UNIVERSIDAD DE SONORA

UNIDAD REGIONAL CENTRO
DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

UNA EXPLORACIÓN DE UN PROCESO DE CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO DEL SENO DE UN ÁNGULO AGUDO COMO FUNCIÓN Y COMO RAZÓN

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS EDUCATIVA

Presenta:

L.M. Oscar Jesús San Martín Sicre

Director de Tesis: M.C. José Ramón Jiménez Rodríguez

Comite Revisor
M.C. José Luis Soto Munguía
M.C. Jorge Ruperto Vargas G.
M.C. Martha C. Villalba G.

Jurado
Dr. Tenoch E. Cedillo Ávalos
M.C. José Luis Soto Munguía
M.C. Jorge Ruperto Vargas G.
M.C. Martha C. Villalba G.
M.C. José Ramón Jiménez R.

Julio de 2003

RECONOCIMIENTO:

Reconozco y agradezco la valiosa colaboración de:

Dr. Tenoch E. Cedillo Ávalos
M.C. José Ramón Jiménez Rodríguez
M.C. José Luis Soto Munguía
M.C. Jorge Ruperto Vargas Castro
M.C. Martha Cristina Villalba Gutiérrez

Annette San Martín León

En este proceso social de construcción de conocimiento

INTRODUCCIÓN

Consideramos, al igual que lo expresa Rosa María Farfán en su Artículo "Ingeniería Didáctica" (40, p.1) que el fenómeno educativo es de naturaleza profundamente social y su estudio precisa de consideraciones globales y de un acercamiento sistémico.

Los problemas educativos provenientes de la práctica educativa inspiran gran parte de las investigaciones en matemática educativa. En estas investigaciones según la misma autora "a pesar del gran cúmulo de resultados empíricos no hay evidencia de una metodología "exitosa" ni de ningún acercamiento teórico que dé explicación de la naturaleza del tránsito entre los resultados de la investigación didáctica y su puesta en escena en el sistema de enseñanza".

Ambas consideraciones de la citada autora, se han reflejado en esta investigación:

- Se ha abordado el fenómeno educativo intentando aportar soluciones a problemas sociales procedentes de la práctica educativa. A la vez se ha intentado respetar y ser congruentes con las condiciones y restricciones que el sistema educativo puede determinar en un trabajo de investigación.

- La evidencia empírica obtenida en la exploración no proporciona evidencia de una metodología "exitosa", pero contribuye a explicar, a retroalimentar y a mejorar el diseño posterior de propuestas que intenten replicar a la que aquí se ha presentado.

En términos generales, en este trabajo se presentan:

1) Los elementos componentes, la estructura y la fundamentación teórica de una propuesta didáctica que constituye una aproximación al diseño de una situación didáctica de Brousseau. Esta propuesta intenta la construcción en el aula de dos significados de la noción de seno de un ángulo agudo: como función y como razón.
2) La descripción de los resultados experimentales obtenidos en la exploración y en la aplicación en el salón escolar del diseño didáctico referido, se agrega un conjunto de inferencias y conclusiones derivadas de esta información.

En el primer capítulo se describen:

1) Una problemática general asociada a la enseñanza de la Trigonometría en la Escuela Secundaria. Esta problemática constituye un marco referencial para situar la importancia práctica y social de la investigación.
2) El planteamiento del problema de investigación, sus propósitos, las hipótesis relacionadas al mismo, y los alcances y limitaciones del estudio.

En el segundo capítulo se exponen de manera breve los conceptos, definiciones, constructos teóricos y teorías que fundamentan, apoyan o concurren en la elaboración de la propuesta didáctica y en la metodología utilizada en la investigación. En nuestro parecer resultan de especial interés: los constructos de "propuesta didáctica con enfoque constructivista" y “transposición didáctica constructivista” que constituyen construcciones teóricas elaboradas para esta investigación.

El tercer capítulo contiene una descripción de los instrumentos y acciones metodológicas aplicadas en las distintas partes del proceso de investigación.

Se destaca en este capítulo una aportación de la investigación, a saber: el diseño inspirado por condiciones históricas, del principal instrumento para conducir la aplicación y exploración, un instrumento geométrico simple al que se ha denominado “Transportador Trigonométrico Annette” (TTA).

También se presentan y describen las Actividades didácticas elaboradas para la exploración de la situación didáctica de Brousseau. Debe indicarse aquí, que era pretensión de esta propuesta, la idea de que la misma podía ser aplicada en los tiempos normales que la escuela dedica a las sesiones de matemáticas.

En el capítulo final se describen los resultados de la aplicación de los distintos instrumentos diseñados para la recopilación de información, se presentan las conclusiones y recomendaciones inferidas de la misma y algunas otras plausibles investigaciones realizables utilizando como elemento básico al TTA.

Como resultado de la exploración se cree que resulta altamente factible el diseño formal de una situación didáctica de Brousseau para la construcción de los significados del seno de un ángulo agudo como función y como razón.

INDICE

CAPITULO 1

MARCO REFERENCIAL

En este capítulo inicialmente se presentan algunos antecedentes de tipo socio-educativo que resultan necesarios para contextualizar el problema estudiado. Posteriormente con el mismo propósito se describe una problemática general asociada al estudio de la trigonometría en la escuela secundaria y su repercusión en el diseño de los nuevos planes y programas de estudio y sus materiales didácticos correspondientes. Más adelante se plantea el objeto de investigación de este trabajo, se presentan las hipótesis consideradas, los alcances y limitaciones del estudio, y finalmente se esgrimen una serie de argumentos que intentan justificar la importancia de la investigación realizada y los propósitos principales tras su realización.

1.1 – El Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica

El 18 de mayo de 1992 se suscribió el llamado "Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica" con el propósito de transformar el Sistema Educativo Nacional para lograr una educación de calidad y con cobertura suficiente. Se adujo en aquel entonces que el contexto que hacía necesaria tal reforma educativa se constituía por:

- Una educación básica deficiente que no proporcionaba los conocimientos, habilidades, capacidades, destrezas, actitudes y valores necesarios para el desenvolvimiento de los estudiantes.

- La existencia de un esquema de centralización y burocracia excesiva, que imposibilitaba cubrir las necesidades nacionales de alfabetización, acceso a la educación primaria, permanencia en la escuela y promedio de años de estudio.

El acuerdo fue suscrito por el Presidente de la República, el Secretario de Educación Pública, el Secretario General del Sindicato Nacional de Trabajadores de la Educación y 31 Gobernadores de los Estados de la República.

En lo que respecta al desarrollo de este trabajo, la importancia de este acuerdo radica esencialmente en los siguientes aspectos:

1.1.1 - Se reconoce la existencia del problema de una educación básica deficiente.

1.1.2 - Se acepta la existencia de un "claro consenso acerca de la necesidad de transformar el sistema educativo".

1.1.3 - Se determinan y ejecutan acciones educativas para afrontar y tratar de remediar la problemática educativa detectada.

1.1.4 - Se establece que "el fundamento de la educación básica está constituido por la lectura, la escritura y las matemáticas", en consecuencia se incrementa el tiempo asignado al estudio de las matemáticas.

1.1.5 - Se reconoce que para la implementación de las medidas pedagógicas propuestas para alcanzar los propósitos de la reforma educativa, se debería abandonar el esquema de la enseñanza tradicional (representada por los programas y "paquetes" educativos vigentes en esos tiempos) y aunque no se menciona explícitamente en el Acuerdo, en la práctica se buscaba adoptar nuevos fundamentos pedagógicos para la enseñanza de las matemáticas. Los principios o postulados didácticos que se incorporaron provenían fundamentalmente del llamado "enfoque constructivista de la educación" que concibe al alumno como el actor fundamental en el proceso de aprendizaje, y en menor grado de la llamada "enseñanza problémica" centrada en la resolución de problemas.

1.1.6 - Se da como un hecho la necesidad de reformular los contenidos y materiales educativos y se procede en consecuencia.

1.1.7 - Se enfatiza la necesidad de llevar a cabo un esfuerzo especial para la actualización y superación del magisterio en ejercicio.

Con respecto a las cuestiones anteriores (en especial las tres últimas), y como frutos del citado Acuerdo se tienen los siguientes hechos básicos para los propósitos de este trabajo:

- Para la actualización del magisterio en servicio en el nuevo enfoque didáctico, se estableció el "Programa Nacional de Actualización Permanente" que combina educación a distancia y aprendizaje en cursos y círculos colectivos de estudio. En los cursos para los profesores, se utilizan guías de estudio y una antología que contiene diversos artículos referentes a temas fundamentales para la preparación del maestro en el nuevo enfoque didáctico. Para esta investigación, resulta importante señalar que en la antología para los profesores, no existe lectura alguna que se refiera o que aborde la problemática asociada a la enseñanza de la Trigonometría, no obstante que el programa oficial de matemáticas contempla la enseñanza de esta asignatura en el tercer grado de secundaria. La guía de estudio del programa remite al profesor-alumno hacia el libro del maestro para las sugerencias didácticas necesarias para el tratamiento de la materia. Se infiere de lo anterior la existencia de una necesidad educativa: que las lecturas y antología instrumentadas por la SEP para la actualización de los maestros de secundaria, no contienen aportaciones específicas para la enseñanza de la trigonometría consistentes con el nuevo enfoque.
- Aunque no se explicita en el Acuerdo, a partir de 1994 la Universidad Pedagógica Nacional, inicia una Licenciatura en Educación que tiene entre algunos de sus propósitos actualizar y capacitar al magisterio en servicio en la pedagogía constructivista. Esta Licenciatura utiliza en sus cursos programas indicativos, guías de estudio, antologías, y asesoría permanente de sus profesores. La Licenciatura está centrada en la atención a maestros de los niveles de educación pre-escolar y primaria, como no se ocupa del nivel medio básico, resulta entonces que las lecturas contenidas en sus antologías de matemáticas tampoco abordan la problemática asociada al tratamiento didáctico de la Trigonometría.

1.2 – Problemática general de la enseñanza de la Trigonometría en la Escuela Secundaria

Las diversas consultas y diagnósticos nacionales que incidieron en la elaboración del Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica contribuyeron a la reafirmación del consenso existente en esa época[1] acerca de que la enseñanza básica, en particular de las matemáticas, no estaba logrando los objetivos de aprendizaje deseados, como textualmente se afirma en el Documento: "no proporciona el conjunto adecuado de conocimientos, habilidades, capacidades y destrezas, actitudes y valores necesarios para el desenvolvimiento de los educandos y para que estén en condiciones de contribuir, efectivamente, a su propio progreso social y al desarrollo del país".

Aunque en el documento no siempre se particularizan o se explicitan problemas específicos, algunas de las deficiencias más graves eran:

- carencia de congruencia y continuidad del aprendizaje entre la educación primaria y la secundaria
- insuficiente tiempo dedicado a la enseñanza de las matemáticas
- insuficiente o deficiente preparación de los maestros
- carencia de materiales y recursos educativos adecuados o suficientes
- fracaso del enfoque didáctico hasta entonces utilizado (lo designaremos en lo sucesivo con el nombre de"enfoque didáctico tradicional" o algún término similar).

Como consecuencia de estos, y quizá la concurrencia de otros factores se tenía:

- alto nivel de reprobación en matemáticas
- bajos promedios de calificación
- altos niveles de deserción

A la problemática anterior deben agregarse aquellas dificultades de enseñanza y de aprendizaje derivadas de la naturaleza abstracta de la Trigonometría.

Este carácter abstracto de la Trigonometría" se manifiesta en varias formas:

1) Para los "objetos matemáticos" de la Trigonometría, a nivel de secundaria se utilizan pocos recursos de representación gráfica[2], por ejemplo, en el tratamiento didáctico de la propia razón seno solo se recurre a la representación de la misma como una razón, con su correspondiente representación o/h (cateto opuesto / hipotenusa), no se toma en cuenta que ésta ultima puede ser también representada gráficamente como un segmento.
2) 2) La razón seno es la abstracción resultante de "abstraer" el invariante bajo una transformación geométrica de semejanza, esto no es fácil de entender.
3) No se utilizan en su didáctica recursos manipulativos de tipo concreto.

[1] Ver por ejemplo el artículo "México País de reprobados" de Gilberto Guevara Nieblas publicado en la revista "Nexos" por esas fechas.
[2] "Registros de representación gráfica" en la terminología de R. Duval.

A 10 años de distancia de la concreción de las medidas instrumentadas para solucionar la problemática anterior, parece existir entre los maestros y los especialistas relacionados a este asunto, una sensación general de que la aplicación de las mismas no está rindiendo los frutos esperados.

El trabajo de investigación que aquí se expone puede contextualizarse con respecto a esta problemática general en el sentido de que trata de incidir en la solución de dos de estos problemas: 1) la insuficiente o deficiente preparación de los maestros de matemáticas en el nuevo enfoque y 2) la carencia de recursos educativos consistentes con esta perspectiva. La intervención se intenta realizar a través de dos acciones principales:

- La elaboración de una propuesta didáctica para la enseñanza del seno de un ángulo agudo como función y como razón. El diseño se fundamenta por principios teóricos constructivistas y metodología utilizada en una línea de investigación en Educación Matemática contemporánea: la teoría de las situaciones didácticas de G. Brousseau. La propuesta incorpora la utilización de material didáctico novedoso.

- La aplicación experimental en el aula de la propuesta, adicionada con la descripción de resultados obtenidos, inferencias, conclusiones, recomendaciones, etc. Esta experimentación constituye una instancia particular de una experiencia que pudiera ser replicada en otras investigaciones.

A continuación, como parte de la contextualización asociada a esta investigación se describen algunos de los componentes esenciales del Plan y Programas de Estudio de 1993 para la Educación Básica Secundaria. Esta descripción tiene los propósitos adicionales de:

- hacer patente que el nuevo enfoque adoptado utiliza algunos de los principios de la didáctica constructivista.

- mostrar algunas insuficiencias que persisten (en nuestra opinión) en el nuevo material educativo provisto por la SEP.

1.3 - La Matemática en la escuela secundaria: el nuevo enfoque didáctico

Enfoque

En una revisión somera del "Plan y Programas de estudio 1993" de Educación Básica Secundaria SEP (55, pp.37–40) en el apartado correspondiente a "Enfoque" se pueden rescatar las siguientes proposiciones que se corresponden (como podrá verse en el marco teórico que se presentará mas adelante) con algunos conceptos y postulados de la didáctica constructivista.

1.3.1 – "Las matemáticas son, junto con las otras ciencias y actividades del saber, un resultado del intento del hombre por comprender y explicarse el universo y las cosas que en el ocurren" (55, p.37). Esta afirmación resulta consistente con la epistemología constructivista ya que para la misma, "Las estructuras conceptuales que consideramos como conocimiento son los productos de conocedores activos que moldean su pensamiento para ajustarse a las restricciones que experimentan" (41, p.5). Puede verse que la caracterización de las matemáticas presentada en el programa es consistente con esta idea.

1.3.2 – "Su enseñanza (de las matemáticas), por lo tanto, no consiste en la pura transmisión de un conocimiento fijo y acabado" (55, p.37). En este enfoque se advierte claramente una intención constructivista. Los aspectos epistemológicos subyacentes a la didáctica tradicional, en sus vertientes empiristas o racionalistas consideraban al conocimiento como algo fijo y acabado que estaba allí afuera listo para ser descubierto (empirismo), o como un objeto ideal al que se aproximaba la mente por medio del pensamiento (racionalismo). Como consecuencia de dicho sustento epistemológico, la didáctica tradicional contenía técnicas pensadas para transmitir un conocimiento fijo y acabado.

1.3.3 – "Debe fomentar (su enseñanza), la misma curiosidad y las actitudes que la hicieron posible y la mantienen viva" (55, p.37). Se advierte de nuevo una influencia constructivista, en esta didáctica se suele concebir al aula como una especie de micro laboratorio donde idealmente pueden reproducirse algunas de las condiciones que históricamente dieron origen a la construcción de conocimiento. Estas condiciones incluían una alta curiosidad cognoscitiva y una actitud positiva hacia el conocimiento de las matemáticas.

Propósito general

Según el citado programa "La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria tiene como propósito general el desarrollo de las habilidades operatorias, comunicativas y de descubrimiento de los alumnos". Para ello, deben desarrollar sus capacidades para:

1.3.4 - Adquirir seguridad y destreza en el empleo de técnicas y procedimientos básicos a través de la solución de problemas.

1.3.5 - Reconocer y analizar los distintos aspectos que componen un problema.

1.3.6 - Elaborar, comunicar y validar conjeturas.

1.3.7 - Reconocer situaciones análogas.

1.3.8 - Escoger o adaptar la estrategia adecuada para la resolución de un problema.

1.3.9 - Comunicar estrategias, procedimientos y resultados de manera clara y concisa.

1.3.10 - Predecir y generalizar resultados.

1.3.11 - Desarrollar gradualmente el razonamiento deductivo.

En el enfoque y los propósitos generales, puede detectarse que algunos de estos estándares o directrices se corresponden directamente con "componentes didácticos" que pueden ser ubicados como elementos pertenecientes a una didáctica de tipo constructivista, y/o a la didáctica asociada a la enseñanza problémica, entre ellos pueden advertirse en particular los siguientes:

- "Que la enseñanza de las matemáticas no consiste en la pura transmisión de un conocimiento fijo y acabado" (Se abandonan las posiciones gnoseológicas empiristas o racionalistas que así la consideraban).

- Que debe fomentar en el alumno la curiosidad (esto es, una motivación asociada a la didáctica constructivista de tipo cognoscitivo, intrínseca a la situación de aprendizaje).

- La utilización de problemas como elementos básicos en el aprendizaje matemático del alumno.

- La elaboración, comunicación y validación de conjeturas.

- Procesos de "metacognición": no solamente resolver problemas, sino también reflexionar sobre la estrategia utilizada en su resolución. Resulta pertinente agregar que el reflexionar sobre la estrategia utilizada en la resolución de problemas puede relacionarse también con objetivos tendientes al auto didactismo.

Organización y alcance de la asignatura

Los temas que contiene el Programa están agrupados en cinco áreas:

- Aritmética
- Álgebra
- Geometría (en el tercer grado se agregan algunos contenidos de Trigonometría)
- Presentación y tratamiento de la información
- Nociones de Probabilidad

Con respecto a algunas características del tratamiento didáctico para la asignatura contenidas en el Programa de la SEP, a continuación se recuperan, parafrasean y enlistan aquellas que se relacionarán directamente con el trabajo de investigación que aquí se está exponiendo.

1.3.12 – El programa no está concebido como una sucesión de temas que deban agotarse uno a continuación del otro. Podrán organizarse en la forma que el maestro considere más conveniente para su aprendizaje (Recomendación acorde con los principios de la didáctica constructivista). La propuesta que aquí se desarrolla contiene una integración de diversos temas que no suelen presentarse uno a continuación de otro.

1.3.13 – Se recomienda que se procure integrar contenidos de diferentes temas o áreas del programa de modo que el alumno pueda percibir las relaciones existentes entre las diferentes partes de las matemáticas y tenga la oportunidad de practicar constantemente los conocimientos adquiridos (Como se verá en su oportunidad, precisamente así está integrada la propuesta contenida en esta investigación).

1.3.14 – Es importante que se diseñen actividades que favorezcan la práctica permanente de las operaciones con números naturales, decimales y fraccionarios. Estas actividades no deben ser ejercicios rutinarios de algoritmos.

1.3.15 – El tratamiento de los errores de aproximación dará a los alumnos la oportunidad de conocer ciertas ideas de las matemáticas, como son la recurrencia y el error de aproximación, su cálculo y estimación en situaciones sencillas.

1.3.16 – Una forma de explorar y conocer las propiedades y características de las figuras geométricas y preparar el paso al razonamiento deductivo son los trazos y construcciones geométricas.

1.3.17 – Debe conocerse y hacerse uso efectivo de los diferentes instrumentos de medida y diseñarse situaciones y problemas que favorezcan el desarrollo de las capacidades para estimar magnitudes físicas y geométricas. Estas actividades deberán acompañar al uso de las fórmulas para calcular perímetros, áreas, volúmenes y capacidades.

1.3.18 – Los teoremas de Pitágoras y de semejanza deben utilizarse en la solución de problemas de cálculo geométrico.

1.3.19 – La iniciación al pensamiento deductivo debe ser gradual, en situaciones escogidas por el profesor teniendo en cuenta que la demostración en matemáticas es un objetivo que requiere de tiempo y preparación cuidadosa.

1.3.20 – Durante el estudio de la presentación y tratamiento de la información, se deberán proponer situaciones y actividades muy diversas para que los alumnos conozcan y se acostumbren gradualmente a la noción de función como una relación entre dos cantidades, así como a las diferentes formas de presentar una función.

Temas del Tercer Grado de Secundaria que son integrados en la propuesta didáctica contenida en el trabajo de investigación

A continuación se hace una breve paráfrasis de los temas de Tercer Grado del Programa de la SEP que directa o indirectamente, parcial o totalmente son o pueden ser recuperados en la propuesta didáctica asociada a esta investigación. Se enlistan en el orden que conservan en el programa (pp. 48-51). Son los siguientes:

1.3.21 - Errores de aproximación.

1.3.22 - Ejemplos para revisar la noción de función.

1.3.23 - Nociones básicas sobre el círculo.

1.3.24- Ángulos central e inscrito en una circunferencia, ángulo inscrito en una semicircunferencia.

1.3.25 - Construcciones con regla y compás.

1.3.26 - Semejanza de triángulos.

1.3.27 - Teorema de Pitágoras, aplicaciones.

1.3.28 - Razones trigonométricas, seno.

1.3.29 – Valores del seno para los ángulos de 30°, 45° y 60°. Uso de calculadora para otros ángulos.

1.4 - La Trigonometría en el Tercer Grado de Secundaria

Del Plan y Programas de Estudio, 1993, SEP (55, p. 40) se transcribe: "Sin avanzar hacia los temas de álgebra trigonométrica, el nuevo programa de tercer grado propone que los alumnos conozcan y estudien las razones trigonométricas de un triángulo y las utilicen en la solución de los problemas en que esta disciplina es tan rica, como son el cálculo de distancias inaccesibles a la medición directa".

Con respecto a lo expresado en este programa, y por concernir a la realización de este trabajo, se expresan las siguientes consideraciones:

1.4.1 – Aunque el enfoque aplicado en la enseñanza de las matemáticas en la Escuela Secundaria en general contiene varias características de la didáctica constructivista, en lo que aquí se menciona, y con respecto al estudio de la Trigonometría, la didáctica propuesta por la SEP en el libro del maestro, en nuestra opinión parece no diferir de la didáctica tradicional: se transmite un conocimiento fijo y acabado.

Para ilustrar el punto 1.4.1, inicialmente se transcribe textualmente un párrafo tomado del libro del maestro de la SEP (p. 266).

" El programa de Matemáticas para el tercer grado de la escuela secundaria contempla una introducción a la trigonometría, una vez que los alumnos conocen y han resuelto numerosas aplicaciones de los teoremas de Pitágoras y de semejanza. **Se inicia con la definición**[3] y estudio de las razones trigonométricas: seno, coseno y tangente para ángulos comprendidos entre 0° y 90° "

A continuación se transcriben, también de manera textual, otros párrafos (p. 54), tomados del artículo "Constructivismo y Educación Matemática" de Luis Moreno Armella y Guillermina Waldegg. El artículo está contenido en las lecturas de "La enseñanza de las Matemáticas en la escuela secundaria" del Programa Nacional de Actualización Permanente.

Bajo el subtítulo "La transmisión del conocimiento" se dice lo siguiente:

"Considerando que la matemática es un "objeto de enseñanza", este puede transmitirse. Quien posee el conocimiento puede ofrecerlo a quién no lo posee, sin riesgo de que el conocimiento se modifique en el proceso de transmisión".

La tarea del profesor consiste en "inyectar" el conocimiento en la mente del estudiante a través de un discurso adecuado. El estudiante, por su parte, no puede modificar la estructura

[3] El subrayado no viene en el escrito original

del discurso, su tarea consiste en decodificarlo. La didáctica, bajo este punto de vista, busca optimizar la tarea del profesor mediante una especie de combinatoria de contenidos, generalmente apoyada en preceptos universales – como el paso de lo simple a lo complejo, de lo particular a lo general, de lo concreto a lo abstracto, del análisis a la síntesis – y poniendo especial énfasis en el contexto de la justificación, como estado superior del conocimiento".

1.4.2 – En el programa para el tercer grado de secundaria, solo se estudia un significado para las nociones trigonométricas básicas, a saber, el significado de razón. El otro significado esencial de estas nociones, el de función, es ignorado, no obstante que el Programa contiene el estudio de las funciones.

1.4.3 - El Programa de Estudios previo al Acuerdo (54, pp.165-167) sí contemplaba el estudio de los dos significados principales de la noción de seno de un ángulo agudo, se estudiaban como razón y también como función, como se transcribe a continuación:

En la página 165 de dicho programa se presenta como objetivo específico 7.1.1, el siguiente: "identificará la función seno en un círculo unitario".

Y en la página 166, como objetivo específico 7.2.1, se propone:
"Establecerá la razón existente entre el cateto y la hipotenusa" (refiriéndose al seno).

En la propuesta didáctica asociada a esta investigación se intenta que el estudiante construya ambos significados.

Concluimos este apartado recuperando textualmente del Programa de la SEP (55, p. 51) los elementos de Trigonometría propuestos para ser estudiados en el Tercer Grado de Secundaria.

1.4.4 - Razones trigonométricas de un ángulo agudo: seno, coseno, tangente y sus recíprocas.

1.4.5 - Valores del seno, el coseno y la tangente para los ángulos de 30°, 45° y 60° grados. Uso de tablas (ejercicios de interpolación) y calculadora para los otros ángulos agudos.

1.4.6 - Resolución de triángulos rectángulos y su aplicación a la solución de problemas: cálculo de distancias inaccesibles; del lado y la apotema de polígonos regulares, etc.

1.5 - El problema de investigación

Como antes se dijo, en esta investigación se intentará responder de manera sistemática y científica a los dos problemas de investigación que se enuncian a continuación:

1) ¿Cómo puede diseñarse una propuesta didáctica para lograr un aprendizaje significativo del seno de un ángulo agudo como función y como razón incorporando lineamientos teóricos y metodológicos de la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau?

Aquí se pretende diseñar una propuesta didáctica para el aprendizaje significativo de la noción de seno de un ángulo agudo respecto a sus dos principales significados, esto es, el seno de un ángulo agudo como razón entre longitudes de lados de un triángulo rectángulo y el seno de un ángulo agudo como una función que a cada ángulo en un cierto dominio le hace corresponder un único número.

Además de Brousseau, se utilizan en menor grado algunas ideas provenientes principalmente de Ausubel y Chevallard. Se ha recurrido también a algunos resultados de otros trabajos relacionados previamente realizados y publicados por el que suscribe en el campo de la Trigonometría elemental (45 al 50 en la bibliografía).

2) ¿Qué puede inferirse, concluirse o interpretarse del proceso de aplicación (experimentación) y de los resultados obtenidos con la aplicación de esta propuesta en el aula?

En este apartado se investigan cuestiones concernientes a la viabilidad de la aplicación práctica o experimental en el aula de la propuesta didáctica teórica a que antes se hizo referencia, y a aspectos cualitativos interesantes que pudieran surgir como resultado de su puesta en práctica.

