TESIS #56

T44

Noviembre de 1988

UNIVERSIDAD DE SONORA

"LA GEOMETRIA EN LA GENESIS Y DESARROLLO DE LA MATEMATICAS"

C. EXACTAS
1ST 5

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE LICENCIADO EN MATEMATICAS

SUSTENTA LA PASANTE:

JOSEFINA CARRION MIRANDA

HERMOSILLO, SONORA., SEPTIEMBRE DE 1988.

I N D I C E

Pág.

I N T R O D U C C I O N

El concepto que el hombre ha tenido de la matemática, como es lógico, ha evolucionado a través de la historia ; desde la concepción y uso de la matemática como una simple herramienta de cálculo que tuvieron los egipcios y babilonios hace cuarenta siglos hasta la concepción actual de un cuerpo estructurado y formalizado de conceptos y proposiciones.

En la evolución de este concepto la geometría ha jugado un papel de primera importancia, pues no sólo es el campo de la matemática que primero se axiomatiza, lo que sucedió hace veintitres siglos en la Grecia Antigua, con Euclides; sino que la concepción moderna de la axiomática formal es también un resultado de trabajos hechos en geometría. Especialmente la intención de probar el famoso V Postulado de la Geometría de Euclides, cosa que durante veinte siglos intentaron un gran número de matemáticos famosos, y que a la postre dió lugar al nacimiento de las Geometrías no Euclideanas, influyó en la modificación del concepto de axioma desde una axiomática material hasta una axiomática formal. Asi mismo el objeto de estudio de la geometría dejó de ser las formas espaciales y las relaciones del mundo material, para pasar a ser las propiedades que permanecen invariantes bajo la acció de un grupo concreto de transformaciones (definición de de Klein en su programa de Erlangen); y el espacio físico aparece ahora sólo como un posible modelo de alguna de las geometrías e incluso no euclideana.

Describir el proceso a través del cual evolucionaron estos conceptos será el objeto de este trabajo, de tal manera que se tocarán los siguientes temas:

-La primera axiomatización de la geometría
(siglo VI al Siglo III a.C).

-Algunos intentos de demostración del V Postulado de Euclides (del siglo III a.C al siglo XVIII).

-El nacimiento de las Geometrías no Euclideanas.
(siglo XIX)

-Influencia de las Geometrías no-Euclideanas en la axiomática formal y la concepción del espacio físico

Conclusiones:

Apéndices.

CAPITULO I

LA PRIMERA AXIOMATIZACION DE LA GEOMETRIA

1.1 PERÍODO DE LA MATEMÁTICA PREHELÉNICA

En esta parte se considerará cómo el conocimiento práctico-empírico de la matemática se transforma en una ciencia sistemática y deductiva basada en definiciones y axiomas.

Indudablemente que fue en la antigua Grecia donde la matemática se convierte por primera vez en una ciencia deductiva.

Las primeras ideas geométricas se remontan a épocas muy antiguas y las formulaciones de las mismas se atribuyen a las culturas de Babilonia y Egipto. La historia nos señala los principios de la geometría en las prácticas primitivas de ingeniería y agricultura; los registros más antiguos en el campo de la geometría son unas tablas inscritas de arcilla cocidas enterradas en Mesopotamia, que datan de los tiempos sumerios de aproximadamente 3000 años antes de nuestra era, entre ellas se encuentran la tablilla Plimpton 322 que da muestras que en Mesopotamia se conocía ya relaciones entre los catetos y la hipotenusa, semejante a la formulación del teorema de Pitágoras.
Así mismo las tablas cuneiformes babilónicas de períodos posteriores donde vemos que la geometría antigua babilónica está íntimamente relacionada con la medición práctica

Los babilonios de 2000 a 1600 años antes de nuestra era ya estaban familiarizados con las reglas generales para la solución de problemas sobre perímetros, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos; llegaron a una generalización implícita ya que utilizaban el mismo método de solución para problemas semejantes. De igual manera se desarrolló la geometría en Egipto hacia el año 1850 a 1650 antes de nuestra era. Veintiseis de los 110 problemas de los papiros de Moscú y Rhind son geométricos involucrando áreas y volúmenes.

Es interesante observar la naturaleza empírica de la matemática prehelénica que sin haber llegado a la demostración lógica, y la poca importancia que dieron a la diferencia entre verdad exacta y aproximada, atacaron con éxito una extensa diversidad de problemas.

1.2 EL NACIMIENTO DE LA DEDUCCIÓN

El período de desarrollo de la geometría por los científicos griegos comienza a partir del siglo VII antes de nuestra era. En el siglo VI y V se obtuvieron muchos resultados geométricos fundamentales, época en que se consolidó el concepto de demostración de teoremas. Anterior a la fecha en que aparecieron los Elementos de Euclides (siglo III a.C.), sólo han llegado hasta nosotros dos obras completas de matemáticas, escritas por un contemporáneo mayor que Euclides, Autolico de Pitane; fuera de esto, la matemática griega pre-Euclideana debe ser reconstruida a partir de fragmentos. La fuente más antigua de información es la llamada Sumario de Eudemo de Proclo (410-485 d.c.). Un extracto de esta obra perdida aparece en el comentario de Proclo el primer libro de Euclides en el siglo V d.c., se trata del famoso Catálogo de Geómetras de Proclo; en él se considera a Tales de Mileto fundador de la matemática griega, es decir, de la geometría; a él se le atribuyen los siguientes resultados geométricos:

1. Un diámetro bisecta a un círculo .
2. Los ángulos en la base de un triángulo isosceles son iguales.
3. Los ángulos opuestos por el vértice, en dos líneas que se cortan, son iguales.
4. Dos triángulos son congruentes si se tiene un lado y dos ángulos iguales.
5. El ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto (esto era ya sabido por los babilonios unos 1400

años antes).

Lo importante de Tales es que usaba razonamientos lógicos para hacer ver que eran ciertos estos resultados y no lo hacía por medio de la intuición, la experimentación y la comprobación repetida, como hasta esas épocas se había hecho. Tales de Mileto adquirió sus conocimientos en Egipto en el siglo VI a.c., y al regresar a Grecia aplicó a la geometría los procedimientos deductivos de la filosofía griega. Su mérito no es tanto por el contenido geométrico sino más bien por el apoyo de cierto razonamiento lógico en lugar de intuición y experimento.

Pitágoras quien también vivió en el siglo sexto a.C. continua con el cambio iniciado por Tales en la matemática griega y en particular en el ejercicio de la geometría, permitiéndole formar parte de los ciudadanos libres, es decir, el conocimiento matemático de carácter práctico-empírico se convirtió en teórico y adquirió un carácter intelectual, esto es, la matemática se transforma en una ciencia deductiva. Esta matemática trata de encontrar los principios "independientemente de consideraciones concretas, por medio del intelecto".

Por los comentarios de Proclo sabemos que mucho antes de Euclides se habían escrito obras matemáticas sistemáticas semejantes a los Elementos. El primer matemático que construyó tal sistema fué Hipócrates de Quíos en el siglo quinto a.c., quien se dedicó a la enseñanza de la geometría, redactó el libro Elementos en donde aparece la sistematización racional de esta disciplina; otra de sus obras digna de mencionarse es la Quadratura Lunularum; luego sabemos de León en la primera mitad del siglo cuarto y de Teodocio de Magnesia en la segunda mitad del mismo.

Investigaciones recientes sobre historia de la matemática, independientemente del informe sobre Hipócrates, han llegado a la conclusión de que algún texto matemático sistemático debió existir en el siglo quinto a.c. En este renglón debemos mencionar los trabajos de O. Becker publicado en 1936, quien observó que los últimos dieciseis teoremas (del 21 al 36) del libro IX del Euclides así como el trigésimo séptimo apéndice del libro X, relacionado con los anteriores, constituyen un apéndice a la obra de Euclides, en forma por demás informal, a los elementos, ya sea por el autor mismo o por un escriba antiguo. Desde este descubrimiento, a este conjunto de diecisiete proposiciones se les llama "Las Enseñanzas Pitagóricas Sobre el Par y el Impar" mostrando también que estos teoremas deben ser considerados las más remotas μαθημα griegas conocidas hasta el momento ya que se originaron en la primera mitad del siglo quinto a.c.

Asimismo B.L. Van Der Waerden en su trabajo publicado en 1947 logró probar que las primeras treintaiseis porposiciones del libro VII de Euclides habían sido compiladas en un texto matemático de los pitagóricos antes del año 400 a.c., es decir, en el siglo quinto a.c. y que Euclides las tomó sin cambio esencial.

En un principio en la geometría griega empírica-ilustrativa las demostraciones eran simples "visualizaciones" método llamado ιστοριη, es decir, como ciencia inseparable de la visión, la verificación o refutación de cualquier afirmación consistía, en hacer concretamente visibles los hechos. Los pitagóricos consideraban a la geometría como ιστοριη, es decir, como ciencia inseparable de la visión.

El método empírico de superposición en las demostraciones debió haber sido utilizado en épocas anteriores a Euclides; posiblemente no es casualidad que de los cinco teoremas atribuidos a Tales, cuatro se puedan probar por este método y el quinto puede ser probado indirectamente por el mismo método. Es un error considerar como rasgo característico de la matemática griega su caracter ilustrativo, pues ya en el siglo quinto a.c., Hipócrates de Quíos en su Quadratura Lunularum, probó teóricamente desigualdades que podrían haberse hecho obvias mediante ilustraciones, es decir, ya no confiaba en la evidencia de la vizualización, y con esto la matemática griega toma un carácter anti-ilustrativo y anti-empírico, por ejemplo, en las demostraciones de los teoremas de los números pares e impares conservadas por Euclides, donde los números son representados por secciones de recta, ocultando además la diferencia entre números pares e impares, la cual anteriormente era fácil hacer notar mediante la representación de guijarros para contar

La tendencia anti-ilustrativa , al menos en un principio, iba más lejos de apoyar la certeza mediante la ilustración con la certeza de la teoría; pues se privaba aún a los teoremas obviamente ilustrativos de su carácter ilustrativo y se verificaba si son correctos con teoría pura sin usar métodos ilustrativos. Tal vez, una de las razones, era lograr un mayor grado de generalidad.

1.3 MÉTODO DE DEMOSTRACIÓN INDIRECTA

En la matemática pitagórica más antigua, como los teoremas sobre números pares e impares, y las primeras treintaiseis proposiciones del libro VII de los Elementos, encontramos la forma de demostración indirecta. Seis de los diecisiete teoremas de la teoría de los números pares e impares se demuestran por el método indirecto; igualmente este método se usa en quince de los treintaiseis teoremas del libro VII de los Elementos. Esto hace sospechar que fue debido al uso de la demostración indirecta que la matemática se convirtió en una ciencia sistemática y deductiva.

En este método el teorema no se prueba sino que su contrario se refuta; es decir, se prueba que la negación de lo que el teorema afirma es falsa. Por lo tanto, para demostrar indirectamente alguna afirmación, primero se formula su negación y se procede a mostrar lo absurdo de tal negación.

Al tratar de encontrar las razones por las cuales los griegos sustituyeron en la matemática la demostración de simple visualización por la demostración indirecta, no hay explicación de cómo hubieran podido lograr construir la forma de demostración indirecta sobre la sola base de su conocimiento de origen empírico-práctico y principalmente para uso práctico. Se considera que la forma de demostración indirecta, no fue creada por matemáticos ni fueron ellos los primeros en utlizarla; los pitagóricos del sur de Italia la tomaron ya hecha de los filósofos Eleáticos, aunque de acuerdo al conocimiento actual, este método fue utilizado primero por Parménides de Elea. Entonces fueron Parménides y los Eleáticos quienes hicieron de la ausencia de contradicción el criterio para la validez de una afirmación; y es por esto, que la creación de la ciencia deductiva matemática puede atribuirse a la influencia de la filosofía Eleática.

Si lo anterior es aceptado, es claro comprender la tendencia "anti-ilustrativa" y "anti-empírica" de la matemática griega. De lo contrario, se piensa que los primeros matemáticos griegos debían estar tranquilos al encontrar que lo que probaban lógicamente podía, verificarse mediante la práctica, por ilustración. Sin embargo, despreçiaron el empirismo y las demostraciones por visualización.

Los filósofos Eleáticos usaban el método de demostración indirecta sólo para probar aquellos teoremas opuestos a la experiencia del sentido común y a la ilustración. (Zenón, por ejemplo, probó indirectamente la imposibilidad del" movimiento" el cual es real como lo muestran la experiencia y la ilustración). Es por esto que los filósofos Eleáticos estaban obligados a oponer experiencia, práctica e ilustración, con el propósito de mantener la validez de sus demostraciones indirectas; y aunque esta actitud fue tomada junto a la forma de demostración indirecta por los primeros matemáticos griegos, la tendencia anti-ilustrativa en matemáticas no era, tan indispensable como en la filosofía Eleática.

Reidemeister nos dice "la doctrina de los pitagóricos culminó con la Demostración, relacionada con los números pares e impares, que prueba que la diagonal D de un cuadrado de lado S no pueden ser medidos con la misma unidad E, es decir, que D y S son inconmensurables". Este hecho no puede ser ilustrado o experimentado por los sentidos; tal demostración (Apéndice 27, Libro X de los Elementos) es una demostración indirecta. Como vemos la aplicación de esta forma hizo posible la demostración de un hecho matemático -la existencia de los inconmensurables- el cual hubiera permanecido desconocido para ellos sin esta manera de pensamiento.

Los pitagóricos tomaron de los Eleáticos la forma de demostración indirecta con su actitud anti-ilustrativa, porque ampliaba sus perspectivas y éste es el camino que pudo haber seguido la matemática para convertirse en una ciencia deductiva.

Para los pitagóricos fue fácil aplicar los principios eleáticos para los números no así en geometría; primero, porque las figuras geométricas eran mucho menos abstractas que los números (el "triángulo", por ejemplo, es más concreto que el número impar"); segundo, porque era más difícil eliminar el método ilustrativo de las demostraciones geométricas que de las aritméticas. Euclides sólo hizo difuso el carácter ilustrativo de las demostraciones geométricas.

Los Eleáticos descubrieron estas dificultades; Zenón de Elea, por ejemplo, podía ennumerar varios argumentos para demostrar que el concepto de "espacio" es contradictorio, uno de ellos era su infinita divisibilidad. Ante esto, los eleáticos no retrocedieron, nada que sea contradictorio, puede ser parte de la realidad (como "movimiento", "devenir", "tiempo"). En otras palabras, los eleáticos negaban la existencia del espacio, y por lo tanto, la existencia de la geometría. Entonces el espacio pertenece a la categoría de conceptos; sólo se percibe por los sentidos como el movimiento, ambos son producto de nuestras sensaciones.

1.4 EUCLIDES Y LOS ELEMENTOS

Las dificultades encontradas para aplicar los principios eleáticos a la geometría pueden ser ejemplificados por la definición euclideana de "punto".

"Un punto es aquello que no tiene partes". Esta es la primera definición de los Elementos; esto recuerda a

Zenón de Elea quien hablaba de "magnitudes sin partes"; tanto él como Proclo comparan el concepto del "punto" geométrico con el concepto temporal de "ahora".

Ante esto había dos alternativas. Se reconocía la existencia del espacio como lo experimentaban los sentidos negando la existencia de "punto"; o bien se adherían estrictamente al principio de consistencia negando la existencia del espacio, pero en este caso no podía haber ciencia del espacio "geometría". Es por esto, que los pitagóricos no encontraron para la geometría fundamentaciones simples y no contradictorias sobre las cuales construir la teoría de manera no contradictoria. A menudo se les reprochó de haber creado una base falsa para la geometría con su definición de punto y línea. Es pertinente citar a K. Reidemeister: "El punto y la línea no se dan ni para la observación ni para la reflexión. Algunos conceptos geométricos son evidentes; también es evidente que deseemos incluirlos en un sistema no-contradictorio. Sin embargo los comienzos de los cuales la teoría planeada se piensa deducir sólo se busca como una completación no-contradictoria de aquello que es evidente".

Pero ¿Cómo se llegó, en el transcurso del desarrollo histórico, a la conclusión de que la matemática como un todo debe descansar sobre afirmaciones no demostradas?

En este sentido debemos considerar que Euclides solo fue un compilador científico, no fue un genio creador, sino un sistematizador, probablemente una talentosa mente didáctica.

Euclides tuvo muchos predecesores, las partes más importantes y más difíciles de su obra provienen de otros autores, principalmente de Tetetes (libros X y II) y de Eudocio (Libro VIII y X) y prueba de ello es que estas partes están escritas de una manera muy precisa no así otras partes donde hay errores y el enunciado es confuso. En el Libro I, las definiciones no siempre coinciden con la terminología usada por Euclides en los teoremas y demostraciones; así también el axioma 7 (axioma de congruencia) porpone un método que Euclides se empeña en evitar siempre que le es posible.

Otra observación pertinente en la obra de Euclides y en la matemática griega en general es la importancia que da a la geometría, todo aquello que no es geometría se relega a segundo término. Esta geometrización debió haber sido necesaria por el reconocimiento de las cantidades irracionales.

En los tiempos de Euclides la geometría había alcanzado un desarrollo considerable; lo que propició, que se diera una labor de sistematización del conocimiento plasmado en "Los Elementos" de Euclides; en donde los métodos deductivos de la escuela eleática, los procedimientos lógicos de Aristóteles y el idealismo platónico se fusionaron y formaron la noción del sistema axiomático.

Euclides parte de ciertos objetos indefinidos como "punto", "línea","plano" a los cuales llama nociones comunes, proposiciones que se aceptan sin demostración las que divide en dos clases: "axiomas" y "postulados".

Los axiomas son principios indemostrables de carácter universal mientras que los postulados son de carácter particular (esto es geométrico).

Actualmente no hacemos diferencia entre "axioma" y "postulado".

Para obtener nuevas proposiciones, llamadas "teoremas" Euclides aplicaba las reglas de inferencia Aristotélicas.

Los Axiomas y Postulados de Euclides son los Siguientes:

Axiomas:

1.- Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí.

2.- Si a cosas iguales se les agrega cosas iguales, las sumas son iguales.

3.- Si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales.

4.- Cosas que se pueden superponer una a la otra son iguales entre sí.

5.- El todo es mayor que cualquiera de sus partes.

Postulados:

I. Desde un punto a cualquier otro, siempre se puede trazar una recta.

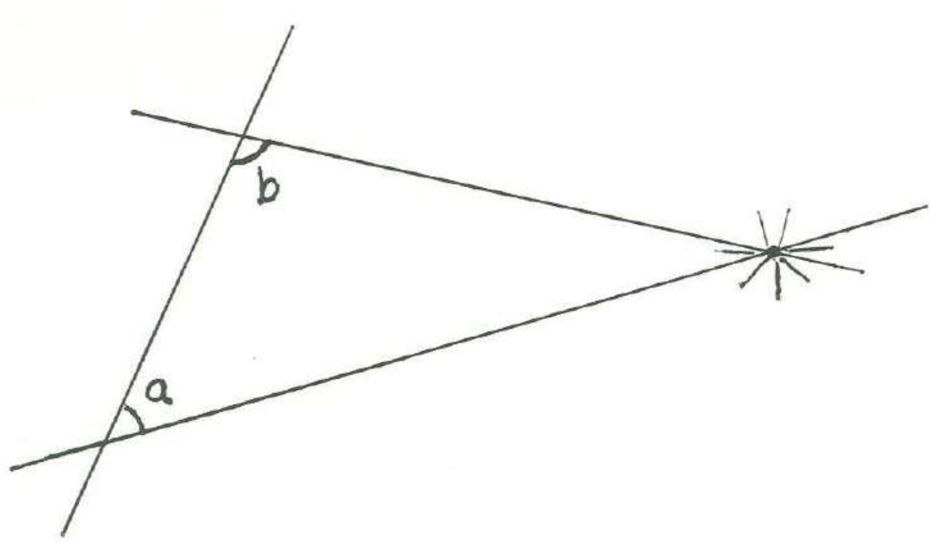
II. Toda recta limitada puede prolongarse indefinidamente en una misma dirección.

III. Con cualquier centro y cualquier radio se puede trazar circunferencia.

IV. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

V. Si una recta al cortar a otras dos rectas forma de un mismo lado ángulos internos cuya suma es menor que dos rectos entonces al prolongar indefinidamente estas dos rectas, ellas se cortan del lado en que están los ángulos mencionados.

Para las definiciones y proposiciones, consultar apéndice 1.



$$\sphericalangle a + \sphericalangle b < 180^\circ$$

1.5 CAUSAS DE LA FORMALIZACION DE LA MATEMATICA

¿Por qué los griegos no se conformaban con el conocimiento práctico-empírico, y trataban de encontrar para sus teoremas demostraciones teóricas que tuvieran validez general?

¿Por qué creyeron más en lo que ellos podían probar por deducción lógica o refutar que lo que la práctica mostraba como correcto o incorrecto?

Al tratar de responder a las interrogantes anteriores, se encuentra que hay razones de carácter matemático y extramatemático que explican la tendencia a la formalización de la matemática griega.

Entre las causas matemáticas se encuentran el surgimiento de las inconmensurables y las paradojas de Zenón; estos problemas hicieron crisis dentro de la matemática en su época, porque la teoría, "todas las cosas son números" si en algún lugar debería ser válida era dentro de la matemática misma y es allí donde no tardó en entrar en contradicción con hechos simples.

Los pitagóricos a mediados del siglo quinto a.C., consideraban que si tenemos dos magnitudes lineales A y B, siempre podemos encontrar una magnitud menor, C que "cabe" un número entero de veces en A y en B, o sea que A y B son conmensurables; pero pronto se dieron cuenta que esto no siempre es cierto, es decir, que existen magnitudes no conmensurables y que aparecen en las figuras más simples como el lado de cualquier cuadrado y su diagonal. El descubrimiento de los inconmensurables causó un enorme impacto entre los pitagóricos, pues destruía de un solo golpe toda su filosofía . Señalan las leyendas que Hippasus fue expulsado de la secta y castigado por los dioses (murió en un naufragio) por haber divulgado el terrible descubrimiento a pesar de que todos los miembros de la secta habían jurado no divulgarlo.

Esta crisis no duró mucho. En las demostraciones de Hipócrates de Quíos, claramente se observa que, la teoría de las proposiciones había sido adaptada al tratamiento de los inconmensurables.

Otra de las causas matemáticas, se encuentra en la crítica de las ideas que ligaban a la Aritmética con la geometría, a través del estudio de la medición y del movimiento, y a este estudio pertenecen las paradojas de Zenón; las cuales según Tannery, son formidables construcciones lógicas, ya que no intentaban negar la existencia del movimiento, sino que quería probar que el moviemiento era imposible, si el espacio se concebía como una unión de puntos, que tuvieran magnitud distinta de cero. Zenón se oponía así a los ataques de los pitagóricos quienes concebían el punto como una "unidad que ocupaba cierta posición en el espacio". Tannery interpreta esta definición de los pitagóricos como que un cuerpo es la unión de puntos, de la misma manera que un número es la suma (unión) de unidades. La posición de Zenón a este respecto es la de que un punto no es una unidad, un 1, sino algo "sin largo, ancho y alto".

Las paradojas de Zenón suscitaron una gran conmoción entre los griegos, y durante mucho tiempo, al tratar de desentrañar lo que había detrás de esas "falacias" impulsó el desarrollo del estudio de modelos aritméticos del tiempo y del espacio que hicieron posible una descripción adecuada del movimiento.

Tanto las paradojas de Zenón como el descubrimiento de los inconmensurables hicieron que la matemática griega volviera sus ojos hacia terrenos más sólidos que los que la aritmética ofrecía; y es así como la geometría que estaba basada en la aceptación de principios que son "evidentes", cuyos elementos "nos entran por los ojos", era el terreno seguro sobre el cual edificar una gran teoría. En la que el armazón de la lógica impondría sus virtudes y sus defectos.

Entre las razones de carácter extramatemático se encuentran las de orden sociológico y las de orden intercultural.

En la estructura de la sociedad griega a la clase poderosa no sólo se le permitía dedicarse al cultivo del arte, la política y la ciencia, sino que las labores relacionadas con el comercio, en sus aspectos prácticos, eran vistos con desprecio y dejados para las otras clases sociales; y así a los aspectos de la aritmética relacionados con los cálculos prácticos le llamaban logística, propia de los esclavos; y a estas mismas ideas tratadas desde el punto de vista teórico era llamada aritmética y su conocimiento ennoblecía a los hombres libres.

Es indudable que el desarrollo de la cultura influye en cada uno de sus elementos. Los griegos tenían dos peculiaridades que los distinguía de los egipcios y los babilonios . La primera es que se inclinaban a construir grandes teorías a partir de las pocas evidencias que sus métodos de observación directa les daban. Esta inmediatez, aparentemente una debilidad, resulta ser su máxima fuerza. Los pitagóricos por ejemplo, trataron de englobar en una sola doctrina todos sus conocimientos, "todas las cosas son números"; y segundo, así como los griegos eran dados a construir grandes teorías, basados en poca información; también lo eran a tratar de comprobar, por todos los medios que tuvieran al alcance, si tales teorías se ajustaban a la realidad. Esto los llevó a descubrir muy pronto a los inconmensurables.

