in BV([a,b]) \quad \forall n \geq N$ y como $f_n \in BV([a,b])$ se sigue que $f \in BV([a,b])$.

Falta ver que $f_n \to f$ en $BV([a,b])$. En efecto, por (3.4)

$$\sum_{k=1}^{r} |(f_n - f_m)(x_k) - (f_n - f_m)(x_{k-1})| + |f_n(a) - f_m(a)| < \varepsilon \text{ si } n, m \geq N$$

Fijamos $n \geq N$ y tomamos límite si $m \to \infty$ y obtenemos

$$\sum_{k=1}^{r} |(f_n - f)(x_k) - (f_n - f)(x_{k-1})| + |f_n(a) - f(a)| \leq \varepsilon,$$

lo cual implica que

$$V_{f_n - f} + |f_n(a) - f(a)| \leq \varepsilon \text{ si } n \geq N$$

Por lo tanto,

$$\|f_n - f\| = V_{f_n - f} + |f_n(a) - f_m(a)| \leq \varepsilon \text{ si } n \geq N \ .$$

■

Ahora, estamos listos para iniciar la construcción del dual de $C([a,b])$.

3.3.1. Un Teorema de Representación Para Funcionales Lineales Acotados en $C([a,b])$

El siguiente teorema es un resultado de existencia, en el que construiremos una función con las propiedades deseadas.

Teorema 3.8 *Sea* $f \in (C([a,b]))^*$. *Entonces existe una función* $g \in BV([a,b])$ *tal que* $\forall x \in C([a,b])$

$$f(x) = \int_a^b x(t)dg(t) \quad y \text{ tal que } \quad \|f\| = V_g.$$

Demostración. Como $C([a,b])$ es un subespacio de $B([a,b])$, por el Corolario 1.10 del **Teorema de Hahn-Banach** existe un funcional lineal acotado F definido en $B([a,b])$ que extiende a f y es tal que $\|F\| = \|f\|$.

Para cada $s \in (a,b]$ consideremos la función característica de $[a,s]$:

$$\chi_{[a,s]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [a,s] \\ 0 & \text{si} \quad t \notin [a,s] \end{cases}.$$

Es claro que que $\chi_{[a,s]} \in B([a,b]) \quad \forall s \in (a,b]$.

Ahora, definamos la función $g : [a,b] \to \mathbb{K}$ tal que:

$$g(s) = \begin{cases} F(\chi_{[a,s]}) & \text{si} \quad s \in (a,b] \\ 0 & \text{si} \quad s = a \end{cases}.$$

Sea $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ una partición de $[a,b]$ y definamos para cada $i = 1, 2, ..., n$

$$\alpha_i = \begin{cases} \dfrac{\overline{g(t_i) - g(t_{i-1})}}{|g(t_i) - g(t_{i-1})|} & \text{si} \quad g(t_i) - g(t_{i-1}) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad g(t_i) - g(t_{i-1}) = 0 \end{cases}.$$

Enseguida, definamos la función $y : [a,b] \to \mathbb{K}$ tal que,

$$y(t) = \begin{cases} \alpha_1 & \text{si} \quad t_0 \leq t \leq t_1 \\ \alpha_i & \text{si} \quad t_{i-1} < t \leq t_i, \quad i = 2, ..., n \end{cases}.$$

Nótese que y es una función escalonada, de hecho:

$$y(t) = \alpha_1 \chi_{[t_0,t_1]}(t) + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \chi_{(t_{i-1},t_i]}(t).$$

Claramente, y es una función acotada en $[a,b]$ y puesto que $|\alpha_i| = 0$ ó 1 $\forall i$, entonces $\|y\|_\infty \leq 1$.

Afirmamos que:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(y_i(t) - y_{i-1}(t) \right) \quad \text{donde} \\ y_i &= \chi_{[a,t_i]} \qquad\qquad i = 1, ..., n \\ y_0 &= 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

En efecto, supongamos por ejemplo que $t_0 \leq t \leq t_1$.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(y_i(t) - y_{i-1}(t) \right) \\ = \;& \alpha_1 \left(y_1(t) - y_0(t) \right) + \alpha_2 \left(y_2(t) - y_1(t) \right) + ... + \alpha_n \left(y_n(t) - y_{n-1}(t) \right) \\ = \;& \alpha_1 (1 - 0) + \alpha_2 (1 - 1) + ... + \alpha_n (1 - 1) \\ = \;& \alpha_1 = y(t). \end{aligned}$$

Los otros casos para t se prueban de modo análogo.

Enseguida, aplicamos F a la función y:

$$F(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(F(y_i) - F(y_{i-1}) \right)$$

y como $F(y_i) = F(\chi_{[a,t_i]}) = g(t_i)$, entonces por definición de α_i

$$
\begin{aligned}
F(y) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(g(t_i) - g(t_{i-1})\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left|g(t_i) - g(t_{i-1})\right|,
\end{aligned}
$$

lo cual implica que:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \left|g(t_i) - g(t_{i-1})\right| &= |F(y)| \\
&\leq \|F\| \, \|y\|_\infty \\
&\leq \|F\| = \|f\|
\end{aligned}
$$

y esta desigualdad es válida para cualquier partición de $[a, b]$.

Así, $g \in BV([a, b])$ y además,

$$V_g \leq \|f\| \,. \tag{3.6}$$

Ahora, sea $x \in C([a, b])$ y defínase:

$$
\begin{aligned}
z(t) &= \sum_{i=1}^{n} x(t_{i-1}) \left(y_i(t) - y_{i-1}(t)\right) \\
&= x(a)\chi_{[a,t_1]}(t) + x(t_1)\chi_{(t_1,t_2]}(t) + \ldots + x(t_{n-1})\chi_{(t_{n-1},b]}(t).
\end{aligned}
$$

Claramente z es una función escalonada que depende de la partición y aproxima a x, cuando la norma de la partición es pequeña.

Puesto que $z \in B([a,b])$ podemos aplicarle el funcional F y obtenemos:

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{i=1}^{n} x(t_{i-1}) \left(F(y_i) - F(y_{i-1}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x(t_{i-1}) \left(g(t_i) - g(t_{i-1}) \right). \end{aligned}$$

Así, tenemos que:

$$z(t) - x(t) = \begin{cases} x(t_0) - x(t) & \text{si} \quad t_0 \le t \le t_1 \\ x(t_{i-1}) - x(t) & \text{si} \quad t_{i-1} < t \le t_i, \quad i = 2, ..., n. \end{cases}$$

Sea $\eta = \max\limits_{1 \le i \le n} |t_i - t_{i-1}|$.

Usando el hecho de que x es uniformemente continua en $[a,b]$ ya que $x \in C([a,b])$, tenemos que:

$$\sup_{t \in [a,b]} |z(t) - x(t)| \longrightarrow 0 \ \text{ si } \ \eta \to 0 \text{ esto es, } \|z - x\|_\infty \longrightarrow 0 \text{ si } \eta \to 0.$$

Puesto que $z \longrightarrow x$ si $\eta \rightarrow 0$ en $(B([a,b]), \|.\|_\infty)$ y F es continua en $B([a,b])$ se tiene que

$$F(x) = \lim_{\eta \to 0} F(z) = \lim_{\eta \to 0} \sum_{i=1}^{n} x(t_{i-1}) \left(g(t_i) - g(t_{i-1})\right) = \int_a^b x(t) dg(t).$$

Notemos que esta integral de Riemann-Stieltjes existe debido a que x es continua y g tiene variación acotada en $[a,b]$ lo cual es garantizado por el Teorema 3.5 de la sección anterior.

Por consiguiente $F(x) = \displaystyle\int_a^b x(t)dg(t)$ y esta representación es válida para toda función continua de $[a,b]$.

Ahora, ya que $x \in C([a,b])$ fue arbitraria y $F = f$ en $C([a,b])$ tenemos:

$$f(x) = \int_a^b x(t)dg(t).$$

Con ésto queda demostrada la primera parte del teorema.

Nos falta ver que $\|f\| = V_g$, de hecho, sólo resta ver que $\|f\| \leq V_g$, pues la desigualdad opuesta fue mostrada en (3.6).

Notemos primero que $\forall x \in C([a,b])$, en virtud de la Proposición 3.6 de la sección anterior tenemos:

$$|f(x)| = \left| \int_a^b x(t)dg(t) \right| \leq \|x\|_\infty V_g.$$

De aquí se sigue que $\|f\| \leq V_g$. Ésto completa la demostración de nuestro teorema. ∎

3.3.2. Una Relación de Equivalencia Entre Funciones de Variación Acotada

El Teorema 3.8 nos ha mostrado una cierta correspondencia entre funcionales de $(C([a,b]))^*$ y funciones de variación acotada. Sin embargo, esta correspondencia de ninguna manera está bien definida pues si $g \in BV([a,b])$ y $f \in (C([a,b]))^*$ es tal que

$$f(x) = \int_a^b x(t)dg(t)$$

entonces es claro que $g(t) + c$ también verifica que

$$f(x) = \int_a^b x(t)d(g(t) + c),$$

pues la integral de Riemann-Stieltjes es lineal con respecto a los integradores y además si el integrador es constante entonces la integral es 0.

De hecho, afirmamos que si $h \in BV([a,b])$ es tal que $h(a) = g(a)$, $h(b) = g(b)$ y $h(t) = g(t)$ $\forall t \in (a,b)$ donde g sea continua en t, entonces

$$f(x) = \int_a^b x(t)dg(t) = \int_a^b x(t)dh(t) \tag{3.7}$$

En efecto, dado que $g \in BV([a,b])$ entonces el conjunto de discontinuidades de g es a lo más numerable; luego, dado cualquier $\eta > 0$ siempre es posible elegir una partición $P \in \mathcal{P}([a,b])$, digamos $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$ con $\|P\| < \eta$ y $t_1, ..., t_{n-1}$, puntos de continuidad de g. Si $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$, tendremos

$$\begin{aligned} S(P,x,g) &= \sum_{k=1}^{n} x(\xi_{k-1})\,[g(t_k) - g(t_{k-1})] \\ &= \sum_{k=1}^{n} x(\xi_{k-1})\,[h(t_k) - h(t_{k-1})] \\ &= S(P,x,h) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \lim_{\|P\|\to 0} S(P,x,g) = \lim_{\|P\|\to 0} S(P,x,h), \text{ esto es, } \int_a^b x(t)dg(t) = \int_a^b x(t)dh(t),$$

quedando probada así nuestra afirmación.

Ahora, definiremos la siguiente relación de equivalencia en $BV([a,b])$:

Dadas x_1, $x_2 \in BV([a,b])$ definimos:

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow \int_a^b y(t)dx_1(t) = \int_a^b y(t)dx_2(t) \quad \forall y \in C([a,b]).$$

Puede verificarse fácilmente que $\sim$ es una relación de equivalencia (nótese que esta relación de equivalencia ha sido definida justo de acuerdo a nuestras necesidades).

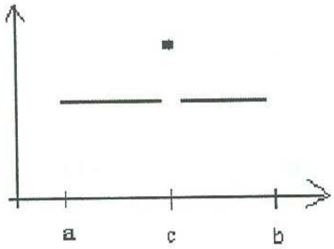
Enseguida enunciaremos y demostraremos un criterio para que una función

$x \in BV([a,b])$ sea equivalente a la función 0:

Lema 3.9 *Dada* $x \in BV([a,b])$, $x \sim 0 \Leftrightarrow \forall c \in (a,b)\; x(a) = x(b) = x(c^+) = x(c^-)$.

Antes de probar el lema observemos que éste no implica que x sea una función continua en cada $c \in (a,b)$ pues pueden construirse ejemplos sencillos donde $x(c^+) = x(c^-) \neq x(c)$.