1.6 – Hipótesis asociadas a la investigación

Y. Chevallard, et al, con relación a la problemática general presente en la didáctica de las matemáticas sostiene que el afrontar los retos planteados o implicados en la misma hace necesario que en el proceso didáctico se consideren aspectos afectivos tales como la motivación y la actitud, y los problemas cognitivos asociados a la transformación del saber desde su origen como "saber matemático" hasta su presentación en el aula como saber "escolar". Textualmente (27, p.134) expresa:

> "La originalidad de la didáctica de las matemáticas consiste en postular que el círculo vicioso no puede ser roto por el eslabón de la "motivación", es decir, de manera independiente de los elementos que componen y estructuran las distintas obras matemáticas del currículo".

La investigación que aquí se está describiendo se ocupó fundamentalmente de aspectos cognoscitivos, sin embargo se comparte la tesis de Chevallard antes enunciada en el sentido de que en la didáctica de las matemáticas los aspectos afectivos y los cognoscitivos no son independientes y en consecuencia con ello, se explicitan a continuación hipótesis de trabajo para los aspectos motivacionales, los actitudinales y los cognoscitivos.

La hipótesis central (de tipo cognitivo) que se exploró en esta investigación puede expresarse como sigue:

1.6.1 - Siguiendo lineamientos teóricos y metodológicos asociados al diseño de las denominadas situaciones didácticas de Brousseau puede conseguirse que los alumnos de un grupo escolar construyan los significados del seno de un ángulo agudo como razón y como función.

Otras hipótesis que se exploraron durante la experimentación de la situación didáctica en el aula, son las siguientes:

1.6.2 – El logro de una motivación positiva, intrínseca a la situación de aprendizaje, que provoca el involucramiento inicial del estudiante en la acción que le conducirá al logro de aprendizaje significativo, puede conseguirse por medio de la curiosidad cognoscitiva que despierta el hecho de que un aparato funciona.

La tercera hipótesis que se consideró durante el desarrollo del trabajo, se refiere al aspecto "actitudinal" del alumno participante en una situación didáctica, y se utilizó con fines diagnósticos, se enuncia a continuación:

1.6.3 - El estudiante medio del grupo escolar, en su actuación al interior del aula, en relación a sus expectativas con respecto al profesor y al saber escolar esta inmerso en lo que podríamos denominar "un contrato didáctico asociado a la didáctica tradicional".

El significado de esta hipótesis se aclara mas adelante en el marco teórico, sin embargo de manera informal puede expresarse diciendo "se asume que las "reglas del juego didáctico" que practica el alumno en el aula son las de la didáctica tradicional.

Otra hipótesis que se asumió, y se exploró con el fin de tener un diagnóstico previo, también tiene que ver con la actitud del estudiante, es la siguiente:

1.6.4 - El estudiante medio del grupo eescolar tiene una concepción de la matemática que le ocasiona una actitud negativa hacia el aprendizaje de esta ciencia.

Finalmente y con relación a las hipótesis 1.6.3 y 1.6.4 e insistiendo en la idea de que los aspectos motivacionales, actitudinales y cognoscitivos están interrelacionados, y considerando además que la hipótesis fundamental del trabajo siendo de naturaleza cognoscitiva, no debía quedar expuesta a la posibilidad de que la variable "actitud" determinara un resultado no atribuible al diseño de la situación didáctica, se intentó aislar el plausible efecto de la misma por medios que se describirán en el capítulo correspondiente a la metodología aplicada en la investigación.

1.7 - Delimitación y alcances del problema de investigación

Como se expresa al principio, el título del trabajo de investigación aquí expuesto es: "Una exploración de un proceso de construcción del significado del seno de un ángulo agudo como función y como razón"; con respecto a esta denominación, y a la delimitación del problema, se tiene lo siguiente:

1.7.1 – Se habla de una "exploración", porque se investigó, precisamente al nivel de una exploración, la posibilidad de incorporar lineamientos teóricos y metodológicos provenientes de la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, al diseño de una situación didáctica **aplicada en un grupo escolar típico sujeto a las conocidas restricciones institucionales de tiempo y condiciones de trabajo.**

En este sentido, aunque no se enuncia como hipótesis de trabajo, se piensa que una de las condiciones que disuaden "a priori" al profesor de aplicar los nuevos enfoques, consiste en que el maestro piensa que ellos le demandarán demasiado tiempo y entonces no podrá cumplir con los tiempos institucionales asignados para el cumplimiento del programa escolar.

1.7.2 – Se dice "un proceso de construcción" y no "el proceso de construcción" en razón de que la complejidad del objeto de estudio (dos significados para el seno del ángulo agudo, dos teoremas de geometría - lo cual implica el pensamiento deductivo - y otras varias nociones) determina que los procesos de construcción no sean necesariamente únicos.

1.7.3 - El diseño de la propuesta teórica buscó cumplir no solo con requerimientos teóricos y metodológicos formales, sino también coadyuvar al logro de los propósitos enunciados en el Programa de la SEP con respecto al logro de conocimientos, habilidades, capacidades, destrezas, y actitudes.

1.7.4 - También se intentó responder con la propuesta didáctica a las características asociadas o requeridas para el tratamiento pedagógico de los temas, mismas que son enunciadas en dicha obra y que corresponden a los puntos enlistados desde 1.3.12 hasta 1.3.20 en este escrito.

1.7.5 – Este trabajo de investigación se ocupó sólo de los significados del seno de un ángulo agudo (primer tema del programa), ya que como resultado adicional al enfoque didáctico, se piensa que las ideas desarrolladas para esta noción pueden resultar transferibles a las otras razones trigonométricas.

1.7.6 – El trabajo de investigación, abordó el segundo tema del programa de Trigonometría, a saber, los valores del seno de ángulos de 30°, 45° y 60°. De hecho, el tratamiento didáctico aquí provisto permite considerar los ángulos de 0° y 90° que resultan intuitivamente problemáticos en el enfoque tradicional (ya que éste utiliza triángulos rectángulos donde dichos ángulos no pueden ser visualizados) y permite también sistematizar el tratamiento de estos valores especiales de modo que no se requiera de una figura particular que haga posible el cálculo para cada caso.

1.8 - Propósitos y justificación de la elección del problema de investigación propuesto

Los principales argumentos que intentan mostrar la importancia de realizar un trabajo de investigación como el que aquí se está exponiendo consisten en la exposición por un lado, de necesidades sociales educativas vigentes, y por el otro, de cuestiones cognitivas interesantes que el citado trabajo puede contribuir a atender. Se resumen a continuación:

1.8.1 - Para los contenidos matemáticos estudiados en la escuela primaria existen numerosas propuestas didácticas con tendencia constructivista. Continuamente como resultado de diversas investigaciones se generan nuevas alternativas con el mismo enfoque. No sucede igual para los contenidos de la escuela secundaria donde las propuestas son escasas, (quizá porque este nivel requiere de mayores grados de pensamiento formal). En este sentido se piensa que toda propuesta constructivista que haya sido cuidadosamente construida y fundamentada resultará siempre bienvenida, ya que contribuirá a satisfacer necesidades educativas (en particular la de actualizar a los maestros en el citado enfoque).

El trabajo que aquí se presenta intenta aportar una propuesta didáctica con esta perspectiva, que incorpora materiales didácticos novedosos y describe los pormenores y resultados de su aplicación en el aula.

1.8.2 -En lo que respecta al campo particular de la Enseñanza de la Trigonometría, los artículos y reportes de investigación o de divulgación referentes a las didácticas de enfoque constructivista que están al alcance del maestro típico son prácticamente inexistentes. Este hecho puede corroborarse en una lectura del índice de los artículos contenidos en la antología titulada "La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria", SEP, Primer nivel, Programa Nacional de Actualización Permanente. En esta obra no existe un solo artículo referente a la naturaleza o a la didáctica de esta asignatura. La investigación aquí expuesta pretende contribuir a remediar esta omisión.

1.8.3 - Los contenidos trigonométricos revisten un cierto grado de abstracción que tradicionalmente ha ocasionado grandes dificultades en su correspondiente proceso enseñanza-aprendizaje. El concepto de función, que suele ser difícil de captar por los estudiantes, se complica aún más cuando se refiere a las funciones trigonométricas. La propuesta didáctica que aquí se presenta busca contribuir a la solución de estos problemas enfatizando los aspectos geométricos y de representación gráfica de estas nociones. Desde el punto de vista cognoscitivo se indagará si la utilización de instrumentos didáctico-mecánicos puede contribuir al logro del aprendizaje asociado a estos contenidos.

1.8.4 - La totalidad (17), de los libros de texto de trigonometría contenidos en una muestra de los mismos que fue revisada en este trabajo, provee cierta evidencia de que el tratamiento didáctico de esta asignatura sigue revistiendo un carácter tradicional.

Las características pedagógicas de las citadas obras, provocan un problema adicional al maestro, a saber: el de la incompatibilidad teórica entre los instrumentos de trabajo del profesor (los textos), con respecto al enfoque didáctico que está recibiendo en los cursos de actualización. De lo anterior se desprende que otro propósito de esta investigación es el de contribuir a resolver este problema de incongruencia en la didáctica de la Trigonometría.

1.8.5 - En la enseñanza tradicional, la Trigonometría suele ser presentada con carencia total de estímulos que motiven su aprendizaje. Un propósito de la propuesta aquí expuesta, consiste en introducir medios o artefactos novedosos para afrontar este problema, con la expectativa de que tales recursos contribuyan a solucionar los problemas de la motivación y la actitud.

1.8.6 – La propuesta didáctica teórica asociada a esta investigación recupera y articula significativamente 9 importantes temas o áreas temáticas del programa de matemáticas de la SEP (Ver desde 1.3.21 hasta 1.3.29 en este mismo capítulo).

CAPITULO 2

MARCO TEORICO Y CONCEPTUAL

En este capítulo se establecen de manera breve y esquemática los principales conceptos, y principios teóricos que se utilizan en la investigación y que fundamentan: 1) la elaboración de la propuesta didáctica, 2) la metodología de investigación, y 3) el diseño de los instrumentos asociados a la aplicación de la propuesta. Inicialmente se recuperan algunas ideas de Piaget y otros autores que se utilizan para construir un concepto de "propuesta didáctica con enfoque constructivista" y un "conjunto de indicadores" para la misma. Enseguida se hace una presentación de la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau que a la vez estructura al trabajo y le provee de recursos investigativos, del mismo autor se incluye la noción de "contrato didáctico" y algunas derivaciones del mismo. Más adelante se expone el concepto de "transposición didáctica" de Chevallard que muestra relaciones entre una obra matemática históricamente inicial, y la propuesta didáctica contenida en la investigación. Finalmente y desde una perspectiva histórico-didáctica mediada por las ideas de Y. Chevallard, se describe la construcción de tablas de cuerdas de Ptolomeo.

2.1 – Propuesta didáctica con enfoque constructivista – Concepto.

Con respecto al marco conceptual asociado a esta investigación, se propone a continuación el siguiente concepto. Diremos que:

Una propuesta didáctica tiene enfoque constructivista si constituye una propuesta de enseñanza que para su soporte teórico recupera o se apoya en los siguientes postulados básicos:

2.1.1 - El principio teórico fundamental para toda propuesta constructivista es: **El alumno es quien de manera activa construye su propio conocimiento como resultado de sus interacciones tanto con el medio físico como con el social.**

2.1.2 - Cualquier otro principio teórico que se acepte como soporte de una propuesta didáctica constructivista, debe ser congruente (no contradictorio) o compartido con el principio teórico fundamental.

Se infiere de 2.1.1 que si el alumno es quien construye su conocimiento entonces el profesor no puede transmitir o enseñar directamente un saber hecho y acabado, sino que el papel didáctico del maestro consistirá en propiciar las condiciones para que los estudiantes inicialmente construyan su conocimiento y posteriormente transformen este conocimiento en saber, esto es, conocimiento socialmente validado.

El postulado 2.1.2 se ha agregado por dos razones: 1) El principio teórico fundamental se refiere esencialmente al aspecto cognitivo del aprendizaje y entonces resulta "lógico" y relativamente natural que no se deba aceptar cualquier otro principio cognitivo que entre en contradicción con el anterior, 2) El término "compartido" se entiende en este trabajo en el sentido de que en el aprendizaje no sólo intervienen factores cognitivos sino también afectivos, sociales, etc. y estos factores pueden "coexistir", "compartir" o "complementar" sus explicaciones o contribuciones en el contexto constructivista derivado del principio teórico fundamental que aquí se ha aceptado.

2.2 - Un conjunto de indicadores para identificar una propuesta didáctica con enfoque constructivista

Considerando que para fines prácticos tales como el de diagnosticar si una cierta propuesta didáctica tiene o no enfoque constructivista, una conceptualización como la provista en el párrafo anterior pudiera resultar demasiado abstracta o general, se ha considerado pertinente proveer un conjunto más explícito de indicadores mínimos que posibiliten una identificación de este tipo de propuestas.

En este parte del escrito resulta importante enfatizar dos puntos:

1) La concurrencia de estos indicadores mínimos en una "propuesta constructivista" no garantiza o asegura que vaya a lograrse la construcción de conocimiento. Las sugerencias didácticas implicadas en los indicadores deben considerarse solamente como necesarias. No se está afirmando que sean necesarias y suficientes para construir el conocimiento asociado a la propuesta.

2) La caracterización de propuesta constructivista aquí presentada no pretende definir "la esencia" de una propuesta de este tipo, sino solamente indicar lo que en este trabajo de investigación deberá entenderse, cuando se mencione el citado constructo.

Una vez establecidos las consideraciones anteriores diremos que una propuesta didáctica tiene enfoque constructivista si contiene el conjunto de indicadores mínimos que se presentan a conatinuación:

2.2.1 – El alumno es quién construye su propio conocimiento, es decir, es activo y es el actor en este proceso. En consecuencia, el profesor debe diseñar la situación didáctica de modo que propicie la acción cognitiva del estudiante. La propuesta debe contener actividades de aprendizaje para el estudiante que estén sustantivamente relacionadas con el objeto de aprendizaje.

2.2.2 – En el proceso de construcción de conocimiento el alumno interactúa con su medio ambiente físico o con objetos concretos contenidos en el mismo. Se infiere que en lo posible, el profesor debe diseñar la situación didáctica de modo que el alumno interactúe con materiales concretos tales como piedras, fichas, varas (materiales no estructurados) o tangramas, geoplanos, reglas, aparatos o artefactos diversos (materiales estructurados). Debe resultar claro que la interacción con materiales concretos no deberá ser arbitraria, azarosa o sin propósito definido, sino que también deberá estar relacionada sustantivamente con el objeto de conocimiento (del programa escolar) que se pretende construir.

2.2.3 - La construcción de conocimiento es un resultado de la interacción social. El cambio cognitivo constituye un proceso tanto social como individual. Entonces el profesor debe propiciar interacciones sociales de los siguientes tipos: alumno-alumno, alumno-equipo,

equipo-equipo, alumno-maestro, alumno-grupo, equipo-maestro y grupo-maestro. En la formación de cada equipo resulta deseable que al menos un integrante sea más experto que los demás.

2.2.4 - El aprendizaje se da cuando la presencia de un cierto estímulo desequilibra las estructuras cognitivas del alumno y obliga a la mente a modificarlas o a crear otras nuevas que puedan acomodar al citado estímulo, cuando esto se logra se produce tanto la re-equilibración como el aprendizaje. El profesor debe buscar estímulos adecuados para desequilibrar las estructuras cognitivas de sus estudiantes. En general, la didáctica constructivista indica preferentemente plantear problemas, preguntas, juegos, o actividades cognitivamente intrigantes, interesantes o "desequilibrantes" sin desdeñar las actividades de tipo práctico (20, pp.101-102). Aunque la motivación derivada de este último tipo de actividades pudiera no tener relación directa con lo cognitivo, suele ser un fuerte impelente a la acción para muchos estudiantes.

2.2.5 – La construcción de significados se da cuando el alumno relaciona de manera sustantiva y no arbitraria sus conocimientos previos con el nuevo saber propuesto por el maestro (Significatividad lógica). En consecuencia, en el diseño de las situaciones de construcción de conocimiento matemático, el profesor debe buscar que el "material de enseñanza" (sea un saber o un recurso didáctico para la presentación de un saber) sea potencialmente significativo, esto es: sea relacionable lógicamente con los conocimientos previos del estudiante. Si el material de enseñanza está mediado por un problema, este debe ser de un grado de dificultad no tan fácil que resulte aburrido (o un mero ejercicio), ni tan difícil que esté fuera de las capacidades resolutivas del estudiante.

2.2.6 – La construcción de significados también se da cuando el alumno adopta una "actitud positiva" hacia el aprendizaje de las matemáticas (Significatividad psicológica). Para el profesor el cambio de actitud del estudiante hacia el estudio de las matemáticas es un problema complejo. Este cambio implica el conseguir una motivación que induzca al estudiante a la acción, y posteriormente lograr una disposición del alumno a perseverar en el esfuerzo hasta alcanzar su culminación. Para el problema de la motivación la didáctica constructivista plantea una motivación de tipo intrínseco que idealmente puede lograrse con recursos tales como los especificados en 2.2.4. Para el problema de la actitud Brousseau propone medidas tales como la de hacer consciente al alumno de la existencia del "contrato didáctico" (que más adelante se define) y a continuación, y como resultado del conocimiento derivado de esta explicitación, arribar a la posibilidad de realizar un trabajo conjunto de alumnos y profesores tendiente a la modificación de los términos de este contrato, se asume que esto conllevará asociado un cambio de actitud.

Se ha intentado que la propuesta didáctica teórica elaborada para esta investigación satisfaga los requisitos o indicadores mínimos aquí enlistados.

2.3 - La teoría de las situaciones didácticas de Brousseau

Para los fines de esta investigación se piensa que la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau provee un modelo que permite por una parte, aplicar, operativizar o "aterrizar" ideas y principios constructivistas de Piaget (construir una propuesta didáctica con enfoque constructivista), y por otra, realizar una investigación en matemática educativa que incorpore recursos y medios científicos de construcción y validación de conocimiento.

A continuación se hace una breve presentación de los fundamentos, componentes, características, principios y métodos de la Teoría de las situaciones didácticas de Brousseau misma que constituye el principal soporte teórico de este trabajo. Para la estructuración y fundamentación del escrito se ha recurrido principalmente a (37, pp.1-67) y a (24).

2.3.1 - Situaciones didácticas

Brousseau define las situaciones didácticas como: **"El conjunto de relaciones establecidas explícita o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, cierto medio (que comprende herramientas y objetos) y un sistema educativo (el profesor) con objeto de que los alumnos se apropien un saber constituido o en vías de constitución" (37, p. 42)**

Por medio de las "situaciones didácticas" se intenta convertir el salón de clase en un micro-laboratorio a través de una modelación teórica previa del juego de variables didácticas que intervendrán en la situación.

Con la modelación se trata también de conseguir un "control" y una "reproducibilidad" de las "situaciones didácticas" a fin de propiciar que estas puedan servir a propósitos predictivos y explicativos propios del conocimiento científico válido, según es considerado por las ciencias sociales nomotéticas.

La situación didáctica se diseña en base a un estudio epistemológico de las condiciones y procesos dialécticos que históricamente se presentaron cuando dicho saber fue construido socialmente y al igual que en la historia, el proceso de construcción de conocimiento considerando al aula como micro-laboratorio, se inicia con el planteamiento de un problema o de una pregunta (Aunque también puede servir a este fin un juego o actividad interesante o intrigante).

Una de las labores básicas del investigador consiste en la selección adecuada del problema que iniciará el desarrollo de la "situación didáctica", este problema debe ser altamente motivante y proveer una motivación de tipo cognoscitivo intrínseca al mismo. Si el investigador consigue despertar el interés de los estudiantes por apropiarse del problema e intentar resolverlo, habrá conseguido lo que Brousseau denomina **"devolución del problema".**

Además del problema inicial, la "situación didáctica" contiene:

- Fases en las que interviene el enseñante (el profesor) a las que denominaremos también **situaciones didácticas.**
- Fases en las que el profesor deliberadamente renuncia a intervenir y que se denominan **situaciones a–didácticas.**
- Medios de control de la situación didáctica: las llamadas **"variables didácticas de comando"**, por ejemplo, el cambio de marcos, etc.

- Presencia de **procesos dialécticos:** problemas como herramienta-objeto, procesos de contextualización y descontextualización de conocimientos, construcción y destrucción de conocimientos.
- **Obstáculos didácticos:** Presencia de "conocimiento que tiene su propio dominio de validez y que fuera de ese dominio puede ser fuente de errores y dificultades" (27, p.224).* De manera simplificada puede interpretarse como un conocimiento que dificulta la asimilación de otro conocimiento.

La "situación didáctica" se desarrolla en el aula a través de las siguientes etapas:

- **"Devolución" del problema":** El profesor diseña un problema "adecuado" y consigue que los estudiantes se lo apropien.

- **Fase a- didáctica de acción**: Los estudiantes realizan acciones cuyo propósito es resolver el problema, contestar la pregunta o realizar la actividad cognoscitivamente interesante.

- **Fase a- didáctica de formulación:** Los estudiantes formulan expresiones o representaciones de sus hallazgos, descubrimientos o construcciones, utilizando su propio lenguaje.

- **Fase a- didáctica de validación:** Los estudiantes argumentan y "negocian" la validez de sus formulaciones.

- **Fase didáctica de institucionalización:** El profesor asimila el conocimiento construido en el aula al saber construido científicamente. Contextualiza las representaciones individuales con respecto a las representaciones convencionales admitidas.

En su tratamiento de las "situaciones didácticas" Brousseau agrega una dimensión sociológica a su estudio: el concepto de "contrato didáctico" que se expone a continuación.

2.3.2 - Contrato didáctico

"Conjunto de comportamientos (específicos) del maestro que son esperados por el alumno, y conjunto de comportamientos del alumno que son esperados por el maestro, y que regulan el funcionamiento de la clase y las relaciones maestro-alumno-saber, definiendo así los roles de cada uno y la repartición de tareas: ¿quién puede hacer qué?, ¿cuáles son los fines y los objetivos?..." (36, p. 26).

En lo sucesivo nos referiremos a este concepto como "Contrato didáctico de Brousseau".

El concepto de contrato didáctico permite analizar, explicar y comprender algunos fenómenos didácticos tales como aquellos que Brousseau denomina "efecto Topaze", "efecto Jourdain", etc, que aquí no abordaremos.

---

* Chevallard et al citando a Brousseau.

Roland Charnay en su artículo "Aprender (por medio de) la resolución de problemas" (36,pp. 26-29) utiliza este concepto para analizar "situaciones de enseñanza" en términos de las relaciones que se "juegan" entre los "polos" maestro, alumno y saber.

Textualmente indica: " Analizando: - la distribución de los roles de cada uno; - el proyecto de cada uno; - las reglas del juego: ¿qué está permitido, qué es lo que realmente se demanda, qué se espera, qué hay que hacer o decir para mostrar que se sabe"...

En esta investigación se recupera este medio de análisis de las "situaciones de enseñanza" en el diseño del cuestionario A – CD –2 que se presenta en el siguiente capítulo.

En base a las ideas precedentes puede pensarse en "contratos didácticos constructivistas" donde las "reglas del juego" y las relaciones maestro-alumno-saber son congruentes con los principios constructivistas, o en "contratos didácticos tradicionales" donde las reglas del juego y las relaciones maestro-alumno-saber son congruentes con la idea de que el conocimiento hecho y acabado se transmite por el profesor al alumno.

A continuación, y en relación al supuesto asumido en este trabajo de que los aspectos cognoscitivos, motivacionales y actitudinales implicados en una propuesta didáctica no son independientes unos de otros, se presentan algunas ideas de Chevallard que tienen que ver precisamente con aspectos cognoscitivos, didácticos y afectivos.

2.4 - La transposición didáctica de Yves Chevallard

Puede afirmarse que la Didáctica de las Matemáticas Francesa reviste un doble carácter sistémico: en un primer sentido se dice que se trata del estudio de un sistema, el sistema didáctico.

Por ejemplo, en el estudio de las "situaciones didácticas" (de Brousseau) no solo se toman en cuenta las dimensiones alumno-maestro-saber, sino también al contexto socio-cultural donde la situación didáctica se desarrolla.

En un segundo sentido se tiene que las investigaciones que se realizan al interior de la misma están apoyadas por marcos teóricos (fundamentalmente la psicología y la epistemología genéticas de Piaget) y por conceptos y constructos comunes unificados y no contradictorios, que propician que los diversos trabajos no sólo se yuxtapongan o acumulen sino aún que se articulen, coordinen y complementen en sus tareas científicas de exploración, descripción, explicación y predicción, tal y como si formaran parte de un sistema mayor, más complejo que las englobara de manera consistente.

Es en este contexto que la dimensión "saber" que aparece en los trabajos de Brousseau en los procesos de contextualización y descontextualización y en los "componentes" del contrato didáctico, es también estudiada sistemáticamente como objeto propio de la didáctica por Y. Chevallard.

Puede afirmarse que en la escuela tradicional lo referente al "saber" no ha constituido un objeto de indagación o de preocupación para el profesor típico, este maestro simplemente ha asumido o sobreentendido que el saber no es problemático y que sólo hay un saber, esto es, que el saber único constituido o representado por los contenidos escolares de las asignaturas en los programas escolares, fuera de las dificultades o problemas que pudiera ofrecer su enseñanza, no constituye un problema en si mismo.

Con referencia a este asunto y a la presencia de estos contenidos escolares en el currículo, Chevallard et al (27, pp.141-143) expresan:

"Al dejar de lado la problemática específicamente matemática, la teoría del currículo se centra principalmente en los problemas referentes a la *secuenciación, temporalización y presentación* de unos contenidos matemáticos *supuestamente transparentes y predeterminados*".

Más adelante agregan:

"Esta postura, propia de lo que hemos denominado *el punto de vista clásico* en didáctica de las matemáticas ignora la distancia entre las obras matemáticas y su adaptación a las instituciones didácticas, suponiendo implícitamente que dicha adaptación sólo puede consistir en una *imitación* mas o menos fiel de las obras matemáticas tal y como fueron producidas".

Chevallard advierte que la problemática asociada a la didáctica de las matemáticas no sólo debe buscarse en factores cognitivos, motivacionales o actitudinales en los alumnos y en los profesores sino también en las obras matemáticas originales y las sucesivas reconstrucciones escolares de las mismas elaboradas con fines didácticos.

Señala también que estas reconstrucciones escolares resultan imprescindibles porque en general el tipo de cuestiones (problemas) que históricamente originaron la obra matemática no son siempre las mas adecuadas para reconstruirla en el contexto escolar moderno.

Brousseau (37, pp.3-4) refiriéndose a la transposición didáctica expresa: "Ella tiene su utilidad, sus inconvenientes y su papel, aun para la construcción de la ciencia. Es a la vez inevitable, necesaria y en un sentido deplorable. Debe mantenerse vigilada."

Es en relación a éstas cuestiones que Chevallard introduce el concepto de "transposición didáctica", mismo que se transcribe a continuación:

2.4.1. - Transposición didáctica: Conjunto de las transformaciones adaptativas que sufre una obra para ser enseñada. (27, p.136)

Menciona Chevallard que la transposición del saber pasa por tres etapas:

1) La primer etapa tiene lugar en la comunidad matemática: el saber responde a las exigencias convenidas por la comunidad para que dicha obra sea comunicable. En este respecto se tiene que la presentación del saber en su forma axiomática-deductiva constituye la forma de presentación clásica en la comunidad matemática. En esta investigación a esta presentación de la dimensión saber le llamaremos **"saber matemático".**

2) En la segunda etapa la obra matemática se transforma ya con miras o propósitos educativos y es este cambio del saber lo que propiamente constituye una transposición

didáctica. El saber se transforma para adaptarse a una institución didáctica concreta. En este trabajo al saber resultante de una transposición didáctica le denominaremos **"saber escolar".**

En este punto se considera pertinente enfatizar la consideración de que una transposición didáctica, esto es, el "conjunto de las transformaciones adaptativas que sufre una obra para ser enseñada" que usualmente es concretada en un texto, no sólo contiene al saber escolar, sino también a las instrucciones didácticas que los autores o autoridades consideran adecuadas para que el estudiante se apropie del saber escolar. Esto es, la transposición didáctica está compuesta de un saber y de una didáctica para "vehicular" dicho saber, esto es: para transmitir o comunicar un saber, o para propiciar condiciones para la construcción de dicho saber.

