

*Estudio de un sistema quark-antiquark
modelado como un oscilador armónico*

Una tesis presentada a la Universidad de Sonora

para el

Grado de Licenciado en Física

por

Darío Cuevas Rivera



Departamento de Física

Universidad de Sonora

Junio de 2008

Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

Estudio de un sistema quark-antiquark modelado como un oscilador armónico

una tesis de Licenciatura en Física presentada por

Darío Cuevas Rivera

Junio 2008

Resumen

Primeramente se entrará en una discusión sobre la ecuación de Dirac, así como su justificación, un breve marco histórico y algunas de las propiedades de ésta que serán útiles más adelante. Ante el problema de tener dos energías dentro de un 4-espinor, se discute la representación de Foldy-Wouthuysen como una manera de resolver el problema; primero para la partícula libre, luego para una partícula sujeta a un potencial y finalmente para N partículas en un potencial. Se establecen los requerimientos para un potencial y al final se describe un procedimiento para obtener una serie finita de términos para el espectro de energía de N partículas sujetas a un potencial de interacción entre ellas.

Posteriormente se discuten las herramientas previamente desarrolladas aplicadas al problema de dos cuerpos. Se justifica la elección del tipo de modelo, se obtiene el hamiltoniano para el problema y se encuentra el espectro de energía utilizando teoría de perturbaciones independientes del tiempo. Este espectro de energía obtenido se compara con datos experimentales para hacer un ajuste al parámetro del potencial.

Al final se discuten las limitantes del modelo desarrollado, explicitando así el tipo de sistemas al que éste puede ser aplicado para obtener resultados físicamente aceptables, así como precisos.

Contenido

1	Introducción	1
2	Ecuación de Dirac	3
2.1.	Introducción	3
2.2.	Espectro de Energía	5
2.3.	Invariancia ante traslaciones y rotaciones	7
3	Transformación Foldy-Wouthuysen	10
3.1.	Transformación FW para partícula libre	10
3.2.	Transformación FW con un potencial	15
3.3.	Transformación para sistemas de N partículas	20
4	Problema de 2 cuerpos	22
4.1.	Oscilador armónico	22
4.2.	Hamiltoniano de un oscilador armónico	23
4.3.	Espectro de energía	25
4.4.	Método perturbativo	27
5	Aplicación al bottonium y charmonium	29
5.1.	Sistema físico	29
5.2.	Predicción del modelo	32
5.2.1.	Bottonium	33
5.2.2.	Charmonium	35
5.3.	Limitantes del método	35
6	Conclusiones	40

A	Identidad vectorial para el producto $(\alpha \cdot A)(\alpha \cdot B)$	41
B	Programa de manipulación algebraica	43
C	Elementos de matriz de r^2	49
	Bibliografía	51

II

interacción del tipo de un oscilador armónico, se llega al hamiltoniano de un sistema cuyos eigenestados y eigenvalores se conocen, salvo por unos términos extras. Éstos, siendo de bajo orden, se consideran como una perturbación al sistema del oscilador armónico y se obtiene una aproximación con teoría de perturbaciones independientes del tiempo cortando la serie hasta el segundo orden de la perturbación.

Utilizando lo anterior, se obtienen los eigenvalores del hamiltoniano asociado al siste-

Capítulo 1

Introducción

El objetivo de este trabajo es el de describir un sistema de dos partículas cuántico relativistas cuya interacción exacta es complicada, a partir de un modelo con un potencial de oscilador armónico entre ellas, utilizando para ello la representación Foldy-Wouthuysen (FW) de la ecuación de Dirac. Éste es un caso particular del problema de N partículas cuántico-relativistas sometidas a cualquier tipo de potencial, pero este problema, aunque mencionado brevemente más adelante, excede las intenciones de este escrito.

Para resolver el problema planteado partiré de la ecuación de Dirac. Primero se obtendrá la ecuación de Dirac en una forma cuya invariancia ante transformaciones del grupo de Poincaré sea evidente. Luego, la transformación FW [6] será aplicada con la finalidad de trabajar solamente con partículas de energías positivas ya que, como se demostrará más adelante, la ecuación de Dirac contiene información de dos partículas a la vez, lo cual es indeseable. Esta transformación es estudiada a partir de la sección 3.1, primero para una partícula que no está sujeta a ninguna interacción, luego para una partícula bajo la acción de un campo. Finalmente se obtendrá un hamiltoniano para un sistema de varias partículas bajo los efectos de un potencial de interacción entre ellas con la posibilidad de agregar potenciales externos, aunque aquí no se explora ese caso.

Cuando este procedimiento se aplica al sistema de dos partículas con un potencial de interacción del tipo de un oscilador armónico, se llega al hamiltoniano de un sistema cuyos eigenestados y eigenvalores se conocen, salvo por unos términos extras. Éstos, siendo de bajo orden, se consideran como una perturbación al sistema del oscilador armónico y se obtiene una aproximación con teoría de perturbaciones independientes del tiempo cortando la serie hasta el segundo orden de la perturbación.

Utilizando lo anterior, se obtienen los eigenvalores del hamiltoniano asociado al siste-

ma *bottonium* los cuales son comparados con datos experimentales de este sistema [9], que es un estado ligado de un quark tipo *bottom* y su antipartícula. A partir de esta comparación, se obtendrán valores para el parámetro libre ω , la constante de acoplamiento del potencial del oscilador armónico y se probarán los límites de este método al obtener energías para el *charmonium* y compararlas con los datos experimentales.

Finalmente se concluyó que este modelo, a pesar de ser de suma sencillez y fácil aplicación, acierta a describir con precisión sistemas del tipo quark-antiquark.

Capítulo 2

Ecuación de Dirac

2.1. Introducción

Como es costumbre, en este trabajo se utilizarán las unidades naturales, lo que significa que $\hbar = c = 1$. De esta manera se evita estar escribiendo en cada ecuación esas cantidades y al final, cuando sea necesario, se especificará la equivalencia entre una ecuación en esas unidades y la misma ecuación con unidades en, digamos, el sistema MKS.

Las implicaciones de este tipo de unidades son varias. Primero, las unidades de las demás cantidades físicas también cambian. Así, las unidades de velocidad dejan de ser metro entre segundo para pasar a no tener unidades. El tiempo puede ser medido en unidades de tiempo, como el segundo, o en unidades de distancia, como el metro. Lo mismo sucede con la distancia y, de esta manera, la velocidad no tiene unidades. El factor de conversión, si se desea emplear, entre la distancia medida en metros y la distancia medida en segundos es la velocidad de la luz, que, en estas unidades, vale exactamente uno. Y es por esto que no importa si se utilizan unidades de tiempo o de distancia para medir ya sea el tiempo o la distancia; el factor de conversión será igual a uno.

De la misma manera, y como uno de los grandes resultados de la teoría de la relatividad especial, la masa y la energía tienen un factor de conversión la una a la otra dado por $E = mc^2$, donde c es la velocidad de la luz, por lo que se pueden medir en las mismas unidades. En este texto estas unidades serán las de electrón-volts, eV (un electrón volt es la energía ganada por un electrón libre cuando se acelera a través de un potencial igual a 1 volt). Tanto la masa como la energía se medirán en eV y al final los datos experimentales con los cuales se comparará este modelo están dados en GeV ($1\text{GeV} = 10^9 \text{eV}$).

La ecuación de Dirac es de suma importancia en el estudio de los cuerpos a un nivel cuántico-relativista. El primer intento por construir una ecuación que pudiera atacar este tipo de problemas tuvo como resultado la ecuación de Klein-Gordon. Esta ecuación fue construida a partir de la conocida relación relativista entre la energía, el momento y la masa en reposo (que en este texto es llamada solamente masa) en un sistema sin campos externos, que es $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ o bien, en unidades naturales, simplemente $E^2 = m^2 + p^2$. Ahora, se toma la relación anterior y se aplica la primera cuantización, es decir que a ésta se le hace el cambio de \mathbf{p} al operador $p^\mu = i\frac{\partial}{\partial x_\mu}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ y se obtiene la ecuación de Klein-Gordon para la partícula libre, que es:

$$p^\mu p_\mu \psi = m^2 \psi \quad (2.1)$$

El problema con esta ecuación es que cuando uno obtiene la ecuación de continuidad asociada, la densidad de probabilidad puede ser negativa en un tiempo cualquiera t . Esto no es deseable ya que una densidad de probabilidad debe ser siempre positiva y menor que uno. Además, con esta ecuación se obtienen naturalmente dos espectros de energía: uno de energías positivas y otro de energías negativas, lo cual en el tiempo en que esta ecuación fue propuesta no tenía interpretación.

Dirac pensó que este problema de las energías negativas se debía a que las derivadas espaciales no eran lineales, sino cuadráticas. En aras de resolver esa parte del problema, propuso una ecuación general de derivadas lineales con coeficientes indefinidos que es de la forma:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[-i \left(\sum_{n=1}^3 \alpha_n \partial_n \right) + \beta m \right] \psi \equiv \hat{H}\psi \quad (2.2)$$

Luego era necesario encontrar los coeficientes α_i para tener en forma su ecuación. Primero que nada, estos coeficientes no pueden ser números ya que esta ecuación no sería covariante ante transformaciones de Poincaré y, por ende, relativísticamente incorrecta*, por lo que se propone que sean matrices de dimensión 4×4 .

Las expresiones para estos coeficientes, al igual que para β se encuentran exigiendo que la función de onda satisfaga la ecuación de Klein-Gordon. La métrica, es decir, las características que deben cumplir y que definen un conjunto de valores para las matrices α y

*Esto se discute más a detalle un poco más adelante, en este capítulo.

β , está dada por:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j + \hat{\alpha}_j \hat{\alpha}_i &= 2\delta_{ij}, \\ \hat{\alpha}_i \beta + \beta \hat{\alpha}_i &= 0, \\ \beta^2 &= 1.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Estas relaciones para las componentes de α son las mismas relaciones que las que satisfacen las matrices de Pauli [3].

Finalmente se concluye que la ecuación de Dirac es:

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial t} + \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m\right) \psi = 0\tag{2.4}$$

Donde el vector α es aquél que tiene como componentes $\hat{\alpha}_i$ (con $i = 1, 2, 3$) y éstas a su vez están relacionadas con las matrices de Pauli mediante:

$$\hat{\alpha}_i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ \hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix}\tag{2.5}$$

Por otro lado, β es una matriz constante dada por

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\tag{2.6}$$

El vector \mathbf{p} es el vector cuyas tres componentes son las del momento lineal. Para un estudio más detallado sobre las ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac se puede acudir a [2], capítulos 1 y 2.

2.2. Espectro de Energía

En esta sección se encontrarán los eigenvalores del operador hamiltoniano de la ecuación de Dirac para una partícula libre (2.4).

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial t} + \alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m\right) \psi = 0\tag{2.7}$$

Para encontrar sus eigenvalores, primero propondré una separación de variables y basándome en nuestro conocimiento previo sobre el comportamiento ondulatorio de una partícula libre en la ecuación de Schrödinger, obtengo una solución de la forma:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x})e^{-i\epsilon t} \quad (2.8)$$

Para la parte espacial escribo el 4-espinor ψ de la siguiente manera:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Substituyendo esto en la ecuación de Dirac obtengo un sistema de dos ecuaciones acopladas para χ y φ :

$$\begin{aligned} \epsilon\varphi &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\chi + m\varphi \\ \epsilon\chi &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\varphi - m\chi \end{aligned} \quad (2.10)$$

De nuevo apelando a nuestros conocimientos previos de este sistema en la ecuación de Schrödinger, los estados de la partícula con momento definido son eigenestados del operador momento cuyo eigenvalor es simplemente P con un vector asociado \mathbf{P} cuyas componentes son los eigenvalores del momento lineal en las diferentes direcciones, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}\chi + (m - \epsilon)\varphi &= 0 \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}\varphi + (-m - \epsilon)\chi &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Luego, para que este sistema tenga solución no trivial para los eigenestados χ y φ el determinante de la matriz de los coeficientes debe ser cero. Esto es:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P} & (m - \epsilon) \\ (-m - \epsilon) & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.12)$$

Luego, utilizando la siguiente relación (ver apéndice A):

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \quad (2.13)$$

Llego a la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \epsilon^2 - m^2 - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}) &= 0 \\ \Rightarrow \epsilon^2 &= m^2 + P^2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Identificando el lado izquierdo de la última ecuación como el eigenvalor del hamiltoniano de una partícula relativista tenemos que

$$\epsilon = \pm \sqrt{m^2 + P^2} \quad (2.15)$$

Y así se ha llegado al resultado de que la ecuación de Dirac contiene información de dos energías que difieren entre sí por un signo; dos partículas con energías distintas son descritas por un mismo 4-espinor y es en parte por esto que se introduce la transformación FW del siguiente capítulo.

2.3. Invariancia ante traslaciones y rotaciones

La relatividad especial exige que no sea posible diferenciar entre dos sistemas de referencia inerciales, lo que significa que cualquier ecuación de la física debe tener la misma forma en un sistema o en otro. Tomemos dos sistemas: el sistema A , con coordenadas a, b , y el sistema A' , con coordenadas a', b' . Una ecuación en el sistema A , en general, sería de la forma:

$$f(a, b) = 0, \quad (2.16)$$

donde f es una función cualquiera. Si se desea que esa ecuación sea relativísticamente correcta, entonces al estar en el sistema A' la ecuación debe tener la misma forma, es decir,

$$f(a', b') = 0 \quad (2.17)$$

Y aquí la función f debe ser la misma que en la ecuación para el sistema A .

Ahora, para escribir la ecuación de Dirac en una forma evidentemente covariante ante transformaciones de sistema de referencia (es decir, covariante de Poincaré), introduzco el siguiente vector:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \beta \\ \gamma^i &= \beta \alpha_i, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Al utilizar estas cantidades, la ecuación de Dirac queda como sigue:

$$(\gamma^\mu p_\mu + m) \psi = 0, \quad (2.19)$$

donde se hizo uso del cuatro-vector de momento $p_\mu = (-i\partial/\partial t, \mathbf{p})$ y, por otro lado, $\beta^2 = 1$.

