

UNIVERSIDAD DE SONORA

EDUARDO

UN ESTUDIO

DE LA

CADENA LINEAL DE OSCILADORES ARMONICOS

TESIS QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

LICENCIADO EN FISICA

PRESENTA

ADALBERTO CORELLA MADUEÑO

HERMOSILLO SONORA

ENERO DE 1990

# Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

A la memoria de  
mi padre y al  
invaluable esfuerzo  
de mi madre.

A Nora,  
muy especialmente.

A todos aquellos  
compañeros que  
colaboraron en el  
desarrollo de  
este trabajo.

# INDICE

## INTRODUCCION.

### CAPITULO I: GENERALIDADES EN LA TEORIA DE OSCILACIONES

PEQUEÑAS. ....	1
I.1.- Ecuaciones de movimiento de un sistema de partículas alrededor de una configuración de equilibrio estable. ....	1
I.2.- La ortogonalidad de los vectores propios. ....	7
I.3.- Coordenadas normales. ....	14

### CAPITULO II: LA CADENA LINEAL DE OSCILADORES ARMONICOS. ....

II.1.- Planteamiento del problema. ....	19
II.2.- Ecuación para el cálculo de las frecuencias normales de una cadena lineal finita con $n$ defectos. ....	25
II.3.- Los polinomios $Q_j(\xi)$ . ....	35

### CAPITULO III: LA CADENA HOMOGENEA. ....

III.1.- Cadena homogénea con extremos fijos. ....	39
III.2.- Cadena homogénea con un extremo fijo y uno libre. ....	40
III.3.- Cadena homogénea con extremos libres. ....	41

### CAPITULO IV: LA CADENA CON UN DEFECTO. ....

IV.1.- Cadena no homogénea con extremos fijos. ....	47
IV.2.- Cadena no homogénea con un extremo fijo y uno libre. ....	61
IV.3.- Cadena no homogénea con extremos libres. ....	73

### CONCLUSIONES. ....

### REFERENCIAS. ....

84	85
----	----

## INTRODUCCION

La cadena lineal de osciladores armónicos es un sistema mecánico cuyo uso como modelo en la descripción de las propiedades de diversos sistemas físicos ha dado resultados muy importantes para el desarrollo tanto de la Física Teórica como de las Matemáticas Puras.<sup>1</sup>

Newton fue el primero en emplear una cadena lineal para derivar una fórmula para la velocidad del sonido (1686); la importancia de su modelo fue que una estructura continua, como una cuerda vibrante, constituía un problema aún no resuelto en ese tiempo ya que no se conocían las ecuaciones diferenciales parciales. Trabajos posteriores llevaron a John Bernoulli (1727) a establecer la existencia de los modos normales en que un sistema puede oscilar, y a su hijo Daniel Bernoulli (1753) a formular el Principio de Superposición. Fue este el inicio de la formulación de la Mecánica Teórica para sistemas de muchas partículas. Ellos dieron un tratamiento completo a la cadena lineal de masas puntuales.

Aunque las leyes que rigen el movimiento de las cuerdas vibrantes se conocían empíricamente, su tratamiento teórico se inició hasta el año de 1713 con trabajos de Taylor, y el problema quedó resuelto con los trabajos de Euler (1748) quien ya manejaba las ecuaciones diferenciales parciales. Lagrange mostró en 1759 que la cuerda continua vibrante representa un caso límite de una cadena lineal.

El hecho sobresaliente es que los trabajos realizados en esta dirección llevaron a la formulación del problema de valores propios, se estableció el Teorema de Fourier, nacieron las ecuaciones diferenciales parciales, se estudió la propagación de ondas, se resolvieron problemas de Ingeniería Eléctrica, y el modelo de la cadena lineal llegó aún más lejos, siendo hasta nuestros días base en la teoría atómica de sólidos y en la estructura cristalina, e incluso en el estudio de la interacción de partículas con un campo.

En este trabajo se revisan algunas propiedades de la cadena lineal de osciladores armónicos, atendiendo en especial los casos particulares como son la cadena lineal con todas sus masas iguales (cadena homogénea) y el caso en que la cadena contiene una masa diferente al resto de las masas que la componen (cadena con un defecto). El trabajo se ha dividido en cuatro capítulos y una sección de conclusiones donde se resume el alcance del presente trabajo.

En el primer capítulo se introduce a la Teoría de Oscilaciones Pequeñas resaltando el hecho de que el movimiento más general de un sistema de partículas que oscilan con amplitudes pequeñas puede descomponerse como una suma de movimientos armónicos simples de las coordenadas normales del sistema dando lugar así a los llamados modos normales de oscilación.

En el segundo capítulo, que merece especial atención, se desarrolla un método de solución de las ecuaciones de movimiento de una cadena lineal de osciladores armónicos que contiene  $n$  defectos de masas diferentes entre sí. El método se basa en la existencia de las coordenadas normales del sistema; con ello, se obtiene una ecuación polinomial de cuyas raíces se calculan las frecuencias de los modos normales de oscilación.

En el tercer capítulo se resuelve la ecuación antes mencionada para el caso particular de la cadena homogénea y se describen algunas de sus propiedades más importantes.

En el cuarto capítulo se resuelve la ecuación general obtenida en el capítulo II para el caso particular de la cadena con un defecto. En este caso, las soluciones se obtienen en forma numérica empleando para ello el método de bisección que es aplicable a la ecuación obtenida y que además converge a las soluciones rápidamente en un número pequeño de iteraciones.

Se espera que el presente trabajo resulte ser de lectura agradable y de bastante ayuda para quien lo consulte.

Por último, el autor aprovecha este espacio para expresar su agradecimiento al Profesor Antonio Jáuregui D. quien propuso este tema y se encargó de revisar cuidadosamente el manuscrito proporcionando sus valiosas observaciones.

## GENERALIDADES EN LA TEORIA DE OSCILACIONES PEQUEÑAS

En este capítulo se presenta la teoría utilizada en el estudio del movimiento de un sistema de partículas que oscilan alrededor de su posición de equilibrio con amplitudes pequeñas. Se establecen las condiciones de estabilidad de la configuración de equilibrio y se obtienen las ecuaciones de movimiento. Finalmente, se escribe la solución general como una combinación lineal de los modos normales de oscilación.<sup>2-7</sup>

I.1.- ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE UN SISTEMA DE PARTICULAS ALREDEDOR DE UNA CONFIGURACION DE EQUILIBRIO ESTABLE.

Consideremos un sistema mecánico conservativo formado por partículas que se encuentran bajo la acción de fuerzas que son derivables de una función de energía potencial de la forma

$$V = V(q_1, q_2, \dots, q_N) \quad (I.1)$$

independiente del tiempo, donde  $q_1, q_2, \dots, q_N$  son las coordenadas generalizadas del sistema.

Si las ecuaciones de transformación que definen las coordenadas generalizadas del sistema no dependen explícitamente del tiempo entonces la energía cinética es una función cuadrática de las velocidades generalizadas

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_N) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (I.2)$$

donde

$$m_{ij}(q_1, q_2, \dots, q_N) = \sum_{l=1}^N m_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j} \quad (I.3)$$

Aquí,  $\vec{r}_l$  es el vector de posición en coordenadas cartesianas de la partícula de masa  $m_l$ ; y la matriz  $M$  con elementos  $m_{ij}$  es simétrica, real y definida positiva; simétrica porque los términos individuales no son afectados por la permutación de índices, y real y definida positiva por el carácter mismo de la energía cinética.

Nos interesa describir el movimiento de este sistema alrededor de una configuración de equilibrio estable. Para ello, resolvemos primero el problema de localizar tal configuración de equilibrio.

La condición necesaria y suficiente que establece que el sistema posee una configuración de equilibrio es

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (I.4)$$

la cual expresa que las fuerzas generalizadas son nulas en dicha configuración.

Las coordenadas  $q_1^0, q_2^0, \dots, q_N^0$  de la posición de equilibrio se obtienen, en principio, resolviendo este sistema de  $N$  ecuaciones.

Claro está que la condición (I.4) sirve para identificar las configuraciones de equilibrio del sistema pero no es suficiente para determinar si una de estas configuraciones corresponde a una de equilibrio estable. Necesitamos entonces una condición adicional. Esta condición se basa en el empleo de las derivadas de segundo orden de la función de energía potencial evaluadas en las coordenadas de las posiciones de equilibrio. La condición puede escribirse como sigue<sup>2,3</sup>



$$\left| \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} \right|_{\langle q^0 \rangle} > 0, \quad \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} \end{array} \right|_{\langle q^0 \rangle} > 0, \dots, \quad \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_N \partial q_1} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_N^2} \end{array} \right|_{\langle q^0 \rangle} > 0 \tag{1.5}$$

que establece que todos los determinantes (1.5) evaluados en la posición de equilibrio deben ser positivos para que exista un mínimo relativo de la energía potencial respecto a las configuraciones próximas del sistema.

Las condiciones (1.4) y (1.5) aseguran la existencia de una configuración de equilibrio estable. Supongamos que el sistema con el que estamos tratando cumple con estas condiciones y denotemos con  $q_1^0, q_2^0, \dots, q_N^0$  las coordenadas de la configuración de equilibrio estable.

Para describir el movimiento del sistema alrededor de esta configuración demos un desplazamiento <sup>(virtual)</sup> pequeño a cada una de las partículas a partir de su posición de equilibrio; y denotemos con  $x_k$  las desviaciones experimentadas por las coordenadas generalizadas en el instante  $t$ .

$$q_k = q_k^0 + x_k \quad k = 1, 2, \dots, N. \tag{1.6}$$

El desarrollo en serie de Taylor alrededor de la posición de equilibrio de las energías cinética y potencial nos permite escribir estas funciones en términos de los desplazamientos  $x_k$ . La expresión para la energía potencial así obtenida es

$$V = V(\langle q^0 \rangle) + \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial V}{\partial q_i} \right]_{\langle q^0 \rangle} x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right]_{\langle q^0 \rangle} x_i x_j + \dots \tag{1.7}$$

Asignemos el valor cero a la energía potencial en la posición

de equilibrio, lo cual elimina el primer término en el desarrollo; esto puede lograrse haciendo coincidir el origen del sistema de referencia con el mínimo de la energía potencial. Como notaremos más adelante la selección de este valor es irrelevante en las ecuaciones de movimiento.

El segundo término es nulo de acuerdo con la condición (I.4); por lo que el primer término distinto de cero en el desarrollo es el término cuadrático en los desplazamientos. De esta forma, el potencial del sistema alrededor del punto de equilibrio, en su aproximación de más bajo orden, está dado por

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N k_{ij} x_i x_j \quad (I.8)$$

donde

$$k_{ij} = \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right]_{\langle q^0 \rangle} \quad (I.9)$$

son elementos de la matriz  $K$  que es real, constante, simétrica y además definida positiva de acuerdo con (I.5).

Para escribir la energía cinética como un desarrollo en serie solo es necesario desarrollar las cantidades  $m_{ij}$  las cuales contienen la dependencia funcional de las coordenadas generalizadas

$$m_{ij} = m_{ij}(\langle q^0 \rangle) + \sum_{k=1}^N \left[ \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right]_{\langle q^0 \rangle} x_k + \dots \quad (I.10)$$

usando (I.10) y la derivada temporal de (I.6) en (I.2) obtenemos

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij}(\langle q^0 \rangle) \dot{x}_i \dot{x}_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \left[ \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} \right]_{\langle q^0 \rangle} \dot{x}_k \dot{x}_i \dot{x}_j + \dots \quad (I.11)$$

Si conservamos de nuevo solo los términos cuadráticos

entonces

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j \quad (I.12)$$

donde la matriz  $M$  es ahora constante, real y simétrica.

Usemos las expresiones de las energías potencial y cinética dadas por la ecuaciones (I.8) y (I.12), respectivamente para construir una Lagrangiana apropiada para describir las oscilaciones pequeñas del sistema alrededor de la posición de equilibrio estable

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - k_{ij} x_i x_j) \quad (I.13)$$

La sustitución de esta función en las ecuaciones de movimiento de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (I.14)$$

nos conduce a un conjunto de  $N$  ecuaciones diferenciales de segundo orden, acopladas, lineales, homogéneas y con coeficientes constantes dadas por

$$\sum_{j=1}^N (m_{ij} \ddot{x}_j + k_{ij} x_j) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (I.15)$$

Este sistema de ecuaciones podemos escribirlo en forma matricial como

$$M \ddot{\vec{x}} + K \vec{x} = \vec{0} \quad (I.16)$$

donde se ha definido el vector columna

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \quad (I.17)$$

el vector aceleración

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \quad (I.18)$$

y se ha hecho uso de las matrices

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{N1} & m_{N2} & \dots & m_{NN} \end{pmatrix} \quad (I.19)$$

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & \dots & k_{NN} \end{pmatrix} \quad (I.20)$$

En esta representación las energías cinética y potencial podemos expresarlas como

$$T = \frac{1}{2} \dot{\vec{x}}^T M \dot{\vec{x}} \quad (I.21)$$

$$V = \frac{1}{2} \vec{x}^T K \vec{x} \quad (I.22)$$

donde

$$\vec{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (I.23)$$

$$\dot{\vec{x}}^T = \frac{d \vec{x}^T}{dt} = \frac{d}{dt} (x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (I.24)$$

De esta forma hemos establecido las condiciones para la existencia de una configuración de equilibrio estable de un sistema conservativo de partículas; y tuvimos cuidado de expresar las energías cinética y potencial como funciones aproximadas alrededor de dicha configuración de tal manera que el orden de aproximación elegido, el cual es el más bajo, nos permitió obtener ecuaciones de movimiento lineales y acopladas a las que consideramos como componentes de una ecuación matricial.

## I.2.- LA ORTOGONALIDAD DE LOS VECTORES PROPIOS.

La ecuación (I.16) indica que las oscilaciones pequeñas del sistema alrededor de la posición de equilibrio estable son armónicas por lo que podemos intentar una solución de la forma

$$x_j = a_j \cos(\omega t - \gamma) \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (I.25)$$

donde las  $a_j$  son reales y  $\gamma$  es una fase. Esto implica que todas las partículas del sistema oscilarán alrededor de la posición de equilibrio con la misma frecuencia  $\omega$ .

De igual manera podemos manipular (I.25) como la parte real de

$$\vec{x} = \vec{a} e^{i(\omega t - \gamma)} \quad (I.26)$$

Con la sustitución de (I.26) en (I.16) obtenemos una ecuación para las amplitudes  $\vec{a}$

$$(K - \omega^2 M) \vec{a} = \vec{0} \quad (I.27)$$

que en términos de componentes podemos escribir como

$$\sum_{j=1}^N (k_{ij} - \omega^2 m_{ij}) a_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (I.28)$$

La condición necesaria y suficiente para que este sistema de ecuaciones algebraicas, lineales y homogéneas tenga soluciones diferentes de la solución trivial es que el determinante de los coeficientes se anule

$$|K - \omega^2 M| = 0 \quad (I.29)$$

es decir,

$$\begin{vmatrix} k_{11} - \omega^2 m_{11} & k_{12} - \omega^2 m_{12} & \dots & k_{1N} - \omega^2 m_{1N} \\ k_{21} - \omega^2 m_{21} & k_{22} - \omega^2 m_{22} & \dots & k_{2N} - \omega^2 m_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N1} - \omega^2 m_{N1} & k_{N2} - \omega^2 m_{N2} & \dots & k_{NN} - \omega^2 m_{NN} \end{vmatrix} = 0 \quad (I.30)$$

El desarrollo de este determinante nos lleva a una ecuación polinomial de grado N en  $\omega^2$  que se conoce como la ecuación característica o secular del sistema (I.28) y tiene N raíces diferentes; o menos ya que algunas raíces pueden ser múltiples, en tal caso se dice que en el sistema existe degeneración. En este trabajo solo consideraremos el caso no degenerado. Las raíces se denotan por  $\omega_r^2$  y se llaman frecuencias características, frecuencias propias, eigenfrecuencias o frecuencias normales de oscilación.

Sustituyendo cada uno de estos valores de  $\omega^2$  en (I.28) podemos despejar N-1 de las componentes del vector  $\vec{a}_r$  en función de la restante  $a_{jr}$ . Como el valor de esta componente es arbitrario, entonces habrá un número infinito de vectores  $\vec{a}_r$  asociados con la frecuencia normal  $\omega_r$ , estos vectores difieren uno del otro únicamente por su tamaño. Como hay N valores de  $\omega^2$  podemos construir N vectores, cada uno de ellos asociado con una eigenfrecuencia. Todos los vectores así obtenidos se llaman eigenvectores o vectores propios del sistema (I.28).

Consideremos un conjunto de N vectores propios cada uno

asociado con una frecuencia diferente; cada frecuencia normal con su correspondiente vector propio define un modo normal de oscilación. La solución general de la ecuación (I.16) podemos escribirla como una combinación lineal de las soluciones obtenidas para cada uno de los N valores de r de acuerdo con el principio de superposición que se sigue del hecho de que las ecuaciones de movimiento son lineales

$$\vec{x} = \sum_{r=1}^N \vec{a}_r e^{i(\omega_r t - \gamma_r)} \quad (I.31)$$

o bien

$$x_j(t) = \sum_{r=1}^N a_{jr} e^{i(\omega_r t - \gamma_r)} \quad (I.32)$$

Por supuesto que la parte real de (I.32) es la correspondiente al movimiento verdadero

$$x_j(t) = \sum_{r=1}^N a_{jr} \cos(\omega_r t - \gamma_r) \quad (I.33)$$

Las frecuencias normales  $\omega_r$  deben ser cantidades reales para que la solución (I.33) represente un movimiento oscilatorio;  $\omega_r$  no puede tener componente imaginaria porque en tal caso en la expresión para  $x_j$  aparecerían términos que crecen o decaen exponencialmente, y al calcular la energía del sistema se encontraría que esta aumenta o decrece con el tiempo, lo cual contradice la hipótesis de que el sistema con el que se está tratando es conservativo.

Para probar que  $\omega_r$  es efectivamente una cantidad real, basta con que probemos que  $\omega_r^2$  es positiva. Para hacerlo, escribamos la ecuación (I.28) para la r-ésima raíz de la ecuación secular como sigue

$$\omega_r^2 \sum_{j=1}^N m_{ij} a_{jr} = \sum_{j=1}^N k_{ij} a_{jr} \quad (I.34)$$

Multipliquemos esta ecuación por  $a_{ir}$  y sumemos sobre  $i$  para obtener

$$\omega_r^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} a_{ir} a_{jr} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N k_{ij} a_{ir} a_{jr} \quad (I.35)$$

de donde

$$\omega_r^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N k_{ij} a_{ir} a_{jr}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} a_{ir} a_{jr}} \quad (I.36)$$

que escrita en forma matricial queda

$$\omega_r^2 = \frac{\vec{a}_r^T \mathbf{K} \vec{a}_r}{\vec{a}_r^T \mathbf{M} \vec{a}_r} \quad (I.37)$$

De acuerdo con las ecuaciones (I.21) y (I.22) el denominador es el doble de la energía cinética cuando las velocidades  $\dot{x}_i$  toman los valores  $a_{ir}$  y por lo tanto la suma es positiva; el numerador es el doble de la energía potencial para las coordenadas  $a_{ir}$  y la condición de que  $V$  es mínima en el equilibrio exige que la suma sea mayor o igual que cero, así que  $\omega_r^2$  es real, finita y positiva, aunque puede ser cero, y por lo tanto  $\omega_r$  es una cantidad real tal como se esperaba.

En el caso en que  $\omega_r = 0$  el modo es físicamente diferente porque el movimiento no es armónico. Por esta razón se conoce como modo de cuerpo rígido. Las energías cinética y potencial son constantes lo que da lugar a movimiento uniforme de traslación o rotación.

Deduciremos a continuación una propiedad fundamental de los vectores propios  $\vec{a}_r$ , para ello procedamos de la siguiente manera: escribamos de nuevo la ecuación (I.28) para la  $s$ -ésima raíz de la ecuación secular



$$\omega_s^2 \sum_{j=1}^N m_{ij} a_{js} = \sum_{j=1}^N k_{ij} a_{js} \quad (I.38)$$

Multipliquemos esta ecuación por  $a_{ir}$  y sumemos sobre el índice  $i$

$$\omega_s^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} a_{ir} a_{js} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N k_{ij} a_{ir} a_{js} \quad (I.39)$$

En la ecuación (I.34) permutemos los índices  $i$  y  $j$ , y usemos la simetría de las matrices  $M$  y  $K$  para escribir

$$\omega_r^2 \sum_{i=1}^N m_{ij} a_{ir} = \sum_{i=1}^N k_{ij} a_{ir} \quad (I.40)$$

multipliquemos esta ecuación por  $a_{js}$  y sumemos sobre  $j$

$$\omega_r^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} a_{ir} a_{js} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N k_{ij} a_{ir} a_{js} \quad (I.41)$$

Restemos la ecuación (I.39) de la (I.41) para obtener

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} a_{ir} a_{js} = 0 \quad (I.42)$$

Analicemos las dos posibilidades  $r \neq s$  y  $r = s$ . Para  $r \neq s$ , el término  $(\omega_r^2 - \omega_s^2)$  es diferente de cero (recordemos que estamos tratando el caso no degenerado), entonces la suma debe ser idénticamente cero

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} a_{ir} a_{js} = 0 \quad (r \neq s) \quad (I.43)$$

esto significa que los vectores propios forman un conjunto ortogonal con peso la matriz  $M$ .

Para el caso  $r = s$ , el factor  $(\omega_r^2 - \omega_s^2)$  es cero y la suma queda indeterminada. La suma no puede ser idénticamente cero. Para mostrar esto, escribamos la energía cinética del sistema usando la

derivada temporal de la ecuación (I.33) en la expresión para la energía cinética (I.12)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \omega_r \omega_s \text{Sen}(\omega_r t - \gamma_r) \text{Sen}(\omega_s t - \gamma_s) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} a_{ir} a_{js} \quad (\text{I.44})$$

usemos el resultado (I.43); esto es, el último factor es cero a menos que  $r = s$ , por lo tanto

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \omega_r^2 \text{Sen}^2(\omega_r t - \gamma_r) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} a_{ir} a_{jr} \quad (\text{I.45})$$

este resultado nos indica que la energía cinética total es la suma de la energía cinética asociada a cada modo normal, y como cada uno de estos modos representa un movimiento independiente del sistema cada término debe ser positivo. Además

$$\omega_r^2 \text{Sen}^2(\omega_r t - \gamma_r) \geq 0 \quad (\text{I.46})$$

por lo que concluimos

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} a_{ir} a_{jr} \geq 0 \quad (\text{I.47})$$

Para eliminar la indeterminación en la magnitud de los vectores propios impongamos la condición adicional de que

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} a_{ir} a_{jr} = 1 \quad (\text{I.48})$$

esto es, los vectores propios quedan normalizados.

Las dos propiedades encontradas pueden reunirse en una sola ecuación como sigue

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} a_{ir} a_{js} = \delta_{rs} \quad (\text{I.49})$$

que contiene la condición de ortonormalidad de los vectores propios.

En notación matricial podemos escribir esta condición como

$$A^T M A = I \quad (I.50)$$

donde  $A$  es la matriz cuyas columnas son los  $N$  vectores propios  $\vec{a}_r$ . La ecuación puede interpretarse como una transformación de semejanza mediante la cual  $M$  se transforma en la matriz unidad.

Si introducimos una matriz diagonal  $W$  con elementos

$$\omega_{lr}^2 = \omega_r^2 \delta_{lr} \quad (I.51)$$

la ecuación (I.34) toma la forma

$$\sum_{j=1}^N k_{ij} a_{jn} = \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N m_{ij} a_{jl} \omega_{lr}^2 \quad (I.52)$$

o, en notación matricial

$$K A = M A W \quad (I.53)$$

Multiplicando por la izquierda por  $A^T$ , obtenemos

$$A^T K A = A^T M A W \quad (I.54)$$

que de acuerdo con (I.50) queda

$$A^T K A = W \quad (I.55)$$

esto es, la matriz  $A$  transforma a la matriz  $K$  en una matriz diagonal  $W$  cuyos elementos son los valores propios del sistema de ecuaciones (I.28). Así pues,  $A$  diagonaliza simultáneamente a  $M$  y  $K$ .

En esta parte hemos mostrado que las frecuencias normales son cantidades reales por lo que la solución del sistema de ecuaciones representa un movimiento oscilatorio; además encontramos que la coordenada  $x_j$  puede escribirse como una combinación lineal de movimientos oscilatorios cada uno de frecuencia  $\omega_r$  diferente, esto es, la solución contiene los  $N$  modos normales de oscilación.

Por otro lado, normalizamos los vectores propios y probamos que forman un conjunto ortonormal completo.

Interpretamos este proceso como una transformación a ejes principales en la que la matriz  $\hat{A}$ , cuyas columnas son los vectores propios, transforma a las matrices  $M$  y  $K$  convirtiendo la primera en la matriz unidad y la segunda llevándola a su forma diagonal.

