"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Licenciado en Matemáticas

Mapeos de Whitney en Teoría de Hiperespacios de Continuos

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Matemáticas

Presenta:

Gloria Angélica Moreno Durazo

Director de Tesis: M.C. Carlos Alberto Robles Corbalá

Hermosillo, Sonora, México, 19 de Noviembre, 2010.

II

SINODALES

M.C. Carlos Alberto Robles Corbalá
Universidad de Sonora

Dr. Rafael Ramos Figueroa
Universidad de Sonora

M.C. Marysol Navarro Burruel
Universidad de Sonora

Dr. Martha Guzmán Partida
Universidad de Sonora

Dedicatoria

Con mucho cariño a mis padres.

Agradecimientos

Quiero agradecer a muchas personas por haberme ayudado para que este trabajo pudiera realizarse.

Principalmente a mi padre Ramón Moreno y a mi madre Josefina Durazo. Porque con su ejemplo, me han mostrado el camino a seguir. Por impulsarme cada día y estar a mi lado en los tropiezos.

A mis hermanos Ramón y Judas Eduardo. Por cuidarme, aconsejarme y darme momentos de alegría con su compañía. A Karina y Diana por tratarme como una hermana. A mis sobrinos Eduardo, Manuel Armando y Danna Lizeth por alegrarme los días con sus descubrimientos.

A mi profesor M.C. Carlos Alberto Robles Corbalá, por compartir conmigo su tiempo y conocimiento. Y Por ayudarme a concluir este trabajo.

A los miembros del Comité Revisor M.C.Carlos Alberto Robles Corbalá, M.C. Marysol Navarro Burruel, Dr. Rafael Ramos Figueroa, Dr. Martha Guzmán Partida por sus observaciones.

A los profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, por permitirme ser una profesionista y desarrollar mi gusto por la disciplina.

A mis compañeros de licenciatura, por armarse de paciencia y compartir conmigo sus conocimientos. En especial quiero agradecer a Humberto, Manuela, Ramón, Daniela, Arling, Jairo y Tacho por darme su amistad y apoyo.

A mis amigos, porque siempre he aprendido de ellos, me han acompañado y querido desde que recuerdo. En especial a mis amigas Myriam, Isabel, Jocelyn, Karina, Susana, María José y mis amigos Erick, Abraham, Carlos, Jesús y Diego por acompañarme en cada aventura de mi vida.

Índice general

Introducción

El objetivo principal de este trabajo, es presentar las funciones de Whitney dentro de la Teoría de Continuos, probar que dichas funciones existen y, además, dar algunas aplicaciones dentro de esta teoría.

Un espacio topológico es conexo, si no existen subconjuntos abiertos, no vacíos y ajenos, tales que su unión sea todo el espacio. Un espacio topológico es compacto, si para cada cubierta abierta del espacio se tiene una subcubierta finita. Estas definiciones y otros resultados acerca de las propiedades topológicas de conexidad y compacidad se presentan en el capítulo uno.

Como parte del primer capítulo también mencionamos que dos espacios topológicos son equivalentes si podemos definir una función entre ellos que sea continua, biyectiva y que su inversa también sea continua. También damos la definición de espacios normales y, algunas propiedades en los espacios topológicos que impliquen la normalidad del espacio.

Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y no degenerado. En el segundo capítulo mostramos algunos ejemplos de continuos, el más sencillo de todos es el intervalo $[0, 1]$. A parte de dar ejemplos, también vemos la manera de construir continuos nuevos, a partir de los que conocemos. La construcción de nuevos continuos la podemos realizar uniendo continuos, cuya intersección sea no vacía, para que el resultado sea conexo y cuidando que sea compacto. Otro camino para construir continuos es mediante las intersecciones anidadas de continuos.

En este mismo capítulo damos la definición de continuos encadenables, continuos irreducibles y los continuos descomponibles e indescomponibles. Probamos un resultado que caracteriza a los continuos indescomponibles y otro que permite contruirlos.

A cada continuo X, le podemos asociar familias de subconjuntos que cumplen con alguna característica en especial. Esta familia son los llamados hiperespacios del continuo. En el tercer capítulo se da una métrica para los hiperespacios, la llamada métrica de Hausdorff. Después los hiperespacios son espacios métricos y mostraremos que son compactos y conexos. Por lo tanto los hiperespacios también son continuos.

Tenemos que los hiperespacios son familias de subconjuntos con alguna característica especial. Entonces se crean modelos de hiperespacios, es decir, se crea un espacio homeomorfo al hiperespacio, con la condición de que en lugar de familia de subconjuntos sean conjuntos de puntos los elementos con los que se trabaje. Es justo ahí donde radica el beneficio de crear modelos de hiperespacios.

En el capítulo cuatro damos la definición de las funciones de Whitney para el hiperespacio 2^X, que se define como los subconjuntos del continuo X que son cerrados y no vacíos. Mostramos que las funciones de Whitney existen para cualquier continuo X. Y finalmente damos algunas aplicaciones dentro de la Teoría de Continuos.

Esperamos que este material, otorgue al lector una idea de lo que se estudia en la Teoría de Continuos y sea de ayuda en sus inquietudes.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Homeomorfismo

En este capítulo, se mostrarán resultados de topología general que serán de gran utilidad para el desarrollo de capítulos posteriores. Cuando hablemos de un espacio topológico, sólo escribiremos el conjunto al que se hace referencia, pero no podemos olvidar que ese conjunto está dotado de una topología.

Definición 1.1.1 *Sean X, Y espacios topológicos, decimos que $f : X \to Y$ es una función continua, si la imagen inversa de cada abierto de Y, es un abierto de X.*

Ahora bien, si tenemos una función continua entre espacios topológicos, tiene bien definida la función inversa y es continua, entonces podemos decir que dichos espacios son equivalentes en su estructura topólogica.

Definición 1.1.2 *Sean X, Y espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función, decimos que f es un homeomorfismo entre X y Y si f es una función continua, biyectiva y su función inversa también es continua, en tal caso decimos que X y Y son espacios topológicos homeomorfos y esto lo denotamos por $X \cong Y$.*

Los homeomorfismos son una herramienta de gran utilidad cuando estamos trabajando con espacios topológicos. Enseguida, hablamos acerca de espacios conexos y de espacios compactos, pero también se mencionan algunos resultados relacionados con homeomorfismos.

1.2. Conexidad

La conexidad es una característica importante en espacios topólogicos, cuando hablamos de conjunto conexo, intuitivamente es un conjunto que consiste de una sola pieza. Pero esta forma de pensar en conexidad no es confiable para conjuntos complicados, a continuación presentamos la definición de conexidad.

Definición 1.2.1 *Sea X un espacio topológico. Diremos que X es disconexo si existen dos abiertos A y B no vacíos, tales que $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$. Si X no es disconexo entonces X es conexo.*

De esta manera notemos que, si en el espacio topológico X tenemos $Y \subset X$, decimos que Y es conexo si no existen A, B conjuntos abiertos de Y, no vacíos tales que $A \cup B = Y$ y $A \cap B = \emptyset$.

Usando la definición anterior, en el lema que se presenta en seguida damos una caracterización para los conjuntos conexos.

Lema 1.2.1 *Un espacio topológico X es conexo si y sólo si los únicos subconjuntos tanto abiertos como cerrados de X son X y $\emptyset$.*

Demostración.
Mostraremos que, si los únicos subconjuntos abiertos y cerrados a la vez son X y $\emptyset$ entonces X es conexo. Para esto procedamos por contrapuesta.
Supongamos que X no es conexo, entonces existen dos conjuntos A, B abiertos en X no vacíos, tales que $A \cap B = \emptyset$, y $A \cup B = X$. Como $A \cap B = \emptyset$ entonces $A \subseteq X \backslash B$. Y sabemos que

$$X \backslash B = (A \cup B) \backslash B = A \subseteq A,$$

es decir $A \subseteq X \backslash B \subseteq A$, entonces $A = X \backslash B$. Como B es abierto se sigue que A es cerrado, además como $X \backslash A = B \neq \emptyset$ entonces $A \neq X$. Hemos encontrado $A \subseteq X$ abierto y cerrado a la vez, tal que $A \neq \emptyset$ y $A \neq X$.
Ahora queda mostrar que, si X es conexo entonces los únicos abiertos y cerrados a la vez de X son el vacío y el total.
Supongamos que A es un subconjunto de X abierto y cerrado, tal que $A \neq X$ y $A \neq \emptyset$.
Podemos escribir a X como:

$$X = A \cup (X \backslash A)$$

Como A es cerrado tenemos que $X \backslash A$ es un conjunto abierto. Entonces hemos encontrado dos subcojuntos abiertos de X tales que $A \cup (X \backslash A) = X$ y $A \cap (X \backslash A) = \emptyset$. Así X no es conexo.□

En el siguiente lema, se destacan propiedades de la conexidad de un subconjunto de un espacio topológico X.

Lema 1.2.2 *Sea X un espacio topológico, $Y \subset X$ y A, B abiertos disjuntos en X. Si Y es conexo y $Y \subset A \cup B$ entonces $Y \subset A$ o $Y \subset B$.*

Demostración.
Para esta prueba procederemos por contradicción.
Sean A, B abiertos en X, supongamos que $Y \subset A \cup B$, $Y \not\subset A$ y $Y \not\subset B$.
Como A, B son abiertos en X, los conjuntos $Y \cap A$, $Y \cap B$ son abiertos en Y. Así tenemos

$$(Y \cap A) \cap (Y \cap B) = Y \cap (A \cap B) = \emptyset$$

Por otro lado tenemos que $Y \subset A \cup B$, entonces

$$(Y \cap A) \cup (Y \cap B) = Y \cap (A \cup B) = Y.$$

Entonces hemos encontrado dos subconjuntos abiertos disjuntos y su unión es Y. Esto implica que Y no es conexo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $Y \subset A$ o $Y \subset B$.□

Observemos que, como los conjuntos A, B son abiertos disjuntos, el subconjunto $Y \subset X$ debe estar en sólo uno de los abiertos.

Con el teorema que a continuación se presenta, veremos que la unión de conjuntos conexos también es conexo, cuando estos conexos tienen elementos en común.

Teorema 1.2.1 *Supongamos que $\{Y_i\}_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos conexos de un espacio topológico X, tal que $\bigcap_{i \in I} Y_i \neq \emptyset$ entonces $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ es conexo.*

Demostración.
Sean X un espacio topológico y $\{Y_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos conexos de X, sea $p \in \bigcap_{i \in I} Y_i$. Probaremos que $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ es conexo. Para esto procederemos por contradicción.
Supongamos que Y no es conexo, entonces existen A, B abiertos en Y, no vacíos, tales que $A \cup B = Y$ y $A \cap B = \emptyset$. Entonces el punto p está en A o está en B, supongamos $p \in A$.
Entonces para cada $i \in I$, como Y_i es conexo, entonces $Y_i \subset A$ o $Y_i \subset B$.
Tenemos $p \in Y_i$ para cada $i \in I$ y $p \in A$, por lo que $Y_i \not\subset B$. Por lo tanto, $Y_i \subset A$ para cada $i \in I$, así $\bigcup_{i \in I} Y_i \subset A$, lo que contradice el hecho de que B es no vacío.□

El resultado que se presenta en seguida es de gran utilidad. El teorema nos indica cómo son los conjuntos conexos en $\mathbb{R}$. Muestra que si tenemos un subconjunto de $\mathbb{R}$ formado por más de un punto, para que este subconjunto sea conexo debe ser un intervalo.
Recordemos que $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo si y sólo si cumple que para todo $x \in \mathbb{R}$, $x, y \in I$ y $x < z < y \Rightarrow z \in I$.

Teorema 1.2.2 *Un subconjunto $I \subseteq \mathbb{R}$ es conexo si y sólo si es un intervalo.*

Demostración.
Para demostrar que, si un subconjunto $I \subset \mathbb{R}$ es conexo entonces I es un intervalo, procederemos por contrapuesta.
Supongamos que I tiene más de un punto y no es un intervalo, entonces existen $a, b \in I$ y $c \in \mathbb{R}$ tal que $a < c < b$ con $c \notin I$.
Así tenemos los conjuntos

$$(c, \infty) \cap I = \{x \in \mathbb{R} : x > c\} \cap I \text{ y } (-\infty, c) \cap I = \{x \in \mathbb{R} : x < c\} \cap I$$

son abiertos, no vacíos, ajenos, cuya unión es I, por lo tanto I es disconexo.