Según A.N. Kolmogorov, el desarrollo de la matemática en Grecia tomó una dirección esencialmente diferente de la del Este. En poco tiempo la matemática griega alcanzó un estado completamente nuevo en la evolución de la lógica. Se exigía demostraciones matemáticas perfectas; se hicieron los primeros intentos para construir sistemáticamente la teoría de la matemática. Este cambio debe atribuirse al avanzado desarrollo socio-político del Estado Griego y a su vida cultural. Esto, a su vez, llevó a un alto grado de desarrollo a la dialéctica, arte de la discusión, donde el objetivo de cada uno de los adversarios es llevar al otro a la aceptación de su tesis. El nacimiento del pensamiento filosófico, independientemente de la religión, hizo surgir la necesidad de explicar los fenómenos naturales de manera racional, lo cual a su vez hizo que la matemática se enfrentara a nuevas tareas.

Van Der Waerden considera que los griegos entraron en relación con las prescripciones matemáticas de los orientales de diferente origen y los conocimientos matemáticos siempre podían reconciliarse, por ejemplo, los babilónicos usaban la fórmula $3r^2$ para calcular el área del círculo, mientras que los egipcios usaban la fórmula $(\frac{8}{9} x \; 2r)^2$, ante situaciones semejantes los griegos se vieron obligados a decidir cuáles de ellas eran más correctas. De esta manera, los griegos fueron llegando, gradualmente, a la idea de deducción exacta, de demostración matemática.

En cambio K. V. Fritz, compara el desarrollo de la matemática deductiva y su fundamentación sobre definiciones y axiomas con el nacimiento de la lógica aritotélica ; la cual se desarrollo a partir del arte de la discusión. A afirma algo que B rechaza; entonces A, trata de encontrar premisas que B juzgue correctas y acepte; finalmente, A muestra que su afirmación original, la cual fue rechazada por B al inicio, es implicada lógica y necesariamente por las premisas aceptadas por B como verdaderas. Esto es, precisamente, lo que llamamos demostración.

Este patrón, en general, es aplicable a la matemática euclideana. Las tesis "complicadas" de Euclides pueden reducirse, vía la demostración, a tesis "simples", es decir, a definiciones postulados o axiomas. La matemática es una ciencia deductiva porque deduce toda afirmación (todas sus tesis) de tales premisas; esto es, porque reduce toda afirmación a las premisas aceptadas. En la discusión, se observa que sólo después, cuando uno de los contrincantes trata de probar sus afirmaciones, los adversarios hacen conciencia de sus premisas lógicas. Esto debe haber sucedido con la mayoría de los teoremas de la matemática euclideana. Muchos de ellos debieron ser conocidos, por medio de la práctica, por los pueblos del Este, aunque ellos no los pusieran en la forma de teoremas, hasta que los griegos empezaron a buscar tesis "simples" de las cuales deducir las más "complicadas". A pesar que la matemática como sistema completo es una ciencia sistemática y deductiva, en sus orígenes se trató de conocimiento inductivo o suposiciones basadas en la práctica o en intentos previos.

Ninguna de las tres explicaciones anteriores está sustentada por datos históricos concretos y, por lo tanto, ninguna puede rebasar el nivel de mera posibilidad.

CAPITULO II

ALGUNOS INTENTOS DE DEMOSTRACION DEL V POSTULADO DE EUCLIDES

II.1 ALGUNAS FALLAS DE LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES.

No cabe duda que la obra de Euclides, "Los Elementos", es la mejor recopilación de los resultados geométricos obtenidos por sus predecesores ordenados lógicamente, partiendo de un pequeño grupo de suposiciones iniciales y el más antiguo intento del método axiomático, dominando la enseñanza de la geometría por más de dos mil años; ha sido el prototipo del método matemático moderno. Sin embargo, si consideramos la exposición de los "elementos", desde el punto de vista de la matemática actual, habrá que reconocer que es insatisfactoria en varios aspectos; por ejemplo, en las construcciones axiomáticas modernas, el punto y la recta, se introducen como elementos que satisfacen ciertos axiomas, es decir, se definen por sus propiedades. (Axiomas de Hilbert 1862-1943). (Ver Apéndice No. 2). Por otra parte, en el axioma 4 la idea de superposición lleva implícita la idea de movimiento, y precisamente, la manera de llevar una figura sobre otra, para decidir su igualdad, es una de las características esenciales de cada geometría y que es la base de la definición de la geometría según Klein (1849-1925).

En la demostración del teorema 21 del Libro I, Euclides emplea implícitamente lo que más tarde se conoció como el axioma de Pasch (siglo XIX).

"Sean A, B, C tres puntos no colineales y α una recta (en el plano determinado por estos puntos) que no pasa por ninguno de estos puntos.

Entonces, si α corta al segmento AB también cortará al segmento AC ó al segmento BC".

Sin garantizar su existencia Euclides acepta los puntos de intersección; en el V postulado se garantiza que, bajo ciertas condiciones, dos rectas se cortan, así como en construcciones geométricas con rectas y círculos. Este problema puede resolverse con el axioma de continuidad, que en la forma dada por Dedekind (Siglo XIX), se enuncia: "Si los puntos de una recta están divididos en dos clases A y B de manera que todos los de A estén a la izquierda de cada uno de los de B entonces existe uno y sólo un punto que separa a ambas clases, esto es, que está después de todos los puntos de A y que precede a todos los de B".

No fue necesario esperar a Dedekind para tener una primera versión de continuidad; ya que Arquímides lo había formulado en su postulado:

Postulado de continuidad de Arquímides. "Dados dos segmentos rectilíneos siempre existe un múltiplo finito de uno de ellos, que es mayor que el otro". Este postulado puede demostrarse como consecuencia del postulado de Dedekind aunque haya sido enunciado antes que el axioma de Dedekind. Los postulados no suministran ningún dato para fundamentar conceptos como "dos puntos se encuentran a un lado con respecto de una recta", "un punto dado de una recta se encuentra entre otros dos de ella", "una recta de un plano divide a éste en dos regiones, "el punto se encuentra dentro de un polígono", etc.esto obliga a recurrir a la intuición geométrica, a la hora de utilizarlos en las demostraciones.

Con todos los defectos de la obra, Euclides tiene un mérito extraordinario por haber construido una ciencia deductiva a partir de conocimientos dispersos y empíricos en su mayoría. Además el hecho de señalar como postulado el de las paralelas que dió origen a tantos estudios y discusiones durante veinte siglos; demuestran una genial intuición acerca de uno de los puntos claves del pensamiento geométrico.

Desde la aparición de esta obra, hubo opiniones de los geómetras griegos en el sentido de que el V Postulado (postulado de las paralelas) le falta concisión y comprensibilidad, es decir, no es tan evidente como para aceptarlo sin demostración.

Es probable que el mismo Euclides haya notado ya esta diferencia, pues evitó el uso de este postulado mientras pudo hacerlo, no lo utiliza en la demostración de las 28 primeras proposiciones del Libro I, lo aplica por primera vez para demostrar la proposición 29 del Libro I. "Una recta que corta a dos paralelas forma con ellas ángulos alternos iguales, un ángulo externo igual al interno no adyacente del mismo lado de la transversal y los ángulos internos del mismo lado son suplementarios"; tal vez esta actitud de Euclides justifique la frase de que: Euclides fue el primer geómetra no euclideano, o bien, la geometría no euclideana nació negando su paternidad.

II.2 Intentos de Salvación de las Fallas.

Los comentaristas de la obra de Euclides, hicieron intentos por salvar lo que consideraban una falla en el sistema construido por él, especialmente en tres direcciones:

1.- Sustituir la definición de rectas paralelas dada por Euclides cambiando su forma gramatical negativa por una afirmación o por alguna otra; pues según Euclides, las rectas paralelas son aquellas que "no se encuentran por más que se prolonguen ". Con esta definición deja abierta la posibilidad de que existan rectas asintóticas, es decir, rectas que, como ocurre con la hipérbola y sus asíntotas, nunca se encuentran pero que, sin embargo, no se conservan equidistantes. Esta observación afloró repetidas veces.

2.- Reemplazar el V Postulado por otro más simple ó más acorde a su concepción de postulado.

3.- Demostrando como una proposición, partiendo exclusivamente de los restantes axiomas y postulados.

Las dudas entonces eran sobre el carácter de postulado, no sobre su validez, convencerse los geómetras de su validez absoluta fue labor de más de veinte siglos, culminando, como se verá en el próximo Capítulo, con el descubrimiento de las llamdas "Geometrías No-Euclideanas".

Los intentos por reducir este postulado como un teorema a partir de los 9 restantes axiomas y postulados dió como resultado otras formas equivalentes a él, algunas de las cuales presuponen la infinitud de la recta (rectas no acotadas), condición utilizada por Euclides (Prop. I-16), que se considera implícita en el postulado II de los Elementos.

Para demostrar la equivalencia del V Postulado de Euclides y una alternativa, se debe mostrar, primero, que la alternativa se deduce como un teorema de las suposiçiones de Euclides; y por otro lado, que el V Postulado se obtiene como un teorema del sistema de suposiciones de Euclides donde el postulado de las paralelas se ha sustituido por la alternativa considerada.

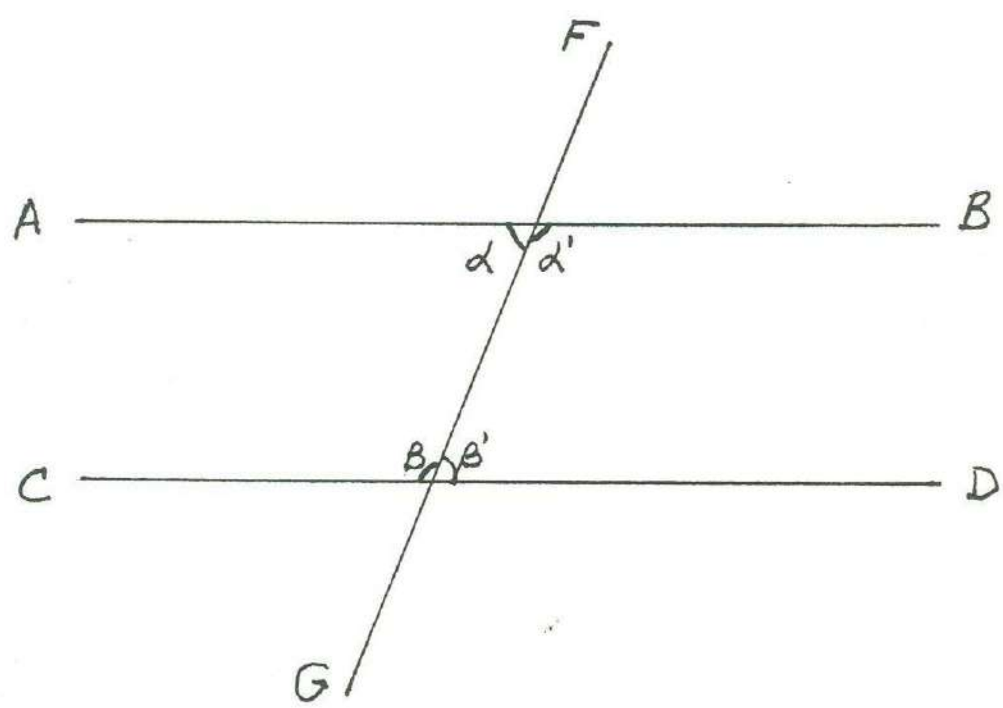
II.3 Los Intentos de Demostración Entre los Griegos.

En sus comentarios al primer Libro de Euclides, Proclo (410-485 d.C.) menciona las primeras tentativas por resolver el problema presentado por el V Postulado, entre ellas se encuentran:

1.- "Existe un par de rectas coplanares donde todos los puntos de una de ellas se encuentran a la misma distancia de la otra (equidistantes)", esta forma se debe a Posidonio (Siglo I a.C.), es decir, llamó paralelas a dos líneas rectas coplanares y equidistantes. Sin embargo, esta definición y la euclideana corresponden a dos hechos que pueden verse separadamente. Gemino considera esto, como lo más paradógico de toda la geometría y menciona al respecto los ejemplos de la hipérbola y la concoide y de su posición con las respectivas asíntotas, para mostrar que podía haber líneas paralelas en el sentido euclideano, esto es, líneas que prolongadas hasta el infinito no se cortan, pero no paralelas en el sentido de Posidonio, esto es, no equidistantes.

Esta equivalencia es muy parecida a la dada por C. Clavius (1537-1612), la cual a su vez tiene muchos puntos de contacto con la de Nasir-Eddin (1202-1274).

Tolomeo (Siglo II d.C.) por los comentarios de Proclo se conoce que Tolomeo intenta resolver el problema tratando de demostrar la Prop. I.29 sin usar el V Postulado y a partir de él obtener el postulado de las paralelas. Para ello, considera dos líneas paralelas AB, CD y una transversal a ellas FG siguiente figura



Sean α , β los dos ángulos interiores a la izquierda de FG y α', β', los dos ángulos interiores a la derecha de FG.

Considerando que $\alpha + \beta$ puede ser mayor, igual o menor que dos ángulos rectos y suponiendo que si uno de estos casos se cumple para un par de paralelas (por ejemplo: $\alpha + \beta$ mayor que dos ángulos rectos) este caso debe cumplirse para otro par cualquiera.

Como las rectas FB y GD son paralelas entre sí, como lo son también las del otro lado, FA y GC, así:

Si $\alpha + \beta > 2$ ángulos rectos, se sigue que:

$\alpha' + \beta' > 2$ ángulos rectos

y entonces $\alpha + \beta + \alpha' + \beta' > 4$ ángulos rectos

Pero esto es imposible, pues la suma de los 4 ángulos es igual a 4 ángulos rectos.

En forma similar se puede argumentar que la suma de los ángulos interiores de un lado no pueden ser menor que dos rectos. Por lo tanto $\alpha + \beta$ debe ser igual a 2 ángulos rectos. De este resultado se puede obtener el Postulado de Euclides. Proclo señala la existencia de una falacia en el razonamiento anterior, pues Tolomeo supone que a través de un punto se puede dibujar sólo una recta paralela a otra dada y esto es equivalente a considerar el V Postulado. (Esta suposición la hace Tolomeo al considerar que FA y FB son una misma paralela a CD).

Proclo después de criticar el razonamiento de Tolomeo, intenta llegar a la misma meta (la demostración del V Postulado), por otro camino. Su demostración descansa sobre la siguiente proposición, que él considera evidente y la cual atribuye a Aristóteles: "La distancia entre dos puntos situados sobre dos rectas que se cortan puede hacerse tan grande como se quiera, prolongando suficientemente las dos rectas". Válido siempre que las rectas se consideren no cerradas. De esta proposición deduce el lema:

2.- "Una línea recta que corta a una de dos paralelas, corta necesariamente también la otra".

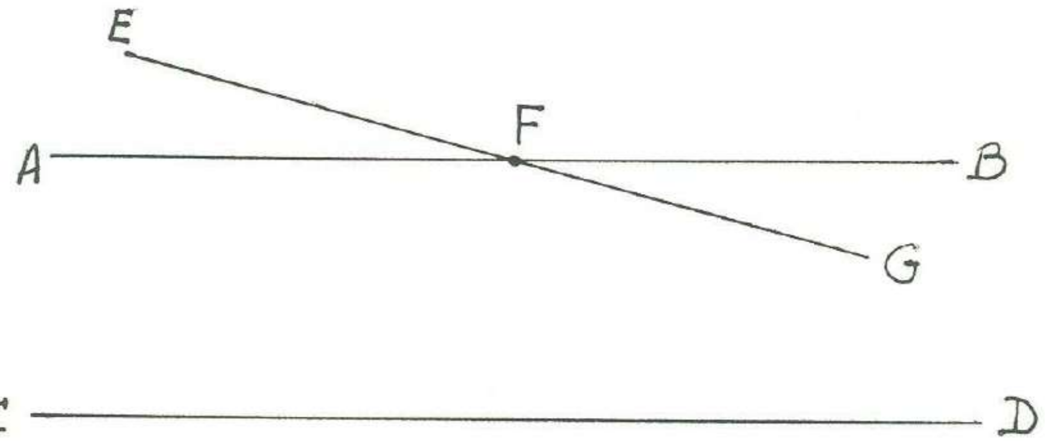
Observemos que este lema es una modificación del axioma de Playfair (1748-1818), que dice:

3.- "Por un punto exterior a una recta se puede trazar una y sólo una paralela a dicha recta".

Esta forma enuncia la existencia y unicidad de la paralela y actualmente es la más común en los textos de Geometría.

La demostración del lema es la siguiente:

Sean AB y CD dos paralelas y EG una línea recta que corta a AB en F, siguiente figura:



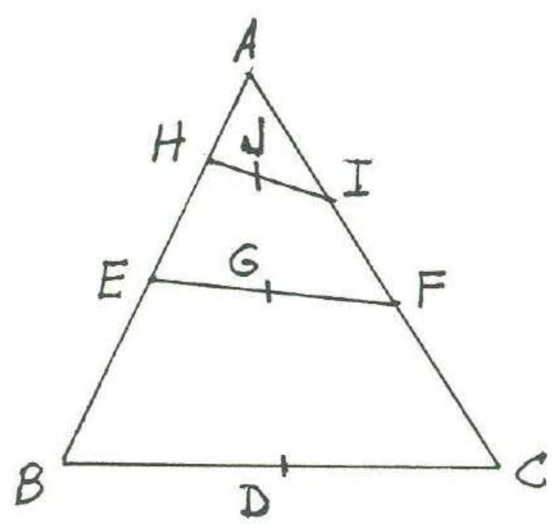
Consideremos un punto P que se mueve sobre FG en la dirección de G, la longitud de la perpendicular desde P a AB se incrementa indefinidamente, y por lo tanto, será mayor que la distancia entre las dos paralelas, ya que esta distancia es "finita". Por lo tanto EG debe cortar a CD.

A partir de este lema el postulado de las paralelas de Euclides puede deducirse lógicamente.

La falacia está en la suposición, que hace Proclo, acerca de que las paralelas son en cualquier lugar, equidistantes; o de otro modo, que las paralelas están relacionadas de forma que al prolongarse indefinidamente, la perpendicular desde un punto de una a la otra es siempre de longitud finita. Esta suposición es equivalente al V Postulado.

Proclo muestra otras evidencias sobre discusiones e investigaciones de los griegos respecto al postulado de Euclides; como la siguiente paradójica argumentación, con la cual, se pretendía demostrar que dos rectas cortadas por una tercera, no se cortan una a otra, aún cuando la suma de los ángulos interiores de un mismo lado sea menor que dos ángulos rectos.

Supongamos que comenzamos con un tringulo ABC y bisectamos la base BC en D. Entonces en BA tomamos el segmento BE igual a BD, y en CA el segmento CF igual a CD, y unimos E con F. Repetimos este proceso tomando ahora el triángulo AEF con EF como base y así indefinidamente. (Ver Fig.). El vértice A nunca podrá ser alcanzado por este medio, aunque esté a una distancia finita.



La falacia de la argumentación reside en el empleo del infinito, puesto que los segmentos BE, EH,... podrían, por disminuciones sucesivas, tender a cero y su serie ser finita. aquí observamos que el autor de la paradoja ha hecho uso del mismo principio con el que Zenón (495-435 a.C.), pretendía demostrar que Aquiles no alcanzaría a la tortuga, aún moviéndose con una velocidad doble de la velocidad de esta última. Esto fue observado, bajo otra forma, por Proclo, diciendo que lo que se demuestra con este proceso, es que no se puede alcanzar el punto de encuentro, no que éste no exista. El también observó que, puesto que la suma de dos ángulos de un triángulo es menor que dos ángulos rectos (prop. 17), existen rectas que, cortadas por una tercera, se encuentran hacia el lado que la suma de los ángulos internos es menor que dos ángulos rectos; así, a quien afirme que para una diferencia cualquiera entre dicha suma y dos ángulos rectos las dos rectas no se encuentran, se puede responder que para diferencias menores las rectas se encuentran.

Pero si para algún par de rectas formando con una tercera ángulos internos de un mismo lado, cuya suma es menor que dos ángulos rectos existe un punto de encuentro, falta por ver si esto ocurre para todos los pares. La duda de Proclo tiene fundamento sólo en el caso en que el segmento BC de la figura anterior permanezca invariable, mientras los segmentos BA y CA giren alrededor de los puntos B y C, haciendo variar su diferencia.

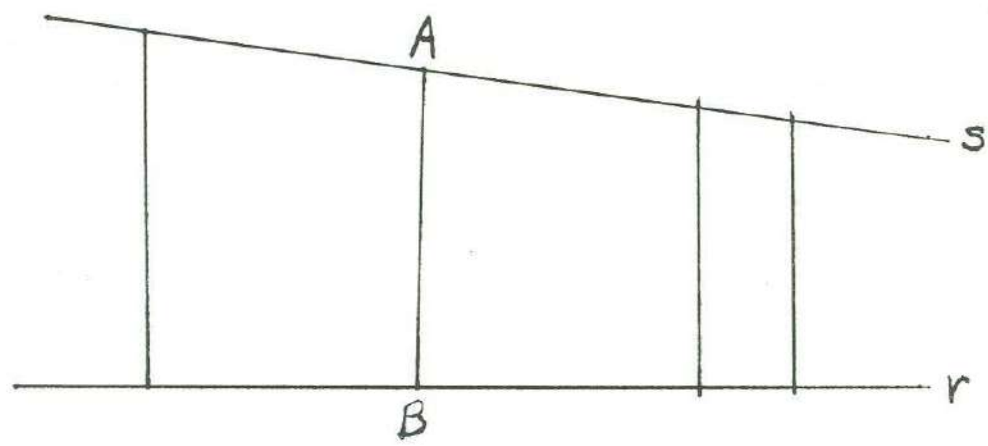
II.4 Los Intentos de Demostración Entre Los Arabes.

Los árabes, también estudiaron el V Postulado y lo importante es que mantuvieron sus traducciones de "Los Elementos" apegados al original y muchas veces es la comparación con ellos la que ha permitido decidir si una proposición aparecía en el texto original o fue añadida más tarde. Entre sus aportaciones están:

Al-Nirizi (Siglo IX) quien reproduce una demostración al V Postulado, que se atribuye al matemático Aganis y que aparece en la obra "Introducción al Libro I de Euclides de Simplicio, un comentador de Aristóteles, amigo de Aganis, que vivió en el siglo VI. En esta obra se expresan ideas semejantes a las de Gemino y Posidonio, afirmando que el V Postulado no es evidente y refiriendo la demostración de su compañero Aganis.

Otros hicieron aportaciones personales a las investigaciones del postulado de las paralelas, como Nasir-Eddin (1201-1274) quien, a pesar de que en su demostración del V Postulado utilizó el criterio seguido por Aganis, merece ser mencionado por su original idea de poner explícitamente el teorema sobre la suma de los ángulos de un triángulo y por la naturaleza de su razonamiento. La parte esencial de la hipótesis que él admite es:

si dos rectas r y s, son la primera perpendicular y la otra oblicua el segmento AB, los segmentos de las perpendiculares bajadas desde s sobre r son menores que AB en la región en que AB forma con s ángulo agudo, y mayores que AB en la región en que Ab forma con s ángulo obtuso.



II.5 Los Intentos de Demostración en el Siglo XVI y XVII.

Las primeras versiones de Los Elementos, hechas en los siglos XII y XIII sobre los textos árabes, así como las sucesivas, sobre los textos griegos a fines del siglo XV y en la primera mitad del XVI, no llevan observación crítica al V Postulado. Las discusiones reaparecen a principios del siglo XVII en los países europeos y entre ellas mencionaremos algunas:
F. Commandino ((1509-1575) añade, sin justificación , a la definición euclideana de las paralelas el concepto de equidistancia; respecto al V Postulado, repite el juicio y la demostración de Proclo.

C. Clavio (1537-1612), critica la demostración de Proclo y presenta una demostración, basándose en el teorema: La línea equidistante de una recta es una recta. El llega a la siguiente proposición:
4. "Si tres puntos están de un mismo lado de una recta y equidistan de ella, los tres puntos pertenecen a una misma recta".

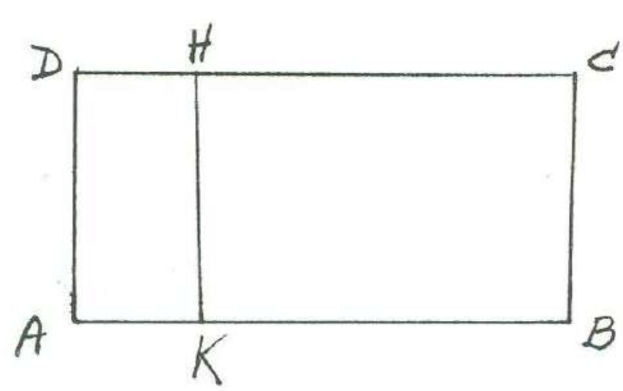
P.A. Catáldi (?-1626) es el primer geómetra moderno que publica un trabajo exclusivamente dedicado a la cuestión de las paralelas. El parte del concepto de rectas equidistantes y no equidistantes; pero para probar la existencia de rectas equidistantes recurre a la hipóteis de que rectas no equidistantes son convergentes en una región, y en la otra divergentes.