### I.3.- COORDENADAS NORMALES.

La solución general para el movimiento de la coordenada  $x_j$  está dada por la ecuación (I.33), pero como hemos normalizado las  $a_{jr}$  no es posible considerar que la solución (I.33) describa el movimiento de una partícula dadas dos condiciones iniciales cualesquiera cercanas a la configuración de equilibrio. Por lo tanto, debemos introducir un factor de escala constante, digamos  $f_r$ , que dependa de las condiciones iniciales del sistema, y de esta manera recuperamos la pérdida de generalidad impuesta por la condición de normalización. Entonces, la ecuación (I.32) podemos escribirla como

$$x_j(t) = \sum_{r=1}^N f_r a_{jr} e^{i(\omega_r t - \gamma_r)} \quad (I.56)$$

o bien

$$x_j(t) = \sum_{r=1}^N a_{jr} y_r(t) \quad (I.57)$$

donde

$$y_r(t) \equiv f_r e^{i(\omega_r t - \gamma_r)} \quad (I.58)$$

son cantidades que oscilan con una sola frecuencia y las podemos considerar como un nuevo conjunto de coordenadas generalizadas relacionado con el original mediante la ecuación (I.57). Vemos en

esta ecuación que si solamente una de las coordenadas  $y_r$  es diferente de cero, las  $x_j$ 's deben ser proporcionales a los coeficientes de amplitud correspondientes a ese modo. En este caso la ecuación (I.58) indica que  $y_r$  oscila en la frecuencia del modo dado. Así, si solamente un modo es excitado, el movimiento completo estará descrito usando solamente una coordenada normal. Por supuesto, el movimiento más general requiere de los N modos normales.

La ecuación (I.57) en notación matricial queda

$$\vec{x} = A \vec{y} \quad (I.59)$$

y las velocidades, que se transforman como las coordenadas, son

$$\dot{\vec{x}} = A \dot{\vec{y}} \quad (I.60)$$

Por su parte la energía cinética será

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \dot{\vec{x}}^T M \dot{\vec{x}} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\vec{y}}^T A^T M A \dot{\vec{y}} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\vec{y}}^T \dot{\vec{y}} \end{aligned} \quad (I.61)$$

o bien

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \dot{y}_r^2 \quad (I.62)$$

donde se ha utilizado la condición de que la matriz A diagonaliza a la matriz M.

De la misma manera, la energía potencial será, de acuerdo con (I.22)

$$V = \frac{1}{2} \vec{x}^T K \vec{x}$$

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{2} \dot{\vec{y}}^T \mathbb{A}^T \mathbb{K} \mathbb{A} \dot{\vec{y}} \\
 &= \frac{1}{2} \dot{\vec{y}}^T \mathbb{W} \dot{\vec{y}}
 \end{aligned}
 \tag{I.63}$$

o bien

$$V = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \omega_r^2 y_r^2
 \tag{I.64}$$

y hemos hecho uso del hecho de que la matriz  $\mathbb{A}$  diagonaliza a la matriz  $\mathbb{K}$ .

Las ecuaciones (I.62) y (I.64) establecen que en las nuevas coordenadas las energías cinética y potencial se reducen a sumas de cuadrados evidenciando el hecho de que  $\mathbb{A}$  es la matriz que realiza la transformación a ejes principales.

Escribamos ahora la función Lagrangiana del sistema en las nuevas coordenadas

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \dot{y}_r^2 - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \omega_r^2 y_r^2
 \tag{I.65}$$

Las ecuaciones de movimiento que se obtienen de esta Lagrangiana son

$$\ddot{y}_r + \omega_r^2 y_r = 0 \quad r = 1, 2, \dots, N.
 \tag{I.66}$$

Estas nuevas coordenadas, que han simplificado enormemente el tratamiento de nuestro problema, se denominan coordenadas normales. Cada una de estas coordenadas es una función periódica simple que depende solo de una frecuencia. Esto es, el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas se ha desacoplado al realizar una transformación de coordenadas (un cambio de base) en el mismo espacio vectorial mediante la matriz de transformación  $\mathbb{A}$  que diagonaliza simultáneamente a las matrices  $\mathbb{M}$  y  $\mathbb{K}$  tal que el problema se ha separado en movimientos independientes de las coordenadas normales cada una con su frecuencia normal.

Finalmente, podemos calcular el factor de escala  $f_r$  y la fase  $\gamma_r$  para condiciones iniciales dadas, para ello:

La solución real es

$$x_j(t) = \sum_{r=1}^N f_r a_{jr} \text{Cos}(\omega_r t - \gamma_r) \quad (I.67)$$

con velocidades

$$\dot{x}_j(t) = - \sum_{r=1}^N f_r \omega_r a_{jr} \text{Sen}(\omega_r t - \gamma_r) \quad (I.68)$$

Dadas como condiciones iniciales la posición y velocidad en  $t = 0$ , obtenemos

$$x_j(0) = \sum_{r=1}^N f_r a_{jr} \text{Cos} \gamma_r \quad (I.69)$$

y

$$\dot{x}_j(0) = \sum_{r=1}^N f_r \omega_r a_{jr} \text{Sen} \gamma_r \quad (I.70)$$

Multipliquemos la primera de estas por  $m_{ij} a_{is}$ , sumemos respecto a los índices  $i$  y  $j$ , y hagamos uso de las propiedades de ortogonalidad de los vectores propios para obtener

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} x_j(0) a_{is} = f_s \text{Cos} \gamma_s \quad (I.71)$$

De la misma forma, de la ecuación (I.70) obtenemos

$$\frac{1}{\omega_s} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} \dot{x}_j(0) a_{is} = f_s \text{Sen} \gamma_s \quad (I.72)$$

De estas ecuaciones se sigue que

$$\text{Tan} \gamma_s = \frac{1}{\omega_s} \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} \dot{x}_j(0) a_{is}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} x_j(0) a_{is}} \quad (I.73)$$

o bien

$$\gamma_s = \text{Arc tan} \left[ \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} x_j^{(0)} a_{is}}{\omega_s \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} x_j^{(0)} a_{is}} \right] \quad (I.74)$$

y

$$f_s = \frac{1}{\text{Cos } \gamma_s} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_{ij} x_j^{(0)} a_{is} \quad (I.75)$$

Tenemos, por tanto, la solución completa para pequeñas oscilaciones alrededor de una posición de equilibrio estable.

Puede observarse que al hallar las coordenadas normales hemos encontrado una transformación de las coordenadas  $x_1, \dots, x_N$  a las  $y_1, \dots, y_N$  que diagonaliza simultáneamente dos matrices,  $M$  y  $K$ . A menos que dos matrices tengan los mismos ejes principales es imposible diagonalizarlas a la vez mediante una rotación del sistema coordinado. En este caso reducimos  $M$  a  $1$  con la transformación (I.50), y como para una matriz constante todos los ejes son principales, los ejes principales de la segunda matriz reducirán ambas matrices a la forma diagonal.

En resumen, mediante esta transformación, ha sido posible definir nuevas coordenadas generalizadas, que varían armónicamente. Es posible excitar a cada una de estas coordenadas por separado y a los movimientos descritos por ellas se les llama modos normales de oscilación. Cuando solo se excita un modo normal todas las partículas oscilan con la misma frecuencia. El movimiento completo se compone entonces de la superposición de los modos normales.



## LA CADENA LINEAL DE OSCILADORES ARMONICOS

Una vez establecidas las bases para el estudio de sistemas de partículas con movimiento periódico alrededor de su posición de equilibrio y habiendo encontrado que este tipo de movimiento puede expresarse como una superposición de movimientos independientes de las coordenadas normales, se plantea ahora el problema de encontrar las frecuencias de oscilación de los modos normales de un tipo especialmente importante de sistema oscilatorio: la cadena lineal de osciladores armónicos.

En este capítulo se le da tratamiento a una cadena lineal finita con  $n$  defectos de masas diferentes entre sí.

Como método, para el cálculo de las frecuencias de modo normal no se obtienen las raíces de la ecuación secular del sistema, sino que habiendo establecido la existencia de las coordenadas normales, se desarrolla un método de solución de las ecuaciones de movimiento que contiene las condiciones en la frontera de mayor interés.<sup>6</sup> Se deriva una ecuación polinomial cuyas raíces permiten calcular las frecuencias normales de oscilación y finalmente se identifican los polinomios de la ecuación con un tipo de polinomios clásicos ortogonales.

## II.1.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Consideremos una cadena lineal finita formada por  $N$  masas puntuales donde las partículas más próximas están unidas entre sí por resortes ideales, sin masa e idénticos, de constante  $k$ . Supongamos que no todas las partículas de la cadena tienen la misma masa, sino que existen  $n$  de ellas ( $n < N$ ) cada una de masa

diferente  $m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) a las que llamaremos defectos; el resto de las partículas de la cadena tienen masas iguales  $m$ . La partícula de cualquier extremo de la cadena puede estar unida mediante un resorte del mismo tipo a un punto fijo exterior sobre la línea de la cadena, digamos a una pared de masa infinita, o bien puede estar libre, como se muestra en la figura 1. Estas condiciones sobre las partículas de los extremos que llamaremos condiciones de extremos fijos y de extremos libres respectivamente, constituyen las condiciones en la frontera de nuestro problema.

El problema por resolver consiste en calcular las frecuencias de oscilación longitudinal de los  $N$  modos normales de esta cadena. El método de solución que seguiremos aprovecha la existencia de las coordenadas normales para desarrollar una forma de solución alternativa a la presentada en el capítulo I.

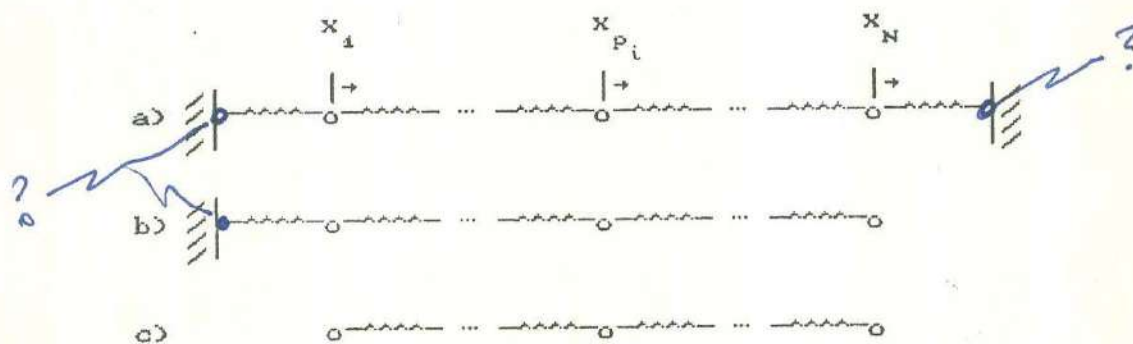


Fig.1. Se muestran las posibles condiciones en la frontera y la posición de cada partícula.

- a) Extremos fijos.
- b) Un extremo fijo y otro libre.
- c) Extremos libres.

Designemos con el índice  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) a las partículas de la cadena y con el índice  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) a la partícula de masa  $m_i$  cuando  $j$  toma justamente el valor asignado a la posición de la masa  $m_i$ ; entonces, dado un desplazamiento inicial a cada una de las partículas, las ecuaciones de movimiento del sistema son las siguientes

$$m \ddot{x}_j = k(x_{j+1} - x_j) - k(x_j - x_{j-1}) \quad j \neq p_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (II.1)$$

$$m_i \ddot{x}_{p_i} = k(x_{p_i+1} - x_{p_i}) - k(x_{p_i} - x_{p_i-1}) \quad j = p_i$$

con las condiciones en la frontera

*partícula?*  $\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0 \quad \text{extremo izquierdo fijo.} \\ x_0 = x_1 \quad \text{extremo izquierdo libre.} \\ x_{N+1} = 0 \quad \text{extremo derecho fijo.} \\ x_{N+1} = x_N \quad \text{extremo derecho libre.} \end{array} \right. \quad (II.2)$

las cuales podemos escribir como

$$x_0 = \alpha x_1 \quad \text{y} \quad x_{N+1} = \beta x_N \quad (II.3)$$

donde  $\alpha = 0$  ( $\beta = 0$ ) denota el extremo izquierdo (derecho) fijo y  $\alpha = 1$  ( $\beta = 1$ ) denota el extremo izquierdo (derecho) libre.

Sean:

$$\sigma_i = \frac{m_i}{m} \quad \text{y} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (II.4)$$

con lo que el sistema de ecuaciones de movimiento queda

$$\begin{aligned} \ddot{x}_j &= \omega_0^2 (x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1}) \quad j \neq p_i \\ \ddot{x}_{p_i} &= \sigma_i^{-1} \omega_0^2 (x_{p_i-1} - 2x_{p_i} + x_{p_i+1}) \quad j = p_i \end{aligned} \quad (II.5)$$

Por otra parte, sabemos que las posiciones de las partículas en cualquier instante las podemos expresar como una combinación lineal de las coordenadas normales

$$x_j(t) = \sum_{r=1}^N a_{jr} y_r(t) \quad (II.6)$$

o bien

$$\vec{x} = A \vec{y} \quad (II.7)$$

Multipliquemos por la izquierda esta última ecuación por  $A^T M$

$$A^T M \vec{x} = \underbrace{A^T M A}_{I} \vec{y} \quad (II.8)$$

de acuerdo con la condición de ortogonalidad, ecuación (I.50), de los vectores propios queda

$$\vec{y} = B \vec{x} \quad (II.9)$$

donde

$$B = A^T M \quad (II.10)$$

La ecuación (II.9) puede escribirse en términos de componentes como

$$y_r(t) = \sum_{j=1}^N b_{rj} x_j(t) \quad (II.11)$$

$$b_{rj} = \sum_{k=1}^N m_{kj} a_{kr} \quad \text{"no des"} \quad (II.12)$$

Las funciones  $y_r(t)$  satisfacen una ecuación diferencial de la forma

$$\ddot{y}_r + \omega_r^2 y_r = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (II.13)$$

I.66

donde  $\omega_r$  es la frecuencia del  $r$ -ésimo modo normal. El problema consiste entonces en encontrar todos los valores  $\omega_r > 0$  para los cuales existen  $y_r$  no triviales.

Derivando la ecuación (II.11) dos veces obtenemos

$$\ddot{y}_r(t) = \sum_{j=1}^N b_{rj} \ddot{x}_j(t) \quad (II.14)$$

y con la sustitución del sistema de ecuaciones de movimiento (II.5) queda

$$\ddot{y}_r = \omega_0^2 \sum_{j=1}^N c_{rj} (x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1}) \quad (II.15)$$

donde hemos definido el coeficiente  $c_{rj}$  como

$$c_{rj} = \begin{cases} b_{rj} & \text{si } j \neq p_i \\ \sigma_i^{-1} b_{rp_i} & \text{si } j = p_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (II.16)$$

Esta expresión para la aceleración y las frecuencias de oscilaciones en la forma

$$\omega_r^2 = 2(1 - \xi_r) \omega_0^2 \quad (II.17)$$

donde  $\xi_r$  es un parámetro adimensional no mayor que uno, permiten escribir las ecuaciones (II.13) como

$$\sum_{j=1}^N c_{rj} (x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1}) = -2(1 - \xi_r) \sum_{j=1}^N b_{rj} x_j \quad (II.18)$$

La comparación de los términos correspondientes de ambos lados de la igualdad nos permite escribir las siguientes relaciones entre los coeficientes

$$\begin{aligned} c_{r2} - 2c_{r1} + \alpha c_{r1} &= -2(1 - \xi_r) b_{r1} & j = 1 \\ c_{rj+1} - 2c_{rj} + c_{rj-1} &= -2(1 - \xi_r) b_{rj} & j \neq 1, N \\ \beta c_{rN} - 2c_{rN} + c_{rN-1} &= -2(1 - \xi_r) b_{rN} & j = N \end{aligned} \quad (II.19)$$

donde hemos utilizado las condiciones  $x_0 = \alpha x_1$  en la primera ecuación y  $x_{N+1} = \beta x_N$  en la última.

Definamos

$$c_{r0} = \alpha c_{r1} \quad (II.20a)$$

$$c_{rN+1} = \beta c_{rN} \quad (\text{II.20b})$$

que son la expresión en términos de los coeficientes  $c$  de las condiciones en la frontera (II.3), usamos esta definición para escribir el conjunto de ecuaciones (II.19) en la fórmula única

$$c_{rj+1} - 2c_{rj} + c_{rj-1} = -2(1 - \xi_r) b_{rj} \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (\text{II.21})$$

con ayuda de la definición (II.16) escribimos

$$c_{rj+1} = 2\xi_r c_{rj} - c_{rj-1} \quad (j \neq p_i) \quad (\text{II.22a})$$

$$c_{rp_i+1} = 2\xi_r c_{rp_i} - c_{rp_i-1} + 2(1 - \xi_r)(1 - \sigma_i) c_{rp_i} \quad (j = p_i) \quad (\text{II.22b})$$

Estas ecuaciones constituyen un sistema de  $N$  ecuaciones de diferencias, lineales, homogéneas, de segundo orden. Si asignamos valores a  $c_{r0}$  y  $c_{r1}$  podemos determinar los valores de  $c_{rj}$  ( $j \geq 2$ ) como combinaciones lineales de  $c_{r0}$  y  $c_{r1}$ ; y usando la definición (II.20a) los coeficientes  $c_{rj}$  serán función de  $c_{r1}$ ; por lo tanto,  $c_{r1}$  debe ser diferente de cero para tener soluciones no triviales.

Hasta aquí hemos especificado las características del sistema mecánico bajo estudio y establecido las ecuaciones de movimiento que contienen implícitamente las condiciones en la frontera más comunes. La transformación a las coordenadas normales nos ha conducido a un sistema de ecuaciones de diferencias que permiten calcular los coeficientes de la transformación recursivamente en términos del primer coeficiente asociado con la partícula número uno (la del extremo izquierdo). <sup>3</sup> Vemos en la última expresión como la presencia de los posibles defectos influyen en el valor de dichos coeficientes.

II.2.- ECUACION PARA EL CALCULO DE LAS FRECUENCIAS NORMALES DE UNA CADENA LINEAL FINITA CON  $n$  DEFECTOS.

Para resolver el sistema de ecuaciones (II.22) empecemos por escribir los primeros coeficientes  $c_{rj}$  usando la ecuación (II.22a)

$$c_{r2} = 2\xi_r c_{r1} - c_{r0}$$

$$c_{r3} = (4\xi_r^2 - 1)c_{r1} - 2\xi_r c_{r0}$$

$$c_{r4} = (8\xi_r^3 - 4\xi_r)c_{r1} - (4\xi_r^2 - 1)c_{r0}$$

$$c_{r5} = (16\xi_r^4 - 12\xi_r^2 + 1)c_{r1} - (8\xi_r^3 - 4\xi_r)c_{r0}$$

$$c_{r6} = (32\xi_r^5 - 32\xi_r^3 + 6\xi_r)c_{r1} - (16\xi_r^4 - 12\xi_r^2 + 1)c_{r0}$$

⋮  
⋮  
⋮

de aquí concluimos que existe una sucesión de polinomios  $\{Q_j(\xi)\}$  tales que

$$Q_0(\xi) = 1 \quad \text{y} \quad Q_1(\xi) = 2\xi \quad (\text{II.23})$$

y en términos de los cuales el sistema (II.22) tiene como solución:

$$c_{rj} = Q_{j-1}(\xi_r)c_{r1} - Q_{j-2}(\xi_r)c_{r0} \quad (j = 2, 3, \dots, p_1) \quad (\text{II.24})$$

Para probar esta conjetura utilicemos el principio de inducción matemática como sigue:

Supongamos que la ecuación (II.24) es válida para toda  $j \leq k$ ; entonces el coeficiente  $c_{rk+1}$  se obtiene de (II.22a)

$$c_{rk+1} = 2\xi_r c_{rk} - c_{rk-1}$$

sustituimos los coeficientes  $c_{rk}$  y  $c_{rk-1}$  usando (II.24)

$$\begin{aligned}
c_{rk+1} &= 2\xi_r (Q_{k-1} c_{r1} - Q_{k-2} c_{r0}) - (Q_{k-2} c_{r1} - Q_{k-3} c_{r0}) \\
&= (2\xi_r Q_{k-1} - Q_{k-2}) c_{r1} - (2\xi_r Q_{k-2} - Q_{k-3}) c_{r0} \\
&= Q_k c_{r1} - Q_{k-1} c_{r0}
\end{aligned}$$

Este resultado es idéntico a (II.24) con  $j = k+1$ . Además hemos encontrado que

$$Q_{j+1} = 2\xi_r Q_j - Q_{j-1} \quad (j \geq 1) \quad \text{(II.25)}$$

es la fórmula de recurrencia que deben satisfacer los polinomios de la sucesión.

Las ecuaciones (II.23) y (II.25) determinan la sucesión de polinomios; además, se sigue que para cada  $j$ ,  $Q_j(\xi)$  es de grado  $j$ . Con esto hemos probado la validez de la ecuación (II.24).

Para poder usar la ecuación (II.24) con  $j = 1$  basta con definir  $Q_{-1}(\xi) = 0$ , resultado que se obtiene de sustituir  $j = 0$  en (II.25) y usar (II.23).

Usemos de nuevo la ecuación (II.22a) para escribir los coeficientes  $c_{rj}$  con  $p_1+1 \leq j \leq p_2-1$

$$\begin{aligned}
c_{rp_1+2} &= 2\xi_r c_{rp_1+1} - c_{rp_1} \\
c_{rp_1+3} &= (4\xi_r^2 - 1)c_{rp_1+1} - 2\xi_r c_{rp_1} \\
c_{rp_1+4} &= (8\xi_r^3 - 4\xi_r)c_{rp_1+1} - (4\xi_r^2 - 1)c_{rp_1} \\
&\vdots \\
c_{rp_2} &= Q_{(p_2-p_1)-1} c_{rp_1+1} - Q_{(p_2-p_1)-2} c_{rp_1}
\end{aligned}$$

Observamos que los coeficientes  $c_{rj}$  con  $p_1+2 \leq j \leq p_2$  podemos escribirlos en términos de los coeficientes  $c_{rp_1+1}$  y  $c_{rp_1}$  dados por las ecuaciones (II.22b) y (II.24), respectivamente. Vemos que aparece de nuevo la misma sucesión de polinomios  $Q_j(\xi)$  definida por (II.23) y (II.25). Recordando que  $Q_{-1}(\xi) = 0$ , podemos escribir



estos coeficientes  $c_{rj}$ , incluyendo el  $c_{rp_1+1}$  como

$$c_{rp_1+h_1} = Q_{h_1-1}(\xi_r)c_{rp_1+1} - Q_{h_1-2}(\xi_r)c_{rp_1} \quad (1 \leq h_1 \leq p_2-p_1) \quad (II.26)$$

Para escribir estos coeficientes en términos de  $c_{r1}$  y  $c_{r0}$  empecemos por calcular  $c_{rp_1-1}$  y  $c_{rp_1}$  para ello tomemos  $j = p - 1$  y  $j = p_1$  en la ecuación (II.24) para obtener

$$c_{rp_1-1} = Q_{p_1-2}c_{r1} - Q_{p_1-3}c_{r0} \quad (II.27a)$$

$$c_{rp_1} = Q_{p_1-1}c_{r1} - Q_{p_1-2}c_{r0} \quad (II.27b)$$

los cuales los sustituimos en (II.22b) con  $j = p_1$

$$c_{rp_1+1} = (2\xi_r Q_{p_1-1} - Q_{p_1-2})c_{r1} - (2\xi_r Q_{p_1-2} - Q_{p_1-3})c_{r0} + 2(1 - \xi_r)(1 - \sigma_1)(Q_{p_1-1}c_{r1} - Q_{p_1-2}c_{r0}) \quad (II.28)$$

que con ayuda de la fórmula de recurrencia (II.25) queda

$$c_{rp_1} = Q_{p_1}c_{r1} - Q_{p_1-1}c_{r0} + 2(1 - \xi_r)(1 - \sigma_1)(Q_{p_1-1}c_{r1} - Q_{p_1-2}c_{r0}) \quad (II.29)$$

Sustituyamos ahora las expresiones obtenidas para los coeficientes  $c_{rp_1+1}$  y  $c_{rp_1}$  en la ecuación (II.26)

$$c_{rp_1+h_1} = (Q_{h_1-1}Q_{p_1} - Q_{h_1-2}Q_{p_1-1})c_{r1} - (Q_{h_1-1}Q_{p_1-1} - Q_{h_1-2}Q_{p_1-2})c_{r0} + 2(1 - \xi_r)(1 - \sigma_1)(Q_{p_1-1}c_{r1} - Q_{p_1-2}c_{r0})Q_{h_1-1} \quad (II.30)$$

En esta última ecuación aparecen diferencias de productos de polinomios de la forma

$$Q_j Q_n - Q_{j-1} Q_{n-1}$$

Veamos si podemos escribir estas expresiones de manera más compacta; para hacerlo fijemos el índice  $j$  y hagamos correr el índice  $n$  como sigue:

para  $n = 0$

$$Q_j Q_0 - Q_{j-1} Q_{-1} = Q_j$$

donde se ha usado (II.23) y  $Q_{-1} = 0$

para  $n = 1$  y con ayuda de la fórmula de recurrencia (II.25)

$$\begin{aligned} Q_j Q_1 - Q_{j-1} Q_0 &= 2\xi Q_j - Q_{j-1} \\ &= Q_{j+1} \end{aligned}$$

para  $n = 2$

$$\begin{aligned} Q_j Q_2 - Q_{j-1} Q_1 &= (4\xi^2 - 1)Q_j - 2\xi Q_{j-1} \\ &= 2\xi(2\xi Q_j - Q_{j-1}) - Q_j \\ &= 2\xi Q_{j+1} - Q_j \\ &= Q_{j+2} \end{aligned}$$

donde de nuevo hemos usado la fórmula de recurrencia (II.25).