Sólo nos queda probar que si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo entonces I es conexo.
Supongamos que I es disconexo, entonces existen A, B abiertos en I, no vacíos tales que $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = I$. Sean $a \in A$ y $b \in B$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $a < b$.
Definimos el conjunto.

$$W = \{x \in A : a \leq x \leq b\} \subseteq A,$$

Observemos que $W \neq \emptyset$, ya que al menos $a \in W$. Denotemos α el supremo de W, dicho supremo existe pues W es acotado y además se tiene que $a \leq \alpha \leq b$.
Por hipótesis, I es un intervalo y como $a, b \in I$, tenemos que $\alpha \in I$. Ahora como $A \cup B = I$ entonces $\alpha \in A$ o $\alpha \in B$, pero sólo en uno.
Para el caso que $\alpha \in A$, sabemos que $a \leq \alpha \leq b$, pero si $\alpha \in A$ entonces $\alpha \notin B$, es decir, α no puede ser b. En consecuencia $\alpha < b$, así tenemos que $\alpha \in A \cap (-\infty, b)$. Tenemos que A es un abierto en I y por otro lado $(-\infty, b)$ es un abierto en $\mathbb{R}$, entonces $A \cap (-\infty, b)$ es abierto en I. Existe $r > 0$ tal que

$$(\alpha - r, \alpha + r) \subset A \cap (-\infty, b)$$

En particular $\alpha + r/2 \in A$ y es tal que $\alpha < \alpha + r/2 < b$, como I es un intervalo y $\alpha, b \in I$, se sigue que $\alpha + r/2 \in I$. Así que $\alpha + r/2 \in A$ y es tal

que $a < \alpha < \alpha + r/2 < b$, pero esto contradice el hecho que α es el supremo de W.
Ahora en el caso que $\alpha \in B$, entonces $\alpha \notin A$, es decir α no puede ser igual a a. En consecuencia $a < \alpha$, así tenemos que $\alpha \in B \cap (a, \infty)$. Este conjunto $B \cap (a, \infty)$ es abierto en I, entonces existe $r > 0$ tal que

$$(\alpha - r, \alpha + r) \subset B \cap (a, \infty),$$

En particular $(\alpha - r/2, \alpha) \subseteq B$, y como B es ajeno a $W \subseteq A$ entonces $(\alpha - r/2, \alpha) \cap W \subseteq (\alpha - r/2, \alpha) \cap A = \emptyset$, es decir $\alpha - r/2$ es una cota superior de W menor que α, lo que contradice el hecho de que α es la mínima cota superior, es decir α no es el supremo de W.
Se ha mostrado que si A, B son dos abiertos disjuntos del intervalo I entonces existe $\alpha \in I$ tal que $\alpha \notin A \cup B$, es decir A y B no cubren a I. Por lo tanto I es conexo.□

La cerradura de U en el espacio Z, la denotamos por $Cl_Z(U)$.
En un espacio topológico X se puede hablar de subconjuntos A, B de X separados. Si A, B cumplen con la siguiente definición.

Definición 1.2.2 *Sea X un espacio topológico. Decimos que los subconjuntos $A, B \subset X$ están separados en X si $Cl_X(A) \cap B = \emptyset$ y $A \cap Cl_X(B) = \emptyset$.*

Notemos que claramente dos subconjuntos cerrados ajenos están separados.

En el resultado que se muestra enseguida, tenemos que si dos subconjuntos de un espacio topológico están separados, se pueden separar por abiertos del espacio.
Recordemos que la distancia del punto x al conjunto $A \neq \emptyset$, que denotamos por $d(x, A)$, se define $d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$.

Lema 1.2.3 *Sea X un espacio topológico metrizable. Si $A, B \subset X$ están separados en X, entonces A y B se pueden separar por abiertos ajenos.*

Demostración.
Sea $f : X \to \mathbb{R}$ como sigue, para cada $x \in X$, $f(x) = d(x, B) - d(x, A)$. Tenemos que f es una función continua.
Pongamos $U = f^{-1}((0, \infty))$ y $V = f^{-1}((-\infty, 0))$. Es claro que U, V son abiertos en X y son ajenos.
Como A, B están separados, si $x \in A$ entonces $x \notin Cl_X(B)$. Tenemos que si $x \in A$, $d(x, A) = 0$ y $d(x, B) > 0$, luego $f(x) > 0$. Entonces $A \subset U$.
Por otro lado, si $x \in B$ entonces $x \notin Cl_X(A)$, así que $x \in B$, $d(x, A) > 0$ y $d(x, B) = 0$, luego $f(x) < 0$. Se tiene que $B \subset V$.□

Lema 1.2.4 *Si U y V son abiertos ajenos en un subespacio Y de un espacio topológico X, entonces U y V están separados en X.*

Demostración.
Como U es abierto en Y se tiene que $Y\backslash U$ es cerrado en Y. Además, dado que U y V son ajenos, $V \subset Y\backslash U$, luego $Cl_Y(V)$ es un subconjunto de $Y\backslash U$, es decir, $Cl_Y(V) \subset Y\backslash U$, así $Cl_Y(V) \cap U = \emptyset$.
Ahora como

$$Cl_X(V) \cap U = (Cl_X(V)) \cap (U \cap Y) = [(Cl_X(V)) \cap Y] \cap U$$

Se sigue que

$$Cl_X(V) \cap U = Cl_Y(V) \cap U, \text{ es decir, } Cl_X(V) \cap U = \emptyset.$$

De manera análoga, obtenemos que $Cl_X(U) \cap V = \emptyset$.
Por lo tanto tenemos que U, V están separados en X.□

Lema 1.2.5 *Sea X espacio topológico, Y, Z subconjuntos de X. Si Y es conexo y $Y \subset Z \subset Cl_X(Y)$ entonces Z es conexo.*

Demostración.
Supongamos que Z no es conexo, entonces existen A, B abiertos en Z tales que $A \cup B = Z$ y $A \cap B = \emptyset$. Como $Y \subset Z$ y Y es conexo sabemos que $Y \subset A$ o $Y \subset B$, digamos que $Y \subset A$. Por el lema anterior tenemos que $Cl_X(A) \cap B = \emptyset$.
Como $Y \subset A$, $Cl_X(Y) \subset Cl_X(A)$ de donde $Z \cap B = \emptyset$, lo que es una contradicción. Por lo tanto Z es conexo.□

Del resultado anterior se deriva que, la cerradura de un conjunto conexo es conexa.

Un resultado de conexidad en relación con subconjuntos separados, es el que se presenta en seguida.

Lema 1.2.6 *Si A y B son conexos en X y $Cl_X(A) \cap B \neq \emptyset$ o $A \cap Cl_X(B) \neq \emptyset$, entonces $A \cup B$ es conexo.*

Demostración.
Supongamos que $A \cup B$ no es conexo, entonces existen U, V abiertos en $A \cup B$ no vacíos, tales que $A \cup B = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$. Como U, V son abiertos tenemos que U, V están separados en X.

Por otro lado tenemos que A, B son conexos, sin péridida de generalidad, podemos suponemos $A \subset U$ y $B \subset V$. De donde tenemos que $Cl_X(A) \cap B \subset Cl_X(U) \cap V$ lo que contradice que $Cl_X(U) \cap V = \emptyset$, pues U, V son separados. Por lo tanto $A \cup B$ es conexo.□

Una propiedad interesante de los conjuntos conexos, es el hecho de que la conexidad se preserva bajo funciones continuas, lo que se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema 1.2.3 *Sean X, Y espacios topológicos. Si $f : X \to Y$ es una función continua, suprayectiva y X es conexo entonces Y es conexo.*

Demostración.
Supongamos que Y no es conexo, entonces existen A, B abiertos ajenos de Y tales que $A \cup B = Y$. Como f es una función continua, tenemos que tanto $f^{-1}(A)$ como $f^{-1}(B)$ son abiertos de X, además

$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

Por otro lado tenemos que $A \cap B = \emptyset$ se tiene que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$, hemos encontrado abiertos, ajenos, cuya unión es X. De donde X no es conexo, que es una contradicción. Por lo tanto Y es conexo.□

Con el teorema anterior, encontramos que la propiedad de conexidad se preserva bajo homeomorfismos. Una consecuencia importante de este hecho es que si tenemos un espacio que es conexo y otro disconexo, con una función continua y suprayectiva que va de un espacio a otro, entonces dichos espacios no son homeomorfos.

En seguida, se presentan la definición de conexidad por trayectoria, para mostrar después la relación que existe entre un espacio conexo y uno que es conexo por trayectoria.

Definición 1.2.3 *Sea X un espacio topológico y $x, y \in X$. Una trayetoria de x a y es una función continua $f : [0, 1] \to X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. Si todo par de puntos de X pueden ser unidos por una trayectoria entonces X es conexo por trayectoria.*

Teorema 1.2.4 *Todo espacio topológico conexo por trayectoria es conexo.*

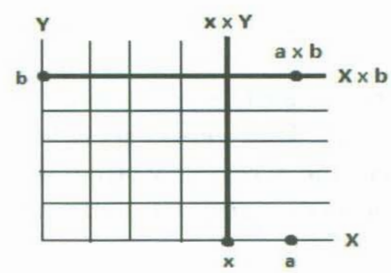
Demostración.
Para mostrar este resultado, procederemos por contradicción. Sea X un espacio topológico conexo por trayectoria y supongamos que X no es conexo,

entonces existe un subconjunto A de X abierto y cerrado a la vez, tal que $A \neq \emptyset$ y $A \neq X$, de esto tenemos que existe $a \in A$ y $b \in X \backslash A$. Por ser X conexo por trayectoria existe una trayectoria γ en X que une a a con b, es decir existe, $\gamma : [0,1] \to X$ tal que $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$. Por ser γ continua se tiene que $\gamma^{-1}(A)$ es un subconjunto abierto y cerrado a la vez en $[0,1]$, además $\gamma^{-1}(A) \neq \emptyset$ y $\gamma^{-1}(A) \neq [0,1]$, pues $a \in A$ y $b \in X \backslash A$.
Lo que contradice el hecho que el $[0,1]$ es conexo, por lo tanto X es conexo.□

En el siguiente resultado se muestra que si se tienen dos espacios topológicos conexos, entonces el espacio producto es conexo.

Teorema 1.2.5 *El producto cartesiano finito de espacios conexos es conexo.*

Demostración.
Demostraremos que el producto de X, Y espacios conexos es conexo. Elijamos un punto (a, b) en el producto $X \times Y$. Observemos que la rebanada horizontal $X \times b$ es conexa, ya que es homeomorfa a X, y que también lo es cada rebanada vertical ya que éstas son homeomorfas a Y.



Como consecuencia, cada espacio

$$T_x = (X \times b) \cup (x \times Y)$$

es conexo, ya que es la unión de dos espacios conexos que tienen el punto (x, b) en común.
Ahora, consideremos $\bigcup_{x \in X} T_x$. Como todos tienen al punto (a, b) en común, esta unión es conexa. Finalmente, al coincidir $\bigcup_{x \in X} T_x$ con $X \times Y$, se concluye que $X \times Y$ es conexo.
La prueba para cualquier colección finita de espacios conexos se realiza por inducción, utilizando el hecho de que $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ es homeomorfo a $(X_1 \times X_2 \times ... \times X_{n-1}) \times X_n$.□

Este resultado lo podemos extender a productos arbitrarios de espacios conexos, teniendo cuidado de la topología que usemos. Esto es:

Teorema 1.2.6 *Producto arbitrario de espacios conexos es conexo en la topología producto.*

La referencia de este resultado, la podemos encontrar en ([1], pág. 171).

1.3. Compacidad

Diremos que una propiedad P de un espacio topológico X, es una propiedad topológica, si para todo espacio topológico Y homeomorfo a X tenemos que Y también posee la propiedad. La conexidad es una propiedad topológica, así como la compacidad que se define a continuación.

Definición 1.3.1 *Decimos que un espacio topológico X es compacto si cada cubierta abierta del espacio posee una subcubierta finita.*

Notemos que si Y subconjunto de un espacio topológico X, Y es compacto, si cada cubierta por abiertos de Y, posee una subcubierta finita.

En el teorema que se presenta en seguida, se muestra cómo son los subconjuntos compactos en $\mathbb{R}$.

Teorema 1.3.1 *Todo intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ es compacto.*

Demostración.
Sean $[a, b]$ un intervalo cerrado y acotado, $U = \{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de $[a, b]$. Consideremos

$$S = \{x \in [a, b] : U \text{ tiene una subcubierta finita para } [a, x]\}$$

Sabemos que al menos, $a \in S$, así que $S \neq \emptyset$. Como S está acotado, entonces tiene un supremo, digamos $\alpha = \text{Sup}S$. Mostraremos que $\alpha \in S$ y $\alpha = b$.
Como $\alpha \in [a, b]$, $\alpha \in U_{im}$ para algún im. U_{im} es abierto, así que existe $x \in S \cap U_{im}$. Como $[a, x]$ tiene una subcubierta finita, entonces agregando U_{im} a dicha subcubierta, obtenemos una subcubierta finita para $[a, \alpha]$. Entonces $\alpha \in S$.
Si $\alpha < b$ entonces existe $\alpha < y \leq b$ tal que $y \in U_{im}$. Agregando U_{im} a la subcubierta abierta para $[a, \alpha]$, obtenemos una subcubierta finita para $[a, y]$ y $y \in S$. Esto contradice $\alpha = \text{Sup}S$, entonces $\alpha = b$.$\square$

Es el teorema de Heine-Borel el que nos permite generalizar este resultado. El teorema dice:

Teorema 1.3.2 (Heine-Borel)

Si Y es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ entonces Y es compacto si y sólo si Y es cerrado y acotado.