3) La tercera etapa de la transposición didáctica se refiere a la que se da dentro del proceso didáctico mismo. Según lo anterior en nuestra interpretación esta última transformación del saber correspondería al saber del profesor tal y como es expuesto en clase. A este saber le denominaremos **"saber del maestro"**

En este trabajo se piensa que en el contexto asociado a las transposiciones didácticas como "conjunto de las transformaciones adaptativas que sufre una obra para ser enseñada" se encuentran contenidos elementos que deben ser explicitados para hacer más "operativo" o "aplicable" al concepto, estos elementos son los siguientes:

- La transposición didáctica es un proceso. Se origina en una "obra matemática inicial" y culmina en lo que se ha denominado "saber escolar".

- El "saber escolar", a su vez, contiene de manera implícita la concepción del autor o de la institución escolar (concepción mediada por supuestos o creencias epistemológicas) de cuáles deben ser los papeles desempeñados por el profesor y por el estudiante en la relación maestro-alumno-saber.

- El saber escolar como producto de la transposición didáctica usualmente se manifiesta o se concretiza en un texto que abarca tanto contenidos matemáticos como instrucciones, sugerencias o recomendaciones para que estos puedan ser apropiables por el estudiante.

En consecuencia con las ideas que anteriormente se han expuesto puede pensarse en:

- textos o propuestas didácticas que contienen un saber escolar y recomendaciones didácticas para transmitir un saber hecho y acabado y que podrían considerarse como una especie de "transposiciones didácticas tradicionales"

- textos o propuestas didácticas que contienen un saber escolar y recomendaciones didácticas para propiciar la construcción del saber que podrían considerarse como "transposiciones didácticas constructivistas.

Debe resultar claro que al menos a nivel de propuesta, una misma transposición didáctica (el diseño que contiene el saber escolar) puede dar lugar a una transposición didáctica tradicional o a una transposición didáctica constructivista.

Boyer (22, p.7), "...no existían tales cosas como "razones" trigonométricas. Los Griegos, y después de ellos los Hindúes y los Árabes, usaban *líneas* trigonométricas".

La transposición didáctica asociada a la propuesta, en su intento de construir la noción del seno de un ángulo agudo como función, inicialmente también concibe dicha noción como una "línea", esto es, como un segmento (la cuerda correspondiente al ángulo inscrito).

Como puede observarse, los conceptos de transposición didáctica con enfoque tradicional y transposición didáctica con enfoque constructivista implican o contienen, no solo al saber escolar sino también al saber del maestro, y se piensa que estos constructos resultan mas adecuados para nuestro estudio, ya que resultan directamente aplicables y relacionables con contextos educativos donde el maestro, para comunicar el saber a los estudiantes, suele apoyarse en un libro de texto y sus correspondientes recomendaciones didácticas.

2.4.2 - La transposición didáctica constructivista implicada en este estudio.

Siendo uno de los propósitos de esta investigación la elaboración de una propuesta didáctica con enfoque constructivista, debe resultar claro que los saberes escolares tratados en la propuesta, esto es, aquellos correspondientes a la noción de seno de un ángulo agudo, junto con la didáctica constructivista implicada por el desarrollo de la situación didáctica que se ha diseñado, constituyen una transposición didáctica constructivista en el sentido que se ha señalado antes.

En lo que concierne al "saber escolar" (la presentación del saber matemático con propósitos didácticos) la transposición didáctica correspondiente a esta investigación ha intentado "reducir" la distancia entre la obra matemática original (las tablas de cuerdas de Ptolomeo contenidas en el "Almagesto") y la adaptación o transformación que se hizo de la misma para presentarla como saber escolar (el concepto de seno de un ángulo agudo).

Esta "reducción" de distancia debe entenderse como una cierta analogía en los procesos de construcción. Se deriva de considerar en ambos casos el significado del seno de un ángulo como una función.

Ptolomeo en la construcción de su tabla de cuerdas, esencialmente intenta asociar por medio de cálculos basados en teoremas, arcos de círculo con las longitudes de sus cuerdas correspondientes, expresadas éstas últimas en términos del diámetro del semicírculo.

En la transposición didáctica implicada en esta investigación, se asocian (por medio de una medición) ángulos inscritos en un círculo, con las longitudes de sus cuerdas correspondientes expresadas en términos del diámetro del semicírculo.

Otra manifestación de la "reducción de distancia" la constituye el hecho de que Ptolomeo concibe a la cuerda de un ángulo 2α (equivalente al seno de un ángulo α en un círculo con diámetro unitario) como una "línea" (un segmento) y no como una razón. Como expresa Boyer (22, p.7), "...no existían tales cosas como "razones" trigonométricas. Los Griegos, y después de ellos los Hindúes y los Árabes, usaban *líneas* trigonométricas".

La transposición didáctica asociada a la propuesta, en su intento de construir la noción del seno de un ángulo agudo como función, inicialmente también concibe dicha noción como una "línea", esto es, como un segmento (la cuerda correspondiente al ángulo inscrito).

Al intentar esta "reducción de distancia" se atiende al señalamiento de Chevallard referente a que la problemática asociada a la didáctica de las matemáticas no sólo debe buscarse en factores cognitivos, motivacionales o actitudinales en los alumnos sino también en las obras matemáticas originales y las sucesivas reconstrucciones escolares de las mismas elaboradas con fines didácticos.

A continuación, y con el propósito de explicitar las características de la propuesta contenida en esta investigación que "reducen" su distancia con respecto a la obra matemática original representada por la construcción de tablas de cuerdas de Ptolomeo, se presentan de manera breve, esquemática y simplificada algunos de los componentes de dicha construcción.*

2.5 - La construcción de una tabla de cuerdas por Ptolomeo

Las tablas de contenidos de los textos actuales de trigonometría básica, centrados fuertemente en la resolución de triángulos rectángulos y en la aplicación de este conocimiento a la solución de problemas de naturaleza práctica, hacen conjeturar de manera relativamente natural que el conocimiento trigonométrico surgió como respuesta a problemas prácticos referentes a alturas, profundidades, distancias, túneles, etc, problemas de medición indirecta.

Sin embargo, un estudio histórico (enmarcado en la tradición greco – occidental) del nacimiento de la Trigonometría revela que esta rama de la matemática surge ciertamente como respuesta o solución al planteamiento de problemas de aplicación, pero que estos cuestionamientos prácticos no eran de "naturaleza terrestre" sino mas bien "celestial", es decir, problemas provenientes de la astronomía tales como medir arcos de círculos en el espacio, distancias entre cuerpos celestes, establecer posición de estrellas, construir globos y mapas del cielo, elaborar catálogos de estrellas, predecir fenómenos celestiales, etc, etc.

En este contexto, resulta que un primer problema astronómico básico abordado por Ptolomeo y que dio origen a su construcción de tablas de cuerdas es el que se plantea a continuación:

Dado un arco AB de círculo, por ejemplo en la bóveda celeste, y que corresponde a un ángulo entre A y B observado desde la tierra T, ¿cuál es la relación entre el arco y su cuerda correspondiente?

El problema se contextualiza mejor si se agregan las siguientes consideraciones tomadas de G. Sarton *.

En su teoría astronómica Ptolomeo postulaba:

- La esfericidad de los cielos
- La revolución de la bóveda celeste alrededor de la tierra que permanecía inmóvil en el centro.

---

* El lector interesado en un tratamiento histórico-matemático más amplio y preciso de estas cuestiones puede consultar 19, 22 o 30.

* SARTON, George (1978). Ciencia antigua y civilización moderna. México. Fondo de Cultura Económica (p.56).

Se puede conjeturar en relación al problema que aquí se ha planteado, que A y B podrían representar a dos estrellas contenidas en un arco celeste máximo, a las que convendría asignar una representación en un globo celeste. La solución de este problema podría resultar entonces de gran utilidad no sólo para la astronomía, sino también para resolver problemas de orientación en la navegación.

Ptolomeo consideró que una manera de abordar el problema representado por esta relación consistía en elaborar tablas donde se registrara el cambio simultáneo del arco y su cuerda correspondiente, por ejemplo:

arco 5° longitud de la cuerda correspondiente a 5°
arco 10° longitud de la cuerda correspondiente a 10°
arco 15° longitud de la cuerda correspondiente a 15°
y así sucesivamente.

En este punto se considera pertinente hacer una pequeña digresión y relacionar el trabajo de Ptolomeo con algunos componentes de la investigación que aquí se está presentando.

La aproximación de Ptolomeo a la solución del problema de la relación entre un arco y su cuerda, prefigura la noción del significado del seno de un ángulo como una función. La longitud de la cuerda asociada a cada arco es única y no depende del tamaño de cada círculo. La independencia de la medición de cuerdas con el diámetro, del tamaño del círculo, hace posibles las mediciones indirectas.

Las transposiciones didácticas para el tercer grado de secundaria introducen el seno de un ángulo agudo como una razón.

Considerando que la obra matemática original de Ptolomeo se desarrolló en el siglo II, entonces sus transposiciones didácticas iniciales originadas a partir de ese siglo, no estaban en posibilidad de incluir el concepto de función como objeto de enseñanza. Esto es así porque la formulación precisa de dicho concepto comenzó a ser objeto de preocupación científica a partir del Siglo XVII.

El no considerar dicha noción en las primeras transposiciones didácticas, dio lugar a una "primera descontextualización" de la definición de seno de un ángulo agudo, con respecto a los problemas iniciales que originaron su creación.

Regresando a la descripción del trabajo de Ptolomeo, se tiene que:

En sus tablas de cuerdas, Ptolomeo hace registros para cada arco de (1/2)°, inicia desde arcos de (1/2)° hasta llegar a arcos de 180°, en correspondencia, las longitudes de las cuerdas varían desde la longitud correspondiente a un arco de (1/2)° hasta una longitud igual al diámetro del círculo.

En la construcción de esta tabla que hace corresponder arcos con las longitudes de sus cuerdas correspondientes, Ptolomeo divide el círculo en 360 arcos de un grado cada uno, y el radio del mismo en 60 segmentos unitarios (consecuentemente, el diámetro en 120).

Afirma Ptolomeo que expresa las cuerdas en forma sexagesimal "debido a la inconveniencia de las fracciones".

En esta forma, la correspondencia funcional entre los elementos de la tabla de cuerdas se establece como:

crd α = longitud de la cuerda correspondiente a un arco de α grados en un círculo de radio = 60. (donde crd significa cuerda).

En este contexto la expresión crd 36° = 37; 4, 55 significa:

crd 36° = 37 unidades sexagesimales del radio + 4/ 60 + 55/ 3600

cuando la cuerda en cuestión se mide con el diámetro "sexagesimalmente graduado" del semicírculo. Sin embargo, para elaborar su tabla de cuerdas Ptolomeo no midió sino que calculó las longitudes correspondientes en función de la longitud dada del diámetro del circulo.

2.5.1 Equivalencia de una tabla de cuerdas y una tabla de senos.

Antes de continuar se demuestra que una tabla de cuerdas es equivalente a una tabla de senos.

En la figura 2.1, presentada más adelante, se tiene para un ángulo x, que:

crd 2x = BC

Medir la cuerda con el diámetro sería equivalente a establecer las siguientes proporciones:
crd 2x / AB = BC / AB = sen x (ya que ABC es rectángulo y x es ángulo inscrito)

y entonces crd 2x = AB sen x

y si AB = 1, se tiene que:

crd 2x = sen x

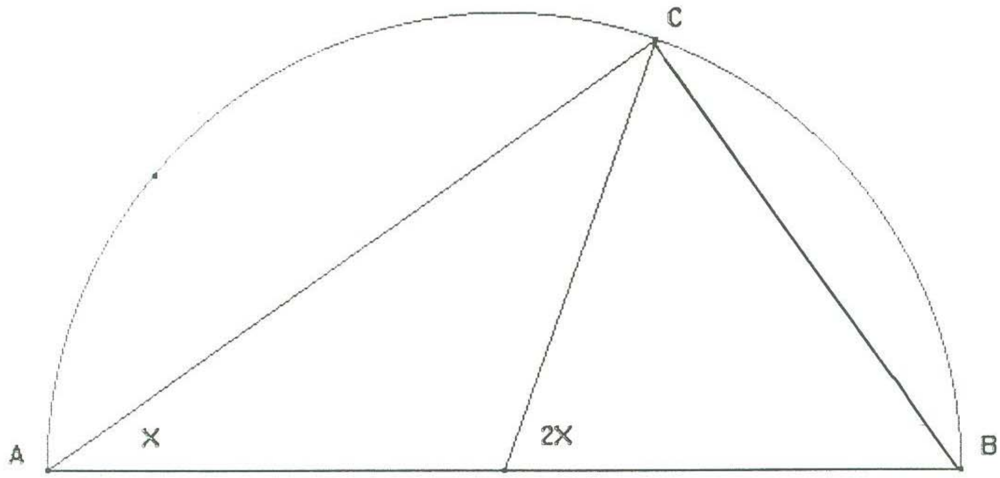
El saber matemático que en la transposición didáctica tradicional se transformó con fines escolares, recuperó para la definición del seno de un ángulo agudo, sólo la última parte de la expresión presentada en 2.5.1,esto es:

BC / AB = sen x

Esta expresión equivalente para el problema de construir tablas de cuerdas, aumentó sin embargo la distancia entre la obra matemática original asociada directamente al problema, y su transposición con fines didácticos, ya que introdujo algunas "descontextualizaciones" en la expresión de la noción original, a saber: 1) la mediación de un diámetro unitario, 2) la utilización de un ángulo inscrito, 3) la introducción de razones entre longitud de segmentos.

El principal recurso manipulativo o instrumento didáctico diseñado para intervenir en esta investigación, al que se ha denominado "Transportador trigonométrico Annette" y que se presenta en el siguiente capítulo, constituye un componente de una transposición didáctica que reduce la distancia entre la obra matemática original y su presentación como saber escolar ya que traduce directamente en su diseño y construcción, los resultados utilizados para demostrar que una tabla de cuerdas es equivalente a una tabla de senos.

FIGURA 2.1



2.5.2 - El cálculo de la longitud de cuerdas por Ptolomeo

Como antes se dijo, para elaborar su tabla de cuerdas Ptolomeo no midió su longitud con un diámetro sexagesimalmente graduado sino que calculó la longitud de las mismas en función del diámetro de un círculo dado, para ello utilizó:

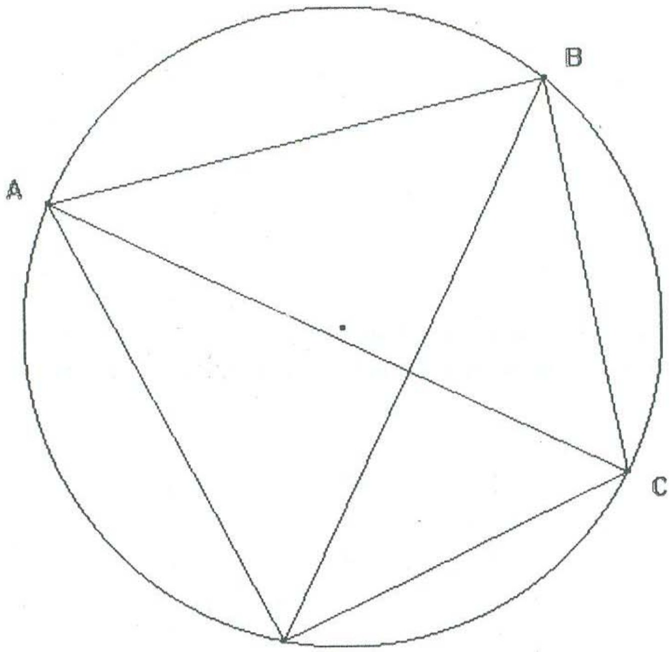
1) Teoremas geométricos propios
2) Algunos resultados de la geometría de Euclides
3) Expresiones equivalentes (en términos de cuerdas de círculos) a algunas de las actualmente llamadas identidades trigonométricas.

Ejemplificamos a continuación cada uno de los casos.

Entre los primeros destaca el llamado "Teorema de Ptolomeo" (figura 2.2) que establece: "La suma de los productos de las longitudes de los lados opuestos de un cuadrilátero inscrito en un círculo es igual al producto de las longitudes de sus diagonales".

En símbolos se tiene: $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$

FIGURA 2.2



El establecer relaciones numéricas entre las longitudes de las cuerdas AB, BC, CD, DA, AC y BD posibilita la realización de cálculos cuando se conoce un número suficiente de longitudes de las mismas. Ptolomeo utiliza este resultado para deducir un teorema que le permite encontrar la diferencia de dos arcos en términos de sus cuerdas a partir de dos arcos y sus cuerdas dadas, así conociendo crd 72° y crd 60° (esto es, ya estando registrados en su tabla de cuerdas los correspondientes valores), calcula crd 12° = crd (72° - 60°) y "enriquece" su tabla con este nuevo valor. Nótese que al considerar dados los arcos y sus cuerdas Ptolomeo evade el problema de su medición.

2) Como ejemplo del segundo tipo de recursos utilizados por Ptolomeo para el cálculo de los valores de su tabla de cuerdas se destaca su utilización de un teorema de "Los Elementos" donde se demuestra que el lado de un pentágono regular, un lado de un exágono regular, y un lado de un decágono regular, todos inscritos en el mismo círculo constituyen los lados de un triángulo rectángulo (22, p.86). Como puede verse, los citados lados corresponden a las cuerdas de ángulos de 72°, 60° y 36° respectivamente que pueden ser fácilmente calculadas y registradas en la tabla. Se observa además que tampoco se presenta la necesidad de medir ángulos o cuerdas.
La transposición didáctica tradicional rescata este tipo de recurso cuando utiliza lo que denomina "calculo de los valores de las funciones de ángulos de 30°, 45° y 60°", la presentación usual de este cálculo, que recurre a triángulos especialmente construidos para cada caso, no solo descontextualiza al problema original sino que también, al ser considerados dichos cálculos como "casos especiales", destruye la sistematicidad que suele proveer un tratamiento general. En la propuesta didáctica asociada a esta investigación no se necesita construir triángulos especiales para cada caso, el estudiante directamente puede medir las

2.5.3 - Algunas reflexiones histórico-didácticas respecto al saber matemático contenido en la construcción de las tablas de cuerdas de Ptolomeo y el saber escolar contenido en sus transposiciones didácticas

* Para los detalles del cálculo de la estimación y la validez de la misma puede consultarse el capítulo 4 de "Episodes from the early history of Mathematics", (19) en la bibliografía.

Con respecto a las reconstrucciones de saber matemático original hechas con fines escolares (esto es, transposiciones didácticas), expresan Chevallard et al (27, pp.134-136) las siguientes consideraciones:

1) "... en general, el tipo de cuestiones que están históricamente en el origen de la obra matemática no son siempre las más adecuadas para reconstruirla en el contexto escolar moderno".

2) "... las obras del currículo tienen que ser *reconstruidas* para poder ser enseñadas en la escuela, es decir "recreadas" bajo ciertas condiciones que no coinciden ni pueden coincidir con las condiciones que hicieron posible su construcción inicial".

En concordancia con las ideas anteriores, a continuación:

1) Se describen las condiciones históricas originales asociadas a la construcción de las tablas de cuerdas de Ptolomeo.

2) Se señalan además algunas de las razones por las que se piensa que algunas de estas condiciones históricas no resultan adecuadas para reconstruirlas en el tercer grado de secundaria, y se expone breve y esquemáticamente cómo algunos componentes de las transposiciones didácticas tradicionales y constructivistas coinciden o no, con las condiciones que hicieron posible la construcción histórica original.

Se pasa a continuación al primer punto:

2.5.3.1 - Condiciones históricas iniciales asociadas a la construcción de una tabla de cuerdas por Ptolomeo

Se ha estado enfatizando a lo largo de apartados precedentes que Ptolomeo, para construir su tabla de cuerdas no hace mediciones sino cálculos. Esto se ha hecho para recalcar que el tipo fundamental de cuestiones históricas existentes en la época de Ptolomeo, excluía aproximaciones empíricas hacia el conocimiento.

¿Cuáles eran las condiciones y cuestiones históricas que determinaron que Ptolomeo privilegiara el punto de vista racional sobre el empírico en la construcción de su obra científica? Se conjeturan a continuación algunas respuestas que creemos resultan plausibles:

1) Los matemáticos griegos de la escuela clásica menospreciaban las actividades de tipo práctico–empírico tales como la medición*. Su aproximación al conocimiento estaba influida por las ideas de Platón y era de tipo racionalista–idealista. Como se expresa en Bourbaki (21, p. 223) "La medida de los ángulos debió constituir a sus ojos un procedimiento empírico sin valor científico".

2) La geometría griega en lo que pudiera considerarse como una "debilidad" empirista, utilizaba desde el S. VI a.C. las llamadas Herramientas Euclidianas (una ayuda para la razón,

* No era el caso de Arquímedes y Eratóstenes quienes sí utilizaban aproximaciones empíricas al conocimiento.

según Aristóteles). Estos instrumentos incluían un compás "plegadizo" y una regla sin graduaciones. La carencia de marcas en la regla, y la imposibilidad de transporte directo de longitudes de segmentos con el compás, implicaban una prohibición científica de la medición.

3) Los procesos de medición teórica de segmentos en el caso de las cuerdas, y de ángulos para el caso de los arcos, podían llevar a la inconmensurabilidad de los pares respectivos de elementos sujetos a medición. Al respecto Bourbaki (21, p. 222) expresa: "... y como por otra parte su teoría (de los geómetras griegos de la época clásica) de las razones y de la medición se apoyaba en la comparación de múltiplos arbitrariamente grandes de las magnitudes mensurables, los ángulos no podían ser para ellos una magnitud mensurable..."

4) El construir un transportador para medir ángulos implicaba la construcción geométrica de un arco de 1°, esto a su vez requería de la solución del problema de la trisección del ángulo general utilizando Herramientas Euclidianas que en la época de Ptolomeo no se conocía aun, (actualmente se sabe que tal construcción geométrica es imposible de realizar con las citadas herramientas). Naturalmente que Ptolomeo debió conocer la solución de Arquímedes, que permite resolver el citado problema pero que infringe los postulados asociados a dichos procesos de construcción.

5) Aunque algunos de los conocimientos científicos básicos para la obra de Ptolomeo se remontan a los siglos VI y V a. C. es altamente plausible suponer que aún estaban vigentes (asumiendo a la ciencia como proceso acumulativo de saber) en los siglos I y II de nuestra era, época de Ptolomeo. En particular el estilo de presentación de la obra matemática era el axiomático-deductivo ya que dicho método, de naturaleza esencialmente racional y deductiva, había sido instrumentado por Euclides en el siglo III a.C.

2.5.3.2 ¿Resultan adecuadas las condiciones históricas asociadas a la construcción de Ptolomeo para el diseño de transposiciones didácticas constructivistas?

Según el cúmulo de argumentos constructivistas que se han venido esgrimiendo a lo largo de esta exposición (que sería repetitivo volver a enunciar), debe resultar claro que en nuestra opinión resultan inadecuadas por varias razones:

1) Las condiciones históricas 1 y 2 del apartado precedente que excluían actividades de tipo empírico como la medición de segmentos y ángulos, no resultan adecuadas en un contexto escolar contructivista que sí las considera como mediaciones necesarias en la construcción de conocimiento. Sin embargo, las transposiciones didácticas tradicionales (intentando al parecer ser copia fiel de la obra original) también excluyen lo empírico.

2) Las dificultades históricas asociadas a la conmensurabilidad de segmentos y ángulos no se presentan como un problema en el tercer grado de secundaria, sea que se trate de una transposición didáctica tradicional o de una constructivista. Sin embargo, y con respecto a la conmensurabilidad en las transposiciones didácticas tradicionales, puede afirmarse que estas transposiciones didácticas no constituyen imitaciones de la obra original, recuperan la definición de seno de un ángulo como razón entre magnitudes de segmentos cuando precisamente este era uno de los problemas que intentaba evitar Ptolomeo. Sin embargo, la definición de seno de un ángulo agudo es matemáticamente válida para la transposición

tradicional porque surge como resultado de la equivalencia entre una tabla de cuerdas y una de senos. Las transposiciones didácticas tradicionales operan, como si la condiciones históricas de inconmensurabilidad de segmentos y de ángulos siguieran existiendo.

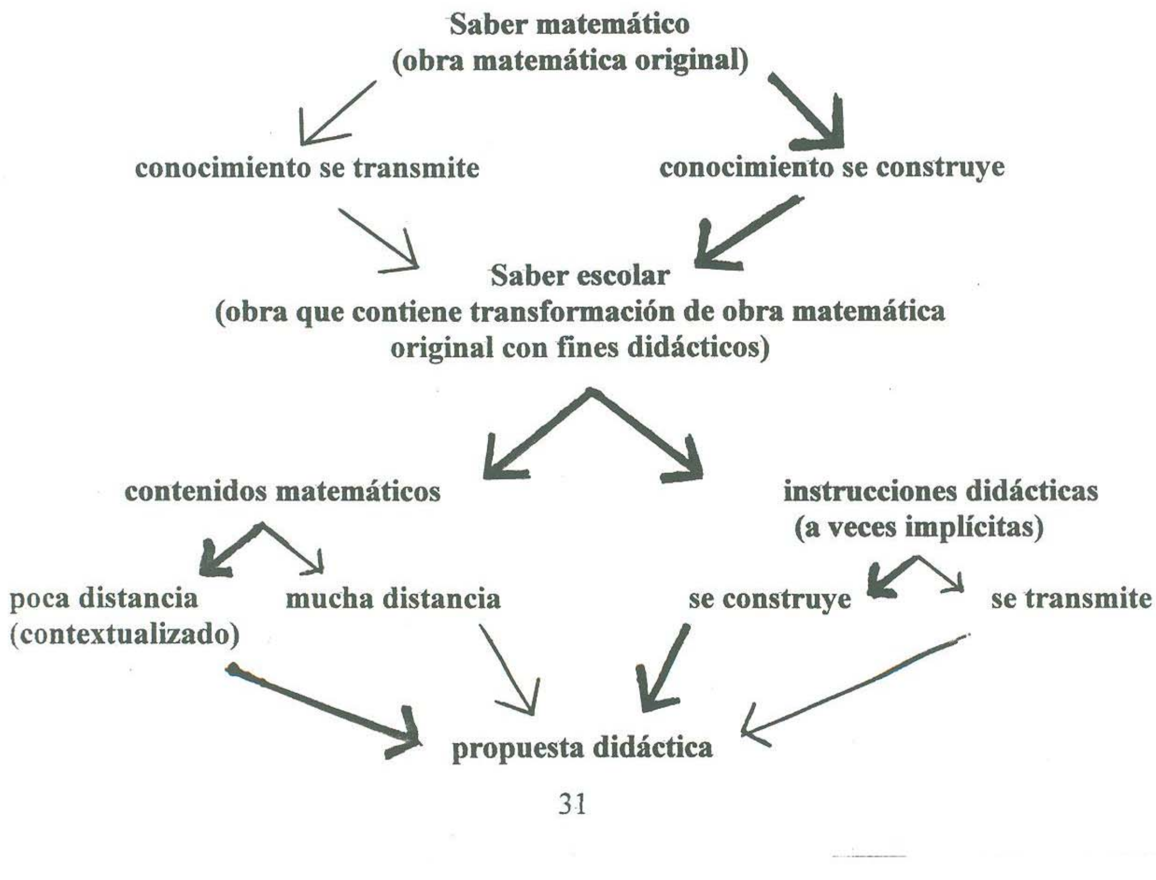
3) El Almagesto contiene un tratamiento racionalista y deductivo del saber. Una transposición didáctica para el tratamiento de la noción del seno de un ángulo agudo debe tener en cuenta que en el tercer grado se intenta una introducción gradual al pensamiento deductivo.