Al realizar una transformación unitaria al hamiltoniano (como una rotación), el término de masa queda igual, el operador p_μ pasa a p'_μ , la variable transformada, y el término de gama es transformado, pero como cualquier matriz que sea una transformación unitaria de una gama es una gama en sí, el hamiltoniano queda con la misma forma pero ahora en la variable transformada. Por otro lado, al transformar la función de onda (de nuevo, con un operador unitario), la nueva función de onda seguirá conteniendo la información del mismo sistema. De esta manera, llego a que:

$$H(p')\psi' = 0 \quad (2.20)$$

donde ψ' es la función de onda transformada. Así, de un sistema de referencia a otro la ecuación de Dirac mantiene su forma, hecho que será utilizado más adelante en la sección 4.2, cuando se especifique el sistema de referencia en el que se trabajará.

La covariancia de la ecuación de Dirac se discute ampliamente en [2], en particular en la sección 3.4, donde se encuentra explícitamente el operador de transformación de Lorentz de $\psi(x)$ a $\psi'(x')$ y se discuten las características de la transformación.

Ya teniendo esta ecuación es fácil pensar en cómo sería la ecuación para N partículas que también sería covariante de Poincaré.

$$\sum_{s=1}^N (\gamma_s^\mu p_{\mu s} + m_s) \psi = 0 \quad (2.21)$$

O bien

$$\sum_{s=1}^N (\beta \alpha_s \cdot \mathbf{p}_s + m_s) \psi = i\beta \gamma_0 \quad (2.22)$$

Es sencillo introducir un nuevo potencial a la ecuación de Dirac, sin embargo, hay que asegurarse de que dicho potencial sea también covariante ante traslaciones y rotaciones de tal manera que esta característica tan importante de la ecuación de Dirac se preserve. Una manera de asegurar esto es tomar potenciales de interacción entre las partículas que sólo dependa de las coordenadas relativas entre las partículas, como el electromagnético o el de un oscilador (el cual se usará más adelante). De cualquier manera, un potencial

covariante de Poincaré se puede escribir como $V(x_\mu^{st}x^{s't'\mu})$, aclarando que x^{st} no es un tensor; los índices son meramente para asignarle nombre, de tal manera que $x^{st} \equiv x_s - x_t$, donde x_s y x_t son las posiciones de las partículas s y t, respectivamente.

Capítulo 3

Transformación

Foldy-Wouthuysen

Existen varias representaciones de la ecuación de Dirac y cada una de ellas tiene sus particulares ventajas. La transformación Foldy-Wouthuysen es una de ellas. Históricamente esta transformación fue buscada y encontrada con la finalidad de aplicar el límite no relativista a la ecuación de Dirac y llegar a la ecuación de Pauli con todos sus operadores. Esto se logró buscando una representación en la que el operador \hat{x} tuviera la forma y las propiedades adecuadas en el límite no relativista, a diferencia de la representación que hasta ahora se ha utilizado, llamada representación Dirac-Pauli, cuyo operador \hat{x} tiene solamente dos eigenvalores, más y menos la velocidad de la luz. Además, en la representación FW el operador de velocidad, obtenido a partir de la relación de Heisenberg entre la velocidad (siendo en esta representación \hat{x}) y la posición, cumple con las relaciones clásicas conocidas. Estos dos objetivos se logran al poder separar la solución con energía positiva de la solución de energía negativa.

Como se concluirá al final de la siguiente sección, el espectro de energía de la ecuación de Dirac para una partícula libre en la representación FW está en perfecta concordancia con la relación relativista entre la energía, la masa y el momento lineal de una partícula.

3.1. Transformación FW para partícula libre

Sabemos que la ecuación de Dirac no describe a una sola partícula, sino a dos partículas; una de energía positiva y otra de energía negativa. A la hora de hacer cualquier cálculo, esto se convierte en un problema porque analíticamente no se pueden aislar los resultados de una partícula y, como consecuencia, no se pueden comparar los resultados teóricos con los experimentales. Se pueden utilizar métodos numéricos para resolver el sis-

tema de ecuaciones, pero la transformación FW es una manera más elegante y analítica de desacoplar estas ecuaciones. La idea de este capítulo es crear dicha representación de la ecuación de Dirac.

En general se puede construir una transformación unitaria $\hat{U} = e^{i\hat{S}}$ que al ser aplicada al 4-espinor de la ecuación de Dirac y haciendo la transformación pertinente del operador hamiltoniano podemos separar las energías negativas de las positivas. El operador es evidentemente unitario y así debe ser ya que las transformaciones bajo operadores unitarios no afectan el significado físico detrás de una ecuación. En concreto,

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\hat{S}}\psi \quad (3.1)$$

Para encontrar la forma de ese operador \hat{S} tenemos que saber qué es lo que causa que los estados de energías positivas y negativas estén ligados en la misma ecuación. Para esto, comenzamos viendo el caso de una partícula de Dirac en reposo. Esto significa que $\hat{p}\psi = 0$. Con esto, la ecuación de Dirac queda:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \beta m\psi \quad (3.2)$$

con β dada por la ecuación (2.6).

Con esto, la ecuación de Dirac se descompone en cuatro ecuaciones no acopladas:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\psi_1 &= m\psi_1 & i\frac{\partial}{\partial t}\psi_2 &= m\psi_2 \\ i\frac{\partial}{\partial t}\psi_3 &= -m\psi_3 & i\frac{\partial}{\partial t}\psi_4 &= -m\psi_4 \end{aligned}$$

Cuyas soluciones son de la forma:

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt}$$

$$\psi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{imt} \quad \psi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{imt}$$

Por la ecuación de eigenvalores $i\frac{\partial}{\partial t}\psi \equiv \hat{E}\psi = \epsilon\psi$ observamos que ψ_1 y ψ_2 son estados de energía positiva y ψ_3 y ψ_4 de energía negativa. En este caso, la presencia de ambas energías se debe al hecho de que estamos trabajando con un 4-espinor, a diferencia, de la ecuación de Pauli en el que se trabaja con un espinor de dos componentes y sólo se tiene la energía positiva.

Para arreglar esto, uno podría pensar que basta con trabajar con las primeras dos componentes del espinor para eliminar el problema, pero existe un detalle. Si examinamos la ecuación de Dirac para una partícula libre (2.4):

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)\psi \quad (3.3)$$

y hacemos las sustituciones

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$$\hat{\alpha}_i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ \hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

obtenemos:

$$i\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & \chi \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & \varphi \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} \varphi \\ -\chi \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

De esta última ecuación se ve claramente que hay dos ecuaciones para las dos funciones φ , χ , y que las dos ecuaciones están acopladas, lo que implica que una solución a cualquiera de las dos incluiría información de ambas energías.

El objetivo será la elección del operador \hat{S} en la transformación (3.1) de tal manera que cuando transformemos el operador hamiltoniano, el operador $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}$, que es el causante del acoplamiento, sea eliminado de este nuevo hamiltoniano. Para esto aplicamos la transformación al 4-espinor y vemos qué sucede con el hamiltoniano. Transformando la

ecuación (2.4), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \hat{H}'\psi' &= i\frac{\partial}{\partial t}\psi' \\
 &= i\left(i\frac{\partial\hat{S}}{\partial t}e^{i\hat{S}}\psi + e^{i\hat{S}}\frac{\partial}{\partial t}\psi\right) \\
 &= i\left(i\frac{\partial\hat{S}}{\partial t}e^{i\hat{S}} + e^{i\hat{S}}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi \\
 &\Rightarrow \hat{H}'e^{i\hat{S}} = e^{i\hat{S}}\hat{H} - \frac{\partial\hat{S}}{\partial t}e^{i\hat{S}}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Por lo tanto:

$$\hat{H}' = e^{i\hat{S}}\hat{H}e^{-i\hat{S}} - \frac{\partial\hat{S}}{\partial t} \tag{3.8}$$

Como hasta ahora \hat{S} es arbitraria, la podemos elegir de tal manera que no dependa explícitamente del tiempo, para que el último término de la ecuación (3.8) se elimine y así poder proseguir con la elección de la función hasta ahora arbitraria. Con esto, la ecuación (3.8) queda:

$$\hat{H}' = e^{i\hat{S}}\hat{H}e^{-i\hat{S}} \tag{3.9}$$

Ahora es tiempo de elegir \hat{S} para que el hamiltoniano quede libre de $\alpha \cdot \mathbf{p}$. Para esto, propongo una función que sólo dependa de α , β y p ya que conozco las relaciones de conmutación entre éstos (2.3):

$$\hat{S} = -\frac{i}{2m}\beta\alpha \cdot \mathbf{p} \theta\left(\frac{p}{m}\right) \tag{3.10}$$

Donde $\theta\left(\frac{p}{m}\right)$ es una función real que no depende de α ni β y que será especificada después como sea conveniente.

Aplicamos la transformación (3.9) al hamiltoniano $\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m$:

$$\hat{H}' = e^{-i\frac{i}{2m}\beta\alpha \cdot \mathbf{p} \theta\left(\frac{p}{m}\right)}(\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m)e^{i\frac{i}{2m}\beta\alpha \cdot \mathbf{p} \theta\left(\frac{p}{m}\right)} \tag{3.11}$$

Dado que β es una matriz numérica diagonal, conmuta con las componentes de p . De igual manera p conmuta con α . Por el contrario, las alfas y las betas anticonmutan entre ellas, entonces se ve claramente que $(\hat{S})^n$ conmuta con \hat{H} para n par y anticonmuta para n impar y con esto obtengo que:

$$\begin{aligned}
 \hat{H}' &= e^{-i\frac{i}{2m}\beta\alpha \cdot \mathbf{p} \theta\left(\frac{p}{m}\right)}(\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m) \\
 &= e^{2i\hat{S}}\hat{H}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Y es justamente para llegar a esta última ecuación que se eligen las constantes en la propuesta.

Entonces, considerando que $(\beta\alpha \cdot \mathbf{p})^2 = -\mathbf{p}^2$, desarrollamos el operador en series de potencias de θ :

$$\begin{aligned} e^{2i\hat{S}} &= 1 + \frac{\beta\alpha \cdot \mathbf{p}}{m}\theta + \frac{1}{2!} \left(\frac{\beta\alpha \cdot \mathbf{p}}{m}\theta \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\beta\alpha \cdot \mathbf{p}}{m}\theta \right)^3 + \dots \\ &= \left[1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{p}{m}\theta \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{p}{m}\theta \right)^4 + \dots \right] \\ &\quad + \frac{\beta\alpha \cdot \mathbf{p}}{p} \left[\frac{p}{m}\theta - \frac{1}{3!} \left(\frac{p}{m}\theta \right)^3 + \dots \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

Identificamos el primer corchete como el desarrollo en serie de $\text{Cos}\left(\frac{p}{m}\theta\right)$ y el segundo como el desarrollo de $\text{Sen}\left(\frac{p}{m}\theta\right)$, entonces:

$$\begin{aligned} \hat{H}' &= \left[\text{Cos}\left(\frac{p}{m}\theta\right) + \frac{\beta\alpha \cdot \mathbf{p}}{p}\text{Sen}\left(\frac{p}{m}\theta\right) \right] (\alpha \cdot \mathbf{p} + \beta m) \\ &= \left[\beta p \text{Sen}\left(\frac{p}{m}\theta\right) + \beta m \text{Cos}\left(\frac{p}{m}\theta\right) \right] \\ &\quad + \alpha \cdot \mathbf{p} \left[\text{Cos}\left(\frac{p}{m}\theta\right) - \frac{m}{p}\text{Sen}\left(\frac{p}{m}\theta\right) \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

La elección de θ se hará tal que se elimine el segundo corchete:

$$\begin{aligned} \text{Cos}\left(\frac{p}{m}\theta\right) - \frac{m}{p}\text{Sen}\left(\frac{p}{m}\theta\right) &= 0 \\ 1 - \frac{m}{p}\text{Tan}\left(\frac{p}{m}\theta\right) &= 0 \\ \Rightarrow \theta &= \frac{m}{p}\text{ArcTan}\left(\frac{p}{m}\right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Con esta elección, el nuevo hamiltoniano queda:

$$\hat{H}' = \beta p \text{Sen}\left[\text{ArcTan}\left(\frac{p}{m}\right)\right] + \beta m \text{Cos}\left[\text{ArcTan}\left(\frac{p}{m}\right)\right] \quad (3.16)$$

Usando las identidades $\text{ArcTan}(x) = \text{ArcSen}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \text{ArcCos}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ se obtiene la forma final del hamiltoniano:

$$\hat{H}' = \beta \sqrt{p^2 + m^2} \quad (3.17)$$

Y ésta es la relación de dispersión multiplicada por un factor β . Como se puede observar, ya no existen términos impares que hagan que los espinores *superior* e *inferior* se mezclen, lo que significa que las ecuaciones para éstos son del tipo $f(\varphi) = 0$ y $g(\chi) = 0$, que es lo que habíamos estado buscando desde el principio.

3.2. Transformación FW con un potencial

Si ahora lo que se desea es hacer esta misma transformación en un hamiltoniano que no es el de partícula libre sino uno de una partícula bajo la influencia de un campo de fuerza que se puede escribir como el gradiente de un potencial, entonces se deben tomar nuevas consideraciones. Para el caso de un campo débil, aún se puede encontrar una transformación FW que sea exacta, es decir, que elimine todos los términos impares del nuevo hamiltoniano, separando así las energías positivas de las negativas. Cuando no se toma en cuenta la aproximación de campo débil, dicha transformación exacta no es posible. A continuación se desarrolla un método mediante el cual se logra expresar el hamiltoniano transformado como una serie de potencias del parámetro $1/m$ y en el cual se eliminan los términos impares hasta el orden deseado de dicho parámetro haciendo transformaciones sucesivas.