De acuerdo con estos resultados podemos concluir la expresión, para  $n = k$

$$Q_{j+k} = Q_j Q_k - Q_{j-1} Q_{k-1}$$

Para probar esta identidad utilicemos el principio de inducción matemática como sigue: sabemos que la identidad se cumple para  $n = 1$ ; suponemos ahora que se cumple para  $n = k$  y probemos que se satisface para  $n = k + 1$ . Para hacerlo partimos de la fórmula de recurrencia (II.25)

$$\begin{aligned} Q_{j+k+1} &= 2\xi Q_{j+k} - Q_{j+k-1} \\ &= 2\xi(Q_j Q_k - Q_{j-1} Q_{k-1}) - Q_{j+k-1} \\ &= Q_j Q_{k+1} - Q_{j-1} Q_k \end{aligned}$$

en el último paso hicimos uso de nuevo de la fórmula de recurrencia. Con esto hemos probado que la identidad es correcta y establecemos que

$$Q_{j+n} = Q_j Q_n - Q_{j-1} Q_{n-1} \quad (II.31)$$

Con este resultado la expresión (II.30) para los coeficientes  $c_{rp_1+h_1}$  queda finalmente en la forma

$$\begin{aligned} c_{rp_1+h_1} &= Q_{p_1+h_1-1} c_{r1} - Q_{p_1+h_1-2} c_{r0} \\ &+ 2(1-\xi_r)(1-\sigma_1)(Q_{p_1-1} c_{r1} - Q_{p_1-2} c_{r0}) Q_{h_1-1} \quad (1 \leq h_1 \leq p_2-p_1) \end{aligned} \quad (II.32)$$

Si escribimos ahora algunos coeficientes  $c_{rj}$  con  $p_2+1 \leq j \leq p_9-1$  usando la ecuación (II.22a) vemos que aparece de nuevo la misma sucesión de polinomios  $Q_j(\xi)$  en términos de los cuales podemos escribir el resultado como

$$c_{rp_2+h_2} = Q_{h_2-1} c_{rp_2+1} - Q_{h_2-2} c_{rp_2} \quad (1 \leq h_2 \leq p_9-p_2) \quad (II.33)$$

Para expresarla en términos de los coeficientes  $c_{r1}$  y  $c_{r0}$  empezamos por tomar  $h_1 = p_2-p_1-1$  y  $h_1 = p_2-p_1$  en la ecuación (II.32) para tener

$$\begin{aligned} c_{rp_2-1} &= Q_{p_2-2} c_{r1} - Q_{p_2-3} c_{r0} \\ &+ 2(1-\xi_r)(1-\sigma_1)(Q_{p_1-1} c_{r1} - Q_{p_1-2} c_{r0}) Q_{p_2-p_1-2} \end{aligned} \quad (II.34)$$

$$\begin{aligned} c_{rp_2} &= Q_{p_2-1} c_{r1} - Q_{p_2-2} c_{r0} \\ &+ 2(1-\xi_r)(1-\sigma_1)(Q_{p_1-1} c_{r1} - Q_{p_1-2} c_{r0}) Q_{p_2-p_1-1} \end{aligned} \quad (II.35)$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación (II.22b) con  $i = 2$  y usando la fórmula de recurrencia de los polinomios obtenemos el coeficiente  $c_{rp_2+1}$  en la forma

$$\begin{aligned}
c_{rp_2+1} &= Q_{p_2} c_{r1} - Q_{p_2-1} c_{r0} \\
&+ 2(1-\xi_r)(1-\sigma_1)(Q_{p_1-1} c_{r1} - Q_{p_1-2} c_{r0}) Q_{p_2-p_1} \\
&+ 2(1-\xi_r)(1-\sigma_2)(Q_{p_2-1} c_{r1} - Q_{p_2-2} c_{r0}) \\
&+ 4(1-\xi_r)^2(1-\sigma_1)(1-\sigma_2)(Q_{p_1-1} c_{r1} - Q_{p_1-2} c_{r0}) Q_{p_2-p_1-1}
\end{aligned}
\tag{II.36}$$

Con la sustitución en (II.33) de las expresiones obtenidas para los coeficientes  $c_{rp_2+1}$  y  $c_{rp_2}$  y el uso de la identidad (II.31) escribimos finalmente

$$\begin{aligned}
c_{rp_2+h_2} &= Q_{p_2+h_2-1} c_{r1} - Q_{p_2+h_2-2} c_{r0} \\
&+ 2(1-\xi_r)(1-\sigma_1)(Q_{p_1-1} c_{r1} - Q_{p_1-2} c_{r0}) Q_{p_2-p_1+h_2-1} \\
&+ 2(1-\xi_r)(1-\sigma_2)(Q_{p_2-1} c_{r1} - Q_{p_2-2} c_{r0}) Q_{h_2-1} \\
&+ 4(1-\xi_r)^2(1-\sigma_1)(1-\sigma_2)(Q_{p_1-1} c_{r1} - Q_{p_1-2} c_{r0}) Q_{h_2-1} Q_{p_2-p_1-1} \\
&\hspace{15em} (1 \leq h_2 \leq p_3-p_2)
\end{aligned}
\tag{II.37}$$

Siguiendo el mismo procedimiento nos proponemos calcular ahora los coeficientes  $c_{rp_3+h_3}$  con  $1 \leq h_3 \leq p_4-p_3$ ; para ello, usamos de nuevo la ecuación (II.22a) para escribir los coeficientes

$$c_{rp_3+h_3} = Q_{h_3-1} c_{rp_3+1} - Q_{h_3-2} c_{rp_3} \quad (1 \leq h_3 \leq p_4-p_3) \tag{II.38}$$

Para expresar estos coeficientes en términos de  $c_{r1}$  y  $c_{r0}$  tomemos  $h_2 = p_3-p_2-1$  y  $h_2 = p_3-p_2$  en la ecuación (II.37)

$$\begin{aligned}
c_{rp_9-1} &= Q_{p_9-2} c_{r1} - Q_{p_9-3} c_{r0} \\
&+ 2(1-\xi_r)(1-\sigma_1)(Q_{p_1-1} c_{r1} - Q_{p_1-2} c_{r0}) Q_{p_9-p_1-2} \\
&+ 2(1-\xi_r)(1-\sigma_2)(Q_{p_2-1} c_{r1} - Q_{p_2-2} c_{r0}) Q_{p_9-p_2-2} \\
&+ 4(1-\xi_r)^2(1-\sigma_1)(1-\sigma_2)(Q_{p_1-1} c_{r1} - Q_{p_1-2} c_{r0}) Q_{p_9-p_2-2} Q_{p_2-p_1-1}
\end{aligned}
\tag{II.39}$$

$$\begin{aligned}
c_{rp_9} &= Q_{p_9-1} c_{r1} - Q_{p_9-2} c_{r0} \\
&+ 2(1-\xi_r)(1-\sigma_1)(Q_{p_1-1} c_{r1} - Q_{p_1-2} c_{r0}) Q_{p_9-p_1-1} \\
&+ 2(1-\xi_r)(1-\sigma_2)(Q_{p_2-1} c_{r1} - Q_{p_2-2} c_{r0}) Q_{p_9-p_2-1} \\
&+ 4(1-\xi_r)^2(1-\sigma_1)(1-\sigma_2)(Q_{p_1-1} c_{r1} - Q_{p_1-2} c_{r0}) Q_{p_9-p_2-1} Q_{p_2-p_1-1}
\end{aligned}
\tag{II.40}$$

Sustituyamos ahora estos resultados en la ecuación (II.22b) con  $i = 3$  y usemos la relación de recurrencia para obtener el coeficiente  $c_{rp_9+1}$  en la forma

$$\begin{aligned}
c_{rp_9+1} &= Q_{p_9} c_{r1} - Q_{p_9-1} c_{r0} \\
&+ 2(1-\xi_r)(1-\sigma_1)(Q_{p_1-1} c_{r1} - Q_{p_1-2} c_{r0}) Q_{p_9-p_1} \\
&+ 2(1-\xi_r)(1-\sigma_2)(Q_{p_2-1} c_{r1} - Q_{p_2-2} c_{r0}) Q_{p_9-p_2} \\
&+ 2(1-\xi_r)(1-\sigma_3)(Q_{p_9-1} c_{r1} - Q_{p_9-2} c_{r0}) \\
&+ 4(1-\xi_r)^2(1-\sigma_1)(1-\sigma_2)(Q_{p_1-1} c_{r1} - Q_{p_1-2} c_{r0}) Q_{p_9-p_2} Q_{p_2-p_1-1} \\
&+ 4(1-\xi_r)^2(1-\sigma_1)(1-\sigma_3)(Q_{p_1-1} c_{r1} - Q_{p_1-2} c_{r0}) Q_{p_9-p_1-1} \\
&+ 4(1-\xi_r)^2(1-\sigma_2)(1-\sigma_3)(Q_{p_2-1} c_{r1} - Q_{p_2-2} c_{r0}) Q_{p_9-p_2-1} \\
&+ 8(1-\xi_r)^3(1-\sigma_1)(1-\sigma_2)(1-\sigma_3)(Q_{p_1-1} c_{r1} - Q_{p_1-2} c_{r0}) Q_{p_9-p_2-1} \\
&\cdot Q_{p_2-p_1-1}
\end{aligned}
\tag{II.41}$$

Para escribir los coeficientes  $c_{rp_s+h_s}$  sustituyamos las expresiones obtenidas para  $c_{rp_s+1}$  y  $c_{rp_s}$  en la ecuación (II.38) y usemos la identidad (II.31) para tener

$$\begin{aligned}
 c_{rp_s+h_s} &= Q_{p_s+h_s-1} c_{r1} - Q_{p_s+h_s-2} c_{r0} \\
 &+ 2(1-\xi_r)(1-\sigma_1)(Q_{p_1-1} c_{r1} - Q_{p_1-2} c_{r0}) Q_{p_s-p_1+h_s-1} \\
 &+ 2(1-\xi_r)(1-\sigma_2)(Q_{p_2-1} c_{r1} - Q_{p_2-2} c_{r0}) Q_{p_s-p_2+h_s-1} \\
 &+ 2(1-\xi_r)(1-\sigma_3)(Q_{p_3-1} c_{r1} - Q_{p_3-2} c_{r0}) Q_{h_s-1} \\
 &+ 4(1-\xi_r)^2(1-\sigma_1)(1-\sigma_2)(Q_{p_1-1} c_{r1} - Q_{p_1-2} c_{r0}) Q_{p_s-p_2+h_s-1} Q_{p_2-p_1-1} \\
 &+ 4(1-\xi_r)^2(1-\sigma_1)(1-\sigma_3)(Q_{p_1-1} c_{r1} - Q_{p_1-2} c_{r0}) Q_{h_s-1} Q_{p_s-p_1-1} \\
 &+ 4(1-\xi_r)^2(1-\sigma_2)(1-\sigma_3)(Q_{p_2-1} c_{r1} - Q_{p_2-2} c_{r0}) Q_{h_s-1} Q_{p_s-p_2-1} \\
 &+ 8(1-\xi_r)^3(1-\sigma_1)(1-\sigma_2)(1-\sigma_3)(Q_{p_1-1} c_{r1} - Q_{p_1-2} c_{r0}) Q_{h_s-1} Q_{p_s-p_2-1} \\
 &\cdot Q_{p_2-p_1-1} \quad (1 \leq h_s \leq p_4-p_3) \quad \text{(II.42)}
 \end{aligned}$$

A partir de los coeficientes  $c_{rp_1+h_1}$ ,  $c_{rp_2+h_2}$  y  $c_{rp_3+h_3}$ , y continuando con el mismo procedimiento concluimos que los coeficientes  $c_{rp_j+h_j}$  con  $j = 1, \dots, n$  quedan expresados como

$$\begin{aligned}
 c_{rp_j+h_j} &= Q_{p_j+h_j-1} c_{r1} - Q_{p_j+h_j-2} c_{r0} \\
 &+ 2(1-\xi_r) \sum_{i=1}^j (1-\sigma_i)(Q_{p_i-1} c_{r1} - Q_{p_i-2} c_{r0}) Q_{p_j-p_i+h_j-1} \\
 &+ \sum_{k=2}^j [2(1-\xi_r)]^k \sum_{i_1=1}^j \sum_{i_2=2}^j \cdots \sum_{i_k=1}^j (1-\sigma_{i_1})(1-\sigma_{i_2}) \cdots (1-\sigma_{i_k}) \\
 &\quad i_k > i_{k-1} > \dots > i_2 > i_1 \\
 &\cdot (Q_{p_{i_1}-1} c_{r1} - Q_{p_{i_1}-2} c_{r0}) Q_{p_j-p_{i_k}+h_j-1} Q_{p_{i_k}-p_{i_{k-1}}-1} \\
 &\cdot Q_{p_{i_{k-1}}-p_{i_{k-2}}-1} \cdots Q_{p_{i_2}-p_{i_1}-1} \quad (1 \leq h_j \leq p_{j+1}-p_j) \quad \text{(II.43)}
 \end{aligned}$$

Esta fórmula que expresa a cualquiera de los coeficientes como combinación lineal de  $c_{r0}$  y  $c_{r1}$  es uno de los resultados más importantes del presente trabajo ya que su generalidad permite aplicarla a una variedad muy amplia de situaciones diferentes de la cadena lineal. A continuación consideramos el caso en que hay  $n$  defectos y aplicamos las condiciones en la frontera.

La condición del lado izquierdo, ecuación (II.20a), implica, para  $j = n$  la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
 c_{rp_n+h_n} = & \left\{ Q_{p_n+h_n-1} - \alpha Q_{p_n+h_n-2} \right. \\
 & + 2(1-\xi_r) \sum_{i=1}^n (1-\sigma_i) (Q_{p_i-1} - \alpha Q_{p_i-2}) Q_{p_n-p_i+h_n-1} \cdot \\
 & + \sum_{k=2}^n [2(1-\xi_r)]^k \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n (1-\sigma_{i_1}) (1-\sigma_{i_2}) \cdots (1-\sigma_{i_k}) \cdot \\
 & \quad i_k > i_{k-1} > \dots > i_2 > i_1 \\
 & \cdot (Q_{p_{i_1}-1} - \alpha Q_{p_{i_1}-2}) Q_{p_n-p_{i_k}+h_n-1} Q_{p_{i_k}-p_{i_{k-1}}-1} \cdot \\
 & \left. \cdot Q_{p_{i_{k-1}}-p_{i_{k-2}}-1} \cdots Q_{p_{i_2}-p_{i_1}-1} \right\} c_{r1}
 \end{aligned}
 \tag{II.44}$$

esto es, cualquiera de los coeficientes es múltiplo de  $c_{r1}$ .

Para aplicar la condición en la frontera del lado derecho, ecuación (II.20b), calculemos primero los coeficientes  $c_{rN}$  y  $c_{rN+1}$  para ello sustituyamos  $h_n = N-p_n$  y  $h_n = N-p_n+1$  en la ecuación anterior para obtener, respectivamente

$$\begin{aligned}
 c_{rN} = & \left\{ Q_{N-1} - \alpha Q_{N-2} \right. \\
 & + 2(1-\xi_r) \sum_{i=1}^n (1-\sigma_i) (Q_{p_i-1} - \alpha Q_{p_i-2}) Q_{N-p_i-1} \\
 & + \sum_{k=2}^n [2(1-\xi_r)]^k \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n (1-\sigma_{i_1}) (1-\sigma_{i_2}) \cdots (1-\sigma_{i_k}) \cdot \\
 & \quad i_k > i_{k-1} > \dots > i_2 > i_1
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & \cdot (Q_{p_{i_1}-1} - \alpha Q_{p_{i_1}-2}) Q_{N-p_{i_k}-1} Q_{p_{i_k}-p_{i_{k-1}}-1} Q_{p_{i_{k-1}}-p_{i_{k-2}}-1} \dots \\ & \cdot Q_{p_{i_s}-p_{i_2}-1} Q_{p_{i_2}-p_{i_1}-1} \end{aligned} \right\} c_{r1} \quad (\text{II.45})$$

$$\begin{aligned} c_{rN+1} = & \left\{ Q_N - \alpha Q_{N-1} \right. \\ & + 2(1-\xi_r) \sum_{i=1}^n (1-\sigma_i) (Q_{p_{i_1}-1} - \alpha Q_{p_{i_1}-2}) Q_{N-p_{i_1}} \\ & + \sum_{k=2}^n [2(1-\xi_r)]^k \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n (1-\sigma_{i_1}) (1-\sigma_{i_2}) \dots (1-\sigma_{i_k}) \cdot \\ & \quad \left. i_k > i_{k-1} > \dots > i_2 > i_1 \right. \\ & \cdot (Q_{p_{i_1}-1} - \alpha Q_{p_{i_1}-2}) Q_{N-p_{i_k}} Q_{p_{i_k}-p_{i_{k-1}}-1} Q_{p_{i_{k-1}}-p_{i_{k-2}}-1} \dots \\ & \cdot Q_{p_{i_s}-p_{i_2}-1} Q_{p_{i_2}-p_{i_1}-1} \left. \right\} c_{r1} \quad (\text{II.46}) \end{aligned}$$

Ahora sustituyamos estas expresiones en la condición en la frontera  $c_{rN+1} = \beta c_{rN}$  para obtener finalmente la ecuación

$$\begin{aligned} & Q_N - (\alpha+\beta)Q_{N-1} + \alpha\beta Q_{N-2} \\ & + 2(1-\xi_r) \sum_{i=1}^n (1-\sigma_i) (Q_{p_{i_1}-1} - \alpha Q_{p_{i_1}-2}) (Q_{N-p_{i_1}} - \beta Q_{N-p_{i_1}-1}) \\ & + \sum_{k=2}^n [2(1-\xi_r)]^k \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n (1-\sigma_{i_1}) (1-\sigma_{i_2}) \dots (1-\sigma_{i_k}) \cdot \\ & \quad i_k > i_{k-1} > \dots > i_2 > i_1 \\ & \cdot (Q_{p_{i_1}-1} - \alpha Q_{p_{i_1}-2}) (Q_{N-p_{i_k}} - \beta Q_{N-p_{i_k}-1}) Q_{p_{i_k}-p_{i_{k-1}}-1} Q_{p_{i_{k-1}}-p_{i_{k-2}}-1} \\ & \dots Q_{p_{i_s}-p_{i_2}-1} Q_{p_{i_2}-p_{i_1}-1} = 0 \quad (\text{II.47}) \end{aligned}$$

Esta ecuación es un polinomio de grado N en la variable  $\xi$  y tiene a lo más N raíces diferentes las cuales determinan las frecuencias de oscilación de los N modos normales, representa entonces un método alternativo, para el cálculo de las frecuencias,



al presentado en el capítulo I.

De acuerdo con las ecuaciones (II.2) y (II.3) se sustituye aquí  $\alpha = 0$  ( $\beta = 0$ ) cuando el lado izquierdo (derecho) está fijo, y  $\alpha = 1$  ( $\beta = 1$ ) cuando el lado izquierdo (derecho) está libre.

El método desarrollado en esta sección contiene resultados interesantes: en las ecuaciones que determinan los coeficientes  $c_{rj}$  aparece una sucesión de polinomios en la variable  $\xi$  bien definida; tales polinomios permiten construir una ecuación general que expresa cualquier coeficiente  $c_{rj}$  en términos de los primeros dos coeficientes  $c_{r0}$  y  $c_{r1}$ . Al aplicar las condiciones en la frontera en esta ecuación se llega a una ecuación polinomial cuyas raíces permiten obtener las frecuencias de los N modos normales de oscilación con la ventaja de que el método se puede aplicar para cualquier número de defectos presentes en la cadena, incluyendo la cadena homogénea que es el caso  $n = 0$ . Sólo para este caso las raíces se pueden calcular analíticamente; para los casos  $n \geq 1$  el cálculo de las raíces requiere el empleo de métodos numéricos. La dificultad que presenta el cálculo de raíces se incrementa con n porque el número de términos de la ecuación aumenta rápidamente, de la misma manera como lo hacen los coeficientes de un desarrollo binomial.

Por último cabe resaltar que con la ecuación obtenida pueden calcularse las frecuencias normales de cadenas lineales diatómicas, triatómicas, etc.

En los capítulos III y IV se obtienen resultados para los casos  $n = 0$  y  $n = 1$  que constituyen la cadena homogénea y la cadena con un defecto, respectivamente.

### II.3.- LOS POLINOMIOS $Q_j(\xi)$ .

La fórmula de recurrencia (II.25) para los polinomios  $Q_j(\xi)$  es un sistema de ecuaciones de diferencias lineal homogéneo de segundo orden que podemos escribirlo como

$$Q_{j+1} - 2\xi Q_j + Q_{j-1} = 0 \quad (\text{II.48})$$

Para resolverlo, proponemos una solución de la forma

$$Q_j = \lambda^j \quad (II.49)$$

cuya sustitución en la ecuación (II.48) nos conduce a

$$\lambda^{j-1}(\lambda^2 - 2\xi\lambda + 1) = 0 \quad (II.50)$$

para tener soluciones no triviales debe cumplirse que los valores posibles de  $\lambda$  sean raíces de

$$\lambda^2 - 2\xi\lambda + 1 = 0 \quad (II.51)$$

Esta ecuación es un polinomio de segundo grado en  $\lambda$  que se conoce como polinomio característico de la ecuación de diferencias.

Las raíces son

$$\lambda = \xi \pm (\xi^2 - 1)^{1/2} \quad (II.52)$$

como  $\xi \leq 1$  podemos dividir el dominio en la región  $\xi < -1$  y en la región  $-1 \leq \xi \leq 1$ . En la primera de estas regiones las raíces  $\lambda$  son reales, esta región es de importancia cuando la cadena contiene defectos, como se verá en el capítulo IV. En la región  $|\xi| \leq 1$  las raíces son complejas conjugadas

$$\lambda = \xi \pm i(1 - \xi^2)^{1/2} \quad (II.53)$$

Este resultado sugiere un cambio de variable de la forma

$$\xi = \cos\phi \quad 0 < \phi < \pi \quad (II.54)$$

válido únicamente para la región  $|\xi| \leq 1$ ; con el cual obtenemos

$$\lambda = \cos\phi \pm i\sin\phi \quad (II.55)$$

o bien

$$\lambda = e^{\pm i\phi} \quad (II.56)$$

Con ésto las soluciones posibles a (II.48) son de la forma

$$Q_j = e^{\pm i j \phi} \quad (II.57)$$

Sin embargo es necesario que  $Q_0$  y  $Q_1$  sean reales de acuerdo con (II.23) y como estas soluciones no dan la expresión correcta para  $Q_1$ , entonces escribimos la solución general de la ecuación de diferencias como una combinación lineal de las partes real e imaginaria de la solución obtenida

$$Q_j = A \cos j\phi + B \sin j\phi \quad (II.58)$$

donde A y B son constantes por determinar independientes de j. Usando las expresiones para  $Q_0$  y  $Q_1$  obtenemos

$$Q_0 = 1 = A \quad (II.59)$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= 2\xi = 2\cos\phi \\ &= A\cos\phi + B\sin\phi \end{aligned} \quad (II.60)$$

de donde

$$B = \frac{\cos\phi}{\sin\phi} \quad (II.61)$$

Sustituimos estos valores de A y B en (II.58) para obtener la solución general en la forma

$$Q_j(\cos\phi) = \frac{\sin(j+1)\phi}{\sin\phi} \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (II.62)$$

Claramente esta solución satisface las ecuaciones (II.23) y (II.25) que definen a los polinomios  $Q_j$ , incluso el resultado  $Q_{-1} = 0$ , y satisface la identidad (II.31) como puede verificarse

por sustitución directa.

Las expresiones (II.62) son conocidos como polinomios de Chebyshev de Segundo Tipo.