Ejemplo:



Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que $x \sim 0$. Tomando $y(t) = 1 \quad \forall\, t \in [a,b]$ tenemos que: como $x \sim 0 \Rightarrow \int_a^b dx(t) = \int_a^b d0(t) = 0$ así,

$$0 = \int_a^b dx(t) = x(b) - x(a) \Rightarrow x(b) = x(a) \tag{3.8}$$

Enseguida observamos que:

Si $a \leq c < b$ y $h > 0$ se tiene que:

$$\frac{1}{h}\int_c^{c+h} x(t)dt \longrightarrow x(c^+) \text{ cuando } h \longrightarrow 0 \tag{3.9}$$

y si $a < c \leq b$ y $h > 0$ tenemos:

$$\frac{1}{h}\int_{c-h}^{c} x(t)dt \longrightarrow x(c^{-}) \text{ cuando } h \longrightarrow 0 \tag{3.10}$$

En efecto, dado que toda función de variación acotada es la diferencia de dos funciones crecientes, será suficiente suponer que x es creciente. Puesto que $x(c^{+})$ y $x(c^{-})$ siempre existen y de hecho,

$$\begin{aligned} x(c^{+}) &= \inf_{c<t<c+h} x(t) \qquad & a \leq c < b,\ h > 0 \\ x(c^{-}) &= \sup_{c-h<t<c} x(t) \qquad & a < c \leq b,\ h > 0 \end{aligned}$$

tendremos que:

$$x(c^{+}) = \frac{1}{h}\int_{c}^{c+h} x(c^{+})dt \leq \frac{1}{h}\int_{c}^{c+h} x(t)dt \leq x(c+h)$$

Así,

$$x(c^{+}) \leq \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{c}^{c+h} x(t)dt \leq \lim_{h\to 0} x(c+h) = x(c^{+})$$

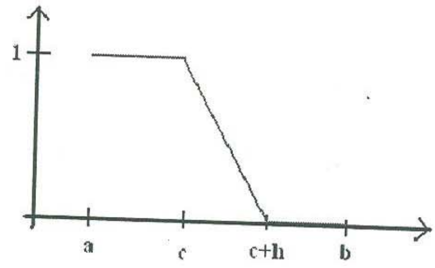
quedando demostrado (3.9). De modo análogo vemos que se cumple (3.10).

Ahora, demostremos que $x(a) = x(c^{+})$:

Consideremos la función continua:

$$y(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a \leq t \leq c \\ 1 - \frac{t-c}{h} & \text{si} \quad c < t \leq c+h \\ 0 & \text{si} \quad c+h < t \leq b \end{cases}$$

cuya gráfica es:



Para la función x considerada antes tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b y(t)dx(t) \\ &= \int_a^c dx(t) + \int_c^{c+h} y(t)dx(t) + \int_{c+h}^b 0dx(t) \\ &= x(c) - x(a) + \int_c^{c+h} y(t)dx(t). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Usando la Fórmula de Integración por Partes para Integrales de Riemann-Stieltjes

(Teorema 3.4 Sección 3.2) y la definición de $y(t)$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int_c^{c+h} y(t)dx(t) &= -\int_c^{c+h} x(t)dy(t) + x(c+h)y(c+h) - x(c)y(c) \\
&= -\int_c^{c+h} x(t)dy(t) - x(c) \\
&= -\int_c^{c+h} x(t)d(1 - \frac{t-c}{h}) - x(c) \\
&= \frac{1}{h}\int_c^{c+h} x(t)dt - x(c)
\end{aligned}$$

Por consiguiente, de (3.11) obtenemos:

$$\begin{aligned}
0 &= x(c) - x(a) - x(c) + \frac{1}{h}\int_c^{c+h} x(t)dt \qquad \text{o} \\
x(a) &= \frac{1}{h}\int_c^{c+h} x(t)dt
\end{aligned}$$

Hacemos que $h \to 0$ y por (3.9) concluimos que $x(a) = x(c^+)$.

De modo similar podemos mostrar que $x(a) = x(c^-)$ pero ahora usando (3.10) y una función $y(t)$ apropiada.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $x(a) = x(b) = x(c^+) = x(c^-)$, $a < c < b$

Definiendo la función constante: $\widehat{x}(t) = x(a) \;\; \forall t \in [a,b]$, obtenemos una función de variación acotada en $[a,b]$ tal que $\widehat{x}(b) = x(b)$ y $\widehat{x}(t) = x(t)$ en todos los $t \in (a,b)$ donde x es continua en t.

Por (3.7), tenemos:

$$\int_a^b y(t)dx(t) = \int_a^b y(t)d\widehat{x}(t) \quad \forall y \in C([a,b]).$$

Pero como $\displaystyle\int_a^b y(t)d\widehat{x}(t) = 0$ pues $\widehat{x}(t)$ es constante, entonces

$$\int_a^b y(t)dx(t) = 0.$$

Por lo tanto $x \sim 0$. ■

3.3.3. Funciones Normalizadas de Variación Acotada

Definición 3.6 *Diremos que la función $g \in BV([a,b])$ está normalizada si $g(a) = 0$ y g es continua por la derecha para toda $t \in (a,b)$, esto es, $g(t^+) = g(t)$.*

Denotaremos por $NBV([a,b])$ a la colección de todas las funciones normalizadas de variación acotada.

Claramente, $NBV([a,b])$ es un subespacio lineal de $BV([a,b])$.

Tenemos el siguiente:

Lema 3.10 *Sean $x_1, x_2 \in BV([a,b])$ donde $x_1 \sim x_2$ y x_1, x_2 están normalizadas. Entonces $x_1 = x_2$.*

Demostración. Como $x_1 \sim x_2$, es decir, $(x_1 - x_2) \sim 0$ tenemos por el Lema 3.9 que $\forall\ c \in (a, b)$:

$$(x_1 - x_2)(a) = (x_1 - x_2)(b) = (x_1 - x_2)(c^+) = (x_1 - x_2)(c^-)$$

Ahora bien, como x_1 y x_2 están normalizadas, entonces:

$x_1(a) = x_2(a) = 0$ por lo que $x_1(b) = x_2(b) = 0$ y también $x_1(c^+) = x_2(c^+)$, pero como x_1, x_2 son continuas por la derecha entonces

$$x_1(c) = x_1(c^+) = x_2(c^+) = x_2(c).$$

Por lo tanto,

$$x_1(t) = x_2(t) \quad \forall t \in [a, b].$$

■

3.3.4. Un Representante Normalizado para cada Clase de Equivalencia de $BV([a, b])$

Ahora, deseamos demostrar que para cada clase de equivalencia de $BV\,([a, b])$ bajo la relación $\sim$ definida previamente, hay un representante normalizado.

En vista del Lema 3.10 podemos entonces asegurar de manera inmediata que este representante es único ya que cualquier otra función normalizada equivalente tendrá que coincidir con dicho representante.

Así, nuestro interés se reduce a mostrar que dada $x \in BV([a,b])$ podemos encontrar una función $\widehat{x} \in NBV([a,b])$ tal que $x \sim \widehat{x}$, esto es, $(x - \widehat{x}) \sim 0$.

Sea $x \in BV([a,b])$.

Defínase $\widehat{x} : [a,b] \to \mathbb{C}$ tal que

$$\widehat{x}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t = a \\ x(t^+) - x(a) & \text{si} \quad a < t < b \\ x(b) - x(a) & \text{si} \quad t = b \end{cases}.$$

Se tiene entonces el siguiente:

Lema 3.11 *Si $\widehat{x}$ está definida como antes entonces:*

(i) $V_{\widehat{x}} \leq V_x$.

(ii) $\widehat{x} \in NBV([a,b])$.

(iii) $\widehat{x} \sim x$ *esto es,* $(x - \widehat{x}) \sim 0$.

Demostración. (i) Sea $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ una partición de $[a,b]$. Por definición de $x(t^+)$, dado $\varepsilon > 0$ existen $c_1, ..., c_{n-1}$ tales que $t_i < c_i$ para $i = 1, ..., n-1$ y

$$\left|x(t_i^+) - x(c_i)\right| < \frac{\varepsilon}{2n} \qquad i = 1, ..., n-1.$$

Ahora, usando la definición de $\widehat{x}(t)$ para cada $i = 2, ..., n-1$

$$
\begin{aligned}
\widehat{x}(t_i) - \widehat{x}(t_{i-1}) &= x(t_i^+) - x(a) - \big(x(t_{i-1}^+) - x(a)\big) \\
&= x(t_i^+) - x(t_{i-1}^+) \\
&= (x(t_i^+) - x(c_i)) - (x(t_{i-1}^+) - x(c_{i-1})) + (x(c_i) - x(c_{i-1}))
\end{aligned}
$$

Sean $c_0 = a$ y $c_n = b$, entonces:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |\widehat{x}(t_i) - \widehat{x}(t_{i-1})| &= |\widehat{x}(t_1) - \widehat{x}(t_0)| + \sum_{i=2}^{n-1} |\widehat{x}(t_i) - \widehat{x}(t_{i-1})| \\
&+ |\widehat{x}(t_n) - \widehat{x}(t_{n-1})| \\
&\leq \big|x(t_1^+) - x(c_1)\big| + |x(c_1) - x(c_0)| \\
&+ \sum_{i=2}^{n-1} \big|x(t_i^+) - x(c_i)\big| + \sum_{i=2}^{n-1} \big|x(t_{i-1}^+) - x(c_{i-1})\big| \\
&+ \sum_{i=2}^{n-1} |x(c_i) - x(c_{i-1})| + \big|x(t_{n-1}^+) - x(c_{n-1})\big| \\
&+ |x(c_n) - x(c_{n-1})| \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \big|x(t_i^+) - x(c_i)\big| + \sum_{i=2}^{n} \big|x(t_{i-1}^+) - x(c_{i-1})\big| \\
&+ \sum_{i=1}^{n} |x(c_i) - x(c_{i-1})| \\
&< n\frac{\varepsilon}{2n} + n\frac{\varepsilon}{2n} + \sum_{i=1}^{n} |x(c_i) - x(c_{i-1})| \\
&\leq \varepsilon + V_x \quad \forall \varepsilon > 0.
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow V_{\widehat{x}} \leq V_x.$

(ii) Por definición $\widehat{x}(a) = 0$.

Si $a < t < b$ entonces:

$$
\begin{aligned}
\widehat{x}(t^+) &= \lim_{h \to 0^+} \widehat{x}(t+h) \\
&= \lim_{h \to 0^+} \left[x((t+h)^+) - x(a)\right] \\
&= \lim_{h \to 0^+} \left[\lim_{k \to 0^+} x((t+h)+k)\right] - x(a) \\
&= \lim_{h \to 0^+} \lim_{k \to 0^+} x(t+(h+k)) - x(a) \\
&= \lim_{\delta \to 0^+} x(t+\delta) - x(a) \\
&= x(t^+) - x(a) = \widehat{x}(t).
\end{aligned}
$$

(iii) Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
(x - \widehat{x})(a) &= x(a) - \widehat{x}(a) = x(a) \\
(x - \widehat{x})(b) &= x(b) - \widehat{x}(b) = x(a)
\end{aligned}
$$

Sea $a < c < b$, usando (ii) tenemos:

$$\begin{aligned}
(x - \widehat{x})(c^+) &= x(c^+) - \widehat{x}(c^+) \\
&= x(c^+) - \widehat{x}(c) \\
&= x(c^+) - \big(x(c^+) - x(a)\big) \\
&= x(a)
\end{aligned}$$

Asimismo,

$$\begin{aligned}
(x - \widehat{x})(c^-) &= x(c^-) - \widehat{x}(c^-) = x(c^-) - \lim_{h\to 0^+} \widehat{x}(c-h) \\
&= x(c^-) - \lim_{h\to 0^+} \left[x((c-h)^+) - x(a)\right] \\
&= x(a) + x(c^-) - \lim_{h\to 0^+} x((c-h)^+) \\
&= x(a) + \lim_{h\to 0^+} \left[x(c-h) - \lim_{k\to 0^+} x(c-h+k)\right] \\
&= x(a) + \lim_{h\to 0^+} \lim_{k\to 0^+} \left[x(c-h) - x(c-h+k)\right]
\end{aligned}$$

y tomando $k = \frac{h}{2}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
x(a) + \lim_{h\to 0^+} \lim_{k\to 0^+} \left[x(c-h) - x(c-h+k)\right] &= x(a) + \lim_{h\to 0^+} \left[x(c-h) - x\left(c - \frac{h}{2}\right)\right] \\
&= x(a) + x(c^-) - x(c^-) \\
&= x(a).
\end{aligned}$$

Es importante recalcar que puesto que x y $\widehat{x}$ son funciones de variación acotada en $[a,b]$, entonces poseen límites laterales, lo cual hemos estado utilizando a lo largo de esta prueba. ■

Ya poseemos todas las herramientas necesarias para probar el resultado principal de esta sección.

3.3.5. El Dual de $C([a,b])$

Teorema 3.12 *El dual de $C([a,b])$ es el espacio $NBV([a,b])$, esto es, $(C([a,b]))^*$ y $NBV([a,b])$ son isométricamente isomorfos.*

El isomorfismo esta dado del modo siguiente:

$$T : NBV([a,b]) \to (C([a,b]))^*$$

$$g \to T(g) = f,$$

donde

$$f(x) = \int_a^b x(t)dg(t) \quad \forall x \in C\left([a,b]\right).$$

Demostración. Sean $g_1,\, g_2 \in NBV([a,b])$ y $\alpha,\, \beta \in \mathbb{K}$.