El resultado que sigue, muestra que los espacios compactos se preservan bajo funciones continuas.

Teorema 1.3.3 *Sean X, Y espacios topológicos, si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua, suprayectiva y X es compacto, entonces Y es compacto.*

Demostración.
Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de Y. Como f es continua, para cada $i \in I$ $f^{-1}(U_i)$ es abierto en X, entonces la familia $\{f^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ es una cubierta abierta de X.
Como X es compacto, existen $i_1, i_2, ..., i_n \in I$ tales que $X = \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(U_{ik})$, de donde

$$Y = f(X) = f\left(\bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(U_{ik})\right) = \bigcup_{k=1}^{n} f(f^{-1}(U_{ik})) \subset \bigcup_{k=1}^{n}(U_{ik})$$

De aquí tenemos que $\{U_{i1}, U_{i2}, ..., U_{in}\}$ es una subcubierta finita de Y. Por lo tanto Y es compacto.$\square$

Entonces si tenemos un espacio compacto y otro que no es compacto, y existe una función continua y suprayectiva que va de un espacio al otro, entonces estos espacios no son homeomorfos.

Otra manera de caracterizar la compacidad de un espacio y es la que interesa, es por medio de la propiedad de la intersección finita. Primero se enuncia qué significa que un espacio topológico tenga dicha propiedad.

Definición 1.3.2 *Sea X un espacio topológico. Una familia $\{F_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X se dice que tiene la propiedad de intersección finita, si cada subfamilia finita $\{F_1, ..., F_n\}$ de $\{F_i\}_{i\in I}$ tiene intersección no vacía, es decir,*

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \emptyset.$$

Teorema 1.3.4 *Sea X un espacio topológico. Entonces X es compacto si y sólo si, para cada familia $\{F_i\}_{i\in I}$ de conjuntos cerrados en X con la propiedad de intersección finita, la intersección de todos los elementos de la familia es no vacía, es decir,*

$$\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$$

Demostración.
Supongamos que X es compacto y que C es una familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de la intersección finita, cuya intersección es vacía.
Ahora, pongamos $\gamma = \{X \backslash F : F \in C\}$. Como $\bigcup \gamma = \bigcup_{F\in C}(X\backslash F)$, por las leyes de De Morgan se tiene que $\bigcup \gamma = X \backslash \bigcap_{f\in C} F = X \backslash \bigcap C$ así, como $\bigcap C = \emptyset$ se obtiene que $\bigcup \gamma = X\backslash\emptyset = X$, de esto, la familia γ es una cubierta abierta de X.
Como X es compacto, existe un conjunto finito $\{F_1, F_2, ..., F_n\} \subset C$ de tal forma que $(X\backslash F_1) \cup ... \cup (X\backslash F_n) = X\backslash(F_1 \cap ... \cap F_n) = X$. Por lo tanto, $F_1 \cap ... \cap F_n = \emptyset$, lo que contradice el hecho de que C tiene la propiedad de intersección finita.
En el otro sentido, tomemos una cubierta abierta γ de X y denotemos por C a la familia $\{X\backslash U : U \in \gamma\}$. Luego $\bigcap C = X\backslash \bigcup \gamma = \emptyset$. Todos los elementos de C son cerrados, entonces C no tiene la propiedad de intersección finita. Por lo tanto, existen elementos $U_1, U_2, .., U_n \in \gamma$ tales que $(X\backslash U_1)\cap, ..., \cap(X\backslash U_n) = \emptyset$ es decir, se tiene que $X\backslash(U_1 \cup ... \cup U_n) = \emptyset$. De aquí se sigue que $U_1 \cup ... \cup U_n = X$, es decir $\{U_1, ..., U_n\}$ es una subcubierta finita de γ. Por lo tanto X es compacto. □

Sean X un espacio topológico y $Y \subset X$, entonces se tienen los siguientes resultados.

Corolario 1.3.1 *Si X es compacto y Y es un subespacio cerrado de X, entonces Y también es compacto.*

Demostación.
Sea $\{F_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos cerrados de Y con la propiedad de intersección finita. Siendo Y cerrado en X, todos los elementos de $\{F_i\}_{i\in I}$ son cerrados X. Tenemos que X es compacto, entonces $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.□

Antes de presentar el otro resultado, recordemos que un espacio topológico X se llama Hausdorff, si para cualquiera puntos distintos $a, b \in X$ existen abiertos ajenos A, B tales que $a \in A$ y $b \in B$.

Teorema 1.3.5 *Sea X un espacio topológico Hausdorff. Si Y es subespacio compacto de X, entonces Y es cerrado en X.*

Demostración.
Para mostrar que Y es cerrado, veamos que $X \backslash Y$ es abierto.
Sea $x \in X \backslash Y$, como X es Hausdorff entonces para cada $y \in Y$ existen U_y, V_y abiertos en X tales que $x \in U_y$ y $y \in V_y$ con $U_y \cap V_y = \emptyset$.
Tenemos que $\{V_y : y \in Y\}$ es una cubierta abierta de Y, como Y es compacto, existen $y_1, y_2, ..., y_n \in Y$ tales que $Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{yi}$.
Sea $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{yi}$, que es una vecindad del punto x, veamos que $U \subset X \backslash Y$, para eso supongamos que no es cierto.
Sea $z \in Y \cap U$, entonces $z \in V_{yj}$ para algún $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Por otra parte sabemos que $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{yi}$, entonces $z \in U_{yj}$, obteniendo que $z \in V_{yj} \cap U_{yj}$, entonces $V_{yj} \cap U_{yj} \neq \emptyset$, lo cuál es una contradicción. Por lo tanto $X \backslash Y$ es abierto y en consecuencia Y es cerrado.□

Recordemos que una función es cerrada si la imagen de cada cerrado en el dominio, es un cerrado en el rango de la función.

Corolario 1.3.2 *Sean X, Y espacios Hausdorff y $f : X \to Y$ una función continua. Si X es compacto, entonces f es cerrada.*

Demostración.
Sea F un subconjunto cerrado en X, por ser un cerrado metido en un compacto tenemos que F es compacto. Dado que la función f es continua, se tiene que $f(F)$ es compacto. Ahora del teorema anterior, vemos que $f(F)$ es cerrado. Por lo tanto f es una función cerrada.□

Otra caracterización de funciones continuas es, una función f es continua si y sólo si la imagen inversa de cada cerrado es un cerrado en el dominio.

Corolario 1.3.3 *Sean X, Y espacios Hausdorff y $f : X \to Y$. Si X es compacto y la función f es una biyeccción continua, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración.
Como resultado del corolario anterior, tenemos que f es una función cerrada. Mostraremos que, f^{-1} es continua. Sea B un conjunto cerrado en X, como f es una biyección continua, tenemos que $(f^{-1})^{-1}(B) = f(B)$ y como f es cerrada, se tiene que $(f^{-1})^{-1}(B)$ es cerrado. Por lo tanto f^{-1} es continua.□

Lema 1.3.1 *Sea X un espacio topológico compacto y $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos cerrados de X, tal que para cada $n \in N$, $X_{n+1} \subset X_n$. Si U es un abierto en X tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \subset U$ entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $X_m \subset U$.*

Demostración.
Tenemos que U es abierto de X, entonces $X \backslash U$ es cerrado y por ser X compacto, se sigue que $X \backslash U$ es compacto. Como $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \subset U$, por leyes de De Morgan se tiene que, $X \backslash U \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} X \backslash X_n$. De donde existen $n_1, n_2, ..., n_k$ tales que $X \backslash U \subset \bigcup_{i=1}^{k} X \backslash X_{ni}$.
Sea $N = max\{n_1, ..., n_k\}$, entonces $\bigcup_{i=1}^{k} X \backslash X_{ni} = X \backslash X_N$. Por lo tanto $X_N \subset U$.□

En un espacio topológico X, no es necesario conocer como son todos los abiertos de X, basta con conocer una subfamilia de conjuntos abiertos que generen a los demás. Este concepto es el de base. En el siguiente resultado se muestra la relación que existe entre un espacio topológico compacto con una base para él.

Teorema 1.3.6 *Todo espacio métrico compacto tiene una base numerable.*

Demostración.
Sea X un espacio topológico compacto y A_n una cubierta finita formada por bolas de radio $1/n$. Hacemos

$$\beta = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Tenemos que β es una colección numerable, pues es la unión numerable de conjuntos finitos. Sólo queda mostrar que β es una base para X. Para ello, tomamos $x \in X$ y un abierto U en X tal que $x \in U$.
Como para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n cubre a X, existe $m \in \mathbb{N}$ y $B \in A_m$ tal que $x \in B \subset U$. Como x y U son arbitrarios, se tiene que β es una base.□

Teorema 1.3.7 *Sea X un espacio topológico. Si tenemos que X tiene una base numerable, entonces existe un subconjunto denso y numerable en X.*

Demostración.
Sea β una base numerable para X. De cada elemento B_n no vacío de la base, elegimos un punto x_n. Sea D el conjunto formado por los puntos x_n. Luego D es denso en X, pues para cada $x \in X$ y cada elemento B_n de la base que contiene a x, $B_n \cap D \neq \emptyset$, así $x \in \bar{D}$.□

Observemos que de los dos resultados anteriores, obtenemos otra propiedad de los espacios topológicos compactos. Ésta es, todo espacio compacto contiene un subconjunto denso numerable.

Teorema 1.3.8 *Sean X, Y espacios topológicos, el espacio producto $X \times Y$ es compacto si y sólo si son compactos ambos espacios X, Y*

Demostración.
Supongamos que $X \times Y$ es compacto. mostraremos que X, Y son ambos espacios compactos. Consideremos las proyecciones

$$\pi_x : X \times Y \to X \text{ tal que } \pi_x(x, y) = x$$
$$\pi_y : X \times Y \to Y \text{ tal que } \pi_y(x, y) = y.$$

Estas funciones son continuas, sobreyectivas y sus imágenes son

$$\pi_x(X \times Y) = X,\ \pi_y(X \times Y) = Y,$$

Sabemos que la imagen continua de un compacto es compacta, entonces tenemos que X, Y son ambos compactos.
Recíprocamente supongamos que X, Y son compactos, nos queda mostrar que $X \times Y$ es compacto. Sea B_x una base para la topología en X y sea B_y una base para la topología en Y, una base para la topología producto del espacio producto $X \times Y$ es de la forma

$$B = \{U \times V : U \in B_x, V \in B_y\}$$

Mostrar que el espacio producto $X \times Y$ es compacto es equivalente a mostrar que cada cubierta de $X \times Y$ por elementos de B tiene una subcubierta finita.
Sea $\{U_i \times V_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de $X \times Y$ por elementos de B.
Mostraremos que tiene una subcubierta finita.
Para cada $x \in X$ consideremos el subespacio $\{x\} \times Y$ de $X \times Y$ con la topología relativa, como $\{U_i \times V_i\}_{i \in I}$ cubre a $X \times Y$ entonces cubre a $\{x\} \times Y$.
Consideremos la función

$$f : Y \to \{x\} \times Y \text{ tal que } f(y) = (x, y),$$

verifiquemos que f es continua y sobreyectiva. Sea $(x, y) \in \{x\} \times Y$, sea W un abierto en el espacio producto que contenga a (x, y), entonces tiene la forma $W = \bigcup_{j \in J}(U_j \times V_j)$ con $x \in U_j \in B_x$ y $y \in V_j \in B_y$ para cada $j \in J$.
Entonces

$$f^{-1}(W) = f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J}(U_j \times V_j)\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(U_j \times V_j) = \bigcup_{j \in J} V_j$$

Pues por definición de f se tiene que $f^{-1}(U_j \times V_j) = V_j$ para cada $j \in J$, además la topología es cerrada bajo uniones arbitrarias, entonces tenemos que $\bigcup_{i\in J} V_j$ pertenece a la topología en Y; con esto obtuvimos que la imagen inversa de cualquier abierto es abierto, por lo tanto f es continua. Mostrar que f es sobreyectiva es inmediato. Usando que el espacio Y es compacto y que la función f es continua y sobreyectiva, tenemos que el subespacio $\{x\} \times Y$ es compacto con la topología relativa al espacio $X \times Y$.