Las transposiciones didácticas tradicionales persisten en sus intentos de utilizar enfoques racionalistas y deductivos. También insisten en la pretensión de transmitir conocimiento fijos y acabados contenidos en obras didácticas que intentan seguir el estilo Euclidiano.

El breve análisis presentado, explicita algunos elementos que posibilitan tener una idea del significado de la "distancia" existente entre una obra matemática original, y los textos que constituyen sus transposiciones didácticas.

Resaltamos en una red conceptual el papel desempeñado por una transposición didáctica, en el diseño de una propuesta didáctica constructivista. Dicho papel se resume en la siguiente proposición: **Una propuesta didáctica que incorpora en su diseño una transposición didáctica tal, que la distancia entre la obra matemática original y la presentación de esta obra con fines didácticos sea reducida, hace más probable, que dicha propuesta resulte viable para la construcción del conocimiento escolar pretendido, ya que tal propuesta parte del planteamiento de un problema contextualizado.**

TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA Y PROPUESTA DIDACTICA



CAPITULO 3

METODOLOGÍA UTILIZADA EN LA INVESTIGACIÓN: ACCIONES E INSTRUMENTOS METODOLOGICOS

En el capítulo se presentan y describen los instrumentos y acciones metodológicas aplicadas en las diversas partes o aspectos que integran la investigación.

Para sistematizar la presentación, los instrumentos y acciones metodológicas correspondientes se describen en el orden en que fueron realizadas.

3.1 – Investigación documental – Recuperación de información

Como es obvio suponer, una vez pensado un problema de investigación interesante, se procede a recabar información pertinente al mismo, esto es, se realiza, tal como aquí se hizo, una investigación documental. Se inició con la revisión de las obras básicas enlistadas en el proyecto, posteriormente se agregaron las que han resultado necesarias.

El desarrollo de la investigación documental, además de contribuir a establecer y fortalecer el marco referencial y el teórico-conceptual, permitió la elaboración de dos constructos importantes para esta investigación:

- Una caracterización de lo que debe entenderse (en este trabajo) por "propuesta didáctica con enfoque constructivista", y 2) un conjunto de indicadores para identificar este tipo de propuestas.

- La investigación documental de los antecedentes históricos asociados a la construcción del seno de un ángulo agudo, inspiró una fundamentación del diseño del instrumento didáctico fundamental para este trabajo: un artefacto al que se denominó "Transportador Trigonométrico Annette"que se presenta más adelante. La expresión de la longitud de las cuerdas en términos del diámetro del semicírculo, hecha por Ptolomeo utilizando teoremas y resultados geométricos (medios racionales y deductivos), es asimilada en el transportador, a la medición directa de las cuerdas hecha con el diámetro graduado del mismo (medios manipulativos concretos y empíricos). Como antes se señaló, la mediación empírica de material concreto es aceptada por el constructivismo (indicador 2.2.2 en el capítulo anterior), como un recurso que puede ser necesario (más no suficiente) en la construcción de conocimiento matemático.

3.2 – Diagnóstico de una problemática

Como se menciona en el primer capítulo, un propósito principal asociado a la realización de este trabajo consistió en la elaboración de una propuesta didáctica con enfoque constructivista para el tratamiento del seno de un ángulo agudo, con la pretensión de que dicha propuesta pudiera servir para la actualización del maestro.

Puede corroborarse, consultando el índice correspondiente, que en las lecturas contenidas en la Antología utilizada en el Programa Nacional de Actualización Permanente para profesores de secundaria, no se abordan contenidos específicos para la didáctica de la Trigonometría.

Por otra parte, la experiencia didáctica del investigador le indicaba que no existían textos que presentaran propuestas con las características que aquí se han especificado para lo que hemos designado como "propuesta didáctica con enfoque constructivista".

Sin embargo no se permaneció en el nivel de asunción, o de supuestos, sino que se realizó un diagnóstico sistemático para verificar la existencia de esta situación.

La realización del diagnóstico requirió de la construcción de los siguientes instrumentos metodológicos:

1- Construcción de una caracterización de lo que en este trabajo se entiende por "Propuesta didáctica con enfoque constructivista".
2- "Operativización" del constructo anterior, esto es, explicitación de los indicadores a ser tomados en cuenta para analizar una propuesta a fin de determinar si constituye o no una propuesta didáctica con enfoque constructivista.

Similarmente, la realización del diagnóstico requirió de la realización de la siguiente acción metodológica:

3- Revisión de una muestra de 17 textos de Trigonometría o de textos que contienen capítulos referentes a la misma (se enlista en la bibliografía). Esta lista rebasa en número y variedad a aquellas muestras a disposición del maestro de secundaria típico. La revisión tuvo el propósito de determinar si dichas obras contenían o no los principios correspondientes o los indicadores de una "propuesta didáctica con enfoque constructivista".

En la revisión de los textos está implícita la consideración de que todo texto contiene una transposición didáctica, esto es, un conjunto de transformaciones de la obra matemática original para ser presentada con propósitos escolares. Aquí se piensa que la presentación de una obra con fines escolares está mediada por la posición epistemológica que profesa el autor del texto, esto es, puede darse que el autor crea que el conocimiento se transmite, o bien, que sostenga que el conocimiento se construye.

Es importante indicar que aunque todo texto contiene una transposición didáctica, no todo texto contiene de manera explícita al conjunto de instrucciones, recomendaciones, sugerencias didácticas que el autor o la institución escolar consideran pertinentes para que el alumno se apropie el saber escolar.

Adicionalmente, cuando el autor no explícita en su obra las recomendaciones didácticas correspondientes, puede significar que concibe al conocimiento como un ente fijo, acabado y listo para ser transmitido. Se presenta la obra acabada para que sea transmitida.

Se sostiene que las consideraciones anteriores resultan útiles para nuestro estudio, ya que son directamente aplicables y relacionables con un contexto educativo donde un maestro típico, para comunicar el saber escolar a los estudiantes, suele apoyarse en un libro de texto (usualmente oficial), y en sus correspondientes instrucciones o recomendaciones didácticas.

Son las instrucciones didácticas las que esencialmente determinan que el enfoque aplicado en el aula sea tradicional o constructivista, por esta razón la revisión que se hizo de los textos se apoyó básicamente en los indicadores asociados a una propuesta didáctica con enfoque constructivista.

3.3 – Exploración de la actitud de los estudiantes.

Considerando que las expectativas asociadas a la exploración de una situación didáctica de Brousseau dependían y requerían de un cierto conocimiento previo acerca de la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas, se pensó entonces en realizar una exploración sistemática de esta cuestión entre los estudiantes del grupo escolar seleccionado.

Para ello, como instrumentos metodológicos se conjeturaron tres hipótesis que se consideraron pertinentes y se elaboraron sus cuestionarios respectivos.

Estos instrumentos fueron utilizados como recursos para recuperar información acerca de las hipótesis en cuestión. Se describen a continuación.

3.3.1 - Hipótesis 1.6.4

La hipótesis en cuestión establece lo siguiente: **"El estudiante medio del grupo experimental tiene una concepción de las matemáticas que le ocasiona una actitud negativa hacia el aprendizaje de esta ciencia"**

3.3.2 – Cuestionario A1 para explorar la actitud hacia las matemáticas entre los estudiantes del grupo experimental

El instrumento metodológico que se utilizó para investigar la validez de la proposición expresada en 3.3.1 es el cuestionario A1 que se presenta a continuación:

CUESTIONARIO A1: INSTRUCCIONES:

- Las respuestas a este cuestionario no afectarán tus calificaciones de matemáticas.
- Es necesario que respondas a las mismas con la mayor sinceridad y honestidad posible ya que ello puede ayudar a mejorar la enseñanza de las matemáticas y tu aprendizaje de las mismas.
- Para cada pregunta señala la opción que te parezca más adecuada.

1) ¿Crees que las matemáticas que aprendes en la escuela tienen aplicación en la vida real?
Sí ( ) No ( )

2) ¿Crees que las matemáticas son interesantes? Sí ( ) No ( )

3) ¿Crees que las matemáticas son divertidas? Sí ( ) No ( )

4) ¿Te intrigan o causan curiosidad los problemas o las actividades matemáticas?
Sí ( ) No ( )

5) ¿Crees que tu preparación matemática actual te permitiría comprender el funcionamiento de un aparato matemático capaz de realizar alguna de las funciones que desempeña una calculadora científica? Sí ( ) No ( )

6) ¿Crees que tu preparación matemática actual te permitiría descubrir por tu propia cuenta conocimientos geométricos?
Sí ( ) No ( )

7) ¿Crees que para aprender matemáticas se necesita poseer una inteligencia muy alta?
Sí ( ) No ( )

8) ¿Te interesaría aprender matemáticas participando en un equipo y descubriendo por ti mismo el saber y averiguando porqué funciona un aparato matemático?
Sí ( ) No ( )

9) Si se te permitiera "armar" tu propio plan de estudios, por ejemplo con 12 materias semestrales donde todas las materias fueran optativas ¿incluirías matemáticas en tu plan de estudios? Sí ( ) No ( )

10) ¿Crees que deberían estudiar matemáticas únicamente aquellos que intentan ser ingenieros, físico matemáticos, técnicos en computación, técnicos en electricidad o mecánica o profesiones similares?
Sí ( ) No ( )

3.3.3 – Diseño del cuestionario A1

Con respecto al diseño de este instrumento, y al procesamiento de la información resultante, se consideró y se asumió lo siguiente:

1) Se elaboró una caracterización relativamente informal de lo que se entendería por "actitud negativa hacia las matemáticas", esta caracterización se fundamentó en la experiencia didáctica del investigador y está implicada, por las preguntas del cuestionario, y por la puntuación que se ha fijado en el mismo a respuestas afirmativas o negativas. En este sentido se asumió que un estudiante con una actitud completamente negativa hacia las matemáticas contestaría SÍ a las preguntas 7 y 10 y responderá NO a todas las restantes.
2) Por cada respuesta afirmativa a las preguntas 7 y 10 se asignará un punto, por las negativas cero puntos.

3) Un estudiante con actitud negativa hacia las matemáticas contestaría NO a todas las preguntas restantes. Por cada respuesta negativa a estas preguntas restantes se asignó un punto, por las afirmativas cero puntos.
4) Se consideró como estudiante en el grupo experimental a aquel que alcanzó una calificación igual a la media del conjunto de calificaciones.
5) Se creía que la media de estas puntuaciones estaría entre 7 y 8, esto es, que un estudiante típico mostraría un alto grado de rechazo hacia las matemáticas.
6) Se pensaba que la desviación estándar con respecto a la media será de poca magnitud, esto es, que la mayoría de los estudiantes mostrarían una actitud negativa hacia el aprendizaje de las matemáticas.
7) Las inferencias que resulten sólo son aplicables al grupo escolar. Lo anterior resulta aceptable porque no son propósitos de la investigación realizar indagaciones de tipo cuantitativo para hacer posteriores generalizaciones.
8) Independientemente de los resultados inferidos de las respuestas al cuestionario A1, para los fines particulares de esta investigación se insistió en promover una actitud positiva entre los estudiantes hacia el aprendizaje de las matemáticas.

3.3.4 – Hipótesis 1.6.3

El planteamiento de la hipótesis 1.6.3 también está relacionado con la elaboración de un diagnóstico de la actitud del estudiante hacia las matemáticas. Se ha pensado que parte de la responsabilidad en la (asumida) actitud de aversión del alumno hacia esta ciencia se deriva del hecho de que el estudiante trabaja en el contexto determinado por la sujeción, la obediencia y las expectativas asociadas a la implícita vigencia de un contrato didáctico tradicional que rige la actuación del maestro y de los alumnos en el interior del aula.

Este contrato delimita los papeles y acciones de alumnos y maestros necesarias para la apropiación de un saber. Resulta plausible suponer que un estudiante que concibe a un problema como un ejercicio, no tendrá la misma actitud que otro que lo conciba como un reto. Un alumno que piense que para resolver un problema puede inventar sus propios procedimientos, no tendrá la misma actitud hacia el proceso de solución del problema, que un estudiante que crea que para resolverlo solo existe un procedimiento único “correcto”.

La hipótesis (1.6.3) en cuestión se enuncia a continuación:

“El estudiante medio del grupo escolar, en su actuación al interior del aula, y en relación a sus expectativas con respecto al profesor y al saber escolar está inmerso y sujeto a lo que podría denominarse “un contrato didáctico asociado a la didáctica tradicional”

3.3.5 – Cuestionario A-CD-2

El cuestionario está diseñado para explorar el tipo de contrato didáctico al que implícita o explícitamente están sujetos los alumnos del grupo escolar. El instrumento que se utilizó para recabar información con respecto a la hipótesis 1.6.3 se presenta a continuación:

CUESTIONARIO A-CD-2: INSTRUCCIONES:

- Las respuestas a este cuestionario no afectarán tus calificaciones de matemáticas.

- Es necesario que respondas a las mismas con la mayor sinceridad y honestidad posible, ello puede ayudar a mejorar la enseñanza de las matemáticas y tu aprendizaje de las mismas.

- Para cada afirmación señala con falso (F), o verdadero (V) la opción que te parezca más adecuada para describir lo que realmente sucede en tu aula.

1- El profesor expone o dicta los conocimientos de matemáticas y a continuación propone problemas para practicar, ejercitar, reafirmar o evaluar si se logró o no el aprendizaje.
F( ) V( )

2- El profesor no expone los conocimientos de matemáticas y sin embargo propone un problema de matemáticas para ser resuelto en clase. Aprovecha la resolución del problema para presentar o para descubrir los conocimientos de matemáticas.
F( ) V( )

3- Los primeros problemas que plantea el profesor son fáciles y gradualmente van aumentando su dificultad hasta llegar a los problemas difíciles.
F( ) V( )

4- Los problemas que plantea el profesor desde el principio son como un reto, como un desafío, son intrigantes o curiosos, no se sabe si serán fáciles o difíciles.
F( ) V( )

5- Para realizar una actividad o para resolver un problema de geometría, el profesor sólo permite la utilización de compases, reglas, escuadras y transportadores.
F( ) V( )

6- Para realizar una actividad o para resolver un problema de geometría el profesor no sólo permite la utilización de compases, reglas, escuadras y transportadores, sino también todo tipo de recursos tales como doblar papel, recortar dibujos, hacer disecciones de figuras, tangramas, rompecabezas, geoplanos, varillas, fichas, canicas, ligas, hilos o cordones, clavos, etc.
F( ) V( )

7- Cuando el maestro propone un problema, se tiene de antemano la seguridad de que proporcionará todos los datos necesarios y suficientes para resolverlo.
F( ) V( )

8- El maestro propone problemas donde pueden faltar datos para poder resolverlo, porque piensa que los verdaderos problemas deben ser asi, entonces no te lo dice esperando que tu mismo te des cuenta.
F( ) V( )

9- El profesor exige que los problemas que plantea sean resueltos por los alumnos con el único procedimiento correcto que antes ha enseñado.

F (   )   V (   )

10- El maestro acepta que los problemas que plantea puedan ser resueltos por los estudiantes utilizando varios procedimientos diferentes, siempre y cuando éstos sean correctos.

F (   )   V (   )

11- Para enseñar geometría el profesor expone las propiedades y relaciones que guardan entre sí los objetos geométricos y los alumnos escuchan, toman apuntes y hacen preguntas.

F (   )   V (   )

12 – Para enseñar geometría el maestro diseña y propone actividades, investigaciones o problemas que si se realizan adecuadamente conducen al estudiante a que descubra por si mismo las propiedades y relaciones que guardan entre sí los objetos geométricos.

F (   )   V (   )

13- En la clase es solamente el profesor quien determina y demuestra si la resolución de un problema ha sido correcta, o si un conocimiento es o no verdadero.

F (   )   V (   )

14- El maestro permite discusiones, debates y comprobaciones entre los estudiantes para determinar si la resolución de un problema ha sido correcta, o para decidir si un conocimiento es o no verdadero.

F (   )   V (   )

15- En la clase de geometría los alumnos son libres para proponer notaciones, expresiones, símbolos y maneras de representar los objetos geométricos y sus propiedades.

F (   )   V (   )

16- En la clase de geometría es el maestro quien establece las notaciones, expresiones, símbolos y representaciones para los objetos geométricos y sus propiedades.

F (   )   V (   )

17- Para realizar el aprendizaje, el profesor distribuye a los estudiantes en grupos o equipos para que realicen las actividades en forma cooperativa y para propiciar que los alumnos debatan e intercambien opiniones entre si.

F (   )   V (   )

18- Para realizar el aprendizaje, el profesor no distribuye a los estudiantes en grupos, pide a los alumnos que de manera individual presten atención, hagan preguntas y permanezcan callados.

F (   )   V (   )

19- Para presentar y explicar un nuevo tema, el profesor pasa revista, recupera o se refiere a los conocimientos escolares anteriores al mismo que necesitará para realizar la explicación.

F (   )   V (   )

20 – Para introducir un nuevo tema, el maestro averigua o investiga los conocimientos anteriores que tú tienes sobre el mismo (aunque éstos no sean de tipo escolar) e intenta relacionar estos conocimientos con el tema que está presentando.

F ( ) V ( )

21- El profesor introduce cada nuevo tema sin relacionarlo con los conocimientos anteriores.

F ( ) V ( )

22- Para incitarte a resolver problemas el profesor te otorga puntos o notas buenas o te permite abandonar el aula si los resuelves correctamente.

F ( ) V ( )

23- El maestro propone problemas tan interesantes o divertidos que logra que la mayoría de los alumnos se pongan a resolverlos sin necesidad de ponerles puntos o notas buenas.

F ( ) V ( )

24- El profesor no se preocupa por interesar o motivar a los estudiantes a que resuelvan problemas F ( ) V ( )

3.3.6 - Diseño del cuestionario A –CD – 2

Con referencia al diseño del cuestionario y al procesamiento de la información resultante, se considera pertinente explicitar algunos componentes y características del mismo. Se presentan a continuación:

1) El propósito central de la aplicación del cuestionario consistió en explorar el tipo implícito de contrato didáctico al que están sujetos los estudiantes del grupo experimental. Se asumía que éste correspondía a un contrato didáctico de tipo tradicional.

2) Las proposiciones contenidas en el cuestionario, numeradas desde el 1 hasta el 24 corresponden a características de los profesores, estudiantes o el saber, de naturaleza tal, que su presencia o ausencia está asociada a lo que hemos denominado "contrato didáctico tradicional". En este punto resulta pertinente indicar que aunque el cuestionario contiene 24 proposiciones, la última sólo tenía la función de decidir si las proposiciones 22 y 23 concernientes a la motivación, serían o no tomadas en cuenta. Se decidió incluir esta proposición especial debido a la siguiente consideración: con la opción 22 se trataba de explorar si el profesor utilizaba una motivación propia de la didáctica tradicional, con la opción 23 se trataba de indagar si el maestro empleaba una motivación de tipo constructivista, sin embargo, las opciones no son exhaustivas ya que si el profesor no considera pertinente invertir tiempo para motivar a sus estudiantes, entonces las correspondientes opciones que señalara el estudiante en el cuestionario no serían confiables. Entonces, con respecto a la proposición 24 se procedió en la siguiente forma: si el estudiante seleccionaba F, entonces el cuestionario constaba de 23 proposiciones; si el estudiante seleccionaba V, entonces se ignoraban las opciones 22 y 23 y el cuestionario tenía solo 21 proposiciones.

3) Al conjunto de opciones recuperadas por los estudiantes en sus respuestas a este cuestionario se les asignaron puntos en la siguiente manera: Un punto a cada una de las

opciones: 1V, 2F, 3V, 4F, 5V, 6F, 7V, 8F, 9V, 10F, 11V, 12F, 13V, 14F, 15F, 16V, 17F, 18V, 19V, 20F, 21V, 22F, 23F; cero puntos a todas las opciones restantes.

4) El número resultante de dividir la cantidad de puntos entre el número de proposiciones del cuestionario multiplicado por 10, consideró como una medida del grado de aproximación del contrato didáctico que concibe cada estudiante del grupo experimental, con respecto a un contrato didáctico tradicional.

El promedio de estas medidas individuales se tomó como una medida del grado de aproximación del grupo experimental con respecto a un contrato didáctico tradicional.

5) Las proposiciones enlistadas se presentaron por pares. Así, a cada característica didáctica de tipo tradicional contenida en una cierta proposición, se le asociaba la característica que le correspondería en una didáctica constructivista en la proposición que la "emparejaba". En este modo, resulta plausible que los pares de proposiciones resulten exhaustivos y mutuamente excluyentes.

6) Los indicadores o características didácticas seleccionadas y presentadas en las proposiciones del cuestionario, se refieren a las dimensiones alumno, maestro y saber contenidas en el análisis de una situación didáctica según lo propone R. Charnay (36, pp. 26-29) tal y como se mencionó en el capítulo precedente.

Se considera pertinente insistir que en esta investigación se comparte el punto de vista de Chevallard en el sentido de que los aspectos motivacionales, actitudinales y cognoscitivos no son independientes unos de otros. Consecuentemente, en lo que respecta a la actitud del alumno, se asumió que el tipo de contrato didáctico desarrollado en el aula influía en la actitud del estudiante hacia las matemáticas.

Como la hipótesis principal de esta investigación, que es la hipótesis cognoscitiva, requería que el estudiante participara en la situación didáctica de construcción de conocimiento con una actitud positiva, entonces, en la exploración de la situación didáctica de Brousseau se incorporó, una explicitación previa, que se hizo a los alumnos, de las acciones que les están permitidas en el contexto de un "contrato didáctico constructivista".

3.4 – Exploración de la motivación

La hipótesis correspondiente se refiere a la motivación intrínseca que resulta necesaria para iniciar el proceso cognoscitivo, para impulsar a los alumnos a la acción, para que los estudiantes se interesen en el problema o, como diría Brousseau, para "devolver" el problema a los alumnos.

3.4.1 - Hipótesis 1.6.2

La hipótesis en cuestión se enuncia a continuación:

El logro de una motivación positiva, intrínseca a la situación de aprendizaje, que provoca el involucramiento inicial del estudiante en la acción que le conducirá al logro de aprendizaje significativo, puede conseguirse por medio de la curiosidad cognoscitiva que despierta el hecho de que un aparato funciona.

Para explorar esta hipótesis se aplicó una actividad de aprendizaje (la número 1), la actividad consistió en que los estudiantes compararan los resultados obtenidos con una calculadora científica cuando obtienen los valores de **sen x**, con los resultados obtenidos por un aparato que aproxima los valores de **sen x**. Al aparato se le ha denominado "Transportador Trigonométrico Annette" (abreviaremos TTA).

Este "artefacto" constituye el instrumento metodológico y didáctico que se utilizó tanto para explorar la hipótesis 1.6.2, como para iniciar la situación didáctica de Brousseau.

La verificación de la hipótesis sobre la motivación se realizó por medio de la "observación participante." Y por las respuestas que proporcionaron los estudiantes en los informes correspondientes.

El instrumento en cuestión se describe a continuación:

3.4.2 - Descripción del Transportador Trigonométrico Annette

El TTA mostrado en la Fig. 3.1 consiste en un transportador similar a los transportadores de los equipos escolares de geometría. Sin embargo, el instrumento es de naturaleza tal que en lugar de tener la escala normal que sirve para medir o dibujar ángulos cuyos valores estén entre 0° y 180°, tiene una escala cuyos valores corresponden a la mitad de los de una escala normal, esto es, contiene valores de ángulos entre 0° y 90°.

Para medir o dibujar ángulos con un transportador normal, se coloca el vértice del ángulo a medir de manera que coincida con el centro O del semicírculo. El transportador normal mide y dibuja ángulos centrales.

Para medir o dibujar ángulos con un TTA, se coloca el vértice del ángulo a medir, de manera que coincida con el extremo izquierdo del diámetro del semicírculo, esto es, el TTA mide ángulos que están inscritos en un semicírculo. A la escala que mide ángulos inscritos la denominamos "escala X".

Al TTA se le adiciona una reglilla graduada móvil R, cuya longitud será igual a la longitud del diámetro del transportador. Se convendrá en que la reglilla tenga longitud unitaria y en dividir esta longitud en 100 partes iguales. A la escala contenida en la reglilla la denominamos "escala Y".

El TTA se dibuja sobre una hoja blanca pegada sobre algún material como cartón grueso o láminas de madera. La reglilla se copia en acetato transparente y se recorta.

3.5 – Exploración de lo cognoscitivo: hipótesis 1.6.1

La hipótesis cognoscitiva central de la investigación, la hipótesis 1.6.1, se enuncia a continuación:

Siguiendo lineamientos teóricos y metodológicos asociados al diseño de las denominadas situaciones didácticas de Brousseau puede conseguirse que los alumnos construyan los significados de seno de un ángulo agudo como función y como razón.

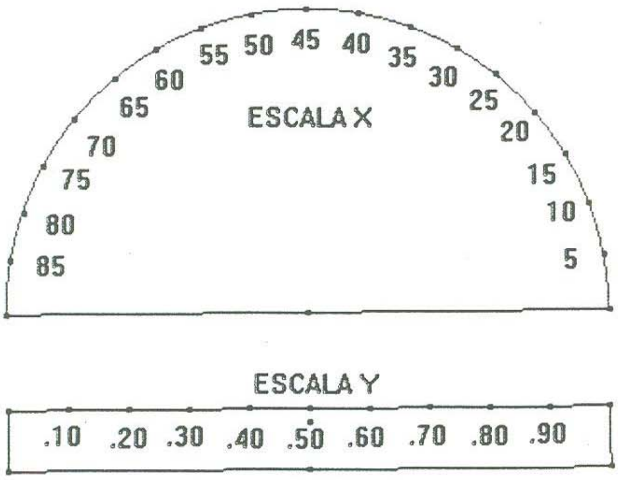
3.3.9 Funcionamiento del TTA.

Con el TTA se pueden aproximar a la centésima más próxima, los valores del seno para ángulos comprendidos entre 0° y 90°. El funcionamiento del TTA es muy simple, para no hacer una larga descripción del mismo se provee un ejemplo.

Para aproximar el valor de sen 15° simplemente se mide con la escala Y de la reglilla, la distancia entre el punto correspondiente a 15°, y el punto correspondiente a 0° (ambos en la escala X del semicírculo). Esta distancia, 0.26, es la aproximación que da la reglilla al valor 0.2588 proporcionado por una calculadora científica para el seno de un ángulo de 15°. Como se sabe, la distancia 0.26 corresponde a una aproximación de la longitud de la cuerda correspondiente a un ángulo inscrito de 15° medida con el diámetro del semicírculo graduado en centésimas.

FIGURA 3.1

TRANSPORTADOR TRIGONOMÉTRICO ANNETTE



3.5 – Exploración de lo cognoscitivo: hipótesis 1.6.1

La hipótesis cognoscitiva central de la investigación, la hipótesis 1.6.1, se enuncia a continuación:

Siguiendo lineamientos teóricos y metodológicos asociados al diseño de las denominadas situaciones didácticas de Brousseau puede conseguirse que los alumnos construyan los significados del seno de un ángulo agudo como función y como razón.