Sea

$$h = T(\alpha g_1 + \beta g_2), \quad f_j = T(g_j), \; j = 1,2$$

Así, para toda $x \in C([a,b])$

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_a^b x(t)d(\alpha g_1 + \beta g_2)(t) \\ &= \alpha \int_a^b x(t)dg_1(t) + \beta \int_a^b x(t)dg_2(t) \\ &= \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) \end{aligned}$$

esto es,

$$h = \alpha f_1 + \beta f_2 \qquad \text{o} \qquad T(\alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha T(g_1) + \beta T(g_2)$$

Ésto muestra la linealidad de T.

Es claro que $T(g)$ es una funcional lineal para cada $g \in NBV\,([a,b])$ puesto que la integral de Riemann-Stieltjes es lineal en el integrando.

Además $T(g) \equiv f$ es continua pues como vimos anteriormente:

$$|f(x)| = \left| \int_a^b x(t)dg(t) \right| \leq \|x\|_\infty V_g,$$

lo cual implica

$$\|f\| \leq V_g = \|g\| \quad \text{donde} \quad \|g\| \quad \text{es la norma de } g \text{ como elemento de } NBV\,([a,b])\,,$$

esto es,

$$\|g\| = |g(a)| + V_g = V_g.$$

Tenemos así probado que:

$$\|f\| = \|T(g)\|_{(C([a,b]))^*} \leq \|g\|_{NBV([a,b])}\,.$$

Mostremos ahora que T es sobre:

Sea $f \in C\left([a,b]\right)^*$. Debido al Teorema 3.8 existe $h \in BV\left([a,b]\right)$ tal que

$$f(x) = \int_a^b x(t)dh(t).$$

Por el Lema 3.11, existe una única función normalizada $g \in NBV\left([a,b]\right)$ tal que $h \sim g$.

Así,

$$f(x) = \int_a^b x(t)dh(t) = \int_a^b x(t)dg(t).$$

Ésto muestra que $Tg = f$ con $g \in NBV\left([a,b]\right)$.

Sólo resta probar que T es una isometría.

Con f, g, h como antes, debido al Teorema 3.8 tenemos que $\|f\| = V_h$.

Luego, por el Lema 3.11

$$\|f\| \leq V_g \leq V_h = \|f\|.$$

(la primera desigualdad se cumple debido a que

$$|f(x)| \leq \|x\|_\infty V_g \qquad \forall x \in C([a,b]))$$

Por consiguiente:

$$\|f\| = V_g = \|g\|_{NBV([a,b])} \quad \text{o} \quad \|T(g)\|_{(C([a,b]))^*} = \|g\|_{NBV([a,b])}$$

Así, T es una isometría y por tanto, T es un isomorfismo isométrico. ∎

Capítulo 4

El Dual de los Espacios L^p, $1 \leq p < \infty$

En este capítulo demostraremos que el **espacio dual** de $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$, $1 \leq p < \infty$, donde $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida, es el espacio $L^{p'}(X, \mathcal{F}, \mu)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Presentaremos dos pruebas de este resultado. La primera de ellas es la clásica demostración que aparece en la mayoría de los textos de Teoría de la Medida y está basada en una herramienta muy fuerte y algo sofisticada: el Teorema de Radon-Nikodým. Además, esta demostración supone que el espacio de medida es σ-finito. Las secciones 1 y 2 de este capítulo estarán dedicadas a realizar esta tarea. En la sección 3 daremos otra demostración del mismo resultado, pero ahora cuando $1 < p < \infty$. Esta prueba, debida a E. J. McShane, supone un bagaje mínimo de Teoría de la Medida y está basada en cálculos que aunque laboriosos son relativamente elementales. Por lo anterior, reviste gran interés.

4.1. El Teorema de Radon-Nikodým

Daremos inicio a esta sección haciendo un brevísimo recordatorio de algunas cuestiones básicas de Teoría de la Medida.

Estaremos siempre considerando un espacio de medida $(X, \mathcal{F}, \mu)$ y funciones medibles $f : X \to \mathbb{K}$. A veces, por comodidad, elegiremos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Cuando f es medible y no negativa, la integral de f respecto a μ se define como:

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int \varphi d\mu : 0 \leq \varphi \leq f, \, \varphi \text{ simple y medible} \right\}.$$

Esta definición tiene sentido pues siempre es posible encontrar funciones simples medibles por debajo de f. Recordamos que una función simple es aquella que sólo toma un número finito de valores y es por tanto, una generalización de una función escalonada.

Cuando f es una función medible a valores reales se define:

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu,$$

siempre que ambos sumandos del lado derecho sean finitos. En tal caso, decimos que f es integrable con respecto a μ.

Cuando f toma valores complejos, la definición de integral se hace de manera obvia.

Si α, $\beta \in \mathbb{K}$ y f, g son integrables respecto a μ se tiene que:

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu.$$

Además, f es integrable $\Leftrightarrow$ $|f|$ lo es.

En tal caso:

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu.$$

Para funciones medibles no negativas, se tienen dos resultados básicos sobre convergencia:

Lema 4.1 *(**Fatou**): Si $f_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, tenemos:*

$$\int \underline{\text{lím}} f_n d\mu \leq \underline{\text{lím}} \int f_n d\mu.$$

Teorema 4.2 *(**Convergencia Monótona**): Si (f_n) es una sucesión monótona creciente de funciones no negativas tal que $f_n \to f$ entonces:*

$$\int f d\mu = \text{lím} \int f_n d\mu.$$

Estos dos teoremas de convergencia son equivalentes y de hecho, implican el famoso e importante:

Teorema 4.3 *(Convergencia Dominada): Si (f_n) es una sucesión de funciones medibles tal que $f_n \to f$ y existe una función integrable g tal que $|f_n| \leq g$ $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces f es integrable y*

$$\int f d\mu = \text{lím} \int f_n d\mu.$$

Si $1 \leq p \leq \infty$ se definen los espacios $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ que a veces sólo denotaremos por L^p, del modo siguiente:

$$L^p = \left\{ [f] : f \text{ es medible y } \int |f|^p \, d\mu < \infty \right\} \text{ para } 1 \leq p < \infty.$$

$$L^\infty = \{[f] : f \text{ es esencialmente acotada}\}$$

donde $[f] = \{g : g = f \ \mu - \text{c.t.p.}\}$.

Cuando $1 \leq p < \infty$ se definen:

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

y

$$\|f\|_\infty = \text{ínf} \left\{ M : \mu\left(\{x : |f(x)| > M\}\right) = 0 \right\}.$$

Usando las desigualdades:

1. Hölder: Si $f \in L^p$, $g \in L^{p'}$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, entonces:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

2. Minkowski: Si f, $g \in L^p$ con $1 \leq p \leq \infty$, entonces:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_p ,$$

puede verse que $\|.\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$ constituye una norma en L^p. De hecho, puede demostrarse que $\left(L^p(X, \mathcal{F}, \mu), \|.\|_p\right)$ es un **espacio de Banach**, como ya habíamos mencionado en el Ejemplo 8 del Capítulo 1.

Como una consecuencia de la completez de L^p, $1 \leq p < \infty$, se tiene que toda sucesión convergente en L^p posee una subsucesión que converge c.t.p.

Finalmente comentamos que los espacios de sucesiones l^p estudiados en el Capítulo 2 constituyen un caso particular de L^p cuando $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y μ es la medida que cuenta en $\mathcal{F}$.

Definición 4.1 *Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y sean λ, μ medidas en $\mathcal{F}$. Diremos que λ es absolutamente continua con respecto a μ si dado $E \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(E) = 0$ se tiene que $\lambda(E) = 0$. Lo denotamos por $\lambda \ll \mu$.*

Como ejemplo de medida absolutamente continua respecto a la medida μ tenemos a la integral de Lebesgue de una función medible $f \geq 0$:

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu, \quad E \in \mathcal{F}$$

Resulta que con ésto se agotan todas las medidas absolutamente continuas, respecto a μ lo cual establece justamente el Teorema de Radon-Nikodým.

La demostración del Teorema de Radon-Nikodým hará uso del Teorema de Descomposición de Hahn cuya prueba omitiremos pues haría demasiado extensa esta sección. (para la demostración puede verse [3], [7], [12]).

Cabe mencionar que existen otras demostraciones del Teorema de Radon-Nikodým. Por ejemplo, [13] utiliza una idea de J. von Neumann basada en el teorema que representa a los funcionales lineales continuos en un espacio de Hilbert.

Teorema 4.4 ***(de Descomposición de Hahn)****: Si λ es una carga (o medida con signo) en $\mathcal{F}$, existen conjuntos P, $N \in \mathcal{F}$ tales que:*

(i) $X = P \cup N$.

(ii) $P \cap N = \emptyset$.

(iii) P es positivo respecto a λ, esto es, $\lambda(E \cap P) \geq 0 \quad \forall E \in \mathcal{F}$.

(iv) N es negativo respecto a λ, esto es, $\lambda(E \cap N) \leq 0 \quad \forall E \in \mathcal{F}$.

Teorema 4.5 ***(Radon-Nikodým)****: Sean λ y μ medidas σ-finitas en $\mathcal{F}$. Entonces*

$\lambda \ll \mu$ si y sólo si existe una función f medible no negativa tal que

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu, \quad \forall E \in \mathcal{F}.$$

Además, f es única μ-c.t.p

Demostración. ($\Rightarrow$) Probaremos primeramente el teorema cuando $\lambda(X)$ y $\mu(X)$ son finitas.

Sea $c > 0$ y consideremos la carga $\lambda - c\mu$.

Sean $P(c)$ y $N(c)$ una descomposición de Hahn para $\lambda - c\mu$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ consideremos los conjuntos medibles:

$$A_1 = N(c), \qquad A_{k+1} = N((k+1)c) - \bigcup_{j=1}^{k} A_j, \quad k \geq 1.$$

Por construcción, $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ forma una sucesión ajena por pares de conjuntos medibles tal que

$$\bigcup_{j=1}^{k} N(jc) = \bigcup_{j=1}^{k} A_j \ \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Además,

$$\begin{aligned} A_k &= N(kc) - \bigcup_{j=1}^{k-1} N(jc) \\ &= N(kc) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} N(jc) \right)^c \end{aligned}$$

$$= N(kc) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} P(jc) \right).$$

Por tanto, si E es un subconjunto medible de A_k entonces $E \subset N(kc)$ y $E \subset P((k-1)c)$.

Puesto que $N(kc)$ es negativo con respecto a $\lambda - kc\mu$ y $P((k-1)c)$ es positivo con respecto a $\lambda - (k-1)c\mu$ entonces tenemos:

$$\lambda(E) \leq kc\mu(E) \quad \text{y} \quad \lambda(E) \geq (k-1)c\mu(E).$$

Esto es, si $E \subset A_k$ y $E \in \mathcal{F}$ entonces:

$$(k-1)c\mu(E) \leq \lambda(E) \leq kc\mu(E) \tag{4.3}$$

Definamos

$$B = X - \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = X - \bigcup_{j=1}^{\infty} N(jc) = \bigcap_{j=1}^{\infty} P(jc),$$

entonces:

$$B \subset P(kc) \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

lo cual implica que:

$$kc\mu(B) \leq \lambda(B) \leq \lambda(X) < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

entonces: $\mu(B) = 0$ y como $\lambda \ll \mu \Rightarrow \lambda(B) = 0$.

Definamos ahora la siguiente función:

$$f_c(x) = \begin{cases} (k-1)c & \text{si} \quad x \in A_k \quad \text{para algún } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si} \quad x \in B \end{cases}$$

Si $E \in \mathcal{F}$ entonces

$$E = (E \cap B) \bigcup \bigcup_{k=1}^{\infty} (E \cap A_k)$$

y además como $\mu(B) = 0$ y $\lambda(B) = 0$ entonces:

$$\lambda(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E \cap A_k) \quad \text{y} \quad \mu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E \cap A_k)\ . \tag{4.4}$$

Así, haciendo uso de (4.3), (4.4), de que $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (E \cap A_k)$ es una unión ajena por pares y que la integral es aditiva numerable, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_E f_c d\mu &= \int_{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(E\cap A_k)} f_c d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E\cap A_k} f_c d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)\, c\mu(E \cap A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E \cap A_k) \\ &= \lambda(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E \cap A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} kc\mu(E \cap A_k) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} [(k-1)\,c + c]\,\mu(E \cap A_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} [(k-1)\,c\mu(E \cap A_k) + c\mu(E \cap A_k)] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E \cap A_k} (f_c + c)\,d\mu \\
&= \int_E (f_c + c)\,d\mu \\
&\leq \int_E f_c d\mu + c\mu(X),
\end{aligned}
$$

entonces:

$$\int_E f_c d\mu \leq \lambda(E) \leq \int_E f_c d\mu + c\mu(X).$$

Ahora, utilizaremos la construcción anterior para $c = \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$ y así obtenemos una sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ medibles no negativas.