Lo primero que haré será escribir el hamiltoniano como sigue:

$$\hat{H} = \beta m + \alpha \cdot \mathbf{p} + V = \beta m + \vartheta + \varepsilon \quad (3.18)$$

El símbolo ϑ significa impar (*odd* en inglés). Todas las cantidades impares tienen la característica de que ligan los estados de diferente energía, es decir, acoplan las ecuaciones diferenciales para energías negativas y positivas, y son los que se quiere eliminar. De igual manera, los representados por ε son los pares (*even* en inglés), que son totalmente inofensivos en ese sentido. Estos operadores tienen las siguientes reglas de conmutación con el operador β :

$$\begin{aligned} \beta \varepsilon &= \varepsilon \beta \\ \beta \vartheta &= -\vartheta \beta \end{aligned} \quad (3.19)$$

Obviamente el término $\alpha \cdot \mathbf{p}$ es impar y el potencial escalar es par. Ahora, aplicaré una transformación en forma de un operador unitario de la misma manera que en la sección anterior. De hecho, el operador \hat{S} será casi el mismo, o más bien, una generalización de éste a la nueva notación de operadores pares e impares. El nuevo operador \hat{S} será:

$$\hat{S} = \frac{-i\beta}{2m} \vartheta \quad (3.20)$$

El método para la aplicación del operador difiere un poco del caso más sencillo de la partícula libre puesto que las reglas de conmutación dejan de ser tan sencillas y ya no

se puede aplicar un tratamiento como el que lleva a la ecuación (3.12). Ahora, en lugar de simplemente encontrar la conmutación entre el operador en la exponencial con el hamiltoniano, tomaré el desarrollo de la exponencial en series de potencias del operador y haré las multiplicaciones pertinentes, pero en lugar de hacer multiplicaciones término por término, utilizaré lo que a continuación se desarrolla.

Primero, defino una función $F(\lambda)$ como sigue:

$$F(\lambda) = e^{i\lambda\hat{S}} H e^{-i\lambda\hat{S}} \quad (3.21)$$

Luego, tomo la serie de Taylor de esa función alrededor de λ igual a cero:

$$F(\lambda) = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} \left(\frac{\partial^k F}{\partial \lambda^k} \right)_{\lambda=0} \quad (3.22)$$

Ahora vemos que, ya que H no depende de λ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= e^{i\lambda\hat{S}} i\hat{S} H e^{-i\lambda\hat{S}} - e^{i\lambda\hat{S}} H (i\hat{S} e^{-i\lambda\hat{S}}) \\ &= e^{i\lambda\hat{S}} i[S, H] e^{-i\lambda\hat{S}} \\ \Rightarrow \frac{\partial^n F}{\partial \lambda^n} &= e^{i\lambda\hat{S}} i^n [S, [S, [S, \dots, [S, H]]] \dots] e^{-i\lambda\hat{S}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Juntando las ecuaciones (3.21), (3.22) y (3.23) y tomando λ igual a uno, se obtiene el siguiente resultado que es muy útil para el cálculo (en particular el cálculo manual) de los nuevos hamiltonianos:

$$e^{i\hat{S}} H e^{-i\hat{S}} = H + i[S, H] + \frac{i^2}{2!} [S, [S, H]] + \frac{i^3}{3!} [S, [S, [S, H]]] + \dots \quad (3.24)$$

Un punto importante a aclarar es que, siendo una sumatoria hasta el infinito difícil de evaluar exactamente, se debe hacer un corte. La cuestión es hasta dónde dejar correr la serie. En el libro de Bjorken y Drell [6] se establece un término máximo a partir de la energía cinética, la potencial y la masa del cuerpo; se corta todo término de menor valor que $(\text{energía cinética})/m^3$ y $(\text{energía cinética})(\text{Energía del campo})/m^2$. Por ahora solamente tomaré el parámetro $1/m$ como criterio y despreciaré los términos de mayor orden que $(1/m)^3$ (ya que $1/c^2 m$ es una cantidad pequeña). La consideración de un campo relativamente débil será útil más adelante y será entonces cuando la aplique.

Para el n -ésimo término tenemos n conmutadores, lo que significa que cada producto de la multiplicación tendrá \hat{S} a la potencia n multiplicando a H . Cada potencia de \hat{S} aporta $1/m$, entonces tengo $(1/m)^n$. El hamiltoniano tiene para este interés, dos términos: uno con m ($m\beta$) y otro sin ella ($\varepsilon + \vartheta$). Como sabemos, el conmutador de la suma es la suma de los conmutadores, es decir que $[A, B + C] = [A, B] + [A, C]$, por lo tanto el término menor en el parámetro $1/m$ es aquél debido a $m\beta$, siendo éste del orden $n-1$ en el parámetro de corte. En conclusión, si lo que se quiere es hacer el desarrollo hasta $(1/m)^n$, se deben considerar $n + 1$ términos en la serie. En este caso, tomaré los primeros cuatro términos en el desarrollo para ejemplificar la utilidad del método.

Haciendo simple álgebra se obtienen los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
 i[S, H] &= -\vartheta + \frac{\beta}{2m}[\vartheta, \varepsilon] + \frac{1}{m}\beta\vartheta^2 \\
 \frac{i^2}{2}[S, [S, H]] &= -\frac{\beta\vartheta^2}{2m} - \frac{1}{8m^2}[\vartheta, [\vartheta, \varepsilon]] - \frac{1}{2m^2}\vartheta^3 \\
 \frac{i^3}{3!}[S, [S, [S, H]]] &= \frac{\vartheta^3}{6m^2} - \frac{1}{6m^3}\beta\vartheta^4 + \frac{1}{48m^3}\beta[\vartheta, [\vartheta, [\vartheta, \varepsilon]]] \\
 \frac{i^4}{4!}[S, [S, [S, [S, H]]]] &= \frac{\beta\vartheta^4}{24m^3}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Con estos resultados se obtiene el siguiente hamiltoniano transformado:

$$\begin{aligned}
 H' &= \beta \left(m + \frac{\vartheta^2}{2m} - \frac{\vartheta^4}{8m^3} \right) + \varepsilon - \frac{1}{8m^2}[\vartheta, [\vartheta, \varepsilon]] \\
 &\quad + \frac{\beta}{2m}[\vartheta, \varepsilon] - \frac{\vartheta^3}{3m^2} + \frac{1}{48m^3}\beta[\vartheta, [\vartheta, [\vartheta, \varepsilon]]]
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

En la referencia [6] desprecian el último término de la ecuación (3.25) ya que es de menor orden que el mínimo establecido al principio de esta sección. Hasta ahora había dejado vivir ese término ya que surge naturalmente del cálculo algebraico del hamiltoniano, pero a partir de ahora lo despreciaré como usualmente se hace. Al hacer esto, el hamiltoniano transformado queda:

$$\begin{aligned}
 H' &= \beta \left(m + \frac{\vartheta^2}{2m} - \frac{\vartheta^4}{8m^3} \right) + \varepsilon - \frac{1}{8m^2}[\vartheta, [\vartheta, \varepsilon]] \\
 &\quad + \frac{\beta}{2m}[\vartheta, \varepsilon] - \frac{\vartheta^3}{3m^2}
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Los términos del segundo renglón del hamiltoniano transformado son todos los términos impares que sobreviven a la transformación. Aquí aparentemente se eliminaron los impares de los órdenes cero y tres del parámetro $1/m$, pero hay que tener en cuenta que se

despreció un término que es impar y de orden tres en el parámetro.

Si identificamos términos, este nuevo hamiltoniano se puede escribir de la siguiente manera:

$$H' = \beta m + \varepsilon' + \vartheta' \quad (3.28)$$

Como deseamos eliminar los términos impares del orden uno del parámetros, debemos aplicar una transformación más. Para elegir el operador \hat{S} simplemente seguimos la tónica de la transformación anterior. Esto es,

$$\tilde{S}' = \frac{-i\beta}{2m}\vartheta' = \frac{-i\beta}{2m} \left(\frac{\beta}{2m}[\vartheta, \varepsilon] - \frac{\vartheta^3}{3m^2} \right) \quad (3.29)$$

De la misma manera que antes, el nuevo hamiltoniano será:

$$H'' = e^{i\tilde{S}'} H' e^{-i\tilde{S}'} \quad (3.30)$$

Para obtener los términos de esta nueva transformación hace falta realizar muchos cálculos algebraicos. En aras de ahorrarme estos cálculos implementé un programa para calcular los términos (detallado en el apéndice B). El resultado obtenido haciendo el corte según el criterio del parámetro $1/m$ y el criterio establecido al principio de esta sección obtengo el siguiente hamiltoniano transformado:

$$\begin{aligned} H'' &= \beta m + \varepsilon' + \frac{\beta}{2m}[\vartheta', \varepsilon'] \\ &= \beta m + \varepsilon' + \vartheta'' \end{aligned} \quad (3.31)$$

El objetivo de esto era ilustrar el proceso hasta orden tres en el parámetro, por lo que una tercera transformación es necesaria. Siguiendo el mismo procedimiento se obtiene el siguiente hamiltoniano que, en principio, no contiene términos impares hasta orden dos del parámetro y el otro criterio de corte nos lleva a un hamiltoniano que no contiene términos impares hasta orden menos tres de la masa. Este hamiltoniano es como sigue:

$$H''' = \beta \left(m + \frac{\vartheta^2}{2m} - \frac{\vartheta^4}{8m^3} \right) + \varepsilon - \frac{1}{8m^2}[\vartheta, [\vartheta, \varepsilon]] \quad (3.32)$$

Este nuevo hamiltoniano está listo para ser utilizado con los términos pares e impares que se tengan en un problema dado, que es lo que se hará en el capítulo 4 más adelante. Un enfoque distinto a este procedimiento se presenta en el apéndice B.

Antes de continuar, reescribiré el hamiltoniano de la ecuación (3.32) haciendo uso del campo conservativo \mathbf{E} , que es el campo asociado al potencial V . Para esto, analizo los términos por separado de la ecuación (3.32):

$$\begin{aligned}\frac{\vartheta^2}{2m} &= \frac{(\alpha \cdot \mathbf{p})^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} \\ \frac{\vartheta^4}{8m^3} &= \frac{p^4}{8m^3}\end{aligned}\quad (3.33)$$

Nótese que el operador \mathbf{p} es un operador diferencial, por lo que para poder obtener los resultados correctos utilizaré una función prueba cualquiera que llamaré F . De esta manera, los conmutadores estarán operando sobre la función prueba y los operadores diferenciales generarán términos "extras". Con esto tengo que:

$$\begin{aligned}[\alpha \cdot \mathbf{p}, V]F &= \alpha \cdot \mathbf{p}(VF) - V\alpha \cdot \mathbf{p}F \\ &= (\alpha \cdot \mathbf{p}V)F + V(\alpha \cdot \mathbf{p}F) - V(\alpha \cdot \mathbf{p}F) \\ &= (\alpha \cdot \mathbf{p}V)F\end{aligned}\quad (3.34)$$

Identifico el término $\mathbf{E} = -\nabla V$ y tengo:

$$[\alpha \cdot \mathbf{p}, V] = i\alpha \cdot \mathbf{E}\quad (3.35)$$

Finalmente, tengo que

$$[\alpha \cdot \mathbf{p}, i\alpha \cdot \mathbf{E}]F = i\alpha \cdot \mathbf{p}(\alpha \cdot \mathbf{E}F) - i\alpha \cdot \mathbf{E}\alpha \cdot \mathbf{p}F\quad (3.36)$$

Haré uso de la siguiente relación, que es una generalización de la ecuación (2.13) y que es obtenida en el apéndice A:

$$(\alpha \cdot \mathbf{A})(\alpha \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{2}(\alpha \times \alpha) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})\quad (3.37)$$

Para que el conmutador quede:

$$\frac{1}{8m^2}[\alpha \cdot \mathbf{p}, i\alpha \cdot \mathbf{E}] = \frac{i}{4m^2}\mathbf{s} \cdot \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{2m^2}\mathbf{s} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{p} + \frac{1}{8m^2}\nabla \cdot \mathbf{E}\quad (3.38)$$

Incorporando las ecuaciones (3.33), (3.36) y (3.38) en (3.32) obtengo el hamiltoniano transformado, que es*:

$$H^m = \beta \left(m + \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3} \right) + V - \frac{i}{4m^2}\mathbf{s} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \frac{1}{2m^2}\mathbf{s} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{p} - \frac{1}{8m^2}\nabla \cdot \mathbf{E}\quad (3.39)$$

*Los términos extra en la ecuación (51) de la referencia [6] aparecen por el hecho de que están tratando con un campo eléctrico y su campo magnético asociado. En nuestro caso, el del oscilador armónico, estos términos no existen y los omití desde el principio.

Donde \mathbf{s} es el operador del espín de la partícula definido por

$$\mathbf{s} = -\frac{i}{4}\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\alpha} \quad (3.40)$$

Ahora bien, analizando los términos que están en la ecuación, notamos la presencia del rotacional del campo. Dado que estamos tratando con un campo conservativo (el del oscilador armónico), este término se hace cero. Con esto, la ecuación para el hamiltoniano transformado queda:

$$H''' = \beta \left(m + \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3} \right) + V - \frac{1}{2m^2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{p} - \frac{1}{8m^2} \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (3.41)$$

3.3. Transformación para sistemas de N partículas

El siguiente paso es considerar la transformación FW para un sistema de partículas. La ecuación (2.22) nos dice cómo es el hamiltoniano para dicho sistema. Ahora, si deseamos aplicar una transformación FW con el operador \hat{S}_s tendríamos que aplicar uno por cada partícula, es decir:

$$H' = e^{i\hat{S}_N} e^{i\hat{S}_{N-1}} \dots e^{i\hat{S}_1} \sum_{s=1}^N \left(\boldsymbol{\alpha}_s \cdot \mathbf{p}_s + m_s + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^N V_{s,q} \right) e^{-i\hat{S}_1} e^{-i\hat{S}_2} \dots e^{i\hat{S}_N} \quad (3.42)$$

Ahora bien, dado que los momentos y las posiciones de las diferentes partículas son independientes entre sí (o bien, son medibles simultáneamente) el operador \hat{S}_s conmuta con \hat{H}_q para $s \neq q$, entonces, cada operador actúa solamente sobre su hamiltoniano asociado, por lo que la transformación de la suma de los hamiltonianos de cada partícula se convierte en la suma de las transformaciones de cada partícula, es decir,

$$\hat{H}'_{total} = \hat{H}'_1 + \hat{H}'_2 + \dots + \hat{H}'_N \quad (3.43)$$

Al aplicar transformaciones sucesivas al hamiltoniano como se hizo en la sección (3.2), el resultado sigue siendo el mismo, es decir, se siguen haciendo las transformaciones sucesivas sobre el hamiltoniano asociado a la transformación y el resultado es la suma de los hamiltonianos de cada partícula transformados cuantas veces se desee. Este sencillo resultado será de gran utilidad más adelante.