Dada la cubierta abierta $\{U_i \times V_i\}_{i\in I}$ del subespacio compacto $\{x\} \times Y$, podemos encontrar una subcubierta finita, digamos

$$\left\{U_j^x \times V_j^x\right\}_{j=1}^{n_x} \text{ tal que } \{x\} \times Y \subseteq \textstyle\bigcup_{j=1}^{n_x}(U_j^x \times V_j^x)$$

con $x \in U_j^x$ para cada $i = 1, ..., n_x$ y $\left\{V_j^x\right\}_{j=1}^{n_x}$ una subcubierta finita de $\{V_i\}_{i\in I}$ para Y. Definimos

$$U^x = \textstyle\bigcap_{j=1}^{n_x} U_j^x$$

entonces U^x es un conjunto abierto en X tal que $x \in U^x$ y el conjunto $U^x \times Y$ es una franja abierta en $X \times Y$. Con esto tenemos que

$$U^x \times Y \subseteq \textstyle\bigcup_{j=1}^{n_x}(U_j^x \times V_j^x)$$

Ahora usaremos la compacidad del espacio X para mostrar que el espacio producto $X \times Y$ puede ser cubierto con una cantidad finita de franjas abiertas. Notemos que la familia $\{U^x\}_{x\in X}$ forma una cubierta abierta de X, como X es compacto se sigue que existe una subcubierta finita $\{U^{x_k}\}_{k=1}^m$ de modo que $X = \bigcup_{k=1}^m U^{x_k}$. Así tenemos que

$$X \times Y = (\textstyle\bigcup_{k=1}^m U^{x_k}) \times Y = \bigcup_{k=1}^m (U^{x_k} \times Y),$$

pero sabemos que para cada $k = 1, ..., m$ se tiene que

$$U^{x_k} \times Y \subseteq \textstyle\bigcup_{j=1}^{n_{x_k}}(U_j^{x_k} \times V_j^{x_k})$$

entonces

$$X \times Y = \textstyle\bigcup_{k=1}^m (U^{x_k} \times Y) \subseteq \bigcup_{k=1}^m \left(\bigcup_{j=1}^{n_{x_k}}(U_j^{x_k} \times V_j^{x_k})\right)$$

Esto muestra que la colección de abiertos básicos,

$$\left\{U_j^{x_k} \times V_j^{x_k} : j = 1, ..., n_{x_k}; k = 1, ..., m\right\}$$

forma una subcubierta finita de $X \times Y$ de elementos de B de la cubierta $\{U_i \times V_i\}_{i \in I}$. Por lo tanto el espacio producto $X \times Y$ es compacto. □

Mediante el teorema de Tychonoff, sabemos que el resultado presentado anteriormente es más general y su demostración la podemos encontrar en ([1], teo. 37.3 pág 267). A continuación enunciamos el teorema:

Teorema 1.3.9 (Tychonoff)

El producto arbitrario de espacios compactos es compacto en la topología producto.

1.4. Espacios Normales

Definición 1.4.1 *Sea X un espacio topológico y supongamos que los conjuntos unipuntuales son cerrados en X. Entonces se dice que X es regular si para cada par formado por un punto $x \in X$ y el conjunto cerrado B que no contiene a x, existen conjuntos abiertos disjuntos que contienen a x y a B respectivamente. El espacio X se dice que es normal si para cada par A, B de conjuntos cerrados disjuntos en X, existen conjuntos abiertos disjuntos que contienen a A y B respectivamente.*

Existen varias formas de caracterizar a los espacios regulares y los espacios normales. En el siguiente resultado mostramos una manera.

Lema 1.4.1 *Sea X un espacio topológico donde los conjuntos unipuntuales son cerrados.*

1. *X es regular si y sólo si, dado un punto $x \in X$ y un entorno U de x, existe un conjunto abierto V de x tal que $Cl_X(V) \subset U$.*

2. *X es normal si y sólo si, dado un conjunto cerrado A y un conjunto abierto U tal que $A \subset U$, existe un conjunto abierto V tal que $A \subset Cl_X(V) \subset U$.*

Demostración.
Para mostrar a). Supongamos que X es regular, sea $x \in X$ y U un conjunto abierto tal que $x \in U$. Si $B = X \backslash U$ entonces B es cerrado. Por hipótesis existen conjuntos abiertos disjuntos V y W que contienen a x y B, respectivamente. El conjunto $Cl_X(V)$ es disjunto de B ya que si $y \in B$, el conjunto W es un abierto que contiene a y distinto de V. Por lo tanto, $Cl_X(V) \subset U$,

que es lo que se quería mostrar.
Para probar el otro sentido. Supongamos que nos da el punto x y el conjunto cerrado B tal que $x \in B$. Sea $U = X \backslash B$. Por hipótesis existe un conjunto abierto V de x tal que $Cl_X(V) \subset U$. Los conjuntos abiertos V y $X \backslash Cl_X(V)$ son disjuntos que contienen a x y a B respectivamente. Por lo tanto X es regular.

Para mostrar *b*), se usa el mismo argumento solamente se sustituye el punto x por el conjunto A.□

En seguida se muestran propiedades que implican la normalidad de un espacio.

Teorema 1.4.1 *Todo espacio metrizable es normal.*

Demostración.
Sea X un espacio metrizable con distancia d. Sean A y B conjuntos cerrados disjuntos de X. Para cada $a \in A$, elegimos ϵ_a de tal modo que $B(\epsilon_a, a) \cap B = \emptyset$ y lo mismo para cada $b \in B$, elegimos ϵ_b tal que $B(\epsilon_b, b) \cap A = \emptyset$. Definamos

$$U = \bigcup_{a \in A} B(\epsilon_a, a) \text{ y } V = \bigcup_{b \in B} B(\epsilon_b, b).$$

Entonces U y V son conjuntos abiertos que contienen a A y B, respectivamente y afirmamos que son disjuntos, pues si no lo fuera, existiría $z \in U \cap V$, entonces

$$z \in B(\tfrac{\epsilon_a}{2}, a) \cap B(\tfrac{\epsilon_b}{2}, b)$$

para algún $a \in A$ y $b \in B$. Utilizando la desigualdad del triángulo tenemos que $d(a, b) < \frac{\epsilon_a + \epsilon_b}{2}$. Si $\epsilon_a \leq \epsilon b$, entonces $d(a, b) < \epsilon_b$ por lo que la bola $B(\epsilon_b, b)$ contendría al punto a. Si $\epsilon_b \leq \epsilon_a$, entonces $d(a, b) < \epsilon_a$, por lo que el punto b estaría contenido en la bola $B(\epsilon_a, a)$. Lo que sería una contradicción con el hecho que A y B son disjuntos. Por lo tanto U y V son disjuntos.□

Teorema 1.4.2 *Todo espacio Hausdorff compacto es normal.*

La demostración de este resultado, la podemos encontrar en ([1], teo. 32.3 pág. 231).

Capítulo 2

Continuos

2.1. Ejemplos de Continuos

En este capítulo los objetos de interés serán los espacios métricos, compactos y conexos. Sabemos que, en $\mathbb{R}^n$, los compactos son cerrados y acotados. Y sabemos que todo acotado de $\mathbb{R}^n$ se puede meter en una copia topológica de la $n-$celda $[0,1]^n$. Entonces en $\mathbb{R}^n$ los objetos que nos interesan, son los espacios métricos, conexos y cerrados contenidos en $[0,1]^n$.

Definición 2.1.1 *Un continuo es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío.*

Sea X un continuo y $Y \subset X$. Diremos que Y es un subcontinuo de X, si Y es a su vez un continuo. Diremos también que Y es un subcontinuo propio de X, si Y es un subcontinuo distinto de X.

Durante el desarrollo del capítulo presentaremos algunos ejemplos de continuos, pero en lo que más estamos interesados es mostrar cómo construir continuos.

Ejemplo 2.1.1 *El intervalo* $[0,1]$.

Sabemos que en $\mathbb{R}$ los conexos son los intervalos y los compactos son cerrados y acotados, por lo que el $[0,1]$ es un compacto y dotado de la métrica usual es un espacio métrico. Por lo que $[0,1]$ es un continuo.

Un continuo más general que el intervalo, es el arco. Un arco es cualquier espacio topológico homeomorfo al intervalo $[0,1]$

Ejemplo 2.1.2 *La circunferencia unitaria.*

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| = 1\}$$

Por ser subconjunto del espacio métrico $\mathbb{R}^2$, S^1 es un espacio métrico. Es compacto pues es cerrado y acotado, es conexo por ser imagen continua del intervalo $[0, 2\pi)$ mediante la función $x \longrightarrow (cosx, senx)$. Por lo tanto S^1 es un continuo.

Todo espacio topológico homeomorfo a S^1 se llama curva cerrada simple, no es un continuo diferente de S^1 sino una versión generalizada de él.

Definición 2.1.2 *Un continuo es unicoherente, si la intersección de cualesquiera dos subcontinuos propios es un conjunto conexo.*

Definición 2.1.3 *Un continuo X es hereditariamente equivalente, si todo subcontinuo con más de un punto Y, es homeomorfo a X.*

En los ejemplos de continuos que se han presentado, es el intervalo $[0, 1]$ quien posee tanto la propiedad de unicoherencia como la de ser hereditariamente equivalente. En el caso de la circunferencia unitaria no posee ninguna de las propiedades, S^1 no es hereditariamente equivalente pues un arco es un subcontinuo que no es homeomorfo a S^1 y no es unicoherente pues si tomamos las semicircunferencias superior e inferior como subcontinuos, su intersección resulta un conjunto no conexo.

Definición 2.1.4 *Un continuo X es homogéneo si para cualesquiera puntos $x, y \in X$ existe un homeomorfismo $h_{x,y} : X \longrightarrow X$ tal que $h_{x,y}(x) = y$.*

Observemos que S^1 es un continuo homogéneo, pues dados dos puntos $a, b \in S^1$, existe una rotación que lleva a a en b y éstas son homeomorfismos. En seguida mostraremos otro continuo que es homogéneo, el toro.

Ejemplo 2.1.3 *El toro.*

Lo podemos ver como $S^1 \times S^1$, este espacio es compacto, pues el espacio producto de espacios compactos es compacto, y la misma justificación para decir que es conexo. Por ser subconjunto de $\mathbb{R}^2$, es un espacio métrico. Por lo tanto $S^1 \times S^1$ es un continuo y su gráfica la mostramos en la siguiente figura.

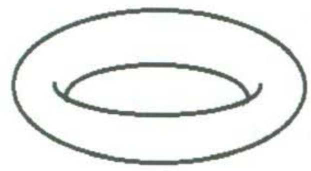


Figura 1: El toro

Para construir continuos, lo podemos hacer uniendo un número finito de continuos que se vayan intersectando, con esto lograremos que el resultado sea un espacio conexo. A continuación mostramos como ejemplo a los $n-$odos.

Ejemplo 2.1.4 *Los $n-$odos simples.*

Éstos son la unión de n arcos que se intersectan dos a dos en un único punto, llamado vértice del $n-$odo, dicho vértice es el extremo de cada uno de los n arcos y los otros extremos de los arcos se llaman extremos del $n-$odo. En la siguiente figura se muestra al 6-odo simple.

Figura 2: 6-odo simple

Siguiendo la idea de construir continuos, podemos considerar la unión de una cantidad finita de arcos tales que, sean ajenos dos a dos o si se intersectan lo hagan en uno o en ambos puntos extremos. A este nuevo continuo lo llamaremos gráfica finita. Cuando una gráfica finita no contiene curvas cerradas simples es llamada árbol.

Si pensamos en la unión de una infinidad de segmentos que se intersecten entre sí, el resultado puede ser un continuo. Sólo tenemos que tener cuidado con que el espacio que resulte de dicha unión sea un espacio compacto. En seguida mostramos un ejemplo.

Ejemplo 2.1.5 *El abanico armónico.*

Consideremos la sucesión armónica $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ y formemos con ella la siguiente sucesión de puntos en $\mathbb{R}^2$: definamos $a_{-1} = (0,0)$, $a_0 = (1,0)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (1, \frac{1}{n})$. Ahora, para $n \geq 1$, unamos cada uno de los puntos a_{n-1} con el punto a_{-1}. Gráficamente, tenemos

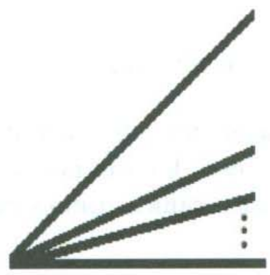


Figura 3: El abanico armónico

Este conjunto es compacto pues es cerrado y acotado, es conexo ya que es la unión de conexos que coinciden en un punto y es un espacio métrico pues es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Definición 2.1.5 *Un espacio topológico X es localmente conexo en x si para cada abierto U de x, existe un abierto conexo V de x contenido en U. Si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos, se dice que X es localmente conexo.*

Los continuos que habian presentado son localmente conexos, con la excepción de el abanico armónico, pues para cada punto $(x, 0)$, con $0 < x \leq 1$, existe una vecindad disconexa. En el ejemplo que se presenta en seguida, el continuo tampoco es localmente conexo.