Por lo tanto:

$$\int_E f_n d\mu \leq \lambda(E) \leq \int_E f_n d\mu + \frac{\mu(X)}{2^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall E \in \mathcal{F} \tag{4.5}$$

Si $m \geq n$ tenemos que:

$$\int_E f_n d\mu \leq \lambda(E) \leq \int_E f_m d\mu + \frac{\mu(X)}{2^m} \quad \text{y}$$

$$\int_E f_m d\mu \leq \lambda(E) \leq \int_E f_n d\mu + \frac{\mu(X)}{2^n},$$

entonces:

$$\left|\int_E (f_n - f_m)\, d\mu\right| \leq \frac{\mu(X)}{2^n},\ \forall E \in \mathcal{F},\ \forall m \geq n.$$

Ahora, sea $m \geq n$ y

$$\begin{aligned} E &= \{x \in X : f_n(x) - f_m(x) \geq 0\} \\ E' &= \{x \in X : f_n(x) - f_m(x) < 0\} \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned} \int_X |f_n - f_m|\, d\mu &= \int_E |f_n - f_m|\, d\mu + \int_{E'} |f_n - f_m|\, d\mu \\ &= \left|\int_E (f_n - f_m) d\mu\right| + \left|\int_{E'} (f_n - f_m) d\mu\right| \\ &< \frac{2\mu(X)}{2^n} = \frac{\mu(X)}{2^{n-1}} \quad \forall m \geq n. \end{aligned}$$

De aquí que:

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_X |f_n - f_m|\, d\mu \leq \frac{\mu(X)}{2^{n-1}}.$$

Entonces, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en L^1 y como L^1 es completo existe $f \in L^1$ tal que $f_n \longrightarrow f$ en L^1. Además, podemos suponer que f es una función medible no negativa, pues sabemos que existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $f_{n_k} \longrightarrow f$ μ-c.t.p. y como $f_{n_k} \geq 0$ entonces $f \geq 0$ μ-c.t.p.

Puesto que

$$\left|\int_E f_n d\mu - \int_E f d\mu\right| \leq \int_E |f_n - f|\, d\mu \leq \int_X |f_n - f|\, d\mu,$$

entonces, por (4.5):

$$\lambda(E) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu, \quad \forall E \in \mathcal{F},$$

lo cual completa la prueba del teorema cuando λ y μ son finitas.

Veamos que f es única μ-c.t.p.:

Supongamos que f, h son medibles no negativas tales que:

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu = \int_E h d\mu, \quad \forall E \in \mathcal{F}.$$

Sean

$$\begin{aligned} E_1 &= \{x \in X : f(x) > h(x)\} \quad \text{y} \\ E_2 &= \{x \in X : f(x) < h(x)\}, \end{aligned}$$

entonces

$$\int_{E_1} (f-h) d\mu = 0 = \int_{E_2} (h-f) d\mu$$

y por tanto

$$(f-h)\,|_{E_1}=0 \quad \mu\text{-c.t.p.} \qquad \text{y} \qquad (h-f)\,|_{E_2}=0 \quad \mu\text{-c.t.p.}$$

entonces:

$$\mu(E_1)=\mu(E_2)=0.$$

Por lo tanto, $f=h$ μ-c.t.p.

Ahora, supongamos que λ y μ son σ-finitas y sea $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente en $\mathcal{F}$ tal que:

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \ \text{ y } \ \lambda\,(X_n)<\infty,\ \ \mu\,(X_n)<\infty \ \ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Esto puede lograrse pues $X=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} B_m$ con $\mu(A_k)<\infty$, $\lambda(B_m)<\infty$ $\forall k,m\in\mathbb{N}$, así $X=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}(A_k\cap B_m)$ y reenumerando la sucesión $(A_k\cap B_m)_{k,m\in\mathbb{N}}$ podemos escribir $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ con $\lambda\,(C_n)<\infty$, $\mu\,(C_n)<\infty$ $\forall n\in\mathbb{N}$, luego hacemos $X_n=\bigcup\limits_{k=1}^{n} C_k$ y así $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ es creciente, $\lambda\,(X_n)<\infty$, $\mu\,(X_n)<\infty$ y $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$.

Ahora consideremos cada espacio medible $(X_n,\mathcal{F}_n)$, donde:

$$\mathcal{F}_n=\{\text{colección de subconjuntos medibles de } X_n\}$$

en el cual $\lambda\,(X_n)<\infty$, $\mu\,(X_n)<\infty$ y aplicamos lo demostrado en el caso anterior.

Así, para cada $n\in\mathbb{N}$ obtenemos una función h_n medible no negativa que se anula fuera de X_n tal que si $B \in \mathcal{F}$, $B \subset X_n$ entonces:

$$\lambda(B) = \int_B h_n d\mu \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si $m \geq n$ entonces $X_n \subset X_m$ y

$$\int_B h_n d\mu = \int_B h_m d\mu \quad \forall B \in \mathcal{F} \text{ con } B \subset X_n.$$

Como h_n es única μ-c.t.p. sobre X_n, se sigue que:

$$h_m(x) = h_n(x) \quad \mu - \text{c.t.p. sobre } X_n \quad \forall m \geq n. \tag{4.6}$$

Definamos

$$f(x) = h_n(x) \quad \text{si} \quad x \in X_n.$$

De (4.6) se sigue que f está bien definida; además f es medible pues $f = \lim h_n$ y $f \geq 0$.

Por consiguiente, G es un funcional lineal acotado.

Lo anterior muestra que $\|G\| \leq \|g\|_{p'}$, $1 \leq p < \infty$.

Veamos ahora la otra desigualdad: Si $1 < p < \infty$, sea $f = |g|^{\frac{p'}{p}}\, sgn(g)$, donde

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Entonces $|f|^p = |g|^{p'} = fg$, puesto que:

$$fg = |g|^{\frac{p'}{p}}\, sgn(g) g = |g|^{\frac{p'}{p}}\, |g| = |g|^{\frac{p'}{p}+1} = |g|^{p'}$$

ya que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1.$

Por tanto, $|f|^p \in L^1$, es decir, $f \in L^p$ y

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int |g|^{p'} \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \|g\|_{p'}^{\frac{p'}{p}}.$$

Así,

$$G(f) = \int (fg) d\mu = \int |g|^{p'} \, d\mu = \|g\|_{p'}^{p'} = \|g\|_{p'}^{\frac{p'}{p}+1} = \|g\|_{p'}^{\frac{p'}{p}} \|g\|_{p'} = \|f\|_p \, \|g\|_{p'}$$

entonces:

$$\|g\|_{p'} \leq \|G\|.$$

Notemos que en el caso $1 < p < \infty$ que acabamos de analizar, no requerimos que la medida sea σ-finita.

Si $p = 1$, en este caso $p' = \infty$. Supongamos primero que $\mu(X) < \infty$.

Si $\|g\|_\infty = 0$, entonces $g = 0$ μ-c.t.p. por lo que $\forall f \in L^1$ se tiene que $G(f) = 0$ y así, $\|G\| = 0 = \|g\|_\infty$.

Supongamos que $\|g\|_\infty > 0$ y sea $\varepsilon > 0$ un número arbitrario tal que $0 < \varepsilon < \|g\|_\infty$.

Como $\|g\|_\infty - \varepsilon \leq \|g\|_\infty$ entonces existe $E \in \mathcal{F}$ tal que:

$$0 < \mu(E) < \infty \quad \text{y} \quad \forall x \in E \quad \|g\|_\infty - \varepsilon \leq |g(x)|.$$

Definamos $f = \frac{1}{\mu(X)} \chi_E sgn(g)$.

Es claro que $f \in L^1$ y que $\|f\|_1 \leq 1$.

Además,

$$G(f) = \int_X fg d\mu = \frac{1}{\mu(E)} \int_E |f| \, d\mu \geq \|g\|_\infty - \varepsilon.$$

Como esta desigualdad es válida para todo $\varepsilon > 0$, entonces:

$$G(f) \geq \|g\|_\infty \quad \text{con} \quad f \in L^1 \quad \text{y} \quad \|f\|_1 \leq 1,$$

luego,

$$\|G\| \geq G(f) \geq \|g\|_{\infty}.$$

Por lo tanto, $\|G\| = \|g\|_{p'}$.

Supóngase ahora que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, $X_n \subset X_{n+1}$ y $\mu(X_n) < \infty$.

Defínase

$$G_n(f) = \int_{X_n} fgd\mu = \int f(g\chi_{X_n})d\mu.$$

$g\chi_{X_n} \in L^{\infty}(X_n, \mu)$ y por el caso anterior

$$\|g\chi_{X_n}\| \leq \|G_n\| \leq \|G\|.$$

Así, existe $B_n \subset X_n$, $B_n \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(B_n) = 0$ y

$$|g(x)| \leq \|G\| \qquad \forall x \in X_n - B_n$$

Sea $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$; así $\mu(B) = 0$ y si $x \notin B$ entonces $x \notin B_n$ $\forall n$, luego $|g(x)| \leq \|G\|$, por lo que

$$\|g\|_{\infty} \leq \|G\|.$$

■

El siguiente paso será descomponer un funcional lineal acotado en L^p en una diferencia de dos funcionales lineales apropiados.

Definición 4.2 *Diremos que un funcional lineal G definido en L^p es positivo si $G(f) \geq 0 \ \ \forall f \in L^p$ tal que $f \geq 0$.*

En general, un funcional lineal G definido en un espacio vectorial L de funciones real-valuadas es positivo si $G(f) \geq 0 \ \ \forall f \in L$ tal que $f \geq 0$.

Ejemplo 4.1 *Si L es la colección de funciones integrables respecto a una medida μ, es decir, $L = L(X, \mathcal{F}, \mu)$ entonces $G(f) = \displaystyle\int_X f d\mu$ es un funcional lineal positivo en L.*

Lema 4.7 *Sea G un funcional lineal acotado en L^p. Entonces existen dos funcionales lineales acotados positivos G^+, G^- tales que $G(f) = G^+(f) - G^-(f)$ $\forall f \in L^p$.*

Demostración. Observemos antes que si $0 \leq g \leq f$ entonces $|g|^p \leq |f|^p$, así $\|g\|_p \leq \|f\|_p$ por lo que

$$|G(g)| \leq \|G\| \, \|g\|_p \leq \|G\| \, \|f\|_p \quad \forall g \in L^p \text{ tal que } 0 \leq g \leq f.$$

Ahora, si $f \geq 0$ definamos

$$G^+(f) = \sup\{G(g) : g \in L^p,\ 0 \leq g \leq f\}.$$

Por la observación anterior, $G^+(f)$ está bien definido pues

$$|G^+(f)| \leq \|G\|\,\|f\|_p$$

y es claro que $G^+(f) \geq 0$ cuando $f \geq 0$.

Veamos que $G^+(f_1 + f_2) = G^+(f_1) + G^+(f_2)$ si $f_j \in L^p$ y $f_j \geq 0$:

Si $0 \leq g_j \leq f_j$ entonces

$$G(g_1) + G(g_2) = G(g_1 + g_2) \leq G^+(f_1 + f_2).$$

Fijamos g_2 y tomamos supremo sobre todos los $g_1 \in L^p$ tal que $0 \leq g_1 \leq f_1$ entonces

$$G^+(f_1) + G(g_2) \leq G^+(f_1 + f_2),$$

y tomando de nuevo supremo sobre todos los $g_2 \in L^p$ tal que $0 \leq g_2 \leq f_2$ obtenemos:

$$G^+(f_1) + G^+(f_2) \leq G^+(f_1 + f_2).$$

Inversamente, si $h \in L^p$ y $0 \leq h \leq f_1 + f_2$.

Sean

$$g_1 = \max\{h - f_2, 0\} \quad \text{y} \quad g_2 = \min\{h, f_2\}.$$

Por consiguiente, $g_1 + g_2 = h$ y $0 \leq g_j \leq f_j$, $j = 1, 2$.