G.A. Borelli (1608-1679) admite tratando de justificarlo, el axioma (XIV): Si una línea recta transportada lateralmente en el mismo plano sobre otra línea recta la toca siempre con su punto extremo, y en todo su curso es perpendicular a aquella, su otro punto extremo describirá en su movimiento una línea recta. Sucesivamente demuestra que dos rectas perpendiculares a una recta son equidistantes. Sigue la teoría de las paralelas.

Giordano Vitale (1633-1711) vuelve al concepto de equidistancia formulado por Posidonio; y reconoce la necesidad de rechazar que las paralelas euclideanas sean líneas asintóticas. Define paralelas como líneas rectas equidistantes y trata de probar que el lugar de los puntos equidistantes de una recta es una recta. Su demostración no ofrece ventaja alguna sobre sus prodecesores, sin embargo incluye un teorema que es necesario mencionar, ya que contiene una idea que en lo sucesivo adquiere un mayor desarrollo.

Sean ABCD un cuadrilátero con los ángulos A y B rectos y los lados AD y BC, iguales, ahora, si HK es la perpendicular desde un punto H del lado DC, a la base AB del cuadrilátero, entonces:

1. Los ángulos D y C son iguales.
2. Cuando el segmento HK es igual al segmento AD, los ángulos C y D son rectos y CD es equidistante de AB.



Con este teorema giordano reduce el problema de rectas equidistantes a la demostración de la existencia de un punto H en DC, cuya distancia de AB es igual a los segmentos AD y BC.

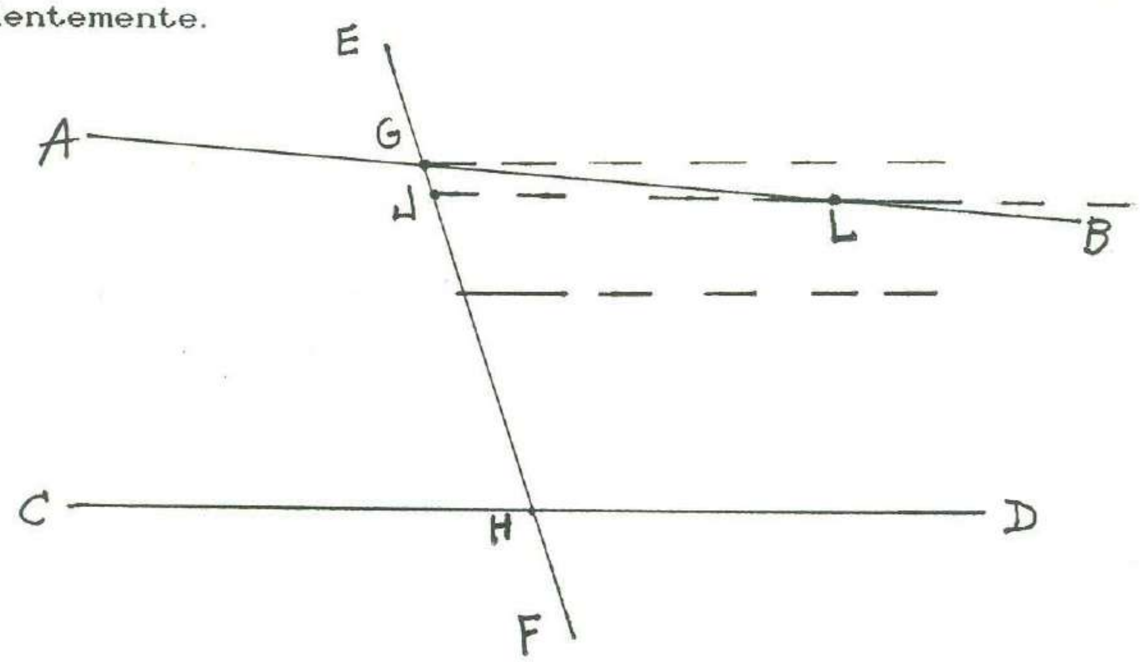
Muy diferente, pero de gran importancia conceptual, es la forma de Jhon Wallis (1616-1703) quien abandonó el concepto de equidistancia, explotado inutilmente por sus antecesores, fundándose en la noción común: Dada una figura es posible construir otra figura semejante a ella de magnitud arbitraria y ofrece una demostración del V Postulado de Euclides, utilizando una suposición equivalente que dice:

5. "Dado un triángulo cualquiera existe siempre uno semejante de magnitud arbitraria".

   Los argumentos esenciales de su demostración son los siguientes:

   Dadas las líneas AB y CD cortadas por la transversal EF en los puntos G y H, respectivamente, y con la suma de los ángulos BGH y DHG menores que dos ángulos rectos.

   demostraremos que AB y CD se cortan si son prolongadas suficientemente.



Tenemos que: $\angle EGB = \angle EGI + \angle IGB$

pero: $\angle EGI = \angle GHD$

$\angle EGB = \angle GHD + \angle IGB$

de donde: $\angle EGB > \angle GHD$

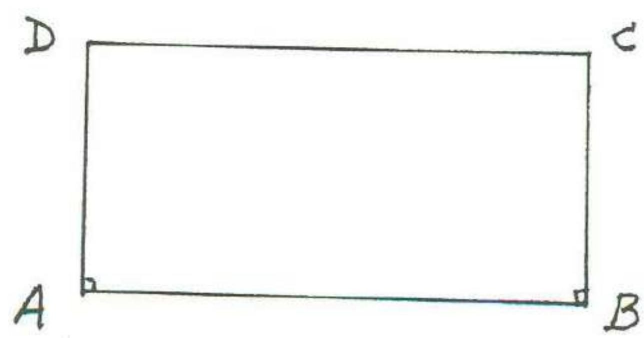
Entonces, si el segmento HG se mueve a lo largo de EF, manteniendo HD rígidamente unida a él, cuando H coincide con la posición inicial de G, HD toma la posición de GI, y estará completamente arriba de GB. Entonces, durante su movimiento HD debe en algún momento cortar a GB en L. Ahora, si uno construye un triángulo con base HG similar al triángulo GJL -esto puede suponerse- es evidente que HD debe cortar GB.

II.6 Los Precursores de la Geometría No Euclideana.

Gerolamo Saccheri (1667-1733) a diferencia de los trabajos de sus precursores, la idea directriz de sus investigaciones geométricas es el método de reducción al absurdo el que utiliza, en su intento de demostrar la validez del V Postulado de Euclides. Bajo esta idea, toma como datos los cuatro primeros postulados, las primeras 28 proposiciones del Libro I, y supone como hipótesis que el V postulado es falso; esperando, como consecuencia, encontrar una contradicción que le autorice la validez del postulado en sí. También adopta la infinitud de la recta (usa la prop. XVI, el ángulo externo de un triángulo es mayor que cada uno de los ángulos internos opuestos), así como el postulado de Arquímides y la hipótesis de continuidad de la recta y llega la proposición:

6. "Si en un cuadrilátero, un par de lados opuestos son iguales y si los ángulos adyacentes al tercer lado son rectos, entonces los otros dos ángulos también son rectos".

La figura fundamental que utiliza Saccheri es el cuadrilátero birrectángulo isósceles, esto es, el cuadrilátero con dos lados opuestos iguales y perpendiculares a la base que llamaremos "cuadrilátero de Saccheri".



Saccheri llega a obtener algunas propiedades de esta figura, como:

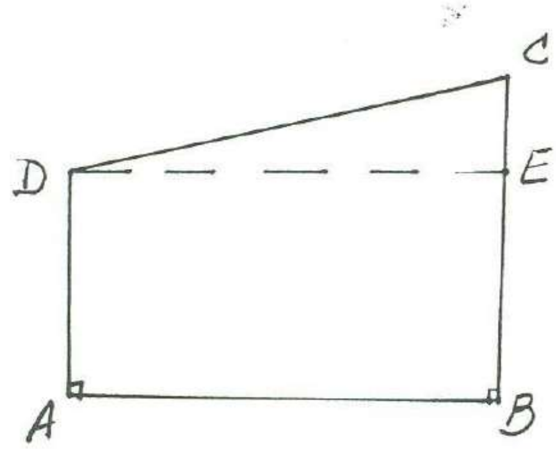
Proposición I:

1. Si < A = < B = Un ángulo recto y si AD = BC entonces < C = < D.
2. Si < A = < B = Un ángulo recto y si AD = BC entonces < C = < D y el ángulo mayor es adyacente al lado menor y viceversa.

Para demostrar 1. basta llevar el cuadrilátero sobre si mismo de manera que la base resulte invertida, es decir, que A coincida con B y viceversa , por el Postulado IV; la semirecta AD coincidirá con BC y la BC con AD. Además como los segmentos AD y BC son iguales, el cuadrilátero coincidirá consigo mismo en posición invertida, y por lo tanto, el ángulo C coincidirá con el ángulo D.

La demostración de 2. la dividiremos en dos partes:

a. Si < A = < B = Un ángulo recto y si AD < BC entonces < D > < C.



Sea E un punto entre BC tal que BE = AD tenemos entonces que ABED es un cuadrilátero de Saccheri y entonces < ADE = < DEB. Como < DEB es ángulo exterior del triángulo DEC la proposición XVI nos permite afirmar que (aquí utilizamos la infinitud de la recta):

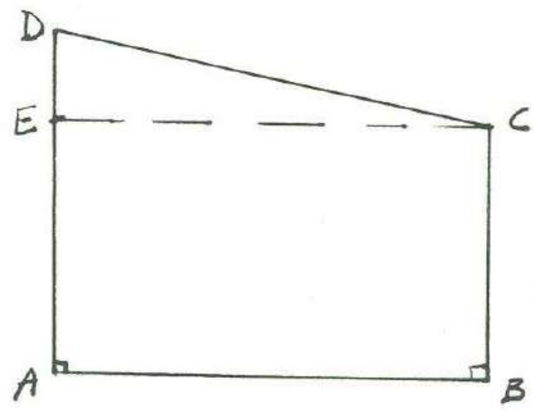
< DCE < < DEB = < ADE < < ADC

de donde: < DCE < < ADC

o bien: < D > < C

b. Si < A = < B = Un ángulo recto y si AD > BC entonces < D < < C.

Para demostrar esta parte se sigue el razonamiento anterior, en la figura siguiente:



Al considerar un cuadrilátero de Saccheri, y bajo la hipótesis de Euclides (V Postulado), los ángulos C y D son rectos; pero si suponemos que pueden ser ambos obtusos o ambos agudos se niega implícitamente el V Postulado.

Saccheri discute tres hipótesis respecto a los ángulos C y D de su cuadrilátero fundamental y las denomina:

a. Hipótesis del ángulo recto: $< C = < D = 1 <$ recto.
b. Hipótesis del ángulo obtuso: $< C = < D > 1 <$ recto.
c. Hipótesis del ángulo agudo: $< C = < D < 1 <$ recto.

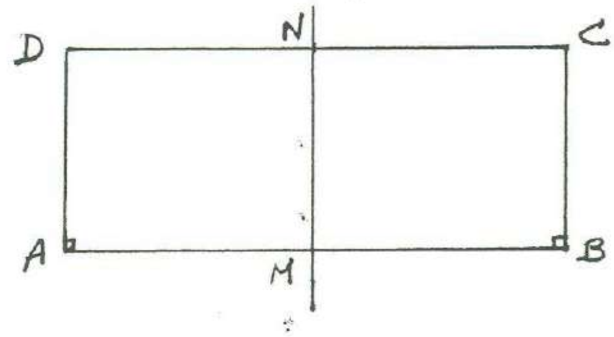
Se trata de obtener conclusiones contradictorias a partir de las hipótesis del ángulo obtuso y del ángulo agudo. Las obtiene con la hipótesis del ángulo obtuso; pero no logra esto, al menos geométricamente, con la del ángulo agudo. (La negación de alguna de las tres hipótesis de Saccheri implica el cumplimiento de alguna de las dos restantes).

El primer resultado notable es la Prop. III, que dice:

Sea ABCD un cuadrilátero de Saccheri con los ángulos A y B rectos : según se verifique la hipótesis del ángulo recto, del ángulo obtuso o del ángulo agudo, se tendrá respectivamente que: $AB = CD$, $AB > CD$ o $AB < CD$.

Demostración:

La hipótesis del ángulo recto se deduce de la proposición I, 1. Para la hipótesis del ángulo obtuso utilizaremos 2. de la proposición I.



Sea MN la perpendicular por el punto medio del segmento AB, esta perpendicular divide a la figura en dos cuadriláteros iguales y rectángulos en M y N. Como $< D > < A$ (por el recíproco de Prop. 2) tenemos $AM > DN$, de donde: $AB > CD$.

Para la hipótesis del ángulo agudo las desigualdades cambian de sentido y por lo tanto, $AB < CD$.

La recíproca de esta demostración también es cierta.

Proposición IV:

Sean ABCD un cuadrilátero de Saccheri con los ángulos rectos A y B, entonces:

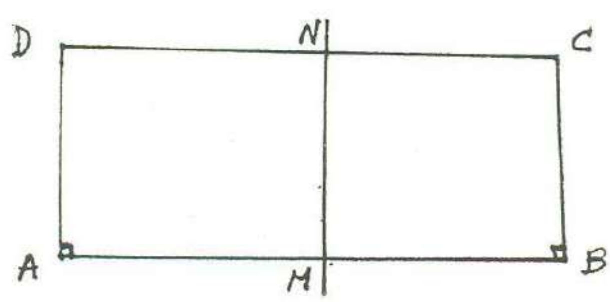
a. Si $AB = CD \rightarrow < C = < D = 1$ recto.

b. Si $AB > CD \rightarrow < C = < D > 1$ recto.

c. Si $AB < CD \rightarrow < C = < D < 1$ recto.

Al igual que la proposición anterior, demostraremos b. ya que a. no presenta dificultad alguna (se deduce de la proposición I.1.)

b. Supongamos que $AB > CD$.



Sea MN la perpendicular por el punto medio del segmento AB, esta perpendicular divide a la figura en dos cuadriláteros iguales y rectángulos en M y N como AM > DN por la propiedad 2. tenemos que < D > < A = 1 ángulo recto. Por lo tanto, < D > 1 ángulo recto y asímismo < C > < B = 1 ángulo recto de donde: <C> 1 ángulo recto.

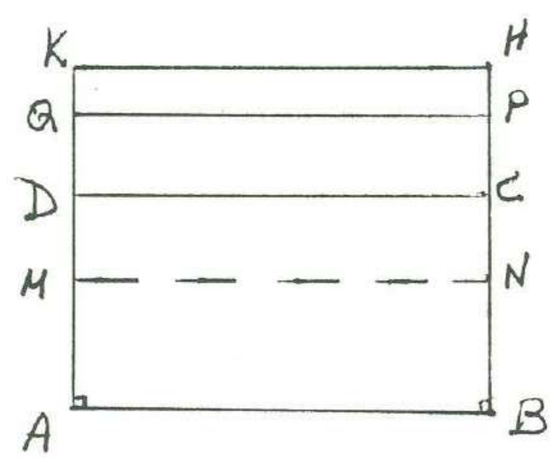
Para la demostración del inciso c. las desigualdades sólo cambian de sentido.

Proposición V:

Si en un sólo caso es verdadero la hipótesis del ángulo recto, entonces es verdadero en todos los demás casos.

Demostración:

Sea ABCD en cuadrilátero de Saccheri con sus cuatro ángulos rectos.



Tomemos en AD y BC los puntos M y N tal que AM = BN. Si MN es perpendicular a AD y BC entonces en el cuadrilátero ABNM la hipótesis del ángulo recto también es verdadera. Pero supongamos que < AMN es agudo, y por lo consiguiente, < DMN obtuso. Entonces en el cuadrilátero ABNM por la hipótesis del ángulo agudo, se la hipótesis del ángulo obtuso, tendríamos que MN < CD de donde AB < CD, lo cual es contradictorio, ya que en el cuadrilátero ABCD donde se verifica la hipótesis del ángulo recto, tenemos que AB = CD. Por lo tanto, < AMN no puede ser agudo; y con un razonamiento semejante se probará que < AMN no puede ser obtuso, entonces se concluye que en el cuadrilátero ABNM también es válida la hipótesis del ángulo recto.

Se puede decir lo mismo si M y N se toman sobre las prolongaciones de AD y BC.

Tomemos Q y P sobre las prolongaciones AD y BC respectivamente de tal manera que AQ = BP y PQ perpendicular a AD y BC. En el cuadrilátero ABPQ se verifica la hipótesis del ángulo recto, pues si AQ es múltiplo de AD, la proposición es inmediata; y si no, podemos tomar un múltiplo de AD mayor que AQ, esto es, n. AD > AQ (Postulado de Arquímides), lo mismo sobre BC, consideremos ahora el cuadrilátero ABHK donde AK = n. AD y BH = n. BC y además Q está entre A y K lo mismo P entre B y H. Como en el cuadrilátero ABHK se verifica la hipótesis del ngulo recto y por la primera parte de esta demostración podemos asegurar que en el cuadrilátero ABPQ también se verifica la hipótesis del ángulo recto.

Por lo anterior, vemos que la hipótesis del ángulo recto es válida para cualquier cuadrilátero que tenga la misma base; aunque también puede probarse para un cuadrilátero de base cualquiera, ya que en la figura puede tomarse por base uno de los lados perpendiculares a AB.

Utilizando el "Principio de Continuidad" Saccheri demostró la proposición VI:

"Si en un sólo caso es verdadera la hipótesis del ángulo obtuso, es verdadera también en todos los demás casos".

Asimismo por reducción al absurdo, demostró la proposición VII:

"Si en un caso es verdadera la hipótesis del ángulo agudo, es verdadera en cualquier otro caso".

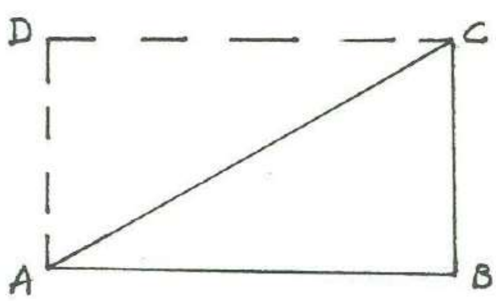
Con estas últimas proposiciones Saccheri aborda el problema de determinar cuánto vale la suma de los ángulos internos de un triángulo bajo cada una de las hipótesis.

Proposición VIII:

"La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual, mayor o menor que dos ángulos rectos según se verifique la hipótesis del ángulo recto, del ángulo obtuso o del ángulo agudo, respectivamente".

Demostración:

Sea ABC un triángulo rectángulo en B.



Levantamos la perpendicular al segmento AB por el punto A y sobre esta perpendicular tomemos el punto D tal que: AD ≡ BC; uniendo D con C construimos un cuadrilátero y Saccheri DABC.

1. Bajo la hipótesis del ángulo recto, los triángulos ABC y ADC son iguales y por lo tanto, < BAC = < DCA y < ACB = < DAC de donde se deduce inmediatamente que en el triángulo ABC, tenemos < A + < B + < C = 2 ángulos rectos.

2. Bajo la hipótesis del ángulo obtuso, si AB > DC entonces < ABC > < Cad (Prop. IV-b), por lo cual en el triángulo ABC tendremos < A + < B + < C > 2 ángulos rectos.

3. Bajo la hipótesis del ángulos agudo, si AB < DC entonces <ACD < < CAD (Prop.IV-c) y de aquí, en el mismo triángulo < A + <

B + < C < 2 ángulos rectos.

La demostración de este teorema se extiende a un triángulo cualquiera. Al no ser rectángulo, la figura se descompone en dos o más triángulos rectángulos.

Enseguida Saccheri demuestra que bajo la hipótesis del ángulo recto y del ángulo obtuso el V Postulado es válido; lo cual le permite descartar la hipótesis del ángulo obtuso y a continuación se dedica a tratar de descartar la hipótesis del ángulo agudo.

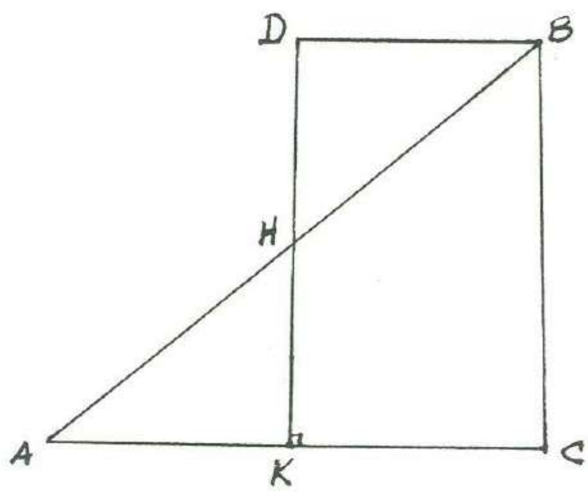
Lema: Sea ABC un triángulo rectángulo en C y HK la perpendicular bajada desde el punto medio de AB sobre AC la cual divide a AC en dos segmentos AK y KC tales que:

a. Bajo la hipótesis del ángulo recto AK ≡ KC

b. Bajo la hipótesis del ángulo obtuso AK < KC

c. Bajo la hipótesis del ángulo agudo AK > KC

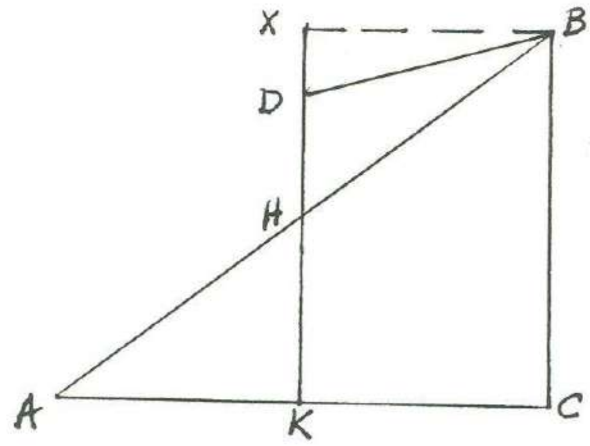
Demostración:



Sea D tal que DK ≡ BC; entonces DKCB es cuadrilátero de Saccheri.

a. Bajo la hipótesis del ángulo recto; < BDK ≡ 1 ángulo recto, de donde, DB ≡ KC y además los triángulos AHK y DHB son congruentes, y entonces AK ≡ DB ≡ KC, por lo tanto AK ≡ KC.

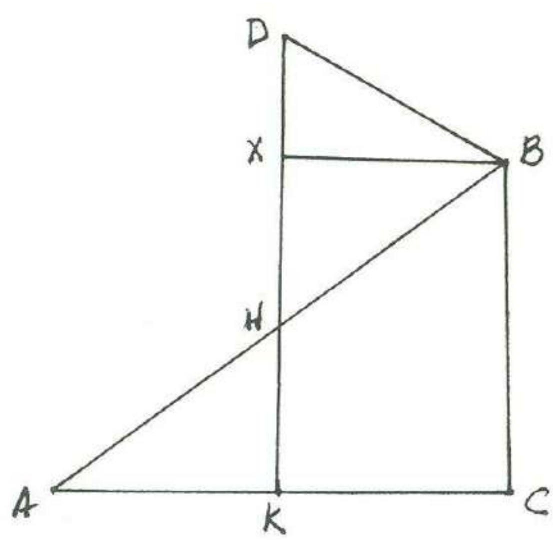
b. Bajo la hipótesis del ángulo obtuso < BDK > 1 ángulo recto, por lo tanto la perpendicular trazada desde B a DK no puede caer entre D y K y además KC > DB.



Sea BX la perpendicular a DK, entonces los triángulos AKH y HXB son congruentes y AK ≡ BX, pero DB > BX por ser DB la hipotenusa del Δ BXD; y entonces KC > DB > BX ≡ AK de donde:

KC > AK, o bien AK < KC.