Ejemplo 2.1.6 *El continuo $sen\frac{1}{x}$*

Considere la gráfica de la función $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = sen\frac{1}{x}$, es decir, el conjunto

$$G(f) = \left\{\left(x, sen\tfrac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,1]\right\}$$

Este conjunto es conexo, por ser la gráfica de una función continua definida en un conexo. Ademas es acotado, sin embargo no es cerrado; tomando la cerradura de $G(f)$ se tiene un continuo, pues la cerradura de un conexo es conexo.

Obtenemos gráficamente:

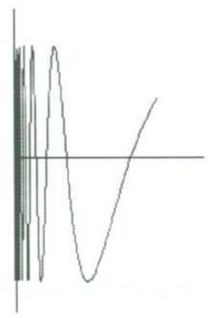


Figura 4: El continuo sen $\frac{1}{x}$

Este continuo no es localmente conexo, ya que para los puntos $(0, y)$ con $-1 \leq y \leq 1$, poseen vecindades no conexas en $G(f)$.
Ya habíamos mostrado que si tenemos un espacio conexo por trayectorias entonces es conexo. Pero este ejemplo nos permite mostrar que, si tenemos un espacio conexo no necesariamente es conexo por trayectorias, ya que el punto $(1, sen 1)$ no lo podemos conectar con ningún punto de la forma $(0, y)$ por una trayectoria de la gráfica.

Una generalización de los árboles son las dendritas. Las dendritas son continuos localmente conexos y sin curvas cerradas simples. En seguida se presenta un ejemplo de estos continuos.

Ejemplo 2.1.7 *Dendrita de Gehmann*

Se contruye empezando en la parte superior del que salen dos segmentos. Al final de estos dos segmentos se ponen otros dos segmentos más pequeños, este proceso se continúa una infinidad de veces. Al final se toma la cerradura de la unión de todos los segmentos. En la figura que a continuación se presenta, el proceso queda hasta el tercer paso.

Figura 5: Dendrita de Gehmann

Observemos que el conjunto de puntos que se añaden cuando tomamos la cerradura, los que se colocan en la parte inferior del continuo, constituyen el conjunto de Cantor.

Hemos presentado continuos que se formaron uniendo otros continuos que se intersectan en un punto, cuidando que el resultado sea compacto. Una de las técnicas más importantes para obtener ejemplos de continuos es el uso de intersecciones anidadas.

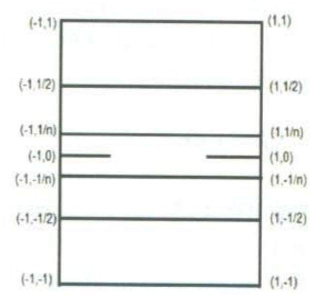
En el ejemplo que presentamos a continuación vemos que la intersección anidada de conexos no es, necesariamente, conexa.

Ejemplo 2.1.8 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea*
$X_n = [-1,1] \times \left[\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right] \setminus \left\{ \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \{0\} \right\}$

Observemos que cada X_n es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^2$, pero

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \left[-1, \tfrac{-1}{2}\right] \times \{0\} \cup \left[\tfrac{1}{2}, 1\right] \times \{0\},$$

el cual no es conexo.



Pero si agregamos la hipótesis de compacidad a cada uno de los intersectandos se obtienen resultados positivos, como lo muestra el siguiente teorema, el cuál será muy útil pues nos permitirá definir una clase de continuos.

Teorema 2.1.1 *Si X es un continuo y $A_1, A_2, \ldots$ son subcontinuos anidados, es decir $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, entonces el conjunto $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es un subcontinuo de X.*

Demostración.
El conjunto $A \subset X$ es cerrado pues es intersección de cerrados, y tenemos que el espacio X es compacto, de estos dos hechos obtenemos que A también es compacto. Al ser los conjuntos A_n compactos, se tiene que son cerrados.

De modo que los conjuntos $X \setminus A_n$ son abiertos.
De las leyes de De Morgan tenemos, $X \setminus A = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} X \setminus A_n$
Para mostrar que $A \neq \emptyset$, procederemos por contradiccion. Supongamos que A es vacío, se tiene la familia $\{X \setminus A_1, X \setminus A_2, ...\}$ es una cubierta abierta de X y, como X es compacto, existe una subfamilia finita $X \setminus A_{n_1}, X \setminus A_{n_2}, ..., X \setminus A_{n_m}$ que cubre también a X. Podemos suponer que $n_1 \leq n_2 \leq ... \leq n_m$. De modo que

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} X \setminus A_{n_i} = X \setminus \bigcap_{i=1}^{m} A_{n_i} = X \setminus A_{n_m}$$

Lo que implica que $A_{n_m} = \emptyset$. Lo que contradice el hecho que A_{n_m} es no vacío. Por lo tanto $A \neq \emptyset$.
Para poder concluir que A es un subcontinuo nos queda mostrar que A es conexo. Supongamos que A no es conexo, entonces $A = C \cup D$, donde C, D son cerrados ajenos, no vacíos de X. Como X es normal, entonces podemos encontrar U, V abiertos disjuntos de X de tal forma que $C \subset U$ y $D \subset V$. Esto es, tenemos una sucesión de subcontinuos anidados y $A = C \cup D \subset U \cup V$, es decir, A está contenida en el abierto $U \cup V$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subset U \cup V$. De donde $A_n = (A_n \cap U) \cup (A_n \cap V)$. Como $C \cup D = A \subset A_n$, se tiene que $A_n \cap U \neq \emptyset$ y $A_n \cap V \neq \emptyset$, pero esto implica que A_n sea disconexo, lo que contradice el hecho que A_n es un subcontinuo. Por lo tanto A es conexo.$\square$

Habiamos dicho que el teorema anterior nos ayudaría para contruir otros continuos, y para ejemplificarlo, el continuo que sigue se contruye de esta manera.

Ejemplo 2.1.9 *Carpeta de Sierpinski.*

Sea $S_1 = [0,1] \times [0,1]$, $S_2 \subset S_1$ el conjunto que se obtiene sustrayendo el cuadrado abierto central al dividir S_1 en nueve subcuadrados de igual área; $S_3 \subset S_2$ se define análogamente, al dividir cada uno de los $8 = 2^3$ cuadrados de S_2 en nueve cuadrados de igual área y sustrayendo el cuadrado abierto del centro. Inductivamente, definimos $S_n \subset S_{n-1}$ como el conjunto que queda al remover el cuadrado abierto central de cada uno de los 2^n cuadradros que conforman a S_{n-1}, después de dividirlos en nueve cuadrados de igual área. Finalmente, definimos $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$. En la siguiente figura se representa a este continuo.

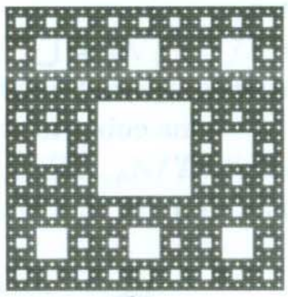


Figura 6: Carpeta de Sierpinski

Una propiedad interesante de la carpeta de Sierpinski, es que todo subcontinuo plano, con interior no vacío, tiene una copia homeomorfa dentro de este continuo. Esto se expresa diciendo que la Carpeta de Sierpinski es universal para los continuos del plano de dimensión 1. Otro continuo con propiedades interesantes se presenta en seguida.

Ejemplo 2.1.10 *Esponja de Menger*

La construcción de este continuo, es análoga a la de la Carpeta de Sierpinski. Sea $M_1 = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$; luego, definimos $M_2 \subset M_1$ como el conjunto que resulta al dividir el cubo en nueve partes iguales para cada cara y remover la barra central abierta de cada cara. El proceso con el que se obtiene cada M_n es similar. Definimos $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$. A continuación, se representa a este continuo.

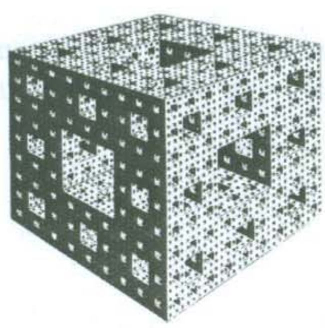


Figura 7: Esponja de Menger

La Esponja de Menger tiene dimensión 1 y cualquier continuo de dimensión 1 se puede meter dentro de él. Por esta propiedad se dice que este continuo, es universal para los continuos de dimensión 1.

Ahora veamos que existe un continuo universal, donde caben todos los continuos.

Ejemplo 2.1.11 *El cubo de Hilbert*

Consideremos el producto $Q_H = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]\times...$ como Q_H es producto de compactos y conexos, tenemos que Q_H mismo es un conexo y compacto. Le podemos asociar la métrica con la siguiente fórmula

$$d\left((x_1, x_2, ...), (y_1, y_2, ...)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$$

De manera que Q_H es un continuo. Ahora veremos que contiene copias topológicas de todos los continuos.

Teorema 2.1.2 *Si X es un continuo, entonces existe una función continua e inyectiva $f : X \to Q_H$ tal que $f : X \to f(X)$ es un homeomorfismo.*

Demostración.
Tomemos una métrica d para X, consideremos en X la métrica acotada $d'(p,q) = min\{1, d(x,y)\}$, entonces $d'(p,q) \leq 1$ para cualesquiera $p, q \in X$. Observemos que la topología inducida por la métrica d' es la misma que la topología inducida por la métrica d.

Ahora, sea $D = \{p_i : i \in \mathbb{N}\}$ un conjunto denso y numerable de X, el cual existe pues X es compacto. Definamos $f : X \to Q_H$ por:

$$f(p) = \Big(d'(p,p_1), d'(p,p_2), ...\Big).$$

Dadas $p, q \in X$ y dada $i \in \mathbb{N}$, $d'(p,p_i) \leq d'(p,q) + d'(q,p_i)$, de modo que $d'(p,p_i) - d'(q,p_i) \leq d'(p,q)$. Similarmente, $d'(q,p_i) - d'(p,p_i) \leq d'(p,q)$. De manera que $\left|d'(p,p_i) - d'(q,p_i)\right| \leq d'(p,q)$. Esto implica que cada una de las funciones $p \to d'(p,p_i)$ es continua. Es decir, cada una de las funciones coordenadas de la función f es continua. Lo que implica que la función f también es continua.
Para ver que f es inyectiva, tomemos puntos diferentes p y q en X. Sea $\epsilon = \frac{d'(p,q)}{2} > 0$. Como D es un subconjuto denso de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d'(p,p_n) < \epsilon$.
Como $d'(p,p_n) + d'(p_n,q) \geq d'(p,q) = 2\epsilon > d'(p,p_n) + \epsilon$, tenemos que $d'(p_n,q) > \epsilon$. De modo que $d'(p,p_n) < \epsilon < d'(q,p_n)$ y $d'(p,p_n) \neq d'(q,p_n)$. Esto muestra que $f(p) \neq f(q)$. Por lo tanto f es inyectiva.
Como sabemos, toda función continua e inyectiva cuyo dominio es un espacio compacto y el contradominio es un espacio Hausdorff es un homeomorfismo en su imagen, tenemos que f es un homeomofismo en su imagen. Que es precisamente lo que se quería probar.□

Para poder presentar otro camino para construir continuos, tenemos que mencionar algunos conceptos. Es necesario conocer a los continuos descomponibles e indescomponibles, los continuos encadenables, que es precisamente de los que hablamos en las siguientes secciones.

2.2. Continuos Encadenables

Primero daremos las definiciones para una cadena simple y una $\epsilon-$cadena simple. Después mencionamos la definición de espacios encadenables y presentamos algunos resultados.

Definición 2.2.1 *Una familia $\{U_1, U_2 ... U_n\}$ de subconjuntos de un espacio métrico es una cadena simple en X si se tiene que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i-j| \leq 1$. A cada U_k se le llama eslabón de la cadena simple. Se dice que una cadena simple $C = \{U_1, ..., U_n\}$ conecta a dos puntos a y b en X si $a \in U_1$ y $b \in U_n$.*

El resultado que presentamos a continuación, nos muestra que los eslabones de una cadena simple pueden ser conjuntos abiertos.
El procedimiento para la construcción de este tipo de cadena simple es tomar una familia de conjuntos abiertos y de ahí extraer la cadena simple.