3.5.1 - Instrumentos para la exploración

Los instrumentos para la exploración de esta hipótesis consistieron en:

1) Cuatro actividades de aprendizaje que contienen lineamientos teóricos y metodológicos asociados al diseño de las situaciones didácticas de Brousseau. Estos lineamientos se explicitan de manera resumida en las Tablas 3.1 a 3.4 que se presentan adelante. Se transcribe además (en itálicas) cada actividad tal y como se aplicó en el grupo escolar.

2) Las respuestas a los cuestionarios y los informes que rinden los alumnos sobre la actividad

3) La observación participante en el grupo del experimentador y del profesor co-observador.

La acción metodológica central, estuvo constituida por la aplicación en el grupo escolar de la aproximación al diseño de la situación didáctica de Brousseau que antes se mencionó.

3.5.1.1 Lineamientos teóricos y metodológicos de Brousseau - Actividad didáctica 1

Tabla 3.1

Número y Título de la Actividad	1- Construcción del significado del seno de un ángulo agudo como función
Conocimiento escolar (Tema del plan y programa de estudio – abreviamos PPE) que se aborda	El PPE no propone la enseñanza de este significado del seno Valores del seno para los ángulos de 30°, 45° y 60° - Uso de tablas y calculadora.
Devolución del problema	¿Porqué funciona el TTA?
Fase de acción	Manipulación del TTA – realización de mediciones- Uso de calculadora- Interacción social
Fase de formulación	Registro de resultados en tablas - respuesta a cuestionarios – elaboración informe 1.
Fase de validación	Replicabilidad de resultados – generalización – calculadora como “autoridad” – debates al interior de los equipos – negociación del conocimiento.
Fase de institucionalización	La tabla elaborada constituye una de las maneras de representar el concepto de función como conjunto de pares ordenados. Se identifica un dominio, un rango y una correspondencia. El seno de un ángulo agudo es una función.

3.5.1.2 Actividad didáctica 1.

Se presenta a continuación en itálicas y tal como fue aplicada en el grupo escolar, la actividad didáctica 1, instrumento utilizado en el aula para la exploración de lo cognoscitivo.

ACTIVIDAD NÚMERO 1. CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO DEL SENO DE UN ÁNGULO COMO FUNCIÓN

INSTRUCCIONES:

Todas las respuestas a las preguntas y actividades que se te propongan deberán ser registradas en un escrito que se denominará "Informe 1" y que aparece al final. El reporte deberá ser entregado al profesor.

De manera inicial se te presenta un instrumento matemático sencillo al que se ha denominado "Transportador Trigonométrico Annette" (abreviaremos TTA), que tú mismo podrías construir si lo quisieras. El aparato es capaz de realizar una de las funciones que efectúa una calculadora científica.

El primer propósito de la actividad consiste en que realices mediciones con la reglilla del TTA y observes que el aparato es capaz de asociar a cada ángulo entre 0° y 90° un único número entre 0 y 1 (escrito con dos decimales de aproximación).

Para realizar esta comprobación deberás llenar la tabla que más adelante se te presenta. Harás lo siguiente:

Con la reglilla Y, medirás la distancia entre el punto que corresponde al 0° en la escala X y el punto que corresponde al ángulo de 10° en la misma escala, anotarás el resultado en la tabla 4A. Luego medirás la distancia entre el punto que corresponde al 0° en la escala X y el punto que corresponde a 15° en la misma escala y anotarás el resultado en la tabla, y así sucesivamente hasta completarla.

De este modo verás que a todo ángulo en la escala X, se le ha asociado el único número que mide su distancia desde el ángulo en cuestión hasta el cero en la escala. La tabla ya tiene dos lugares calculados a manera de ejemplo.

Nota 1 – Al leer la distancia en la reglilla Y, deberás escoger la rayita que esté más próxima o cercana al punto final del segmento medido. Por ejemplo, si el punto final cae entre .08 y .09 pero está más cerca del .09, entonces deberás escoger el .09 como medida aproximada de la distancia.

Nota 2 – Los números de la escala Y son centésimos de unidad. Cada rayita corresponde a 0.01 Si se hubieran numerado todas las rayitas, la escala se leería 0.00, 0.01, 0.02, 0.03, etc.

TABLA 4A *TABLA 4B*

ESCALA X	*ESCALA Y*	*X*	*SEN X*
0	*.00*		
5	*.09*		

I) Con la realización de la actividad anterior hemos comprobado que el aparato construye parejas de forma tal que el primer elemento de cada pareja es un ángulo y el segundo elemento de cada pareja (el elemento de la derecha en la tabla) es un número. Puedes darte cuenta de que para ello el instrumento ha hecho corresponder ángulos entre 0° y 90° con números únicos entre 0 y 1.

II) El segundo propósito de la actividad es que compruebes por ti mismo que el aparato realmente efectúa una de las funciones de una calculadora científica, y a la vez sirve para que verifiques o compruebes que los valores que encontraste son aproximadamente correctos. Para realizar esta comprobación deberás hacer lo siguiente:

Utilizando una calculadora científica llena la tabla 4B, utiliza los mismos valores para los ángulos que usaste en la tabla 4A. Deberás asegurarte que la calculadora sea de las llamadas científicas y que la misma se encuentre en el modo "DEG" que corresponde a ángulos en grados.

III) Como recordarás, en la recta numérica real a cada punto de dicha recta le corresponde exactamente un número real. Esto aseguraría que el número que la reglilla Y asocia a cada ángulo fuera único. Sin embargo, y de acuerdo a la actividad que hemos desarrollado ¿crees que la reglilla asocia a cada ángulo un único número? Si no lo crees, explica la razón.

Discute con tus compañeros y anota el acuerdo a que hayan llegado. Si no estás de acuerdo con lo expresado por el equipo, anota aquí mismo tu propia creencia.
IV) ¿Crees que la calculadora sí asocia a cada ángulo un único número? En caso afirmativo ¿Por qué crees que lo hace? Discute con tus compañeros de equipo y anota la respuesta. Si no estás de acuerdo, anota y explica tu propia respuesta.

V) Describe con tus propias palabras al "Transportador Trigonométrico Annette".

VI) Anota todas las preguntas que te causen curiosidad en referencia a la actividad que acabas de realizar. Ordena las preguntas, primero lo que más te intrigue, y así sucesivamente. Puedes utilizar el reverso de la hoja para continuar tu respuesta. Si nada te intriga, indícalo también.

Anota las respuestas o comentarios en el Informe 1, que se inicia a continuación.

INFORME 1 (Se provee un cuadro para la presentación del informe correspondiente)

3.5.1.3 Lineamientos teóricos y metodológicos de Brousseau para la actividad didáctica 2

Tabla 3.2

Número y Título de la Actividad	2 - ¿Es posible descubrir conocimiento matemático?
Conocimiento escolar (Tema del plan y programa de estudio) que se aborda	Teorema 1: La medida del ángulo central es el doble de la medida del ángulo inscrito. Teorema 2: Triángulo inscrito en semicírculo es triángulo rectángulo.
Devolución del problema	Proyecto[1]
Fase de acción	Medición de ángulos centrales e inscritos con un transportador – Trazado de figuras con regla y compás- Expresión de conjeturas - Interacción social
Fase de formulación	Registro de resultados en tablas - respuesta a cuestionarios – elaboración informe 2.
Fase de validación	Replicabilidad de resultados – generalización – predicción – predicción vs resultado obtenido - debates al interior del equipo – negociación del conocimiento
Fase de institucionalización	No se consideró pertinente realizarla porque la actividad está relacionada con la siguiente.

[1] Se ha considerado, como lo hace Hans Aebli (20 en la bibliografía) al desarrollo de las 4 actividades didácticas como un solo proyecto, esto significa, en términos de la situación didáctica, que se consideró (como efectivamente sucedió) que la "devolución del problema" inicial serviría para las cuatro actividades.

3.5.1.4 Actividad didáctica 2.

Se presenta a continuación la Actividad didáctica 2, tal como fue aplicada en el grupo escolar.

ACTIVIDAD NÚMERO 2. ¿ES POSIBLE DESCUBRIR CONOCIMIENTO MATEMÁTICO?

INSTRUCCIONES

Todas las respuestas a las preguntas y actividades se pueden obtener trabajando en equipo o de manera individual. Todas ellas deberán ser recuperadas en un escrito que se denominará "Informe 2". Si no estás de acuerdo con la opinión del equipo, expresa y argumenta tu opinión individual. El informe deberá ser entregado al profesor.

En la vida real algunos conocimientos matemáticos pueden ser logrados o conseguidos en una forma parecida a la manera en que se investigan y a veces se descubren los conocimientos o leyes generales en las ciencias naturales (Física, Química, Biología), etc. Esta forma consiste inicialmente en la realización de experimentos o experiencias con casos particulares. Una vez realizados, sus conclusiones son luego extendidas o generalizadas a todos los casos.

La actividad que realizaremos será una investigación efectuada por medio de un experimento. A través de la realización del mismo quizá podamos descubrir algún conocimiento matemático.

Para realizar esta investigación se permite o estás autorizado a:

- *Utilizar todos los instrumentos de tu juego geométrico, regla, transportador, etc.*
- *Medir segmentos y ángulos,*
- *Auxiliarte con el dibujo de paralelas, perpendiculares, bisectrices, etc,*
- *Registrar tus resultados parciales o preliminares en tablas o gráficas,*
- *Dibujar figuras en papel y luego doblarlas o recortarlas,*
- *Utilizar calculadoras,*
- *Intercambiar opiniones con tus compañeros de equipo.*

1) Discute con los compañeros de tu equipo cuál o cuáles pudieran ser las respuestas a la siguiente pregunta: ¿Es posible que nosotros, estudiantes de tercer grado de secundaria, podamos descubrir conocimiento matemático? Escribe y explica en el Informe 2 la respuesta que los integrantes de tu equipo han formulado para la pregunta anterior.

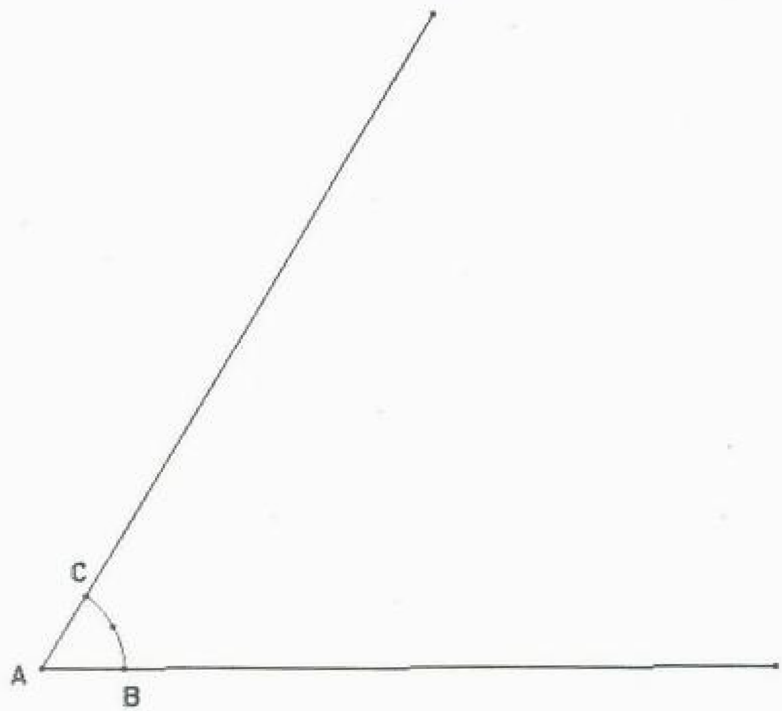
A continuación haremos un pequeño "experimento" matemático-didáctico. Su realización te proporcionará una experiencia real, una práctica que te dará elementos para contestar de mejor manera a la pregunta enunciada en el punto anterior. Para la realización del experimento es necesario que todos estemos de acuerdo con respecto al significado de ciertos términos y conocimientos que se han estudiado antes, mismos que se exponen a continuación.

Un ángulo es un objeto geométrico como el que se muestra en la figura 4C. En las investigaciones donde intervienen estos objetos suele resultar necesario identificar algunos de los elementos que lo forman: "su punta", sus lados, etc. En particular:

- *Su vértice (su punta), que en la figura es el punto A.*
- *Uno de sus dos* ***lados,*** *esto es, la recta o semirrecta que pasa por los puntos A y B.*
- *Otro de sus* ***lados,*** *esto es, la recta o semirrecta que pasa por los puntos A y C.*
- *La* ***abertura*** *o separación entre las rectas AB y AC, representada en este caso por el arco BC.*

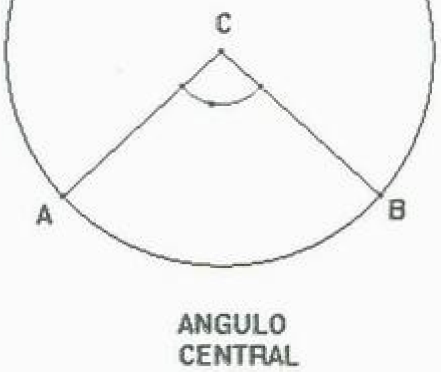
Una medición de la abertura entre las rectas, a la que se llama ***"medida del ángulo",*** *los ángulos se miden con transportadores en unidades que se llaman grados. El ángulo de la figura mide mas o menos 60°.*

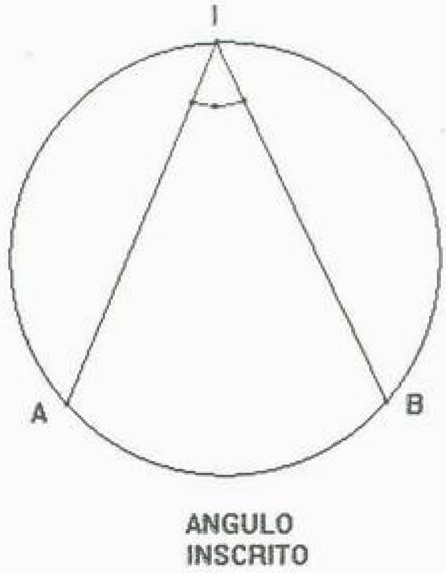
FIGURA 4C



En la investigación que realizaremos resultará de interés saber donde se encuentra colocado el vértice de un ángulo con respecto a una circunferencia. Si el vértice se encuentra sobre el *centro de la misma diremos que estamos trabajando con un* ***ángulo central.*** *Si el vértice se encuentra sobre la circunferencia diremos que nos estamos ocupando de un* ***ángulo inscrito.***

FIGURA 4D



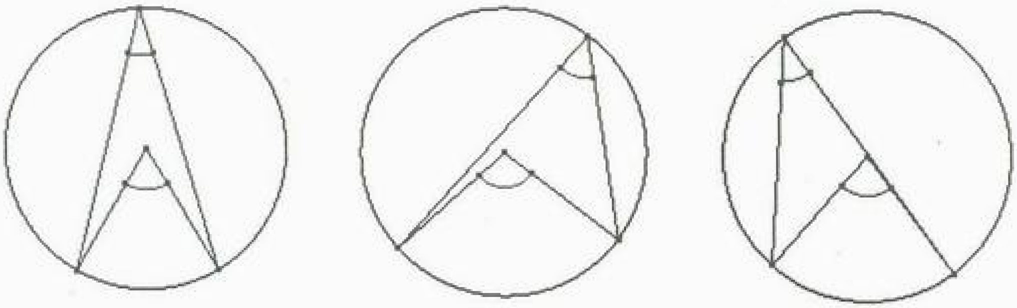


En la figura 4D el ángulo ACB es ángulo central, el ángulo AIB es ángulo inscrito.

¿Existe alguna relación entre la medida de un ángulo central y la medida de un ángulo inscrito, cuando los ángulos están colocados como se muestra en todos los casos presentados en la figura 4E ?

Para responder la pregunta se te propone medir los ángulos de la figura 4F para los casos 1,2 y 3, y anotar su valor en la tabla 4F.

FIGURA 4F



CASO 1 CASO 2 CASO 3

TABLA 4F

	Medida del ángulo central	*Medida del ángulo inscrito*
CASO 1		
CASO 2		
CASO 3		
CASO 4		
CASO 5		
CASO 6		

1- Al realizar la actividad anterior ¿crees haber descubierto algo?
2- En caso afirmativo ¿cómo expresarías lo que descubriste?
3- Dibuja otra circunferencia, otro ángulo central y otro ángulo inscrito (esto será el caso 4), que se comporten como los casos anteriores, pero donde los ángulos tengan distinta medida respecto de los que se han dibujado.

4- Anota en la tabla 4F, para el caso 4, y en la parte correspondiente, la medida del ángulo inscrito que hayas dibujado.

5- ¿Podrías predecir **sin hacer la medición correspondiente** lo que medirá aproximadamente el ángulo central del caso 4? Anota enseguida tu predicción.

6- Realiza la medición correspondiente para averiguar si se cumplió o no tu predicción. Indica con una X en el paréntesis correspondiente lo que haya sucedido.
Se cumplió la predicción ( ) No se cumplió la predicción ( )

7- Para el caso 5 dibuja un ángulo central de 180°, desígnalo "ángulo ACB". Nótese que el vértice C deberá coincidir con el centro de la circunferencia. A continuación, dibuja su ángulo inscrito correspondiente y desígnalo "ángulo AIB", donde el vértice I deberá estar sobre la circunferencia.

8- ¿Podrías predecir cuánto medirá el ángulo AIB? Anota aquí tu predicción.

9- Para lo que será el caso 6, con el mismo ángulo central ACB construirás otro ángulo inscrito correspondiente diferente al anterior (el vértice I' estará en otro lugar), lo designarás AI'B. ¿Podrías predecir cuanto medirá el ángulo AI'B? Anota aquí tu predicción.

10- ¿Crees haber descubierto algo? En caso afirmativo, ¿cómo formularías tu descubrimiento? Anótalo a continuación.

11- ¿Qué sucede si se unen con segmentos de recta los puntos A, I, B del caso 5, y los puntos A, I', B del caso 6? ¿Cómo formularías tu descubrimiento en estos casos?

12- Si piensas que descubriste algo, ¿crees que tu descubrimiento vale para todos los posibles pares de ángulos (central e inscrito) que pudieras dibujar? ¿Podrías asegurarlo con absoluta certeza?

13- ¿Qué tiene que ver un ángulo central con la escala de un transportador común?

14- ¿Qué tiene que ver lo que descubriste en la tabla 4F, con la escala de grados de un TTA?

15- ¿Qué tiene que ver lo que descubriste en el punto 10, y formulaste en el punto 11, con lo que el TTA asocia a cada ángulo?

INFORME 2 (Se provee un cuadro para que el estudiante presente el informe).

3.5.1.5 Lineamientos teóricos y metodológicos de Brousseau - Actividad didáctica 3

Tabla 3.3

Número y Título de la Actividad	3 - ¿Es siempre válido el conocimiento matemático descubierto por medios empíricos?
Conocimiento escolar (Tema del plan y programa de estudio) que se aborda	El programa no provee un tema específico para esta cuestión, un propósito general del mismo establece "desarrollar gradualmente el pensamiento deductivo"
Devolución del problema	Proyecto (se continua)
Fase de acción	Trazado de figuras con regla y compás- conteo de regiones - Expresión de conjeturas - Interacción social
Fase de formulación	Registro de resultados en tablas - respuesta a cuestionarios – elaboración informe 3
Fase de validación	Replicabilidad de resultados – generalización – predicción – predicción vs resultado obtenido - debates al interior del equipo – negociación del conocimiento
Fase de institucionalización	Limitaciones de los métodos empíricos provocan la necesidad de otro método más confiable para validar conocimiento. Este método es el axiomático – deductivo. Los teoremas de la actividad 2 son válidos porque han sido demostrados con este método.

3.5.1.6 Actividad didáctica 3

Se presenta a continuación la actividad didáctica 3, tal como fue aplicada en el grupo escolar.

ACTIVIDAD NÚMERO 3. ¿ES SIEMPRE VÁLIDO EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DESCUBIERTO POR MEDIOS EMPÍRICOS?

INSTRUCCIONES:

Todas las respuestas a las preguntas y actividades deberán ser registradas en el Informe 3 que deberá ser entregado al profesor.

1- ¿Es siempre válido el conocimiento matemático que se descubre por medio de experimentos, tal como el conocimiento descubierto en la actividad que se realizó ayer?

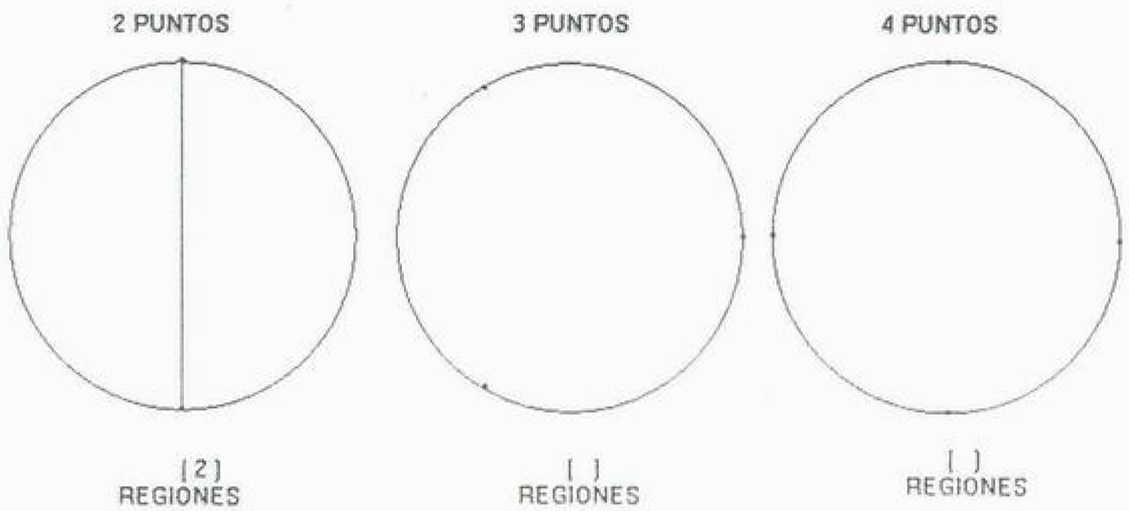
Analiza y discute la pregunta que arriba se planteó, registra la respuesta de tu equipo a la pregunta, si no estás de acuerdo con la opinión del equipo, expresa y argumenta tu propia respuesta.

Realizaremos a continuación otra actividad que muestra cómo se puede construir conocimiento matemático por medio de actividades experimentales. Lo anterior se hace para que experimentes mas casos que te ayuden a contestar la pregunta.

En la figura 4E se te presentan 3 círculos. En el primero se encuentran dibujados dos puntos que están igualmente espaciados, en el segundo, tres puntos también igualmente espaciados, y en el tercero, cuatro puntos igualmente espaciados.

ACTIVIDAD: En cada círculo deberás unir con líneas rectas, en todas las formas posibles, los puntos dibujados y contar y anotar el número de regiones en que queda dividido el círculo. En la figura se ejemplifica un caso, se han unido con rectas (resultó sólo una), en todas las formas posibles los dos puntos dados y resultaron dos regiones en el círculo.

FIGURA 4E

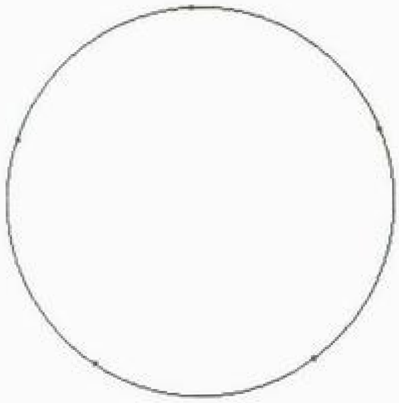


2 - ¿Podrías predecir, sin hacer el dibujo, cuántas regiones resultarán con 5 puntos?

3 – Pon a prueba tu predicción uniendo los puntos y contando las regiones en la Figura 4G.

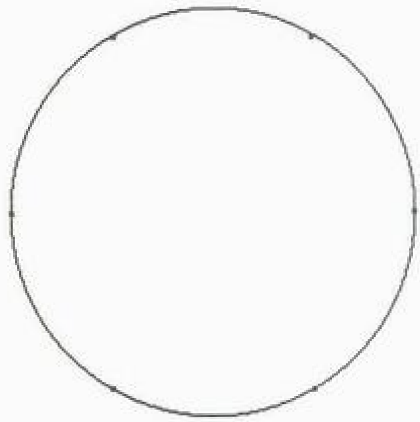
4 - ¿Cuántas regiones resultan cuando se considera sólo un punto sobre la circunferencia? Registra tu respuesta, y toda la información que hasta el momento haz obtenido, en la Tabla 1 que se te presenta adelante.

FIGURA 4G



[ ] REGIONES

FIGURA 4H



[ ] REGIONES

TABLA 1

NÚMERO DE PUNTOS DADOS	*NÚMERO DE REGIONES RESULTANTES*
1	
2	
3	
4	
5	
6	

5 - ¿Podrías predecir, sin hacer el dibujo, cuántas regiones resultarían si se unieran con líneas rectas 6 puntos dados igualmente espaciados sobre la circunferencia? (Figura 4H, arriba presentada).

6 – Pon a prueba tu predicción en la Figura 4H y registra el resultado en la tabla 1.

7 - ¿Qué ha sucedido? ¿Es siempre válido el conocimiento matemático obtenido por medios empíricos? ¿Deben utilizarse los métodos empíricos en matemáticas? ¿Qué pudiera hacerse? Analiza la situación y discútela con tus compañeros de equipo. Registra en el Informe 3 todas las explicaciones y argumentos que se les ocurran.

INFORME 3. (Se provee un cuadro para la formulación del informe correspondiente).

3.5.1.7 Lineamientos teóricos y metodológicos de Brousseau - Actividad didáctica 4

Tabla 3.4

Número y Título de la Actividad	4 – Construcción del significado del seno de un ángulo agudo como razón entre longitudes de segmentos.
Conocimiento escolar (Tema del plan y programa de estudio) que se aborda	Razones trigonométricas de un ángulo agudo: seno – Valores del seno para los ángulos de 30°, 45° y 60° - Uso de tablas y calculadora.
Devolución del problema	Proyecto (se continua)
Fase de acción	Manipulación del TTA – realización de mediciones- Uso de calculadora- Expresión de conjeturas - Interacción social
Fase de formulación	Registro de resultados en tablas - respuesta a cuestionarios – elaboración informe 4
Fase de validación	Replicabilidad de resultados – generalización – predicción – predicción vs resultado obtenido - debates al interior del equipo – calculadora como "autoridad" - negociación del conocimiento
Fase de institucionalización	La correspondencia que realmente se da consiste en que a cada ángulo se le asocia una razón que es el otro significado del seno de un ángulo. En la actividad 1 también sucedió así, no se notó porque el consecuente de la razón era unitario.

3.5.1.8 Actividad didáctica 4

Se presenta a continuación la actividad didáctica 4, tal como fue aplicada en el grupo escolar.

ACTIVIDAD NÚMERO 4. CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO DEL SENO DE UN ÁNGULO AGUDO COMO RAZÓN ENTRE LONGITUDES DE SEGMENTOS.

INSTRUCCIONES:

En la primera actividad que realizaste utilizando el TTA, elaboraste una tabla tal que a los ángulos entre 0° y 90°, les asociaba un número con una aproximación de dos decimales, que leías en la reglilla.

En esa actividad, la reglilla del instrumento comenzaba en el 0 y avanzaba de .01 en .01 hasta llegar precisamente a 100 centésimos, esto es, la reglilla medía precisamente una unidad.

1) ACTIVIDAD.