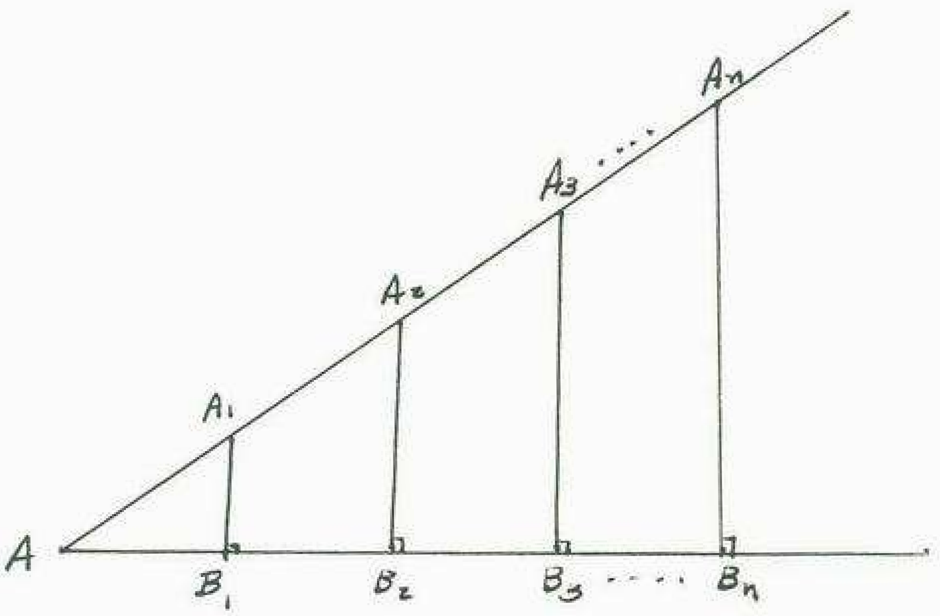
c. Bajo la hipótesis del ángulo agudo



el ángulo BDK < 1 ángulo recto, por lo tanto, la perpendicular trazada desde B hacia DK cae entre D y K y además DB > KC. Asimismo los triángulos AHK y BHX son congruentes y AK ≡ BX.

En el cuadrilátero KXBC tenemos BX y KC perpendiculares a KX y además ángulo BCK = 1 ángulo recto, ángulo XBC < 1 ángulo recto, de donde, por la proposición I-2., tenemos que KC < BX y como BX ≡ AK entonces KC < AK.

El resultado de este lema puede generalizarse en la siguiente proposición: Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo se divide en n-segmentos congruentes entre sí y a partir de sus extremos trazamos perpendiculares a uno de los catetos.



a. Bajo la hipótesis del ángulo recto

$AB_1 \equiv B_1B_2 \equiv B_2B_3 \equiv \ldots \equiv B_{n-1}B_n$

b. bajo la hipótesis del ángulo obtuso

$AB_1 < B_1B_2 < B_2B_3 < \ldots < B_{n-1}B_b$

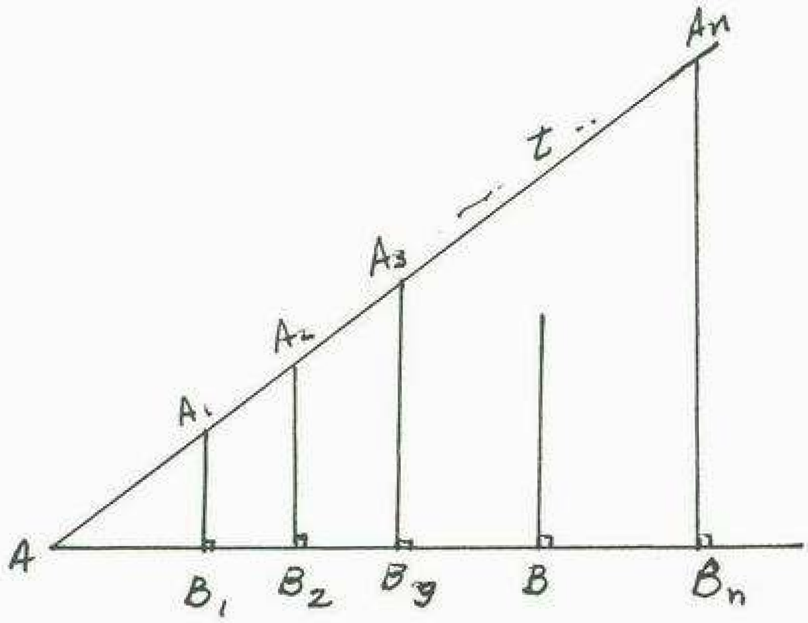
c. Bajo la hipótesis del ángulo agudo

$AB_1 > B_1B_2 > B_2B_3 > \ldots > B_{n-1}B_n$

Importantes consecuencias pueden deducirse de esta proposición, como la siguiente proposición:
Bajo la hipótesis del ángulo recto y del ángulo obtuso, dos rectas que intersectan a una tercera, una perpendicularmente y la otra formando un ángulo agudo se intersectan entre sí.

Demostración: Sean t,s rectas que intersectan a AB formando t un ángulo agudo con AB y s perpendicular a AB. (ver sig. fig.)

Sobre t tomamos A_1 y A_2 tales que $AA_1 = A_1A_2$ y trazamos A_1B_1 y A_2B_2 perpendiculares a AB.



En el triángulo AA_2B aplicando el lema anterior, tenemos: con la hipótesis del ángulo recto, $AB_1 \equiv B_1B_2$ y con la hipótesis del ángulo obtuso, $B_1B_2 > AB_1$ esto es, $AB_2 \geq 2\ AB_1$

Tomemos ahora sobre t, $A_2A_3 \equiv AA_2$ y sea B_3 el pie de la perpendicular desde A_3 sobre AB, siguiendo el razonamiento anterior, tenemos que: $AB_3 \geq 2\ AB_2$

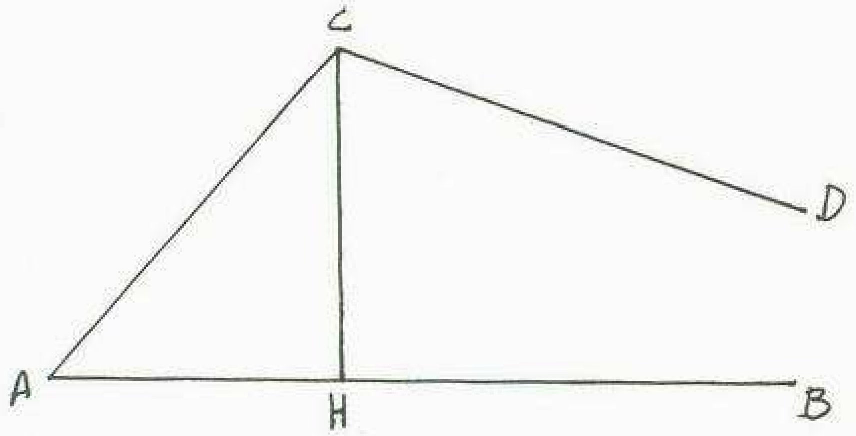
esto es: $$AB_3 \geq 2^2 AB_1$$

Este proceso se puede repetir cuantas veces sea necesario y así obtener un punto A_n sobre t tal que su proyección sobre AB determine un segmento AB_n que satisfaga la relación:
$AB_n \geq 2^n AB_1$

Si tomamos n suficientemente grande entonces $2^n AB_1 > AB$ y entonces $AB_n > AB$, es decir el punto B está en el segmento AB_n que es un lado del triángulo AA_nB_n y entonces la perpendicular s no puede intersectar otro lado del triángulo que no sea la hipotenusa AA_n.

Con este resultado Saccheri demuestra el siguiente teorema: "Bajo la hipótesis del ángulo recto y del ángulo obtuso, el V Postulado es válido".

Demostración:



Sean AB y CD dos líneas rectas cortadas por la recta AC. Supongamos que $\angle BAC + \angle ACD < 2$ ángulos rectos entonces, al menos uno de estos dos ángulos debe ser agudo; supongamos que $\angle BAC$ es agudo por ejemplo.

Desde C bajamos la perpendicular CH sobre AB. En el triángulo ACH, con las hipótesis trabajadas, tenemos que:

$$\angle HAC + \angle ACH + \angle AHC \geq 2 \text{ ángulos rectos} \qquad (1)$$

pero, $\angle BAC + \angle ACD < 2$ ángulos rectos

y $\quad \angle BAC = \angle HAC$

$\quad \angle ACD = \angle ACH + \angle HCD$

o sea $\angle HAC + \angle ACH + \angle HCD < 2$ ángulos rectos $\qquad (2)$

de (1) y (2) obtenemos $\angle AHC > \angle HCD$ y como $\angle AHC$ es recto, entonces $\angle HCD$ es agudo y aplicando la proposición anterior, las rectas AB y CD se intersectan.

Este resultado muestra que el V Postuladoes válido bajo estas hipótesis y, consecuentemente, los teoremas que se deduzcan de este postulado deben también ser válidos bajo las mismas hipótesis, en particular el siguiente:

La suma de los ángulos de un cuadrilátero fundamental es igual a cuatro ángulos rectos.

Pero esto es contradictorio con el resultado obtenido bajo la hipótesis del ángulo obtuso, que dice:

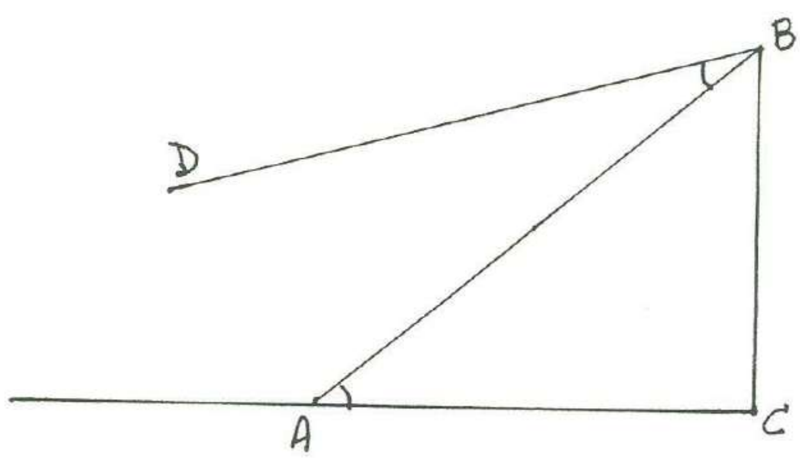
La suma de los ángulos de un cuadrilátero fundamental es mayor que cuatro ángulos rectos.

Saccheri obtiene así, entre la serie de resultados derivados de los cuatro primeros postulados de Euclides y la hipótesis del ángulo obtuso una contradicción por lo que descarta la hipótesis del ángulo obtuso y se aboca a tratar de destruir la hipótesis del ángulo agudo en su afán de probar que el V Postulado es válido en cualquier caso. En este intento, obtiene los primeros resultados que podemos llamar de geometrías no-euclideanas, entre las cuales mencionaremos:

Proposición :

Bajo la hipótesis del ángulo agudo, existen una perpendicular y una oblicua a una misma recta que no se intersectan .

Su demostración descansa en la siguiente construcción. Desde el vértice B del triángulo ABC, rectángulo en C, trácese la recta BD, de modo que < ABD = < BAC. Entonces por la hipótesis del ángulo agudo el < CBD es agudo y las dos rectas AC y BD, que no se encuentran (Prop. XXVII), son una oblicua y la otra perpendicular a BC.



Otro resultado es:

Proposición:

Bajo la hipótesis del ángulo agudo, dos rectas coplanares, o tienen una perpendicular común o al ser prolongadas en la misma dirección deben intersectarse a una distancia finita o al menos se acercan indefinidamente la una a la otra.

En otras palabras, si existen [illegible] líneas rectas coplanares, no incidentes y sin perpendicular común, entonces estas líneas deben ser asintóticas una a otra.

En la demostración de esta proposición también utiliza el método de reducción al absurdo. En este momento Saccheri concluye la validez del V Postulado apegándose más a su intuición y a su fe que a la lógica; consideraba que el espacio solo podía ser descrito por medio de la geometría euclideana y expresa:

Proposición:

La hipótesis del ángulo agudo es absolutamente falsa, por que repugna a la naturaleza de la línea recta.

Su demostración se apoya en cinco lemas, desarrollados en 16 páginas; sin embargo se reducen a afirmar que, dos rectas que convergen asintóticamente deben tener una perpendicular común en un punto al infinito, lo cual es contradictorio a la naturaleza de la línea recta. Esta demostración, está fundada en la extensión al infinito de ciertas propiedades, válidas para figuras a distancia finita.

Sin embargo Saccheri no queda satisfecho e intenta su demostración volviendo al antiguo concepto de equidistancia; pero sus resultados no fueron distintos a sus predecesores.

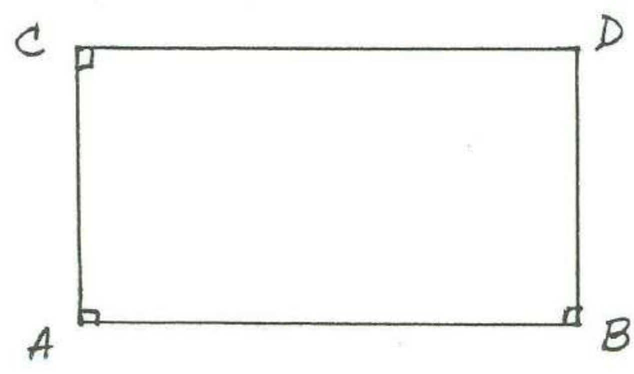
En realidad obtuvo muchos de los teoremas, ahora clásicos, de la geometría no-euclideana y tal vez si él hubiera admitido su incapacidad para encontrar una contradicción en la hipótesis del ángulo agudo, se le hubiera acreditado al descubrimiento de las geometrías no-euclideanas.

Aunque no lograra su objetivo la obra de Saccheri es de gran importancia, además de ser la máxima tentativa en favor del V Postulado, el hecho de no haber descubierto contradicciones entre las consecuencias de la hipótesis del ángulo agudo, lo menos que podía es sugerir la duda de si sobre esta hipótesis se podía edificar un sistema geométrico lógicamente consecuente y si el V Postulado es indemostrable.

Los trabajos de Saccheri publicados en 1733 influyeron indudablemente en los geómetras del siglo XVIII.

G.S. Klugel matemático alemán en 1763 analiza detalladamente la obra de Saccheri, junto con otros intentos de demostración del V Postulado, y en sus conclusiones expresa dudas sobre su demostrabilidad; las cuales fueron en las décadas siguientes cada vez más frecuentes.

Los trabajos de Saccheri y Klugel fueron conocidos por el matemático suizo Johann Heinrich Lambert (1728-1777) quien en su "Teoría del Paralelismo" escrita en 1766 y publicada en 1786 (después de su muerte), examina críticamente la "demostrabilidad" del postulado de las paralelas e intenta a su vez demostrarlo a partir de las bases euclideanas. Su obra está dividida en tres partes; la primera de naturaleza crítica y filosófica, expone la doble cuestión que podemos proponernos sobre el V Postulado; esto es, si puede demostrarse con el simple auxilio de los precedentes, o si, por el contrario, no se exige el empleo de alguna otra hipótesis. La segunda parte está dedicada a la exposición de varias tentativas, en las que el postulado se reduce a proposiciones sencillas, las cuales, sin embargo, deberían ser a su vez demostradas. La tercera contiene un sistema de investigaciones semejantes a las de Saccheri, por ejemplo, su figura fundamental es un cuadrilátero trirectángulo y analiza las tres hipótesis sobre el cuarto ángulo.

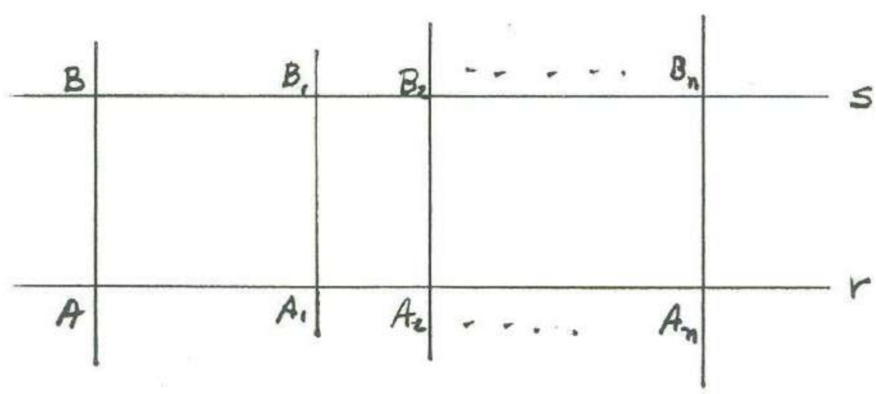


A la equivalencia que llega es:

7. "Si en un cuadrilátero tres ángulos son rectos, el cuarto también es recto".

Bajo el V Postulado, el ángulo D es ángulo recto. A pertir de esto Lambert considera que el suponer el ángulo D obtuso o agudo es negar el V Postulado; y al igual que Saccheri las llama, hipótesis del ángulo obtuso e hipótesis del ángulo agudo respectivamente.

Para rechazar la hipótesis del ángulo obtuso Lambert al igual que Saccheri da por hecho que las líneas rectas son infinitas y recurre a la figura siguiente, donde r y s son rectas perpendiculares a AB, desde los puntos sucesivos B, B_1, B_2 . . . B_n de s se bajan perpendiculares BA, B_1A_1, B_2A_2, . . . , B_nA_n sobre r y de muestra primero que los segmentos de las perpendiculares comprendidos entre r y s van decreciendo a partir de la perpendicular AB, y después, que la diferencia entre cada uno de ellos y el siguiente va decreciendo también. De modo que resulta:



$$BA - B_n - A_n > (BA - B_1A_1) .n$$

Para n bastante grande , el segundo miembro de la desigualdad es tan grande como se quiera (por el postulado de Arquímides, que incluye la infinitud de la recta igual que Saccheri), mientras que el primer miembro es siempre menor que BA; y es esta contradicción la que permite a Lambert declarar falsa la hipótesis del ángulo obtuso.

Utilizando la misma figura Lambert trata de demostrar la hipótesis del ángulo agudo, pero bajo esta hipótesis logra demostrar que los segmentos BA, B_1A_1, B_2A_2 . . . , B_nA_n van creciendo y que al mismo tiempo crecen las diferencias entre cada uno de ellos y el anterior; este resultado no le conduce a contradicciones y al igual que Saccheri, se ve obligado a seguir las deducciones y encuentra que la suma de los ángulos internos de un triángulo siempre es menor que dos ángulos rectos, llamando a esta diferencia (positiva) entre la suma de ángulos y los dos ángulos rectos "defecto del triángulo". Descubre además, que al dividir un triángulo uniendo un vértice con un punto del lado opuesto en dos triángulos con un defecto dado, se tiene que el defecto del triángulo dado es igual a la suma de los defectos de los triángulos en que fue dividido, con este resultado muestra que: "El defecto de un triángulo es proporcional a su área", esto es, ad = KA. Observó también la semejanza de la geometría que sigue de la hipótesis del ángulo obtuso la geometría esférica, donde el área del triángulo es proporcional a su exceso esférico.

Analizando estos resultados observó que al negar el V Postulado, con la hipótesis del ángulo agudo, habría una unidad absoluta de longitud. Lambert hace uso de su intuición del espacio para decir que es imposible medir "absolutamente" todas las magnitudes geométricas (admitir el V Postulado equivale a negar la existencia de una unidad absoluta para segmentos).

A pesar de estas consecuencias, Lambert no logra demostrar que al negar el postulado de las paralelas haya encontrado una contradicción lógica y abandona el problema de demostrar el V Postulado seguro de no haberlo resuelto y dice: puedo a lo más concluir que la tercera hipótesis podría ocurrir en el caso de una esfera imaginaria; pero no cayó en los mismos errores que sus predecesores que proclamaban haber probado el V Postulado considerando que una contradicción con las ideas intuitivas era también una contradicción lógica. Con esto se observa que en la segunda mitad del siglo XVIII iba ya formándose la convicción de que fuese necesario. Admitir sin demostración el V Postulado o algún otro equivalente.

Un intento más por demostrar el postulado delas paralelas de Euclides por el método de reducción al absurdo fue ensayado por Adriano María Legendre (1752-1833) quien trató de transformarlo en teorema. Al igual que Saccheri sus intentos descansan sobre las hipótesis de la suma de los ángulos internos de un triángulo, sólo que él desde un principio considerando tácitamente la infinitud de la recta, pudo eliminar la segunda hipótesis y se concreta a demostrar las otras dos, pero a pesar de varios intentos no pudo desechar la tercera hipótesis.

En su primera demostración, hace uso de la afirmación:
"La unidad de longitud no afecta la validez de la proposición que se va a demostrar"; la cual es equivalente a la suposición de Wallis de poder construir figuras semejantes; a pesar de varios intentos no pudo desechar la tercera hipótesis.

Su obra no añade nada nuevo al material ni a las convicciones ganadas por sus predecesores, su mérito está en la sencillez y elegancia que supo dar a sus investigaciones y es por eso que la difusión de su obra contribuyó al aumento del círculo de cultivadores de estas nuevas ideas, que entonces estaban formándose.

En este momento después de casi 22 siglos de tratar de deducir inutilmente el V Postulado de los otros cuatro, que los geómetras empezaron a considerar en serio la posibilidad de que el V Postulado no era deducible de los otros cuatro.

Pero es hasta el siguiente siglo, unos años después, cuando la indemostrabilidad del postulado de las paralelas se aclara, dando lugar a la aparición de las geometrías no-euclideanas, lo que analizaremos en el siguiente Capítulo.

CAPITULO III

EL NACIMIENTO DE LAS GEOMETRIAS NO EUCLIDEANAS

GAUSS BOLYAI Y LOBACHEVSKI

Hasta la publicación de los trabajos de Legendre (1823), todos los intentos de demostración del V Postulado eran inútiles, sólo se lograba sustituirlo por otro equivalente de enunciado más o menos evidente y esto hizo pensar a algunos matemáticos de la época que se trataba de un verdadero postulado y no de un teorema que pudiera demostrarse con los postulados precedentes.

Si el V Postulado de Euclides o su equivalente, es un verdadero postulado, el hecho de negarlo aceptando los demas, no debe conducir a contradicción alguna; fue la idea que maduró en la primera mitad del siglo XIX, provocando el nacimiento de las geometrías no-euclideanas, es decir, las geometrías donde el V Postulado deja de ser válido y la conclusión de su indemostrabilidad, esto es, su independencia con los anteriores.

Como toda idea que llega a la madurez, estas geometrías fueron gestadas por todos los matemáticos anteriores que intentaron ver claro el famoso postulado y cosechada simultáneamente por varios matemáticos, entre los cuales se distinguen: el alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855), el ruso Nikolai Ivanovich Lobachevski (1793-1856) y el húngaro Jhon Bolyai (1802-1860).

Ellos tomaron como base el axioma de Playfair, equivalente al V Postulado de Euclides, que dice:
"Por un punto exterior a una recta pasa una y solamente una paralela a dicha recta".

Si se supone la infinitud de la recta, puede probarse la existencia de una paralela; pero en este caso, el postulado no se refiere a la existencia sino a la unicidad. Causs, Bolyai y

Lobachevski sustituyen el axioma anterior por el siguiente:

Lobachevski: "La paralela a una recta por un punto exterior a ella no es única".

Gauss encontró la siguiente equivalencia al V Postulado: "No hay límite superior del área de un triángulo".

En cambio Bolyai: "Una circunferencia puede hacerse pasar por tres puntos no colineales cualesquiera".

El axioma con que trabajaron Gauss, Bolyai y Lobachevski es equivalente al del ángulo agudo de Saccheri y con el y los de Euclides sin el V, obtuvieron un considerable número de resultados, sin encontrar contradicción.

Fue Gauss el primero en tener una visión clara de una geometría independiente del V Postulado, visión que permaneció encerrada en su mente, durante casi medio siglo y que sólo salió a la luz pública después de las obras de Lobachevski (1829-30) y Bolyai (1832) quienes sí publicaron en vida los resultados de sus trabajos.

Las investigaciones de Gauss sólo se conocen por la correspondencia con otros hombres de ciencia de su época, como Wolfang Bolyai (1775-1856) padre de Johan Bolyai; a quien envió una carta el 17 de Diciembre de 1799 en donde se deduce que no por una intuición genial el eminente Gauss reconoció la existencia de una geometría no-euclidena, intachable lógicamente, sino que fue labor de largo tiempo dedicado a esto. También existe testimonio de sus cartas, con Schumacher, Taurinus, Bessel, Watcher y Otros. Sin embargo, Gauss no publicó estas ideas por el temor de no ser comprendidos y fama ya le sobraba por otras investigaciones.

Se sabe que Johan Bolyai inició sus trabajos alrededor de 1823 por los comentarios en la correspondencia con sus amigos y su padre Wolfang, pero su publicación la hace en 1832, la cual aparece como apéndice de un libro de su padre.

Bolyai se propone construir una teoría absoluta del espacio y en este afán llega a resultados como los siguientes:

-Círculo y esfera de radio infinito. La geometría sobre la esfera de radio infinito es idéntica a la geometría plana ordinaria.

-La trigonometría esférica es independiente del Postulado de Euclides.

?Sé puede demostrar rigurosamente que el axioma de Euclides no es una consecuencia de los precedentes?

Bolyai no acierta a resolver la indemostrabilidad del axioma. Durante cierto tiempo creyó que no se podría decidir entre el caso euclideano y el no euclideano, cuál fuese verdadero. Después retomó las antíguas ideas en un nuevo intento y por un error de cálculo no logró su propósito.

Mientras que Lobachevski negando el postulado desarrolla el contenido analítico de la geometría imaginaria, Bolyai trata la cuestión de independencia o dependencia de las proposiciones geométricas del postulado euclídeo ; pero ambos coinciden en las fórmulas de la trigonometría esférica.