Tomando en cuenta que  $\xi = \text{Cos}\phi$  y sustituyendo los polinomios de Chebyshev (II.62) en la ecuación (II.47) obtenemos una ecuación polinomial de grado N en la variable  $\text{Cos}\phi$  cuyas raíces reales nos permiten determinar las frecuencias normales que se encuentran en el intervalo  $0 \leq \omega_r \leq 2\omega_0$ , como se sigue de la expresión (II.17) la cual se puede reescribir como

$$\omega_r = 2\omega_0 \text{Sen} \frac{1}{2} \phi_r \quad \text{(II.63)}$$

con el índice r estamos numerando las raíces, por lo que  $r \leq N$ .

En esta parte, hemos utilizado la fórmula de recurrencia que satisfacen los polinomios  $Q_j(\xi)$ , la cual es una ecuación de diferencias que tiene dos soluciones complejas conjugadas en la región  $|\xi| \leq 1$ ; la parte real de las soluciones son los polinomios de Chebyshev del I tipo<sup>o</sup>; la parte imaginaria no son polinomios. La combinación lineal de las partes real e imaginaria son los polinomios de Chebyshev de II tipo. Es interesante este último resultado, en el que el cálculo de las frecuencias normales de la cadena lineal con n defectos pueda realizarse a partir de las raíces de estos polinomios ortogonales clásicos.

## LA CADENA HOMOGENEA

En este capítulo se analiza el caso particular en el que la cadena lineal contiene sólo masas iguales; para ello, partimos de la ecuación (II.47) con todas las  $\alpha_i$  iguales a uno de tal manera que los únicos términos diferentes de cero son los primeros tres, y la ecuación básica para calcular los modos normales se reduce a

$$Q_N - (\alpha + \beta)Q_{N-1} + \alpha\beta Q_{N-2} = 0 \quad \text{(III.1)}$$

El uso de las diferentes condiciones en la frontera sobre esta ecuación permite calcular, en cada caso, las frecuencias de oscilación de los modos normales de la cadena lineal homogénea.

Las situaciones que se analizarán son las siguientes:

- 1).- Ambos extremos están fijos
- 2).- Un extremo fijo y uno libre
- 3).- Ambos extremos libres

## III.1.- CADENA HOMOGENEA CON EXTREMOS FIJOS.

De conformidad con el capítulo anterior, en este caso tomamos  $\alpha = \beta = 0$ , con lo cual la ecuación anterior se reduce a

$$Q_N = 0 \quad \text{(III.2)}$$

que puede expresarse de acuerdo al resultado (II.62) como

$$\frac{\text{Sen}(N+1)\phi}{\text{Sen}\phi} = 0 \quad \text{(III.3)}$$

y cuyas soluciones son

$$\phi_r = \left[ \frac{r}{N+1} \right] \pi \quad r = 1, 2, \dots, N \quad \text{(III.4)}$$

Sustituyendo estos valores del parámetro  $\phi$  en la ecuación (II.63), se obtienen las frecuencias de los modos normales

$$\omega_r = 2\omega_0 \text{Sen} \left[ \left[ \frac{r}{N+1} \right] \frac{\pi}{2} \right] \quad r = 1, 2, \dots, N \quad \text{(III.5)}$$

Observamos en la expresión obtenida para las frecuencias de oscilación que existe una cota superior para ellas, esto es, la cadena homogénea no puede oscilar con cualquier frecuencia, sino que existe una frecuencia máxima más allá de la cual la cadena no puede entrar en un modo normal. Esta frecuencia máxima se conoce como frecuencia de corte, se denota con  $\omega_c$ , y se obtiene tomando el límite  $r \rightarrow \infty$ ,  $N \rightarrow \infty$  en la ecuación que determina las frecuencias. Este límite es

$$\omega_c = 2\omega_0 \quad \text{(III.6)}$$

Se dice entonces que la cadena homogénea es un filtro de frecuencias altas.<sup>10</sup>

En la tabla presentada al final de la sección III.3, se muestran las frecuencias calculadas para el caso  $N = 21$  y  $\omega_0 = \frac{1}{2}$ .

### III.2.- CADENA HOMOGÉNEA CON UN EXTREMO FIJO Y UNO LIBRE.

Consideremos ahora el caso en que, por ejemplo, el extremo izquierdo está fijo y el derecho libre; la selección de cuál extremo es el que se designe fijo y cuál libre es irrelevante debido a la simetría de la cadena; en cualquier caso las condiciones en la frontera conducen a la misma ecuación. Así pues, tomemos  $\alpha = 0$  y  $\beta = 1$ , con lo que obtenemos

$$Q_N - Q_{N-1} = 0 \quad \text{(III.7)}$$

y usando la expresión para los polinomios  $Q_j$  dada por (II.62), esta ecuación se reduce a la forma

$$\frac{\cos \left[ N + \frac{1}{2} \right] \phi}{\cos \frac{1}{2} \phi} = 0 \quad \text{(III.8)}$$

que se satisface para los  $N$  valores de  $\phi$  dados por

$$\phi_r = \left[ \frac{2r - 1}{2N + 1} \right] \pi \quad r = 1, 2, \dots, N \quad \text{(III.9)}$$

las frecuencias de los modos normales quedan, de acuerdo a (II.63) como

$$\omega_r = 2\omega_0 \text{Sen} \left[ \left[ \frac{2r - 1}{2N + 1} \right] \frac{\pi}{2} \right] \quad r = 1, 2, \dots, N \quad \text{(III.10)}$$

Vemos que bajo estas condiciones en la frontera existe una frecuencia de corte que coincide con la del caso anterior.

Las frecuencias calculadas para el caso  $N = 21$  y  $\omega_0 = \frac{1}{2}$  se presentan en la tabla al final de la sección III.3. Nótese que las frecuencias normales obtenidas en este caso son menores que las frecuencias del modo correspondiente en el caso en que ambos extremos están fijos. La explicación de este hecho se dará más adelante.

### III.3.- CADENA HOMOGÉNEA CON EXTREMOS LIBRES.

Las condiciones en la frontera implican en este caso tomar  $\alpha = \beta = 1$  con lo cual obtenemos

$$Q_N - 2Q_{N-1} + Q_{N-2} = 0 \quad \text{(III.11)}$$

Para expresar esta ecuación de una manera más simple, hagamos

uso de la fórmula de recurrencia que satisfacen los polinomios  $Q_j$ , la cual está dada por la ecuación (II.25), para el caso en que  $j = N-1$

$$Q_N = 2\xi Q_{N-1} - Q_{N-2} \quad \text{(III.12)}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación anterior, junto con  $\xi = \text{Cos}\phi$ , obtenemos

$$2(\text{Cos}\phi - 1)Q_{N-1} = 0 \quad \text{(III.13)}$$

que indica que la primera de las  $N$  raíces es

$$\phi_1 = 0 \quad \text{(III.14)}$$

y la frecuencia del modo correspondiente es

$$\omega_1 = 0 \quad \text{(III.15)}$$

es decir, en este modo la cadena no presenta movimiento armónico sino que solo se desplaza longitudinalmente.

Las  $N - 1$  raíces restantes se obtienen, de acuerdo a (III.13), como las raíces de

$$Q_{N-1} = 0 \quad \text{(III.16)}$$

esto es, son raíces de

$$\frac{\text{Sen}N\phi}{\text{Sen}\phi} = 0 \quad \text{(III.17)}$$

y están dadas por

$$\phi_r = \left[ \frac{r - 1}{N} \right] \pi \quad r = 2, 3, \dots, N. \quad \text{(III.18)}$$

y las frecuencias correspondientes de cada modo normal son



$$\omega_r = 2\omega_0 \text{Sen} \left[ \left[ \frac{r-1}{N} \right] \frac{\pi}{2} \right] \quad r = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (\text{III.19})$$

donde hemos incorporado el primer modo normal como el caso  $r = 1$ . Note que la frecuencia de corte coincide con la de los dos casos anteriores.

En la tabla que aparece a continuación se muestran las frecuencias de los modos normales para el caso  $N = 21$ ,  $\omega_0 = \frac{1}{2}$ .

r	$\omega_r$		
	extremos fijos	un extremo libre	ambos extremos libres
1	0.07134	0.03652	0.00000
2	0.14231	0.10937	0.07473
3	0.21257	0.18164	0.14904
4	0.28173	0.25293	0.22252
5	0.34946	0.32288	0.29476
6	0.41542	0.39110	0.36534
7	0.47925	0.45724	0.44880
8	0.54064	0.52094	0.50000
9	0.59928	0.58186	0.56332
10	0.65486	0.63967	0.62349
11	0.70711	0.69407	0.68017
12	0.75575	0.74477	0.73305
13	0.80054	0.79150	0.78183
14	0.84125	0.83400	0.82624
15	0.87768	0.87205	0.86603
16	0.90963	0.90545	0.90097
17	0.93695	0.93402	0.93087
18	0.95949	0.95760	0.95557
19	0.97715	0.97608	0.97493
20	0.98982	0.98934	0.98883
21	0.99745	0.99733	0.99720
$\omega_0$	1.00000	1.00000	1.00000

Frecuencias normales de oscilación de la cadena homogénea con  $N = 21$ ,  $\omega_0 = \frac{1}{2}$ , para diferentes condiciones en la frontera.

En este análisis hemos encontrado una característica importante de la cadena homogénea: existe una frecuencia de corte por arriba de la cual la cadena no puede oscilar; el valor de esta frecuencia es independiente de las condiciones en la frontera.

Por otro lado, observamos de la tabla anterior que las condiciones en la frontera son determinantes para el valor de las frecuencias de oscilación de los modos normales, de tal manera que en el caso en que la cadena tiene ambos extremos fijos las frecuencias normales son más altas que las frecuencias de los modos correspondientes en el caso en que un extremo está fijo y el otro libre, y éstas, a su vez, son mayores que las frecuencias de oscilación correspondientes en el caso en que ambos extremos están libres.

Que las frecuencias de oscilación dependan de las condiciones en la frontera puede explicarse en base a la forma de la función de energía potencial de la cadena lineal y que podemos escribir como

$$V = \frac{1}{2} k \sum_{i=1}^{N+1} (x_i - x_{i-1})^2 \quad \text{(III.20)}$$

donde hemos considerado nuevamente las definiciones

$$x_0 = \alpha x_1 \quad \text{y} \quad x_{N+1} = \beta x_N \quad \text{(III.21)}$$

que incluyen las condiciones en la frontera.

Una forma posible de excitar al sistema consiste en desplazar las masas de su posición de equilibrio y soltarlas desde el reposo en forma tal que todas las partículas oscilen con la misma frecuencia  $\omega$ , de esta manera el sistema se moverá en uno de sus modos normales. La energía inicial proporcionada al sistema en  $t = 0$  se convierte totalmente en energía cinética al pasar las partículas por su posición de equilibrio. Pero, hemos encontrado en la ecuación (I.45) que la energía cinética es proporcional al cuadrado de la frecuencia  $\omega$ , por lo tanto, la energía potencial inicial será entonces proporcional a  $\omega^2$ .

Si denotamos con  $x_i^0$  la posición inicial de las partículas de la cadena, entonces la energía potencial inicial, para las

distintas condiciones en la frontera, será

$$V = \frac{1}{2}k[(x_1^0)^2 + (x_2^0 - x_1^0)^2 + \dots + (x_N^0 - x_{N-1}^0)^2 + (x_N^0)^2] \quad \text{(III.22)}$$

$$V = \frac{1}{2}k[(x_2^0 - x_1^0)^2 + \dots + (x_N^0 - x_{N-1}^0)^2 + (x_N^0)^2] \quad \text{(III.23)}$$

$$V = \frac{1}{2}k[(x_2^0 - x_1^0)^2 + \dots + (x_N^0 - x_{N-1}^0)^2] \quad \text{(III.24)}$$

*libera*  
*ig.*

que corresponden a los casos de extremos fijos, un extremo fijo y uno libre, y ambos extremos libres, respectivamente.

Si en cada caso el desplazamiento inicial de las partículas es el mismo, al tomar en cuenta que todos los términos en la energía son positivos podemos concluir que las frecuencias de los modos correspondientes serán mayores en el caso en que ambos extremos están fijos porque la energía proporcionada en  $t = 0$  es mayor. Por la misma razón, las frecuencias en el caso de un extremo fijo y uno libre serán mayores que las frecuencias de los modos correspondientes en el caso en que ambos extremos se han dejado libres.

*(observado)*

De esta forma hemos explicado, con base en la relación entre la energía y la frecuencia del modo dado, el comportamiento de las frecuencias normales bajo las diferentes condiciones en la frontera.

" Podemos obtener todavía algunas otras conclusiones respecto a los valores de las frecuencias por inspección de la forma de la energía potencial. Así, vemos que el modo de menor frecuencia, ya que corresponde al de menor energía, se obtiene desplazando todas las partículas en el mismo sentido y con la misma amplitud inicial. En el caso en que ambos extremos están libres esto representa una traslación del sistema completo y la frecuencia de este modo es cero."

*$\xi_i = \xi_j$  en III 24*

" Por el contrario, si queremos que la frecuencia sea la mayor posible, debemos colocar las masas inicialmente en forma tal que la energía potencial alcance su valor máximo. Como se ve de la forma para el potencial, esto implica que hay que desplazar las partículas de forma que

$$x_i^0 x_{i+1}^0 < 0 \quad \forall i$$

(III.25)

es decir, que las masas contiguas se deben desplazar en sentido contrario.

En este caso, cuando los extremos de cada resorte se desplazan en sentido contrario, existe un punto en cada resorte que no se mueve; por simetría, si los desplazamientos contrarios son iguales en magnitud, ese punto en reposo estaría en el centro de cada resorte. Tales puntos estacionarios se llaman nodos.

Vemos que en el modo de mayor frecuencia existen  $N - 1$  nodos, mientras que en el de menor frecuencia no existen nodos. Esta observación implica que a medida que aumenta el número de nodos en la cadena la frecuencia del modo excitado es mayor. Esto es así, porque una masa contigua a un nodo se encuentra bajo la acción de un resorte de constante efectiva mayor<sup>10</sup> y su energía potencial es mayor, lo que de acuerdo con las conclusiones anteriores da como resultado un modo de frecuencia más alta.

Con esto hemos resumido algunas de las características más importantes de la cadena lineal homogénea. En el capítulo siguiente obtenemos algunas propiedades de la cadena no homogénea.

El máximo de nodos es?

Una partícula puede ser un nodo

## CAPITULO IV

### LA CADENA CON UN DEFECTO

En este capítulo se estudia la cadena lineal con un defecto y se discute como la presencia de éste modifica los valores de las frecuencias normales de los modos de oscilación.

Tomando  $n = 1$  en la ecuación (II.47) se obtiene la siguiente ecuación básica para el cálculo de las frecuencias de modo normal cuando se encuentra presente un defecto en la cadena

$$Q_N - (\alpha + \beta)Q_{N-1} + \alpha\beta Q_{N-2} + 2(1 - \xi)(1 - \sigma)(Q_{p-1} - \alpha Q_{p-2})(Q_{N-p} - \beta Q_{N-p-1}) = 0 \quad (IV.1)$$

donde  $p$  indica el lugar que el defecto ocupa en la cadena. En esta ecuación el parámetro  $\sigma$  contiene la información sobre el valor de la masa del defecto.

Con el fin de comparar los resultados con lo expuesto en el capítulo anterior, se analizarán nuevamente las situaciones siguientes:

- 1).- Ambos extremos fijos.
- 2).- Un extremo fijo y uno libre.
- 3).- Ambos extremos libres.

cada caso queda determinado por los valores que toman los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ .

#### IV.1.- CADENA NO HOMOGENEA CON EXTREMOS FIJOS.

De acuerdo con las ecuaciones (II.2) y (II.3), que determinan las condiciones en la frontera, en este caso,  $\alpha = \beta = 0$ . Sustituimos estos valores en la ecuación (IV.1) con lo que obtenemos

$$Q_N + 2(1 - \sigma)(1 - \xi)Q_{N-p}Q_{p-1} = 0 \quad (IV.2)$$

Sustituyendo en esta ecuación a la variable  $\xi = \text{Cos}\phi$  y las expresiones correspondientes para los polinomios  $Q_j$  dadas por la ecuación (II.62) podemos reescribir (IV.2) como

$$\frac{\text{Sen}(N+1)\phi}{\text{Sen}\phi} = 2(\sigma-1)(1-\text{Cos}\phi) \frac{\text{Sen}(N-p+1)\phi}{\text{Sen}\phi} \frac{\text{Sen}p\phi}{\text{Sen}\phi} \quad (\text{IV.3})$$

cuyas soluciones son los valores de  $\phi$  que determinan las frecuencias de cada modo normal.

Hagamos uso de las identidades siguientes

$$\begin{aligned} \text{Sen}(N+1)\phi &= \text{Sen}[(N-p+1)\phi + p\phi] \\ &= \text{Sen}(N-p+1)\phi \text{Cosp}\phi + \text{Sen}p\phi \text{Cos}(N-p+1)\phi \end{aligned} \quad (\text{IV.4})$$

$$\tan \frac{1}{2}\phi = \frac{1 - \text{Cos}\phi}{\text{Sen}\phi} \quad (\text{IV.5})$$

con lo que nos queda

$$\begin{aligned} \text{Sen}(N-p+1)\phi \text{Cosp}\phi + \text{Sen}p\phi \text{Cos}(N-p+1)\phi \\ = 2(\sigma-1) \tan \frac{1}{2}\phi \text{Sen}(N-p+1)\phi \text{Sen}p\phi \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

Finalmente dividamos la ecuación (IV.6) por

$$\text{Sen}(N-p+1)\phi \text{Sen}p\phi \neq 0 \quad (\text{IV.7})$$

para obtener la ecuación

$$\text{Cot}p\phi + \text{Cot}(N-p+1)\phi = 2(\sigma-1) \tan \frac{1}{2}\phi \quad (\text{IV.8})$$

Esta es una ecuación trascendente para  $\phi$  representada gráficamente en la figura 2. Los valores de  $\phi$  que satisfacen la ecuación están dados por la intersección de las curvas que representan el lado izquierdo y derecho de esta ecuación.

El lado izquierdo de (IV.8) tiene una asíntota vertical en aquellos valores de  $\phi$  donde la ecuación (IV.7) es igual a cero.

Entre cada par de asíntotas verticales existe una curva que decrece monótonamente.

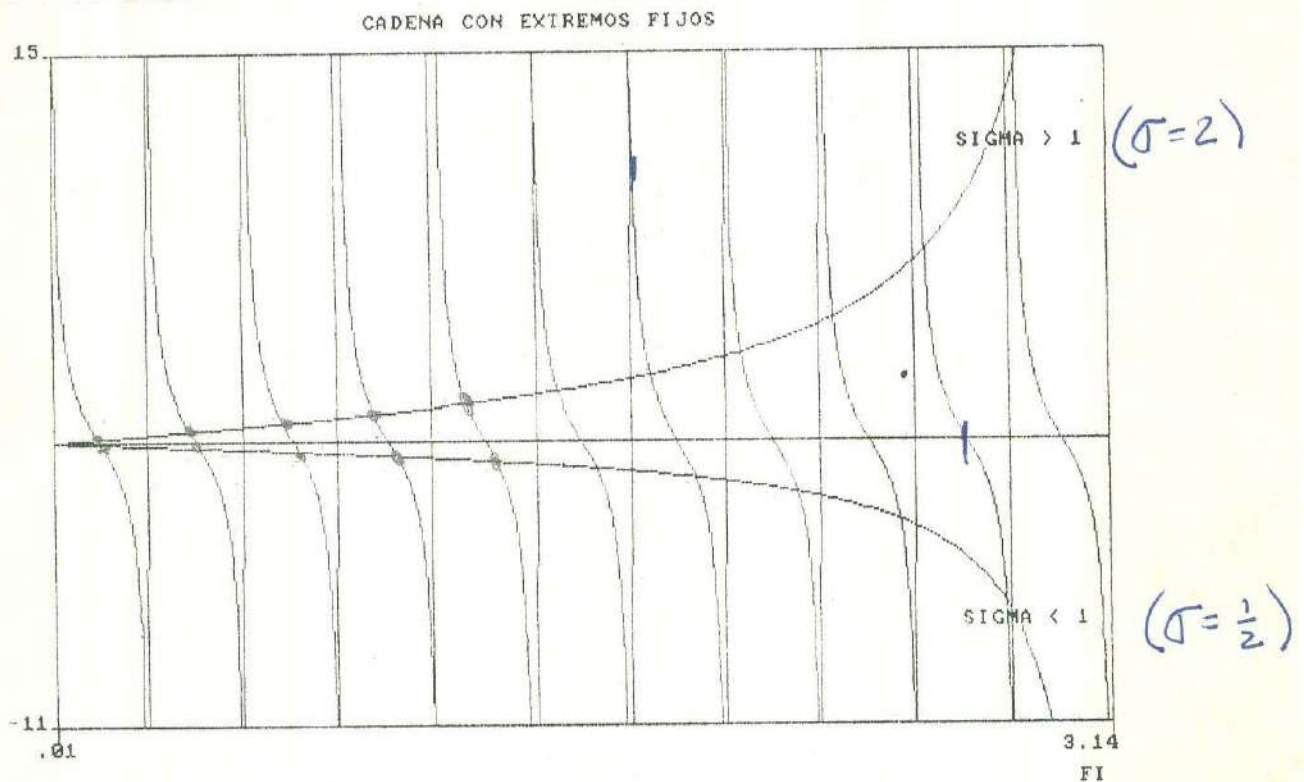


Fig.2.- Soluciones de (IV.8) para  $N = 21$  y  $p = 11$ .

Por otra parte, el miembro derecho de (IV.8) crece monótonamente (decrece), desde  $\phi = 0$ , cuando  $\sigma > 1$  ( $\sigma < 1$ ) y posee una asíntota vertical en  $\phi = \pi$ .

Vemos que las gráficas se cruzan una vez en cada uno de los subintervalos en que ha quedado partido el intervalo  $0 < \phi < \pi$  por las asíntotas verticales. Pero, cuando  $\sigma < 1$  en el último subintervalo puede o no ocurrir la intersección de las gráficas.

Para calcular las raíces de la ecuación (IV.8) empezamos por determinar el número de asíntotas verticales que posee el miembro izquierdo de esta ecuación; de esta manera dividimos el intervalo  $0 < \phi < \pi$  en subintervalos separados por dichas asíntotas, en cada uno de las cuales existe una solución.

La función cotangente tiene una asíntota cada vez que su

argumento es un múltiplo entero de  $\pi$ . Así, en el intervalo  $0 < \phi < \pi$  se tienen las asíntotas siguientes para el miembro izquierdo de (IV.8)

$$\phi = \frac{r}{p} \pi \quad (r = 1, 2, \dots, p - 1) \quad \text{(IV.9a)}$$

$$\phi = \frac{s}{(N - p + 1)} \pi \quad (s = 1, 2, \dots, N - p) \quad \text{(IV.9b)}$$

Si ninguno de los valores de  $\phi$  obtenidos de (IV.9a) y (IV.9b) coinciden, entonces el intervalo  $0 < \phi < \pi$  se parte en  $(p - 1) + (N - p) + 1 = N$  subintervalos acotados por las asíntotas verticales.

En este caso, concluimos que cuando  $\sigma > 1$  la ecuación (IV.8) tiene exactamente  $N$  soluciones en  $0 < \phi < \pi$ , una en cada subintervalo; por otro lado, si  $\sigma < 1$  entonces puede o no haber solución en el último subintervalo.

Veamos ahora el caso en que existen asíntotas con valores comunes. Estos valores son tales que

$$\frac{r}{p} \pi = \frac{s}{(N - p + 1)} \pi$$

Sea  $d$  el máximo común divisor de  $p$  y  $N - p + 1$  entonces  $p = kd$  y  $N - p + 1 = \ell d$  donde  $k$  y  $\ell$  son primos relativos, de aquí que

$$\frac{r}{k} = \frac{s}{\ell}$$

Se cumple que  $k \mid r$  y  $\ell \mid s$ , entonces

$$\frac{r}{k} = \frac{s}{\ell} = \text{entero}$$

Ris. T. 153

con esto, los valores comunes quedan dados por

$$\phi = (\text{entero}) \frac{\pi}{d}$$

Como  $p = kd$  se tiene  $r = 1, 2, \dots, kd - 1$  y por tanto hay  $d - 1$  asíntotas que pueden ser comunes. Como  $N - p + 1 = \ell d$



entonces  $s = 1, 2, \dots, d - 1$  y por tanto hay  $d - 1$  asíntotas que son comunes, entonces  $s = h\ell$  y los valores comunes son:

$$\phi = \frac{h}{d} \pi \quad (1, 2, \dots, d - 1)$$

Este resultado lo podemos resumir en el siguiente teorema:<sup>8</sup>

**Teorema 1.-** Si  $d > 1$  es el máximo común divisor de  $p$  y  $N - p + 1$  entonces  $d - 1$  asíntotas de (IV.9a) coinciden con  $d - 1$  asíntotas de (IV.9b) y los valores comunes son

$$\phi = \frac{h}{d} \pi \quad (1, 2, \dots, d-1) \quad \text{(IV.10)}$$

De acuerdo con este resultado el número de subintervalos en que se ha partido el intervalo  $0 < \phi < \pi$  disminuye en  $d - 1$  y por consiguiente tenemos solo  $N - (d - 1)$  soluciones de la ecuación (IV.8), o quizás una menos en el caso  $\sigma < 1$ .