Nótese que el potencial, en general, depende de todas las coordenadas, así que éste sí se

vería afectado por los términos cruzados que se generan en (3.42), sin embargo, estos efectos serán de un orden mayor al especificado al inicio de este capítulo, por lo que esos términos no son tomados en cuenta y el hamiltoniano transformado queda como la ecuación (3.43).

En la sección (4.2) se discute el problema de dos partículas con un potencial de interacción entre ellas del tipo oscilador armónico. En ese caso, el término $\frac{1}{2} \sum_{q=1}^N V_{s,q}$ se convierte simplemente en V , el potencial de atracción entre las dos partículas. Adelantándome un poco mencionaré que de generarse los términos cruzados con ese potencial, el término de menor orden en el parámetro de energía del campo multiplicado por la energía cinética será del orden de p^4V , lo cual está más allá del orden considerado en este trabajo.

Capítulo 4

Problema de 2 cuerpos

4.1. Oscilador armónico

Consideraré en este capítulo el problema de dos partículas relativistas de masas iguales y espines iguales con un potencial de interacción del tipo oscilador armónico. En el capítulo anterior se obtuvo el hamiltoniano transformado de un sistema de N partículas con un potencial que sólo depende de las posiciones relativas entre las partículas.

La interacción entre dos cuerpos no tiene por qué ser del tipo del oscilador armónico; en general, puede ser cualquier tipo de potencial, como el electrostático o el gravitacional. Para justificar el uso de un oscilador armónico como potencial de interacción considero un potencial cualquiera V que tiene un pozo de potencial alrededor del punto x_0 , que es un mínimo relativo. Tomo el desarrollo en serie de Taylor de este potencial y obtengo lo siguiente:

$$V = V(x_0) + \left. \frac{dV}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots \quad (4.1)$$

El término con la primera derivada del potencial evaluada en x_0 debe ser exactamente igual a cero ya que x_0 es un mínimo de V . Por otro lado, si las oscilaciones alrededor del mínimo son pequeñas, entonces los términos de grado mayor a 2 en $(x - x_0)$ se pueden despreciar y finalmente obtengo que el potencial es de la forma:

$$V \simeq V_0 + C(x - x_0)^2 \quad (4.2)$$

Donde C es igual a la segunda derivada del potencial evaluada en el mínimo y V_0 es el potencial evaluado en el mínimo. Si redefino el cero del potencial (a final de cuentas lo importante y medible es la diferencia de potencial) y pongo x_0 igual a cero (cambio de sistema de coordenadas, pero como ya se vio antes la ecuación de Dirac es covariante ante estos cambios) obtengo que $V \simeq Cx^2$, que es justamente la forma de un potencial

de oscilador armónico.

Es por esto que en la región alrededor del mínimo se puede aproximar cualquier potencial con un pozo con el del oscilador armónico, que es lo que se hará en la siguiente sección.

4.2. Hamiltoniano de un oscilador armónico

Es tiempo de introducir el hecho de que es un sistema de dos partículas. Para esto considero lo siguiente: dado que la ecuación de Dirac es covariante ante cambios de sistema de coordenadas, realmente no importa en cuál sistema de la infinidad posible haga las mediciones, la forma de la ecuación y de los operadores será la misma. Entonces escojo como sistema de referencia aquél en el que el origen está en el centro de masa del sistema. Clásicamente, el movimiento del sistema como un todo, es decir, la traslación del centro de masa, no es de relevancia alguna por lo que la elección de este sistema de referencia no implica pérdida de información valiosa. Relativísticamente, lo que se hace es tomar el centro de momento, que se mantiene invariante ante velocidades relativas entre el sistema de medición y el sistema del experimento. La ventaja de este sistema de referencia sobre cualquier otro reside en que, como las masas de las dos partículas son iguales, el centro de momento se encuentra justo a la mitad de la línea que une a las dos partículas.

Si el sistema coordinado a partir del cual se están haciendo estas mediciones es el centro de momento, se cumple que $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \equiv \mathbf{p}$. Para obtener el hamiltoniano del sistema simplemente sumo dos hamiltonianos como el de la ecuación (3.41), uno para cada partícula y, utilizando todo esto y el hecho de que el campo es la derivada espacial del potencial, $\mathbf{E} = -i\mathbf{p}V$, obtengo que el hamiltoniano del sistema bajo tres transformaciones sucesivas FW es:

$$H' = 2\beta \left(m + \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3} \right) + V - \frac{1}{2m^2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{p} - \frac{1}{4m^2} \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (4.3)$$

Donde $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ y, además, utilicé $\beta_1 = \beta_2$ lo cual, si bien es prácticamente cierto, formalmente no lo es, pues las β s deben ser expresadas en términos de los subespacios vectoriales de cada una de las partículas. Para el propósito de este trabajo, basta con considerarlas iguales y con esto la ecuación (4.3) representa el hamiltoniano para este

sistema en particular.

Hasta ahora lo único que he dicho sobre el potencial es que debe ser debido a un campo conservativo (lo cual está hasta cierto punto implícito ya que sólo los campos conservativos se pueden escribir como el gradiente de un potencial). Es tiempo de hablar del potencial en sí. Como dije al principio de este capítulo, el potencial será el de un oscilador armónico, es decir, $V = \frac{1}{4}\omega^2 mr^2$. La razón para el factor 1/4 será explicada un poco más adelante, en la siguiente sección. Lo siguiente es, básicamente, derivar:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= -\mathbf{E}_2 \equiv \mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{1}{2}m\omega^2 \mathbf{r} \\ \nabla_1^2 V &= \nabla_2^2 V = \frac{3}{2}m\omega^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Con esto se puede obtener el hamiltoniano del sistema, que resulta:

$$H' = 2\beta \left(m + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3} \right) + \frac{1}{4}m\omega^2 r^2 + \frac{\omega^3}{4m} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} + \frac{3\omega^2}{8m} \quad (4.5)$$

El término \mathbf{L} , el momento angular, aparece debido a su definición, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. No hay que olvidar que el hamiltoniano en la ecuación de Dirac actúa siempre sobre un 4-spinor, es decir, un vector columna con cuatro entradas, por lo que cada término del hamiltoniano debe ser una matriz de 4×4 . Ahora bien, el primer término tiene una β a su izquierda que hace evidente esta característica matricial, sin embargo, los demás términos parecen ser simples escalares; no lo son. Cada uno de estos términos está implícitamente acompañado de una matriz unidad de 4×4 , excepto el término $\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$, cuyo carácter matricial ya está explícito. Además, recordando lo dicho en la sección 3.1, sólo estaremos trabajando con las componentes de arriba (o las de abajo) de la ecuación de Dirac y, según la ecuación (2.6), esto implica tomar la matriz unidad de 2×2 , la cual quedará de manera implícita en el hamiltoniano. De desearse trabajar con las componentes inferiores del 4-espinor, sólo habría que tomar la matriz unidad y multiplicarla por menos uno, ya que las componentes inferiores de β son negativas.

4.3. Espectro de energía

Lo siguiente será hacer dos cambios de variable con la finalidad de obtener un término familiar cuyos elementos de matriz son conocidos. Estos cambios de variable son los siguientes:

$$\pi = \sqrt{\frac{2}{m\omega}}\mathbf{p}, \quad \rho = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\mathbf{r} \quad (4.6)$$

Los cambios de variable, si bien alteran las unidades de los operadores (agregando un $1/eV$ a cada término), dejan las matrices de los operadores con la misma forma que los operadores anteriores. Haciendo estos cambios de variable y un poco de álgebra se llega al siguiente hamiltoniano:

$$H' = 2m + \frac{3\omega^2}{8m} + \frac{\omega}{2}(\pi^2 + \rho^2) + \frac{\omega^2}{4m}\mathbf{S} \cdot \mathbf{L} - \frac{\omega^2}{16m}\pi^4 \quad (4.7)$$

Y fue justamente en esa álgebra que el factor $1/4$ en el potencial muestra su utilidad puesto que sin él no se habría llegado a los dos términos en el paréntesis y no es ninguna casualidad que estos términos sean iguales al hamiltoniano de la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico cuyos eigenestados y elementos de matriz son bien conocidos. Éstos son[7]:

$$\frac{1}{2}(\pi^2 + \rho^2)|n, l\rangle = \left(2n + l + \frac{3}{2}\right)|n, l\rangle \quad (4.8)$$

El término $\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$ no es más que el término de acoplamiento espín-órbita. Los elementos para este operador se pueden obtener de la siguiente manera [5, sección 31, pg. 99]: Primero consideramos el siguiente producto escalar:

$$(\mathbf{S} + \mathbf{L})^2 = S^2 + L^2 + 2\mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \quad (4.9)$$

Sabemos que el momento angular total de una partícula es la suma de su momento angular orbital y el espín, es decir, $\mathbf{J} = \mathbf{S} + \mathbf{L}$, entonces el lado izquierdo de la ecuación anterior no es más que el momento angular total al cuadrado. Despejo el último término del lado derecho para obtener la siguiente identidad:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{L} = \frac{1}{2}(J^2 - S^2 - L^2) \quad (4.10)$$

Los operadores del lado derecho tienen eigenvalores[5] conocidos, como cualquier cantidad de "momento angular", que son $j(j+1)$, $s(s+1)$ y $l(l+1)$, respectivamente, por lo que tenemos que se cumple lo siguiente:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}|n, l\rangle = \frac{1}{2}(j(j+1) - s(s+1) - l(l+1))|n, l\rangle \quad (4.11)$$

Los primeros dos términos de la ecuación (4.7) son escalares, por lo que no representan problema alguno, entonces lo último por determinar para poder convertir el hamiltoniano en una matriz numérica es el último término de esta ecuación. Para obtener la contribución de π^4 a dicha matriz, primero hago la siguiente separación introduciendo el desarrollo de la unidad:

$$\langle n'l|\pi^4|nl\rangle = \sum_{n'',l''} \langle n'l|\pi^2|n''l''\rangle \langle n''l''|\pi^2|nl\rangle \quad (4.12)$$

Sin embargo, debido a que el operador π^2 no cambia el momento angular l del estado, de la sumatoria sobre l'' el único término que contribuye es el de $l'' = l$, dejando solamente:

$$\langle n'l|\pi^4|nl\rangle = \sum_{n''} \langle n'l|\pi^2|n''l\rangle \langle n''l|\pi^2|nl\rangle \quad (4.13)$$

Los elementos de matriz del operador π^2 los obtengo como en [4]: a partir del hamiltoniano del oscilador armónico $\mathbf{H}_{os} = \frac{1}{2} (\mathbf{p}^2 + \mathbf{r}^2)$, obtengo:

$$\mathbf{p}^2 = 2\mathbf{H}_{os} - \mathbf{r}^2 \quad (4.14)$$

Los elementos de matriz del hamiltoniano del oscilador armónico son bien conocidos y los del operador \mathbf{r}^2 vienen en el libro antes citado, los cuales se obtienen a partir de las funciones de onda del oscilador armónico resolviendo las integrales pertinentes (apéndice C). Los elementos buscados están dados por

$$\begin{aligned} \langle n'l|\pi^2|nl\rangle &= \sqrt{n(n+l+1/2)}\delta_{n',n-1} \\ &+ (2n+l+3/2)\delta_{n',n} \\ &+ \sqrt{(n+1)(n+l+3/2)}\delta_{n',n+1} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Aquí se hizo uso de la ortogonalidad de los eigenestados del oscilador armónico. Los elementos matriciales del operador π^4 se obtienen mediante la multiplicación de dos cantidades como las de la ecuación (4.15) y son:

$$\begin{aligned} \langle n'l|\pi^4|nl\rangle &= \sqrt{n(n-1)(n+l+1/2)(n+l-1/2)}\delta_{n',n-2} \\ &+ (4n+2l+1)\sqrt{n(n+l+1/2)}\delta_{n',n-1} \\ &+ [(2n+l+3/2)(2n+l+5/2) + 2n(n+l+1/2)]\delta_{n',n} \\ &+ (4n+2l+5)\sqrt{(n+1)(n+l+3/2)}\delta_{n',n+1} \\ &+ \sqrt{(n+1)(n+2)(n+l+3/2)(n+l+5/2)}\delta_{n',n+2} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Con los resultados de las ecuaciones (4.8), (4.10) y (4.16) se obtienen los elementos de matriz del hamiltoniano de la ecuación (4.7) utilizando los eigenestados del oscilador armónico de la ecuación de Schrödinger.

4.4. Método perturbativo

En la sección anterior obtuve los elementos de matriz del hamiltoniano transformado utilizando los eigenestados del oscilador armónico cuántico conocido. A continuación trataré ese hamiltoniano como el hamiltoniano del oscilador armónico con un término de menor orden, el cual consideraré como una perturbación al sistema conocido. En otras palabras, tengo la siguiente ecuación:

$$H' - 2m - \frac{3\omega^2}{8m} = H_{os} + \frac{\omega^2}{4m} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} - \frac{\omega^2}{16m} \pi^4 \equiv H_{os} + K \quad (4.17)$$

La justificación para esto viene de recordar que se están usando unidades tales que $c = \hbar = 1$, entonces el parámetro $\frac{\omega}{m}$ realmente, en unidades no naturales, es $\frac{\hbar\omega}{c^2m}$, que es una cantidad pequeña, entonces, en efecto, el término K es pequeño comparado con los de H_{os} . Ahora aplicaré teoría de perturbaciones hasta segundo orden, ya que este término es de grado 3 en el parámetro $\frac{\omega}{m}$, que hasta ahora ha sido uno de los dos criterios de corte de las series. Los primeros dos órdenes de la corrección a la energía son (ecs. 38.6 y 38.10 de [5, usando diferente notación]):

$$H'_{os}{}^{(1)} = \langle nl|K|nl\rangle, \quad H'_{os}{}^{(2)} = \sum_{n',l'} \frac{|\langle nl|K|n'l'\rangle|^2}{E_{nl} - E_{n'l'}} \quad (4.18)$$

Como en la referencia citada, la comilla en el símbolo de la sumatoria significa que el término $l = l', n = n'$ se omite de la sumatoria.