La actividad que realizaremos es parecida a la de la primera sesión. Deberás asignar números a ángulos utilizando un TTA. En esta nueva actividad habrá dos cambios, a saber:

1) La reglilla medirá 100 unidades (por eso no tiene puntos decimales).

2) El número que la reglilla asocie al ángulo ***deberá ser dividido*** *entre 100.*

Antes de realizar la actividad te recordamos que las respuestas, resultados, etc, deberán ser registradas en el Informe 4 y entregadas al profesor.

2) ¿Podrías predecir, sin antes realizarla, el resultado de la actividad? Discútelo con tus compañeros y anótalo a continuación. Si no estás de acuerdo, escribe y argumenta tu propio parecer.

3) Realiza la actividad que se propone a continuación. Se trata de asociar un único número a cada uno de los ángulos 0°, 5°, 10°, etc, hasta llegar a 90° utilizando el TTA, tal y como se hizo en la primera actividad, pero con dos nuevos cambios: 1) utilizar una nueva reglilla, y 2) dividir la magnitud de la distancia encontrada entre la longitud del diámetro del TTA. Registra los resultados en la Tabla 4A, que se presenta enseguida.

TABLA 4A *TABLA 4B*

ESCALA X	*VALOR DE Y DIVIDIDO POR 100*	*X*	*SEN X*
5°			
10°			
15°			
20°			
25°			
30°			
35°			
40°			
45°			
50°			
55°			
60°			
65°			

70°			
75°			
80°			
85°			
90°			

4) Utilizando una calculadora científica, llena la Tabla 4B. Registra los mismos valores para los ángulos que se utilizaron en la Tabla 4A.

5) ¿Qué es lo que está sucediendo? Descríbelo, discútelo con tus compañeros y transcribe la posición sostenida por tu equipo respecto a los resultados de la actividad registrada en la Tabla 4A. Describe y reporta tus actividades y respuestas en el Informe 4.

INFORME 4: (Se provee espacio al estudiante para la formulación del informe)

3.5.1.9 – Algunas condiciones asociadas a la aplicación de las actividades didácticas

- La aplicación de las actividades didácticas para la exploración de la hipótesis cognoscitiva se realizó en 6 sesiones, cada sesión tuvo una duración aproximada de 50 minutos. Las aplicaciones se realizaron durante el Ciclo Escolar 2001-2002 en un grupo vespertino de tercer grado con una lista de 32 estudiantes. El grupo escolar pertenecía a la Escuela Secundaria Técnica Número 57, ubicada al Noreste de la ciudad y estaba a cargo del Profr. Guadalupe Miranda Zamora.
- Para la realización de las actividades los estudiantes fueron distribuidos en equipos de 5 estudiantes cada uno siempre que esto fuera posible. Se procuró que los equipos estuvieran integrados de manera tal, que cada equipo tuviera al menos un participante mas "experto" que el resto de los integrantes del mismo. Para la realización de esta condición se recuperó el conocimiento que el profesor tenía acerca de la capacidad de sus alumnos.
- Tanto el investigador como el profesor del grupo, se desempeñaron como "observadores participantes" del desarrollo de las actividades.
- Las observaciones de uno y otro fueron intercambiadas y cotejadas entre los mismos.
- Tanto el investigador como el profesor del grupo, participaron en las fases de institucionalización correspondientes a las distintas actividades.
- Tanto el investigador como el profesor del grupo, participaron en un aseguramiento previo de la comprensión por parte de los estudiantes, del significado de los términos utilizados en los escritos, de las instrucciones para el desarrollo de las actividades, y de las "reglas del contrato didáctico" implícito en las actividades.
- El 100% de los estudiantes dispusieron de los instrumentos, requisitos materiales o manipulativos necesarios para el desarrollo de las actividades mismos que se entregaron con toda oportunidad.
- El salón de clase no disponía de mesas para trabajo en equipo.
- La asistencia de los estudiantes a las actividades no fue constante, varió de sesión en sesión.

CAPITULO 4

RESULTADOS OBTENIDOS, CONCLUSIONES, RECOMENDACIONES.

En el capítulo se presentan resultados de la aplicación de los distintos instrumentos y acciones diseñados para la recopilación de datos, se presentan conclusiones y recomendaciones inferidas de la información obtenida y se sugieren algunas posibles exploraciones o investigaciones asociables a este trabajo. Se abordan los siguientes puntos:

1 Aspectos del tratamiento y temas propuestos por la SEP que son cubiertos por la propuesta didáctica.

2- Revisión de la muestra de 17 textos de trigonometría enlistada en la bibliografía.

3- Exploración de la motivación y de la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas.

4- Exploración del tipo de contrato didáctico imperante en el grupo escolar.

5- Aplicación de los cuatro instrumentos didácticos para explorar la hipótesis cognoscitiva.

4.1 - Tratamiento y temas de la propuesta de la SEP cubiertos por la propuesta didáctica

En (55, pp. 37-51) se presentaron las características que según la SEP debe tener el tratamiento didáctico de las matemáticas y los temas que integraban el programa.

En las páginas 6-8 del primer capítulo de este trabajo, en el apartado titulado "Organización y alcance de la asignatura" enlistados desde el 1.3.12 hasta el 1.3.29, se presentaron las características del tratamiento didáctico y 9 temas del Programa. En dicha parte del escrito prácticamente se postulaba (dado que aun no se presentaba la propuesta) que las citadas características y temas estaban sustantivamente relacionadas con la propuesta didáctica contenida en este trabajo.

Una vez que se ha presentado el diseño y aplicado la propuesta, se piensa que la proposición antes postulada es verdadera, se recuperan a continuación los elementos que permitieron someterla a verificación.

Tratamiento didáctico

1.3.12 – El programa no está concebido como una sucesión de temas que deban agotarse uno a continuación del otro. Podrán organizarse en la forma que el maestro considere más conveniente para su aprendizaje. (La propuesta integra o correlaciona nueve temas que no suelen presentarse en el orden didáctico que aquí resultó).

1.3.13 – Se recomienda que se procure integrar contenidos de diferentes temas o áreas del programa de modo que el alumno pueda percibir las relaciones existentes entre las diferentes partes de las matemáticas y tenga la oportunidad de practicar constantemente los conocimientos adquiridos (Así se hizo en la propuesta).

1.3.14 – Es importante que se diseñen actividades que favorezcan la práctica permanente de las operaciones con números naturales, decimales y fraccionarios. Estas actividades no deben ser ejercicios rutinarios de algoritmos.

1.3.15 – El tratamiento de los errores de aproximación dará a los alumnos la oportunidad de conocer ciertas ideas de las matemáticas, como son la recurrencia y el error de aproximación, su cálculo y estimación en situaciones sencillas.

1.3.16 – Una forma de explorar y conocer las propiedades y características de las figuras geométricas y preparar el paso al razonamiento deductivo son los trazos y construcciones geométricas.

1.3.17 – Debe conocerse y hacerse uso efectivo de los diferentes instrumentos de medida y diseñarse situaciones y problemas que favorezcan el desarrollo de las capacidades para estimar magnitudes físicas y geométricas. Estas actividades deberán acompañar al uso de las fórmulas para calcular perímetros, áreas, volúmenes y capacidades.

1.3.18 – Los teoremas de Pitágoras y de semejanza deben utilizarse en la solución de problemas de cálculo geométrico.

1.3.19 – La iniciación al pensamiento deductivo debe ser gradual, en situaciones escogidas por el profesor teniendo en cuenta que la demostración en matemáticas es un objetivo que requiere de tiempo y preparación cuidadosa.

1.3.20 – Durante el estudio de la presentación y tratamiento de la información, se deberán proponer situaciones y actividades muy diversas para que los alumnos conozcan y se acostumbren gradualmente a la noción de función como una relación entre dos cantidades, así como a las diferentes formas de presentar una función.

Temas integrados o implicados por la propuesta didáctica

Con respecto a estos temas del tercer grado contenidos en el programa, y que se enlistan a continuación, la propuesta propicia o provee oportunidades ya sea para ejemplificarlos, para desarrollarlos, o para practicarlos, se explicita brevemente cada tema.

- 1.3.21 - Errores de aproximación - La utilización de la reglilla del TTA, (cuya escala contiene graduaciones expresadas en centésimos de unidad), para medir distancias entre puntos Actividad 1), posibilita, por ejemplo, expresar que "la precisión del instrumento es de 1/100 de unidad", o ejemplificar el sentido de expresiones tales como "medida de la distancia hasta el centésimo más próximo", "máximo error posible", etc. *

* Para profundizar en este asunto puede leerse por ejemplo el libro : "Medida" del National Council of Teachers of Mathematics, publicada por Trillas en 1972.

- 1.3.22 - Ejemplos para revisar la noción de función – Como se ha visto, la propuesta posibilita ejemplificar el concepto de función bajo una perspectiva geométrica que asocia ángulos con segmentos, y con un enfoque numérico que asocia "ángulos medidos" con "segmentos medidos" registrando resultados en tablas (Actividad 1).

- 1.3.23 - Nociones básicas sobre el círculo – En la propuesta se trabaja con semicírculos, ángulos centrales y ángulos inscritos (Actividades 1,2 y 4).

- 1.3.24 - Ángulos centrales e inscritos en una circunferencia - La propuesta se refiere en particular a ángulos centrales e inscritos en una semicircunferencia (Actividad 2).

- 1.3.25 - Construcciones con regla y compás – La propuesta propicia, por ejemplo, la posibilidad de plantear la construcción con regla y compás de semicírculos que contengan triángulos rectángulos inscritos para los ángulos especiales de 30°, 45° y 60°. La propuesta puede dar lugar también a una extensión o proyecto que contemple la posibilidad de construir un TTA con regla y compás. Esta ampliación haría surgir el problema de trisectar un ángulo central de 30° con regla y compás, pero éste podría resolverse con el procedimiento de Arquímedes que utiliza una regla con dos graduaciones. Este proceder es geométricamente válido ya que el contexto escolar no es aquel asociado a las "construcciones geométricas con herramientas Euclidianas".

- 1.3.26 - Semejanza de triángulos – La utilización conjunta del TTA, con su reglilla graduada en centésimas, o del TTA con una regla escolar (Actividad 4), provee una oportunidad para que el alumno acceda a una "verificación" de carácter empírico de la noción de semejanza, para ello pueden utilizarse TTA's de tamaño mayor o menor al TTA dado.

- 1.3.27 - Teorema de Pitágoras, aplicaciones – Las figuras construidas como se sugiere en 1.3.25, pueden ser utilizadas para plantear problemas que sirvan para aplicar este teorema en los cálculos de sen 30°, sen 45° y sen 60°.

- 1.3.28 - Razones trigonométricas, seno – Viene siendo la Actividad 4 de la propuesta.

- 1.3.29 – Valores del seno para los ángulos de 30°, 45° y 60°. Uso de calculadora para otros ángulos – Este tema del programa es abordado en las Actividades 1 y 4.

4.2 - Revisión diagnóstica de una muestra de 17 textos de trigonometría

El propósito de la revisión consistió en verificar si los textos de trigonometría a disposición del maestro de matemáticas de secundaria, le proveerían o no de las sugerencias didácticas de tipo constructivista (en el sentido que aquí se ha establecido en el correspondiente constructo) para la enseñanza del concepto de seno de un ángulo agudo aplicando el citado enfoque.

Se encontró que ninguno de los 17 textos satisfacen en su totalidad, los indicadores o requisitos aquí requeridos a una didáctica de esas características.

Los citados textos proveen al maestro del saber escolar asociado a los productos de las transposiciones didácticas, pero no de sugerencias didácticas como las aquí propuestas.

Los indicadores que se consideraron para determinar si las obras en cuestión contenían o implicaban tratamientos didácticos de este tipo no son los únicos que podrían caracterizarlas, sin embargo son los que nos parecieron esenciales. Se simbolizan y describen a continuación:

D: ¿Se intenta devolver el problema a los estudiantes?

Este indicador se refiere a indagar si los textos en cuestión, plantean un problema muy intrigante o una actividad muy atrayente para introducir la noción de seno de un ángulo agudo. La actividad o problema deben ser tan interesantes o tan desequilibrantes (de las estructuras cognitivas) cómo para lograr que los alumnos decidan involucrarse en las actividades de aprendizaje conducentes a la construcción de la citada noción (esto es, para que los alumnos decidan apropiarse el problema).

E: ¿Se promueve la interacción empírica del estudiante con el medio físico o con objetos contenidos en el mismo?

Con este indicador se revisa si la obra en cuestión provee actividades de aprendizaje que propicien una interacción del alumno con el medio físico, o una actividad cognoscitiva que esté mediada por la utilización de materiales concretos, sean estos estructurados o no estructurados, o bien, instrumentos de medición o dibujo.

S: ¿Se promueve la interacción social del estudiante?

Se indaga si el texto revisado contiene sugerencias que dirijan al estudiante hacia este tipo de interacción, como por ejemplo al trabajo en equipo.

I: ¿Cómo se introduce la noción de seno de un ángulo agudo?

Se revisa cómo introducen los libros en cuestión a la citada noción. Se encontraron las siguientes 5 variantes: RT) se define como razón en un triángulo rectángulo, RC) se define como razón en un círculo trigonométrico en un sistema de coordenadas rectangulares, RU) se define como razón en un círculo trigonométrico unitario en un sistema de coordenadas rectangulares, FU) se define con una función de variable real en un círculo trigonométrico unitario en un sistema de coordenadas rectangulares, el seno es la ordenada de un punto sobre el círculo unitario RC') se define como razón en un círculo trigonométrico que no está localizado en un sistema de coordenadas rectangulares.

El resultado de la revisión realizada se presenta en la siguiente Tabla.

REVISIÓN DIAGNÓSTICA DE 17 TEXTOS DE TRIGONOMETRÍA

NÚM. TEXTO	D	E	S	I
1	NO	NO	NO	RT
2	NO	NO	NO	FU
3	NO	NO	NO	RC

4	NO	NO	NO	RT
5	NO	NO	NO	RT
6	SÍ *	NO	NO	RT
7	NO	NO	NO	RC
8	NO	NO	NO	RT
9	SI **	NO	NO	RC'
10	NO	NO	NO	FU
11	NO	NO	NO	RC
12	NO ***	SÍ	NO	RT
13	NO	NO	NO	RC
14	NO	NO	NO	FU
15	NO**	NO	SÍ	RT
16	NO***	SÍ	NO	RU
17	NO	NO	NO	RC

Con posterioridad al desarrollo de este diagnóstico se encontró y revisó un texto titulado "Matemáticas en contexto" (tercer curso) de Guillermina Waldegg (et al)**** elaborado con el propósito de "auxiliar al profesor en la tarea de introducir al alumno de nivel secundaria en el estudio *razonado y significativo* de las matemáticas".

Dicho texto recupera algunas de las características asociadas a un tratamiento didáctico de tipo constructivista. Se transcriben a continuación:

- El reconocimiento de que el alumno construye sus propios saberes a partir de dos condiciones: 1) sus conocimientos previos, ya sean formales o producto de sus experiencias cotidianas, y 2) situaciones que despiertan el interés del joven porque le plantean un reto intelectual cuya solución está a su alcance.

- Se reconoce a la resolución de problemas como un método eficaz para propiciar un aprendizaje efectivo, de largo plazo y susceptible de extender y aplicar en situaciones muy diversas.

4.3 Actitud de los estudiantes con respecto a las matemáticas

En concordancia con la afirmación de Chevallard referente a que en el aprendizaje de la matemática concurren factores tanto motivacionales y actitudinales como factores cognoscitivos, se consideró necesario realizar una exploración previa de la motivación y de la

* En el texto considerado (p. 261), dos hipotéticos alumnos se intrigan por un problema planteado, pero el autor del texto los hace acudir con el profesor para que les aclare sus dudas. En esta forma, los estudiantes no construyen su propio conocimiento.

** Para introducir la noción de seno se plantea un problema, sin embargo el problema es resuelto paso a paso por el autor (el profesor), en esta forma no es el estudiante quien construye su conocimiento.

*** Los autores introducen la noción de seno (pp.109-112), a través de una actividad guiada a ser seguida por el estudiante, sin embargo la actividad resulta rutinaria, no interesante.

**** Matemáticas en contexto. Tercer curso. Guillermina Waldegg - Roberto Villaseñor – Victor García. Grupo Editorial Iberoamérica. (1998).

actitud de los estudiantes del grupo experimental hacia las matemáticas. Para ello se diseñó el "Cuestionario A1" para recuperar la información correspondiente a estos factores.

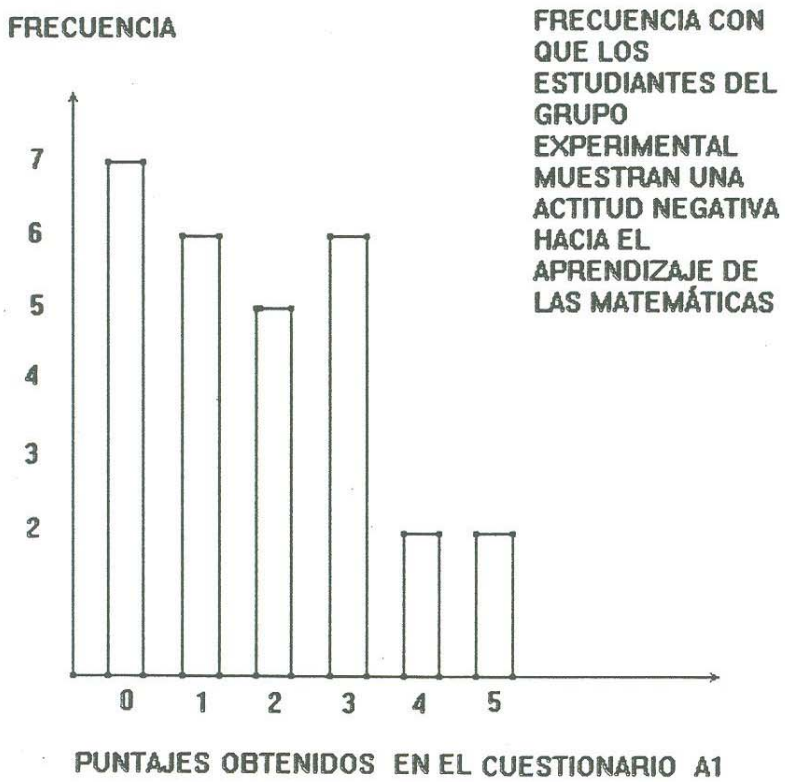
El Cuestionario A1, en una escala arbitraria del 1 al 10, pretende medir el grado de rechazo de los estudiantes hacia las matemáticas.

El cuestionario se aplicó a 28 estudiantes del grupo escolar y se obtuvieron los siguientes resultados.

PUNTAJES OBTENIDOS POR LOS 28 ALUMNOS DEL GRUPO ESCOLAR
EN SUS RESPUESTAS AL CUESTIONARIO A1

1	0	3	0	0	1	3	2	4	0	2	3	1	5
2	1	2	4	3	0	1	1	3	0	2	0	5	3

La distribución de frecuencia de los puntajes obtenidos por los estudiantes del grupo escolar en sus respuestas al cuestionario A1 se presenta en la Gráfica 5.1



GRÁFICA 5.1

Con el instrumento se deseaba explorar la hipótesis de que el estudiante medio de este grupo escolar, definido por la media aritmética de los puntajes obtenidos en las respuestas al cuestionario A1, mostraría un alto grado de rechazo hacia las matemáticas, en particular se había conjeturado que la media sería igual o mayor a un puntaje de 7 y que la desviación estándar representaría o correspondería a un grupo mas o menos homogéneo en su actitud de rechazo.

Formalmente se trataba de explorar la validez de la hipótesis **"El estudiante típico del grupo escolar tiene una concepción tal de las matemáticas que le ocasiona una actitud negativa hacia el aprendizaje de esta ciencia".**

Los resultados obtenidos fueron: $\mu = 1.86$ $\sigma = 1.55$

Estos resultados contradicen la hipótesis que se había conjeturado y pueden interpretarse como correspondientes a un *grupo homogéneo que muestra una actitud positiva hacia las matemáticas.*

La exploración de la motivación necesaria para emprender una actividad de aprendizaje matemático fue investigada en el Cuestionario por medio de las preguntas 1 y 8.

Para plantear estas preguntas se asumió (intentando simplificar), que la motivación que induce al hombre a actuar corresponde esencialmente a dos tipos de necesidades:

Necesidades prácticas: representadas por problemas surgidos en la vida cotidiana y,

Necesidades cognoscitivas: representadas por problemas o cuestiones que intrigan, que causan curiosidad, asombro o contradicción (con los conocimientos actualmente presentes en la esfera cognoscitiva del estudiante), y que no necesariamente corresponden a problemas surgidos en la vida cotidiana.

Para recuperar información concerniente a la motivación de tipo práctico se planteó la pregunta 1, que se enuncia a continuación:

¿Crees que las matemáticas que aprendes en la escuela tienen aplicación en la vida real?

La pregunta fue respondida afirmativamente por el 100% de los estudiantes.

Para investigar la motivación de tipo cognoscitivo se planteó la pregunta 8 que se transcribe a continuación:

¿Te interesaría aprender matemáticas participando en un equipo y descubriendo por ti mismo el saber y averiguando por qué funciona un aparato matemático?

Esta cuestión fue contestada afirmativamente por 22 de los 28 estudiantes, esto es el 84.61% de los mismos. En concordancia con esta afirmación puede presumirse que:

Por lo menos el 84.61% de los estudiantes del grupo escolar mostraron una actitud altamente favorable con respecto a su participación dinámica en actividades tendientes a lograr su aprendizaje en matemáticas.

En consecuencia con los resultados anteriores, cabría esperar que ni la motivación ni la actitud debieron ser obstáculo para el desarrollo de las actividades correspondientes a la construcción de los significados del seno de un ángulo como función y como razón.

4.4 - Exploración del tipo de contrato didáctico imperante en el grupo escolar

Se conjeturó que si los estudiantes del grupo escolar estaban acostumbrados a realizar sus actividades de aprendizaje en sujeción a los papeles respectivos asignados a los profesores, los estudiantes y el saber, por un contrato didáctico de tipo tradicional, entonces se podría dificultar el accionar del alumno al interior de una situación didáctica de tipo constructivista (como aquella pretendida en el experimento).

De darse lo anterior, la sujeción a este tipo de contrato quizá podría haber constituido una variable que interfiriese en la exploración de la hipótesis cognoscitiva central del trabajo.

Para prevenir el hecho anterior en caso de que se diera, se consideró adecuado explorar el tipo de contrato didáctico que imperaba en el grupo sujeto a estudio.

Formalmente, la hipótesis por explorar se enuncia en la siguiente manera:

"El estudiante medio del grupo escolar, en su actuación al interior del aula, y en relación a sus expectativas con respecto al profesor y al saber escolar, está inmerso y sujeto a lo que podría denominarse un contrato didáctico asociado a la didáctica tradicional"

El instrumento que se aplicó a 28 estudiantes se denominó "Cuestionario A-CD-2" y consistió en 24 reactivos que dependiendo de la manera en que fueron contestados (Falso o Verdadero), se tomaron como indicadores del tipo de contrato tradicional. Por ejemplo, si el alumno respondió V a la afirmación "en la clase, primero viene la explicación y luego los problemas" o si respondió F a la aseveración "la clase comienza con el planteo de un problema y después viene una discusión y reflexión sobre lo hecho con el problema", ambas respuestas se calificaron como indicadoras de una didáctica tradicional.

Los puntajes obtenidos por cada estudiante se dividieron entre el número de reactivos, y se multiplicaron por 10 para obtener un número en una escala del 1 al 10, donde el 10 correspondería a un contrato didáctico completamente tradicional.

El número obtenido se consideró como la percepción subjetiva de cada estudiante con respecto al tipo de contrato didáctico imperante en su salón de clase. El promedio de estos puntajes se tomó como una medida de la percepción que tiene el grupo sobre el tipo de contrato didáctico en que se desempeñan al interior del aula. Se obtuvieron los siguientes resultados:

PUNTAJES OBTENIDOS POR LOS 28 ALUMNOS DEL GRUPO ESCOLAR
EN SUS RESPUESTAS AL CUESTIONARIO A – CD – 2

5.7	6.1	2.6	2.2	3.9	3.5	3.3	4.3	4.3	3.9	6.2	6.9	3.9	5.2
5.2	5.7	6.2	4.8	6.5	6.1	7.1	5.7	3.0	3.0	5.7	3.8	4.8	4.8

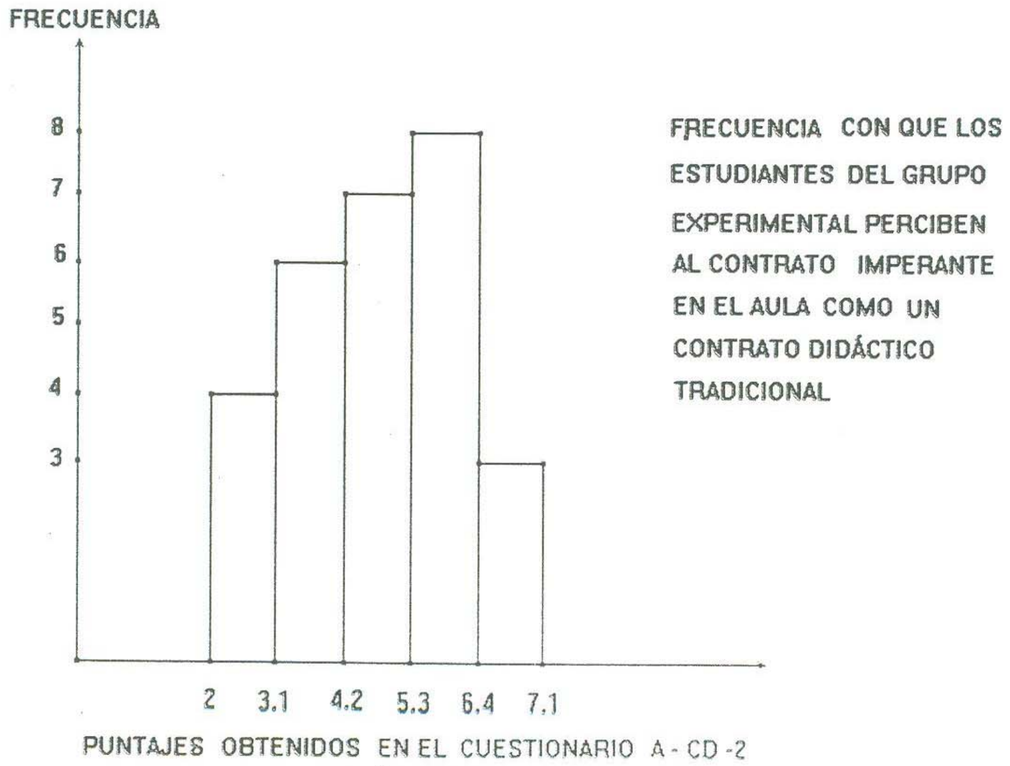
La media aritmética de estos puntajes es $\mu = 4.8$

y la desviación estándar es $\sigma = 1.33$

Estos resultados pueden interpretarse como representativos de un grupo homogéneo en el que los papeles desempeñados por estudiantes, maestro y saber están asociados tanto a prácticas pertenecientes a la didáctica tradicional como a la didáctica constructivista con ligero predominio de esta última.

Puede afirmarse además que no se verifica la hipótesis conjeturada al respecto.