Así,

$$G(h) = G(g_1 + g_2) = G(g_1) + G(g_2) \leq G^+(f_1) + G^+(f_2) \;\; \forall h \in L^p$$

tal que $0 \leq h \leq f_1 + f_2$, luego

$$G^+(f_1 + f_2) \leq G^+(f_1) + G^+(f_2).$$

También puede mostrarse fácilmente que:

$$\forall \alpha \geq 0, \quad G^+(\alpha f) = \alpha G^+(f) \;\; \text{si } f \in L^p,\ f \geq 0.$$

Ahora, si f es un elemento arbitrario de L^p definamos:

$$G^+(f) = G^+(f^+) - G^+(f^-).$$

Claramente, G^+ es positivo pues $f \geq 0$ y así $f = f^+$ y $f^- = 0$.

Veamos que G^+ es un funcional lineal acotado.

Antes que nada observemos que si $f = f^+ - f^- = f_1 - f_2$, $f_1 \geq 0$ y $f_2 \geq 0$, entonces

$$G^+(f^+) - G^+(f^-) = G^+(f_1) - G^+(f_2)$$

porque $f^+ + f_2 = f_1 + f^-$, así

$$G^+(f^+ + f_2) = G(f_1 + f^-)$$

luego

$$G^+(f^+) + G^+(f_2) = G^+(f_1) + G^+(f^-),$$

de aquí que

$$G^+(f^+) - G^+(f^-) = G^+(f_1) - G^+(f_2).$$

Así, si f_1, $f_2 \in L^p$ entonces:

$$\begin{aligned}
G^+(f_1) + G^+(f_2) &= G^+(f_1^+) - G^+(f_1^-) + G^+(f_2^+) - G^+(f_2^-) \\
&= G^+(f_1^+ + f_2^+) - G^+(f_1^- + f_2^-) \\
&= G^+(f_1 + f_2).
\end{aligned}$$

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\alpha > 0$ entonces $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ y $(\alpha f)^- = \alpha f^-$ y así:

$$\begin{aligned} G^+(\alpha f) &= G^+\left((\alpha f)^+\right) - G^+((\alpha f)^-) \\ &= G^+(\alpha f^+) - G^+(\alpha f^-) \\ &= \alpha\left[G^+(f^+) - G^+(f^-)\right] \\ &= \alpha G^+(f). \end{aligned}$$

Cuando $\alpha < 0$ hay que usar que $(\alpha f)^+ = (-\alpha)\, f^-$ y $(\alpha f)^- = (-\alpha)\, f^+$.

Resta ver que G^+ es un funcional lineal acotado en L^p.

Puesto que

$$\begin{aligned} \left|G^+(f^+)\right| &\leq \|G\| \left\|f^+\right\|_p \quad \text{y} \\ \left|G^+(f^-)\right| &\leq \|G\| \left\|f^-\right\|_p, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \left|G^+(f)\right| &\leq \left|G^+(f^+)\right| + \left|G^+(f^-)\right| \\ &\leq \|G\| \left[\left\|f^+\right\|_p + \left\|f^-\right\|_p\right] \\ &\leq \|G\| \left[\|f\|_p + \|f\|_p\right] \\ &= 2\,\|G\|\,\|f\|_p \qquad \forall f \in L^p. \end{aligned}$$

Ahora, definimos G^- para $f \in L^p$ por:

$$G^-(f) = G^+(f) - G(f).$$

Si $f \geq 0$ entonces $G^+(f) \geq G(f)$, luego $G^+(f) - G(f) \geq 0$, de aquí que $G^-(f) \geq 0$.

Además, G^- es un funcional lineal acotado pues es la diferencia de dos funcionales lineales acotados.

Por lo tanto, para toda $f \in L^p$ se tiene que $G(f) = G^+(f) - G^-(f)$ con G^+, G^- funcionales lineales acotados positivos.

■

Teorema 4.8 *(de **Representación de Riesz**): Si $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida σ-finito y G es un funcional lineal acotado en $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ entonces existe $g \in L^{p'}(X, \mathcal{F}, \mu)$ tal que*

$$G(f) = \int_X fg d\mu \qquad \forall f \in L^p.$$

Aquí p, p' son exponentes conjugados. Además, $\|G\| = \|g\|_{p'}$, $g \geq 0$ cuando G es un funcional lineal positivo y g es única μ-c.t.p..

Demostración. Supongamos primero que $\mu(X) < \infty$ y que G es positivo.

Definamos $\lambda : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lambda(E) = G(\chi_E) < \infty$. Nótese que $\chi_E \in L^1$. Supongamos además que $p = 1$.

Claramente, $\lambda(\emptyset) = 0$ y $\lambda(A \cup B) = G(\chi_A + \chi_B) = \lambda(A) + \lambda(B)$ si $A \cap B = \emptyset$.

Si $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente en $\mathcal{F}$ y $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ entonces $(\chi_{E_n})_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de funciones que converge puntualmente a χ_E. Como $\mu(X) < \infty$ y $(\chi_{E_n})_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en L^1 tal que $|\chi_{E_n}| \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, se sigue del Teorema de Convergencia Dominada, que $\chi_{E_n} \longrightarrow \chi_E$ en L^1.

Puesto

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \lambda(E) - \lambda(E_n) \\
&= G(\chi_E) - G(\chi_{E_n}) \\
&= G(\chi_E - \chi_{E_n}) \\
&\leq \|G\| \left\|\chi_E - \chi_{E_n}\right\|_1 \longrightarrow 0 \ \text{ si } n \to \infty
\end{aligned}
$$

entonces

$$\lambda(E) = \lim_{n\to\infty} \lambda(E_n).$$

Por consiguiente, λ es una medida pues si $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es una colección ajena por pares en $\mathcal{F}$ entonces escribiendo $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ tendremos que $B_n \subset B_{n+1} \quad \forall n$ y

$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, luego:

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda(A_k) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n).
\end{aligned}$$

Además, si $M \in \mathcal{F}$ y $\mu(M) = 0$, entonces $\chi_M = 0$ μ-c.t.p. y así $\lambda(M) = G(\chi_M) = 0$, es decir, $\lambda \ll \mu$.

Aplicando el Teorema de Radon-Nikodým obtenemos una función medible no negativa e integrable (ya que λ es finita), $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$G(\chi_E) = \lambda(E) = \int_E g d\mu = \int_X \chi_E g d\mu \quad \forall E \in \mathcal{F}.$$

Ahora, si $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ es una función simple medible entonces:

$$\begin{aligned}
G(\varphi) &= \sum_{i=1}^{n} a_i G(\chi_{A_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \int_X \chi_{A_i} g d\mu
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_X \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} g \right) d\mu \\
&= \int_X \varphi g d\mu.
\end{aligned}
$$

Si f es una función no negativa en L^1, sea $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión monótona creciente de funciones simples no negativas que convergen c.t.p. y en L^1 a f (esto es posible porque $0 \leq \varphi_n \leq f \Rightarrow 0 \leq f - \varphi_n \leq f \in L^1 \Rightarrow \int |f - \varphi_n| \longrightarrow 0$ si $n \to \infty$, por el Teorema de Convergencia Dominada).

Además, como $0 \leq G(f - \varphi_n) \leq \|G\| \, \|f - \varphi_n\| \longrightarrow 0$ si $n \to \infty$, se sigue que:

$$
\lim_{n \to \infty} G(\varphi_n) = G(f).
$$

Puesto que $\varphi_n g \nearrow fg$ se sigue del Teorema de Convergencia Monótona que:

$$
\begin{aligned}
G(f) &= \lim_{n \to \infty} G(\varphi_n) \\
&= \lim_{n \to \infty} \int_X \varphi_n g d\mu \\
&= \int_X f g d\mu.
\end{aligned}
$$

Ahora, si $f \in L^1$ entonces $f = f^+ - f^-$ y por linealidad de g tenemos:

$$
G(f) = G(f^+) - G(f^-)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_X f^+ g d\mu - \int_X f^- g d\mu \\
&= \int_X (f^+ - f^-) g d\mu \\
&= \int_X f g d\mu.
\end{aligned}
$$

Ahora supongamos que $p > 1$ (recordemos que seguimos suponiendo $\mu(X) < \infty$). En este caso la prueba es casi exactamente igual. La única modificación sería la siguiente:

Si f es una función no negativa en L^p, sea $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión monótona creciente de funciones simples que convergen c.t.p. a f. También $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \longrightarrow f$ en L^p porque como $0 \leq \varphi_n \leq f \Rightarrow 0 \leq (f - \varphi_n)^p \leq f^p \in L^1$ y por el Teorema de Convergencia Dominada:

$$\int |f - \varphi_n|^p \, d\mu \longrightarrow 0.$$

Así, en el caso $p > 1$ puede mostrarse que si G es un funcional lineal acotado positivo en $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$, $\mu(X) < \infty$, entonces existe una función medible no negativa g tal que

$$G(f) = \int_X f g d\mu \quad \forall f \in L^p.$$

Además, g es única μ-c.t.p. pues si

$$\int_X f g d\mu = \int_X f g' d\mu \quad \forall f \in L^p, \quad p \geq 1,$$

entonces dado cualquier $E \in \mathcal{F}$ se tiene que $\chi_E \in L^p$ pues $\mu(X) < \infty$, por lo que

$$\int_E g d\mu = \int_E g' d\mu \quad \forall E \in \mathcal{F},$$

entonces $g = g'$ μ-c.t.p.

Pasemos ahora al caso en que μ es una medida σ-finita.

Aquí, podemos encontrar una sucesión creciente $(F_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ con $\mu(F_n) < \infty$ y $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

El caso anterior nos permite encontrar funciones g_n no negativas e integrables en F_n, que se anulan fuera de F_n únicas c.t.p. sobre F_n tal que

$$G(f\chi_{F_n}) = \int_X f\chi_{F_n} g_n d\mu, \quad \forall f \in L^p, 1 \leq p < \infty.$$

Además, si $f \in L^p$ y $m \geq n$ tendremos

$$\begin{aligned} G(f\chi_{F_n}) &= G(f\chi_{F_n \cap F_m}) \\ &= \int_X f\chi_{F_n} g_m d\mu, \end{aligned}$$

luego por unicidad c.t.p. de g_n sobre F_n, se sigue que $g_m = g_n$, μ-c.t.p. sobre F_n para toda $m \geq n$. Esto nos permite definir $g(x) = g_n(x)$ si $x \in F_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Así, g es medible y $g \geq 0$. Si $f \in L^p$ entonces tendremos

$$\begin{aligned}
\int_X fg\,d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_{F_n} fg\,d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X f\chi_{F_n} g_n\,d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} G(f\chi_{F_n}) \\
&= G(f),
\end{aligned}$$

puesto que

$$0 \leq \left|G(f - f\chi_{F_n})\right| \leq \|G\| \left\|f - f\chi_{F_n}\right\|_p \longrightarrow 0 \quad \text{si } n \to \infty$$

(ya que $f_n = f\chi_{F_n} \in L^p$, $f_n \longrightarrow f$ c.t.p. y $|f_n| \leq |f| \in L^p$ y se aplica el Teorema de Convergencia Dominada).

Ahora, sea G un funcional lineal acotado arbitrario en L^p. Por el Lema 4.8, podemos escribir $G = G^+ - G^-$ donde G^+, G^- son funcionales lineales acotados positivos.

Por todo lo demostrado anteriormente, obtenemos funciones medibles no negativas g_1, g_2 tal que

$$G^+(f) = \int_X fg_1\,d\mu \quad \text{y} \quad G^-(f) = \int_X fg_2\,d\mu \quad \forall f \in L^p.$$

Escribiendo $g = g_1 - g_2$ obtenemos una función medible tal que:

$$\begin{aligned} G(f) &= G^+(f) - G^-(f) \\ &= \int_X f(g_1 - g_2)d\mu \\ &= \int_X fgd\mu, \ \forall f \in L^p. \end{aligned}$$

Falta demostrar que $g \in L^{p'}$ y que $\|G\| = \|g\|_{p'}$.

Habiendo mostrado que $g \in L^{p'}$ la prueba de que $\|G\| = \|g\|_{p'}$ se sigue de la Proposición 4.6.

Supongamos que $p = 1$ y que $\mu(X) < \infty$.