Al aplicar la K de la ecuación (4.17) obtengo que:

$$H'_{os}{}^{(1)} = \frac{\omega^2}{8m} [j(j+1) - s(s+1) - l(l+1)] - \frac{\omega^2}{16m} \left[\left(2n + l + \frac{3}{2}\right) \left(2n + l + \frac{5}{2}\right) + 2n \left(n + l + \frac{1}{2}\right) \right] \quad (4.19)$$

La corrección a segundo orden presenta un poco más de dificultad. Analizaré esto por partes. Primero que nada, los términos de la ecuación (4.11) tienen un $\delta_{n,n'}\delta_{l,l'}$ por la ortonormalidad de las funciones de onda, por lo que los únicos términos que sobrevivirían

de sumar sobre todos los n' y l' serían cuando $n = n'$ y $l = l'$, pero según la ecuación (4.18) esos términos no están en la sumatoria, por lo que todo el término de $\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$ queda fuera. Con esto, solamente quedan los elementos de π^4 en juego. Ahora bien, como mencioné antes, el operador π^4 , al actuar sobre los estados del oscilador, no altera de ninguna manera el estado del momento angular orbital, por lo que existe una implícita $\delta_{l,l'}$. Esto no es ningún problema siempre y cuando se omita de la sumatoria el término $n = n'$, lo que significa que el tercer renglón de la ecuación (4.16) queda fuera. Los otros cuatro términos (o renglones) son los únicos que sobreviven para conformar la corrección a segundo orden; es decir que la sumatoria que teóricamente es hasta el infinito sobre todas las n' se reduce a cuatro términos (dependiendo del valor de n) que son aquéllos en los que n' difiere de n por ± 2 y ± 1 . Juntando lo recién dicho y las ecuaciones (4.8) y (4.16) obtengo la corrección a segundo orden de la energía:

$$H'_{nl}^{(2)} = \frac{\omega^3}{16m^2} \left(2n + l + \frac{3}{2} \right) \left[9n \left(n + l + \frac{1}{2} \right) + 2 \left(2n + l + \frac{5}{2} \right) \left(2n + l + \frac{11}{4} \right) \right] \quad (4.20)$$

Sumando las correcciones a la energía y pasando las constantes al lado derecho de la ecuación (4.17) obtengo:

$$E'_{nl} = 2m + \frac{3\omega^2}{8m} + \omega \left(2n + l + \frac{3}{2} \right) + \frac{\omega^2}{8m} [j(j+1) - s(s+1) - l(l+1)] - \frac{\omega^2}{16m} \left[\left(2n + l + \frac{5}{2} \right) \left(2n + l + \frac{3}{2} \right) + 2n \left(n + l + \frac{1}{2} \right) \right] - \frac{\omega^3}{16m^2} \left(2n + l + \frac{3}{2} \right) \left[9n \left(n + l + \frac{1}{2} \right) + 2 \left(2n + l + \frac{5}{2} \right) \left(2n + l + \frac{11}{4} \right) \right] \quad (4.21)$$

A partir de esta última ecuación se puede obtener el espectro de energías de un sistema de dos cuerpos con masas iguales y momentos angulares totales \mathbf{S}, \mathbf{L} y \mathbf{J} . Para hacer esto es necesario obtener un valor para el parámetro libre ω . Esto lo haré de la siguiente manera: tomaré los datos experimentales [9] para los valores de las masas de los estados de decaimiento del *bottomium* (sistema conformado por un quark *bottom* y su antipartícula) e igualaré estos datos al espectro de energía de la ecuación (4.21) con los números cuánticos adecuados y con esto podré obtener valores numéricos para ω . Esto se hará en el siguiente capítulo.

Capítulo 5

Aplicación al bottonium y charmonium

5.1. Sistema físico

En este capítulo se aplicará el modelo desarrollado en los capítulos anteriores a un sistema físico bien determinado.

El modelo estándar clasifica las partículas existentes en dos grupos básicos: leptones y quarks que son partículas elementales, y los hadrones que son partículas compuestas, que a su vez están divididos en mesones y bariones. Entre los quarks se encuentran los constituyentes de los sistemas que se estudiarán en este capítulo. Los quarks de tipo *charm* y *bottom* son el tercero y el segundo más pesados, respectivamente, sólo superados por el quark tipo *top*. La interacción entre dos quarks es mayormente del tipo Fuerte, estudiada por la QCD (*Cromodinámica cuántica* por sus siglas en inglés) y cuya forma exacta va más allá de la intención de este desarrollo.

Los hadrones, clasificados en mesones y bariones, son partículas compuestas de dos y tres quarks, respectivamente. Los bariones son los más ampliamente discutidos, pues entre ellos se encuentran los protones y neutrones. Los mesones, por otro lado, incluyen sistemas de dos quarks como el *charmonium* y el *bottonium*, que están compuestos de un quark y su antipartícula.

En este capítulo se aplicará el modelo desarrollado en los capítulos anteriores a los sistemas de dos partículas *bottonium* ($b\bar{b}$) y *charmonium* ($c\bar{c}$). Éstos son sistemas de dos partículas acopladas, que se atraen mutuamente a través de algún potencial cuya forma

exacta es, hasta donde nos concierne, desconocida. El *bottonium* consta de un quark del tipo *bottom* y su antipartícula; el *charmonium* consta de un quark del tipo *charm* y su antipartícula.

Dependiendo de los números cuánticos que el sistema tenga, tendrá un nombre. Así, el sistema $b\bar{b}$ es llamado $\Upsilon(1S)$ cuando sus números cuánticos son $n = 1, l = 0, j = 1$, pero el mismo sistema es llamado $\eta_b(1S)$ si, en lugar de $j = 1$ se tiene que $j = 0$. Los nombres para los diferentes modos de los sistemas $b\bar{b}$ y $c\bar{c}$ se encuentran en [9].

Tanto el *bottonium* como el *charmonium* son conocidos como resonancias. Son sistemas con tiempos de vida muy cortos, mucho más allá de la resolución de los experimentos actuales, por ello solamente se pueden detectar indirectamente. Por si fuera poco, también tienen energías muy altas, lo cual hace difícil su creación en ambientes controlados. Históricamente, el *charmonium*, con masa menor a la del *bottonium*, fue detectado primero. Esto sucedió al colisionar electrones y positrones (experimento liderado por Burton Richter [11]); se encontró que sin importar las partículas detectadas después de la colisión, había un pico en la sección eficaz y este pico estaba siempre alrededor de una energía dada. Estos descubrimientos fueron obtenidos simultáneamente por un grupo a cargo de Sam Ting [10]. La interpretación final a este fenómeno fue la aceptación del pronosticado quark *charm* (ligado a su antipartícula). Detrás de esto se encuentra la manera indirecta de medir las propiedades de la resonancia; el *charmonium* es un estado intermedio en un decaimiento. Cuando interactúan electrones y positrones, éstos forman un estado intermedio, el *charmonium*, el que a su vez decae a los constituyentes últimos que se detectan. La manera más probable de que la reacción deseada ocurra es que los pares electrón-positrón tengan una energía igual a la del *charmonium* y de esta manera se formen las resonancias y es por esto que en la gráfica de Energía vs. Sección eficaz hay un pico.

La figura 5.1 es una gráfica típica de Sección eficaz vs. Energía obtenida a partir de los datos de los experimentos de 1975 y 1976 de Burton Richter y Sam Ting donde se observa una partícula (resonancia) que había sido predicha teóricamente años atrás [12].

Como mencioné antes, los distintos estados o resonancias del *bottonium* están nombrados

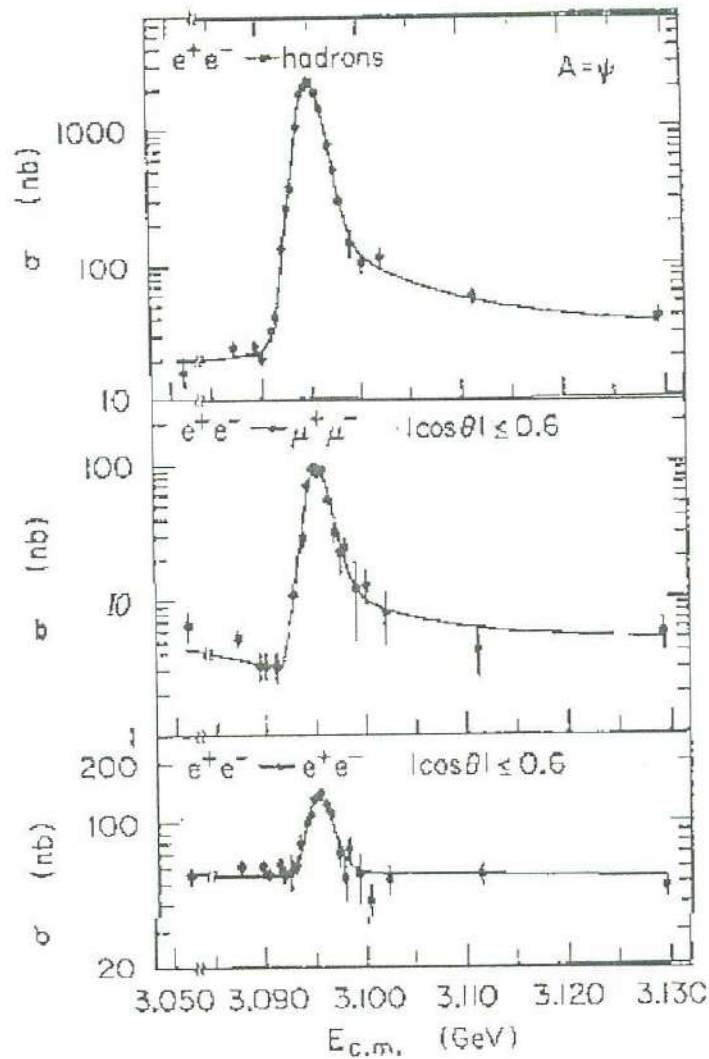
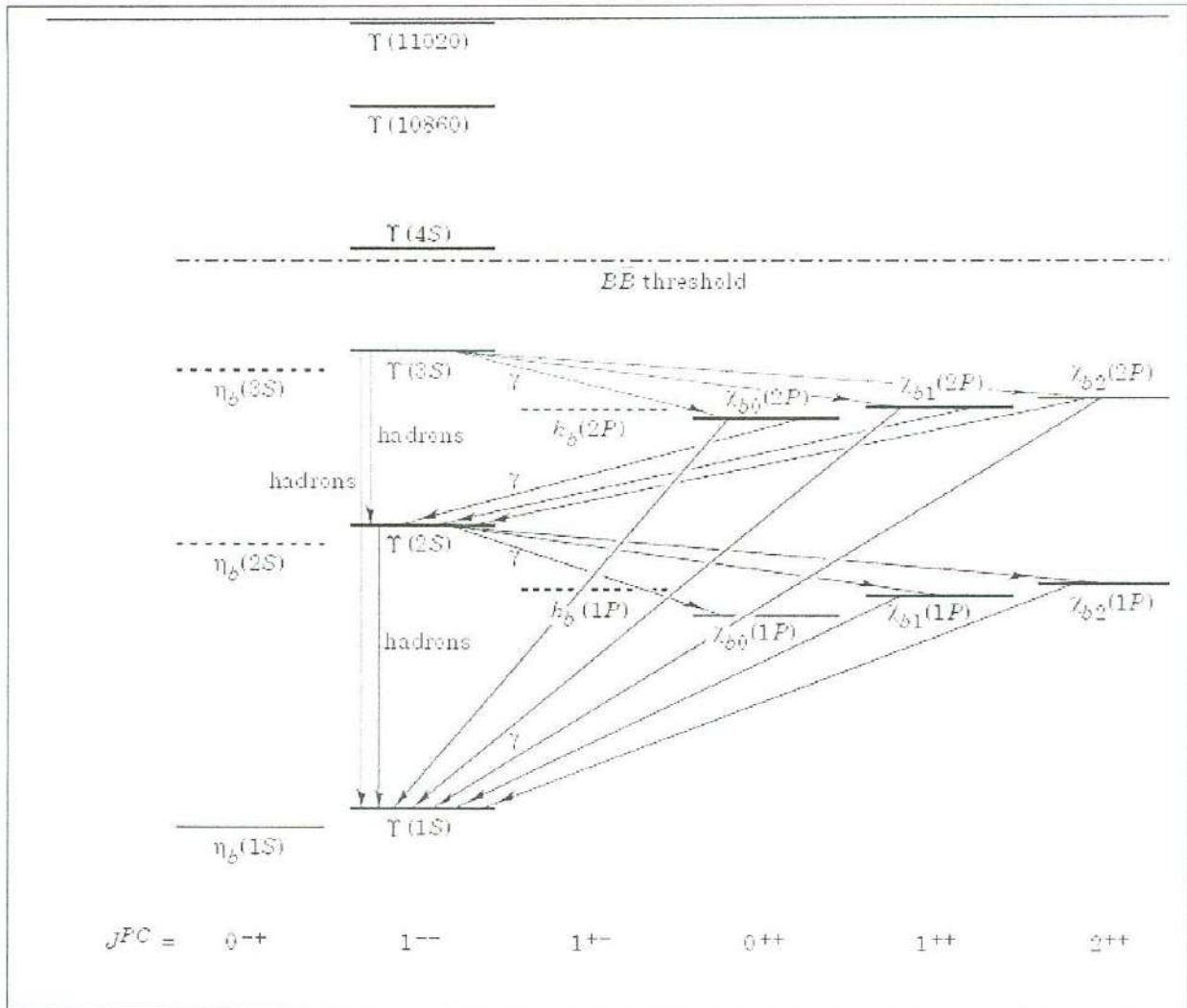


Figura 5.1: Sección eficaz vs. Energía del experimento de Burton Richter. Las tres diferentes gráficas (imágenes originales del artículo publicadas en 1974) corresponden a los tres tipos de estados finales más comunes detectados en el experimento. En cada una de las gráficas se observa el mismo pico a la misma energía, lo cual es un indicador de una resonancia. A esta resonancia le llamaron J/ψ , que es uno de los estados del charmonium.

dependiendo de sus números cuánticos. La figuras 5.1 y 5.1 [9] son esquemas en los que se ubican todos los estados del *bottonium* y el *charmonium*, así como sus números cuánticos. Las flechas entre los diferentes estados señalan un posible decaimiento.