Lema 2.2.1 *Sea X un espacio métrico y conexo. Si $\mathbb{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una cubierta abierta de X y $a, b \in X$ entonces existe una cadena simple que conecta a a con b cuyos eslabones son elementos de $\mathbb{U}$.*

Demostración.
Sea D el conjunto de puntos $x \in X$ tales que existe una cadena simple, con eslabonesde $\mathbb{U}$, que conecta a a con x. $D \neq \emptyset$ ya que al menos $a \in D$.
Para demostrar que $D = X$, veamos que D es tanto abierto como cerrado y como X es conexo entonces tendremos que estos dos conjuntos son iguales.
Sea $x \in D$, así existe una cadena simple $\{U_1, ..., U_n\}$ con eslabones en $\mathbb{U}$, tal que $a \in U_1$ y $x \in U_n$ pero, claramente, esto implica que $U_n \subset D$, de donde D es abierto.
Para ver que D es cerrado, probaremos que $D = Cl_X(D)$. Sea $x \in Cl_X(D) = D \cup \partial(D)$, si $x \in D$ entonces no hay nada que probar. Supongamos que $x \in \partial(D)$. Como $\mathbb{U}$ es una cubierta de X, existe $U \in \mathbb{U}$ tal que $x \in U$. Como $x \in \partial(D)$, existe $z \in D \cap U$, de donde existe una cadena simple $\{V_1, ..., V_m\}$, con eslabones en $\mathbb{U}$, que conecta a a con z. Sea $r \in \{1, 2, ..., m\}$ el primer número natural tal que $U \cap V_r \neq \emptyset$, entonces $\{V_1, ..., V_r, U\}$ es una cadena simple que conecta a a con x y, por lo tanto, $x \in D$.$\square$

Definición 2.2.2 *Una cadena simple C de conjuntos abiertos en un espacio métrico es llamada una $\epsilon-$cadena si el diámetro de cada eslabón de C es menor que ϵ.*

Definición 2.2.3 *Un espacio métrico es encadenable si para cada $\epsilon > 0$, existe una $\epsilon-$cadena que cubra a X. Si $a, b \in X$ entonces X es encadenable de a a b si para cada $\epsilon > 0$, existe una $\epsilon-$cadena $\mathbb{C} = \{C_1, ..., C_n\}$ que cubre a X tal que $a \in C_1$ y $b \in C_n$.*

Teorema 2.2.1 *Si X es un continuo encadenable $K \subset X$ es un subcontinuo entonces K es encadenable.*

Demostración.
Sea $\epsilon > 0$, como X es encadenable, existe una $\epsilon-$cadena $\mathbb{C} = \{C_1, ..., C_n\}$ que cubre a X. Sea j el primer número natural tal que $C_j \cap K \neq \emptyset$ y sea k el número natural más grande con la propiedad de que $C_k \cap K \neq \emptyset$. Mostraremos que $\mathbb{C} = \{C_j \cap K, C_{j+1} \cap K, ..., C_k \cap K\}$ es una $\epsilon-$cadena en K que cubre a K.
Claramente este es el caso a menos que existieran dos eslabones C_p y C_{p+1}, con $j \leq p \leq k$, tales que $(C_p \cap K) \cap (C_{p+1} \cap K) = \emptyset$, pero esto implicaría que, $\bigcup_{j \leq m \leq p}(C_m \cap K)$ y $\bigcup_{p+1 \leq m \leq k}(C_m \cap K)$ fueran dos abiertos ajenos de K cuya unión sería K, lo que contradiría la conexidad de K.$\square$

2.3. Continuos Descomponibles e Indescomponibles

Los continuos más familiares son descomponibles, de hecho no es fácil encontrar continuos indescomponibles. Antes de seguir con el análisis de éste tipo de continuos, damos la definición.

Definición 2.3.1 *Un continuo X es descomponible si posee dos subcontinuos propios A, B tales que $X = A \cup B$.*
Si X no es descomponible diremos que X es indescomponible.

Mencionabamos que no es fácil encontrar ejemplos de continuos indescomponibles, sin embargo existen muchos ejemplos. En esta sección presentaremos resultados que nos permitan mostrar algunos ejemplos.

Lema 2.3.1 *Sean X un continuo y Z un subcontinuo de X. Si A y B son subconjuntos mutuamente separados tales que $X \backslash Z = A \cup B$ entonces $Z \cup A$ y $Z \cup B$ son subcontinuos de X.*

Demostración.
Sean $X\backslash Z = A \cup B$, donde A, B están mutuamente separados. Como $X\backslash Z$ es abierto, tenemos que A y B son abiertos. Además $X\backslash A = Z \cup B$, por lo que $Z \cup B$ es cerrado.
Supongamos que $Z\cup B$ no es conexo. Entonces existen dos cerrados no vacíos y ajenos H y K tales que $Z \cup B = H \cup K$. Como Z es conexo e igual a $(Z\cap H)\cup(Z\cap K)$ y estos son dos cerrados ajenos, tenemos que uno de ellos es vacío. Por lo tanto podemos asumir que $Z = Z\cap H$ y por lo tanto $Z \subset H$. Pero como H y K son ajenos la contención anterior implica que $K \subset B$.
Ahora, sean $X_1 = A \cup H$ y $X_2 = K$. Entonces

$$X = (X\backslash Z)\cup Z = (A\cup B)\cup Z = A\cup(B\cup Z) = A\cup(H\cup K) = (A\cup H)\cup K$$

de donde $X = X_1 \cup X_2$. Además H y K son no vacíos, por lo que X_1 y X_2 no son vacíos.
Por otra parte, sabemos que H y K están mutuamente separados. Y como $Cl_X(K) \subset Cl_X(B)$, se tiene que K y A también están mutuamente separados, ya que A y B lo son. Por lo tanto X_1 y X_2 están mutuamente separados. Pero esto contradice la conexidad de X, por lo que se tiene que $Z \cup B$ es un subcontinuo de X. De manera análoga se muestra que $Z \cup A$ es un subcontinuo de X. $\square$

Usamos el lema anterior para dar una caracterización de los continuos indescomponibles.

Lema 2.3.2 *Un continuo X es indescomponible si y sólo si todos sus subcontinuos propios tienen interior vacío.*

Demostración.
Para mostrar que, si todos los subcontinuos propios de X tienen interior vacío entonces X es indescomponible; procederemos por contrapuesta, esto es, Supongamos que X es descomponible para llegar a que contiene algún subcontinuo propio cuyo interior es no vacío.
Entonces sean A y B subcontinuos propios de X tales que $X = A \cup B$. De ahí tenemos que $X\backslash B \subset A$, pero dado que B es cerrado y propio, entonces $\emptyset \neq X\backslash B \subset \text{int}(A)$ por lo tanto $\text{int}(A) \neq \emptyset$.
Ahora el sentido contrario, para mostrar que si X es indescomponible entonces todos sus subcontinuos tienen interior vacío, procedamos por contrapuesta. Supongamos que A es subcontinuo propio de X tal que $\text{int}(A) \neq \emptyset$.
Veamos los posibles casos respecto a la conexidad de $X\backslash A$:

1. $X\backslash A$ es conexo.
   Entonces $Cl_X(X\backslash A)$ es un subcontinuo de X. Como $\text{int}(A)$ es abierto,

no vacío y está contenido en A, tenemos que $\text{int}(A) \cap Cl_X(X\backslash A) = \emptyset$. Por lo tanto $Cl_X(X\backslash A)$ es subcontinuo propio de X. Además, $X = A \cup Cl_X(X\backslash A)$, de donde X es descomponible.

2. $X\backslash A$ es disconexo. Entonces existen dos conjuntos mutuamente separados y no vacíos H y K tales que $X\backslash A = H \cup K$. Entonces $A \cup H$ y $A \cup K$ son subcontinuos propios de X y además

$$X = (X\backslash A) \cup A = (H \cup K) \cup A = (A \cup H) \cup (A \cup K),$$

de donde X es descomponible.

En cada uno de los casos anteriores encontramos que X es descomponible, que es lo que se quería demostrar. $\square$.

Del lema anterior se deriva la siguiente caracterización para continuos descomponibles.

Corolario 2.3.1 *Un continuo X es descomponible si y sólo si X contiene un subcontinuo propio con interior no vacío.*

De la caracterización que hemos dado de los continuos indescomponibles, a continuación mostramos un ejemplo de Continuos indescomponibles.

Ejemplo 2.3.1 *Arcoiris de Knaster.*

La contrucción de éste continuo, es como sigue:
Si C es el conjunto de Cantor de tercios intermedios, consideremos el subconjunto $C_0 = C \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^2$. Para cada par de puntos de C_0 equidistantes del punto $(\frac{1}{2}, 0)$, consideremos la semicircunferencia en $\mathbb{R}^2$ con coordenadas no negativas que une tal par de puntos, entonces denotamos por X_0 a la unión de tales semicircunferencias.
Ahora, denotemos por X_1 la unión de las semicircunferencias en $\mathbb{R}^2$ con coordenadas no positivas que tienen por extremos pares de puntos de C_0 equidistantes a $(\frac{5}{6}, 0)$. Procedemos inductivamente, considerando para cada $n \in \mathbb{N}$ a X_n como la unión de semicircunferencias en $\mathbb{R}^2$ con coordenadas no positivas que tienen por extremo pares de puntos de C_0 equidistantes a $(\frac{5}{2(3)^n}, 0)$.
Entonces el arcoiris de Knaster está dado por $X = X_0 \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. En la siguiente figura se presenta éste continuo en sus primeros pasos.

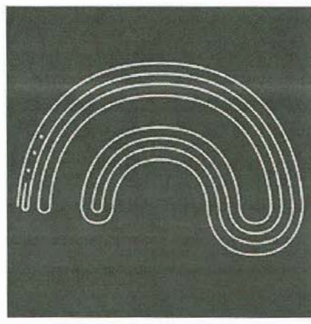


Figura 8: Arcoiris de Knaster

El arcoiris de Knaster en un continuo que no es localmente conexo en ningún punto, pues cualquier vecindad de cualquier punto es unión de arcos disjuntos. Tenemos que todo subcontinuo propio de éste continuo es un arco cuyo interior en X es vacío. Por el lema anterior es claro que X es indescomponible.

Para poder mostrar otro ejemplo de Continuos indescomponibles, introduciremos algunos conceptos importantes en la Teoria de Continuos como lo son el de composante e irreductibilidad.

2.3.1. Composantes

Definición 2.3.2 *Si X es un continuo y $p \in X$, la composante de p es el conjunto de todos los puntos $x \in X$ tales que existe algún subcontinuo propio de X que contiene a x y p.*

Notemos que la composante de p es la unión de los subcontinuos propios de X que contienene a p. Por ser unión de conexos con un punto en común, tenemos que las composantes son conexas. Más adelante mostraremos que también son densas.

El resultado que presentamos en seguida, nos ayudará a demostrar que las composantes son densas. El lema nos muestra que, dado un continuo X no existe el subcontinuo propio "más grande". La prueba del siguiente resultado la omitimos, porque requiere del teorema de golpes en la frontera; el cuál está fuera de los alcances de este trabajo.

Lema 2.3.3 *Sea X un continuo. Si D es un subcontinuo propio de X entonces existe un subcontinuo propio C de X tal que $C \neq D$ y $D \subset C$.*

Ahora sí estamos preparados para demostrar, que las composantes son un subconjunto conexo y denso.

Proposición 2.3.1 *Si K es alguna composante del continuo X, el conjunto K es denso y conexo.*

Demostración.
Sean $p \in X$ y K la composante de p. Por la observación que se hizo antes, tenemos que K es conexa.
Para mostrar que K es denso en X, supongamos que $Cl_X(K) \neq X$. Entonces, ya que K es conexo tenemos que $Cl_X(K)$ es conexo y tenemos que $Cl_X(K)$ es un subcontinuo propio de X y es no vacío pues contiene a p. Por el lema anterior, existe un subcontinuo propio H de X tal que $K \subset H$ y $K \neq H$.
Pero H es un subcontinuo propio de X que contiene a p, por lo que por definición de K debe tener que $H \subset K$, lo que implica que $H = K$, que es una contradicción.
Por lo tanto $Cl_X(K) = X$, por lo tanto K es denso en X.□

En el lema que se presenta a continuación, relacionamos el concepto de descomponibilidad con el de composante.

Lema 2.3.4 *Si X es descomponible, X es composante de alguno de sus puntos.*

Demostración.
Como X es descomponible, existen A, B subcontinuos propios y no vacíos de X tales que $X = A \cup B$. Tenemos que $A \cap B \neq \emptyset$, puesto que si la intersección fuera vacía tendriamos que X es disconexo, lo que es un absurdo.
Entonces sea $x \in A \cap B$ y K la composante de x. Como cada uno de A y B es subcontinuo propio de X que contiene a x, tenemos que $A \subset K$ y $B \subset K$, de donde $X = A \cup B \subset K$ y por lo tanto $K = X$.□

Teorema 2.3.1 *Si X es un continuo indescomponible entonces sus composantes son disjuntas.*

Demostración.
Sean $x, y \in X$ y K_x y K_y las composantes de x y y, respectivamente.
Supongamos que $K_x \cap K_y \neq \emptyset$. Sea $z \in K_x \cap K_y$, como $z \in K_x$, existe un subcontinuo propio H_1 de X tal que $z, x \in H_1$. Análogamente existe un subcontinuo propio H_2 de X tal que $z, y \in H_2$.