Las primeras publicaciones sobre esta geometría se deben a Lobachevski en una memoria presentada a la sección fisicomatemática de la Universidad de Kazán el 12 de Febrero de 1826 y cuyo manuscrito se ha perdido, siguiendo después varias publicaciones hasta 1840 cuando aparece la obra "Investigaciones Geométricas sobre la Teoría de las Paralelas" obra escrita en alemán. En 1855, un año antes de su muerte, ya ciego, dictó y publicó, en ruso y francés la exposición completa de su sistema geométrico.

Pangeometría o geometría imaginaria es el nombre que

Lobachevski dió a su teoría geométrica no euclidena, en ella en lugar de empezar con el plano y la recta como la geometría ordinaria, parte de la esfera y el círculo y además las paralelas no son equidistantes sino asintóticas; demostró también que la suma de los tres ángulos de un triángulo rectilíneo nunca es mayor que dos ángulos rectos. Introduciendo las nociones de Oriciclo (círculo de radio infinito) y de Orisfera (esfera de radio infinito), logró demostrar que la geometría euclideana está contenida en la Pangeometría, como un caso particular. Así, sobre la orisfera resulta válida la geometría euclideana, y al mismo tiempo se cumple la trigonometría plana ordinaria. Además comprobó que la trigonometría esférica se manitene invariable, esto es, existen triángulos rectilíneos (rectas) cuyos ángulos suman dos ángulos rectos, y triángulos curvilíneos (rectas) cuyos ángulos suman menos de dos ángulos rectos.

Lobachevski logró así desarrollar una nueva teoría geométrica de mayor generalidad, sus trabajos representan el desenlace de la crisis que durante veinte siglos había existido; a la vez el nacimiento de la geometría no euclideana provocó una nueva crisis en la ciencia y en la filosofía . También Lobachevski se planteó el problema de recurrir a la experiencia para decidir si el espacio físico es euclideano o no euclideano (propuso mediciones de los ángulos de triángulos de lados enormes para verificar si su suma era igual o menor que dos ángulos rectos). Lo cual se dilucidó hasta nuestro siglo con la comprobación experimental de la teoría de la relatividad, pues el espacio físico en sus dimensiones astronómicas tiene propiedades distintas a las que muestra directamente en los objetos que están a nuestro alcance, entre ellas están las no euclideanas . Así como la mecánica newtoniana es el caso particular de la mecánica relativista aplicada a las dimensiones humanas, así en la misma escala la geometría euclideana es el caso particular de la geometría no euclideana.

Como puede observarse las ideas de esta geometría no corresponden a una sola persona, pero si por varios años fue ella la única no euclideana, hasta que Bernhard Riemann (1826-1866), no exigiendo la infinitud de la recta, sustituyó el V Postulado por el siguiente: "Por un punto exterior a la recta no existe paralela a dicha recta". Dando lugar esto a otra geometría no euclideana, donde la suma de los ángulos interiores de un triángulo es mayor que dos ángulos rectos.

Posteriormente Félix Klein (1849-1925), en dos monografías publicadas en 1871 y 1873 observó la analogía que existe entre la elipse que por ser una cónica cerrada no tiene puntos al infinito y la geometría de Riemann donde las líneas tampoco tienen puntos al infinito, por lo cual la llamó geometría elíptica.

Asi mismo, dado que la parábola puede concebirse como una elipse con un foco al infinito, análoga a las líneas de la geometría euclideana, llamó a ésta, geometría parabólica.

Y dado que en la geometría de Lobachevski las líneas tienen dos puntos al infinito lo que la hace similar a la hipérbola, llamándole por esta razón geometría hiperbólica.

Tratemos de resumir en un cuadro las características esenciales de cada una de estas geometrías.

V POSTULADO DE EUCLIDES

"Si una recta al cortar a otras dos formas de un mismo lado ángulos internos cuya suma es menor que dos rectos entonces al prolongar indefinidamente estas dos rectas ellas se cortan del lado en que están los ángulos mencionados".

POSTULADO DE PLAYFLAIR EQUIVALENTE AL V POSTULADO DE EUCLIDES

"Por un punto exterior de una recta pasa una y solamente una paralela a dicha recta".

Negación de la unicidad
(Lobachevski)
"La paralela a una recta por un punto exteriora ella no es unica".

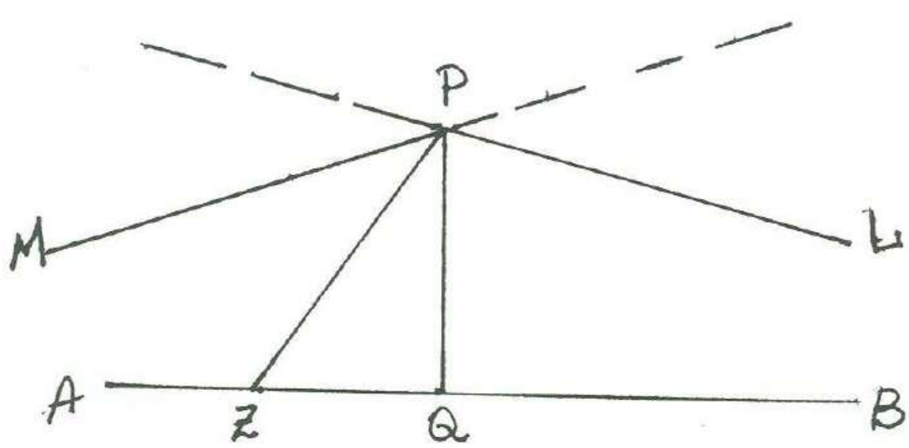
Negación de la existencia
(Riemann)
"Por un punto exterior una recta no existe paralela a dicha recta".

Lobachevski (geometría hiperbólica)	Euclides (Geometría parabólica)	Riemann (geometría eplíptica)
V Postulado: Negación de la Unicidad	V Postulado Unicidad y existencia	V Postulado Negación de la existencia
Las rectas son abiertas ilimitadas y asintóticas. (Ejemplo las asíntotas de una hipérbola)	Las rectas son abiertas e infinitas (Ejem. la paralela Euclideana).	Las rectas son cerradas e ilimitadas (ejemplos las circunferencias máximas de una esfera.
La suma de los ángulos interiores de un triángulo es menor que dos ángulos rectos.	La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.	La suma de los ángulos interiores de un triángulo es mayor que dos ángulos rectos.

GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

A continuación exponemos algunas proposiciones básicas de la geometría hiperbólica la cual se desarrolló con la geometría absoluta, esto es, las nociones comunes, los axiomas, las 28 primeras proposiciones y los cuatro primeros postulados de Euclides (la geometría absoluta es común a las tres geomtrías citadas anteriormente); y el cambio de V Postulado por el Postulado de las paralelas lobachevskiano, que dice:

Si P es un punto fuera de la recta AB y Q el pie de la perpendicular desde P hasta AB, hay desde P dos rectas, PL y PM no coincidentes y no cortan a AB y tales que cualquier recta PZ desde P que quede dentro del < LPZ que contiene a PQ, cortará a AB.



Las rectas PL y PM les llamaremos paralelas a la recta AB que pasan por P.

Las rectas que pasan por P y no quedan dentro de < MPL que contiene a PQ les llamaremos hiperparalelas a AB. Las rectas que pasan por P comprendidas en el < MPL les llamaremos secantes a AB.

Con esto Lobachevski obtuvo un considerable número de resultados sin encontrar contradicción alguna; pero ?Cómo demostrar formalmente la consistencia de esta geometría? En este sentido no propuso ninguna demostración formal, dejando abierta la posibilidad de la inconsistencia para nuevas investigaciones.

La no contrariedad debe deducirse de la posibilidad de aritmetizarla, es decir, de la posibilidad de reducir la solución de cualquier problema geométrico a cálculos aritméticos y transformaciones analíticas, utilizando para ello las fórmulas de la trigonometría hiperbólica deducidas por él mismo.

Probar la consistencia de un sistema de axiomas no es tan sencillo. Si en una teoría aparecen dos axiomas o teoremas que se contradicen, entonces su inconsistencia queda probada de inmediato, pero si no aparecen no podemos asegurar la consistencia o inconsistencia del sistema.

La consistencia de un sistema de axiomas se prueba, entonces, de una manera indirecta y consiste en dar una interpretación al sistema, esto es, se sustituyen los términos indefinidos por entes significativos, Si la interpretación convierte a los axiomas en enunciados verdaderos entonces se tiene lo que se llama un "modelo" del sistema; si el modelo consta de un número finito de objetos reales, entonces queda probada la consistencia al asumirse que la realidad no es contradictoria. Pero si el conjunto tiene infinitos elementos es imposible exhibir un modelo real y entonces el sistema se modela en otro sistema axiomático, en donde, los términos indefinidos del primero se interpretan como conceptos del segundo de donde la consistencia del primero depende de la consistencia del segundo. A esto se le llama prueba de consistencia relativa. Por ejemplo, la geometría analítica es un modelo para la geometría euclideana, y la geometría euclideana es consistente si lo es el sistema de los números reales, es decir, la geometría euclideana es tan consistente como el sistema de los números reales.

Beltrami demostró en 1868 que la geometría no-euclideana podía representarse en una superficie euclideana, esto es, la geometría no euclideana puede modelarse en la euclideana, y desde luego, cualquier inconsistencia en la no-euclideana implica una inconsistencia en la euclideana; y es en este momento cuando se le hace justicia a la obra de Lobachevski lo que originó numerosas investigaciones en las geometrías no euclideanas.

Klein y Poincaré hicieron lo mismo con esta geometría dando modelos en la geometría euclideana y precisamente es el modelo de Poincaré a través del cual analizaremos la geometría hiperbólica.

MODELO DE POINCARÉ

Este modelo consiste en dar una interpretación a los términos no definidos de la geometría hiperbólica dentro de la geometría euclideana, de tal manera que las interpretaciones de los postulados de la geometría hiperbólica son teoremas en la geometría euclideana.

Para esto se utilizan los postulados de Hilbert (Apéndice 2) satisfactorios para la geometría hiperbólica y este conjunto de postulados no son otra cosa que los postulados satisfactorios para la geometría euclideana, cambiando únicamente el postulado de las paralelas de Euclides por el de Lobachevski resultando así un ejemplo de consistencia relativa.

La axiomática de Hilbert, donde descansa la geometría hiperbólica plana es un total de cinco términos no definidos y 15 axiomas. Los términos no definidos son: punto, línea recta, en (una relación entre un punto y una recta), entre (una relación entre un punto y un par de puntos) y congruente (una relación entre pares de puntos y configuraciones llamadas ángulos).

LOS QUINCE AXIOMAS SE DIVIDEN EN CINCO GRUPOS:

I. Incidencia: Estos postulados definen implícitamente la idea expresada por el término "en" y establecen una relación entre los dos entes no definidos: puntos y rectas.

II. Orden: Estos postulados definen implícitamente la idea expresada por el término no definido "entre". Nos asegura la existencia de un número infinito de puntos en una recta.

III. Congruencia: Definen implícitamente la idea expresada por el término no definido "congruente" cuando se aplican a pares de puntos y ángulos.

IV. Paralelismo: Es una de las negaciones (unicidad) del postulado de Playfair, ya que este postulado es equivalente al de paralelismo de Euclides.

V. Continuidad: El primer postulado de este grupo garantiza que si empezamos a medir en un punto de una recta y colocamos hacia un segundo punto una sucesión de distancias iguales (a la unidad de medida) pasaremos por el segundo punto.

El postulado lineal de Cantor que establece una correspondencia biunívoca entre los puntos de una recta y el conjunto de números reales, no es necesario para los teoremas de la geometría hiperbólica.

INTERPRETACIÓN DE LOS TÉRMINOS NO DEFINIDOS DE LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

Sea w un círculo fijo de radio r en el plano euclideano, al interior del círculo lo llamaremos plano de Lobachevski (1-plano); a los puntos anteriores de w llamaremos puntos de Lobachevski (1-puntos); a los arcos de circunferencia o a los segmentos de recta pertenecientes a w y ortogonales a la circunferencia de radio r, los llamaremos rectas de Lobachevski (1-rectas).

Punto entre dos puntos: Dados tres puntos A, B, C (diferentes) en una 1-recta diremos que B está situado entre A y C, si y sólo si. $d(A,C) = d(A,B) + d(B, C)$.

En esta definición se observa la necesidad innmediata de definir distancia entre dos puntos, lo que haremos después de la siguiente definición.

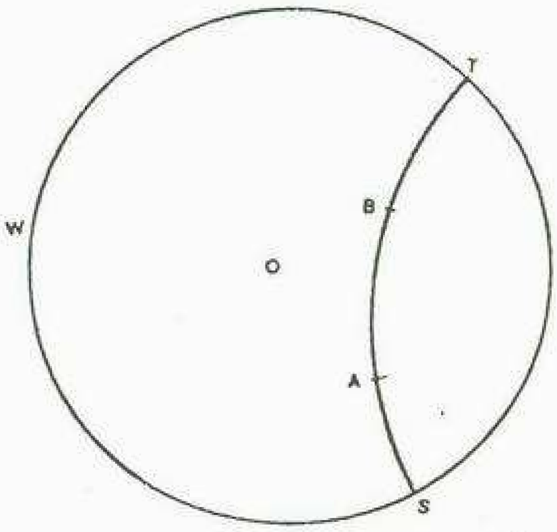
Definición: Los puntos que están entre los puntos A y B son llamados los puntos del l-segmento AB o BA

Definición. La distancia entre dos puntos A y B, se define:

$d(A,B) = \ln\left[\dfrac{\overset{\frown}{AT}}{\overset{\frown}{BT}} \cdot \dfrac{\overset{\frown}{BS}}{\overset{\frown}{AS}}\right] = \ln\,(\overset{\frown}{AB},\overset{\frown}{TS})$ donde S y T son los puntos donde la l-recta que contiene el l-segmento AB corta a la circunferencia w de modo que A queda entre S y B (ver figura).

$\overset{\frown}{AT}$, $\overset{\frown}{BT}$, $\overset{\frown}{BS}$ y $\overset{\frown}{AS}$ son las longitudes de los arcos de circunferencia medidos euclideanamente.

La verificación de que d(A.B) es una métrica, la encontrará usted en el apéndice 3.



DEFINICION:

Llamaremos l-ángulo al conjunto de dos l-semirectas h y k, que parten de un punto A y pertenecen a distintas l-rectas. Se denota por $\widehat{hk}$ o $\widehat{kh}$. (A es el vértice, h,k los lados del ángulo).

La medida de un l-ángulo es igual a la medida (euclideana) en radianes del ángulo formado por las rectas tangentes a las circunferencias (que presentan las l-rectas) en l punto de corte.

DEFINICION:

Llamaremos l-movimiento a cualquier transformación homográfica[1] del círculo w en sí mismo. Cada l-movimiento transforma biunívocamente el l-plano en sí mismo, de modo que los puntos se transforman en puntos y las l-rectas en l-rectas.

En este modelo se verifican los axiomas de incidencia, orden, congruencia, continuidad y paralelismo (de Lobachevski).

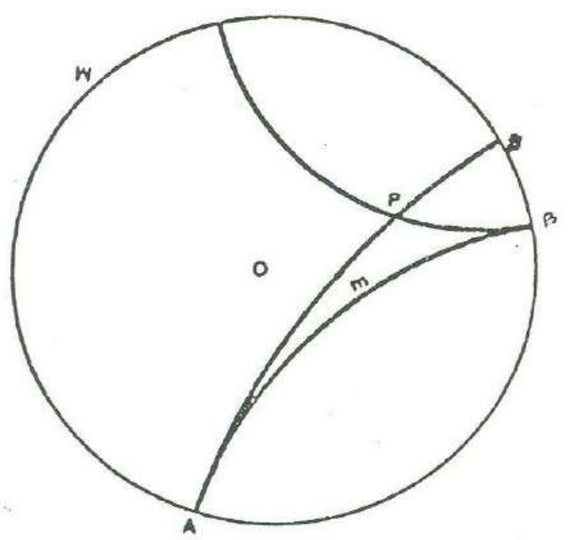
DEFINICION:

Si E es un conjunto de puntos del l-plano y si F es otro conjunto de puntos del l-plano diremos que E es l-congruente al conjunto F, si y sólo si, existe un l-movimiento L que transforma F en E, de modo que L(F)=E (si E es l-congruente a F entonces F es l-congruente a E).

Axioma de paralelismo: Por un punto dado P que no esté en una l-recta dada m pasan al menos dos l-rectas que no cortan a la recta m.

Demostración:

Sean A y B los puntos donde la l-recta m corta a la circunferencia w y sea P el punto que no esté en m, entonces por los puntos A y P trazamos la única circunferencia ortogonal a w, lo mismo con B y P, deduciendo de aquí el resultado pedido.



[1]Se llama transformación homográfica entre dos planos, a toda correspondencia biunívoca entre sus puntos, tal que, a puntos alineados corresponden puntos alineados, es decir, la razón armónica se conserva.

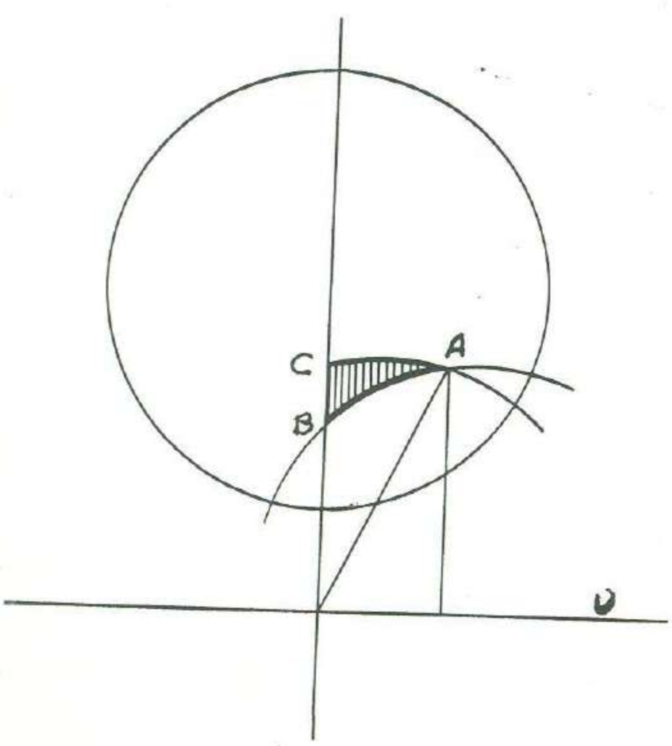
Esto significa entonces que el modelo de Poincaré representa un modelo de la geometría de Lobachevski y que podemos utilizarlo para dar a cada proposición de la planimetría de Lobachevski una interpretación bien concreta en el plano euclideano.

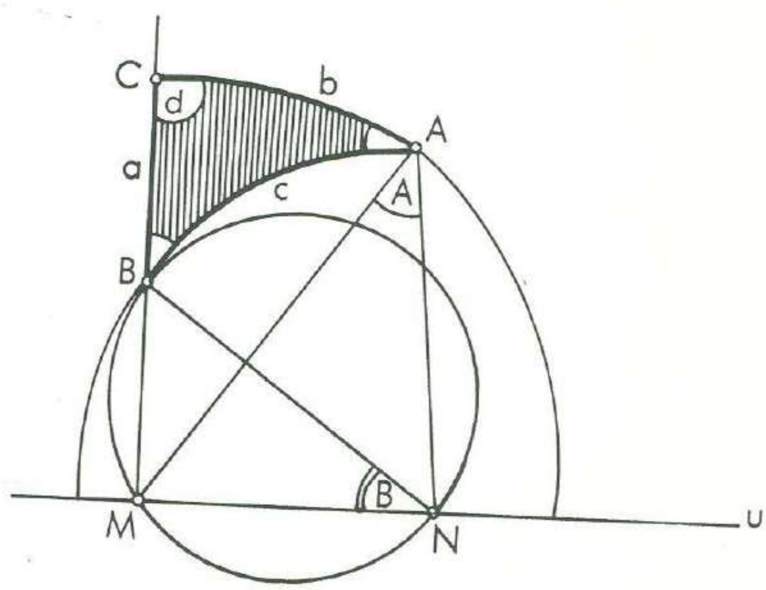
En el modelo de Poincaré se verifican todos los axiomas de la geometría absoluta, pero en lugar del postulado de las paralelas de Euclides se verifica el de Lobachevvski. Esto nos indica que el postulado de Euclides no es una aconsecuencia lógica de estos axiomas.

Utilizando este modelo vamos a estudiar algunos teoremas de la geometría hiperbólica así como algunas fórmulas trigonométricas hiperbólicas.

Teorema 1. La suma de los ángulos de cualquier triángulo es menor que dos ángulos rectos.

Examinemos primero el triángulo ABC de la siguiente figura:





El lado a es un segmento de la perpendicular euclideana a la recta u, b es un arco de la circunferencia euclideana con centro en M y c un arco de la circunferencia euclideana con centro en N. El ángulo C es recto, el ángulo A es igual al ángulo entre las tangentes de las circunferencias b y c en el punto A o, lo que es lo mismo, el ángulo entre los radios NA y MA de estas circunferencias; y el ángulo B igual al ángulo BNM, por ser complemento del mismo ángulo.

Tomando a BN como diámetro, construyamos la circunferencia euclideana q; la cual tiene sólo un punto común B con la circunferencia c y es por esto que el punto A se encuentra fuera

del círculo limitado por la circunferencia q, de donde: $< A = < MAN < < MBN$ y como: $< MBN + < B = d$

entonces: $< A + < B < d$

y es por esto que: $< A + < B + < C < ad$

o bien $< A + < B + < C <$ 2 rectos

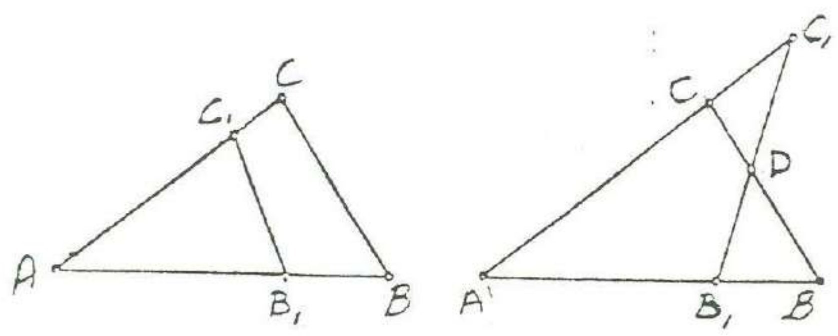
Esta demostración es aplicable a cualquier triángulo rectángulo yaque con la ayuda del correspondiente 1-movimiento,el triángulo se puede situar de tal manera que uno de sus catetos pertenezca a la perpendicular euclideana a la recta u; y si se trata de un triángulo oblicuángulo, se divide éste mediante una de sus alturas en dos triángulos rectángulos. La suma de los ángulos agudos de estos triángulos rectángulos es igual a la suma de los ángulos del triángulo oblicuángulo dado. De aquí, tomando en consideración la desigualdad anterior, se deduce que el teorema es válido para cualquier triángulo.

Teorema 2. La suma de los ángulos del cuadrilátero es menor de 4d.

Para la demostración es suficiente dividir diagonalmente el cuadrilátero en dos triángulos.

Teorema 3. Si los tres ángulos del triángulo ABC son iguales respectivamente, a los tres ángulos del triángulo A'B'C', dichos triángulos son iguales.

Admitamos lo contrario y tracemos respectivamente en los rayos AB y AC los segmentos $AB_1 = A'B'$, $AC_1 = A'C'$. Es evidente que los triángulos AB_1C_1 y A'B'C' son iguales por dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. El punto B_1 no coincide con B, el punto C_1 no coincide con C, ya que en cualquiera de estos casos tendría lugar la igualdad de los triángulos dados, cosa que contradice lo admitido.



Examinemos las Posibilidades siguientes:

a) El punto B_1 se encuentra entre A y B, y C_1 se encuentra entre A y C (ver fig., aquí y también en la siguiente, las rectas hiperbólicas se exponen convencionalmente en forma de rectas euclideanas). No es difícil convencerse de que la suma de los ángulos del cuadrilátero BCC_1B_1 es igual a 4d, cosa imposible en virtud del teorema 2.

b) El punto B_1 se encuentra entre A y B, y C se encuentra entre A y C_1 (ver fig.) Designemos por d el punto de intersección de los segmentos BC y B_1C_1. Puesto que $< C = < C'$ y $< C' = < C_1$, resulta que $< C = < C_1$, lo que es imposible, ya que el ángulo C es externo respecto al triángulo CC_1D. (La demostración del teorema "El ángulo externo de un triángulo es mayor que el interno no adyacente a él", no depende del axioma del paralelismo).

El teorema queda demostrado pues con los supuestos admitidos hemos llegado a una contradicción.

De este teorema se deduce que en la geometría de Lobachevski no existe un triángulo semejante al triángulo dado que no sea igual a este.

La verificación de estos teoremas son solo una muestra de la relación que existe entre estas dos geometrías.