Figura 5.2: Distintos estados del *bottomonium*.

5.2. Predicción del modelo

En el capítulo anterior obtuve una expresión para el espectro de energía para un sistema de dos partículas acopladas con la misma masa y espín paralelo. Establecidas la masa y la energía del sistema, queda el parámetro libre ω . Utilizaré datos experimentales para obtener valores numéricos para ω . Para hacer esto tomaré los estados de decaimiento de algún sistema que satisfaga los criterios de masa y espín y ajustaré la ω para las energías de dicho sistema.

Como se puede observar en la ecuación (4.21), la ecuación que se obtendría dados E y m sería de grado 3 en ω , lo que significa que existen tres soluciones. Hay que recordar

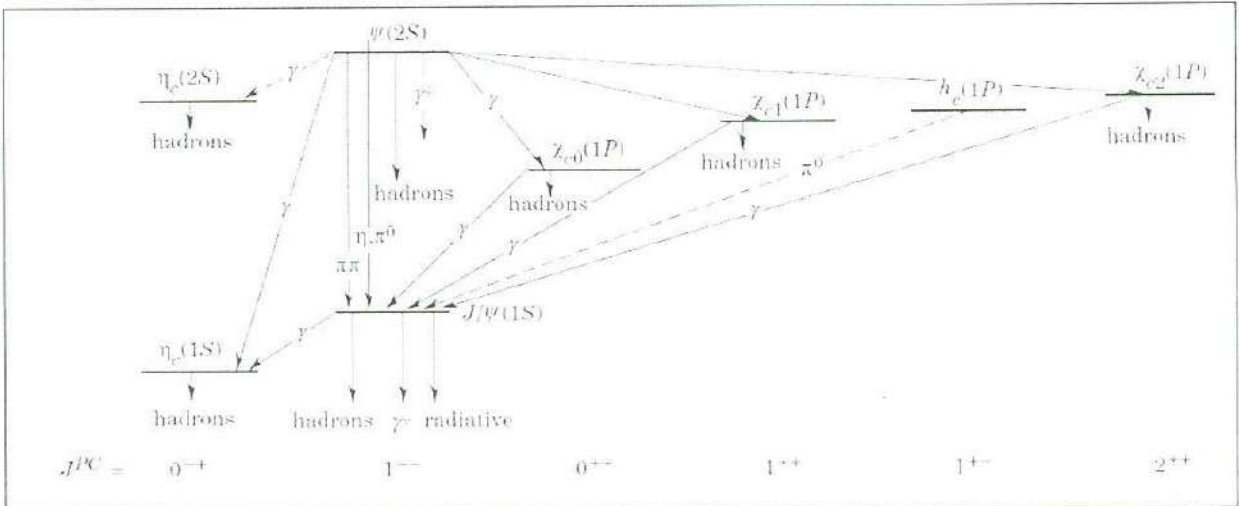


Figura 5.3: Distintos estados del *charmonium*

que ω representa la frecuencia de oscilación del sistema acoplado, por lo que para usar algún valor dado debemos asegurarnos de que respete el significado físico. Por esto, las soluciones válidas son aquellas que son reales y positivas.

5.2.1. Bottonium

La masa del quark *bottom* es de $m = 4.7\text{GeV}$ y haré comparaciones de las energías experimentales con mi espectro de energía teórico. De esta manera encontraré una ecuación cúbica para ω y la resolveré utilizando el software *Mathematica*. Como se verá un poco más adelante, todas las ecuaciones me darán tres tipos de soluciones: una negativa, una cercana a cero y una positiva (alrededor de 1). Obtendré el promedio de todas las negativas, todas las cercanas a cero y todas las positivas y utilizaré esos tres promedios para ver cuál se ajusta mejor a todos los datos experimentales para determinar así cuál de ellos es el mejor y utilizar este valor para otros modos del mismo sistema del *bottonium* para poner a prueba la validez de este modelo. Un ejemplo de estas ecuaciones cúbicas en ω a resolver es la que sigue, que representa a la resonancia $\Upsilon(1S)$, con números cuánticos 1011 (nljs):

$$0 = -0.0603 + \frac{7\omega}{2} - 0.1695\omega^2 - 0.5570\omega^3 \quad (5.1)$$

A continuación presento una tabla con las soluciones a cada ecuación cúbica asociada con los estados Υ , caracterizados por su momento angular total $j = 1$ (todos los datos están en GeV):

Modo	Soluciones a la ecuación Cúbica en ω		
$\Upsilon(1S)$	-2.6715	0.0172	2.3499
$\Upsilon(2S)$	-1.8146	0.1151	1.4436
$\Upsilon(3S)$	-1.3658	0.1313	1.0316
$\Upsilon(4S)$	-1.0936	0.1295	0.7985
Promedio	-1.7363	0.0982	1.4059

La razón para usar los promedios en lugar de cualquiera de los valores es que el ajuste es malo con cualquiera de esos valores, sin embargo, con el segundo promedio, es decir el de $\omega = 0.0982\text{GeV}$ se obtienen valores más precisos para todas las energías. De cualquier manera, a continuación se presentan las energías obtenidas a partir del uso de cada uno de los promedios de ω que son físicamente aceptables; el primer promedio, que es negativo, no es físicamente aceptable ya que ω representa la frecuencia de oscilación que no puede ser negativa. Todos los datos están presentados en GeV.

Modo	Valores de ω			$\delta E \equiv E_{teo} - E_{exp}$	
	0.0982	1.4059	Experimental	0.0982	1.4059
$\Upsilon(1S)$	9.7415	12.4376	9.4603	0.2812	2.9773
$\Upsilon(2S)$	9.9330	10.3472	10.0232	-0.0902	0.3240
$\Upsilon(3S)$	10.1215	3.5309	10.3552	-0.2317	-6.8246
$\Upsilon(4S)$	10.3064	-9.6159	10.5794	-0.2730	

Claramente se ve que el mejor ajuste se logra con $\omega = 0.0982\text{GeV}$ con una desviación máxima de $.2815\text{GeV}$ para el modo $\Upsilon(1S)$, lo cual es una aproximación bastante buena (en [9] se reporta un error experimental global de $\pm 0.00026\text{GeV}$ para dicho estado), especialmente considerando la simplicidad del modelo utilizado.

Ahora, teniendo el valor numérico para $\omega = 0.0982\text{GeV}$ a la mano, lo siguiente es probar este valor con diferentes números cuánticos del sistema $b\bar{b}$. Los resultados de estas pruebas se muestran en la siguiente tabla:

Modo	Modelo	Experimental	δE
$\chi_{b0}(1P)$	9.8373	9.8594	-0.0221
$\chi_{b1}(1P)$	9.8378	9.8927	-0.0546
$\chi_{b2}(1P)$	9.8383	9.9122	-0.0739
$\chi_{b0}(2P)$	10.0274	10.2325	-0.2051
$\chi_{b1}(2P)$	10.0279	10.2554	-0.2275
$\chi_{b2}(2P)$	10.0284	10.2686	-0.2402

Como se puede observar, los resultados de energía obtenidos a partir del valor $\omega = 0.0982\text{GeV}$ resultan ser bastante aproximados a los datos experimentales (en [9] se reporta un error experimental global de $\pm 0.001\text{GeV}$ para dichos estados), lo cual es indicador de que el modelo funciona.

5.2.2. Charmonium

En esta sección se aplicará el mismo procedimiento que en la sección anterior al sistema $c\bar{c}$. La masa del quark tipo *charm* es de $m = 1.108\text{GeV}$. A continuación se muestran los valores obtenidos para ω a partir de los modos $j/\psi(1S)$, $\psi(2S)$, $\eta_c(1S)$ y $\eta_c(2S)$:

Modo	Soluciones a la ecuación Cúbica en ω		
$J/\psi(1S)$	-0.7229	0.3255-0.1247i	0.3255+0.1247i
$\psi(2S)$	-0.5065	0.2231-0.1681i	0.2231+0.1681i
$\eta_c(1S)$	-0.7122	0.3202-0.0665i	0.3202+0.0665i
$\eta_c(2S)$	-0.5041	0.2219-0.1630i	0.2219+0.1630i

Como se puede observar, ninguno de los valores obtenidos a partir de este método son útiles ya que no están de acuerdo con el significado físico de ω . El problema con esto será discutido con más detalle en la siguiente sección, donde se discuten las limitantes del método utilizado.

5.3. Limitantes del método

Este método para obtener el espectro de energías de un sistema de dos partículas presenta ciertas limitantes. Es de esperarse, entonces, que haya ciertos sistemas para los cuales no arroje buenos resultados.

La primera fuente de error que debemos ver es el corte de términos. Como se ha estado mencionando desde capítulos atrás, se aplicaron tres criterios de corte. Uno de ellos es el de la masa; todos los términos de orden mayor a 3 en el parámetro $1/m$ fueron cortados del hamiltoniano después de aplicar la primera transformación FW y también con las sucesivas. Este criterio de corte es aplicable siempre y cuando la masa de un cuerpo sea grande. Eso de grande es relativo; depende de lo que se desea medir y de la resolución del experimento utilizado para medirlo.

En este caso en particular, lo que deseamos “medir” es la energía total del sistema. Si tomo como ejemplo el estado $\psi(1S)$ del *bottomium*, entonces la energía es del orden de 9 GeV. La masa del quark tipo *bottom* es de 4.7 GeV, lo que significa que $1/m$ es un parámetro pequeño con respecto a lo que se desea medir. Más aun, el parámetro ω/m , que termina siendo el criterio de corte a final de cuentas, también es pequeño con respecto a la energía que se desea medir.

El problema surge cuando se desea estudiar un sistema como el *charmonium*. La masa del quark tipo *charm* es de 1.108 GeV de tal manera que $1/m \sim 1$, entonces los errores al no considerar los términos de orden mayor son muy grandes.

Para ejemplificar esto consideraré el estado base ($n = 1, j = 1, l = 0, s = 1$) de un sistema de dos partículas de masa m y energía medida experimentalmente E . Como mencioné al principio de este capítulo, el espectro de energía, cuando es comparado con datos experimentales, resulta en una ecuación cúbica en ω . En general, uno puede obtener esta ecuación cúbica que aún dependa de la energía del sistema y de la masa, de tal manera que se termina con una ecuación $g(m, E, \omega) = 0$ que puede ser aplicada a cualquier sistema de masa m y energía E . En el caso del estado base, la ecuación cúbica es como sigue:

$$2m - E + \frac{7\omega}{2} - \frac{51\omega^2}{64m} - \frac{1575\omega^3}{128m^2} = 0 \quad (5.2)$$

Para el caso del *charmonium*, $E = 3.0969\text{GeV}$ y $m = 1.108\text{GeV}$. En la figura 5.3 se presenta la gráfica para el caso del *charmonium*. Alamente se ve que esta ecuación solamente tiene un cero y es en los negativos, por lo que no es de utilidad física. Los otros

dos ceros están en el plano de los complejos, como se demostró en la sección anterior.

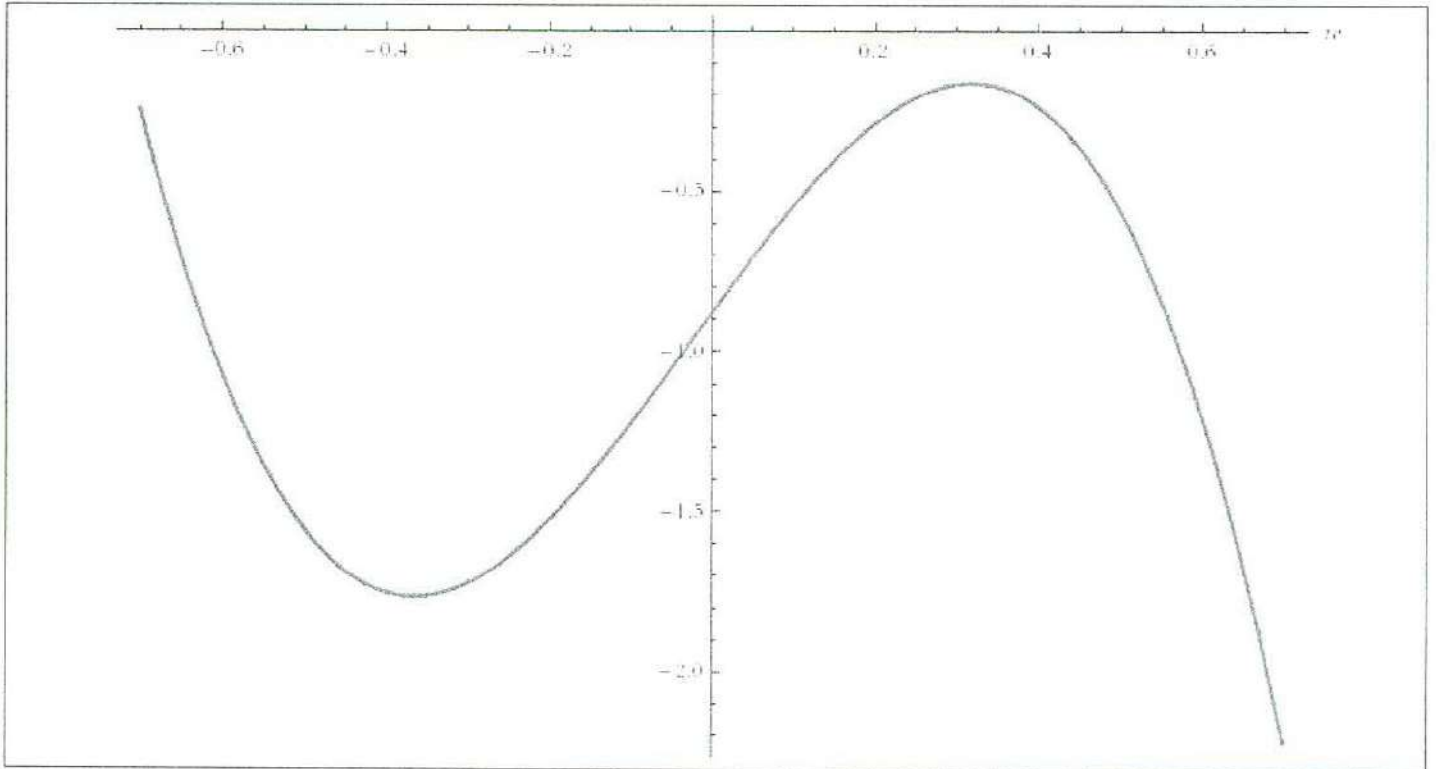


Figura 5.4: Ecuación cúbica para el estado base del charmonium. Los ceros de la gráfica representan los valores de ω para el sistema en cuestión; los ceros que están en valores negativos del eje x no tienen valor físico ya que ω es una frecuencia. Aquellas gráficas que no tienen tres intersecciones con el eje x representan sistemas que no se pueden describir mediante este método. El charmonium, con su masa de $m = 1.108\text{GeV}$ y energía para el estado base de $E = 3.0969\text{GeV}$ tiene una gráfica perteneciente a este grupo; existen tres soluciones: una negativa y dos complejas.