Las  $d - 1$  soluciones faltantes están dadas por la ecuación (IV.10) como puede verificarse por sustitución directa en la ecuación (IV.3). Estas soluciones son independientes del valor de  $\sigma$  y son un subconjunto de las soluciones de la cadena homogénea con extremos fijos.

Por otro lado, hemos mencionado que en el caso en que  $\sigma < 1$  puede existir o no una solución en el último subintervalo. Veamos ahora como determinar esta solución; para ello, primero reescribamos la ecuación (IV.3) en la siguiente forma

$$\cos \frac{1}{2} \phi \operatorname{Sen}(N + 1)\phi = 2(\sigma - 1) \operatorname{Sen} \frac{1}{2} \phi \operatorname{Sen}(N - p + 1)\phi \operatorname{Sen} p\phi \quad \text{(IV.11)}$$

donde hemos usado la identidad (IV.5).

Cambiamos a la variable

$$\psi = \pi - \phi \quad \text{(IV.12)}$$

para centrar nuestra atención en la vecindad del origen. De esta manera, la ecuación (IV.11) se convierte en

$$\operatorname{Sen} \frac{1}{2} \psi \operatorname{Sen}(N + 1)\psi = 2(1 - \sigma) \cos \frac{1}{2} \psi \operatorname{Sen}(N - p + 1)\psi \operatorname{Sen} p\psi \quad \text{(IV.13)}$$

Para observar el comportamiento de ambos lados de (IV.13) en  $\psi = 0$  calculamos sus derivadas. La primera derivada de ambos lados en  $\psi = 0$  son cero. La segunda derivada del lado izquierdo es  $N + 1$  y la del lado derecho es  $4p(1-\sigma)(N - p + 1)$ .

Tenemos entonces que cuando  $\sigma < 1$  las gráficas de ambos lados de la ecuación (IV.13) empiezan a crecer desde cero. El lado izquierdo vuelve a tomar el valor cero en  $\psi = \frac{\pi}{N + 1}$ , esto es, en  $\phi = \frac{N}{N + 1} \pi$ . Para que ambos lados de (IV.13) sean iguales en algún valor de  $\psi$  entre 0 y  $\frac{\pi}{N + 1}$ , la rapidez con que crece el lado izquierdo debe ser mayor que la rapidez con que lo hace el lado derecho; es decir, la segunda derivada del lado izquierdo debe ser mayor que la del lado derecho. Esta condición, con los valores calculados en  $\psi = 0$  de las segundas derivadas, se puede escribir como

$$\sigma > 1 - \frac{N + 1}{4p(N - p + 1)} \quad (IV.14)$$

para estos valores de  $\sigma$  existe una solución en el intervalo  $\frac{N}{N + 1} < \phi < \pi$ .

Si evaluamos ambos lados de la ecuación (IV.3) con los valores extremos del intervalo anterior, vemos que el valor del extremo izquierdo no representa una solución; en cambio, tomando el límite  $\phi \rightarrow \pi$  en ambos miembros de (IV.3) vemos que ambos miembros son iguales si se cumple que

$$\sigma = 1 - \frac{N + 1}{4p(N - p + 1)} \quad (IV.15)$$

es decir, la solución  $\phi = \pi$  existe si se cumple la condición (IV.15).

Los resultados (IV.14) y (IV.15) los podemos escribir en la forma única

$$\sigma \geq 1 - \frac{N + 1}{4p(N - p + 1)} \quad (IV.16)$$

que representa la condición sobre  $\sigma$  para la existencia de una solución en el intervalo  $\frac{N}{N+1} \pi < \phi \leq \pi$ , (fig.3).

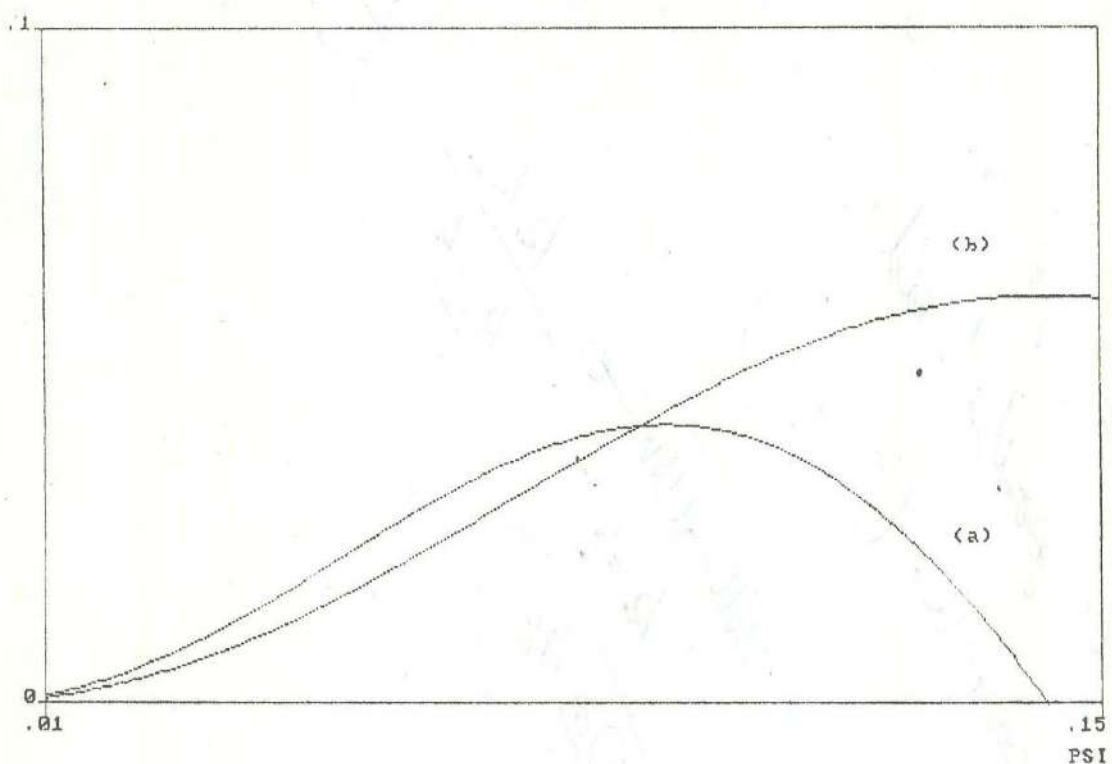


Fig.3.-Solución de la ecuación (IV.13).  
 (a) Miembro izquierdo.  
 (b) Miembro derecho.

Cuando la masa del defecto es tal que no se cumple la condición (IV.16) entonces hace falta todavía una solución. Usemos la ecuación (IV.3) para probar si  $\phi = 0$  es una solución; para ello, tomemos el limite  $\phi \rightarrow 0$  en ambos lados de la ecuación con lo que obtenemos

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\text{Sen}(N+1)\phi}{\text{Sen}\phi} = N+1 \tag{IV.17}$$

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} 2(1-\sigma)(1-\text{Cos}\phi) \frac{\text{Sen}(N-p+1)\phi}{\text{Sen}\phi} \frac{\text{Sen}p\phi}{\text{Sen}\phi} = 0$$

Como los límites son diferentes entonces  $\phi = 0$  no es solución de la ecuación (IV.3).

Tratemos de encontrar la solución faltante de la manera siguiente: consideremos un defecto en la cadena de masa suficientemente pequeña, con esto esperamos obtener un modo de frecuencia arbitrariamente alta. De la ecuación (II.63) se observa que el mayor valor posible de  $\omega$  es  $2\omega_0$  con  $0 \leq \phi \leq \pi$  y  $|\xi| \leq 1$ . Busquemos la solución faltante en la región  $\xi < -1$ , para ello proponemos

$$\phi = \nu + i\eta \quad (IV.18)$$

con  $\nu, \eta$  reales; se tiene entonces

$$\text{Cos}\phi = \text{Cos}\nu \text{Cosh}\eta - i\text{Sen}\nu \text{Senh}\eta \quad (IV.19)$$

como  $\text{Cosh}\eta \geq 1$  y se requiere que  $\text{Cos}\phi$  sea real y menor que 1, entonces  $\nu$  debe ser un múltiplo impar de  $\pi$ . Como esperamos una solución en la región cercana a  $\pi$ , tomamos  $\nu = \pi$ , entonces

$$\phi = \pi + i\eta \quad (IV.20)$$

con lo que obtenemos

$$\xi = \text{Cos}\phi = -\text{Cosh}\eta \quad (IV.21)$$

Con este resultado la frecuencia de este modo normal es

$$\omega = 2\omega_0 \text{Cosh}\frac{1}{2}\eta \quad (IV.22)$$

esto es, la presencia de un defecto de masa suficientemente pequeña produce una frecuencia normal por arriba de la frecuencia de corte de la cadena homogénea.

Sustituyendo en la ecuación (IV.3) obtenemos

$$\text{Senh}\frac{1}{2}\eta \text{Senh}(N+1)\eta = 2(1-\sigma) \text{Cosh}\frac{1}{2}\eta \text{Senh}(N-p+1)\eta \text{Senhp}\eta \quad (IV.23)$$

Esta ecuación tiene una solución con la que podemos determinar la frecuencia del modo normal número  $N$ , dada por (IV.22). Para probar esto, analicemos por separado el comportamiento de los dos lados de la ecuación (IV.23). Empecemos por estudiar su comportamiento asintótico para valores  $\eta \gg 1$ ; así, en el límite  $\eta \rightarrow \infty$  el lado izquierdo se comporta como  $\frac{1}{4} e^{(N+9/2)\eta}$ , mientras que el lado derecho, en el límite  $\eta \rightarrow \infty$ , lo hace como  $\frac{1}{4} (1 - \sigma) e^{(N+9/2)\eta}$ .

Esto es, el lado izquierdo de la ecuación (IV.23) crece más rápidamente que el derecho.

Para investigar el comportamiento para valores pequeños de  $\eta$ , desarrollamos ambos lados de (IV.23) en series de potencias alrededor del cero. Así, el lado izquierdo en  $\eta = 0$  es  $\frac{1}{2}(N + 1)\eta^2$ , mientras que el derecho lo podemos expresar como  $2p(1 - \sigma)(N - p + 1)\eta^2$ .

Entonces para que exista solución de la ecuación (IV.23) el lado derecho debe crecer más rápidamente que el izquierdo para valores pequeños de  $\eta$ ; esta condición la podemos escribir como sigue:

$$2p(1 - \sigma)(N - p + 1)\eta^2 > \frac{1}{2}(N + 1)\eta^2 \quad \text{(IV.24)}$$

de donde se sigue que  $\sigma$  satisface la condición

$$\sigma < 1 - \frac{N + 1}{4p(N - p + 1)} \quad \text{(IV.25)}$$

Esto es, en este caso existen  $N - 1$  soluciones de la ecuación (IV.3) que son los valores reales distintos de  $\phi$  en  $0 < \phi < \pi$  y una solución real de la ecuación (IV.23) para un valor imaginario de  $\phi$ , (fig.4).

Regresando a las soluciones que son independientes de la masa del defecto y que se obtienen a partir de la ecuación (IV.10), hemos mencionado que forman un subconjunto de las soluciones de la cadena homogénea y la razón de este comportamiento la damos a continuación. En la ecuación (II.24)

$$c_{rj} = Q_{j-1} c_{r1} - Q_{j-2} c_{r0} \quad (j = 1, 2, \dots, p)$$

tomemos  $j = p$  y  $c_{r0} = 0$ , ya que la cadena está fija por los extremos, por lo que el coeficiente de amplitud correspondiente al defecto es.

$$c_{rp} = Q_{p-1} c_{r1} \quad (IV.26)$$

usando en esta ecuación la expresión para  $Q_{p-1}$  dada por la ecuación (II.62) obtenemos

$$c_{rp} = \frac{\text{Sen} p\phi}{\text{Sen} \phi} c_{r1} \quad (IV.27)$$

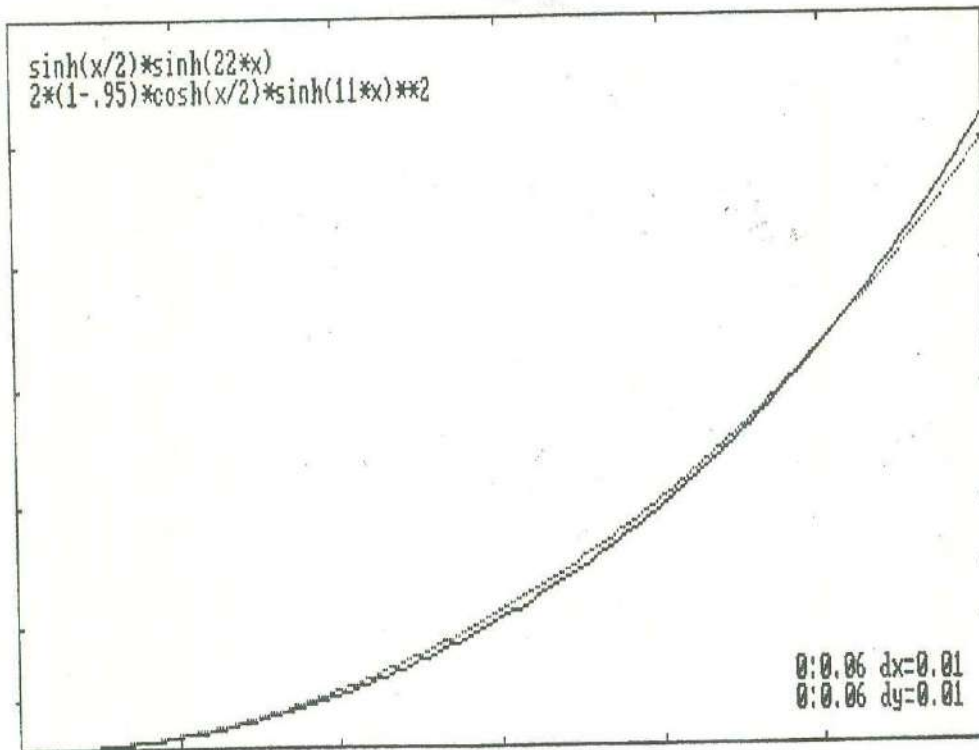


Fig. 4. Solución de la ecuación (IV.23).

Sustituyendo en (IV.27) las soluciones independientes de  $\sigma$  dadas por la ecuación (IV.10) y recordando que  $d$  es divisor de  $p$ , es decir,  $p = kd$  obtenemos

$$c_{rp} = \frac{\text{Sen}(kh\pi)}{\text{Sen}(h\pi/d)} c_{r1} = 0 \quad \text{(IV.28)}$$

ya que  $k, h$  son enteros.

Esto es, las soluciones (IV.10) que son independientes de  $\sigma$ , producen un nodo en el lugar del defecto. Existen  $d - 1$  modos normales en los cuales el defecto no se desplaza de su posición de equilibrio. Este resultado implica que la cadena lineal no homogénea quede dividida en dos cadenas unidas por el defecto y las frecuencias de estos modos de oscilación corresponden a las de la cadena homogénea estudiada en el capítulo III.

Estudiemos ahora el caso en que  $\sigma < 1$  es lo suficientemente pequeña y el  $N$  modo normal es el de mayor frecuencia (recordemos que en este caso  $\phi$  es compleja y  $\omega > 2\omega_0$ ).

De acuerdo con la ecuación (II.24) para el modo número  $N$  tenemos

$$c_{Nj} = Q_{j-1} c_{N1} - Q_{j-2} c_{N0}$$

pero como la cadena está fija por los extremos entonces  $c_{N0} = 0$ , y

$$c_{Nj} = Q_{j-1} c_{N1} \quad \text{(IV.29)}$$

que con ayuda de (II.62) se convierte en

$$c_{Nj} = \frac{\text{Sen}j\phi}{\text{Sen}\phi} c_{N1} \quad \text{(IV.30)}$$

Usando la expresión para  $\phi$  dada por la ecuación (IV.20), queda

$$c_{Nj} = \frac{(-1)^{j-1} \text{Sen}hj\eta}{\text{Sen}h\eta} c_{N1} \quad (j = 1, 2, \dots, p) \quad \text{(IV.31)}$$

en donde vemos que la amplitud de cada masa aumenta conforme la

en donde vemos que la amplitud de cada masa aumenta conforme la masa está más cerca del defecto, siendo éste el que posee la mayor amplitud. Vemos también que en este modo las masas contiguas oscilan en sentidos opuestos; por lo que, este modo es el de mayor energía de acuerdo con lo expuesto al final del capítulo III.

Para observar el comportamiento de las amplitudes de las masas que se encuentran a la derecha del defecto, en este modo particular, usamos la ecuación (II.32) con  $r = N$  y  $c_{N0} = 0$

$$c_{Np+h} = [Q_{p+h-1} + 2(1 - \sigma)(1 - \xi)Q_{p-1}Q_{h-1}]c_{N1} \quad (h = 1, 2, \dots, N-p)$$

Tomemos  $p + h = N + 1 - j$  y  $p + h = N$ , para obtener respectivamente

$$c_{NN+1-j} = [Q_{N-j} + 2(1 - \sigma)(1 - \xi)Q_{p-1}Q_{N-p-j}]c_{N1} \quad (IV.32a)$$

$$c_{NN} = [Q_{N-1} + 2(1 - \sigma)(1 - \xi)Q_{p-1}Q_{N-p-1}]c_{N1} \quad (IV.32b)$$

Usando las ecuaciones (IV.32) y la ecuación (IV.2) y la expresión  $\phi = \pi + i\eta$  encontramos la siguiente relación entre los coeficientes  $c_{NN+1-j}$  y  $c_{NN}$

$$c_{NN+1-j} = \frac{(-1)^{j-1} \text{Senh}j\eta}{\text{Senh}\eta} c_{NN} \quad (j = 1, 2, \dots, N-p) \quad (IV.33)$$

para  $\eta$  grandes (es decir, para  $\sigma$  pequeñas) la amplitud disminuye rápidamente con la distancia al defecto (para  $\eta$  suficientemente grande decae exponencialmente); e igual que a la izquierda del defecto, las partículas adyacentes presentan fase opuesta en todo instante durante la oscilación. Este modo normal se conoce como modo localizado, se establece cuando la frecuencia es mayor que la mayor frecuencia accesible a la cadena uniforme.

En las figuras 5 y 6 que aparecen a continuación se muestra el comportamiento de las frecuencias de oscilación de los modos normales como función de la masa del defecto para el caso particular  $N = 21$ ,  $p = 11$  (el defecto está en el centro de la cadena) y  $\omega_0 = \frac{1}{2}$ .



Frecuencias Normales  
 como función de la masa  
 del defecto.  
 (Extremos fijos.)

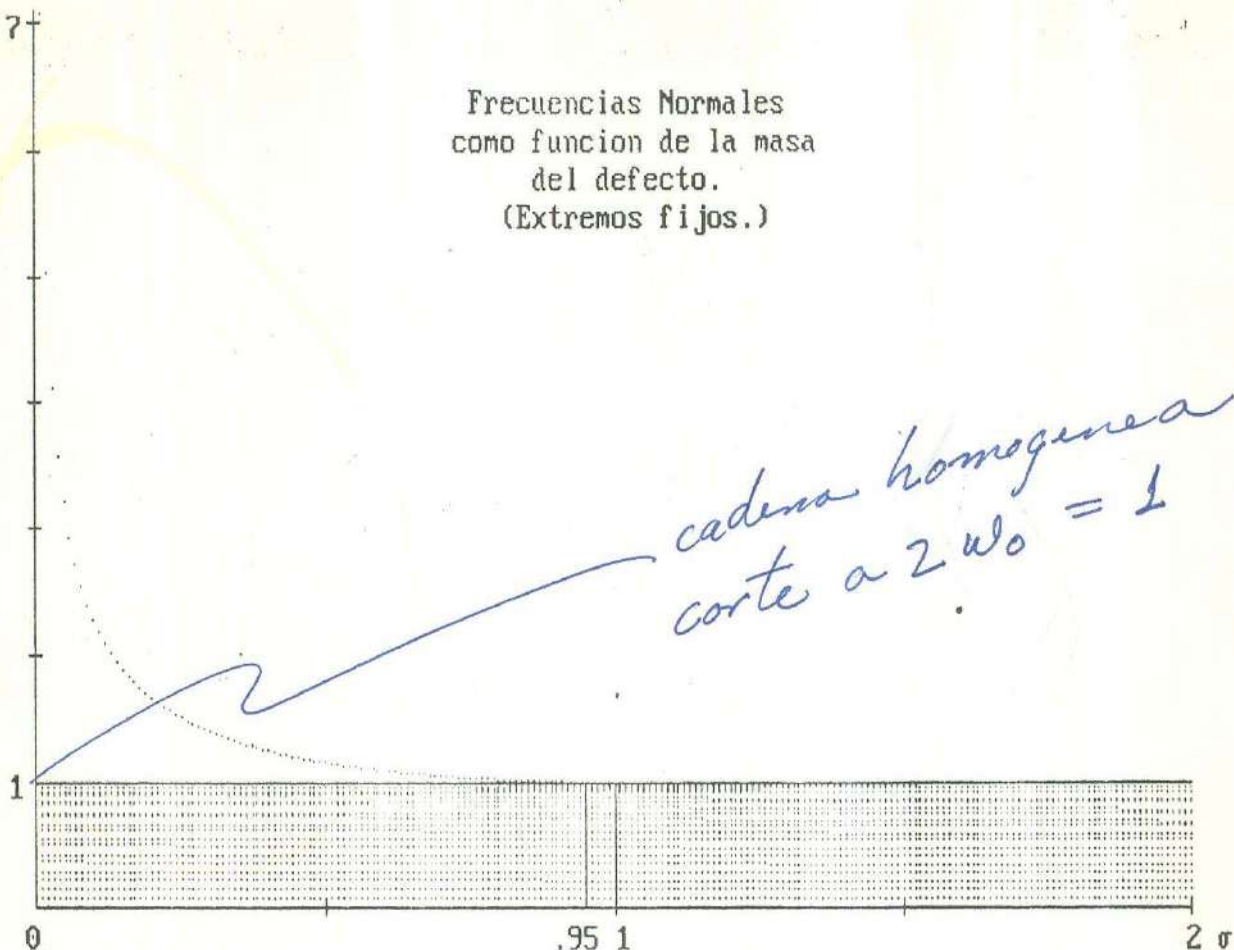


Fig.5.-Soluciones de las ecuaciones (II.63) y (IV.22) para  $N = 21$ ,  $p = 11$ ,  $\omega_0 = \frac{1}{2}$  y los valores de  $\sigma$  en el intervalo  $[.01, 21]$ , con  $\Delta\sigma = .01$ .

Vemos en la figura 5 los resultados proporcionados por el método de solución. Las frecuencias de oscilación de los modos normales se encuentran entre los valores  $0 < \omega < 1$  ( $\omega = 1$  corresponde al valor de la frecuencia de corte), excepto en los casos donde  $\sigma \leq .95$  en los cuales para cada valor de  $\sigma$  existe una frecuencia por arriba de la frecuencia de corte. Para este caso particular la cota calculada para  $\sigma$  de la ecuación (IV.25) es  $\sigma_{\max} = .95455$ ; el valor  $\sigma = 1$  corresponde al caso de la cadena homogénea.

Por último, cabe señalar que en el intervalo  $.01 \leq \sigma \leq .95$  las soluciones obtenidas numéricamente para el modo de mayor frecuencia decaen rápidamente conforme aumenta la masa del defecto.