TRIGONOMETRÍA HIPERBÓLICA

En esta parte analizaremos las funciones trigonométricas hiperbólicas y su semejanza con las funciones circulares.

El análisis de las funciones hiperbólicas lo haremos sobre una hipérbola en el plano euclideano, ya que fué precisamente la analogía que existe entre esta cónica y la geometría de Lobachevski la que le dió el nombre de geometría hiperbólica. Pues al considerar la hipérbola como una l-recta, las asíntotas serán las l-rectas paralelas a la l-recta representada por la hipérbola.

Para hacer más explícita la analogía que existe entre las funciones circulares y las funciones hiperbólicas, la exposición se hará en dos columnas, mientras sea posible.

FUNCIONES CIRCULARES

Las funciones circulares las vamos a analizar en la circunferencia -- unidad cuya ecuación es:

FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Las funciones hiperbólicas -- las vamos a analizar en la hi pérbola unidad cuya ecuación es:

Se llama ángulo circular α (en radianes), al formado por los radios OA y OM de la circunferencia y es un número igual a la longitud del arco AM y a su vez igual al doble del área del sector OAM, limitado por los radios OA y OM y el arco de circunferencia, esto es,

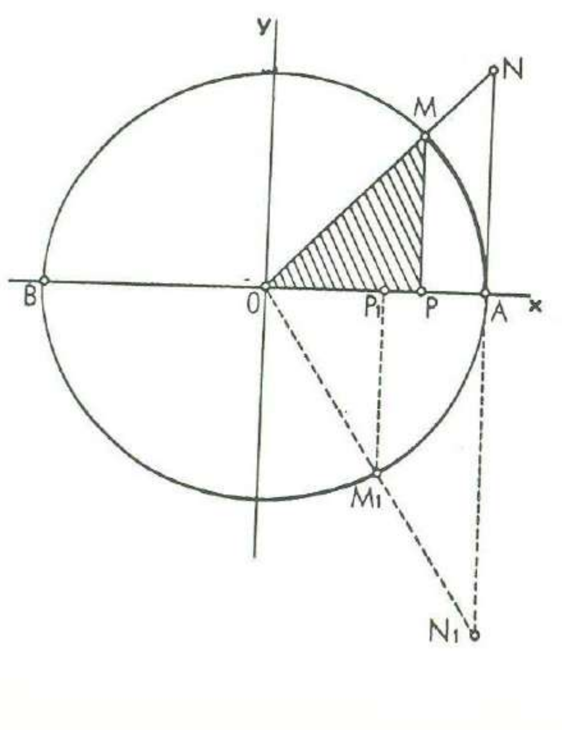
$$\alpha = 2 \text{ (área OAM)}$$

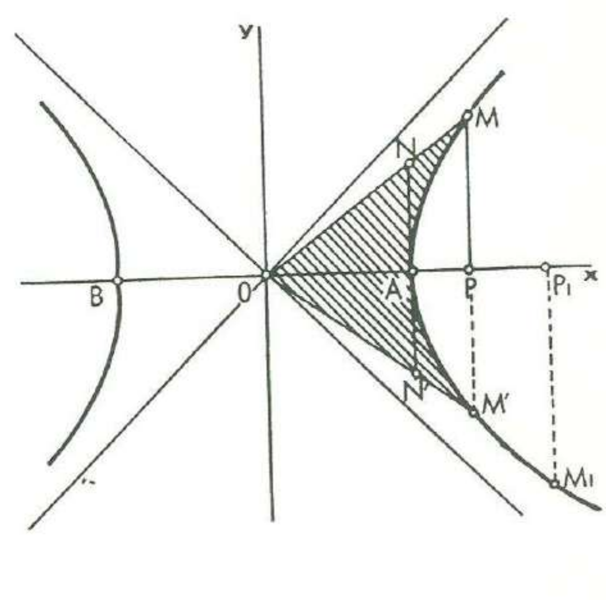
La principal propiedad del ángulo α consiste en la invariabilidad de su valor al girar el sector OAM alrededor de O.

Se llama ángulo hiperbólico t, al formado por dos radios OA y OM de la hipérbola y es un número igual al doble del área del sector, limitado por éstos radios y el arco de la hipérbola, esto es,

$$t = 2 \text{ (área OAM)}$$

La principal propiedad del ángulo hiperbólico t es que su valor no varía en el giro hiperbólico, las áreas seconservan. La contracción a una recta las áreas de todas las figuras cambian en una relación constante igual al factor de contracción k.





En la figura anterior, tracemos MP perpendicular al diámetro OA de la circunferencia. Tracemos una tangente a la circunferencia en el punto A que corta al diámetro OM en N.

En la figura anterior tracemos MP perpendicular al diámetro OA eje de simetría de la hipérbola. Tracemos una tangente a la hipérbola en el punto A, que corta el diámetro OM en N.

Definimos las longitudes de los segmentos PM y OP y AN como el seno, coseno y tangente del ángulo α, respectivamente.

Definimos las longitudes de los segmentos PM, OP y AN como el seno hiperbólico, coseno hiperbólico y tangente hiperbólico del ángulo hiperbólico t, respectivamente.

$$PM = \text{sen } \alpha$$
$$OP = \text{Cos } \alpha$$
$$AN = \text{tg } \alpha$$

$$PM = \text{senh } t$$
$$OP = \cosh t$$
$$AN = \tanh t$$

Esto nos permite

$M(x,y)=M(\cos \alpha, \text{sen } \alpha)$

Esto nos permite

$M(x,y)=M(\cosh t, \text{ senh } t)$

Recordemos que t se ha definido como el doble del área OAM, entonces nuestro problema aquí es calcular el área OAM (ver figura anterior)

Area OAM = área Δ OMP - área bajo la hipérbola desde A hasta M

Area bajo la hipérbola desde A hasta M = $\int_1^x \sqrt{x^2-1}\ dx$

al resolver esta integral obtenemos:

$$\int_1^x \sqrt{x^2-1}\ dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-1} - \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right]$$

de donde:

$$\text{Area OAM} = \frac{x\ y}{2} - \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{1}{2}\ \ln\left[x + \sqrt{x^2-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left[x + \sqrt{x^2-1}\right]$$

y como t = 2 (área OAM)

$$t\ (x) = \ln\left[x + \sqrt{x^2-1}\right]$$

utilizando esta expresión verificaremos con un ejemplo, la definición de seno y coseno hiperbólico.

Sea $x = 10$

$t\ (10) = \ln\left[10 + \sqrt{99}\right] = 2.993222.$

$t = 2.993222$

localizando el senh 2.993222 y cosh 2.993222 en la calculadora.

Obtenemos:

senh 2.993222 = 9.949874371

cosh 2.993222 = 9.999991581

Coincidiendo esto con la definición ya dada de

$\operatorname{senh} t = PM = y = \sqrt{99} = 9.949874371$

$\cosh t = OP = x = 10$

regresemos a la expresión para t (x)

$$t(x) = \ln\left[x + \sqrt{x^2-1}\right]$$

$t = \ln\ (x + y)$

$e^t = x + y$ y $e^{-t} = \dfrac{1}{x+y}.$

Calculemos $\dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ y $\dfrac{e^t + e^{-t}}{2}.$

$$\frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{1}{2}\left[x + y - \frac{1}{x + y}) \right]$$

$$= \frac{(x + y)^2 - 1}{2\,(x + y)} = \frac{2y\,(x + y)}{2\,(x + y)} = y = \operatorname{senh} t$$

de donde:

$$\operatorname{senh} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

$$\frac{e^t + e^{-t}}{2} = \frac{1}{2}\,\left(x + y + \frac{1}{x + y} \right) = \frac{(x + y)^2 + 1}{2\,(x + y)}$$

$$= \frac{2x\,(x + y)}{2\,(x + y)} = x = \cosh t$$

de donde:

$$\operatorname{Cosh} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

y como $\operatorname{th} t = \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cosh t}$ tenemos que

$$\operatorname{th} t = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$$

y son precisamente estas las fórmulas que generalmente utilizan los textos de trigonometría hiperbólica para demostrar identidades trigonométricas.

Al desarrollar en series la expresión e^t obtenemos:

$$e^t = 1 + \frac{t}{1} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots\ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots$$

Obteniendo así que :

$$\operatorname{senh} t = \frac{t}{1} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots$$

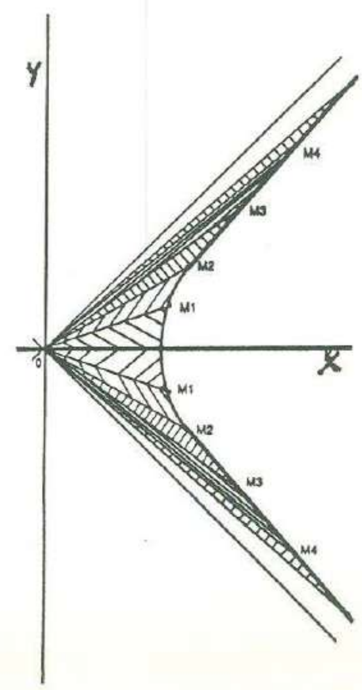
$$\cosh t = 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} + \ldots$$

Estas fórmulas permiten calcular los valores de senh t y cosh t sólo que para un mayor grado de exactitud es necesario tomar un número suficientemente grande de términos en la serie infinita.

Pero regresemos a la analogía que veníamos haciendo entre funciones circulares e hiperbólicas.

Se conoce que las funciones trigonométricas del ángulo α (de las funciones circulares) varían periodicamente con periodo igual a 2π .

Las funciones hiperbólicas son aperiodicas..El ángulo hiperbólico t puede variar en los límites desde cero hasta infinito. Para comprobarlo (o en otras palabras, comprobar que el área del sector hiperbólico AOM puede ser tan grande como se quiera); examinemos el ángulo hiperbólico AOM_1 cuyo valor designaremos con t_1. Realicemos el giro hiperbólico que traslada el punto A al punto M_1 (ver figura); el punto M_1 pasará al punto M_2, M_2 en el M_3, M_3 en el M_4, etc.



y como en un giro hiperbólico las áreas de las figuras no varían su valor; entonces la áreas de los sectores hiperbólicos $AOM_1, M_1OM_2, M_2, OM_3, M_3OM_4$ . . . son todas iguales, razón por la cual los ángulos hiperbólicos AOM_1, AOM_2, AOM_3 AOM_4 son iguales, respectivamente, a t_1, $2t_1$, $3t_1$, $4t_1$ . . . De aquí se deduce que el ángulo hiperbólico puede ser tan grande como se quiera.

De la definición de funciones hiperbólicas se desprende que al variar el ángulo hiperbólico t desde 0 hasta infinito, el senh t varía desde 0 hasta infinito, cosh t varía desde 1 hasta infinito, tanh t varía desde 0 hasta 1. Observemos, además, que senh 0 = tanh 0 = 0 y cosh 0 = 1; de la misma manera que sen 0 = tan 0 = 0 y cos 0 = 1.

Gráficas de las Funciones Circulares e Hiperbólicas

Haciendo la analogía completa con las funciones circulares, consideremos el ángulo AOM_1 negativo, igual a $= -t_1$, y admitimos que

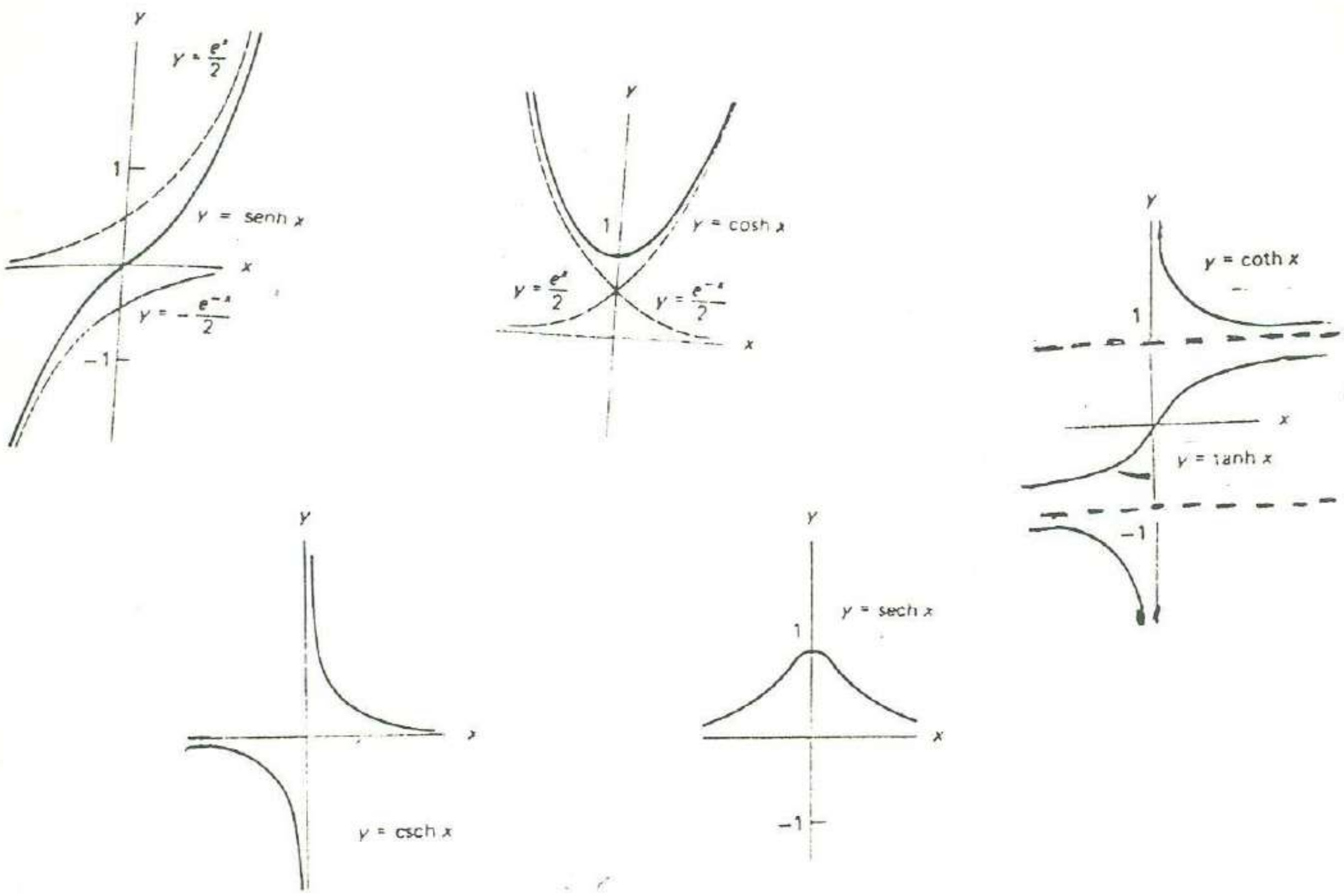
$$\operatorname{senh}(-t_1) = -M_1P_1 = -\operatorname{senh} t_1,$$

$$\cosh(-t_1) = OP_1 = \cosh t_1$$

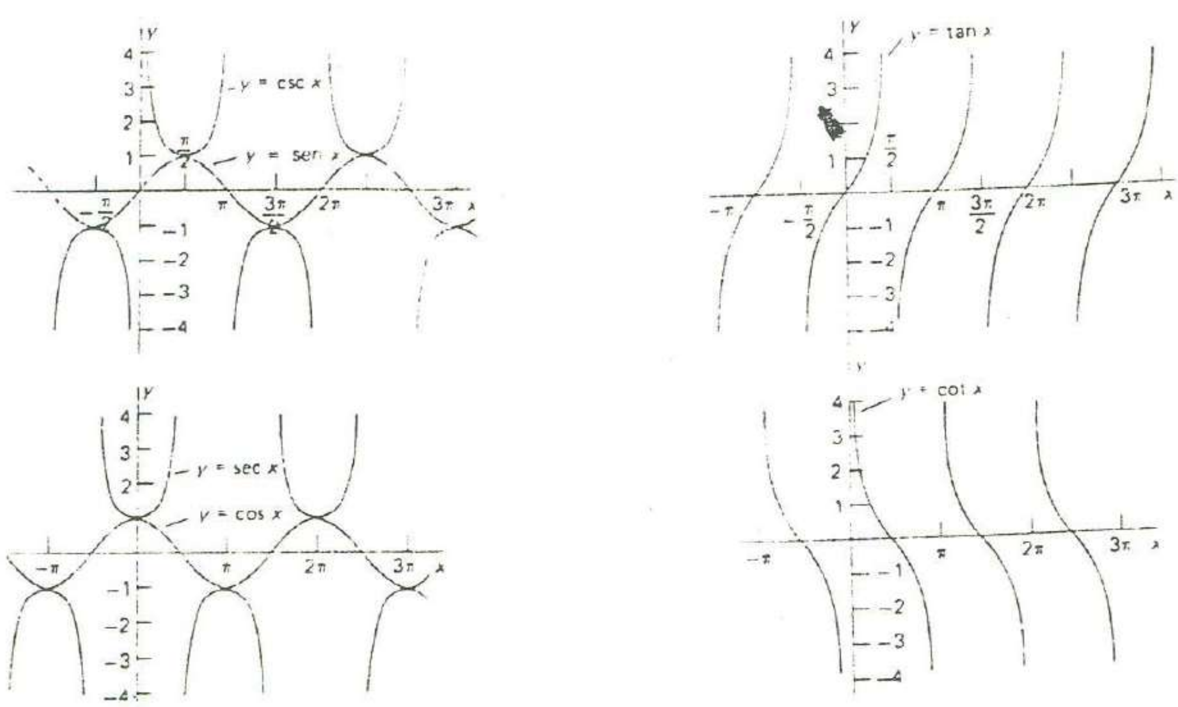
$$\tanh(-t_1) = -N_1A = -\tanh t_1$$

Es así como las gráficas de las funciones hiperbólicas quedan representadas de la siguiente manera (también aparecen las gráficas de las funciones circulares).

GRAFICAS DE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS

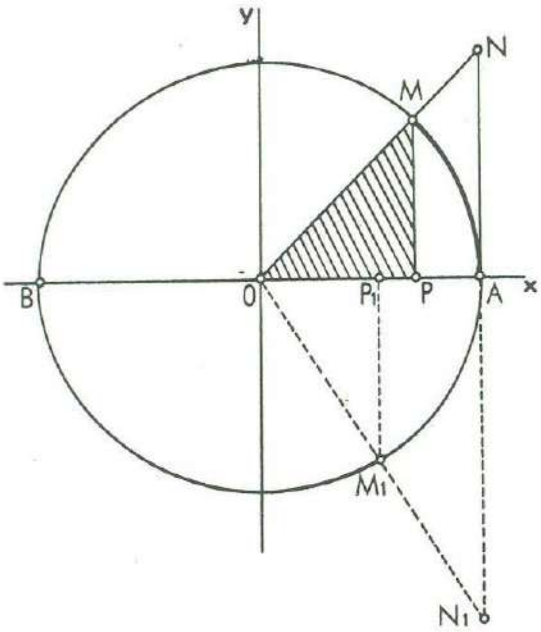


GRAFICAS DE LAS FUNCIONES CIRCULARES



FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

Vamos a deducir ahora las dependencias principales entre las funciones trigonométricas tanto circulares como hiperbólicas



De la semejanza de los triángulos OMP y ONA se deduce que:

$$\frac{AN}{OA} = \frac{PM}{OP}$$

pero $\frac{AN}{OA} = \tan\alpha$

(dado que OA = 1)

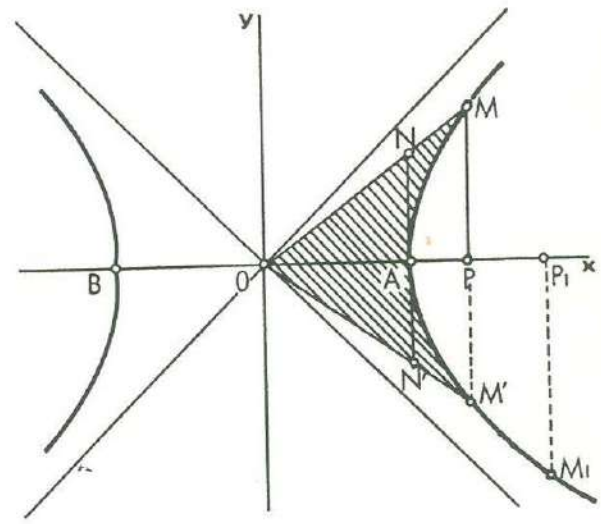
y $\frac{PM}{OP} = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha}$

De este modo obtenemos:

$$\tan\alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha}.$$

Luego, las coordenadas del punto M de la circunferencia son: OP = X, PM = Y.

La ecuación de la circunfe--



De la semejanza de los triángulos OMP y ONA se deduce que:

$$\frac{AN}{OA} = \frac{PM}{OP}$$

pero $\frac{AN}{OA} = \tanh t$

(dado que OA = 1)

$\frac{PM}{OP} = \frac{\text{senh}\ t}{\cosh t}$

De este modo obtenemos:

$$\tanh t \ \frac{\text{senh}\ t}{\cosh t}.$$

Luego, las coordenadas del punto M de la hipérbola son OP = X, PM = Y.

La ecuación de la hipérbola unidad

rencia unidad tiene la forma $X^2 + Y^2 = 1$. Por consiguiente,

$$OP^2 + PM^2 = 1,$$

ó bien

$$\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1. \quad (II)$$

Al dividir ambos miembros de identidad (II) primero por $\cos^2 \alpha$, y luego, por $\operatorname{sen}^2 \alpha$, obtenemos dos fórmulas más:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad (III)$$

$$\operatorname{cotg}^2 \alpha + 1 \; \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha}, \quad (IV)$$

tiene la forma $X^2 - Y^2 = 1$. Por consiguiente,

$$OP^2 - PM^2 = 1,$$

ó bien,

$$\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1. \quad (II)$$

A dividir ambos miembros de la indentidad (II) primero por $\cosh^2 t$, y luego, por $\operatorname{senh}^2 t$, obtenemos dos fórmulas más:

$$1 - \tanh^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad (III)$$

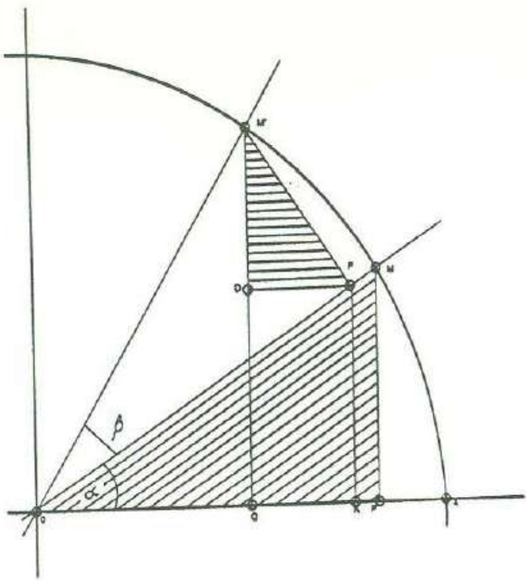
$$\frac{1}{\cosh^2 t} - 1 = \frac{1}{\operatorname{senh}^2 t} \quad (IV)$$

FÓRMULAS PARA LA SUMA DE FUNCIONES

Deduzcamos ahora las fórmulas de adición para las funciones circulares e hiperbólicas.

Supongamos que el giro alrededor del punto O traslada los radios OA y OM de la circunferencia a la posición de los radios OA' y OM'. Las líneas PM y OP del seno y coseno del ángulo α se trasladarán a los segmentos P'M' y OP'.

Supongamos que el giro hipebólico traslada los radios OA y OM de de la hipérbola en los radios OA' y OM'. Las líneas PM y OP del seno y coseno hiperbólico del ángulo t se trasladarán en los segmentos P'M' y OP'.



Es evidente que el segmento-M'P' es perpendicular al diá metro OA'. Puesto que P'M'= PM y OP' = OP (en el giro -- no cambia la longitud del--- segmento).