Las figuras 5.3 y 5.3 representan las curvas para las masas del *bottonium* y *charmonium* respectivamente. En el caso del *bottonium* solamente se encontrarán soluciones físicamente adecuadas para la ecuación de ω para energías entre 0 y 12.4455GeV . Si la energía es mayor que eso, la única solución real será negativa. En el caso del *charmonium* el valor límite de energía es 2.9339GeV , a partir del cual no existen soluciones válidas.

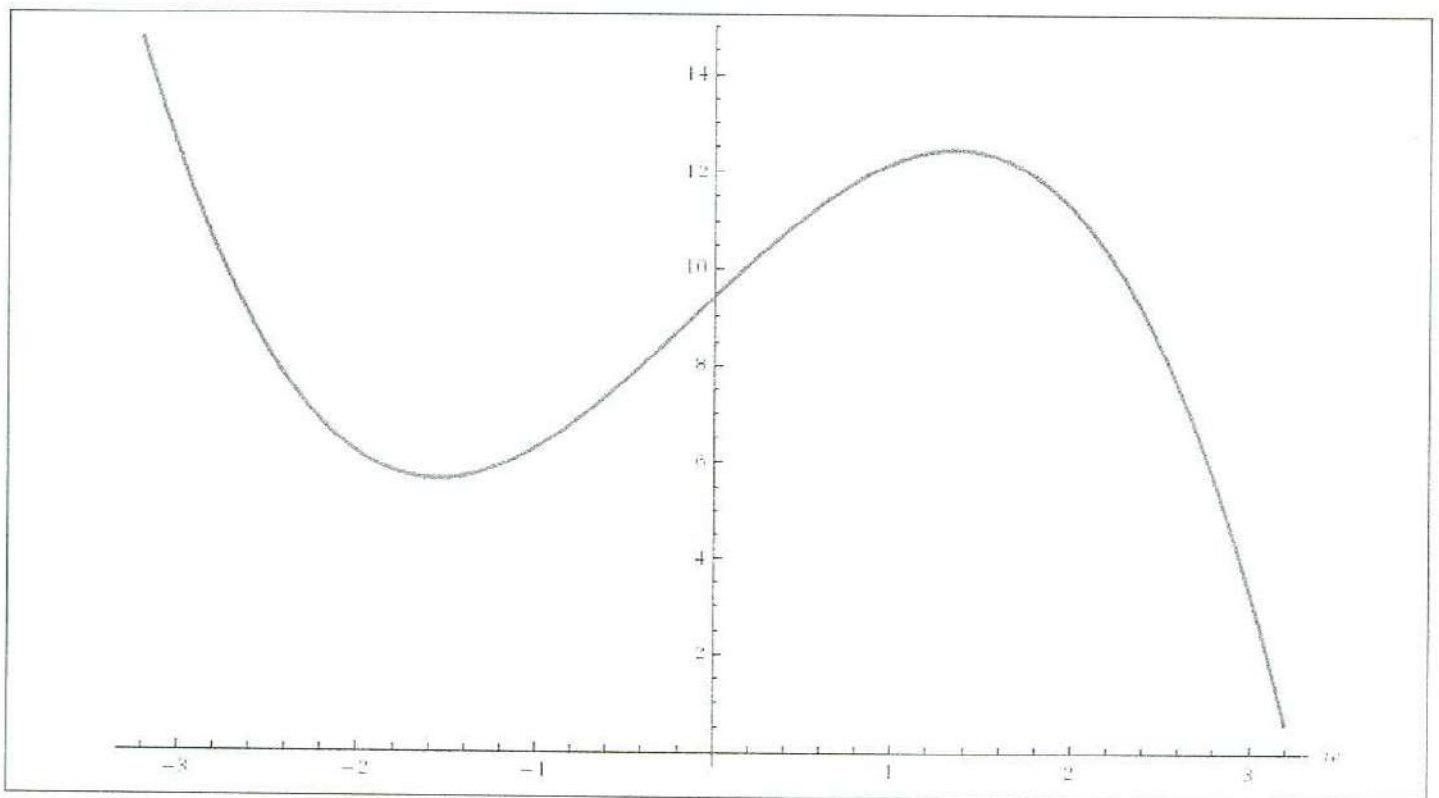


Figura 5.5: Curva perteneciente a la ecuación cúbica asociada a la resonancia $\psi(1S)$ del bottonium), pero con la energía E igual a cero. De esta manera se ve que el punto máximo de la curva es igual a 12.4455, el cual es la cota máxima para la energía del sistema a describir. El bottonium tiene energías menores a ese valor, por lo que este método siempre arroja resultados aceptables.

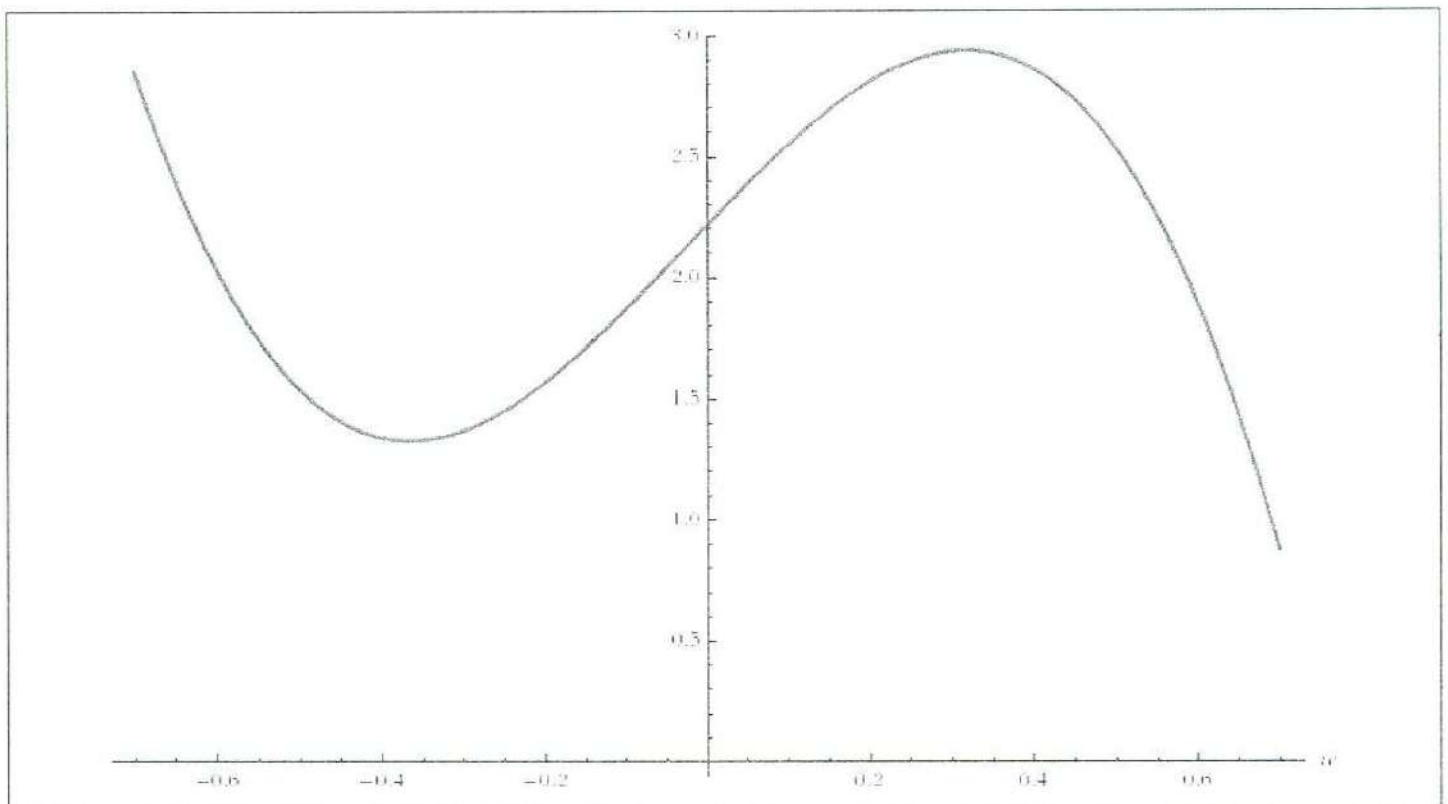


Figura 5.6: Curva perteneciente a la ecuación cúbica asociada a la resonancia $J/\psi(1S)$ del charmonium, pero con la energía E igual a cero. De esta manera se ve que el punto máximo de la curva es igual a 2.9339, el cual es la cota máxima para la energía del sistema a describir. El charmonium tiene energías que son mayores a este valor, incluso en el estado base, por lo que este método no sirve para describir este sistema.

| Conclusiones

Durante el último capítulo se puso a prueba el método que se desarrolló primordialmente en el capítulo 4. Los resultados obtenidos a partir del ajuste en el caso del *bottomium* fueron bastante satisfactorios, obteniendo errores que, si bien son algunos órdenes de magnitud mayores que el error experimental, pueden ser de utilidad como un modelo semi-cuantitativo para la predicción de nuevas resonancias de un sistema del tipo quarkonium.

El método presentó sus limitantes, discutidas ampliamente en el último capítulo y que están relacionadas mayormente con el hecho de que se está tomando un número finito de términos en una serie que se extiende hasta el infinito. Las limitaciones son muy claras y se deben específicamente a dos factores: la energía de la resonancia en cuestión y la masa del sistema que se está tratando. De cumplirse ciertos requisitos sobre estas dos cantidades, el modelo presenta resultados físicamente aceptables y, al menos en el caso del *bottomium*, aceptablemente precisos. De no cumplirse esos requisitos, los valores que se obtienen para el parámetro libre de interacción carecen del significado físico que se le ha dado desde un principio, por lo que son inaceptables. Claramente el sistema *bottomium*, en todas sus resonancias, cumple con los requisitos y el *charmonium* no, por lo que el modelo sólo pudo ser aplicado satisfactoriamente al *bottomium*.

El modelo desarrollado hasta antes del capítulo 4 puede, en principio, ser aplicado a cualquier tipo de sistema que se desee, en particular dada la implementación del programa para obtener el número de términos deseado en la expansión del hamiltoniano en potencias de $1/m$, pero el tratamiento matemático requerido para la obtención de los eigenvalores del hamiltoniano resultante va más allá de la intención de este trabajo. El modelo, sin embargo, está ya desarrollado y con eficacia probada en ciertos casos.

Apéndice A

*Identidad vectorial para el
producto $(\alpha \cdot \mathbf{A})(\alpha \cdot \mathbf{B})$*

En este apéndice se muestra que

$$(\alpha \cdot \mathbf{A})(\alpha \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{2}(\alpha \times \alpha) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}). \quad (\text{A.1})$$

Para mostrar que esta identidad [3] se cumple, utilizaré las matrices de Pauli σ , que se relacionan con las matrices α en (2.5). Estas matrices satisfacen la siguiente relación:

$$\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j = i\epsilon_{ijk} \hat{\sigma}_k + \delta_{ij} \quad (\text{A.2})$$

Nótese que al sumar la ecuación anterior con una de la misma forma pero con los índices i y j intercambiados se llega a las relaciones de conmutación conocidas para las matrices de Pauli y que también son satisfechas por las matrices α en (2.3).

Dado lo anterior, comenzaré por reescribir el siguiente producto:

$$(\sigma \cdot \mathbf{A})(\sigma \cdot \mathbf{B}) = \delta_{ij} \hat{\sigma}_i A_j \delta_{mn} \hat{\sigma}_m B_n = \delta_{ij} \delta_{mn} \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_m A_j B_n \quad (\text{A.3})$$

Esta última igualdad se cumple si los operadores \mathbf{A} y \mathbf{B} , o más bien, sus componentes, conmutan con las componentes de σ . Substituyendo (A.2) en la ecuación anterior obtengo:

$$(\sigma \cdot \mathbf{A})(\sigma \cdot \mathbf{B}) = \delta_{ij} \delta_{mn} (i\epsilon_{imk} \hat{\sigma}_k + \delta_{im}) A_j B_n \quad (\text{A.4})$$

y al operar las deltas fuera del paréntesis obtengo la siguiente relación

$$(\sigma \cdot \mathbf{A})(\sigma \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\sigma \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}). \quad (\text{A.5})$$

Esta expresión es prácticamente (A.1), salvo que necesitamos escribirla en términos de las matrices α . Para ello, tenemos que analizar el lado izquierdo y el segundo término del lado derecho de (A.5). Considerando que de la relación entre las σ y las α dada por (2.5) podemos ver que

$$\hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j = \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j \mathbf{1}, \quad (\text{A.6})$$

entonces el producto $(\alpha \cdot \mathbf{A})(\alpha \cdot \mathbf{B})$ sustituye a $(\sigma \cdot \mathbf{A})(\sigma \cdot \mathbf{B})$ en un espacio más grande indicado por la matriz unidad.