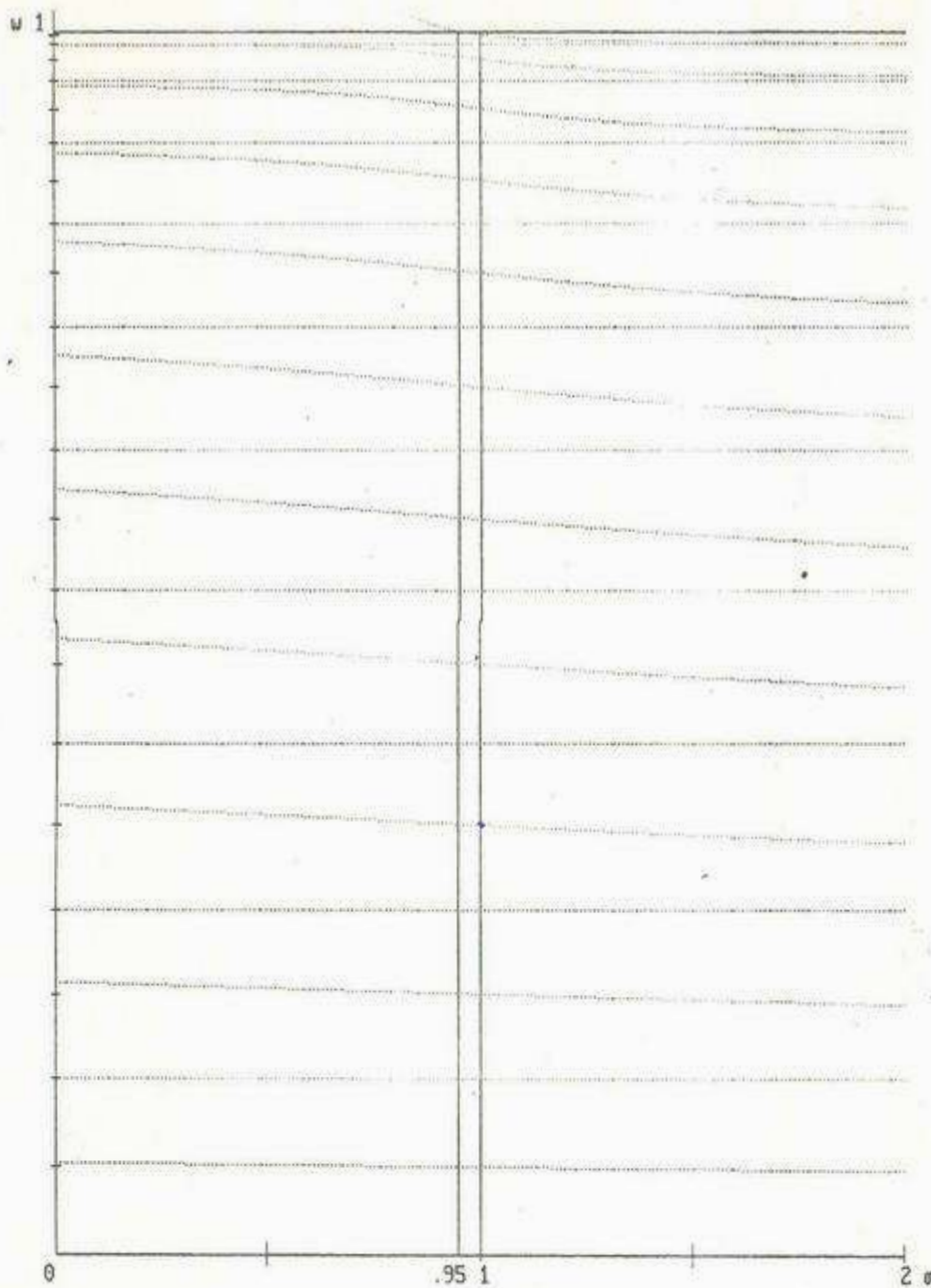


Fig.6.-Frecuencias normales como función de la masa del defecto. Se muestra la región  $0 \leq \omega \leq 1$ , presentada en la figura 5, y se señalan en el eje las frecuencias correspondientes a la cadena homogénea.

Observamos en la figura 6, para este caso particular, que las frecuencias normales de los modos pares coinciden con las frecuencias de la cadena homogénea señaladas sobre el eje vertical

con líneas cortas. Esto es, para tales modos de oscilación las frecuencias son independientes de la masa del defecto.

Vemos, por el contrario, que las frecuencias de los modos impares sí dependen de la masa del defecto; siendo la frecuencia de cada modo mayor que la frecuencia del modo correspondiente en la cadena homogénea cuando  $\alpha < 1$ ; y menor cuando  $\alpha > 1$ . Las curvas de puntos obtenidas para estos modos son simétricas respecto a los valores calculados para el caso de la cadena homogénea.

#### IV.2.- CADENA NO HOMOGÉNEA CON UN EXTREMO FIJO Y UNO LIBRE.

En este caso, fijemos la cadena por su extremo izquierdo y dejemos libre el extremo derecho; para ello, tomemos  $\alpha = 0$  y  $\beta = 1$  en la ecuación (IV.1) con lo que obtenemos.

$$Q_N - Q_{N-1} + 2(1 - \alpha)(1 - \xi)(Q_{N-p} - Q_{N-p-1})Q_{p-1} = 0 \quad \text{(IV.34)}$$

~~IV - 21~~  
 (III - 23)

Usando la expresión (II.62) para los polinomios  $Q_j$  y sustituyendo la variable  $\xi = \cos\phi$ , esta ecuación la escribimos como

$$\frac{\cos(N + 1/2)\phi}{\cos\frac{1}{2}\phi} = 2(\alpha - 1)(1 - \cos\phi) \frac{\cos(N - p + 1/2)\phi \operatorname{Sen}p\phi}{\cos\frac{1}{2}\phi \operatorname{Sen}\phi} \quad \text{(IV.35)}$$

Por su parte, el numerador del lado izquierdo puede desarrollarse en la forma

$$\begin{aligned} \cos(N + 1/2)\phi &= \cos[(N - p + 1/2)\phi + p\phi] \\ &= \cos(N - p + 1/2)\phi \operatorname{Cosp}\phi - \operatorname{Sen}(N - p + 1/2)\phi \operatorname{Sen}p\phi \end{aligned} \quad \text{(IV.36)}$$

y si ahora multiplicamos la ecuación (IV.35) por  $\cos\frac{1}{2}\phi$  y la dividimos por

$$\cos(N - p + 1/2)\phi \operatorname{Sen}p\phi \neq 0 \quad \text{(IV.37)}$$

obtenemos, usando la identidad (IV.5), la siguiente ecuación

$$\text{Cot} p\phi - \tan(N - p + 1/2)\phi = 2(\sigma - 1) \tan \frac{1}{2}\phi \quad (\text{IV.38})$$

como en el caso anterior, esta es una ecuación trascendente para  $\phi$  y se muestra gráficamente en la fig. 7.

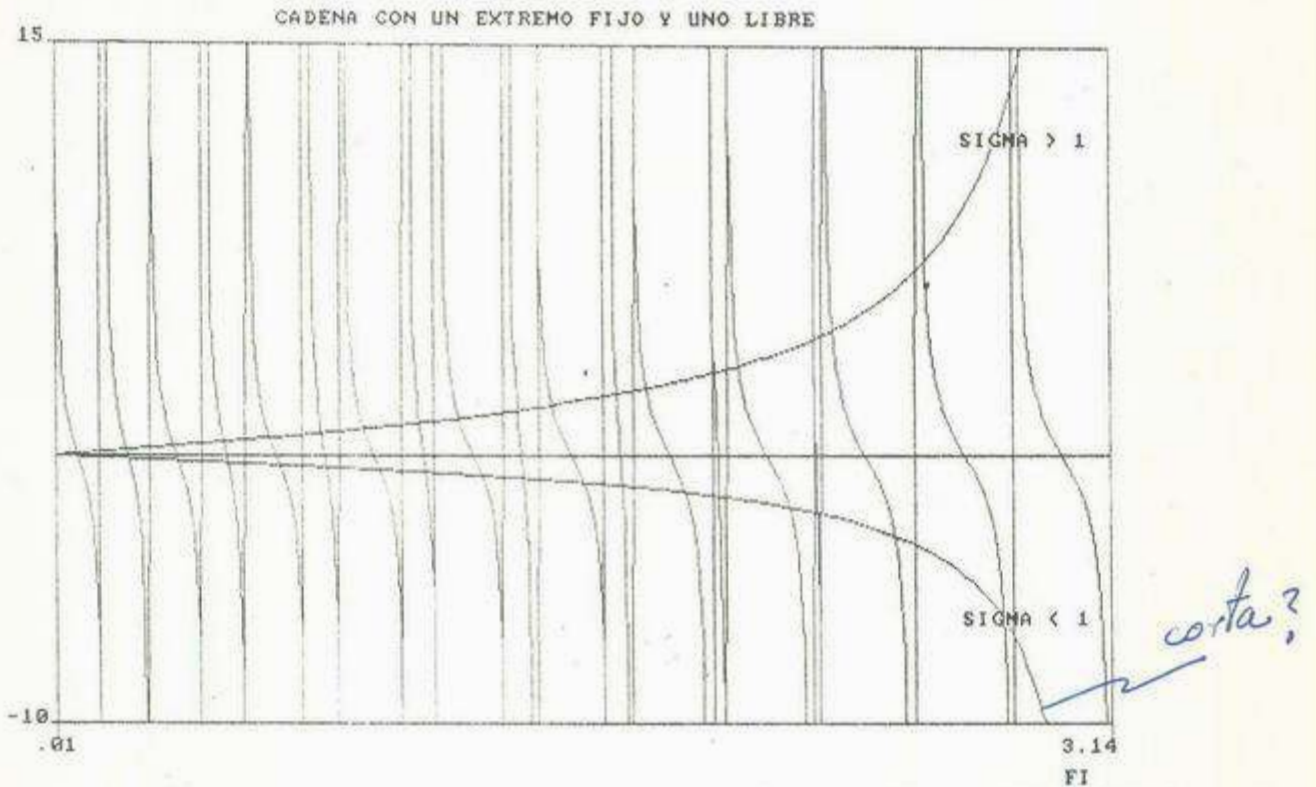


Fig. 7.-Soluciones de la ecuación (IV.38) para  $N = 21$  y  $p = 11$

El miembro izquierdo de (IV.38) tiene una asíntota vertical en los valores de  $\phi$  que son raíz de la ecuación (IV.37); entre cada par de asíntotas verticales incluyendo  $\phi = 0$  y  $\phi = \pi$  hay una gráfica que corta la curva del lado derecho, siempre que  $\sigma > 1$ . Cuando  $\sigma < 1$  puede o no haber cruce de las gráficas de ambos miembros de (IV.38) en el subintervalo limitado por la asíntota  $\phi = \pi$  y la anterior a ésta. Las asíntotas que se obtienen de la ecuación (IV.37) son

$$\phi = \begin{cases} \frac{r}{p} \pi & r = 1, 2, \dots, p-1 \\ \frac{(2s-1)}{(2N-2p+1)} \pi & s = 1, 2, \dots, N-p \end{cases} \quad (\text{IV.39})$$

Seguendo el razonamiento de la sección anterior, vemos que si no hay valores comunes de  $\phi$  en (IV.39) el intervalo se parte en  $N$  subintervalos. En este caso, para  $\sigma > 1$  se tienen exactamente  $N$  soluciones en  $0 < \phi < \pi$ , una en cada subintervalo; en cambio, para  $\sigma < 1$ , quizás no exista solución en el último subintervalo. Esta situación se analizará más adelante.

En el caso en que existan valores comunes de las asíntotas se cumple la siguiente relación

$$\frac{r}{p} \pi = \frac{(2s-1)}{(2N-2p+1)} \pi$$

Sea  $d$  el máximo común divisor de  $p$  y  $2N - 2p + 1$ . Entonces,  $p = kd$  y  $2N - 2p + 1 = \ell d$  donde  $k, \ell$  son primos relativos y  $\ell, d$  son impares. Las asíntotas están en

$$\begin{aligned} (\text{cotangente}) \quad \phi &= \frac{r \pi}{k d} \\ (\text{tangente}) \quad \phi &= \frac{(2s-1) \pi}{\ell d} \end{aligned}$$

las asíntotas comunes son tales que  $r\ell = (2s-1)k$ , luego  $k|r$  y  $\ell|(2s-1)$ , entonces  $\frac{r}{k} = \text{entero}$ ,  $\frac{2s-1}{\ell} = \text{entero}$ ; las asíntotas están en

$$\begin{aligned} (\text{cotangente}) \quad \phi &= (\text{entero}) \frac{\pi}{d} \\ (\text{tangente}) \quad \phi &= (\text{entero}) \frac{\pi}{d} \end{aligned}$$

como  $p = kd$ , entonces  $r = 1, 2, \dots, dk - 1$ , por tanto hay  $d - 1$  asíntotas de cotangente que pueden ser comunes. Como

$2N-2p+1 = \ell d$ , entonces  $2s-1 = 1,3,\dots,2N-2p-1 = 1,3,\dots,d\ell-2$  y por lo tanto hay  $\frac{1}{2}(d-1)$  asíntotas que son comunes, y entonces  $2s-1 = (2h-1)\ell$  y los valores comunes son  $\phi = (2h-1)\frac{\pi}{d}$  [ $h = 1,2,3,\dots,\frac{1}{2}(d-1)$ ], resultado que puede resumirse como sigue:<sup>8</sup>

**Teorema 2.-** Si el máximo común divisor de  $p$  y  $2N-2p+1$  es  $d > 1$ , entonces existen  $\frac{1}{2}(d-1)$  asíntotas que son comunes en (IV.39); y quedan determinadas por

$$\phi = \frac{(2h-1)}{d} \pi \quad [h = 1,2,\dots,\frac{1}{2}(d-1)] \quad \text{(IV.40)}$$

De acuerdo con este teorema, el número de subintervalos en que se ha partido el intervalo  $0 < \phi < \pi$  es de  $N - \frac{1}{2}(d-1)$  y por tanto de la ecuación (IV.38) solo obtenemos  $N - \frac{1}{2}(d-1)$  soluciones, o quizás una menos si  $\sigma < 1$ . Las  $\frac{1}{2}(d-1)$  soluciones faltantes están dadas por la ecuación (IV.40) como puede verificarse por sustitución directa en la ecuación (IV.35). Estas soluciones son independientes del valor de  $\sigma$  y forman un subconjunto de soluciones de la cadena uniforme con un extremo fijo.

En el caso en que  $\sigma < 1$ , con  $\sigma$  cercana a 1, mencionamos que puede haber o no solución en el último subintervalo. Veamos la condición sobre  $\sigma$  para que exista solución en este subintervalo para el modo de frecuencia más alta. Para ello, reescribamos la ecuación (IV.35) con ayuda de la identidad (IV.5) en la forma

$$\cos\frac{1}{2}\phi \cos(N+1/2)\phi = 2(\sigma-1) \sin\frac{1}{2}\phi \cos(N-p+1/2) \sin p\phi \quad \text{(IV.41)}$$

Como la región de interés es la vecindad a  $\pi$ , cambiamos a la variable  $\psi = \pi - \phi$  con lo cual transformamos la ecuación (IV.41) en

$$\sin\frac{1}{2}\psi \sin(N+1/2)\psi = 2(1-\sigma) \cos\frac{1}{2}\psi \sin(N-p+1/2)\psi \sin p\psi \quad \text{(IV.42)}$$

Para observar el comportamiento de ambos lados de la ecuación (IV.42) en  $\psi = 0$ , calculamos sus derivadas. La primera derivada son cero en  $\psi = 0$  para ambos lados. La segunda derivada del lado

izquierdo en  $\psi = 0$  es  $N + \frac{1}{2}$  y la del derecho es  $4p(1-\sigma)(N-p+\frac{1}{2})$ , ambas positivas ya que  $\sigma < 1$ . Ambos lados crecen desde cero, en  $\psi = 0$ , pero el izquierdo regresa a cero más rápidamente, en  $\psi = \frac{\pi}{N + \frac{1}{2}}$ .

Vemos que si la rapidez de crecimiento del lado izquierdo de la ecuación (IV.42) es mayor que la del derecho entonces debe existir una solución entre  $0 < \psi < \frac{\pi}{N + \frac{1}{2}}$ . Para que lo anterior se cumpla la segunda derivada del lado izquierdo, en  $\psi = 0$ , debe ser mayor que la del derecho; es decir, se debe cumplir

$$N + \frac{1}{2} > 4p(1 - \sigma)(N - p + 1/2) \quad (IV.43)$$

de donde se sigue que para que exista solución en la región  $\frac{(N - 1/2)}{(N + 1/2)} \pi < \phi < \pi$ ,  $\sigma$  debe satisfacer la siguiente condición

$$\sigma > 1 - \frac{(2N + 1)}{4p(2N - 2p + 1)} \quad (IV.44)$$

Investiguemos si los extremos del intervalo anterior representan una solución de (IV.35). Como puede verificarse por sustitución directa, el extremo izquierdo no es solución de (IV.35).

Para investigar si existe solución en  $\phi = \pi$ , tomamos el límite  $\phi \rightarrow \pi$  en (IV.35). Así, en el lado izquierdo se tiene  $(2N + 1)\text{Cos}N\pi$ , y en el derecho  $4p(1 - \sigma)(2N - 2p + 1)\text{Cos}N\pi$ . De estos resultados se sigue que ambos límites son iguales si

$$\sigma = 1 - \frac{(2N + 1)}{4p(2N - 2p + 1)} \quad (IV.45)$$

De esto se sigue que existe una solución en  $\frac{(N - 1/2)}{(N + 1/2)} \pi < \phi \leq \pi$  si  $\sigma$  satisface, (fig. 8),

$$\sigma \geq 1 - \frac{(2N + 1)}{4p(2N - 2p + 1)}$$

(IV.46)

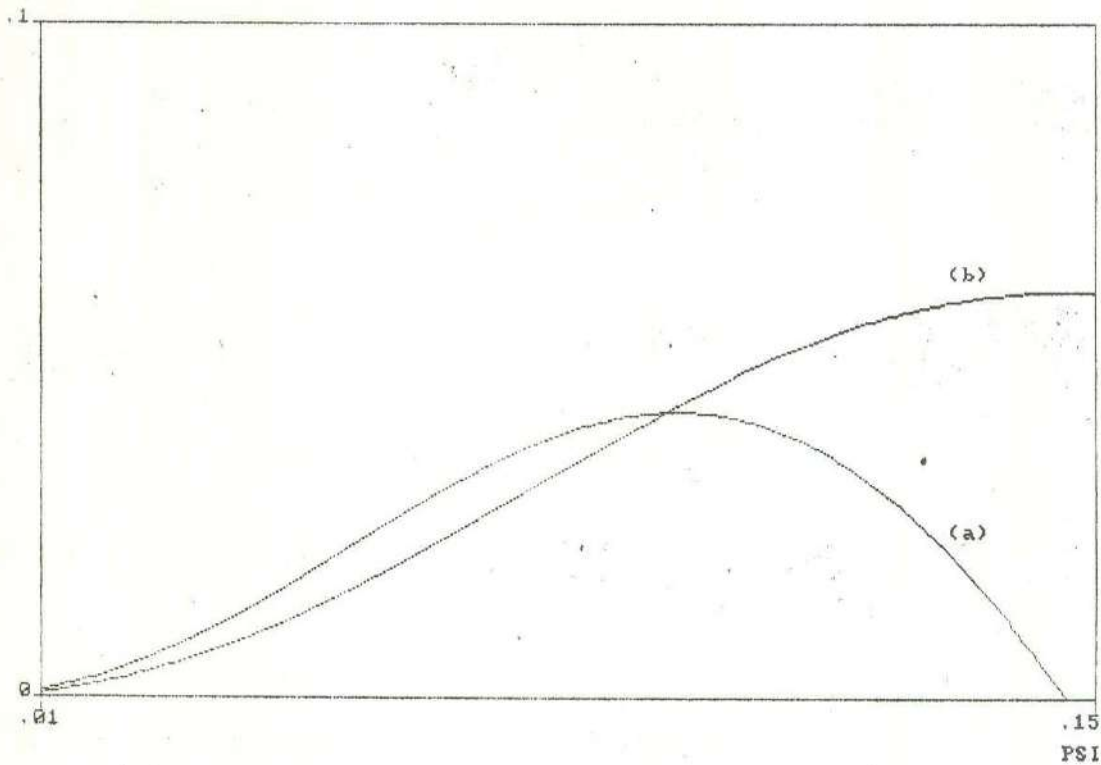


Fig. 8. Solución de la ecuación (IV.42).  
 (a) Miembro izquierdo.  
 (b) Miembro derecho.

En el caso en que  $\sigma < 1$  no cumple con la condición (IV.46), hace falta aún una solución. Primero veamos si  $\phi = 0$  es la solución faltante; para ello, tomemos el  $\lim \phi \rightarrow 0$  en ambos lados de la ecuación (IV.35). Así tenemos para el lado izquierdo y el derecho los siguientes valores, respectivamente: 1, 0 y como ambos límites son diferentes se concluye que  $\phi = 0$  no es solución de (IV.35).

Para obtener la solución faltante seguimos el argumento dado en la sección anterior escogiendo  $\sigma$  lo suficientemente pequeña como para obtener una frecuencia arbitrariamente alta (mayor que  $2\omega_0$ ). Para hacerlo proponemos la solución

$$\phi = \pi + i\eta \quad (\text{con } \eta \text{ real}) \quad (IV.47)$$

en este caso,



$$\xi = \cos\phi = -\cosh\eta \quad (\text{IV.48})$$

y la frecuencia de este modo es

$$\omega = 2\omega_0 \cosh \frac{1}{2}\eta \quad (\text{IV.49})$$

Sustituyendo las expresiones para  $\phi$  y  $\xi$  en la ecuación (IV.35) obtenemos

$$\text{Senh}\frac{1}{2}\eta \text{ Senh}(N+1/2)\eta = 2(1-\sigma) \cosh\frac{1}{2}\eta \text{ Senh}(N-p+1/2)\eta \text{ Senhp}\eta \quad (\text{IV.50})$$

Analicemos el comportamiento asintótico de ambos lados de esta ecuación cuando  $\eta \gg 1$ . El lado izquierdo puede aproximarse por  $\frac{1}{4} e^{(N+1/2)\eta}$ , mientras que el derecho se aproxima con  $\frac{1}{4}(1-\sigma) e^{(N+1/2)\eta}$ , luego el lado izquierdo crece más rápidamente que el derecho.

ahora investiguemos como se comportan para valores pequeños de  $\eta$ . Para hacerlo, efectuamos un desarrollo en serie de potencias de  $\eta$  alrededor de  $\eta = 0$ , con lo que obtenemos para el lado izquierdo la siguiente expresión  $\frac{1}{2}(N+1/2)\eta^2$  y para el derecho obtenemos  $2(1-\sigma)p(N-p+1/2)\eta^2$ .

Entonces, para que exista una solución del tipo propuesto debe cumplirse que el lado derecho crezca más rápidamente que el izquierdo para valores pequeños de  $\eta$ ; de esta manera se asegura una solución. La condición sobre  $\sigma$  es

$$\sigma < 1 - \frac{(2n+1)}{4p(2N-2p+1)} \quad (\text{IV.51})$$

Siempre que  $\sigma$  satisfaga la condición (IV.51) existirá una frecuencia que está por encima de la frecuencia de corte de la cadena homogénea correspondiente, (fig. 9).

Ahora, investiguemos el comportamiento de la amplitud asociada al defecto usando las soluciones independientes de  $\sigma$  dadas por  $\phi = (2h-1)\frac{\pi}{d}$ ;  $h = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(d-1)$ . (Recordemos que  $d > 1$  es el máximo común divisor de  $p$  y  $2N-2p+1$ .)

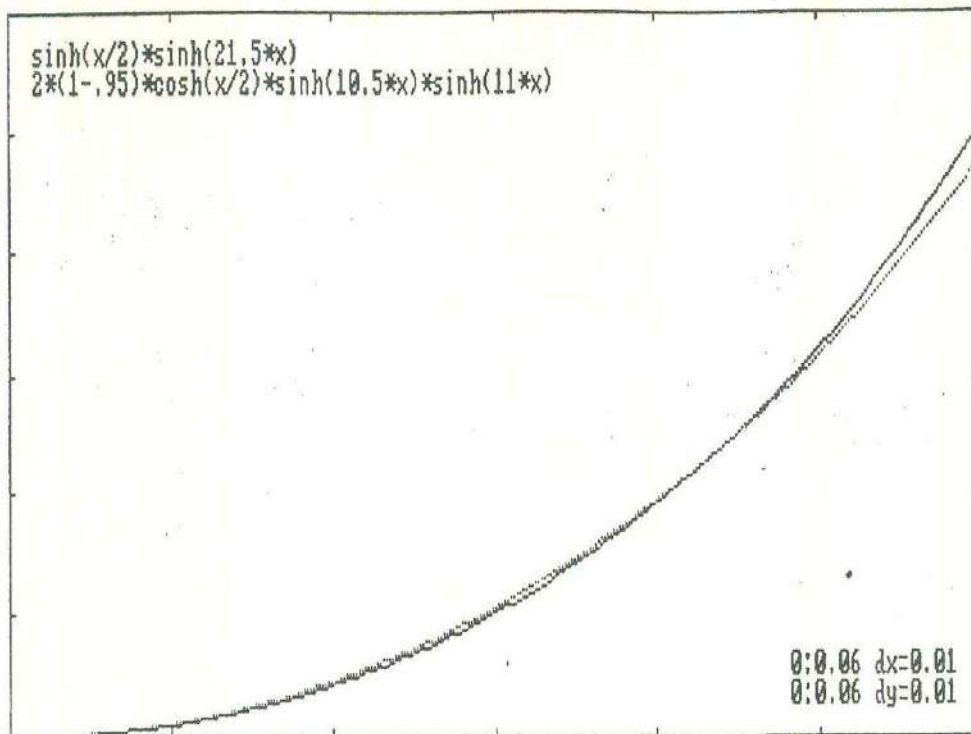


Fig. 9.- Solución de la ecuación (IV.50)

La ecuación (II.24) establece que

$$c_{rj} = Q_{j-1} c_{r1} - Q_{j-2} c_{r0}$$

que de acuerdo con las condiciones en la frontera hacemos  $c_{r0} = 0$ , quedando

$$c_{rj} = Q_{j-1} c_{r1} \quad (IV.52)$$

En la posición del defecto tenemos

$$c_{rp} = Q_{p-1} c_{r1} \quad (IV.53)$$

que con ayuda de (II.62) y (IV.40) se convierte en

$$c_{rp} = \frac{\text{Sen} \left[ \frac{p(2h-1)}{d} \pi \right]}{\text{Sen} \left[ \frac{(2h-1)}{d} \pi \right]} c_{r1} \quad (IV.54)$$

Como  $d$  es divisor de  $p$  en el numerador el argumento del seno es múltiplo de  $\pi$  y las soluciones de este tipo producen un nodo en el lugar del defecto. Debido a que el defecto no se mueve, la cadena se parte en dos cadenas homogéneas una con ambos extremos fijos y otra con un extremo fijo y uno libre y oscila de tal manera que las frecuencias normales calculadas con (IV.40) coinciden con las frecuencias de modo normal de la cadena homogénea con un extremo fijo y uno libre, estudiada en el capítulo anterior.