Sea $w \in K_y$, entonces existe un subcontinuo propio H_3 de X tal que $w, y \in H_3$. Como $y \in H_2 \cap H_3$, se tiene que $H_2 \cup H_3$ es un continuo, el cual no es igual a X debido a que éste es indescomponible. Como $z \in H_1 \cap (H_2 \cup H_3)$ resulta que $H_1 \cup H_2 \cup H_3$ es un subcontinuo de X, el cual es propio por la indescomponibilidad de X. Pero $x, w \in H_1 \cup H_2 \cup H_3$, de donde $w \in K_x$ por lo tanto $K_y \subset K_x$.
De manera análoga se muestra que $K_x \subset K_y$.$\square$

De la definición de composante tenemos que es la unión de los subconjuntos propios de X que contienen a un punto en particular, del que es composante. En seguida veamos que basta la unión numerable de subcontinuos para formar la composante.

Lema 2.3.5 *Si $p \in X$ y K es la composante de p, entonces existe una colección numerable $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subcontinuos propios de X tales que $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.*

Demostración.
Sabemos que X posee una base numerable $\mathbb{B} = \{V_1, V_2, ...\}$ con $V_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, pues X es un espacio métrico compacto. Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$, $U_n = V_n \backslash \{p\}$.
Sea F_n la componente de $X \backslash U_n$ que contiene a p para cada n y sea $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.
Como cada $X \backslash U_n$ es cerrado y contiene a p, es claro que F_n es un subcontinuo de X que contiene a p para cada $n \in \mathbb{N}$, lo cual implica que $F \subset K$.
Mostremos ahora que $K \subset F$.
Sea $x \in K$. Entonces existe un subcontinuo propio H de X que contiene a $\{p, x\}$. Como $X \backslash H$ es abierto y no vacío, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $V_m \subset X \backslash H$. Entonces $p \notin V_m$ y por tanto $U_m = V_m$.
También es claro que $H \subset X \backslash U_m$, y dado que H es conexo y contiene a p, se sigue que $H \subset F_m$. Por lo tanto $x \in F_m \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Por lo tanto $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.$\square$

Mostraremos una serie de resultados que relacionan el concepto de composante con la descomponibilidad e irreducibilidad de un continuo.
Mostraremos que los continuos descomponibles tienen exactamente tres composantes, mientras que los indescomponibles una cantidad más que numerable de composantes. Pero antes, veamos el concepto de irreducibilidad.

2.3.2. Irreducibilidad

Definición 2.3.3 *Si X es un continuo y $\{p, q\} \subset X$, decimos que X es irreducible con respecto a p y q si no existe ningún subcontinuo propio de X que contiene a tales puntos.*

Notemos la relación entre el concepto de composante y de continuo irreducible. Si p y q son puntos de X tales que, p no pertenece a la composante de q, entonces por definición de composante, X es irreducible con respecto a p y q, esto es:

Lema 2.3.6 *Sea X un continuo y $p \in X$. Entonces X es irreducible respecto a p y a algún otro elemento de X si y sólo si la composante de p es un subconjunto propio.*

Observemos ahora, si X es irreducible respecto a p y q, cada uno de esos puntos no pertenece a la composante del otro, es decir:

Lema 2.3.7 *Si el continuo X es irreducible respecto a $\{p, q\}$, entonces las composantes de p y de q son subconjuntos propios de X y distintos entre si.*

La proposición que sigue, muestra que si un continuo es descomponible y no irreducible tiene exactamente una composante.

Proposición 2.3.2 *Si X es un continuo descomponible y no es irreducible, entonces X poseee exactamente una composante, X mismo.*

Demostración.
Como X es descomponible, tenemos que X es composante de alguno de sus puntos. Y por ser no irreducible, X no posee composantes propias. Por lo tanto X mismo es su única composante.$\square$

Ahora veamos que pasa con los continuos descomponibles e irreducibles. Éste resultado es la demostración de lo que mencionabamos anteriormente, los continuos descomponibles poseen exactamente tres composantes.

Proposición 2.3.3 *Si X es un continuo descomponible e irreducible, entonces X posee exactamente 3 composantes.*

Demostración.
Sea X descomponible e irreducible respecto a $\{p, q\}$. Tenemos que X es una composante, y obtenemos que las composantes de p y de q son subconjuntos

propios de X y son disjuntos entre sí.
Entonces ya tenemos 3 composantes de X distintas entre sí. Mostraremos que estas 3 son todas las composantes.
Sea pues $r \in X$ y K la composante de r. Veremos que K es uno de los conjuntos que acabamos de mencionar, por lo tanto supongamos que $K \neq X$. Entonces existe $y \in X \setminus K$.
Como X es descomponible posee subcontinuos propios A, B tales que $X = A \cup B$. Ninguno de estos dos subcontinuos puede contener a ambos puntos p y q, ya que X es irreducible respecto a ellos, por lo que podemos asumir que $p \in A$ y $q \in B$. Tambien supongamos que $r \in A$.
Dado que A es subcontinuo propio de X y contiene a r, es claro que $A \cup K$, de donde se sigue que $p \in K$.
Supongamos momentáneamente que K tambien contiene a q. Entonces existe un subcontinuo propio D tal que $\{r, q\} \subset D$. Además recordemos que $\{r, p\} \subset A$. Como $y \notin K$, ningún subcontinuo propio de X contiene a $\{r, y\}$. por lo que tenemos que $y \notin A$ y $y \notin D$.
Entonces $r \in A \cap D$, $y \notin A \cup D$ y $\{p, q\} \subset A \cup D$, lo cual quiere decir que $A \cup D$ es un subcontinuo propio de X que contiene a p y q, pero esto es una contradicción, ya que X es irreducible respecto a tal par de puntos. De esto $q \notin K$.
Ahora sí, demostremos que K es la composante de p
Sea $x \in K$
Entonces existe un subcontinuo propio F de X tal que $\{r, x\} \subset F$, pues K es la composante de r. En particular, como $q \notin K$ tenemos que $q \notin F$.
Entonces $r \in A \cap F$, $q \notin A \cup F$ y $\{x, p\} \subset A \cup F$, por lo que $A \cup F$ es subcontinuo propio de X que contiene a p y a x. por lo tanto x pertenece a la composante de p.
Sea x un elemento de la composante de p.
Entonces existe un subconjunto propio H de X tal que $\{x, p\} \subset H$. Como X es irreducible respecto a $\{p, q\}$ tenemos que $q \notin H$. por lo tanto $p \in H \cap A$, $q \notin H \cup A$ y $\{x, r\} \subset H \cup A$, lo cual quiere decir que $H \cup A$ es subcontinuo propio de X que contiene a x y r, lo cual implica que $x \in K$.
Entonces tenemos que K es presisamente la composante de p. Por lo tanto hemos probado que si una composante no es X mismo, entonces debe ser composante de alguno de los puntos a los cuales X es irreducible.
Por lo tanto no existen más composantes de las 3 que teníamos y entoces X tiene exactamente 3 composantes. □

A continuación mostraremos que los continuos indescomponibles tienen, una cantidad más que numerable de composantes. Para ello utilizaremos el

Teorema de la Categoría de Baire, la demostración la podemos encontrar en ([1], teo. 48.2, pág 337).

Definición 2.3.4 *Un conjunto X se dice que es un espacio de Baire, si satisface la siguiente condición: dada cualquier familia numerable $\{A_n\}$ de conjuntos cerrados de X, todos ellos con interior vacío en X, su unión $\bigcup A_n$ también tiene interior vacío en X.*

Teorema 2.3.2 (Teorema de la categoria de Baire)

Si X es un espacio Hausdorff compacto o un espacio métrico completo entonces X es un espacio de Baire.

Teorema 2.3.3 *Si X es un continuo indescomponible entonces X tiene una cantidad no numerable de composantes.*

Demostración.
Como X es indescomponible entonces todo subcontinuo propio de X tiene interior vacío, y sabemos que cada composante de X es unión numerable de tales conjuntos.
Es claro que X es la unión de todas sus composantes, por lo que si X tuviera una cantidad numerable de ellas, tendríamos que X es la unión numerable de conjuntos con interior vacío, lo cual por el Teorema de Baire es un absurdo.
Por lo tanto X posee una cantidad más que numerable de composantes.□

Ahora veremos una caracterización muy útil de la indescomponibilidad en los continuos.

Teorema 2.3.4 *Un continuo X es indescomponible si y sólo si posee un subconjunto $\{a, b, c\}$ tal que X es irreducible respecto a cada par de elementos de tal conjunto.*

Demostración.
Supongamos que X es indescomponible y sean $a, b, c \in X$ tal que K_a, K_b, K_c son composantes distintas de X. Si H es un subcontinuo propio de X que contiene a a y b entonces $H \subset K_a \cap K_b$ lo cual es una contradicción, pues X es indescomponible entonces sus composantes son disjuntas. Con esto tenemos que X es irreducible entre a y b. De manera análoga se muestra que X es irreducible entre b y c y entre a y c.
Para mostrar el otro sentido, lo haremos por contrapuesta.
Esto es, supongamos que X es descomponible y sean a, b y c tres puntos

cualesquiera de X. Como X es descomponible, existen dos subconjuntos propios H y K de X tales que $X = H \cup K$, pero entonces K o H contiene a dos de los tres puntos a, b y c, de donde X no es irreducible entre dos de esos puntos.$\square$

Ahora ya estamos listos para construir un continuo indescomponible. Esto lo haremos usando el teorema anterior, es decir, tomaremos tres puntos y construiremos un continuo que sea irreducible entre cada par de ellos. Para construir un continuo que sea irreducible entre un par de puntos nos basaremos en el siguiente resultado y su demostración la podemos encontrar en ([3], Teo 9.6.24, pág 450).

Proposición 2.3.4 *Sean X un continuo y $a, b \in X$. Si X es encadenable entre a y b entonces X es irreducible entre a y b.*

Ejemplo 2.3.2 *Ejemplo de un continuo indescomponible.*

Toda la construcción se llevará a cabo en el plano. Sean a, b y c tres puntos no colineales en $\mathbb{R}^2$ y construyamos una cadena simple C_1 cuyos eslabones son discos abiertos, de diámetro menor que uno, empezando en a, pasando por b y terminando en c.
Dentro de C_1, construyamos una cadena simple C_2 de discos abiertos y diámetro menor que $\frac{1}{2}$, que empiece en b, pase por c y termine en a, de tal forma de que C_2 sea un refinamiento propio de C_1.
Dentro de C_2, contruyamos una tercera cadena cimple C_3 de discos abiertos, de diámetro menor que $\frac{1}{3}$, empezando en c, pasando por a y terminando en b, de tal manera que C_3 sea un refinamiento propio de C_2.

En la siguiente figura se muestra el proceso que hemos descrito hasta la segunda face.

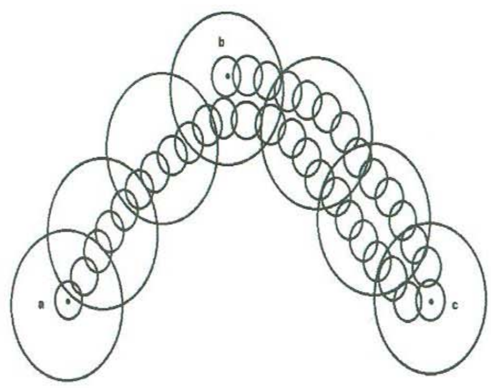


Figura 9: Continuo indescomponible

En general, para cualquier $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se contruyen cadenas simples: C_{3n+1} que sigue el patrón $a - b - c$, C_{3n+2} que sigue el patrón $b - c - a$ y, C_{3n+3} que tienen el patrón $c - a - b$. Además el diámetro de cada eslabón de C_k es menor que $\frac{1}{k}$, con $k \in \mathbb{N}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $H_k = \bigcup_{C \in C_k} Cl_X(C)$ y sea $X = \bigcap_{k=1}^{\infty} H_k$. Observemos que $\bigcap_{n=0}^{\infty} H_{3n+1}$ es un continuo encadenable y por lo tanto, irreducible entre a y c; que $\bigcap_{n=0}^{\infty} H_{3n+2}$ es un continuo irreducible entre b y a; y que $\bigcap_{n=0}^{\infty} H_{3n+3}$ es un continuo irreducible entre b y c. Además tenemos que $X = \bigcap_{n=0}^{\infty} H_{3n+1} = \bigcap_{n=0}^{\infty} H_{3n+2} = \bigcap_{n=0}^{\infty} H_{3n+3}$. Así que X es un continuo indescomponible.

También existen continuos para los cuales todos sus subcontinuos son indescomponibles.