Las igualdades

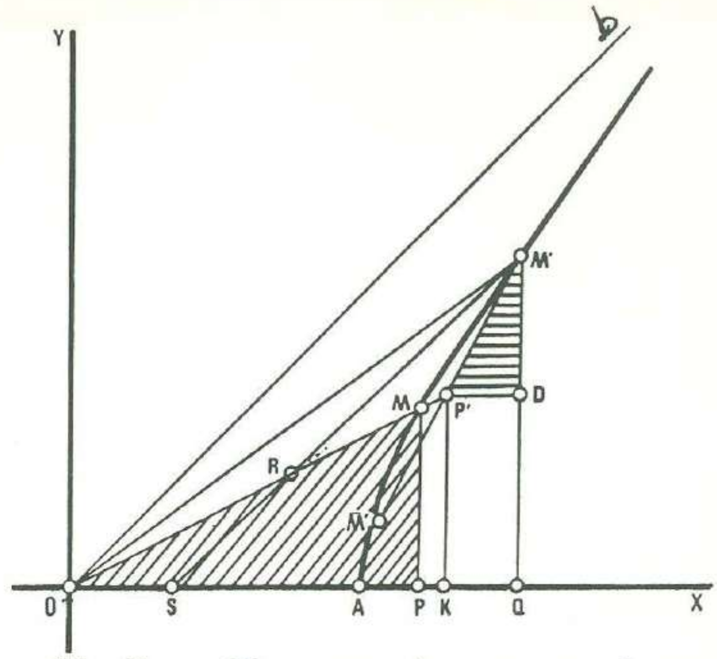
sen α = PM

cos α = OP

nos dan evidentemente

sen α = P'M'

cos α = OP'



Si M y M', son los segundos puntos, en los que MP y M'P' cortan a la hipérbola entonces podemos decir que PM = P$\bar{M}$ (pues OA-- es el eje de simetría de la hipérbola) y M'P' = P'$\bar{M}$' (por la propiedad del giro hiperbólico que-- nos dice que la relación entre -- los segmentos de una misma recta-permanece constante ya que en la-contracción de una recta la relación entre segmentos se conserva) En otras palabras las cuerdas M$\bar{M}$ y M'$\bar{M}$' son conjugadas con los -- diámetros OP y OP', respectivamente .

Las igualdades

$$\text{senh } t = PM = \frac{PM}{OA}$$

$$\cosh t = OP = \frac{OP}{OA}$$

(dado que OA = 1)

demostraremos que

$$\text{sen } t = \frac{PM'}{OA'}$$

$$\cosh t = \frac{OP'}{OA}$$

Para ello, tracemos por los pun-- tos $M, \bar{M}$, M' y $\bar{M}'$ las rectas paralelas a las asíntotas:

$MR \parallel M'R' \parallel ob$.

$\bar{M}R \parallel \bar{M}'R' \parallel Oa$.

y aplicando la propiedad de la hipérbola que nos dice que las rectas trazadas por los extremos de- una cuerda arbitraria de la hipérbola paralelamente a las asínto-- tas de ésta, se cortan en el diámetro conjugado con la cuerda, tenemos que R y R' pertencen respectivamente, a los diámetros OA y-- OA'.

Como

$\sphericalangle MR\bar{M} = \sphericalangle M'R'\bar{M}' = \sphericalangle bOa = 90°$

Los triángulos $MR\bar{M}$ y $M'R'\bar{M}'$ son rectángulos donde P y P' son- los puntos medios de la hipotenusa y por lo tanto circuncentros.

de donde:

$$\operatorname{senh} t = \frac{PM}{OA} = \frac{PR}{OA} = \frac{P\bar{M}}{OA}$$

$$\cosh t = \frac{OP}{OA}.$$

y por la propiedad de que en un giro hiperbólico la relación entre los segmentos de una misma recta permanece constante.(Pues en la contracción de una recta la relación entre segmentos de ella, se conserva), podemos entonces decir que

$$\frac{PR}{OA} = \frac{P'R'}{OA'}, \quad \frac{OP}{OA} = \frac{OP'}{OA'}$$

y por lo tanto

$$\operatorname{senh} t = \frac{PM}{OA} = \frac{PR}{OA} = \frac{P'R'}{OA} = \frac{P'M'}{OA'}$$

Ahora vamos a encontrar las-expresiones correspondientes a:

$$\text{sen}\,(\alpha + \beta)$$
$$\cos\,(\alpha + \beta)$$

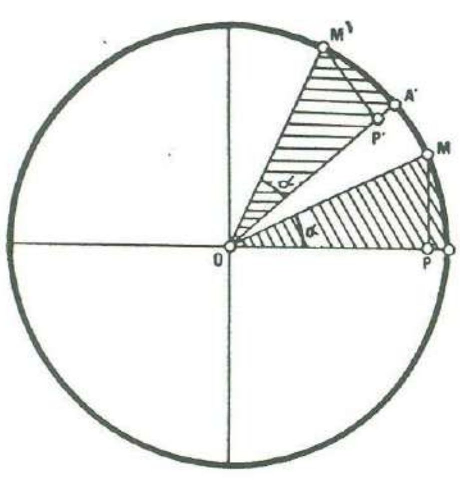
Supongamos que

$< AOM = \alpha$ y $< MOM' = \beta$

tracemos las perpendiculaares MP y M'Q de los puntos M y M' a OA. Del punto M' tracemos - la perpendicular M'P'al radio OM, y del punto P' tracemos-- dos perpendiculares:

P'D al segmento M'Q.

P'K al segmento OA.



En este caso tenemos

$\text{sen}\,\alpha = PM$, $\text{sen}\,\beta = P'M'$

$$\cosh t = \frac{OP}{OA} = \frac{OP'}{OA'} .$$

y esto precisamente es lo que que queríamos demostrar.

Ahora vamos a encontrar las expresiones correspondientes a

$$\text{senh}\,(t + \mu)$$
$$\cosh\,(t + \mu)$$

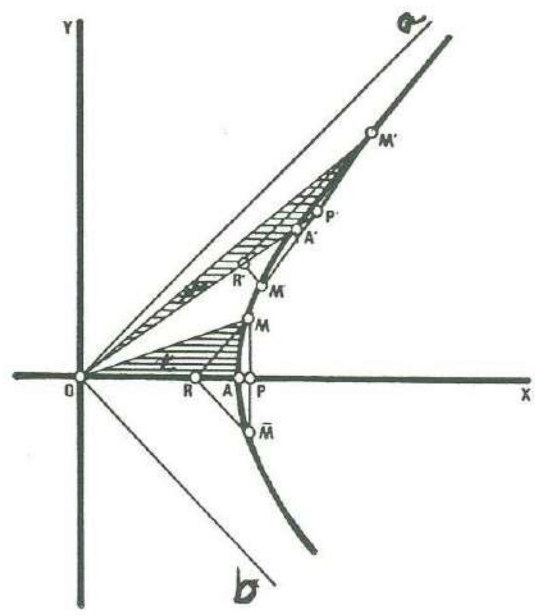
Supongamos que

$< AOM = t$ y $< MOM' = u$

tracemos las perpendiculares MP y M'Q de los puntos M y M' a OA. Del punto M' tracemos la cuerda $M'\bar{M}'$ conjugada con OM. La cuerda $M'\bar{M}'$corta a OM en el punto P'; de este punto tracemos dos perpendiculares

P'D al segmento M'Q

P' K al segmento OA



En este caso tenemos

$$\text{senh}\,t = PM, \quad \text{senh}\,u = \frac{P'M'}{OM}$$

$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = QM' = KP' + DM$

Los triángulos OMP y OP'K son semejantes: ambos son rectángulos y tienen un ángulo co-- mún.

De esto se deduce que:

$$\frac{KP'}{OP'} = \frac{PM}{OM.}$$

$$KP' = \frac{OP'}{OM} \cdot PM$$

$$KP' = \cos\beta . \operatorname{sen}\alpha$$

Los triángulos OMP y M'P'D--- también son semejantes, dado ambos son rectángulos, y, ade más, $\angle MOP = \angle P'M'D'$, por ser complemento de ángulos igua-- les.

De esta semejanza se deduce--

$$\frac{DM'}{P'M'} = \frac{OP}{OM}$$

$$DM' = \frac{P'M'}{OM} . OP$$

$$DM' = \operatorname{sen}\beta . \cos\alpha$$

Obteniendo así

$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta +$

$\cos\alpha \operatorname{sen}\beta$--------------(V)

$\operatorname{senh}(t + u) = QM' = KP' + DM'$

Los triángulos OMP y OP'K son se- mejante: ambos son rectángulos y tienen un ángulo común.

De esto se deduce que:

$$\frac{KP'}{OP'} = \frac{PM}{OM} .$$

$$KP' = \frac{OP'}{OM} \cdot PM$$

$$KP' = \cosh u \operatorname{senh} t$$

Los triángulos OMP y M'P'D tam--- bién son semejantes, dado que am- bos son rectángulos y, además, -- $\angle MOP = \angle P'M'D$. Pues, la recta-- M'R, paralela a la asíntota Ob de la hipérbola, corta al diámetro - OM en el punto R. y al eje OA, en S.

Entonces $\angle QM'S = \angle QSM'$

además $\angle P'M'R = \angle M'RP' = \angle SRO$

(dado que $P'M' = P'R$)

Pero $\angle MOP = \angle QSM' - \angle SRO =$

$= \angle QM'S - \angle M'RP' = \angle P'M'D.$

de donde $\angle MOP = \angle P'M'D.$

De la semejanza de estos triángulos OMP y M'P'D, tenemos

$$\frac{DM'}{P'M'} = \frac{OP}{OM.}$$

$$DM' = \frac{P'M'}{OM} \cdot OP$$

$$DM' = \operatorname{senh} u . \cosh t$$

y por lo tanto

$\operatorname{senh}(t + u) = \operatorname{senh} t \cosh u +$

De la misma manera tenemos que:

$\cos(\alpha + \beta) = OQ = OK - DP'$

De la semejanza de los triángulos OMP y OP'K, se deduce:

$$\frac{OK}{OP'} = \frac{OP}{OM}.$$

$$OK = \frac{OP'}{OM} \cdot OP$$

$OK = \cos\beta . \cos\alpha$

y de la semejanza de los triángulos OMP y M'P'D, tenemos:

$$\frac{DP'}{P'M'} = \frac{PM}{OM}$$

$$DP' = \frac{P'M'}{OM} \cdot PM$$

$DP' = \operatorname{sen}\beta . \operatorname{sen}\alpha$

por lo tanto

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$ ----------- (VI)

ya con estas dos últimas fórmulas y con (I) y (II), podemos deducir todas las demás, fórmulas trigonométricas.

por ejemplo:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}$$

A dividir por los $\cos\alpha \cos\beta$

senh u cosh t. -------------- (V)

De la misma manera tenemos que:

$\cosh(t + u) = OQ = OK + P'D$

De la semejanza de los triángulos OMP y OP'K, se deduce:

$$\frac{OK}{OP'} = \frac{OP}{OM}$$

$$OK = \frac{OP'}{OM} \cdot OP$$

$OK = \cosh u . \cosh t$

y de la semejanza de los triángulos OMP y M'P'D, tenemos:

$$\frac{P'D}{P'M'} = \frac{PM}{OM}$$

$$P'D = \frac{P'M'}{OM} \cdot PM$$

$P'D = \operatorname{senh} u \operatorname{senh} t$

por lo tanto

$\cosh(t + u) = \cosh t \cosh u + \operatorname{senh} t \operatorname{senh} u$ --------------(VI)

ya con estas dos últimas fórmulas y con (I) y (II), podemos deducir todas las demás fórmulas de la trigonometría hiperbólica.

Por ejemplo:

$$\tan h(t + u) = \frac{\operatorname{senh}(t + u)}{\cosh(t + u)}$$

$$= \frac{\operatorname{senh} t \cosh u + \cosh t \operatorname{sen} h\, u}{\cosh t \cosh u + \operatorname{senh} t \operatorname{sen} h\, u}$$

Al dividir por cosh t cosh u el -

el número y denominador de la fracción en el segundo miem-- bro, obtenemos:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\,\tan\beta} \qquad \text{(VII)}$$

Si $\alpha=\beta$, las fórmulas (V) (VI) y (VII) toman la forma:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\,\operatorname{sen}\alpha\,\cos\alpha, \qquad \text{(VIII)}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha, \qquad \text{(IX)}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}. \qquad \text{(X)}$$

numerador y el denominador de la- fracción en el segundo miembro, - obtenemos:

$$\tanh(t + u) = \frac{\tanh t + \tanh u}{1 + \tanh t\,\tanh u} \qquad \text{(VII)}$$

Si u=t, las fórmulas (V),(VI) y (VII) toman la forma :

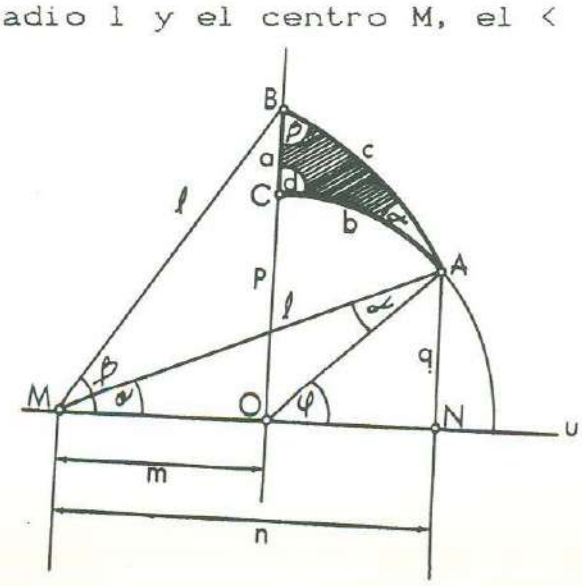
$$\operatorname{senh} 2t = 2\,\operatorname{senh} t\,\cosh t, \qquad \text{(VIII)}$$

$$\cosh 2t = \cosh^2 t + \operatorname{senh}^2 t, \qquad \text{(IX)}$$

$$\tan 2t = \frac{2\tanh t}{1 + \tan^2 t}. \qquad \text{(X)}$$

Nuevamente regresaremos al modelo de Poincaré y analizaremos algunas igualdades trigonométricas.

Para ello, consideremos el triángulo ABC (ver figura siguiente) donde el lado BC es un segmento de la recta euclideana OB (OB U), el lado CA es un arco de la circunferencia euclideana con el radio 1 y el centro O, el lado AB es un arco de la circunferencia euclideana con el radio l y el centro M, el $\angle$ C es recto, el $\angle$ A = α y el $\angle$ B = β.



Desde el punto A bajemos la perpendicular AN sobre la recta u y sean
OB = p, NA = q, MO = m, MN = n, < NMA = Ø, < NOA = φ.

Designemos las longitudes hiperbólicas de los lados BC, CA y AB del triángulo dado, respectivamente, por a, b y c. (Por el contrario, l, m, n, p y q son las longitudes euclideanas).

Entonces:

$$< OAM = \alpha < OMB = \beta$$

ya que las tangentes en el punto A de los lados del ángulo A son perpendiculares a los lados del ángulo OAM, y las tangentes en el punto B a los lados del ángulo B son perpendiculares a los lados del ángulo OMB.

Establezcamos dependencias entre estas magnitudes.
De los triángulos OBM y OAN tenemos:

$$p^2 = l^2 - m^2, \qquad (1)$$

En el triángulo OAN tenemos:

$$q^2 + (n - m)^2 = 1 = (OA)^2$$

$$q^2 + n^2 - 2nm + m^2 = 1 = (OA)^2$$

pero $\qquad q^2 + n^2 = l^2$

entonces:

$$1 = l^2 - 2nm + m^2 = (AO)^2 \qquad (2)$$

restando (2) de (1) tenemos

$$p^2 - 1 = 2mn - 2m^2 = 2m(n-m) \qquad (3)$$

y sumando tenemos

$$p^2 + 1 = 2l^2 - 2\ mn = 2\ (l^2 - mn) \qquad (4)$$

por la definición de distancia hiperbólica cuando la recta que contiene el segmento se expone en forma de recta euclideana, tenemos que:

$$a = \ln \left[\frac{OB}{OC}\right] = \ln \left[\frac{p}{1}\right] = \ln p$$

De donde:

$$e^a = p \qquad y \qquad e^{-a} = \frac{1}{p},$$

$$\operatorname{senh} a = \frac{e^a - e^{-a}}{2} = \frac{1}{2}\left[p - \frac{1}{p}\right] = \frac{p^2 - 1}{2p}$$

pero $p^2 - 1 = 2m\ (n-m)$

$$\text{entonces } \operatorname{senh} a = \frac{p^2 - 1}{2p} = \frac{2\ m\ (n-m)}{2p} = \frac{m\ (n-m)}{p} \qquad (5)$$

de igual forma:

$$\cosh a = \frac{e^a + e^{-a}}{2} = \frac{1}{2}\left[p + \frac{1}{p}\right] = \frac{p^2 + 1}{2p}$$

pero $p^2 + 1 = 2(l^2 - mn)$

$$\cosh a = \frac{2\ (l^2 - mn)}{2p} = \frac{l^2 - mn}{p}$$

$$\tan h\ a = \frac{m(n-m)}{l^2 - mn}$$

Del triángulo OAN tenemos:

$$\operatorname{sen} \varphi = q, \qquad \cos \varphi = n - m \qquad \tan \varphi = \frac{q}{n-m}$$

y como $\qquad \varphi \qquad 1 + \cos \varphi \qquad 1 + n - m$

$$\cot \frac{}{2} = \frac{}{\operatorname{sen} \varphi} = \frac{}{q}$$

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{\operatorname{sen} \varphi} = \frac{1 - n + m}{q}$$

En los triángulos OBM y OAN tenemos:

$$\operatorname{sen} \emptyset = \frac{c}{l}, \qquad \cos \emptyset = \frac{n}{l}, \qquad \tan \emptyset = \frac{q}{n}$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{p}{l}, \qquad \cos \beta = \frac{m}{l}, \qquad \tan \beta = \frac{p}{m}.$$

de aquí que:

$$\cot \frac{\emptyset}{2} = \frac{1 + \cos \emptyset}{\operatorname{sen} \emptyset} = \frac{1 + \frac{n}{l}}{\frac{q}{l}} = \frac{l + n}{q}$$

$$\tan \frac{\emptyset}{2} = \frac{1 - \cos \emptyset}{\operatorname{sen} \emptyset} = \frac{1 - \frac{n}{l}}{\frac{q}{l}} = \frac{l - n}{q}$$

$$\tan \frac{\beta}{2} = \frac{1 - \cos \beta}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{1 - \frac{m}{l}}{\frac{p}{l}} = \frac{l - \beta}{p}$$

$$\cot \frac{\beta}{2} = \frac{1 + \cos \beta}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{1 + \frac{m}{l}}{\frac{p}{l}} = \frac{l + m}{p}$$

En el triángulo OAM tenemos que:

$$\alpha = \varphi - \emptyset$$

y como ya conocemos sen φ, cos φ, sen $\emptyset$ y cos $\emptyset$, podemos calcular:

$$\operatorname{sen} \alpha = (\operatorname{sen} \varphi - \emptyset) = \operatorname{sen} \varphi \cos \emptyset - \cos \varphi \operatorname{sen} \emptyset =$$

$$= \frac{qn - q(n-m)}{l} \qquad \frac{qm}{l}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{qm}{l}$$

$$\cos \alpha = \cos (\varphi - \emptyset) = \cos \varphi \cos \emptyset + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \emptyset =$$

$$= \frac{n(n - m) + q^2}{l} = \frac{n^2 - nm + q^2}{l}$$

pero $q^2 = l^2 - n^2$

$$\cos \alpha = \frac{n^2 - mn + l^2 - n^2}{l} = \frac{l^2 - mn}{l}$$

$$\tan \alpha = \frac{qm}{l^2 - mn}$$

Por la fórmula para la recta hiperbólica cuando ésta se expone como un marco de cinrcunferencia euclideana, tenemos que:

$$AB_h = c = \ln (\cot \frac{\emptyset}{2} \tan \frac{\beta}{2}$$

de donde:

$$e^c = \cot \frac{\emptyset}{2} \tan \frac{\beta}{2} = \frac{(l + n)(l - m)}{pq} = \frac{l^2 + ln - lm - mn}{pq}$$

$$e^{-c} = \tan \frac{\emptyset}{2} \cot \frac{\beta}{2} = \frac{(l \quad n)(l + m)}{pq} = \frac{l^2 - ln + lm - nm}{pq}$$

de donde

$$\operatorname{senh} c = \frac{l (n - m)}{pq} \tag{8}$$

$$\cosh c = \frac{l^2 - mn}{pq} \tag{9}$$

$$\tanh c = \frac{l (n - m)}{l^2 - mn}. \tag{10}$$

y como $AC_h = b = \ln \cot \frac{\varphi}{2}$

entonces

$$e^b = \cot \frac{\varphi}{2} = \frac{l + n - m}{q}, \quad e^{-b} = \tan \frac{\varphi}{2} = \frac{l - n + m}{q}$$

De aquí

$$\operatorname{senh} b = \frac{n - m}{q} ,$$

$$\cosh b = \frac{1}{q} ,$$

$$\tan b = n - m$$

Utilizando estas igualdades fácilmente se pueden comprobar las siguientes fórmulas de la trigonometría hiperbólica.

$\cosh c = \cosh a \,.\, \cosh b$

$\cosh c = \cot \alpha \,.\, \cot \beta$

$\operatorname{senh} a = \operatorname{senh} c \,.\, \operatorname{sen} \alpha$

$\operatorname{senh} b = \operatorname{senh} c \,.\, \operatorname{sen} \beta$

$\tanh a = \operatorname{senh} b \,.\, \tan \alpha$

$\tanh a = \tanh c \,.\, \cos \beta$

$\tanh b = \operatorname{senh} a \,.\, \tan \beta$

$\tanh b = \tanh c \,.\, \cos \alpha$

$\cos \alpha = \cosh a \,.\, \operatorname{sen} \beta$

$\cos \perp\!\!\perp = \cosh b \,.\, \operatorname{sen} \alpha$

Es claro que para valores de a, b y c suficientemente pequeños, de las dependencias entre los elementos del triángulo rectángulo se deducen igualdades aproximadas, semejantes a las fórmulas de la trigonometría euclideana; por ejemplo, al desarrollar por series la fórmula cosh c = cosh a. cosh b tenemos:

$$\left(1 + \frac{c^2}{2!} + \frac{c^4}{4!} \; . \; . \; . \right) = \left(1 + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} + \; . \; . \; . \right)$$
$$\left(1 + \frac{b^2}{4!} + \frac{b^4}{4!} + \; . \; . \; . \; \right)$$

de donde, para los valores de a, b y c suficientemente pequeños las magnitudes c^4, a^4, b^4, c^6, a^6, b^6, . . . son despreciables, quedando entonces:

$$\left(1 + \frac{c^2}{2}\right) \approx \left(1 \;\frac{a^2}{2}\right) \left(1 + \frac{b^2}{2}\right)$$

$$1 + \frac{c^2}{2} \approx 1 + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{a^2b^2}{4}$$

del término $\frac{a^2b^2}{4}$ también nos podemos olvidar por insignificante, de donde

$$c^2 \approx a^2 + b^2$$

fórmula que coincide con el teorema de Pitágoras de la geometría euclideana.

CAPITULO IV

INFLUENCIA DE LAS GEOMETRÍAS NO-EUCLIDEANAS EN LA AXIOMÁTICA FORMAL Y LA CONCEPCIÓN DEL ESPACIO FÍSICO.

INTRODUCCIÓN

El trabajo de Lobachevski no solo sirvió para formular una geometría más general que la Euclideana sino que dió origen a un cambio de la matemática en general y, después, trascendió las barreras de las ciencias exactas provocando una de las revoluciones de mayor alcance en el pensamiento científico y filosófico.

Una de las consecuencias de esta revolución fue la demolición de la filosofía Kantiana sobre el espacio, problema vital para el enriquecimiento de la misma. En este sentido el descubrimiento de la pangeometría marca un momento crucial para la filosofía; llegándose así a la generalización del concepto de espacio, lo cual condujo posteriormente, a la importante teoría de los espacios obstractos; parte de la cual ha encontrado aplicación en la teoría física de la relatividad.

Precisamente en este capítulo se pretende abordar la influencia que las geometrías no euclideanas han tenido en el concepto de axiomática formal y la concepción de espacio físico; pues la aparición de dichas geometrías planteó a la física el problema de aclarar si el espacio físico real es euclideano , como antes se pensaba; y si no lo es, a que tipo de espacio no euclideano pertenece.

Influencia de las Geometrías No Euclideanas en el Concepto de Axiomática Formal

La geometría nació de la necesidad de medir terrenos, hacer construcciones, observaciones astronómicas, etc. y a medida que se amplió el conjunto de objetos a los cuales se aplicaba, se vió la necesidad de formular sus principios; siendo ésta la primera fase de su desarrollo donde era completamente empírica. En el momento que se observó que ciertas proposiciones podían ser derivadas de otras mediante deducciones basadas en la lógica; diferenciando así las proposiciones establecidas por la práctica (axiomas) y las demostrables por la lógica basadas en los axiomas (teoremas) se pasó del empirismo a la deducción. Indudablemente que la primera exposición sistemática fueron los elementos de Euclides además de ser la primera exposición axiomática de una disciplina científica, en donde, los teoremas son deducidos o implicados del grupo de axiomas, los cuales son sustituidos a su vez, por las nociones comunes, los postulados y las definiciones.

Su estructura axiomática fué tomada como modelo de rigor y simplicidad para las disciplinas científicas. Por ejemplo Newton utilizó este procedimiento para sistematizar la mecánica.

Este método axiomático concreto es aplicable en el momento en que una ciencia está tomando forma,o sea, que ya se pueden deducir leyes generales. En estas condiciones, la tarea consiste en hacer la ordenación completa de los coneptos básicos o categorías y de sus relaciones fundamentales, de las cuales se puedan derivar por definición los otros conceptos y, por deducción, los teoremas.