Cuando la masa del defecto es tal que

$$\sigma < 1 - \frac{(2N + 1)}{4p(2N - 2p + 1)} \quad (IV.55)$$

que es el caso de frecuencia más alta (por arriba de la frecuencia de corte), escribimos la ecuación (IV.52) en la forma

$$c_{Nj} = \frac{\text{Sen}j\phi}{\text{Sen}\phi} c_{N1} \quad (IV.56)$$

donde hemos usado de nuevo la expresión para los  $Q_j$  dada por (II.62).

Usando la expresión  $\phi = \pi + i\eta$  obtenemos

$$c_{Nj} = \frac{(-1)^{j-1} \text{Sen}hj\eta}{\text{Sen}h\eta} c_{N1} \quad (j = 1, 2, \dots, p) \quad (IV.57)$$

Este resultado expresa el hecho de que las amplitudes de las masas del lado izquierdo más cercanas al defecto son mayores y que además dichas masas oscilan en sentidos opuestos.

Para estudiar el comportamiento de las amplitudes de las masas que se encuentran a la derecha del defecto, usamos la ecuación (II.32) con  $r = N$  y  $c_{N0} = 0$ .

$$c_{Np+h} = [Q_{p+h-1} + 2(1 - \sigma)(1 - \xi)Q_{p-1}Q_{h-1}]c_{N1} \quad (h = 1, 2, \dots, N-p) \quad (IV.58)$$

Tomemos los casos  $p + h = N + 1 - j$  y  $p + h = N$  para obtener

respectivamente

$$c_{NN+1-j} = [Q_{N-j} + 2(1-\sigma)(1-\xi)Q_{p-1}Q_{N-p-j}]c_{N1} \quad (IV.59a)$$

(j=1,2,...,N-p)

$$c_{NN} = [Q_{N-1} + 2(1-\sigma)(1-\xi)Q_{p-1}Q_{N-p-1}]c_{N1} \quad (IV.59b)$$

De aquí, usando la ecuación (IV.34) y las expresiones para los polinomios  $Q_j$  dadas por (II.62) obtenemos

$$c_{NN+1-j} = \frac{(-1)^{j-1} \text{Senh}(j - 1/2)\eta}{\text{Senh}\frac{1}{2}\eta} c_{NN} \quad (j = 1, \dots, N-p) \quad (IV.60)$$

Observando las ecuaciones (IV.57) y (IV.60) vemos que cuando la masa del defecto es lo suficientemente pequeña tal que la frecuencia del modo normal número N sobrepasa la frecuencia de corte  $2\omega_0$ , tenemos de nuevo la presencia de un modo localizado donde el defecto oscila con la mayor amplitud, y donde las amplitudes de oscilación de las masas de la cadena disminuyen conforme se alejan del defecto.

En las figuras 10 y 11 se muestra el comportamiento de las frecuencias de oscilación como función de la masa del defecto para el caso  $N = 21$ ,  $p = 11$  y  $\omega_0 = \frac{1}{2}$ .

En este caso, la cota para los valores de  $\sigma$  que rompen la homogeneidad de las frecuencias de la cadena observadas en la fig. 10 es  $\sigma = .95346$ . El comportamiento de las frecuencias normales que sobrepasan el valor de la frecuencia de corte es similar al observado en la fig. 5, que corresponde al caso en que la cadena está sujeta por ambos extremos.

En la fig. 11 observamos que no hay frecuencias normales que coincidan con las frecuencias normales de la cadena homogénea bajo las mismas condiciones en la frontera; y vemos, al igual que en el caso presentado en la sección anterior, la simetría que exhiben las curvas de puntos respecto a los valores de las frecuencias de los modos correspondientes de la cadena homogénea.

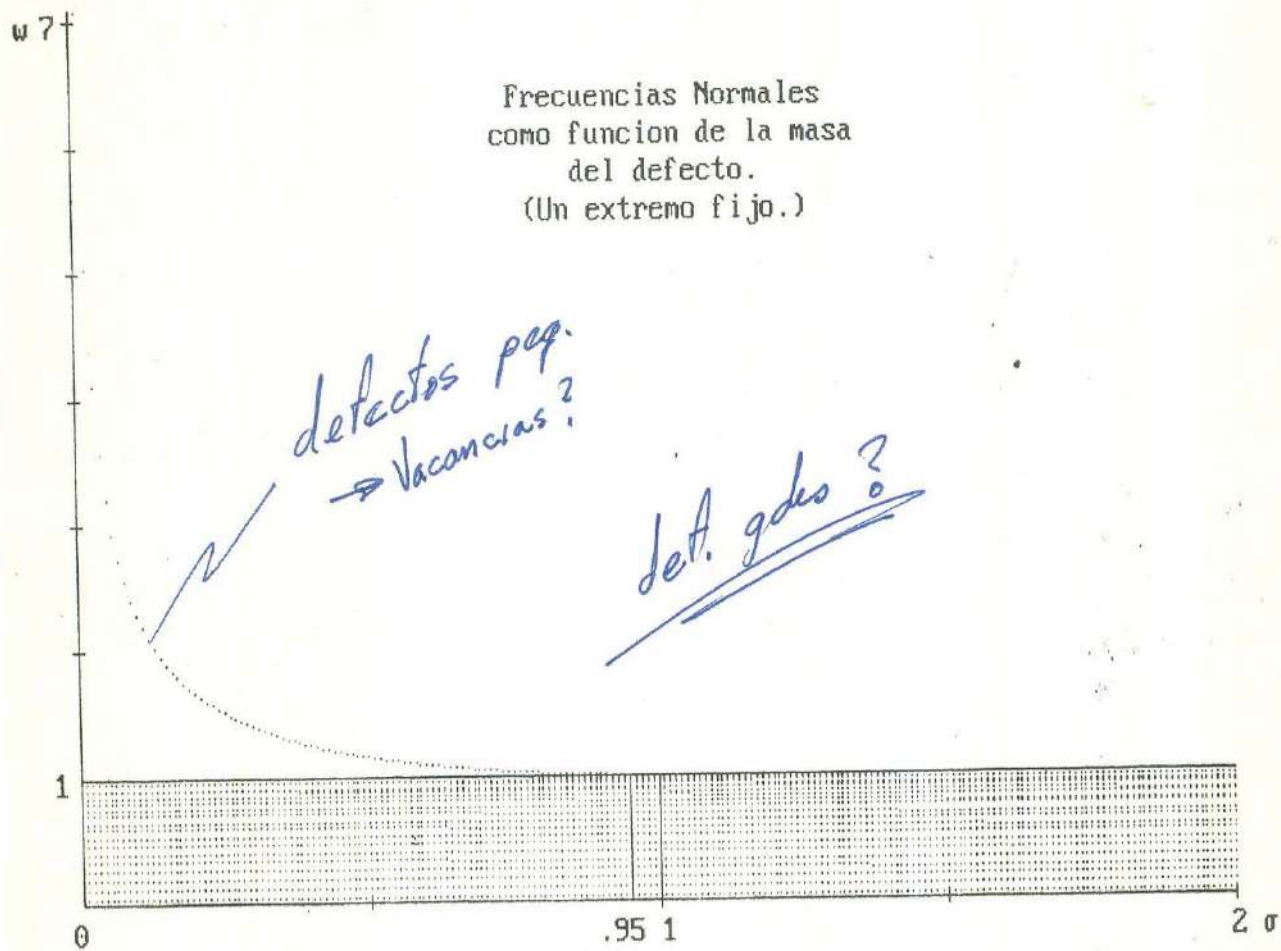


Fig.10.-Soluciones de las ecuaciones (II.63) y (IV.49) para  $N = 21$ ,  $p = 11$ ,  $\omega_0 = \frac{1}{2}$  y los valores de  $\sigma$  en el intervalo  $[.01, 2]$ , con  $\Delta\sigma = .01$ .

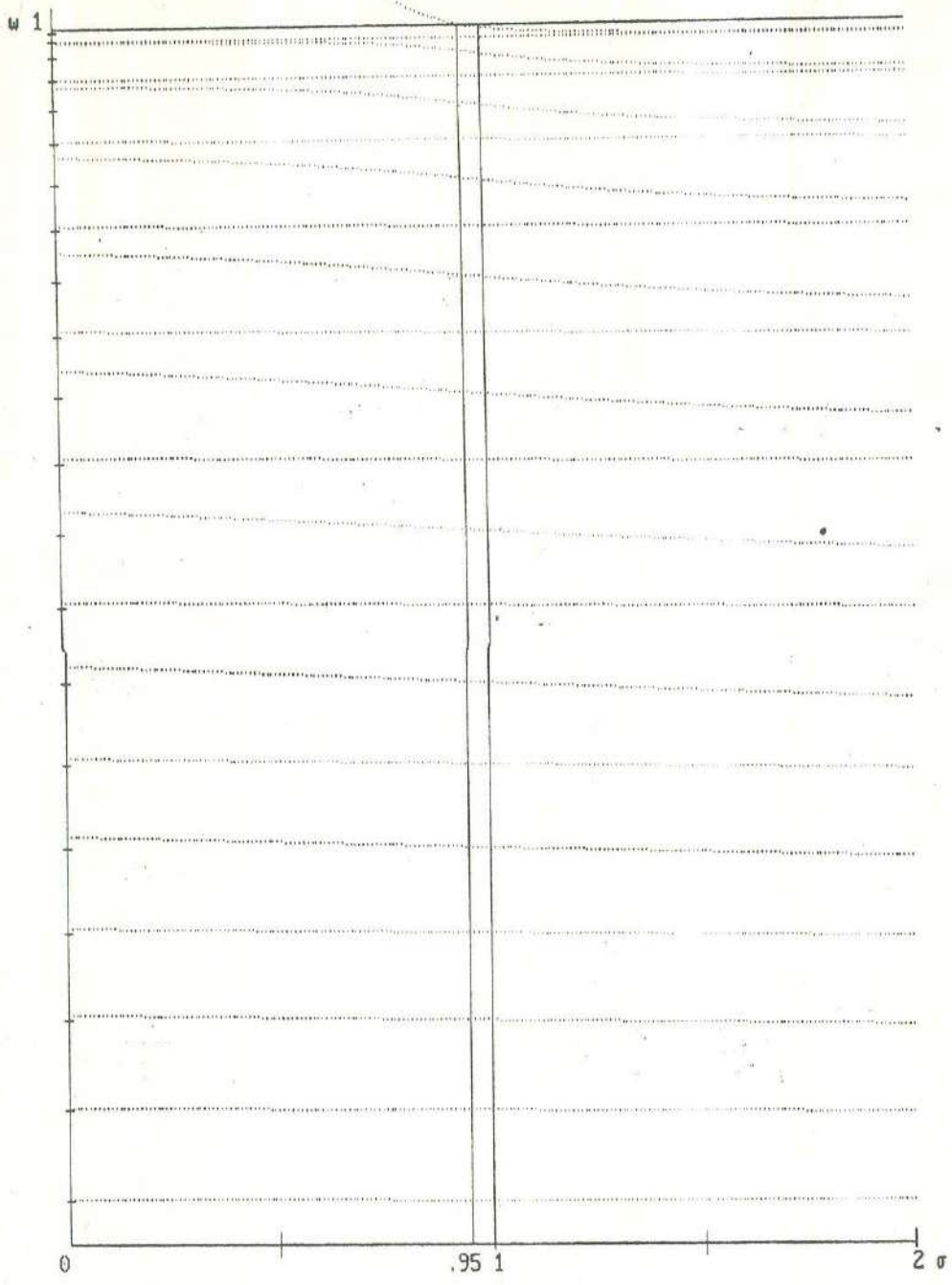


Fig.11.-Frecuencias normales como función de la masa del defecto. Se muestra la región  $0 \leq \omega \leq 1$ , presentada en la figura 10 y se señalan en el eje las frecuencias correspondientes a la cadena homogénea.

En este caso, las condiciones en la frontera son tales que  $\alpha = \beta = 1$ , sustituyendo en la ecuación (IV.1) queda

$$Q_N - 2Q_{N-1} + Q_{N-2} + 2(1-\sigma)(1-\xi)(Q_{p-1} - Q_{p-2})(Q_{N-p} - Q_{N-p-1}) = 0 \quad (\text{IV.61})$$

Usando la fórmula de recurrencia (II.25) y la expresión para los polinomios  $Q_j$  dada por la ecuación (II.62) se obtiene

$$2(\xi-1) \frac{\text{Sen}N\phi}{\text{Sen}\phi} = 2(1-\sigma)(\xi-1) \frac{\text{Cos}(N-p+1/2)\phi}{\text{Cos}\frac{1}{2}\phi} \frac{\text{Cos}(p-1/2)\phi}{\text{Cos}\frac{1}{2}\phi} \quad (\text{IV.62})$$

En este caso, como en el de la cadena homogénea, existe un modo con frecuencia cero, el modo traslacional, que se obtiene con  $\phi = 0$ . Directamente observamos que  $\phi = 0$  satisface la ecuación (IV.62), debido al factor  $(\xi - 1)$ , por lo que la ecuación contiene la solución que corresponde al modo traslacional.

Las  $N - 1$  soluciones restantes se obtienen de la ecuación

$$\frac{\text{Sen}N\phi}{\text{Sen}\phi} = (1 - \sigma) \frac{\text{Cos}(N - p + 1/2)\phi}{\text{Cos}\frac{1}{2}\phi} \frac{\text{Cos}(p - 1/2)\phi}{\text{Cos}\frac{1}{2}\phi} \quad (\text{IV.63})$$

Para calcularlas usamos la identidad

$$\begin{aligned} \text{Sen}N\phi &= \text{Sen}[(N - p + 1/2)\phi + (p - 1/2)\phi] \\ &= \text{Sen}(N-p+1/2)\phi \text{Cos}(p-1/2)\phi + \text{Sen}(p-1/2)\phi \text{Cos}(N-p+1/2)\phi \end{aligned} \quad (\text{IV.64})$$

multiplicamos por el factor

$$\text{Sen}\phi = 2\text{Sen}\frac{1}{2}\phi \text{Cos}\frac{1}{2}\phi \quad (\text{IV.65})$$

y dividimos por

$$\cos(N - p + 1/2)\phi \cos(p - 1/2)\phi \neq 0 \quad (IV.66)$$

(IV.66)

para obtener la siguiente ecuación trascendente

$$\tan(N - p + 1/2)\phi + \tan(p - 1/2)\phi = 2(1 - \sigma)\tan\frac{1}{2}\phi \quad (IV.67)$$

cuyas raíces son las soluciones que buscamos.

De nuevo usamos el método gráfico para analizar las raíces de la ecuación (IV.67).

El lado izquierdo de (IV.67) tiene una asíntota vertical en cada valor de  $\phi$  que es raíz de la ecuación (IV.66). Entre cada par de asíntotas incluyendo  $\phi = 0$  y  $\phi = \pi$ , hay una gráfica creciente que resulta de la suma de tangentes. Cuando  $\sigma < 1$  el lado derecho es una función creciente y cuando  $\sigma > 1$  es decreciente, con una asíntota vertical en  $\phi = \pi$ . (Ver fig.12.)

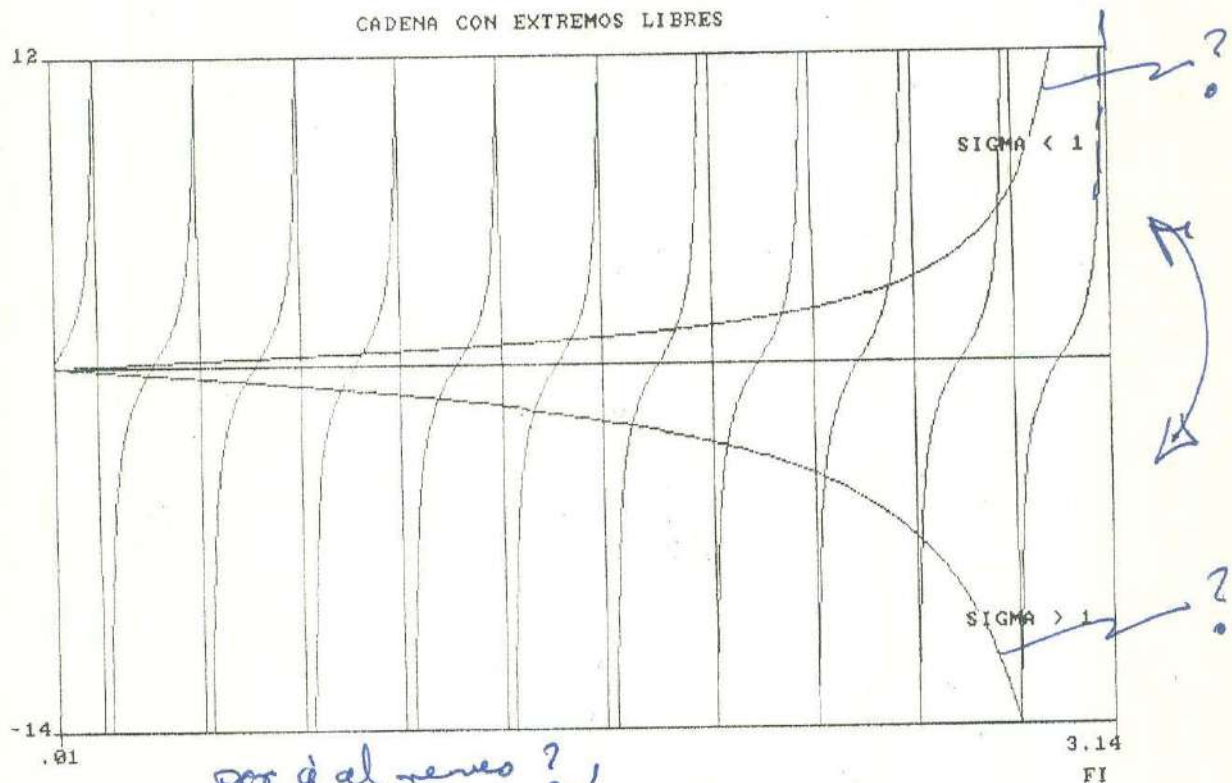


Fig.12. Soluciones de (IV.67) para  $N = 21$  y  $p = 11$ .

Las asíntotas que se obtienen de la ecuación (IV.66) se encuentran ubicadas en



$$\phi = \begin{cases} \frac{(2r - 1)}{(2p - 1)} \pi & r = 1, 2, \dots, p - 1 \\ \frac{(2s - 1)}{(2N - 2p + 1)} \pi & s = 1, 2, \dots, N - p \end{cases} \quad (\text{IV.68})$$

En el caso en que los dos términos del lado izquierdo de la ecuación (IV.67) no tienen asíntotas que son comunes, el intervalo  $0 < \phi < \pi$  se parte en  $N$  subintervalos; de los cuales, el primero contiene la solución  $\phi = 0$  que corresponde al modo traslacional y en los restantes  $N - 1$  subintervalos en cada uno existe una solución excepto en el último, en el caso  $\sigma < 1$ , en que puede ocurrir que no exista la intersección de las curvas.

En el caso en que existan asíntotas comunes; para determinar su ubicación, sea  $d$  al máximo común divisor de  $2p - 1$  y  $2N - 2p + 1$ , entonces entonces  $2p - 1 = kd$  y  $2N - 2p + 1 = \ell d$  con  $k, \ell$  primos relativos impares. Las asíntotas están en

$$\phi = \frac{(2r - 1) \pi}{k d} \quad r = 1, 2, 3, \dots, p - 1$$

$$\phi = \frac{(2s - 1) \pi}{\ell d} \quad s = 1, 2, 3, \dots, N - p$$

y las asíntotas comunes son tales que  $(2r - 1)\ell = (2s - 1)k$ , entonces  $k \mid (2r - 1)$  y  $\ell \mid (2s - 1)$ , luego  $\frac{2r-1}{k} = \text{entero}$  y  $\frac{2s-1}{\ell} = \text{entero}$  por lo que las asíntotas comunes están en

$$\phi = (\text{entero}) \frac{\pi}{d}$$

Como  $2p-1=kd$ , entonces  $2r-1 = 1, 3, 5, \dots, 2p-3 = 1, 3, 5, \dots, kd-2$  y por tanto hay  $\frac{1}{2}(d - 1)$  asíntotas que pueden ser comunes; por otro lado, como  $2N - 2p + 1 = \ell d$ , entonces  $2s - 1 = 1, 3, 5, \dots, 2N - 2p + 1 = 1, 3, 5, \dots, \ell d - 2$ , y por lo tanto hay  $\frac{1}{2}(d-1)$  asíntotas que son comunes; entonces,  $(2r-1) = (2h-1)k$  y los valores comunes son  $\phi = \frac{(2h-1)}{d} \pi$ ;  $h = 1, 2, 3, \dots, \frac{1}{2}(d-1)$ , con lo que establecemos el siguiente<sup>6</sup>

Teorema 3.- Si  $d > 1$  es el máximo común divisor de  $(2p - 1)$  y  $(2N - 2p + 1)$  entonces existen  $\frac{1}{2}(d - 1)$  asíntotas que son comunes. Tales asíntotas son

$$\phi = \frac{(2h - 1) \pi}{d} \quad h = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}(d - 1) \quad (\text{IV.69})$$

De acuerdo con este resultado, el intervalo  $0 < \phi < \pi$  se parte en  $[(N - p) + (p - 1) - \frac{1}{2}(d - 1) + 1] = [N - \frac{1}{2}(d - 1)]$  subintervalos. En cada subintervalo hay una solución, luego nos falta encontrar  $\frac{1}{2}(d - 1)$  soluciones. Estas soluciones que faltan están dadas precisamente por la ecuación (IV.69) como puede verificarse directamente al sustituirla en (IV.63).

En el caso en que  $\sigma < 1$ , hay que encontrar la condición sobre  $\sigma$  para que exista una solución en el último subintervalo. Para hacerlo cambiamos a la variable

$$\psi = \pi - \phi \quad (\text{IV.70})$$

en (IV.63), la cual la escribimos previamente en la forma

$$\cos \frac{1}{2} \phi \operatorname{Sen} N \phi = 2(1 - \sigma) \operatorname{Sen} \frac{1}{2} \phi \operatorname{Cos}(N - p + 1/2) \operatorname{Cos}(p - 1/2) \phi \quad (\text{IV.71})$$

para obtener

$$\operatorname{Sen} \frac{1}{2} \psi \operatorname{Sen} N \psi = 2(1 - \sigma) \operatorname{Cos} \frac{1}{2} \phi \operatorname{Sen}(N - p + 1/2) \psi \operatorname{Sen}(p - 1/2) \psi \quad (\text{IV.72})$$

Ambos lados de la ecuación empiezan a crecer desde cero pero el lado izquierdo vuelve a tomar el valor cero más rápidamente que el lado derecho, en  $\phi = \frac{\pi}{N}$ , (fig.13). Para encontrar si existe solución en  $0 < \psi < \frac{\pi}{N}$ , observemos el comportamiento de las derivadas de (IV.72) en  $\psi = 0$ . La primera derivada de ambos lados son cero en  $\psi = 0$ . La segunda derivada del lado izquierdo es  $N$  y la del lado derecho es  $4(1 - \sigma)(N - p + 1/2)(p - 1/2)$ .