Sabemos que

$$G(f) = \int_X fgd\mu, \ \forall f \in L^1.$$

Para cada $c > 1$ definamos $E_c = \{x \in X : |g(x)| \geq c\,\|G\|\} \in \mathcal{F}$ y

$$f_c(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad g(x) \geq c\,\|G\| \\ -1 & \text{si} \quad g(x) \leq -c\,\|G\| \\ 0 & \text{si} \quad x \notin E_c \end{cases}.$$

Entonces $f_c \in L^1$ pues $\mu(X) < \infty$, además:

$$\begin{aligned}
\int_{E_c} f_c g d\mu &= \int f_c g d\mu \\
&= G(f_c) \\
&\leq \|G\| \, \mu(E_c),
\end{aligned}$$

pero

$$\int_{E_c} f_c g d\mu \geq c \|G\| \, \mu(E_c).$$

Así,

$$\begin{aligned}
c \|G\| \, \mu(E_c) &\leq \|G\| \, \|f_c\|_1 \\
&= \|G\| \, \mu(E_c)
\end{aligned}$$

lo cual es imposible a menos que $\mu(E_c) = 0 \;\; \forall c > 1$ y como

$$\{x \in X : |g(x)| > \|G\|\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x : |g(x)| \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \|G\| \right\}$$

entonces:

$$\mu\left(\{x : |g(x)| > \|G\|\}\right) = 0,$$

es decir, $0 \leq |g(x)| \leq \|G\|$, μ-c.t.p., por lo que $g \in L^\infty$ y de hecho, $\|g\|_\infty \leq \|G\|$.

Ahora, supongamos que X es σ-finito respecto a μ.

Vimos que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ con $F_n \subset F_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\mu(F_n) < \infty$ y encontramos una función g_n medible no negativa e integrable en F_n que se anula fuera de F_n tal que $\forall m \geq n$ $g_m = g_n$ μ-c.t.p. sobre F_n.

Definamos $g(x) = g_n(x)$ si $x \in F_n$ para algún n.

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $B_n \in \mathcal{F}$ con $\mu(B_n) = 0$, tal que:

$$|g_n(x)| \leq \|G\| \quad \forall x \notin B_n.$$

Por el caso anterior, $g_n \in L^\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|g_n\|_\infty \leq \|G\|$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} g_n = g$ puntualmente.

Si $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, entonces $\mu(B) = 0$ y si $x \notin B$ entonces $x \notin B_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, por lo que

$$|g_n(x)| \leq \|G\| \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ y } \forall x \in X - B$$

entonces

$$|g(x)| \leq \|G\| \ \forall x \in X - B \text{ con } \mu(B) = 0,$$

así,

$$g \in L^\infty \quad \text{y} \quad \|g\|_\infty \leq \|G\|.$$

Ahora, supongamos que $p > 1$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$ y $\mu(X) < \infty$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $E_n = \{x \in X : |g(x)| \leq n\}$.

Observemos que $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ con $E_n \subset E_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definamos $f_n = \chi_{E_n} |g|^{p'-1} sgn(g)$ con $g \neq 0$ μ-c.t.p.

Entonces $|f_n|^p = |g|^{p'}$ sobre E_n y como

$$\int_{E_n} |g|^{p'} d\mu \leq n^{p'} \mu(E_n) < \infty,$$

se sigue que $f_n \in L^p$.

Así,

$$\begin{aligned} \int_{E_n} |g|^{p'} d\mu &= \int_X f_n g d\mu \\ &= G(f_n) \\ &\leq \|G\| \, \|f_n\|_p \\ &= \|G\| \left[\int_{E_n} |g|^{p'} d\mu \right]^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

es decir, $\left(\int_X \chi_{E_n} |g|^{p'} d\mu \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \|G\|$ o $\int_X \chi_{E_n} |g|^{p'} d\mu \leq \|G\|^{p'}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Puesto que $\chi_{E_n}|g|^{p'} \nearrow |g|^{p'}$, pues $E_n \subset E_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, se sigue del Teorema de Convergencia Monótona que

$$\int_X |g|^{p'}\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \chi_{E_n}|g|^{p'}\, d\mu \leq \|G\|^{p'} < \infty,$$

lo cual implica que $g \in L^{p'}$ y $\|g\|_{p'} \leq \|G\|$.

Ahora, supongamos que X es σ-finito respecto a μ y $p > 1$.

Como en el caso $p = 1$, descomponemos $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ con $\mu(F_n) < \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y definimos $g(x) = g_n(x)$ si $x \in F_n$, donde $g_n \in L^{p'}$, $\|g_n\|_{p'} \leq \|G\|$ $\forall n \in \mathbb{N}$, g_n se anula fuera de F_n, $g_m = g_n$ $\forall m \geq n$ μ-c.t.p. sobre F_n.

Puesto que $|g_n|^{p'} \nearrow |g|^{p'}$, se sigue del Teorema de Convergencia Monótona que:

$$\int |g|^{p'}\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int |g_n|^{p'}\, d\mu \leq \|G\|^{p'},$$

por lo que $g \in L^{p'}$ y $\|g\|_{p'} \leq \|G\|$. ■

Nota: Si $p = 1$, el requisito de que μ sea σ-finita es necesario. Cuando $p > 1$ la condición σ-finita no es requerida.

Con este resultado, finalmente concluimos que $(L^p)^* \simeq L^{p'}$, en otras palabras, el dual de L^p es isométricamente isomorfo a $L^{p'}$.

4.3. El Dual de L^p, $1 < p < \infty$. Otra Demostración

En esta sección, $(X, \mathcal{F}, \mu)$ denotará un espacio de medida fijo, pero arbitrario, y $1 < p < \infty$. Probaremos de nueva cuenta que $(L^p)^*$ y $L^{p'}$ son indistinguibles como espacios de Banach, pero sin suponer alguna condición especial para nuestro espacio de medida.

De hecho, daremos una prueba elemental que no hace uso de ningún resultado sofisticado y sólo utiliza técnicas de cálculo elementales. Esta demostración se debe a E. J. McShane, y su sustento geométrico es la propiedad de convexidad uniforme de los espacios L^p, $1 < p < \infty$, la cual se obtiene a partir de las desigualdades de Clarkson que se establecen más adelante.

Antes de comenzar con el desarrollo de la demostración establecemos las desigualdades de Hölder y de Minkowski para $0 < p < 1$ que nos serán de utilidad en esta sección. Su demostración es sencilla y puede consultarse en [8].

1. Desigualdad de Hölder para 0<p<1 Si $f \in L^p$ y $g \in L^{p'}$ entonces

$$\int |fg| \, d\mu \geq \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^{p'} \, d\mu \right)^{\frac{1}{p'}}$$

a menos que $\int |g|^{p'} \, d\mu = 0$. (Nótese que $p' < 0$).

2. Desigualdad de Minkowski para 0<p<1 Para $0 < p < 1$ y $f, g \in L^p$ se tiene

$$\|f+g\|_p \geq \|f\|_p + \|g\|_p .$$

Lema 4.9 *Si $p \geq 2$ entonces*

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^p + \left(\frac{1-x}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}(1+x^p) \tag{4.7}$$

para cada $x \in [0,1]$.

Demostración. Sea $F(x) = \left(\frac{1+x}{2}\right)^p + \left(\frac{1-x}{2}\right)^p - \frac{1}{2}(1+x^p)$.

Debemos mostrar que $F(x) \leq 0$ para $0 \leq x \leq 1$.

Como $F(0) = 2^{-1}(2^{-p+2} - 1)$ y $p \geq 2$ tenemos que $F(0) \leq 0$.

Para $0 < x \leq 1$, consideremos la función

$$\phi(x) = \frac{2^p}{x^p} F(x) \tag{4.8}$$

Así,

$$\phi(x) = \left[\left(\frac{1}{x}+1\right)^p + \left(\frac{1}{x}-1\right)^p - 2^{p-1}\left(\frac{1}{x^p}+1\right)\right].$$

Claramente $\phi(1) = 0$.

Veamos que $\phi'(x) \geq 0$ para $0 < x < 1$.

$$\phi'(x) = -\frac{p}{x^{p+1}}\left[(1+x)^{p-1} + (1-x)^{p-1} - 2^{p-1}\right] \tag{4.9}$$

Sea $\alpha = p - 1 \geq 1$ y consideremos la función

$$\psi(x) = (1+x)^{\alpha} + (1-x)^{\alpha} - 2^{\alpha}$$

se tiene que

$$\psi'(x) = \alpha\,(1+x)^{\alpha-1} - \alpha\,(1-x)^{\alpha-1} \geq 0$$

para $0 < x < 1$.

Así, ψ es creciente en $[0,1]$ y puesto que $\psi(1) = 0$, el teorema del valor medio implica que $\psi(x) \leq 0$, para $0 \leq x \leq 1$.

De (4.9), obtenemos que $\phi'(x) \geq 0$ para $0 < x < 1$ y puesto que $\phi(1) = 0$ tendremos que $\phi(x) \leq 0$ para $0 < x \leq 1$. Finalmente, (4.8) muestra que $F(x) \leq 0$ para $0 < x \leq 1$.

■

Lema 4.10 *Sean z, $w \in \mathbb{C}$ y $p \geq 2$. Entonces*

$$\left|\frac{z+w}{2}\right|^p + \left|\frac{z-w}{2}\right|^p \leq \frac{|z|^p}{2} + \frac{|w|^p}{2} \tag{4.10}$$

Demostración. Si $w = 0$ la desigualdad se convierte en

$$\frac{|z|}{2^{p-1}}^p \leq \frac{|z|^p}{2}$$

la cual claramente se verifica porque $p - 1 \geq 1$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $|z| \geq |w| > 0$.

Obsérvese que la desigualdad (4.10) que queremos probar es equivalente a

$$\left|\frac{1}{2}\left(1+\frac{w}{z}\right)\right|^p + \left|\frac{1}{2}\left(1-\frac{w}{z}\right)\right|^p \leq \frac{1}{2}\left(1+\left|\frac{w}{z}\right|^p\right) \tag{4.11}$$

La desigualdad (4.11) se puede escribir en la forma

$$\left|\frac{1+re^{i\theta}}{2}\right|^p + \left|\frac{1-re^{i\theta}}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}(1+r^p) \tag{4.12}$$

donde $0 < r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Si $\theta = 0$, la desigualdad (4.12) es (4.7). Así, nuestra demostración quedará completa si mostramos que el lado izquierdo de (4.12) es un máximo cuando $\theta = 0$, para r fijo. Bastará considerar solamente $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Debemos mostrar que la función

$$g(\theta) = |1 + re^{i\theta}|^p + |1 - re^{i\theta}|^p$$

tiene un máximo en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en $\theta = 0$.

En efecto, ya que

$$g(\theta) = \left[1 + r^2 + 2r\cos\theta\right]^{\frac{p}{2}} + \left[1 + r^2 - 2r\cos\theta\right]^{\frac{p}{2}}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= \frac{p}{2}\left(1 + r^2 + 2r\cos\theta\right)^{\frac{p}{2}-1}(-2r\sin\theta) \\ &\quad + \frac{p}{2}(1 + r^2 - 2r\cos\theta)^{\frac{p}{2}-1}(2r\sin\theta) \\ &= -pr\sin\theta\left[\left(1 + r^2 + 2r\cos\theta\right)^{\frac{p}{2}-1} - (1 + r^2 - 2r\cos\theta)^{\frac{p}{2}-1}\right] \end{aligned} \tag{4.13}$$

Puesto que $p \geq 2$, es claro de (4.13) que $g'(\theta) \leq 0$ para $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Por tanto g es decreciente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y así toma su valor máximo en 0. ■

Lema 4.11 *(Desigualdad de Clarkson para $p \geq 2$): Si $p \geq 2$ y f, $g \in L^p$, se tiene que*

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p \tag{4.14}$$

Demostración. Por el Lema 4.10, tenemos que

$$\left|\frac{f(x)+g(x)}{2}\right|^p + \left|\frac{f(x)-g(x)}{2}\right|^p \leq \frac{|f(x)|^p}{2} + \frac{|g(x)|^p}{2} \quad \forall\, x \in X. \tag{4.15}$$

Integrando ambos lados de (4.15) sobre X, obtenemos lo requerido. ■

Enseguida establecemos el análogo de (4.14) para $1 < p < 2$. Esta desigualdad y su prueba son más complicadas.

Lema 4.12 *Si* $1 < p \leq 2$ *entonces*

$$(1+x)^{p'} + (1-x)^{p'} \leq 2\,(1+x^p)^{\frac{1}{p-1}} \tag{4.16}$$

para cada $x \in [0,1]$.

Demostración. Si $p = 2$ entonces $p' = 2$ y así el Lema es inmediato.

Supongamos que $1 < p < 2$. Para $x = 0$ y para $x = 1$, (4.16) es una igualdad.

Cuando u varía de 0 a 1, la función $\dfrac{1-u}{1+u}$ decrece estrictamente de 1 a 0. Por consiguiente, nuestra desigualdad deseada (4.16) es equivalente a

$$\left(1+\frac{1-u}{1+u}\right)^{p'} + \left(1-\frac{1-u}{1+u}\right)^{p'} \leq 2\left(1+\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^{p}\right)^{\dfrac{1}{p-1}} \tag{4.17}$$

para $0 < u < 1$. Multiplicando ambos lados de (4.17) por $(1+u)^{p'}$ obtenemos

$$2^{p'}\left(1+u^{p'}\right) \leq 2\,[(1+u)^p + (1-u)^p]^{\frac{1}{p-1}} \tag{4.18}$$

Elevando a la $p-1$ ambos lados de (4.18) obtenemos

$$\left(1 + u^{p'}\right)^{p-1} \leq \frac{1}{2}\left[(1+u)^p + (1-u)^p\right] \tag{4.19}$$

para $0 < u < 1$.