Así, el método axiomático permite comprender mejor la ciencia en su conjunto al separar las deducciones rigurosas, de las consecuencias concretas que de ellas se desprenden y las cuales a su vez se apoyan en una interpretación concreta de ese esquema axiomático.

Los intentos de demostración del Quinto Postulado de Euclides hasta llegar a la aparición de las geometrías no euclideanas, pusieron en claro que la demostración formal tiene que, detenerse en ciertas proposiciones admitidas sin prueba, que son los axiomas, para no proseguir el procedimiento demostrativo hasta el infinito. En base a esto, se incrementaron los esfuerzos para lograr la formalización, mediante un análisis lógico y rigurosos de los fundamentos de la geometría y la aritmética. Es así como Peano establece un sistema formado por cinco axiomas y de ellos infire todos los teoremas de la aritmética, así también Zermelo formuló la axiomatización de la teoría de conjuntos y después Whitehead y Russell establecieron la formalización de los fundamentos de la matemática Observándose así que la validez de las demostraciones se basa en la estructura lógica de los axiomas, más que el contenido que pueda atribuirse a los conceptos relacionados con ellos. En esta formalización intervienen cuatro tipos de proposiciones: Los axiomas que son proposiciones elementales en las cuales se postulan relaciones primitivas entre conceptos no-definidos, las definiciones que introducen nuevos conceptos, que se formulan en función de los conceptos no-definidos que figuran en los axiomas. Las reglas de operación permiten construir nuevas proposiciones a partir de los axiomas y las definiciones y por último, los teoremas son las proposiciones obtenidas directamente a partir de los axiomas y las definiciones, o bien indirectamente a partir de otros teoremas ya demostrados, aplicando siempre las reglas de operación.

No es sorprendente que siendo los Elementos de Euclides la primera obra formulada con el método axiomático deductivo, se hayan encontrado fallas lógicas; sin que esto desmerezca la obra.

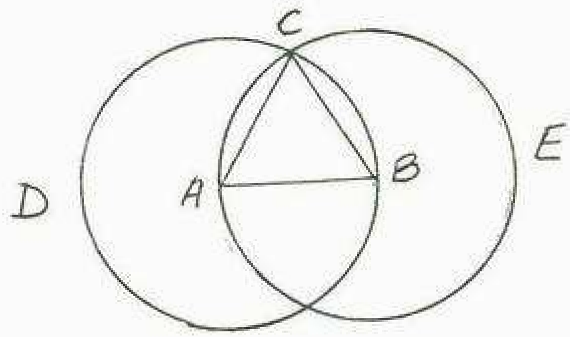
Algunas fallas son las suposiciones tácitas que se utilizan en las deducciones, y que no son garantizadas ni por los postulados ni por los axiomas de la obra. Un ejemplo de esto está en la primera proposición deducida de los Elementos, la cual citaremos al pie de la letra, de la traducción de Heath.*

*T.L. Heath, The Thirteen Books of Euclid's Elements, 3 vols., 2da. ed. Nueva Kork: Dover Publications, Inc., 1956

Proposición I 1

Sobre una recta finita dada constrúyase un triángulo equilátero.

Sea AB la recta dada. (Ver fig.)



Por tanto, se necesita construir un triángulo equilátero sobre la recta AB.

Con centro A y distancia AB, trácese la circunferencia BCD. (Postulado 3.)

Nuevamente , con centro B y distancia BA, descríbase la circunferencia ACE. (Postulado 3.)

Y únase al punto C, en el que las circunferencias se cortan, con los puntos A y B por las rectas CA, CB. (Postulado 1.)

Ahora bien, como el punto A es el centro de la circunferencia CDB, AC es igual a AB. (definición 15.)

Igualmente, como el punto B es el centro de la circunferencia CAE, BC es igual a BA. (definición 15.)

Pero también se demostró que CA es igual a AB; por tanto, cada una de las rectas CA, CB es igual a AB. Y las cosas que son iguales a la misma cosa también son iguales entre sí; por consiguiente, CA también es igual a CB. (Axioma 1.)

Por tanto, las tres rectas CA, AB, BC son iguales entre sí.

De ahí que el triángulo ABC sea equilátero; y se ha construido sobre la recta finita dada AB. Que es lo que se quería hacer.

Ahora bien, la construcción de las dos circunferencias de esta demostración ciertamente que se justifica por el Postulado 3, pero no hay nada en los primeros principios de Euclides que explícitamente garantice que las dos circunferencias se corten ern un punto C. Luego la existencia de este punto tiene que apoyarse en postulados o bien ha de demostrarse, se puede demostrar que los postulados de Euclides son insuficientes para garantizar la existencia de tal punto. Lo que se necesita aquí es algún postulado adicional que garantice que las dos circunferencias requeridas se cortarán. Así como el postulado 5 da una condición en la cual dos rectas se cortarán, necesitamos postulados semejantes que nos indiquen cuando se cortarán dos circunferencias y cuándo se cortará una circunferencia y una recta.

En los tratados modernos de geometría se garantiza la existencia de los puntos deseados de intersección por los axiomas de continuidad de Dedekind.

Otra admisión tácita hecha por Euclides es la extensión infinita de la recta. Aunque el postulado 2 asegura que una recta puede prolongarse indefinidamente, esto no implica necesariamente que una recta sea de extensión infinita, sino que es sin fin o ilimitada. Fue en 1854 cuando Riemann hizo la distinción entre lo ilimitado y la infinitud de las rectas.

La lista de fallas lógicas en los elementos puede extenderse aún más, pero no es esa nuestra intención en este caso, sino sólo hacer notar, que las suposiciones iniciales no son suficientemente para la deducción de los 465 proposiciones de los Elementos.

Precisamente, la idea de perfeccionar las suposiciones iniciales de Euclides, ocupó la atención de los matemáticos por más de dos mil años, y sólo despúes de ese período se pudieron formular conjuntos satisfactorios de postulados para la geometría plana y del espacio de Euclides.

Euclides trató de definir explícitamente todos los términos de su discurso, como punto, recta y plano por ejemplo. Ahora sabemos que en un discurso lógico se deben elegir algunos términos como primitivos o indefinidos.

El primero en dar a la geometría euclideana esta organización fué el matemático alemán Moritz Pasch en 1882. El marcó la diferencia entre definición explícita e implícita; haciendo notar que la definición implícita es necesaria ante la imposibilidad de definir todos los términos explícitamente si deseamos evitar una indefinida circularidad.

En otras palabras, en un discurso lógico se debe aceptar un número pequeño de términos primitivos los cuales se utilizan para definir explícitamente todos los demás términos que intervienen en él; no dándose definiciones de los términos primitivos. Solo la dada implícitamente por su presencia en los postulados del discurso. Así Pasch aceptó como primitivos o irreducibles los términos punto, recta y plano, en su desarrollo de la geometría euclideana; solo los consideró definidos implícitamente por las proposiciones básicas que él admitió como postulados en su exposición, a las cuales llamó nucleares; además fue quien resaltó que debían enunciarse sin considerar ninguna significación empírica.

Desde esta persepctiva, la geometría euclideana es un sistema hipotético-deductivo pues su validez y posibilidad de mayor desarrollo no depende de los significados específicos dados a los términos primitivos empleados en sus postulados. De esta manera Pasch influyó en el pensamiento postulacional de la geometría.

Después de Pasch, el matemático italiano Giuseppe Peano en 1889 dió también un desarrollo postulacional a la geometría euclideana aunque en gran medida su obra es una traduccion del Tratado de Pasch en notación de una lógica simbólica; la cual Peano introdujo al mundo de las matemáticas.

También el matemático italiano Mario Pieri en 1889, realizó un estudio de la geometría euclideana con un enfoque distinto al de sus predecesores; considerando la materia de estudio como un agregado de elementos indefinidos llamados "puntos" y un concepto indefinido de "movimiento".

Aunque la idea de clasificar las diferentes geometrías de acuerdo con los tipos de mapeos o transformaciones (movimiento rígidos, compresiones, inversiones respecto a circunferencias, etc.); fue propuesto por Félix Klein en 1872 en su famoso Programa de Erlangen. Esta clasificación se construye considerando primero objetos de la geometría euclideana ordinaria y "bautizando" a algunos de estos objetos y a las relaciones entre ellos de tal manera que resulta una geometría no euclideana. La comprensión de esta clasificación resulta fácil utilizando algunos conceptos de geometría proyectiva.

El máximo exponente de la moderna presentación postulacional de la geometría euclideana es el eminente matemático alemán David Hilbert (1862-1943) en su obra Grundlagender Geometrie (Fundamentos de la Geometría), de la cual existen numerosas ediciones y una traducción castellana.

A diferencia de Pasch y Peano, Hilbert utiliza un mínimo de simbolismo lo que hace más accesible su obra, cuya influencia rebasó el campo de la geometría implantando el método postulacional en todas las demás ramas de las matemáticas.

Hilbert a diferencia de Euclides no hace distinción entre axioma y postulado, así el tratamiento de la geometría euclideana plana y del espacio descansa en 21 axiomas o postulados, conteniendo seis términos primitivos o indefinidos. En el apéndice 2, de este trabajo aparecen 15 postulados y cinco términos primitivos pues se han considerado sólo los que se aplican a la geometría plana.

Para demostrar la combatibilidad lógica y la independencia parcial de sus postulados, Hilbert tuvo que idear algunos modelos, para varios subconjuntos de los postulados; lo cual equivale a introducir nuevos sistemas de geometría y álgebras de segmentos. En su obra se demuestra la influencia de algunos postulados y teoremas importantes en el desarrollo de la geometría euclideana y se ilustran ejemplos de varias clases de geometrías no euclideanas; por ejemplo al demostrar la independencia del postulado de Arquímides aparece un ejemplo de un sistema no arquimediano.

Estas investigaciones dieron origen al estudio de la geometría abstracta, convenciendo así a muchos matemáticos de la naturaleza hipotetico deductiva de las matemáticas e implantando el método postulacional en casi todas ellas.

Después de Hilbert han aparecido otros tratamientos postulacionales de la geometría euclideana como el de Oswald Veblen quien en 1904 redujo el número de términos primitivos a dos "punto" y "orden"; como que el sentir entre los matemáticos, es que mientras menor sea el número de términos primitivos en un desarrollo postulacional, más agradable estéticamente será el desarrollo de la exposición.

Observemos que el descubrimiento de las geometrías no euclideanas llevó al procedimiento axiomático a un estudio más profundo y así la axiomática material de la antigua Grecia evolucionó hasta la axiomática formal del siglo XX.

La axiomática formal utiliza el concepto moderno de función proposicional, observada primero por el matemático y filósofo inglés Bétrand Russell. Con el fin de aclarar este concepto consideremos los siguientes enunciados:

1) Octubre es un mes del otoño
2) 4 es un número impar
3) X es una Y

Los enunciados 1) y 2) tienen forma y contenido, el 3) sólo tiene forma y a pesar de que no es una proposición porque no se puede asegurar si es falso o verdadero, tiene forma de proposición y es precisamente, a una expresión de este tipo a lo que se le ha llamado función proposicional; pues si sustituimos las variables X y Y por términos de significado concreto, podemos obtener proposiciones veraderas o falsas según el caso; inclusive una función proposicinal puede contener cualquier número de variables.

Una vez hecha esta aclaración enunciaremos el patrón que rige a la axiomática formal.

-El discurso contiene un conjunto de términos técnicos (elementos, relaciones entre elementos, operaciones a realizarse con los elementos) que deliberadamente se eligen como términos indefinidos. Estos son los términos primitivos del discurso.

-Todos los demás términos técnicos del mismo se definen explícitamente por medio de los términos primitivos.

-El discurso contiene un conjunto de enunciados relacionados con los términos primitivos que deliberadamente se eligen como enunciados no demostrados. Estos se llaman postulados (o axiomas, o enunciados primarios) P, del discurso.

-Todos los demás enunciados (relacionados con los términos primitivos y los definidos) del discurso se deducen lógicamente de los postulados. Estos enunciados deducidos se llaman teoremas, T, del discurso.

-Para cada teorema, T_i del discurso hay un enunciado correspondiente (que puede o no expresarse formalmente) que asegura que el teorema T_i se implica lógicamente por los postulados P.

A un discurso conducido por este patrón algunos matemáticos le llaman matemática pura; y cuando las variables son sustituidas por términos que convierten en verdaderas a las proposiciones se diece que se ha hecho una interpretación de la matemática pura y al resultado de dicha interpretación se le llama modelo de la matemática pura.

A los modelos de la matemática pura se les ha llamado matemática aplicada, así es que la diferencia entre matemática aplicada y pura no es de aplicación y no aplicación, sino más bien de que sea concreta y abstracta.

Detrás de toda rama de la matemática aplicada está una rama de la matemática pura. A menudo sucede que una sola rama de la matemática pura le corresponden varias ramas de matemáticas aplicadas.

El desarrollo abstracto de la matemática pura corresponde a la axiomática formal y el desarrollo concreto de la matemática aplicada a la axiomática material.

En la axiomática formal se considera a los postualdos antes que cualquier especificación de los términos primitivos y en la axiomática material se considera a los objetos que interpretan a los términos primitivos antes que los postulados. Es por esta razón que los griegos consideraban que la geometría era un estudio que trataba con una estructura única del espacio físico, actualmente la geometría es un estudio puramente abstracto desprovisto de todo significado físico.

Un grupo de axiomas de un discurso no es arbitrario pues tiene que cumplir ciertas condiciones como son: compatibilidad, independencia y suficiencia.

Un conjunto de axiomas es suficiente o completo si todo teorema es deducible de ellos Un conjunto de postulados se dice que es compatible si no son implicados por el conjunto, los enunciados contradictorios. Esta es la propiedad más importante y el método para establecer la compatibilidad de un conjunto de postulados que hasta ahora ha tenido más éxito, es el de modelos.

Entre los modelos hay que distinguir los concretos, los cuales asignan a los términos primitivos objetos o relaciones del mundo real y los ideales que asignan a los términos primitivos objetos o relaciones de otro sistema de postulados.

Cuando el modelo es concreto es fácil aceptar la compatibilidad pues las contradicciones en el mundo real son imposibles.

Pero no siempre es posible establecer un modelo concreto de un conjunto de postulados; si éste por ejemplo, contiene un número infinito de elementos primitivos es imposible; y es en este caso cuando se recurre a la consistencia relativa, la cual ya mencionamos en el capítulo anterior.

Un postulado de un conjunto de postulados se dice que es independiente si no es una consecuencia lógica de los otros postulados del conjunto, y a su vez el conjunto de postulados se dice que es independiente si cada uno de sus postulados es independiente, un ejemplo de independencia muy conocido es el postulado de las paralelas de Euclides; en realidad a este postulado se debe el inicio de las propiedades de los conjuntos de postulados y en consecuencia la formación del método axiomático moderno.

La condición de independencia no es indispensable pero si cómoda pues con ella se garantiza una cantidad mínima de suposiciones; si un axioma no es independiente entonces realmente no es un axioma sino un teorema y en este caso puede ser eliminado sin que el sistema se afecte.

Aunque no es nuestra intención profundizar más en el método de axiomática formal, actualmente con los trabajos de Goedel y Cohen se plantea la necesidad imperiosa e inaplazable de elaborar nuevos criterios de rigor que sustituyan las exigencias de la formalización axiomática. Sus demostraciones constituyen el fundamento teórico necesario para la formulación de la teoría matemática de la lógica dialéctica, cuyo desarrollo permitirá hacer más rigurosas las operaciones ya conocidas y a la vez descubrir nuevas formas dialécticas de razonamiento.

"En la actualidad incidentalmente ha sido posible formular un algoritmo que permite decidir si una fórmula es o no es un teorema; y su expresión en el lenguaje Lisp ha servido para demostrar en una computadora, en 8 minutos, todos los teoremas que figuran en los Principia Mathematica de Whtehead y Russell. De esta manera; se vienen creando los elementos teóricos y, al mismo tiempo los intrumentos matemáticos de aplicación, que son necesarios para el establecimiento y el desarrollo práctico de la teoría matemática de la lógica dialéctica. Estos trabajos han inaugurado una revolución en la matemática, la lógica y la cibernética".

Influencia de las Geometrías No Euclideanas en la Concepción del Espacio Físico

Kant postuló al espacio como una representación necesaria a priori, considerando a la geometría euclideana como un esquema inmutable, frente a esto, los resultados de Lobachevski y sus continuadores mostraron de un modo irrefutable que la geometría euclideana no es la única representación del espacio, sino que por el contrario, son posibles muchas geometrías. Esto sirvió para dejar claro que los diferentes sistemas geométricos reflejan de cierta manera, propiedades del espacio real y que la concepción del espacio es la que depende de las cualidades existentes en los objetos, y no al revés como lo pretendía Kant. También la pangeometría mostró que la validez de los teoremas geométricos es relativa, pues varían con el avance de los descubrimientos científicos, ya que expresan a posteriori los conocimientos conquistados por el hombre.

A pesar de que la geometría no euclideana fué el resultado de muchos esfuerzos continuos, durante siglos por sacar a la geometría clásica del callejón sin salida en el intento de demostrar que, el sistema euclideano era el único posible y que sólo pudo ser superado por su negación; cuando se llegó a formular; muy pocos matemáticos de la época le prestaron atención, tal vez, hubo desconfianza de su veracidad o pensaron que jamas llegaría a tener algún valor científico situación que no debe extrañarnos, ya que la historia de la ciencia nos enseña que todo cambio radical, no cambia de un golpe, las convicciones y preocupaciones de todo lo anterior.

El trabajo de Lobachevski además de modificar las bases de la teoría del conocimiento científico, derrumbó los fundamentos de la filosofía Kantiana, abriendo así un nuevo camino a la ciencia y a la filosifía.

En 1854, el alemán Bernhard Riemann generalizó la geometría y con ello generalizó el concepto de espacio iniciando así un segundo período en el desarrollo de la misma; caracterizado por el empleo de los métodos de la geometría diferencial, en lugar de los métodos antes utilizados de la geometría sintética. Riemann estableció su interpretación concreta sobre una superficie de curvatura constante, que puede ser positiva o negativa y en la cual la geometría euclideana representa el caso particular en que esa curvatura constante sea nula. Las investigaciones recientes permiten considerar que el espacio físico tiene efectivamente una curvatura constante que no es nula, pero todavía no se puede decidir si dicha curvatura es positiva o negativa. Cuando se logre esto, tendremos que si la curvatura es positiva, el universo resultará ser cerrado y finito, conforme a la geometría de Riemann; y si dicha curvatura es negativa, entonces el universo será abierto e infinito, de acuerdo con la geometría de Lobachevski.

Después de los trabajos de Riemann surgieron otras geometrías no euclideanas: En realidad, cualquier geometría cuya base postulacional contradiga algún postulado de la euclidena puede llamarse geometría no euclideana. Se dice que Riemann fue el originador de toda una clase de geometrías no euclideanas y es por eso que generalmente se les llama geometrías riemannianas; por ejemplo, la ideada por Max Dehn, en la cual se suprime el postulado de Arquímides, llamada por esto, frecuentemente geometría no arquimediana.

El descubrimiento de las geometrías no euclideanas, planteó a la física el complejo problema de aclarar, si el espacio físico real es un modelo de la geometría euclideana, o en su defecto, con cual de las geometrías no euclideanas resulta más adecuada su descripción. A este respecto, la teoría de la relatividad, en su formulación considera al espacio real de tal naturaleza geométrica que responde más a los postulados de alguna geometría no euclideana sin que ninguna de ellas se adecue totalmente.

Una ley física que resulta incompatible para explicar la estructura del universo con base en los postulados euclideanos es la referente a la velocidad de la luz, que establece que bajo ninguna circunstancia pueden existir partículas con velocidades mayores que la de la luz en el vacío, la cual es constante e igual a 300,000 km/seg.

Es seguro que el establecimiento de esta ley influyó de manera muy importante para cuestionar la concepción del espacio físico real en términos de la geometría euclideano.

geometría debiera ocupar un lugar importante en la currícula de cualquier nivel de educación y por lo tanto su enseñanza constituye un problema de investigación desde los niveles de preescolar y primaria.

-Al igual que Euclides estaba influenciado por las imágenes familiares y la intuición, frecuentemente nos sucede lo mismo, sin observar que en las vivencias diarias no sólo la geometría Euclideana está presente; lo que podemos constatar al observar, por ejemplo, el acoplamiento de pentágonos y exágonos en una esfera (balón de foot-ball) lo cual es imposible en el plano, haciendo manifiesto algo que sucede en las geometrías riemenmianas.

Siguiendo a Papper tal vez lo que hace falta, es promover un ambiente de familiaridad con las geometrías no euclideanas para así poder concebir el espacio físico desde otro punto de vista, y por supuesto esto nos exige el conocimiento de las mismas sobre todo a los maestros del área en todos los niveles.

CONCLUSIONES

CAPÍTULO I.

1.- El primer gran salto en la concepción de la matemática fué el paso de concebir a la matemática como herramienta de cálculo que tenían los egipcios y babilonios a la concepción de la matemática como una ciencia deductiva que establecieron los griegos. Este salto se debió fundamentalmente al desarrollo de la geometría.

2.- La tendencia de la matemática a convertirse en una ciencia deductiva se materializó en el trabajo de Euclides (Los Elementos), que presenta a la geometría como una ciencia axiomatizada.

CAPÍTULO II.

3.- El interés de muchos de los grandes matemáticos durante los veinte siglos poosteriores a la aparición de los elementos en la solución al problema sobre la dependencia o independencia del V Postulado con respecto a los otros cuatro influyó en forma importante en el desarrollo de la matemática de ese período.

4.- A pesar de que algunas otras ramas de la matemática se desarrollaron en el período comprendido del siglo III a.C. al siglo XIX, desde el punto de vista de la concepción de la matemática como una ciencia axiomática no hubo cambios radicales.

CAPÍTULO III.

5.- Con la creación de las geometrías no euclideanas, resultado de la solución al problema del V Postulado de Euclides, se modificó en forma esencial el concepto de axioma y como consecuencia el concepto de axiomática y aún más se plantea un cambio radical en el concepto del objeto de estudio de la matemática, que pasó de ser las relaciones y propiedades cuantitativas de modelos de la realidad a las relaciones y propiedades de modelos independientemente de que sean éstos o no de la realidad.

CAPÍTULO IV.

6.- El desarrollo de la geometría y en particular el nacimiento de las geometrías no euclideanas no sólo modificó radicalmente la concepción de la matemática, sino que su influencia se dió tambien en otras ramas de la ciencia, en particular en la física al cuestionarse la estructura de esta ciencia una de cuyas premisas era la concepción del espacio físico como de naturaleza euclideana. A grado tal que con los trabajos de Einstein quedó definitivamente probado que el modelo euclideano del espacio físico no era el más idóneo para explicar algunos fenómenos de la realidad.

7.- En el mismo sentido de la conclusión anterior el nacimiento de las geometrías no euclideanas influyó en forma importante en el pensamiento científico y filosófico en general.

CONCLUSIONES GENERALES

-La matemática al igual que las demás ramas de la ciencia está en constante evolución.

-La solución al problema del V Postulado de Euclides no fué el punto final sino más bien el punto de partida, ya que abrió nuevos horizontes en el campo de la investigación y desde luego creó nuevos problemas en la geometría.

-Siguiendo el desarrollo histórico de la matemática se observa que sus grandes columnas vertebrales son la geometría y la aritmética; lo que lleva a relfexionar sobre la necesidad de prestar más atención a estas ramas, en la currícula de la licenciatura en matemáticas , asímismo en los programas de formación y actualización de profesores de matemáticas.

-Del hecho de que la geometría desempeñe un papel tan importante en el desarrollo de la matemática, se sigue que la

PRIMEROS PRINCIPIOS DE EUCLIDES Y ENUNCIADOS DE LAS PROPOSICIONES DEL LIBRO I*

LAS EXPLICACIONES Y DEFINICIONES INICIALES

1.- Un punto es lo que no tiene parte o dimensión.
2.- Una línea es una longitud sin anchura.
3.- Los extremos o límites de una línea son puntos.
4.- Una recta es una línea que tiene todos sus puntos en la misma dirección.
5.- Una superficie es la que sólo tiene longitud y anchura.
6.- Los extremos o límites de una superficie son líneas.
7.- Una superficie plana es la que contiene una recta en cualquier posición.
8.- Un ángulo plano es la inclinación entre sí de dos líneas de un plano si éstas se cortan y no están en una misma recta.
9.- Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas, el ángulo se dice que es rectilíneo.
10.- Cuando una recta se levanta sobre otra formando ángulos adyacentes iguales, cada uno de los ángulos iguales se llama ángulo recto, y la recta que se eleva sobre la otra se llama perpendicular a esta otra.
11.- Un ángulo obtuso es mayor que uno recto.
12.- Un ángulo es menor que uno recto.
13.- Un límite es lo que constituye un extremo de algunas cosa.
14.- Una figura es lo que está contenido en un límite o en varios límites.

*Tomado con autorización, de T. L. Heath, The Thirteen Books of Euclid's Elements, 3 vols., 2a. ed. Nueva York: The