Entonces para que exista solución en el intervalo  $0 < \psi < \frac{\pi}{N}$ ,

la segunda derivada del lado derecho debe ser menor que la del izquierdo, esto es,

$$N > 4(1 - \sigma)(N - p + 1/2)(p - 1/2) \quad (\text{IV.73})$$

de donde se obtiene la siguiente condición sobre el valor de  $\sigma$  que determina la existencia de una solución en dicho intervalo

$$\sigma > 1 - \frac{N}{(2N - 2p + 1)(2p - 1)} \quad (\text{IV.74})$$

De nuevo el extremo izquierdo del intervalo no puede ser solución de (IV.63); en cambio,  $\phi = \pi$  si puede ser solución. Para probarlo, basta tomar el límite  $\phi \rightarrow \pi$  en la ecuación (IV.63). La solución  $\phi = \pi$  existe si

$$\sigma = 1 - \frac{N}{(2N - 2p + 1)(2p - 1)} \quad (\text{IV.75})$$

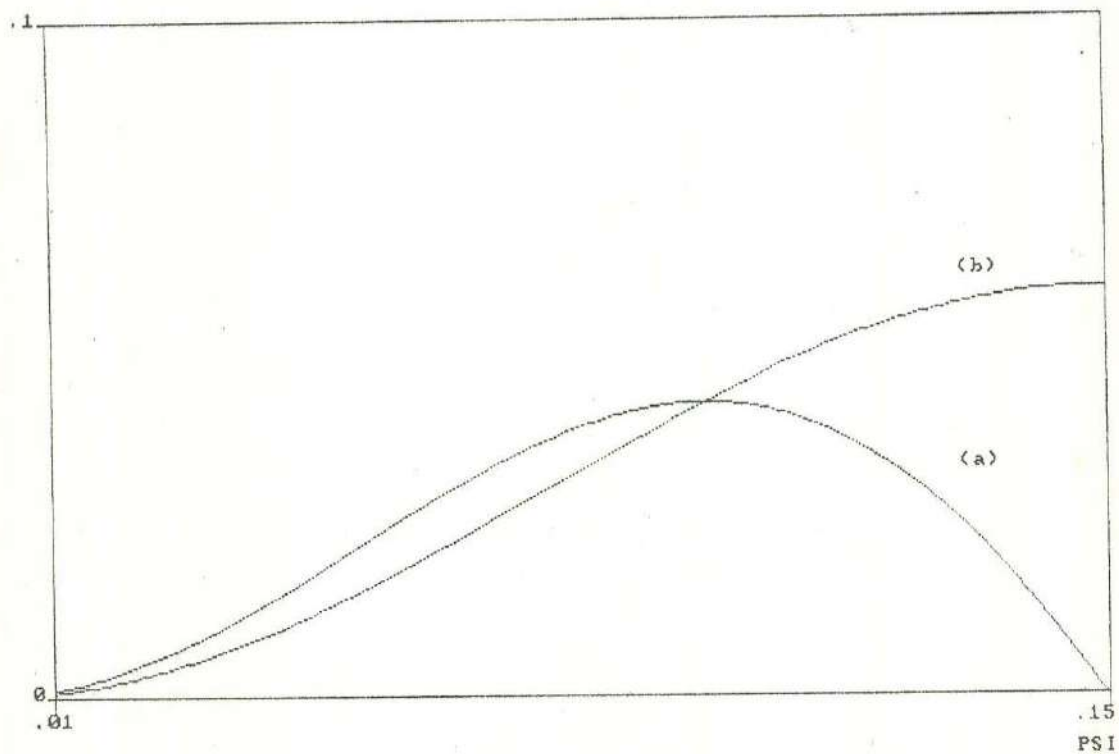


Fig. 13. Solución de la ecuación (IV.72).  
 (a) Miembro izquierdo.  
 (b) Miembro derecho.

por lo tanto, hay una solución en

$$\frac{(N - 1)}{N} < \phi \leq \pi \quad \text{(IV.76)}$$

si  $\sigma$  satisface

$$\sigma \geq 1 - \frac{N}{(2N - 2p + 1)(2p - 1)} \quad \text{(IV.77)}$$

Cuando  $\sigma$  no cumple con esta condición, falta aún una solución. Para obtenerla procedamos como lo hemos hecho en los dos casos anteriores. Consideremos que  $\sigma$  es lo suficientemente pequeña como para tener un modo de frecuencia alta, mayor que  $2\omega_0$ . Tomando en cuenta que la única restricción sobre  $\xi$  es que sea menor que 1, proponemos de nuevo la solución, para una región cercana a  $\pi$ ,

$$\phi = \pi + i\eta \quad (\eta > 0) \quad \text{(IV.78)}$$

entonces

$$\xi = \text{Cos}\phi = -\text{Cosh}\eta \quad \text{(IV.79)}$$

lo cual da el modo de frecuencia más alta, cuyo valor es

$$\omega = 2\omega_0 \text{Cosh}\frac{1}{2}\eta \quad \text{(IV.80)}$$

Para probar que hay una solución de este tipo, sustituimos  $\phi$  dado por (IV.78) en la ecuación (IV.71) y obtenemos

$$\text{Senh}\frac{1}{2}\eta \text{ Senh}N\eta = 2(1-\sigma) \text{Cosh}\frac{1}{2}\eta \text{ Senh}(N-p+1/2)\eta \text{ Senh}(p-1/2)\eta \quad \text{(IV.81)}$$

Ahora veamos el comportamiento de ambos lados de esta ecuación para pequeños valores de  $\eta$ .

El desarrollo en serie de potencias al rededor de  $\eta = 0$  del lado izquierdo conduce a la expresión  $\frac{1}{2} N \eta^2$ ; de la misma manera, para el lado derecho es  $2(1 - \sigma)(N - p + 1/2)(p - 1/2)\eta^2$ .

Por otra parte, el comportamiento asintótico ( $\eta \gg 1$ ) del lado izquierdo y derecho de la ecuación, da respectivamente,  $\frac{1}{4} e^{(N+1/2)\eta}$  y  $\frac{1}{4} (1 - \sigma)e^{(N+1/2)\eta}$ .

Se observa que para valores grandes de  $\eta$  el lado izquierdo crece más rápidamente; por lo tanto, para que exista solución el lado derecho debe crecer más rápidamente que el izquierdo para pequeños valores de  $\eta$ , esto es,

$$2(1 - \sigma)(N - p + 1/2)(p - 1/2)\eta^2 > \frac{1}{2} N\eta^2 \quad (\text{IV.82})$$

de donde se sigue que la masa del defecto debe ser tal que

$$\sigma < 1 - \frac{N}{(2N - 2p + 1)(2p - 1)} \quad (\text{IV.83})$$

con lo cual hemos establecido la condición sobre  $\sigma$  que permite la existencia de una frecuencia mayor que la frecuencia de corte de la correspondiente cadena homogénea, (fig.14).

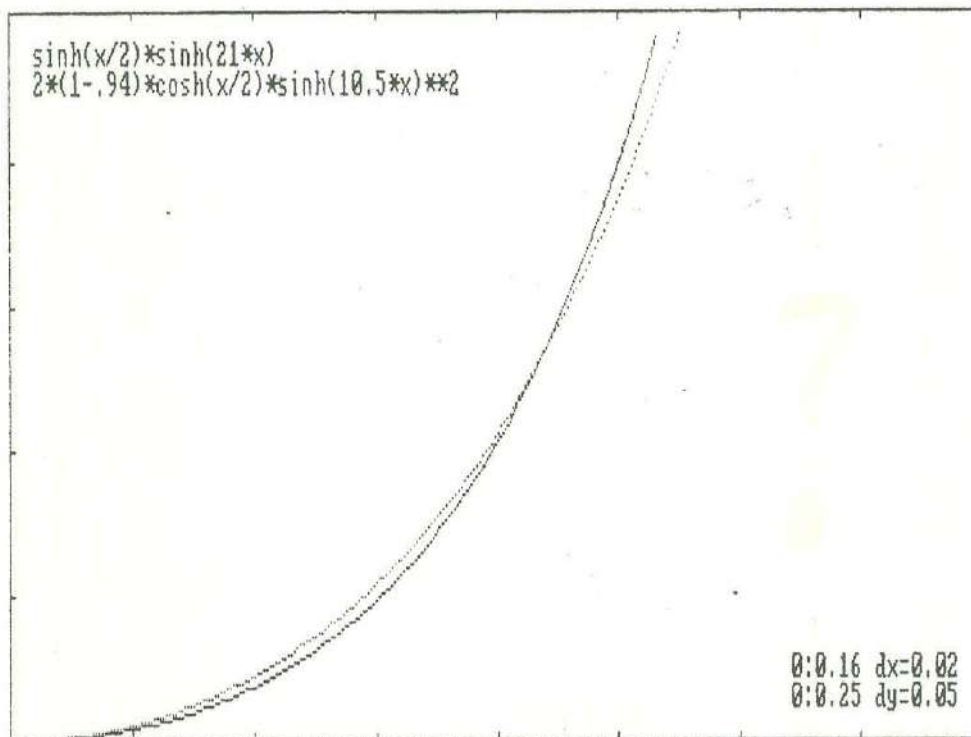


Fig.14.-Solución de la ecuación (IV.81)

Para completar nuestro análisis, observemos, como en los casos anteriores, el comportamiento de la amplitud de oscilación del defecto cuando la cadena se encuentra en un modo cuya frecuencia es independiente de  $\sigma$  y que se obtiene a partir de la ecuación (IV.69):  $\phi = \frac{(2h-1)}{d} \pi$ . (Aquí  $d$  es el máximo común divisor de  $2p-1$  y  $2N-2p+1$ ).

Usando la ecuación (II.24), la expresión para los polinomios  $Q_j$ , y el hecho de que la cadena esté libre por ambos extremos tenemos que en este caso las amplitudes de oscilación están dadas por

$$c_{rj} = \frac{\cos(j-1/2)\phi}{\cos\frac{1}{2}\phi} c_{r1} \quad (IV.84)$$

que para la posición del defecto puede escribirse como

$$\begin{aligned} c_{rp} &= \frac{\cos(p-1/2)\phi}{\cos\frac{1}{2}\phi} c_{r1} \\ &= \frac{\cos\left[k(2h-1)\frac{\pi}{2}\right]\phi}{\cos\left[\frac{(2h-1)}{2d}\pi\right]} c_{r1} = 0 \end{aligned} \quad (IV.85)$$

ya que  $d$  es divisor de  $2p-1 = kd$  con  $k$  impar.

De nuevo tenemos que cuando la cadena oscila en estos modos se produce un nodo en el lugar del defecto.

En el caso de frecuencia más alta, la ecuación (II.24) la podemos escribir como

$$c_{Nj} = \frac{(-1)^{j-1} \operatorname{Senh}(j-1/2)\eta}{\operatorname{Senh}\frac{1}{2}\eta} c_{N1} \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (IV.86)$$

De nuevo encontramos que el defecto oscila con mayor amplitud que las masas que se encuentran a su izquierda y que la amplitud de oscilación de estas masas es mayor para las masas que se encuentran más cerca del defecto. Además, vemos que por tratarse del modo de frecuencia más alta (esto es, el de mayor energía),

las masas oscilan desfasadas  $180^\circ$ .

Analizando el comportamiento de las masas que se encuentran a la derecha del defecto y procediendo de la misma manera que en las secciones anteriores encontramos que las amplitudes para esa parte de la cadena pueden expresarse como

$$c_{NN+1-j} = \frac{(-1)^{j-1} \text{Senh}(j - 1/2)\eta}{\text{Senh}\frac{1}{2}\eta} c_{NN} \quad j = 1, 2, \dots, N+1-p \quad (\text{IV.87})$$

Las ecuaciones (IV.86) y (IV.87) muestran la existencia de un modo localizado en el cual el defecto es la partícula de la cadena que oscila con la mayor amplitud.

En las figuras 15 y 16 se muestra el comportamiento de las frecuencias como función de la masa del defecto para el caso  $N = 21$ ,  $p = 11$  y  $\omega_0 = \frac{1}{2}$ .

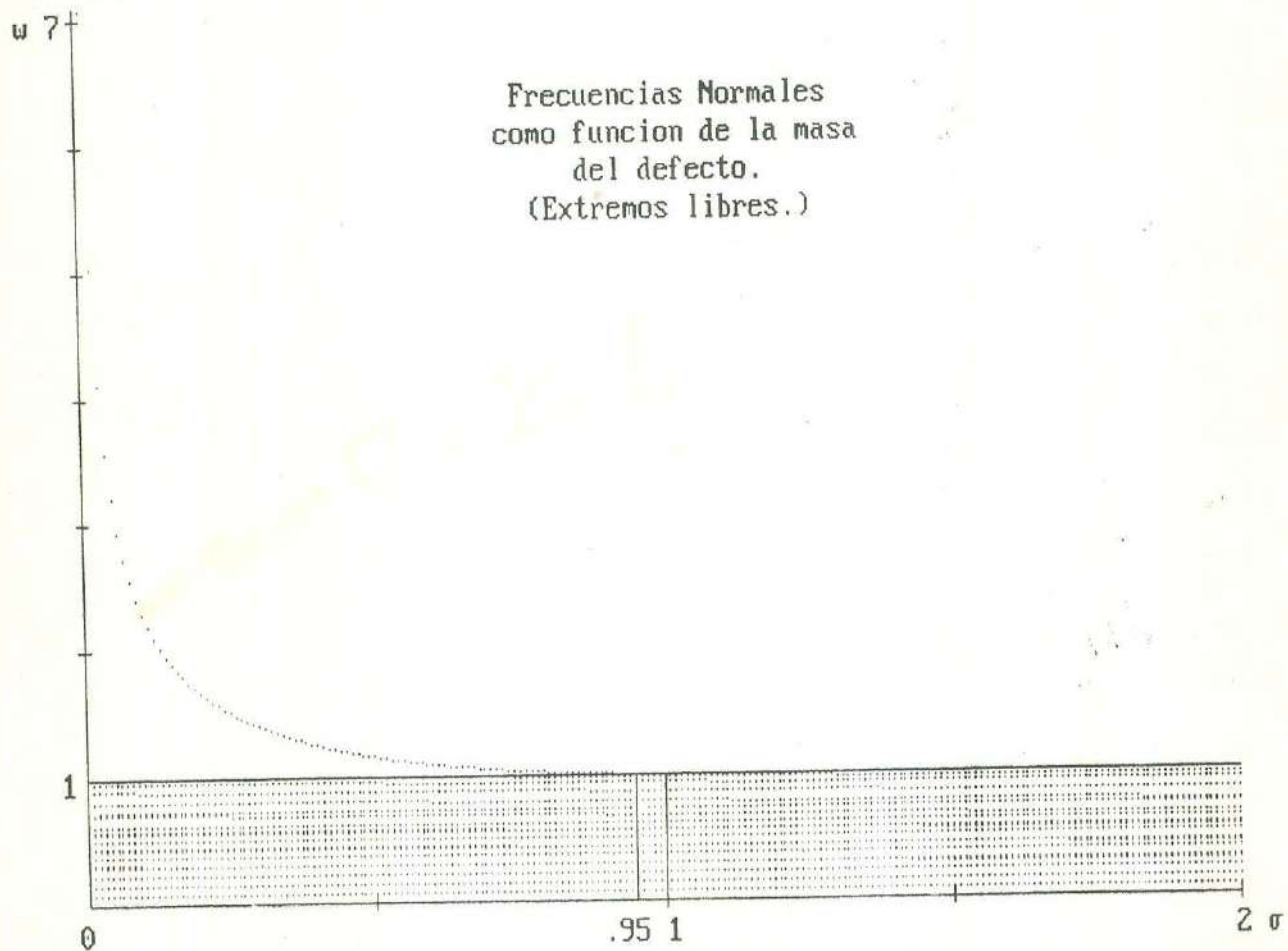


Fig.15.-Soluciones de las ecuaciones (II.63) y (IV.80) para  $N = 21$ ,  $p = 11$ ,  $\omega_0 = \frac{1}{2}$  y los valores de  $\sigma$  en el intervalo  $[.01, 2]$ , con  $\Delta\sigma = .01$ .

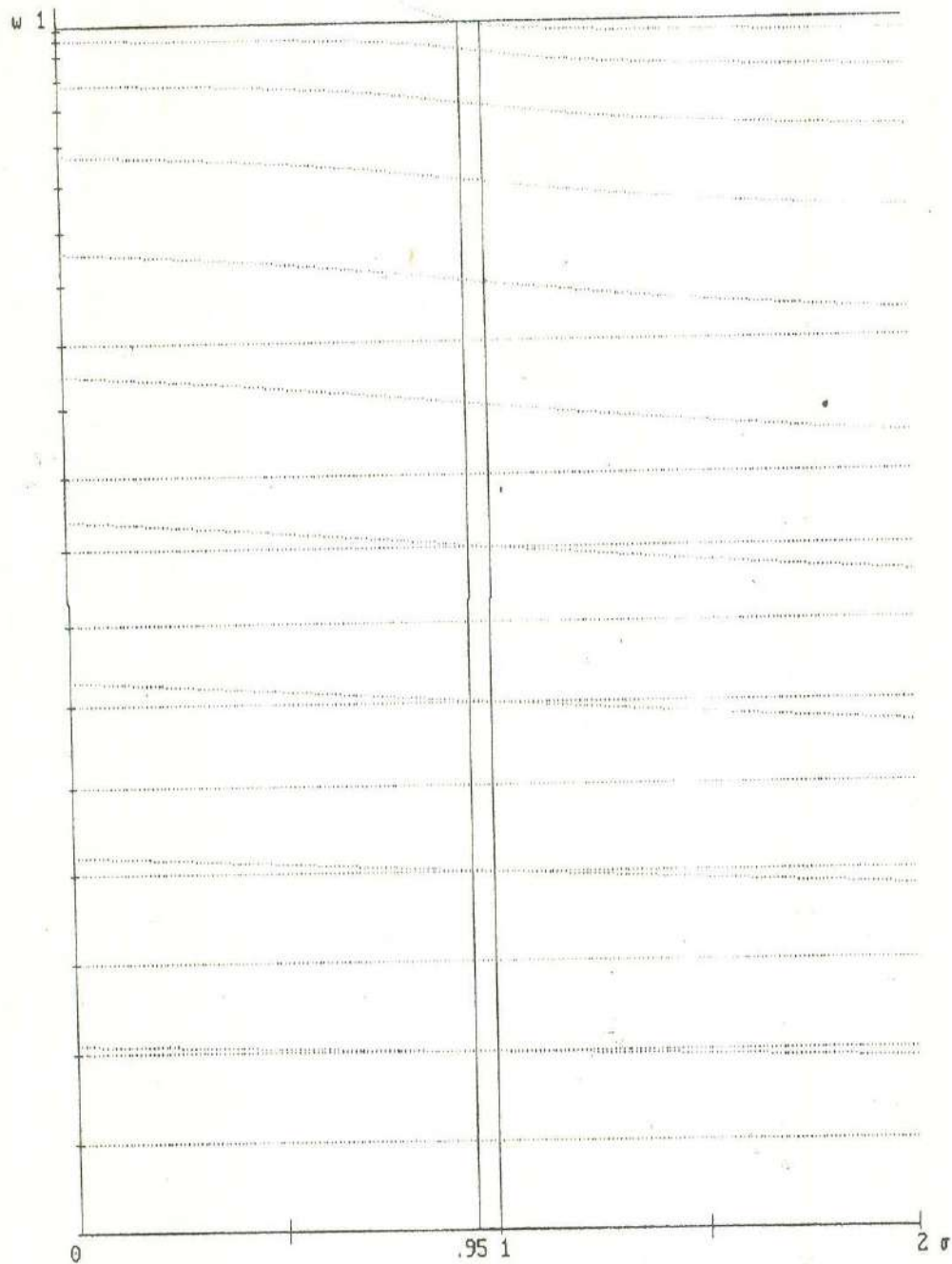


Fig.16.-Frecuencias normales como función de la masa del defecto. Se muestra la región  $0 \leq \omega \leq 1$ , presentada en la fig.15, y se señalan en el eje las frecuencias correspondientes a la cadena homogénea.



El comportamiento general que se observa en la fig.15 es muy semejante al comportamiento descrito en las secciones anteriores para las otras dos condiciones en la frontera. La diferencia esencial en este caso, consiste en la existencia de un modo de frecuencia cero que representa una traslación longitudinal de la cadena. Por otra parte, existe también una pequeña diferencia en el valor de la cota para los valores de  $\sigma$  que rompen la homogeneidad en las frecuencias produciendo una frecuencia por arriba de la frecuencia de corte de la cadena homogénea; el valor de la cota es  $\sigma = .95$ .

En la fig.16 observamos en este caso particular que existen 11 frecuencias (incluyendo  $\omega_1 = 0$ ) que coinciden con las de la cadena homogénea independientemente del valor de la masa del defecto. Vemos también que, como en el caso de extremos fijos, las frecuencias que no coinciden con las de la cadena homogénea dan curvas de puntos simétricas respecto a las frecuencias de los modos impares de la cadena homogénea, excepto para el modo de frecuencia más alta.

En este desarrollo, hemos encontrado que independientemente de las condiciones en la frontera, la introducción de un defecto en la cadena homogénea cuya masa está acotada de manera que la razón entre su masa y la de cualquiera de las partículas que componen la cadena sea menor que la unidad da como resultado la creación de un modo localizado el cual es el de mayor frecuencia, y la frecuencia de este modo excede la frecuencia de corte de la cadena homogénea.

Encontramos también que para ciertas frecuencias que dependen únicamente del tamaño de la cadena y de la posición del defecto en ella se producen nodos en el lugar que ocupa el defecto; en estos casos, el defecto no se mueve y la cadena se parte en dos cadenas homogéneas unidas por el nodo; tales frecuencias forman un subconjunto de las frecuencias normales de una cadena homogénea que tenga el mismo número de masas.

En este resumen hemos destacado las características más importantes de la cadena con un defecto. Para concluir este trabajo se presentan a continuación los resultados que cabe resaltar de este estudio.

## CONCLUSIONES

Aunque ha sido el propósito en cada capítulo resumir las propiedades más importantes de los sistemas físicos bajo estudio, consideramos conveniente incluir esta sección para enmarcar los siguientes puntos:

- 1.- El capítulo I es un intento de reunir los aspectos más importantes de la Teoría de Oscilaciones Pequeñas que el estudiante puede consultar para introducirse en el conocimiento de esta área de la Mecánica.
- 2.- En los capítulos III y IV se han resumido las características por las que son importantes las cadenas lineales de osciladores armónicos para su uso como modelo en el estudio de propiedades de diversos sistemas físicos. El material contenido en estas secciones puede utilizarse también como consulta para trabajos posteriores.
- 3.- En este último punto, cabe señalar la importancia del método de solución de las ecuaciones de movimiento desarrollado en el capítulo II. La ecuación básica que se obtuvo por construcción es una generalización de la ecuación obtenida por Weinstock<sup>8</sup> (para la cadena con un defecto). En este trabajo no se da una demostración rigurosa de la validez de dicha ecuación básica, pero los resultados de los casos tratados en los capítulos III y IV coinciden con los obtenidos con otros métodos.<sup>8, 10, 11</sup> La generalidad del método permite, en principio, realizar un análisis detallado, a partir del cálculo de las frecuencias de oscilación de los modos normales, acerca de las propiedades de cadenas lineales de osciladores armónicos que contengan cualquier número de defectos. Además, el método permite considerar otro tipo de condiciones en la frontera diferentes a las establecidas en este trabajo, como lo es, por ejemplo, el caso de frontera cíclica que da lugar a una cadena circular. Quedan pues, en el presente trabajo, las bases para desarrollar estudios posteriores en esta dirección.

## REFERENCIAS

- 1.- Brillouin, L.  
Wave Propagation in Periodic Structures.  
(Dover, New York, 1953) Cap. I al IV.
- 2.- Symon, K. R.  
Mecánica.  
(Aguilar, España, 1977) Cap. 12.
- 3.- Hauser, W.  
Introducción a los Principios de Mecánica.  
(UTEHA, México, 1969) Cap. 11.
- 4.- Marion, J. B.  
Dinámica Clásica de las Partículas y Sistemas.  
(Reverté, España, 1981) Cap. 13.
- 5.- Goldstein, H.  
Mecánica Clásica.  
(Aguilar, España, 1979) Cap. X.
- 6.- Landau, L. D.  
Mecánica.  
(Reverté, España, 1978) Cap. V.
- 7.- Desloge, E. A.  
Am. J. Phys., 44, 1212, (1976).
- 8.- Weinstock, R.  
Am. J. Phys., 39, 484, (1971).
- 9.- Abramowitz, M. y Stegun, J. A.  
Handbook of Mathematical Functions.  
(Dover, New York, 1972) Cap. 22.
- 10.- Flores, J., et al.  
Rev. Mex. Fis., 22, E11, (1973).
- 11.- Louck, J. D.  
Am. J. Phys., 30, 585, (1962).

*Soluciones Númericas 2*