Puesto que los pasos desde (4.16) hasta (4.19) son reversibles, sólo necesitamos probar (4.19).

Expandiendo en serie de potencias tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left[(1+u)^p + (1-u)^p\right] - \left(1 + u^{p'}\right)^{p-1} \\ = & \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}u^k + \sum_{k=0}^{\infty}\binom{p}{k}(-1)^k u^k\right] - \sum_{k=0}^{\infty}\binom{p-1}{k}u^{p'k} \\ = & \sum_{k=0}^{\infty}\left[\binom{p}{2k}u^{2k} - \binom{p-1}{k}u^{p'k}\right] \\ = & \sum_{k=0}^{\infty}\left[\binom{p}{2k}u^{2k} - \binom{p-1}{2k-1}u^{p'(2k-1)} - \binom{p-1}{2k}u^{p'2k}\right]. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Sabemos que la serie (4.20) converge absolutamente y uniformemente para $u \in [0,1]$. Mostraremos que cada término de la serie (4.20) es no negativo y ésto probará (4.19).

El k-ésimo término de la serie (4.20) es

$$\frac{p(p-1)(p-2)...(p-(2k-1))}{(2k)!}u^{2k} - \frac{(p-1)(p-2)...(p-(2k-1))}{(2k-1)!}u^{p'(2k-1)} - \frac{(p-1)(p-2)...(p-2k)}{(2k)!}u^{p'2k}$$

$$= \frac{p(p-1)(2-p)...(2k-1-p)}{(2k)!}u^{2k} - \frac{(p-1)(2-p)(3-p)...(2k-1-p)}{(2k-1)!}u^{p'(2k-1)} + \frac{(p-1)(2-p)...(2k-p)}{(2k)!}u^{p'2k}$$

$$= u^{2k}\frac{(2-p)(3-p)...(2k-p)}{(2k-1)!} \times \left[\frac{p(p-1)}{(2k)(2k-p)} - \frac{(p-1)}{(2k-p)}u^{p'(2k-1)-2k} + \frac{(p-1)}{2k}u^{p'2k-2k}\right]$$

El primer factor claramente es positivo. El factor que aparece entre corchetes lo reescribimos así:

$$\left[\frac{1}{\frac{2k-p}{p-1}} - \frac{1}{\frac{2k}{p-1}} - \frac{1}{\frac{2k-p}{p-1}}u^{\frac{2k-p}{p-1}} + \frac{1}{\frac{2k}{p-1}}u^{\frac{2k}{p-1}}\right] = \left[\frac{1-u^{\frac{2k-p}{p-1}}}{\frac{2k-p}{p-1}} - \frac{1-u^{\frac{2k}{p-1}}}{\frac{2k}{p-1}}\right] \qquad (4.21)$$

Ahora, usando el hecho de que para cualquier $u > 0$ la función

$$t \longmapsto \frac{1-u^t}{t}, \quad 0 < t < \infty$$

es decreciente (lo cual es muy sencillo de ver), tenemos que como

$$\frac{2k-p}{p-1} < \frac{2k}{p-1},$$

la expresión de (4.21) es positiva. ■

Teorema 4.13 *Si $z,\ w \in \mathbb{C}$ y $1 < p \leq 2$ entonces*

$$|z+w|^{p'} + |z-w|^{p'} \leq 2\left(|z|^p + |w|^p\right)^{\frac{1}{p-1}} \tag{4.22}$$

Demostración. Si $z = 0$ o $w = 0$, la desigualdad (4.22) es inmediata.

Así, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $0 < |z| \leq |w|$. La desigualdad (4.22) que deseamos probar es entonces equivalente a la desigualdad

$$\left|1 + \frac{z}{w}\right|^{p'} + \left|-1 + \frac{z}{w}\right|^{p'} \leq 2\left(\left|\frac{z}{w}\right|^p + 1\right)^{\frac{1}{p-1}} \tag{4.23}$$

Escribimos (4.23) en la forma

$$\left|1 + re^{i\theta}\right|^{p'} + \left|-1 + re^{i\theta}\right|^{p'} \leq 2\left(r^p + 1\right)^{\frac{1}{p-1}} \tag{4.24}$$

donde $\dfrac{z}{w} = re^{i\theta}$, $0 < r \leq 1$ y $0 \leq \theta < 2\pi$.

Para $\theta = 0$, la desigualdad (4.24) es (4.16).

Del mismo modo que en la prueba de la desigualdad (4.10) del Lema 4.10, se puede mostrar que la expresión del lado izquierdo de (4.24) alcanza su máximo en $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ en $\theta = 0$. Así (4.24) se verifica para toda θ. ∎

Lema 4.14 *(Desigualdad de Clarkson para $1 < p < 2$): Si $f,\ g \in L^p$*

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^{p'} + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^{p'} \le \left[\frac{1}{2} \|f\|_p^p + \frac{1}{2} \|g\|_p^p \right]^{\frac{1}{p-1}}. \tag{4.25}$$

Demostración. Por la desigualdad de Minkowski para $0 < q < 1$, tenemos

$$\left\| \left| \frac{f+g}{2} \right|^{p'} \right\|_{p-1} + \left\| \left| \frac{f-g}{2} \right|^{p'} \right\|_{p-1} \le \left\| \left| \frac{f+g}{2} \right|^{p'} + \left| \frac{f-g}{2} \right|^{p'} \right\|_{p-1} \tag{4.26}$$

El lado izquierdo de (4.26) es el lado izquierdo de (4.25) puesto que $\left\| |h|^{p'} \right\|_{p-1} = \|h\|_p^{p'}$ para cualquier $h \in L^p$.

El lado derecho de (4.26) es

$$\left[\int \left(\left| \frac{f+g}{2} \right|^{p'} + \left| \frac{f-g}{2} \right|^{p'} \right)^{p-1} d\mu \right]^{\frac{1}{p-1}}$$

y por el Teorema 4.13 es menor o igual que

$$\left[\int 2^{p-1} \left(\left| \frac{f}{2} \right|^p + \left| \frac{g}{2} \right|^p \right) d\mu \right]^{\frac{1}{p-1}} = \left[\frac{1}{2} \|f\|_p^p + \frac{1}{2} \|g\|_p^p \right]^{\frac{1}{p-1}}$$

■

En lo que sigue, $1 < p < \infty$.

Teorema 4.15 *Si $L \in (L^p)^*$, $L \neq 0$, existe $\varphi_0 \in L^p$ tal que $\|\varphi_0\|_p = 1$ y*

$L(\varphi_0) = \|L\|$.

Demostración. Por definición de $\|L\|$, existe una sucesión $(\varphi_n')_{n=1}^{\infty}$ en L^p tal que $\|\varphi_n'\|_p = 1$, $|L(\varphi_n')| > \frac{1}{2}\|L\|$ y $\lim\limits_{n\to\infty} |L(\varphi_n')| = \|L\|$.

Sea

$$\varphi_n = \begin{cases} \frac{\overline{L(\varphi_n')}}{|L(\varphi_n')|}\varphi_n' & \text{si } \ L(\varphi_n') \neq 0 \\ 0 & \text{si } \ L(\varphi_n') = 0 \end{cases}$$

Entonces

$$L(\varphi_n) = |L(\varphi_n')| > \frac{1}{2}\|L\| > 0 \tag{4.27}$$

$$\|\varphi_n\|_p = 1 \tag{4.28}$$

$$\lim_{n\to\infty} L(\varphi_n) = \|L\| \tag{4.29}$$

Mostremos que (φ_n) es una sucesión de Cauchy en L^p.

De no ser así, existen $\alpha > 0$ y subsucesiones $(\varphi_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ y $(\varphi_{m_k})_{k=1}^{\infty}$ tales que

$$\|\varphi_{n_k} - \varphi_{m_k}\|_p > \alpha \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Cuando $p \geq 2$ usamos la Desigualdad de Clarkson (Lema 4.11) y escribimos

$$\left\|\frac{\varphi_{m_k} + \varphi_{n_k}}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{\varphi_{m_k} - \varphi_{n_k}}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}\|\varphi_{n_k}\|_p^p + \frac{1}{2}\|\varphi_{m_k}\|_p^p = 1 \tag{4.30}$$

Para $1 < p < 2$ usamos la Desigualdad de Clarkson (Lema 4.14) y escribimos

$$\left\|\frac{\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}}{2}\right\|_p^{p'} + \left\|\frac{\varphi_{m_k}-\varphi_{n_k}}{2}\right\|_p^{p'} \leq \left[\frac{1}{2}\left\|\varphi_{m_k}\right\|_p^p + \frac{1}{2}\left\|\varphi_{n_k}\right\|_p^p\right]^{\frac{1}{p-1}} = 1 \qquad (4.31)$$

Para $p \geq 2$ la desigualdad (4.30) implica que

$$\left\|\frac{\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}}{2}\right\|_p^{p} < 1 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^p \qquad (4.32)$$

y para $1 < p < 2$ la desigualdad (4.31) implica

$$\left\|\frac{\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}}{2}\right\|_p^{p'} < 1 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{p'} \qquad (4.33)$$

De (4.32) y (4.33) podemos hallar para cada $p > 1$ un número $\beta \in (0,1)$ tal que β sea independiente de k y

$$\left\|\frac{\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}}{2}\right\|_p < 1 - \beta \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad (4.34)$$

Ahora, consideramos la sucesión de funciones $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ definidas como

$$g_k = \frac{\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}}{\left\|\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}\right\|_p} \qquad (4.35)$$

Obsérvese que ningún denominador en (4.35) es cero pues de ser así tendríamos $\varphi_{n_k} = \varphi_{m_k}$ para algún k, y por tanto $L(\varphi_{n_k}) = -L(\varphi_{m_k})$ lo cual contradice (4.27).

Ahora, para cada $k \in \mathbb{N}$ de (4.34) y (4.35) tenemos

$$\begin{aligned} L(g_k) &= \frac{1}{\left\| \frac{\varphi_{m_k}+\varphi_{n_k}}{2} \right\|_p} \left[\frac{1}{2} L(\varphi_{m_k}) + \frac{1}{2} L(\varphi_{n_k}) \right] \\ &> \frac{1}{1-\beta} \left[\frac{1}{2} L(\varphi_{m_k}) + \frac{1}{2} L(\varphi_{n_k}) \right] \end{aligned} \tag{4.36}$$

Por (4.29) tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} L(\varphi_{m_k}) = \lim_{k\to\infty} L(\varphi_{n_k}) = \|L\|$$

Así, (4.36) implica que

$$\underline{\lim}_{k\longrightarrow\infty} L(g_k) \geq \frac{1}{1-\beta} \|L\| \tag{4.37}$$

Como $\|g_k\|_p = 1$ la desigualdad (4.37) es imposible porque $0 < \beta < 1$.

Por tanto, (φ_n) es una sucesión de Cauchy en L^p y como L^p es de Banach, existe $\varphi_0 \in L^p$ tal que $\varphi_n \to \varphi_0$ en L^p. De (4.29) se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} L(\varphi_n) = L(\varphi_0) = \|L\|$$

■

Lema 4.16 *Sea E un espacio normado complejo y L un funcional lineal acotado en E con la propiedad de que existe $g \in E$ tal que $\|g\| = 1$ y $L(g) = \|L\|$.*

Considérese la función

$$t \longmapsto \|g + tf\| = \psi_f(t) \tag{4.38}$$

definida para $t \in \mathbb{R}$, donde f es cualquier elemento de E.

Si ψ_f y ψ_{-if} son diferenciables en $t = 0$ entonces

$$\frac{1}{\|L\|} L(f) = \psi'_f(0) + i\psi'_{-if}(0) \tag{4.39}$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\|L\| = 1$.

Para cualquier $z \in \mathbb{C}$ tenemos

$$\begin{aligned} L(g + z(f - L(f)g)) &= L(g) + z(L(f) - L(f)L(g)) \\ &= L(g) + z(L(f) - L(f)) \\ &= L(g) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Puesto que $|L(h)| \leq \|h\| \quad \forall h \in E$, se sigue que

$$\|g + z(f - L(f)g)\| \geq 1 \qquad \forall z \in \mathbb{C} \tag{4.40}$$

Para cada $t \in \mathbb{R}$, $t \neq -\frac{1}{L(f)}$, $L(f) \neq 0$, escríbase

$$g + tf = (1 + tL(f)) \left[g + t\frac{1}{1 + tL(f)} (f - L(f)g) \right]$$

Por (4.40) la norma de la expresión dentro del corchete es $\geq 1 \quad \forall t$ y para $t = 0$ su norma es $\|g\| = 1$.