Por otro lado, podemos ver que:

$$(\alpha \times \alpha)_k = \epsilon_{ijk} \hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j, \quad (\text{A.7})$$

donde podemos usar (A.2) y (A.6) para tener

$$\begin{aligned} (\alpha \times \alpha)_k &= \epsilon_{ijk} \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j \mathbf{1} \\ &= \epsilon_{ijk} (i\epsilon_{ijq} \hat{\sigma}_q + \delta_{ij}) \mathbf{1} \\ &= 2i\sigma_k \mathbf{1}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

donde se utilizó la identidad:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{imq} = \delta_{jm} \delta_{kq} - \delta_{jq} \delta_{mk} \quad (\text{A.9})$$

Con esto, podemos ver que la identidad (A.5) puede ser escrita como (A.1), que es la utilizada en el capítulo 3. Por otro lado, cuando A y B son el mismo vector su producto cruz es igual a cero y se recupera la identidad de la ecuación (2.13).

Apéndice B

Programa de manipulación algebraica

Utilizaré un programa computacional para obtener el resultado de la ecuación (3.32) de la sección 3.2. Usaré FORM [8], un lenguaje de programación desarrollado para su implementación en Física de Partículas pero cuyas operaciones simbólicas son de gran utilidad en esta sección. El compilador para este lenguaje al igual que un manual para su uso se pueden encontrar en [8].

Desarrollé un programa que genera todos los términos de la multiplicación (3.24) hasta el término deseado en la expansión. Este programa se incluye más adelante.

Utilizando este programa obtengo todos los términos de la sumatoria. A continuación presento estos términos hasta orden 3 en el parámetro $1/m$; pese a que el programa genera términos de mayor orden, éstos no son correctos debido a la manera en la que el programa fue hecho. Si se hace el programa para generar los términos hasta orden n en el parámetro $1/m$, para que éstos sean correctos el programa genera algunos términos de orden $n + 1$ que, al ser multiplicados por el término βm del hamiltoniano sin transformar terminan sumándose a los términos de orden n . El problema es que al multiplicar estos términos de orden $n + 1$ por el término $\alpha \cdot \mathbf{p} + V$ al final quedan algunos términos de orden $n + 1$, pero para que el coeficiente de $1/m^{n+1}$ quede completo, hay que considerar los términos de orden $n + 2$, y así sucesivamente.

Los términos generados después de la aplicación de una transformación FW, equivalentes

en principio a la ecuación (3.27), son:

$$\begin{aligned}
H1 &= g(-3) * (1/48 * b * V * J * U - 1/16 * b * J * V * U \\
&- 1/48 * b * J * U * V + 1/16 * b * U * V * J - 1/8 * b * U * U) \\
&+ g(-2) * (-1/8 * V * U + 1/4 * J * V * J - 1/3 * J * U - 1/8 * U * V) \\
&+ g(-1) * (-1/2 * b * V * J + 1/2 * b * J * V + 1/2 * b * U) \\
&+ g(0) * (-J) \\
&+ g(1) * (b) \\
&+ V + J;
\end{aligned} \tag{B.1}$$

En este programa, la función $g(n)$ representa a la masa y la potencia a la cual está elevada, $g(n) = m^n$. $E1$ representa E' , $U = p^2$, $J = \alpha \cdot \mathbf{p}$ y $b = \beta$. De esta manera se puede observar que este resultado es el mismo que el que se obtiene a mano, en la ecuación (3.27), más los términos que en esa ecuación fueron omitidos por los parámetros de corte.

La ventaja de este programa es que se pueden obtener los términos hasta el orden deseado en el parámetro $1/m$ para obtener mayor precisión en los resultados o para la implementación en sistemas de masas más pequeñas. Además, de ser necesario, se pueden realizar más transformaciones FW hasta eliminar todos los términos impares del hamiltoniano hasta el orden deseado en el parámetro de masa.

A continuación presento el programa en lenguaje FORM:

```

Function A,B,C,V,J,b,r;
CFunction g;
Vector a,p;
Symbol t,n,m,i,w;

Off statistics;

Local S = sum_(i,0,4,(1/fac_(i))*((b/2)*g(-1)*J)^i);
Local S1 = sum_(i,0,2,(1/fac_(i))*(1/2*b*g(-1)*(b/2*g(-1)*
*(J*V-V*J)-J*p^2/3*g(-2)))^i);

```

```

Local S2 = sum_(i,0,1,(1/fac_(i))*((g(-4)*(-1/8*V*V*J*p*p
+ 1/8*V*J*V*p*p + 1/6*J*p*p*p*p - 1/8*J*V* V*p*p
+1/8*J*V*J*V*J) + g(-3)*(5/12*b*V*J*p*p - 5/12*b*J*V*p*p )
+g(-2)*(1/4*V*V*J - 1/2*V*J*V + 1/4*J*V*V)))^i);

Local [-S] = sum_(i,0,4,(1/fac_(i))*((-b/2)*g(-1)*J)^i);
Local [-S1] = sum_(i,0,2,(1/fac_(i))*(-1/2*b*g(-1)*
*(b/2*g(-1)*(J*V-V*J)-J*p^2/3*g(-2)))^i);
Local [-S2] = sum_(i,0,1,(1/fac_(i))*((-g(-4)*(-1/8*V*V*J*p*p
+ 1/8*V*J*V*p*p + 1/6*J*p*p*p*p - 1/8*J*V* V*p*p
+ 1/8*J*V*J*V*J) + g(-3)*(5/12*b*V*J*p*p - 5/12*b*J*V*p*p )
+g(-2)*(1/4*V*V*J - 1/2*V*J*V + 1/4*J*V*V)))^i);

Global H = J+b*g(1)+V;

*****

Global H1 = S*H*[-S];

repeat;
id g(n?)*g(m?) = g(n+m);
endrepeat;

id g(t?!{1,-1,-2,-3,-4,-5,0}) = 0;

repeat;
id J^2 = U;
id U*J = J*U;
id b^2 = 1;
id U*b = b*U;

```

```

id J*b = -b*J;
id V*b = b*V;
endrepeat;

Bracket g;
Print H1;
Print S;
.sort
*****
Global H2 = S1*H1*[-S1];
repeat;
id g(n?)*g(m?) = g(n+m);
endrepeat;

id g(t?!{1,-1,-2,-3,-4,-5,0}) = 0;

repeat;
id J^2 = U;
id U*J = J*U;
id b^2 = 1;
id U*b = b*U;
id J*b = -b*J;
id V*b = b*V;
endrepeat;

Bracket g;
Print H2;
.sort
*****
Global H3 = S2*H2*[-S2];

```

```

repeat;
id g(n?)*g(m?) = g(n+m);
endrepeat;

id g(t?!{1,-1,-2,-3,-4,-5,0}) = 0;

repeat;
id J^2 = U;
id U*J = J*U;
id b^2 = 1;
id U*b = b*U;
id J*b = -b*J;
id V*b = b*V;
endrepeat;

Bracket g;
Print H3;
.sort

```

Una breve explicación de los términos del programa: J representa $\alpha \cdot \mathbf{p}$, b representa β , V es el potencial, $U = p^2$; la razón para esto último es que, al definir p como vector, p^2 es un escalar y el programa supone que lo puede conmutar con cualquier cosa, lo que resulta en términos incorrectos. Los demás son sólo cambios para facilitar la escritura del programa. La función $g(n)$ representa a la masa, tal que $g(n) = m^n$, y esto lo hice para al final de cada proceso poder utilizar el comando *Bracket g*, lo cual me permite obtener un resultado en pantalla más sencillo de leer.

Una vez aclarada la notación, sigue explicar los pasos del programa. Lo primero que hago es declarar los vectores S , que representan, quizá un poco confusamente, al operador $e^{i\hat{S}}$, según la notación de este trabajo. Las distintas S representan los distintos pasos de la transformación, de tal manera que $S2$ representa la tercera transformación. En lugar

de escribir todo en términos de exponenciales, lo cual no es muy útil en este proceso, lo escribo en términos de su desarrollo en serie de Taylor y corto la serie hasta el término mayor que sea necesario para obtener el orden adecuado en el parámetro $1/m$. De querer obtener hasta el término cúbico en el parámetro, debo incluir los términos de la sumatoria que afecten a este orden, por lo que sólo conservo términos de orden 4 o menor.

Las distintas S están definidas al principio del programa, aunque en realidad $S1$ la obtuve del resultado de la primera transformación y así sucesivamente. Los comandos *id* dentro de la iteración *repeat/endrepeat* son las relaciones de conmutación entre los distintos términos de los hamiltonianos, así como cambios de notación para facilitar la lectura al final.

Finalmente, en cada transformación voy obteniendo un nuevo hamiltoniano, lo agrupo en órdenes del parámetro $1/m$ y lo mando a imprimir.

Apéndice C

Elementos de matriz de r^2

Los elementos de matriz en la ecuación (4.15) se obtienen utilizando la forma explícita de la parte radial de la función de onda del oscilador armónico tridimensional [4], dada por:

$$R_{nl} = A_{nl} r^l e^{-\frac{1}{2}r^2} L_n^{l+\frac{1}{2}}(r^2) \quad (\text{C.1})$$

Donde A_{nl} es la constante de normalización dada por [4]:

$$A_{nl} = \left[\frac{2n!}{\Gamma(n+l+3/2)} \right]^{1/2} \quad (\text{C.2})$$

Ahora, para la obtención de los elementos de matriz del operador π^2 , necesitamos los de r^2 :

$$\langle n' | r^2 | n \rangle = \int_0^\infty r^2 A_{nl} A_{n'l} r^{2l} e^{-r^2} L_n^{l+\frac{1}{2}}(r^2) L_{n'}^{l+\frac{1}{2}}(r^2) r^2 dr \quad (\text{C.3})$$

Agrupo las potencias de r y saco las constantes de la integral. Luego, hago un cambio de variable tal que $x = r^2$ y finalmente obtengo:

$$\langle n' | r^2 | n \rangle = A_{nl} A_{n'l} \frac{1}{2} \int_0^\infty x^{l+\frac{3}{2}} e^{-x} L_n^{l+\frac{1}{2}}(x) L_{n'}^{l+\frac{1}{2}}(x) dx \quad (\text{C.4})$$

Para continuar, haré uso de la siguiente relación de recurrencia [13]:

$$x L_n^\alpha = (\alpha + 2n + 1) L_n^\alpha - (\alpha + n) L_{n-1}^\alpha - (n + 1) L_{n+1}^\alpha \quad (\text{C.5})$$

Aplicándola, termino con la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \langle n' | r^2 | n \rangle &= A_{nl} A_{n'l} \frac{1}{2} \int_0^\infty x^{l+\frac{1}{2}} e^{-x} \left[(l + \frac{3}{2} + 2n) L_n^{l+\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. - (l + \frac{1}{2} + n) L_{n-1}^{l+\frac{1}{2}} - (n + 1) L_{n+1}^{l+\frac{1}{2}} \right] L_{n'}^{l+\frac{1}{2}}(x) dx \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

La constante de ortonormalidad de los polinomios de Laguerre está dada por [13]:

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) dx = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n!} \delta_{nm} \quad (\text{C.7})$$

Por otro lado, las constantes de normalización A_{nl} toman, para distintos valores de n , las siguientes formas:

$$\begin{aligned} A_{n,l} &= \left[\frac{2n!}{\Gamma(n+l+3/2)} \right]^{1/2} \\ A_{n-1,l} &= \left[\frac{2(n-1)!}{\Gamma(n+l+1/2)} \right]^{1/2} \\ A_{n+1,l} &= \left[\frac{2(n+1)!}{\Gamma(n+l+5/2)} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Aplicando esto sobre la integral que tenemos, se obtienen los elementos de matriz del operador r^2 , que son:

$$\begin{aligned} \langle n'l|r^2|nl\rangle &= -\sqrt{n(n+l+1/2)}\delta_{n',n-1} \\ &\quad + (2n+l+3/2)\delta_{n',n} \\ &\quad - \sqrt{(n+1)(n+l+3/2)}\delta_{n',n+1} \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Finalmente, de la ecuación (4.14) obtengo los elementos de matriz del operador p^2 y con éstos los del operador π^2 y π^4 , estos últimos dados por la ecuación (4.16).

Bibliografía

- [1] M. Moshinski. *The many body problem in relativistic quantum mechanics*. Revista Mexicana de Física, Vol. 50, No. 2, pp. 66 - 73, 2005.
- [2] W. Greiner. *Relativistic Quantum Mechanics - Wave Equations*. 2a edición. Editorial Springer. 2000.
- [3] W. Greiner. *Quantum Mechanics - An Introduction*. 4a edición. Editorial Springer. 1994.
- [4] M. Moshinski. *The Harmonic Oscillator in Modern Physics. Contemporary Concepts in Physics, Vol. 9*. 1a edición. Harwood Academic Publishers. 1996.
- [5] L. Landau, E. Lifshitz. *Course of Theoretical Physics - Vol 3 Quantum Mechanics - Nonrelativistic Theory*. 3a edición. 1981.
- [6] J.D. Bjorken, S.D. Drell. *Relativistic Quantum Mechanics*. Editorial McGraw-Hill. 1964.
- [7] Philip M. Morse, Herman Feshbach. *Methods of Theoretical Physics, Part II*. Editorial Maple Press Company. 1953.
- [8] FORM. Página del autor: <http://www.nikhef.nl/~form>
- [9] W.-M. Yao et al. Particle Data Group, J. Phys. G 33, 1 (2006) and 2007 partial update for the 2008 edition.
- [10] *Experimental Observation of a Heavy Particle* J.J.J. Aubert et. al. Phys.Rev.Lett.33:1404-1405. 1974.

PS. T1368

BIBLIOGRAFÍA

52

- [11] *Discovery of a Narrow Resonance in e^+e^- Annihilation*. J.E. Augustin et al. *Phys.Rev.Lett.*33:1406-1408. 1974.
- [12] <http://backreaction.blogspot.com/2008/12/jpsi-resonance.html>
- [13] A. Jáuregui, A. Uribe. *Funciones Especiales*. 1a edición. Editorial Universitaria, UNISON. 2007.