La distribución de frecuencia con que los estudiantes del grupo perciben al contrato didáctico imperante en su aula como "contrato didáctico tradicional" se presenta en la Gráfica 5.2



GRÁFICA 5.2

4.5 Resultados obtenidos en la aplicación de las actividades didácticas

Antes de proceder a la presentación de estos resultados, se recuerda la hipótesis que se exploró por medio de la aplicación en el aula de los instrumentos diseñados para ello. La hipótesis en cuestión afirma lo siguiente:

"Siguiendo lineamientos teóricos y metodológicos asociados al diseño de las denominadas situaciones didácticas de Brousseau, puede conseguirse que los alumnos de un grupo escolar construyan los significados del seno de un ángulo agudo como razón y como función"

4.5.1 Resultados obtenidos en la realización de la Actividad didáctica 1.

En la exploración de la Actividad didáctica aplicada en el grupo escolar se observaron y obtuvieron los siguientes resultados:

Devolución del problema:

Con anterioridad a la aplicación de la Actividad se conjeturaba que la utilización de un aparato y la posterior "comprobación" de que el aparato realmente "funcionaba" despertaría la curiosidad cognoscitiva de los estudiantes y les impulsaría a realizar las acciones cognoscitivas requeridas con la actitud perseverante y sostenida necesaria para el desarrollo del proyecto (esto es, de las 4 actividades).

Adicionalmente se buscaba explorar la hipótesis 1.6.2, a saber:

"El logro de una motivación positiva, intrínseca a la situación de aprendizaje, que provoca el involucramiento inicial del estudiante en la acción que le conducirá al logro de aprendizaje significativo, puede conseguirse por medio de la curiosidad cognoscitiva que despierta el hecho de que un aparato funciona"

Esta hipótesis, como se vio anteriormente, recibió confirmación positiva en las respuestas proporcionadas a la pregunta 8 del cuestionario AI, a saber: **¿Te interesaría aprender matemáticas participando en un equipo y descubriendo por ti mismo el saber y averiguando porque funciona un aparato matemático?.** El 84.61 % de los estudiantes contestaron afirmativamente. La observación participante del experimentador y del profesor del grupo como co-observador también corroboró el interés y el involucramiento de los estudiantes en las actividades del experimento. Los alumnos se apropiaron de la actividad.

Se transcriben (**de manera textual**) recuperados de los informes y respuestas proporcionados por los estudiantes, algunas de sus aseveraciones.

1) "Pues hace casi lo mismo que la calculadora y es más fácil"
2) "Es un transportador gigante que puede hacer una misma función que la calculadora"

3) "Lo que pienso de este transportador es que es preciso y no es nada complejo, así que es fácil de usar, además en las escalas nos sirvió para comprobar la escala X con mucha facilidad"
4) "Con esto aprendí a medir con la reglilla que es lo mismo que con la calculadora"
5) "Si porque con un material tan simple como lo es el transportador trigonométrico Annette pudimos hacer lo mismo que una calculadora científica"
6) "Que la enseñanza fue muy buena porq' aprendimos a utilizar el transportador trigonométrico en vez de la calculadora y eso nos va a servir en la prepa"
7) "Creo que ese invento estubo muy bueno porque nos ayudaba mas bien a medir los ángulos inscritos"

Fase de acción

Se había previsto que como un resultado de una adecuada "devolución del problema" los estudiantes realizarían al menos la interacción que implicaba la manipulación de mediadores instrumentales del aprendizaje (en particular el TTA y la calculadora) y la interacción social con el resto de sus compañeros y el profesor. (Representado en esta situación por el investigador y por el profesor del grupo).

La observación participante del investigador y del profesor del grupo verificaron que efectivamente los alumnos realizaron interacciones tanto con los medios manipulativos como con sus compañeros, esto es las interacciones sociales.

Se transcriben textualmente opiniones de los estudiantes con respecto al papel de los alumnos al interior de las fases:

1) "Pienso que está bien porque puedes descubrir algunas cosas las cuales pueden ser útiles por ti mismo; claro siempre con alguna ayuda"
2) "Que es un poco más complicado y a la vez más fácil, ya que el material es más eficiente, pero las explicaciones no siempre son muy explícitas"
3) "Lo pude explicar y aser lo mejor que pude"
4) "Pues pienso que cada uno de nosotros desempeñó algún papel bueno en esta actividad o experimento y que fue algo que pudimos compartir y razonar con todos nuestros compañeros"
5) "Pienso que está muy bien porque vamos descubriendo cosas y haciéndolas sin imaginarnos que las estamos haciendo"
6) "Que también está muy bien porque cada quién va aprendiendo conocimientos en su propio mesabanco sin levantar a pedir un hoja y además estaban un poco claras las instrucciones"
7) "La verdad al principio fue muy difícil en la forma d' q' no teníamos mucha confianza en nosotros mismos"

Fase de formulación

Se había anticipado que la fase de formulación estaría constituida por el registro de resultados en las tablas correspondientes, por la respuesta a los cuestionarios y por la elaboración de los informes.

La observación participante del investigador y del profesor del grupo y los informes entregados por cada uno de los estudiantes corroboran que efectivamente se dio esta fase de las situaciones didácticas de Brousseau.

Las formulaciones individuales solo fueron "negociadas" al interior de cada equipo. Puede interpretarse o corroborarse lo anterior observando en los informes entregados por los estudiantes, que las formulaciones individuales discrepantes al interior de un mismo equipo son prácticamente inexistentes.

Sin embargo, a nivel de equipos diferentes, sí existe discrepancia entre sus respectivas formulaciones.

Fase de validación

Se había previsto que los estudiantes, al interior de cada equipo, se convencerían de la validez de los resultados obtenidos. Se creía lo anterior por las siguientes consideraciones asociadas a la forma de validación en niveles pre-científicos: 1) Por la creencia (asumida en los estudiantes) en una validez derivada de la coincidencia en los resultados obtenidos por la replicación de una misma actividad por todos los integrantes de cada equipo, "si todos obtuvimos lo mismo haciendo la misma actividad, entonces lo que hicimos debe ser correcto", 2) Por la creencia en la validez derivada de un conocimiento generalizable (que Bachelard considera como obstáculo epistemológico para la construcción de conocimiento científico), 3) Por la creencia en la validez derivada de un argumento de autoridad, por ejemplo del maestro o del libro, y en este caso, la calculadora, 4) Por los debates y negociación del conocimiento que se dieron al interior de los equipos.

De manera particular se había conjeturado que como resultado de estas tres fases, los alumnos, como resultado de sus interacciones empíricas y sociales serían capaces de:

1) Registrar en una tabla los valores de los ángulos y los correspondientes valores de sus cuerdas expresando estos últimos a la centésima más próxima, utilizando para ello el TTA.

2- Apercibirse que el número asociado (fuera por el TTA o por la calculadora), era único.

3- Describir con sus propias palabras al TTA. Se pensaba que los estudiantes, al hacer la descripción, no se darían cuenta que la longitud de la reglilla coincidía con la longitud del diámetro del TTA, ni de que la longitud de la misma era unitaria.

4- Explicitar los asuntos que les causarían más curiosidad cognitiva, se creyó que estos serían: 1) Que funcionara el TTA, 2) que los valores de la escala X fueran la mitad del valor de los correspondientes valores en la escala del transportador tradicional.

Los resultados obtenidos en la aplicación de la Actividad 1 con 24 estudiantes se describen a continuación:

Resultados obtenidos

1- El 100 % de los estudiantes registraron en una tabla la correspondencia funcional entre ángulos agudos y longitudes de sus cuerdas correspondientes expresando esta última a la centésima más próxima, utilizando para ello el TTA.

La anterior constituye una interacción empírica realizada con la mediación de un aparato estructurado, lo que realmente se hace con el mismo es medir con el diámetro la longitud de las cuerdas correspondientes a arcos que van de 10° en 10°, desde 0° hasta 180° (aunque en el aparato parece que van de 5° en 5° desde 0° hasta 90°).

En el contexto de una exploración de una situación didáctica de Brousseau, el TTA constituyó un recurso didáctico útil para propiciar: 1) la "devolución del problema" a los alumnos, 2) la actividad del estudiante, 3) la interacción con el entorno y materiales físicos, y 4) la interacción social. Los alumnos realmente se intrigaron con el hecho de que el aparato funcionaba y esto los motivó a participar activamente en el proyecto.

2- Al realizar la tarea anterior los alumnos cometieron un total de 15 errores. Si se piensa que la tarea propiciaba la posibilidad de cometer 24 x 17 = 408 errores, se tiene entonces que la probabilidad frecuencial de que el grupo cometiera error asignando con el TTA un número real aproximado a centésimas fue de 15 / 408 = 0.0367 que corresponde a un 3.67 % lo que constituye una probabilidad satisfactoriamente baja de cometer error si se considera el reducido tamaño del diámetro del instrumento (20 cm).

3- El error máximo cometido con el instrumento fue de 0.006, teóricamente el máximo error posible es igual a la mitad de la unidad de medida o sea 0.005. La mayoría de las ocasiones el error no excedió de 0.004.

Arbitrariamente se decidió considerar, para efecto de conteo de errores, que se definiría como error a una asignación de número que implicara un error igual o mayor a 0.01; esto, en la práctica con el instrumento, equivale a "no seleccionar la rayita más próxima" y más bien debería considerarse como equivocación.

Los tipos de errores cometidos fueron los siguientes: a) escribir 0.1 en lugar de 1.0 al aproximar sen 90°, este error pudiera ser revelador o un indicio de la existencia de un obstáculo didáctico asociado al proceso de medición, o bien puede pensarse en estudiar la "problematicidad" de las situaciones o casos limite, b) olvidar estimar el seno de un ángulo particular, c) asignar un número con error mayor a 0.01, d) asignar el mismo número a distintos ángulos, por ejemplo, hacer corresponder el 1 tanto a un ángulo de 85° como a uno de 90°

4- Si a la cantidad total de errores (15) se le descuentan los errores no ocasionados por el instrumento, que ascienden a un total de 6, se tendría entonces que la probabilidad frecuencial de cometer error al asignar número con el TTA sería de 9 / 408 esto es, el 2.2 % lo que en nuestra opinión determina que el TTA sea un instrumento confiable para establecer una interacción empírica con una representación del objeto de conocimiento.

¿Por qué analizar y establecer la confiabilidad del TTA?

Quizá pueda parecer que un estudio de la confiabilidad de un instrumento para la interacción empírica resulte ajeno al contexto de una exploración de una aproximación al diseño de una situación didáctica de Brousseau.

Sin embargo, se consideró pertinente realizarlo debido a que como se ha dicho antes, se pensó que la exploración del aspecto cognoscitivo debía estar en lo posible aislada de otras variables que pudieran interferir en la generación de resultados no atribuibles al mismo. En este sentido, resultaba necesario averiguar si el instrumento resultaba confiable para desempeñar el papel que se le había previsto en el desarrollo de la actividad didáctica.

Observación 1: Para mejorar el desempeño empírico con el instrumento, o quizá para introducir una variable didáctica de comando en la situación didáctica, un plausible replicador del experimento podría tener 2 opciones: 1) Aumentar a 25 cm el diámetro del instrumento, 2) Hacer la medición de cuerdas para arcos que crecieran de 10° en 10° hasta llegar a 180° y luego introducir, en una fase de institucionalización la identidad $\text{crd } 2\alpha = \text{sen } \alpha$.

Observación 2: Para la aplicación en el grupo se utilizó una versión del TTA donde se pretendía enfatizar el hecho de que en realidad se estaban realizando mediciones. Para ello, se eliminó el semicírculo en el dibujo del instrumento y solo quedaron indicados los puntos correspondientes a los valores de los ángulos. Al parecer, y considerando los resultados obtenidos, esta observación debe ser muy tomada en cuenta por un plausible replicador de la exploración. Lo anterior es debido a que aparentemente esta circunstancia originó que los estudiantes creyeran que estaban "midiendo ángulos" y no elaborando una tabla. Se recuperan a continuación algunas expresiones al respecto por parte de los estudiantes.

1) "es una forma de aproximación a la distancia de un ángulo"
2) "¿se podrá usar el transportador trigonométrico Annette para medir un ángulo mayor de 90 grados?"

Observación 3: Otro hecho no previsto en la exploración lo revela la siguiente pregunta formulada por un estudiante: ¿por qué decidieron darle el nombre de trigonométrico". Es plausible pensar que el nombre de un instrumento está relacionado con su función o con su utilidad, entonces se tiene que la utilización de un instrumento en el cual aparece explicitado su nombre, pudiera en alguna manera sesgar o prejuiciar la comunicación esperada.

Observación 4: Otra circunstancia no prevista en la exploración de la situación didáctica fue la implicada por la siguiente pregunta hecha por una estudiante participante en el experimento: ¿Qué sucede si el punto cae justamente en medio de dos rayitas? Lo anterior deberá ser tomado en cuenta por un plausible replicador.

5- La probabilidad frecuencial de que el grupo cometiera error con la calculadora fue de 2 dividido por 19 x 24 = 456, esto es , 0.04 %.

6- La proporción de estudiantes que piensan que el número asociado al ángulo es un número único es de 15 / 24 = 0.625 es decir el 62.5 %. Sin embargo, la falla del 37.5% de los estudiantes en no detectar la unicidad (con su implicación para la construcción del concepto de función) parece indicar que los estudiantes confunden unicidad con exactitud. Esto también debe ser tomado en cuenta en el diseño previo de una situación didáctica de Brousseau. Se recuperan algunas de las respuestas de los estudiantes respecto a esta cuestión.

1) "Yo creo que en algunos casos no, aunque en la mayoría si tienen números reales y no porque algunos tienen aproximaciones"
2) "No, pienso que es solo la aproximación"
3) "Si lo hace (la calculadora) porque en la reglilla el ángulo es aproximado y en la calculadora es exacto"

Observación 5: La existencia de confusión en el sentido de lo que debería entenderse por "número único", (que los estudiantes al parecer confunden con "no más de dos decimales en la representación del número") no fue prevista en el diseño de la situación didáctica. Esto también deberá ser tomado en cuenta por plausibles replicadores en el diseño o la modelización previa de la situación y las variables didácticas.

7- La conjetura de que la totalidad de los estudiantes, al hacer la descripción del TTA no advertirían ni que la longitud de la reglilla coincidiría con la del semicírculo ni que esta era unitaria se verificó, aunque sólo 7 de los alumnos (el 29.16%) contestaron la pregunta.

8- Cómo resultado de la observación participante del experimentador y del profesor co-observador, se piensa que el hecho de que 17 estudiantes no describieran el instrumento, puede atribuirse a que los estudiantes tienen problemas de expresión escrita, no saben realizar descripciones en general y mucho menos describir objetos matemáticos en particular. En este último caso la descripción suele estar más sistematizada y más mediada por la utilización de notaciones y simbologías. Se recuperan dos ejemplos de descripciones hechas por los alumnos:

1) "Tiene un cierto parecido con el transportador usual el que todos conocemos, tiene la misma *linia* recta con otra pequeña *linia* que dice o marca la mitad y está entre los puntos 50° y 45° también sus ángulos *ban* de 5 en 5 y la reglilla también tiene una marca en que *ba* de 5 en 5 y es recta"
2) "Tiene 85 centímetros es como *ovalado* tiene media *sircunferensia* y es trigonométrico"

9- Se había pensado que les causaría curiosidad que los valores de la escala X, fueran la mitad numérica de los valores de la similar escala en el transportador tradicional. Los datos recabados no permiten establecer una conclusión al respecto ya que 21 de los 24, estudiantes (el 87.5 %) no contestaron la pregunta correspondiente.

Fase de institucionalización

Consistió en explicitar al estudiante que la tabla que había elaborado en la Actividad 1 constituía una de las maneras de representar el concepto de función, y que por tanto un significado del seno de un ángulo agudo consistía en considerarlo como una función.

Observación 6: La noción del seno de un ángulo agudo fue institucionalizada como un conjunto de pares ordenados. Como se verá más adelante esto pudiera constituir un inconveniente o defecto del diseño. Un plausible replicador debiera considerar presentaciones del concepto de función más adecuadas al nivel de secundaria.

En este punto resulta pertinente indicar que según el desarrollo o secuencia del programa este concepto ya habría sido tratado con anterioridad.

4.5.2 Resultados obtenidos en la realización de la Actividad didáctica 2

La noción del seno de un ángulo agudo como razón requiere para ser construida de manera significativa que el estudiante relacione esta razón con el conocimiento previo de triángulo rectángulo.

Dado que el funcionamiento del TTA está basado en dos teoremas previos de geometría, el aprendizaje significativo de su funcionamiento requiere precisamente de relacionar la definición del seno de un ángulo como razón con los teoremas 1 y 2 que se expresan a continuación:

Teorema 1 – En un semicírculo la medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad de la medida del ángulo central correspondiente

Teorema 2 – Todo triángulo inscrito en un semicírculo es rectángulo.

En razón de lo anterior los propósitos de la Actividad didáctica 2 consistieron precisamente en lo siguiente:

1) Que los estudiantes descubrieran el teorema 1 por medios empíricos.
2) Que los alumnos descubrieran el teorema 2 de la misma forma.
3) Que los estudiantes advirtieran la relación del teorema 1 con la escala X del TTA.
4) Que los alumnos advirtieran que el TTA asocia al ángulo agudo la longitud del cateto opuesto al mismo ángulo.

Se conjeturó que los estudiantes en este contexto de aprendizaje por descubrimiento guiado podrían descubrir los teoremas aludidos y su relación con la estructura del TTA.

Devolución del problema

Se consideró al desarrollo de las 4 actividades didácticas como un solo proyecto, se había conjeturado que la motivación y actitud lograda por la devolución del problema en la primera actividad serviría para todas ellas. La observación participante así lo confirmó.

Fase de acción:

Se había anticipado que como un resultado de la "devolución del problema" los estudiantes realizarían la interacción que implicaba la manipulación de mediadores instrumentales del

contempla no solo el nivel alumno-equipo de validación, sino también el nivel equipos-equipos.

Resultados obtenidos

1- De 28 estudiantes, 21, esto es, el 75% del grupo, descubrieron en forma empírica el teorema 1.

aprendizaje como reglas, compases y transportadores, y se efectuaría la interacción social con los compañeros y el profesor.

La observación participante del investigador y del profesor del grupo, y los informes correspondientes a la actividad verificaron que efectivamente los alumnos realizaron las interacciones previstas, tanto con los medios manipulativos como con sus compañeros.

Fase de formulación:

Se había previsto que la fase de formulación estaría constituida por el registro de resultados en las tablas correspondientes, por la respuesta a los cuestionarios y por la elaboración de los respectivos informes.

La observación participante del investigador y del profesor del grupo y los informes entregados por cada uno de los estudiantes corroboran que efectivamente se dio esta fase de las situaciones didácticas de Brousseau.

Al igual que en la actividad anterior, las formulaciones individuales solo fueron "negociadas" al interior de cada equipo. Las formulaciones individuales discrepantes al interior de un mismo equipo son prácticamente inexistentes. A nivel de equipos diferentes, sí existen discrepancias entre formulaciones.

Fase de validación:

Se había anticipado que los estudiantes, al interior de cada equipo, se convencerían de la validez de los resultados obtenidos. Se asumía lo anterior por lo siguiente: 1) Por la creencia (asumida en los estudiantes) en una validez derivada de la coincidencia en los resultados obtenidos por la replicación de una misma actividad por todos los integrantes de los equipos, 2) Por la creencia en la validez derivada de un conocimiento generalizable, 3) Por la creencia en la validez derivada del hecho de que una conjetura predictiva realmente se verificara (teoría contra experiencia), 4) Por los debates y negociación del conocimiento que se dieron al interior de los equipos.

Observación 1: La restricción impuesta al experimento consistente en realizarlo en el tiempo institucional que la institución provee para el desarrollo de la sesión, no permitió la realización, a nivel de equipos–equipos, de la fase de validación. Como resultado de la exploración puede establecerse, para un plausible replicador, que la fase de validación debe contemplar no solo el nivel alumno-equipo de validación, sino también el nivel equipos-equipos.

Resultados obtenidos

1- De 28 estudiantes, 21, esto es, el 75% del grupo, descubrieron en forma empírica el teorema 1.

La observación participante mostró al investigador, que aunque este saber pudiera considerarse como un conocimiento previo escolarizado ya asimilado (puesto que se encuentra secuenciado en el programa antes de la noción de seno), al parecer no había sido así, no se había aprendido de manera significativa. Su aparición como resultado de las actividades de descubrimiento sorprendió a los estudiantes. Se transcriben, en relación a lo anterior, expresiones de algunos alumnos:

1) "Los temas enseñados me parecieron muy importantes porque en ellos encontramos algo diferente que no sabíamos como: El ángulo central es el doble que el ángulo inscrito"
2) "Nos enseñó a medir longitudes, calcular sin sacar cuentas y enseñó que un ángulo central es el doble del ángulo inscrito cosa que yo no sabía"
3) "Yo creo que no nos faltó nada y en realidad tengo una sola pregunta ¿Por qué el ángulo central es el doble que el ángulo inscrito?

Observación 2: Un plausible replicador del experimento debería asegurarse de manera previa de conocer si los citados teoremas habían sido aprendidos o no de manera significativa.

Observación 3: Las principales fallas en la parte empírica fueron las siguientes: a) No midió el ángulo central, el inscrito o ambos, b) Midió pero las medidas difieren demasiado de la medida real, c) no sabe dibujar ángulos de 180°, d) no utiliza notaciones o las que utiliza son incorrectas. Un plausible replicador pudiera quizá mejorar la aproximación empírica utilizando recorte de ángulos dibujados en papel o doblado de los mismos como complemento de las mediciones.

Observación 4: En adición a la parte empírica resulta muy importante señalar que el "descubrimiento guiado" puede considerarse como una condición necesaria pero no suficiente para que el conocimiento pretendido aparezca como respuesta a la actividad planteada. Se expresa lo anterior en razón de que algunos estudiantes midieron correctamente los ángulos centrales e inscritos, llenaron correctamente la tabla correspondiente y sin embargo no advirtieron la relación entre los pares correspondientes de medidas.

Observación 5: Para complicar aun más el panorama anterior se dio el caso adicional de que los contextos de los informes hacen ver que algunos alumnos descubrieron los teoremas correspondientes pero no supieron como formularlos.

2- De 28 alumnos, 19 o sea el 67.85%, descubrieron en forma empírica y a-didáctica el teorema 2 (Aquí aplican las mismas observaciones anteriores).

3- De 28 estudiantes, 4 o sea el 14.28%, advierten la relación de la escala X del TTA con el Teorema 1.

Observación 6: La carencia de respuestas a la pregunta correspondiente al punto 3 no indica necesariamente que el estudiante no haya advertido la relación. Más bien parece que no entiende la pregunta en los términos en los que esta es formulada.

En este punto el instrumento diseñado para recuperar la información no es claro, no hace una pregunta específica (más directa, con indicadores más explícitos) al respecto. Esta falta de claridad es señalada por algunos estudiantes en los informes respectivos. Un plausible replicador deberá asegurarse que la pregunta correspondiente es comprendida por los estudiantes.

Fase de Institucionalización

El diseño de las actividades no contempló realizar una fase de institucionalización para esta actividad debido a que la misma está relacionada con la siguiente.

¿Por qué introducir aprendizaje por descubrimiento guiado en un proceso de construcción?

Si se considera al aula como una especie de micro laboratorio donde idealmente pueden reproducirse las condiciones que propiciaron la construcción de un cierto conocimiento, y si se considera que algunos de los conocimientos logrados por el hombre se realizaron a través de descubrimientos, se infiere que la introducción de aprendizaje por descubrimiento en el aula no es ajena o no es incongruente con los procesos de construcción de conocimiento que históricamente se han dado.

Pudiera argumentarse que estos procesos históricos de descubrimiento ciertamente se han dado, pero que los mismos no han sido procesos de descubrimiento guiado.

En respuesta a lo anterior, y con relación a las situaciones didácticas, pueden expresarse los siguientes argumentos:

1) Los procesos de construcción de conocimiento asociados a las situaciones didácticas de Brousseau, no constituyen procesos completamente libres de toda guía, en tales situaciones se intenta construir un determinado conocimiento escolar y no cualquier conocimiento general que pudiera ocurrírseles a los estudiantes.

2) Históricamente se ha dado que la concurrencia de factores que contribuyen al surgimiento de un descubrimiento (lo análogo al descubrimiento guiado) no asegura que necesariamente se vaya a dar el mismo.

3) Precisamente esto es lo que se señaló en la observación 4 del apartado precedente, se dieron las condiciones que pudieran hacer pensar en el surgimiento del descubrimiento y sin embargo este no se dio.

4) En nuestra opinión las condiciones cognoscitivas asociadas a los procesos de descubrimiento guiado no son incongruentes con las ideas de Piaget (asimilación, acomodación, abducción) mismas que constituyen el soporte teórico de las situaciones didácticas de Brousseau.

4.5.3 Resultados obtenidos en la aplicación de la Actividad didáctica tres

En el diseño del experimento correspondiente a la situación didáctica para la construcción de los significados del seno de un ángulo agudo se había previsto, como efectivamente sucedió, que los alumnos serían capaces de construir los dos teoremas de la geometría elemental que propician que la noción de seno de un ángulo agudo constituya un aprendizaje significativo.

Sin embargo, y en consideración a que el estudiante, por el hecho de haber descubierto por medios empíricos la proposición correspondiente a un teorema verdadero, pudiera desarrollar cierta creencia en una exagerada bondad de este tipo de métodos, entonces se pensó en desarrollar una actividad adicional que ubicara en su justo lugar el valor de los métodos experimentales en el campo de las matemáticas.

La actividad se tituló ¿Es siempre válido el conocimiento matemático descubierto por medios empíricos? Los propósitos centrales de la misma fueron tres:

1) Que el alumno, sin la intervención didáctica directa del profesor, descubriera que el conocimiento construido con base en métodos empíricos tiene limitaciones, no siempre es válido.
2) Que la conciencia de las limitaciones de estos métodos le despertaran la necesidad cognitiva de buscar métodos más confiables.
3) Que en la correspondiente fase de institucionalización se explicitara que los Teoremas 1 y 2 eran válidos ya que habían sido demostrados.

Se consideró que el método axiomático-deductivo de la matemática es precisamente el método confiable que satisface la necesidad cognitiva antes expuesta, y que la naturaleza convencional del mismo obligaba a que su introducción en el aula se diera directamente por el profesor al interior de una fase de institucionalización.

Dentro de los esquemas de predictibilidad asociados al diseño de las situaciones didácticas se previó que los alumnos realizarían exitosamente la actividad planteada y que en consecuencia afirmarían que el conocimiento matemático descubierto por medios empíricos no siempre es válido. La actividad fue realizada por 29 estudiantes. Los resultados obtenidos se presentan a continuación:

La observación participante del investigador y del profesor del grupo corroboraron que efectivamente se dieron en el grupo la devolución del problema, y las fases de acción, formulación y validación en forma análoga a lo descrito en las actividades 1 y 2.

Para variar un tanto la presentación los resultados obtenidos se presentan en la siguiente tabla.

Número de estudiante y de equipo.	¿Es siempre válido el conocimiento descubierto por medios empíricos?	Observaciones y notas importantes
1.6	NO	A, B, C
2.6	NO	A, B, C
3.6	NO	B, C, D, E
4.6	NO	A, B, C
5.6	NO	A, B, C

6.5	SÍ	C, E, F, G, N
7.5	SÍ	C, F, N
8.5	SÍ	B, C, G
9.5	SÍ	C, H, N
10.5	SÍ	C, N
11.5		C, J, N
12.4	SÍ	C, F, H, N
13.4	SÍ	C, F, H, N
14.4	SÍ	C, F, H, N
15.4	SÍ	C, H, F, N
16.4		C, F, H, J, N
17.4		C, F, H, J, N
18.2	SÍ	H, N
19.2	SÍ	H, N
20.2	SÍ	H, N
21.2	SÍ	H, N
22.1	SÍ	N
23.1	SÍ	N
24.1	SÍ	N
25.1	SÍ	N
26.1	SÍ	N
27.3	SÍ	H, N
28.3	SÍ	H, N
29.3	SÍ	H, N

Explicación de las observaciones y notas

A: Expresa la validez de la pregunta actual en términos de la creencia derivada de la actividad realizada en la sesión anterior.