Por consiguiente

$$\begin{aligned}
\|g + tf\| - \|g\| &\geq |1 + tL(f)| - 1 \\
&= \left[(1 + t\,\mathrm{Re}(L(f)))^2 + (t\,\mathrm{Im}(L(f)))^2 \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \\
&\geq 1 + t\,\mathrm{Re}(L(f)) - 1 \\
&= t\,\mathrm{Re}(L(f))
\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\frac{\|g + tf\| - \|g\|}{t} \geq \mathrm{Re}(L(f)) \quad \text{si} \quad t > 0 \tag{4.41}$$

y

$$\frac{\|g + tf\| - \|g\|}{t} \leq \mathrm{Re}(L(f)) \quad \text{si} \quad t < 0 \tag{4.42}$$

(Cuando $L(f) = 0$, (4.41) y (4.42) se siguen de manera inmediata de (4.40)).

Así

$$\psi_f'(0) = \mathrm{Re}(L(f)) \quad \forall f \in E \tag{4.43}$$

Aplicando (4.43) a la función $-if$ obtenemos

$$\psi_{-if}'(0) = \mathrm{Re}(L(-if)) = \mathrm{Im}(L(f)) \tag{4.44}$$

y las ecuaciones(4.43) y (4.44) implican (4.39). ■

Teorema 4.17 ***(F. Riesz):*** *Sea $L \in (L^p)^*$, $1 < p < \infty$. Existe $h \in L^{p'}$ tal que*

$$L(f) = \int f\overline{h}d\mu \;\forall f \in L^p.$$

Demostración. El teorema es inmediato cuando $L = 0$, así que supongamos que $L \neq 0$.

Por el Teorema 4.15 existe $g \in L^p$ tal que $L(g) = \|L\|$ y $\|g\|_p = 1$.

Ahora, aplicaremos el Lema 4.16, y para hacer ésto debemos mostrar que la función

$$t \longmapsto \|tf + g\|_p = \psi_f(t)$$

es diferenciable en $t = 0$ para cada $f \in L^p$.

Sea $w(t) = \psi_f^p(t) = \int_X |tf + g|^p \, d\mu$.

Si escribimos $f = f_1 + if_2$ y $g = g_1 + ig_2$ tenemos

$$|tf + g|^p = \left[(tf_1 + g_1)^2 + (tf_2 + g_2)^2\right]^{\frac{p}{2}},$$

así que casi en todas partes tenemos:

$$\frac{d}{dt}|tf + g|^p = p\,|tf + g|^{p-2}\left[(tf_1 + g_1)\, f_1 + (tf_2 + g_2)\, f_2\right] \tag{4.45}$$

para toda t.

(Si $1 < p < 2$ y los puntos $x \in X$ y $t \in \mathbb{R}$ son tales que $tf(x) + g(x) = 0$, entonces el primer factor en la expresión anterior para $\frac{d}{dt}|tf + g|^p$ no está definido y el segundo factor es cero. En este caso, la derivada es 0).

Ahora, para cada $t \neq 0$ tenemos

$$\frac{w(t) - w(0)}{t} = \int_X \frac{|tf + g|^p - |g|^p}{t} d\mu \tag{4.46}$$

Si usamos el Teorema del Valor Medio y la expresión (4.45) para reescribir el integrando en (4.46) tenemos:

$$\frac{w(t) - w(0)}{t} = \int_X p\,|t'f + g|^{p-2}\,[(t'f_1 + g_1)\,f_1 + (t'f_2 + g_2)\,f_2]\,d\mu \qquad (4.47)$$

donde $0 < |t'| < |t|$ y t' es función de $x \in X$.

(Si $1 < p < 2$ y $t'f(x) + g(x) = 0$, entonces el integrando es cero).

Puesto que $t'f_j + g_j \leq |t'f + g|$ y $f_j \leq |f|$, el valor absoluto del integrando en (4.47) es menor o igual que $2p\,|t'f + g|^{p-1}\,|f|$.

Si $|t| \leq 1$ entonces tenemos que

$$2p\,|t'f + g|^{p-1}\,|f| \leq 2p\,(|f| + |g|)^{p-1}\,|f|\,.$$

Puesto que $f,\, g \in L^p$, tenemos que $(|f| + |g|)^{p-1} \in L^{p'}$ ya que $(p-1)p' = p$, y también $(|f| + |g|)^{p-1}\,|f| \in L^1$ por la desigualdad de Hölder.

Así, para toda $|t| \leq 1$, el integrando en (4.47) es menor o igual que la función fija

$$2p\,(|f| + |g|)^{p-1} \in L^1.$$

Por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue se tiene entonces que

$$\lim_{t \to 0} \int_X \frac{|g + tf|^p - |g|^p}{t} d\mu = \int_X p\, |g|^{p-2} \left[g_1 f_1 + g_2 f_2\right] d\mu \tag{4.48}$$

(Si $1 < p < 2$ y $g(x) = 0$, entonces el integrando en (4.48) y en las siguientes integrales es cero).

Combinando (4.46) y (4.48) vemos que $w'(0)$ existe y que

$$w'(0) = \int_X p\, |g|^{p-2} \left[g_1 f_1 + g_2 f_2\right] d\mu \tag{4.49}$$

Consecuentemente, $\psi'_f(0)$ existe también.

Usando (4.49) escribimos

$$\begin{aligned} \psi'_f(0) &= \frac{1}{p} \left(\int_X |g|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p} - 1} w'(0) \\ &= \frac{1}{p} \, \|g\|_p^{1-p} \, w'(0) \\ &= \int_X |g|^{p-2} \left[g_1 f_1 + g_2 f_2\right] d\mu \end{aligned} \tag{4.50}$$

El Lema 4.16 y (4.50) implican que

$$\begin{aligned}
L(f) &= \|L\| \left(\psi'_f(0) + i\psi'_{-if}(0)\right) \\
&= \|L\| \int_X |g|^{p-2} \left((g_1 f_1 + g_2 f_2) + i\,(g_1 f_2 - g_2 f_1)\right) d\mu \\
&= \|L\| \int_X |g|^{p-2}\, \overline{g} f d\mu.
\end{aligned}$$

Si escribimos $h = \|L\|\, |g|^{p-1}\, \widehat{\varphi} \in L^{p'}$ donde

$$\widehat{\varphi}(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{|g(x)|} & \text{si } \; g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } \; g(x) = 0 \end{cases}$$

tenemos que $L(f) = \displaystyle\int_X f\overline{h} d\mu.$ ■

Enseguida, recordamos (como lo vimos en la sección anterior, Proposición 4.6) que dada $g \in L^{p'}$, el funcional lineal

$$\begin{aligned}
L_g &: L^p \longrightarrow \mathbb{K} \;\text{ tal que} \\
L_g(f) &= \int f\overline{g} d\mu
\end{aligned}$$

es un elemento de $(L^p)^*$ y que $\|L_g\| = \|g\|_{p'}$.

Así, podemos concluir

Teorema 4.18 *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida arbitrario y sea $1 < p < \infty$.*

Entonces la transformación

$$\begin{aligned} T &: L^{p'} \longrightarrow (L^p)^* \quad \textit{tal que} \\ T(g) &= L_{\overline{g}} \end{aligned}$$

es una transformación lineal de $L^{p'}$ sobre $(L^p)^*$ que preserva la norma. Así $L^{p'}$ y $(L^p)^*$ son isométricamente isomorfos.

Demostración. Que T preserva la norma se sigue de la Proposición 4.6 y que T es sobre del Teorema 4.17. Se concluye así el resultado. ■

4.4. El Caso $p = \infty$

En esta sección haremos algunos breves comentarios sobre el caso $p = \infty$ que hasta el momento no hemos abordado.

Dada $g \in L^1$ sea

$$\phi_g(f) = \int f g d\mu$$

Claramente $\phi_g \in (L^\infty)^*$ pues

$$|\phi_g(f)| \leq \|f\|_\infty \|g\|_1 \qquad \forall f \in L^\infty.$$

De hecho, como en la Proposición 4.6 puede demostrarse que

$$\|\phi_g\| = \|g\|_1 .$$

Así, la función

$$\begin{aligned} \Lambda \quad &: \quad L^1 \longrightarrow (L^\infty)^* \quad \text{tal que} \\ \Lambda(g) \quad &= \quad \phi_g \end{aligned}$$

satisface

$$\|\Lambda(g)\| = \|\phi_g\| = \|g\|_1 ,$$

esto es, Λ es una isometría lineal y ésto muestra que L^1 está incluido en $(L^\infty)^*$.

Sin embargo, esta inclusión en general no es sobreyectiva. Daremos un ejemplo específico de esta situación.

Sea $X = [0,1]$ y μ la medida de Lebesgue.

La función

$$\begin{aligned} \delta_0 \quad &: \quad C(X) \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tal que} \\ \delta_0(f) \quad &= \quad f(0) \end{aligned}$$

claramente es un funcional lineal acotado en $C(X)$ a quien hemos dotado de la norma $\|.\|_\infty$. Puesto que $C(X)$ es un subespacio de L^∞, por el Teorema de Hahn-Banach existe $\phi \in (L^\infty)^*$ tal que $\phi(f) = \delta_0(f) = f(0) \quad \forall f \in C(X)$.

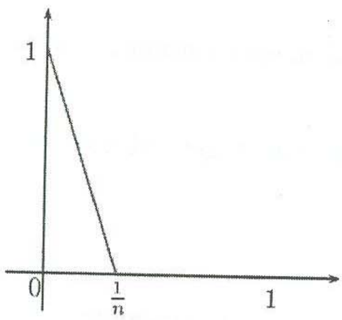
Veamos ahora que el funcional ϕ no puede representarse por integración contra una función en L^1, es decir, no existe $g \in L^1$ tal que

$$\phi(f) = \int fg d\mu \quad \forall f \in L^\infty. \tag{4.51}$$

En efecto, consideremos la sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^\infty \subset C(X)$ definidas por

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si} \quad \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Gráficamente



Se tiene que $\phi(f_n) = f_n(0) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, $f_n \longrightarrow 0$ puntualmente en $(0, 1]$ y aplicando el Teorema de Convergencia Dominada tendremos que

$$\int f_n g d\mu \longrightarrow 0 \qquad \forall g \in L^1$$

lo cual muestra que una representación como (4.51) es imposible.

Para finalizar, debe comentarse que la prueba del Teorema 4.8 ya no funciona para $p = \infty$ debido a que la función de conjunto $\lambda(E) = G(\chi_E)$ no necesariamente es numerablemente aditiva. Sin embargo, λ es una medida compleja finitamente aditiva, acotada y absolutamente continua con respecto a μ. Recíprocamente, dada una medida compleja ν finitamente aditiva y acotada en $(X,\mathcal{F})$ se puede definir de manera natural la integral con respecto a ν de una función medible acotada y de este modo se puede obtener una representación de $(L^\infty)^*$ como un espacio de medidas complejas finitamente aditivas.

Referimos al lector a [8], [6] y [14] para una exposición más detallada de este tópico.

Bibliografía

[1] T. M. Apostol, *Análisis Matemático,* Ed. Reverté, 1981.

[2] G. Bachman, L. Narici, *Functional Analysis,* Dover Pub., 2000.

[3] R. G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure,* Wiley-Interscience Pub. 1995.

[4] H. Brézis, *Análisis Funcional,* Alianza Ed., 1983.

[5] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis,* Springer, 1990.

[6] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators. Part I. General Theory, Wiley-Interscience Pub.,* 1988.

[7] G. B. Folland, *Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications,* Wiley-Interscience Pub., 1999.

[8] E. Hewitt, K. Stromberg , *Real and Abstract Analysis,* Springer, 1965.

[9] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications,* Wiley-Interscience Pub., 1989.

[10] E. J. McShane, *Linear Functionals on Certain Banach Spaces,* Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 402-408.

[11] M. Reed, B. Simon, *Functional Analysis I,* Academic Press, 1980.

[12] H. L. Royden, *Real Analysis, Macmillan Pub.,* 1968.

[13] W. Rudin, *Real and Complex Analysis,* McGraw-Hill, 1987.

[14] C. Swartz, *Measure, Integration and Function Spaces,* World Scientific, 1994.