B: El informe final de la actividad confirma la respuesta dada a la pregunta.
El alumno 8.5 es el único que intenta confirmar su respuesta afirmativa. Textualmente: "no se puede predecir sin hacer el dibujo las regiones que obtendrás en la circunferencia".

C: El resultado de la actividad no le causa curiosidad al estudiante, no le intriga.

D: Al parecer la respuesta que proporciona el estudiante no se deriva de la actividad realizada, sino de una actitud escéptica del alumno. "No siempre *ban* a salir correctos todos los cálculos que hagas".

E: El alumno dibuja mal las figuras, propiciando la derivación de conclusiones erróneas.

F: El informe final es incoherente o intrascendente.

G: El informe pudiera evidenciar que el estudiante está aun en el nivel de las operaciones concretas de Piaget. La respuesta textual es: "No se puede predecir sin hacer el dibujo"

H: El estudiante no asimila “válido” a verdadero.

I: El alumno presenta un informe que no evidencia toma de posición alguna.

N: El informe de la actividad no confirma o no es congruente con la respuesta.

Los resultados anteriores mostrados de manera resumida en la tabla, pueden ser interpretados en la siguiente forma:

1- Aunque los resultados obtenidos muestran que 21 de los 29 estudiantes del grupo escolar que respondieron afirmativamente (el 72.41 %), piensan que el conocimiento matemático obtenido por medios empíricos es siempre válido, esta respuesta no es confirmada o no es congruente con lo expresado en el informe final. De las 21 respuestas afirmativas solo una intenta confirmarla (alumno 8.5, indicador B en observaciones en la tabla) las otras 20 son o no confirmadas o contradichas. (indicador N en la tabla).

2- De 29 estudiantes, 14, no asimilan el concepto de válido a verdadero (indicador H en la tabla), confunden lo válido con lo útil, lo justificado por los fines, lo que proporciona beneficio o divierte, lo que sirve, lo nuevo, etc. Esto deberá ser tomado en cuenta por plausibles replicadores.

3- Consecuentemente, no se puede afirmar si la predicción establecida para este caso (a saber, que la mayoría de los estudiantes afirmaría que el conocimiento matemático obtenido por medios empíricos no es siempre válido) es validada por las respuestas, aunque pudiera parecer apropiado pensar que sí es confirmada.

4- Por otra parte, resultó interesante observar que al parecer los resultados de la actividad empírica exitosa anterior indujeron a los estudiantes a favor de la respuesta afirmativa. En este sentido, cabe preguntarse qué habría sucedido si primero se presenta la actividad donde falla la inducción empírica y posteriormente la actividad donde el resultado empírico es válido.

5- La exploración de la situación didáctica reveló que el tiempo institucional disponible no permitió la realización de la fase de validación a nivel de equipos-equipos. Se piensa que en esta fase la interacción entre los distintos equipos, y no solo entre estudiantes de un mismo grupo, hubiera contribuido a dilucidar la cuestión.

6- Sin embargo, puede afirmarse que de cualquier forma, la detección de estas fallas posibilitada por la realización del experimento, contribuye a mejorar las posibilidades de replicabilidad del instrumento y de control de la evolución de la situación didáctica.

Observación 1: Puede conjeturarse que algunas de las circunstancias problemáticas asociadas al desarrollo de la Actividad 3 pudieron deberse al hecho de que en la Actividad 2 se plantean acciones de medición, y en la Actividad 3 acciones de conteo. Un plausible replicador pudiera considerar la posibilidad de plantear actividades de la misma naturaleza.

Fase de institucionalización

Consistió en que el profesor explicitó el hecho de que las limitaciones de los métodos empíricos provocaron la necesidad de disponer de métodos más confiables para validar el conocimiento. El método en cuestión es el axiomático-deductivo. Los teoremas de la Actividad 2 son válidos porque han sido demostrados con el método anterior.

4.5.4 Resultados obtenidos en la realización de la Actividad didáctica 4

Como resultado de la realización de la actividad, se conjeturaba que los estudiantes serían capaces de:

1- Elaborar la tabla que refleja la correspondencia entre ángulos y cuerdas con un TTA cuya reglilla media 100 unidades y donde se debía dividir entre 100 el número asignado por la reglilla a cada ángulo.

2- Verificar con una calculadora que los números asignados aproximadamente coincidían con los números obtenidos con el nuevo TTA.

3- Apercibirse de que el cálculo realizado con las mediciones del TTA era una razón. La longitud del cateto opuesto al ángulo dividida entre la longitud de la hipotenusa.

4- Elaborar la tabla que refleja la correspondencia entre ángulos y cuerdas con un TTA y con una regla escolar, dividiendo los números asignados por la regla entre la longitud del diámetro medido con la misma. Verificar con la calculadora.

Para el propósito de construir el significado del seno como razón, esta última actividad no resultaba estrictamente necesaria, sin embargo se dejó en el instrumento para explorar la posibilidad de verificar que la magnitud del seno no depende del tamaño de los lados del triángulo. Se informó a los estudiantes que las actividades correspondientes al punto 4 podían suprimirse, sin embargo, algunos estudiantes las realizaron.

La observación participante del investigador y del profesor del grupo corroboraron que efectivamente se dieron en el grupo la devolución del problema, y las fases de acción, formulación y validación en forma análoga a lo descrito en las actividades 1 y 2.

Los resultados obtenidos se presentan a continuación:

1- Todos los estudiantes fueron capaces de elaborar la tabla que refleja la correspondencia funcional entre los ángulos dados en la tabla y la razón entre la longitud de la cuerda y la longitud del diámetro que medía 100 unidades.

2- El número de errores cometidos por 23 estudiantes al realizar la actividad anterior fue 40, de un total posible de 23x18 = 414, entonces la probabilidad frecuencial de que esto suceda es 40/414 = 0.0966, esto es, un 9.66% de probabilidad de cometer error al realizar esta actividad.

Sin embargo, puede observarse en el reporte correspondiente, que el estudiante que cometió 18 errores simplemente olvidó dividir entre 100. Descartando a este estudiante se tendría que el total de errores fue 22 de un total posible de 22x 18 = 396, entonces la probabilidad de cometer error en esta actividad empírica sería 22 / 396 = 0.055 o 5.5% que a nuestro parecer es una probabilidad relativamente baja.

3- Todos los estudiantes verificaron con calculadora los resultados obtenidos en el punto 2.

4- El número de errores (122) obtenidos al intentar la verificación con calculadora fue extremadamente alto. Como ya se dijo antes, el poco tiempo disponible hizo que no se pudiera llevar a cabo la fase de validación a nivel equipos-equipos. Esta fase de "validación" sólo se dio al interior de los equipos, esto es, a nivel de estudiante-equipo, así, un mismo equipo de 2 estudiantes cometió 35 errores y otro equipo con 4 estudiantes cometió 76 errores. Los restantes 17 estudiantes, repartidos en 4 equipos cometieron 11 errores en total. Puede verse en los informes, que algunos errores eran de naturaleza muy simple: por ejemplo, olvidar colocar el punto decimal, sin embargo otros resultaron inexplicables.

5- Sin embargo, a nivel de exploración de los elementos contenidos en el diseño de una situación didáctica de Brousseau, la experiencia resultó aleccionadora: La validación a nivel equipos-equipos es completamente necesaria, esto debe ser tomado en cuenta por el replicador potencial o por el diseñador de tales situaciones.

6- En la planeación de la situación didáctica se esperaba que los estudiantes se sorprendieran cuando verificaran (correctamente) que el resultado que se obtenía al dividir entre 100 coincidía con el resultado que se había obtenido en la primera actividad. Sin embargo, como no verificaron no se sorprendieron, y en consecuencia no se dio la problematización o desequilibrio de las estructuras cognoscitivas como se esperaba.

7- De los 23 estudiantes, 8 o sea el 34.78 %, elaboraron la tabla que refleja la correspondencia funcional ángulo–razón utilizando el TTA y una regla escolar. Como se dijo antes, esta actividad era opcional.

Fase de institucionalización

Consistió en la explicitación por parte del profesor del hecho de que las informaciones contenidas en las tablas elaboradas indicaban que la correspondencia que realmente se establecía en las mismas consistía en que a cada ángulo se le asociaba una razón. Que en la Actividad 1 también había sucedido así pero no se había notado porque el consecuente de la razón era unitario.

4.6 – Consideraciones finales

1- La hipótesis cognoscitiva central establecía que "siguiendo lineamientos teóricos y metodológicos asociados al diseño de una situación didáctica de Brousseau, puede conseguirse que los estudiantes de un grupo escolar construyan los significados del seno de un ángulo como razón y como función".

2- No se pretendía seguir dichos lineamientos de manera estricta y comprehensiva, debido a que la complejidad del diseño de las situaciones didácticas de Brousseau hizo pensar al investigador en sólo explorar un proceso de construcción de conocimiento que incorporara dichos lineamientos, ello, para recuperar los resultados en el diseño posterior de otra investigación más acabada.

Adicionalmente se había impuesto a la exploración la restricción experimental de que las sesiones deberían ser realizadas en el tiempo normal que la institución asigna al desarrollo de las "clases" correspondientes.

Aunque no se explicitó como hipótesis en la parte correspondiente (habría "demasiadas" hipótesis), se pensaba que quizá parte de la renuencia del profesor a aplicar enfoques constructivistas en el aula podría deberse a que el maestro presuponía que la aplicación del citado enfoque "le haría perder demasiado tiempo y esto podría impedirle cumplir con el programa escolar".

3- La exploración reveló en general, que algunos componentes o lineamientos del diseño de tales situaciones se llevaron a cabo de manera satisfactoria y otros de manera insatisfactoria. Sin embargo, sugirió maneras en que puede mejorarse el diseño de los instrumentos y el desarrollo de las sesiones. Se tiene en particular:

3.1- La devolución del problema a los estudiantes. Tanto el investigador como el profesor del grupo (como observadores participantes) corroboraron la alta motivación que despertó la utilización del TTA y la actitud positiva hacia el desarrollo del proyecto sostenida a través del desarrollo de todas las sesiones. Adicionalmente, la utilización del TTA contribuyó a atenuar o disipar la naturaleza altamente abstracta asociada a la noción de seno de un ángulo agudo.

3.2- La fase de acción de tales situaciones. Todos los estudiantes de los diversos equipos se involucraron (fueron activos) en el proceso de construcción de conocimiento. Esto se detectó por los observadores participantes y se evidenció en los Informes correspondientes a las diversas actividades, en ellas los estudiantes: Llenaron las entradas de tablas, contestaron los respectivos cuestionarios, utilizaron la calculadora, realizaron las mediciones con los instrumentos correspondientes, realizaron trazos y figuras geométricas e interaccionaron a nivel de estudiante-equipo.

3.3- La fase de formulación de tales situaciones. La exploración reveló la existencia de problemas de expresión escrita en los estudiantes. Esto se detectó en las formulaciones registradas en los Informes correspondientes.

3.4 - La interacción de los estudiantes con mediadores concretos del aprendizaje. En el diseño del experimento se previó que ningún estudiante careciera de los mismos. Se dotó al 100% de los estudiantes de los TTA, transportadores y reglas necesarias para la realización de las actividades y con 2 calculadoras científicas por cada equipo. La observación participante y los registros en los Informes corroboraron la utilización de los mediadores concretos del aprendizajes en las correspondientes fases de la situación didáctica.

3.5 - La interacción social de los estudiantes, más esta se dio sólo en los niveles de estudiante-equipo, estudiante-profesor y equipo-profesor. La exploración reveló que es necesaria, para el enriquecimiento del desarrollo de las situaciones didácticas, la concurrencia de otros tipos de interacciones, esencialmente: equipos-equipos y grupo-profesor.

3.6 - La fase de validación de tales situaciones a nivel de estudiante-equipo. La exploración reveló, como en el caso anterior la necesidad de realizar validaciones a niveles equipo-equipo, equipo-grupo y estudiante-grupo. En estos casos, el profesor fungiría sólo como moderador o facilitador del flujo de la situación.

3.7 - La verificación de la existencia en el desarrollo de tales situaciones, de obstáculos didácticos y de procesos dialécticos. En el caso del desarrollo de esta exploración tales componentes se dieron en los procesos de medición y en la construcción de conocimiento por medios empíricos con su destrucción posterior por medio de una actividad que sirvió de contraejemplo.

4- Respecto a las fases de institucionalización correspondientes a las distintas actividades se tiene lo siguiente:

4.1 - La institucionalización correspondiente a la primera actividad estaba auto-contenida en el diseño de la misma actividad didáctica (Numeral I de la misma). Sin embargo se piensa que en este respecto el instrumento didáctico está mal diseñado porque da la impresión de que la fase de institucionalización es realizada por el alumno, otro defecto adicional del diseño consiste en que "institucionaliza" las funciones como conjuntos de pares ordenados, formalización que quizá sobrepase el nivel requerido en secundaria para esta noción.

4.2 – Para la actividad didáctica 2, como se menciona en el capítulo precedente, se consideró en el diseño que no debía realizarse la fase de institucionalización porque la actividad estaba sustantivamente relacionada con la actividad siguiente, sin embargo puede conjeturarse que esto constituye un defecto del diseño del instrumento porque en un cierto sentido no se concretiza la construcción del conocimiento que será destruido en la siguiente actividad.

4.3 – La institucionalización correspondiente a la actividad didáctica 3 consistió en una intervención pedagógica donde se señalaba que los métodos empíricos son viables para construir conocimiento pero no para validarlo, y que para esto último se requería de un método de validación que era precisamente el que el profesor del grupo había empleado para demostrar que los teoremas 1 y 2 eran verdaderos. Se piensa, sin embargo, que estas cuestiones requieren de mayor estudio antes de ser incorporadas en el diseño de una situación didáctica asociada a la construcción de la noción de seno de un ángulo agudo.

4.4 – La institucionalización correspondiente a la actividad 4 consistió en una intervención del profesor donde se hace ver a los estudiantes que tanto en la actividad 1 como en la 4, lo que realmente se ha hecho es asociar una razón a un ángulo, y que esto no es "visible" en la actividad 1 porque el diámetro del TTA era unitario.

5- La exploración reveló elementos del diseño que necesitaban ser reformulados mismos que antes se han presentado en las observaciones correspondientes a cada actividad, mostró otros que podrían ser incorporados y sugirió algunas maneras que podrían emplearse para mejorar los distintos componentes.

6- La exploración reveló que para el desarrollo en el aula, de un diseño formal de una situación didáctica de Brousseau tal como la aquí explorada, se estima que se requieren por lo menos 12 horas.

Considerando la riqueza de los temas correlacionados con las nociones exploradas, se cree que bien vale la pena invertir tal tiempo en el tratamiento de los mismos.

7- Debido quizá a ciertas cualidades (o defectos) del diseño del instrumento y de sus formas de recopilar información, los resultados parecían indicar que la construcción de dichas nociones se había logrado en forma relativamente satisfactoria. Las nociones de seno de un ángulo agudo como función y como razón habían sido construidas por los estudiantes casi en forma enteramente a-didáctica.

8- Sin embargo, y contraviniendo los lineamientos teóricos asociados a la evaluación de un proceso de construcción de conocimiento (Se evalúa el proceso y no sólo el producto final), se decidió agregar una sesión experimental adicional, para hacer un examen sorpresa a los estudiantes.

9- Se buscaba que esta prueba proporcionara un elemento de triangulación o corroboración de información, que ayudara a ubicar en una mejor perspectiva lo logrado por los estudiantes.

10- Básicamente la prueba contenía las siguientes preguntas: 1) ¿Qué significa que el seno de un ángulo A, por ejemplo, el seno de 30° sea una razón? Explica tu respuesta y proporciona ejemplos, 2) ¿Qué significa que el seno sea una función? Explica tu respuesta y proporciona ejemplos.

11 - Los resultados arrojados por este instrumento fueron los siguientes:

16 de 26 estudiantes (el 61.54%) entienden el significado de seno de un ángulo como razón.

6 de 26 estudiantes (el 23.07%) entienden el significado de seno de un ángulo como función.

12- Se piensa que el último resultado es probablemente atribuible a:

12.1 – La complejidad cognitiva de este objeto matemático, que se ha evidenciado en diversas investigaciones.

12.2 - El deficiente diseño de la fase de institucionalización correspondiente a la actividad 1. (defectos señalados en el punto 4.1).

12.3 – Probable deficiencia en el diseño de la versión del TTA que se aplicó en el grupo experimental. En esta versión, para enfatizar que se trataba de mediciones entre puntos se eliminó el semicírculo del diseño y sólo se dejaron los puntos correspondientes a 5°, 10°, 15°, etc. Esto pudiera dificultar la percepción de que se están estableciendo correspondencias entre ángulos y longitudes de segmentos.

12.3 – Según el profesor encargado del grupo, co-observador en el desarrollo del experimento este resultado referente a la comprensión del significado del seno de un ángulo agudo como función, puede deberse también a que la comprensión del concepto de función, (que se supone previamente enseñado) no se dio en realidad en su momento oportuno.

13- Finalmente y como resultado de la exploración realizada, se cree que incorporando los ajustes, correcciones, y observaciones pertinentes detectadas en la aplicación de la propuesta, puede realizarse un diseño formal y una aplicación satisfactoria del mismo en una situación didáctica de Brousseau para la construcción de los significados de la noción de seno de un ángulo agudo como función y como razón.

14 – O bien, si se considera a la construcción de conocimiento como un proceso aproximativo bidireccional. Los aportes derivados de esta exploración pueden ser utilizados para el planteamiento de otra nueva exploración.

4.6 Exploraciones o investigaciones asociadas

Finalmente se sugieren o se presentan algunas líneas de trabajo derivadas o sugeridas por el desarrollo de esta exploración:

1) Utilizando el TTA, explorar la construcción del coseno en lugar del seno. Un examen preliminar superficial de este proceso muestra que puede tener ventajas y desventajas con respecto a lo aquí se ha hecho.
2) Utilizando el TTA, explorar la posibilidad de la construcción conjunta del seno y del coseno.
3) Utilizando el TTA, explorar (a nivel de preparatoria) la posibilidad del tratamiento del seno como una función de las longitudes de arco expresadas en radianes.
4) Utilizando el TTA, explorar la posibilidad del tratamiento de las funciones inversas arco seno y arco coseno.
5) Utilizando algún programa de geometría dinámica (Cabrí o Geometer's Sketch Pad) explorar las posibilidades didácticas del TTA[1].
6) Exploración (actualmente en proceso de realización) de extensión del registro de representación semiótica asociado al TTA, a las otras funciones trigonométricas.
7) Exploración (actualmente en proceso de realización) de los llamados "tratamiento" y "conversión" en la teoría de R. Duval, al registro de representación antes citado.

[1] Ver referencias 51 y 52 en la Bibliografía.

BIBLIOGRAFIA
TRIGONOMETRIA

1) ANFOSSI, Agustín (1947). Curso de Trigonometría Rectilínea. México, Editorial Progreso.
2) ALLENDOERFER, C. y Oakley Cletus O. (1971). Introducción Moderna a la Matemática Superior. México, Mc. Graw-Hill.
3) AYRES, Frank (1964). Trigonometry. New York, Schaum Publishing Company.
4) BALDOR, J.A. (1995). Geometría plana y del espacio y Trigonometría. México, Publicaciones Cultural.
5) FLORES, Conrado (1985). Las razones trigonométricas de un ángulo agudo. Módulo 1. México, Editorial Trillas.
6) FUENTE, C. et al (1996). Matemáticas 3. Números para crear. México, Prentice Hall Hispanoamericana.
7) HEINEMAN, E. Richard (1988). Trigonometría plana. México, Mc. Graw-Hill.
8) INNOCENTI, G. (1982). Lecciones de Trigonometría. México, Limusa.
9) KLINGER, Fred (1998) ¿La Trigonometría ?...¡Pero si es muy fácil! México, Alfaomega Grupo Editor.
10) NIELSEN, K. (1966). Modern Trigonometry. New York, Barnes & Noble.
11) NICHOLS, E. D. et al (1991). Álgebra con Trigonometría. México, Cía. Editorial Continental.
12) ROJANO, T. Y Filloy Eugenio (1999). Trigonometría. México, Grupo Editorial Iberoamérica.
13) SHARP, H. (1967). Elementos de Trigonometría plana. La Habana, Cuba. Instituto del Libro.
14) SWOKOWSKY. E. (1977). Fundamentals of Trigonometry. Boston, Prindle, Weber & Schmidt.
15) SALAS, M.S. et al. (1997). Matemáticas 3. Libro del Alumno. Monterrey, Edición especial para el Estado de Sonora, Ediciones del Castillo.
16) SERRALDE, E. et al (1980). Matemáticas 3. Educación Media Básica. México, Compañía Impresora y Editora de Periódicos, Libros y Revistas.
17) VANCE, E. (1962). Trigonometry. Reading, Massachussets. Addison Wesley.

REFERENCIAS TEÓRICAS

18) AUSUBEL, David P. et al. (1991). Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo. México, Editorial Trillas.
19) AABOE, A. (1964). Episodes from the early history of Mathematics. Random House, New Mathematical Library.
20) AEBLI, Hans (1958). Una didáctica fundada en la psicología de Jean Piaget. Argentina, Editorial Kapelusz.
21) BOURBAKI. (1972). Elementos de historia de las matemáticas. Madrid, Alianza Editorial S.A.
22) BOYER, Carl (1968). A history of mathematics. New York, John Wiley and sons Inc.
23) BUNT, Lucas (1988). The historical roots of elementary mathematics. New York, Dover Publications Inc.

24) BROUSSEAU, Guy (1997). Theory of didactical situations in mathematics. Didactique des mathématics, 1970-1990. The Netherlands, Kluwer Academic Publishers.
25) COLL, César (1992). Psicología y currículum. México, Editorial Paidós Mexicana.
26) COURANT, ROBBINS (1980). What is mathematics ? New York, Oxford University Press.
27) CHEVALLARD, Y. et al (1998). "Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje". España, SEP y ICE Universitat de Barcelona.
28) DOLLE, Jean Marie (1993). "Para comprender a Jean Piaget". México, Editorial Trillas.
29) DROZ, Remy y RAHMY, Maryvonne (1984). "Cómo leer a Piaget". México, Fondo de Cultura Económica.
30) EVES, H. (1976). An introduction to the history of mathematics. New York, Holt, Rinehart and Winston.
31) EVES, H. (1972). A survey of Geometry. Boston, Allyn and Bacon.
32) GARTON, A. (1994). Interacción social y desarrollo del lenguaje y la cognición. Barcelona. Ediciones Paidós.
33) HEATH, T. (1956). Euclid. The Thirteen books of The Elements. Vols I,II,III. New York, Dover Publications Inc.
34) NEUGEBAUER, O. (1969). The exact sciences in antiquity. New York. Dover Publications Inc.
35) PARRA, C. y Saiz, I. (1994). Didáctica de Matemáticas. Argentina, Paidós.
36) SAN MARTIN, O. y JIMENEZ, J.R. (1995). Los problemas matemáticos en la escuela. Antología Básica y Antología Complementaria. México. UPN, SEP.
37) SANCHEZ, E. y ZUBIETA G. (Comps), (1993). Lecturas en didáctica de las matemáticas. Escuela Francesa. México D.F. CINVESTAV IPN. Departamento de Matemática Educativa.
38) WENTWORTH, J. y SMITH, D.E. (1979). Geometría plana y del espacio. México. Editorial Porrúa.

ARTICULOS

39) Coll, César (1994). "De qué hablamos cuando hablamos de constructivismo". En Cuadernos de Pedagógía. Barcelona, Núm. 221, enero de 1994. pp. 8-10
40) Farfán, R. M. (1995). Ingeniería Didáctica. Revista Pedagogía. México, Universidad Pedagógica Nacional.
41) Glasersfeld, Ernst von. "Homage to Jean Piaget (1896-1980)". Scientific Research Institute. Hasbrouck Laboratory. University of Massachussets. Amberst, MA 01003 USA.
42) Glasersfeld, Ernst von. (1987). El aprendizaje como una actividad constructiva. Antología del curso. "Problemática e Investigación en Educación Matemática". Responsable: Martha Villalba G. Universidad de Sonora.
43) Jackiw, N. (2001). Conventional topics, unconventional tools: A dynamic geometry case–study. Morelia, Anexo Memorias de la Conferencia Internacional sobre uso de tecnología en la enseñanza de las matemáticas.
44) - Moreno Armella, Luis y Waldegg, Guillermina (1998). "La epistemología constructivista y la didáctica de las ciencias: ¿Coincidencia o complementariedad? Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, IPN. Enseñanza de las ciencias.

45) San Martín, O (1990). Transportador trigonométrico cuadrático. Acapulco, México. Memorias IV Reunión Centroamericana y del Caribe Sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.
46) San Martín, O. (1992). "Sobre la definición de función trigonométrica de un ángulo agudo". Cuernavaca, México. Memorias VI Reunión Centroamericana y del Caribe Sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.
47) San Martín, O. (1993). Elementos para un enfoque didáctico activo de la Trigonometría Elemental. Panamá. Memorias VII Reunión Centroamericana y del Caribe Sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.
48) San Martín, O. (1993). Transportador Trigonométrico Póster. Panamá. Memorias VII Reunión Centroamericana y del Caribe Sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.
49) San Martín, O. (1994). Geometría Inductiva-deductiva. San José, Costa Rica. Memorias VIII Reunión Centroamericana y del Caribe Sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.
50) San Martín, O. (1997). Construcción y clasificación de identidades trigonométricas utilizando recursos y criterio de carácter geométrico. Santa Fe de Bogotá, Colombia. Resúmenes de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.
51) San Martín, O y Soto J.L (2001). Construcción de significado para las razones trigonométricas mediante un aparato virtual diseñado con Cabri. Universidad de Sonora, México. Memorias de la XI Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas.
52) San Martín, O. y Soto J.L. (2001). Elementos para la construcción de significados para las razones trigonométricas utilizando Cabri. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Morelia, Michoacán México. Memorias de la Conferencia Internacional sobre Uso de Tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas.
53) Sierpinska, A y Lerman S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En: A.J. Bishop et al. (eds). International book of Mathematics Education. (pp. 827-876). Dordretch, HL: Kluwer, A.P.

DOCUMENTOS

54) Acuerdo Nacional para la Modernización de la Educación Básica. (1992). México. Periódico "El Imparcial" del 19 de mayo de 1992.
55) Nuevo Plan de Estudios para la educación secundaria – Información General. (1993). México. Periódico "El Imparcial" del 7 de Junio de 1993.

PLANES Y PROGRAMAS DE ESTUDIO

56) Programas para la educación media básica. (1981). México. Secretaría de Educación Pública. Consejo Nacional Técnico de la Educación. Comisión Nacional de los Libros de Texto Gratuitos.
57) Plan y programas de estudio. (1993). Educación Básica Secundaria. México. Secretaría de Educación Pública.

TEXTOS Y LECTURAS DE PROGRAMAS DE ACTUALIZACIÓN DEL MAGISTERIO

58) La enseñanza de las Matemáticas en la escuela secundaria. (1995). Lecturas. Primer nivel. Programa Nacional de Actualización Permanente. Secretaría de Educación Pública.

59) La enseñanza de las Matemáticas en la escuela secundaria. (1995). Guía de estudio. Primer nivel. Programa Nacional de Actualización Permanente. Secretaría de Educación Pública.