Definición 2.3.5 *Si cada subcontinuo de X es indescomponible, decimos que X es hereditariamente indescomponible.*

El resultado que presentamos en seguida, nos muestra que podemos definir una relación de equivalencia en continuos indescomponibles, y vemos también que ésta relación, puede o no ser de equivalencia para los continuos descomponibles.

Proposición 2.3.5 *Sea X un continuo descomponible. Definimos la relación para los puntos de X, $p \simeq q$ si existe un subcontinuo propio A de X tal que $p, q \in A$, entonces $\simeq$ es una relación de equivalencia.*

Demostración.
Mostraremos que $\simeq$ es una relación de equivalencia para los puntos de

un continuo indescomponible. Además veremos que hay continuos descomponibles para los que es una relación de equivalencia y que hay descomponibles donde la relación no es de equivalencia.
Sea X un continuo indescomponible y sean $\{p, q, z\} \in X$.
Tenemos que $p \simeq p$, pues $\{p\}$ es un subcontinuo propio de X.
Si $p \simeq q$, entonces existe $Y \subset X$ subcontinuo propio tal que $p, q \in Y$. De donde $q, p \in Y$ y así $q \simeq p$.
si $p \simeq q$ y $q \simeq z$, entonces existen Y, W subcontinuos propios de X tales que $p, q \in Y$ y $q, z \in W$. Como X es indescomponible, tenemos que $Y \cup W \neq X$, tenemos que $Y \cup W$ es conexo, pues es unión de conexos, con interssección no vacía.
Por lo tanto tenemos que $Y \cup Z$ es un subcontinuo propio de X tal que $p, z \in Y \cup Z$, de donde $p \simeq z$. Y $\simeq$ es una relación de equivalencia.

Si X es descomponible la propiedad con la que se tiene el conflicto es, $a \simeq b$ y $b \simeq c$ entonces $a \simeq c$. Entonces mostraremos un continuo descomponible donde se cumple y otro donde no.

Sea $X = S^1$. Claramente tenemos que para cualesquiera dos puntos en S^1, existen subcontinuos propios que contienen a los dos. Entonces tenemos que $\simeq$ es una relación de equivalencia.
Ahora, sea $X = Cl_X(sen(\frac{1}{x}))$.
Tomemos los puntos $p = (1, sen(1))$, $q = (0{,}5, sen(0{,}5))$ y $r = (0, 1)$. Es claro que $p \simeq q$ y $q \simeq r$, pero $p \not\simeq r$ pues solamente X contiene a los dos puntos. Por lo que $\simeq$ no es una relación de equivalencia.$\square$

Capítulo 3

Hiperespacios de Continuos

Sea X un continuo con métrica d. Los Hiperespacios son colecciones de subconjuntos de X con alguna característica particular, los más estudiados son:

$$\begin{aligned} 2^X &= \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}, \\ C(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}, \\ F_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}, \\ C_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

3.1. Métrica de Hausdorff

Observemos que, todos estos espacios se definen como subespacios de 2^X, entonces para darle una métrica a todos ellos, bastará dársela a 2^X. Pero antes necesitamos mencionar algunos conceptos.

Definición 3.1.1 *Sean $\epsilon > 0$, $p \in X$ y $A \in 2^X$. Definimos la bola de radio ϵ centrada en p, que denotamos por $B(\epsilon, p)$, como:*

$$B(\epsilon, p) = \{q \in X : d(p, q) < \epsilon\}.$$

Y definimos a la nube de radio ϵ centrada en A, que denotamos por $N(\epsilon, A)$, como:

$$N(\epsilon, A) = \{q \in X : \textit{existe } a \in A \textit{ tal que } d(a, q) < \epsilon\}.$$

Observemos que si A consta de un punto, entonces $B(\epsilon, p) = N(\epsilon, \{p\})$. Además $N(\epsilon, A) = \bigcup_{a \in A} B(\epsilon, x)$

Proposición 3.1.1 *Sean $\epsilon > 0$ y los subconjuntos A, B de X. Entonces $N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B) = N(\epsilon, A \cup B)$.*

Demostración.
Mostraremos que, $N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B) \subset N(\epsilon, A \cup B)$.
Tomemos $x \in N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B)$, entonces $x \in N(\epsilon. A)$ o $x \in N(\epsilon, B)$. Para el caso que $x \in N(\epsilon, A)$ tenemos que existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \epsilon$, de ahí que existe $a \in A \cup B$ tal que $d(x, a) < \epsilon$. Por lo que $x \in N(\epsilon, A \cup B)$. De manera análoga si $x \in N(\epsilon, B)$.
Ahora mostraremos que $N(\epsilon, A \cup B) \subset N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B)$.
Tomemos $X \in N(\epsilon, A \cup B)$, entonces existe $m \in A \cup B$ tal que $d(x, m) < \epsilon$. Entonces, existe $m \in A$ o $m \in B$ tal que $d(x, m) < \epsilon$. Por lo que $x \in N(\epsilon, A)$ o $x \in N(\epsilon.B)$. De donde $x \in N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B)$. □

Proposición 3.1.2 *Sea U un subconjunto abierto de X y A cerrado tal que $A \subset U$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $N(\delta, A) \subset U$.*

Demostración.
Como U es abierto y $A \subset U$, para cada $a \in A$ exise $r_a > 0$ tal que $B(r_a, a) \subset U$.
De donde, $A \subset \bigcup_{a \in A} B(r_a, a) \subset U$.
También tenemos que

$$A \subset \bigcup_{a \in A} B(\tfrac{r_a}{2}, a) \subset \bigcup_{a \in A} B(r_a, a) \subset U$$

Como A es cerrado y X compacto, entonces A es compacto. Por lo que existen $a \in \mathbb{N}$ y $a_1, ..., a_n \in A$ tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(\frac{r_{a_i}}{2}, a_i) \subset \bigcup_{a \in A} B(\frac{r_a}{2}, a) \subset U$.

Sean $\delta = \text{mín}\{\frac{r_{a_1}}{2}, ..., \frac{r_{a_n}}{2}\}$ y $x \in N(\delta, A)$. Entonces existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \delta$. Además existe $1 \leq i \leq n$ tal que $d(a, a_i) < \frac{r_{a_i}}{2}$.
Como $\delta \leq \frac{r_a}{2}$, tenemos que $d(x, a_i) \leq d(x, a) + d(x, a_i) < \frac{r_{a_i}}{2} + \frac{r_{a_i}}{2} = r_{a_i}$.
Por lo tanto $x \in B(r_{a_i}, a_i) \subset U$.□

Ahora bien, la métrica que definiremos en 2^X es llamada métrica de Hausdorff. Dados $A, B \in 2^X$, definimos:

$$H(A, B) = \text{ínf}\{\epsilon > 0 : A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A)\}.$$

Con ayuda de esta métrica, dos conjuntos se encuetran cerca si ellos están casi empalmados. A continuación mostraremos que la métrica de Hausdorff es realmente una métrica.

Proposición 3.1.3 *Dados $A, B \in 2^X$, se cumple que:*

1. $H(A, B)$ *está bien definida,*
2. $H(A, B) \geq 0$ *y* $H(A, B) = 0$ *si y sólo si* $A = B$,
3. $H(A, B) = H(B, A)$,
4. $H(A, C) \leq H(A, B) + H(B, C)$.

Demostración.
Para cada par de elementos $A, B \in 2^X$, definimos el conjunto:

$$E(A, B) = \{\epsilon > 0 : A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A)\}.$$

$H(A, B) = \text{ínf}E(A, B)$ por como definimos $H(A, B)$. Para ver que $H(A, B)$ está bien definida, tenemos que mostrar que $E(A, B)$ no es vacío y está acotado inferiormente. Para ver que es no vacío, notemos que $d(p, q) < diam(X)+1$ para cualesquiera $p, q \in X$. Así que $A \subset N(diam(X) + 1, B)$ y $B \subset N(diam(X)+1, A)$. De manera que el número $diam(X)+1 \in E(A, B)$. esto muestra que el conjunto $E(A, B) \neq \emptyset$. Por definición el conjunto $E(A, B)$ está acotado inferiormente por el cero, por lo tanto $H(A, B)$ está bien definido. Además $H(A, B) \geq 0$.
Para demostrar 2 ya tenemos que $H(A, B) \geq 0$, nos queda mostrar que $H(A, B) = 0$ si y sólo si $A = B$. Primero veamos que $H(A, A) = 0$, observemos que, para cualquier $\epsilon > 0$, $A \subset N(\epsilon, A)$, de modo que $E(A, A) = (0, \infty)$ y como el ínfimo de este conjunto es el cero, concluimos que $H(A, A) = 0$.
Ahora supongamos que $H(A, B) = 0$, tenemos que probar que $A = B$. Tomemos un punto $a \in A$ y un número positivo cualquiera ϵ. Entonces estamos suponiendo que $\text{ínf}E(A, B) = 0 < \epsilon$, por lo que existe $\delta \in E(A, B)$ tal que $\delta < \epsilon$ y entonces $A \subset N(\delta, B)$. Así que existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \delta < \epsilon$. Con esto hemos probado que $B(\epsilon, a) \cap B \neq \emptyset$ y esto ocurre para cualquier ϵ, concluimos que a pertenece a la cerradura de B en X, pero B es cerrado, así que $a \in B$. Ya tenemos entonces $A \subset B$. De manera análoga probamos que $B \subset A$. Por lo tanto $A = B$, que es precisamente lo que se quería demostrar.
La prueba de 3 se sigue directo de la definición de $E(A, B)$, pueden intercambiarse los conjuntos A y B sin que cambie el conjunto $E(A, B)$.
Para terminar con la demostración, tendremos que probar que:

$$\text{ínf}E(A, C) \leq \text{ínf}E(A, B) + \text{ínf}E(B, C)$$

Recordemos que el ínfimo de una suma de conjuntos es la suma de los ínfimos de los conjuntos, por lo que tenemos que probar que:

$$\text{ínf}E(A,C) \leq \text{ínf}\{\delta+\eta : \delta \in E(A,B) \text{ y } \eta \in E(B,C)\}.$$

Para hacer esto, tomemos dos elementos cualesquiera $\delta \in E(A,B)$ y $\eta \in E(B,C)$.
Por definición, $A \subset N(\delta,B)$ y $B \subset N(\eta,C)$, dada $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $d(a,b) < \delta$, ademas existe $c \in C$ tal que $d(b,c) < \eta$; por la desigualdad del triángulo tenemos $d(a,c) < \delta+\eta$. Hemos probado que $A \subset N(\delta+\eta, C)$.
También de $\delta \in E(A,B)$ y $\eta \in E(B,C)$ tenemos, $B \subset N(\delta, A)$ y $C \subset N(\eta, B)$, dada $c \in C$ existe $b \in B$ tal que $d(c,b) < \eta$, ademas existe $a \in A$ tal que $d(b,a) < \delta$, por desigualdad del triángulo $d(c,a) < \delta+\eta$.
Hemos probado que $C \subset N(\delta+\eta, A)$. De manera que $\delta+\eta \in E(A,C)$. Y entonces $\text{ínf}E(A,C) \leq \delta+\eta$. Por lo que podemos concluir que el número $\text{ínf}E(A,C)$ es una cota inferior del conjunto $\{\delta+\eta : \delta \in E(A,B) \text{ y } \eta \in E(B,C)\}$ y, por tanto $\text{ínf}E(A,C) \leq \text{ínf}\{\delta+\eta : \delta \in E(A,B) \text{ y } \eta \in E(B,C)\}$.
Que es precisamente lo que queriamos mostrar. □

La proposición anterior nos muestran que 2^X es un espacio métrico y, también lo son entonces sus subespacios. Así, los hiperespacios que definimos son espacios métricos con la métrica de Hausdorff.

Observemos que si X es un continuo no degenerado. Entonces H se puede definir en la familia de todos los subconjuntos no vacíos de X, pero en este caso no resulta ser una métrica. Si $A, B \subset X$ es claro que $diam(X)+1 \in \{\epsilon > 0 : A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A)\}$, así el conjunto es no vacío y el ínfimo es mayor o igual que cero. Por lo que $\text{ínf}\{\epsilon > 0 : A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)\}$ esta bien definido. Pero la propiedad $H(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ no se cumple pues $H(Cl_X(A), A) = 0$, para todo $A \subset X$, ya que $A \subset Cl_X(A)$ y $Cl_X(A) \subset N(\epsilon, A)$ para $\epsilon > 0$ pues, si $x \in Cl_X(A)$ se tiene que para cualquier $\epsilon > 0$ $B(\epsilon, x) \cap A \neq \emptyset$. De donde $x \in N(\epsilon, A)$. De modo que si A no es cerrado, tenemos que $A \neq Cl_X(A)$ y $H(A, Cl_X(A)) = 0$. Por lo que H no es métrica.

Proposición 3.1.4 *$H(A,B) < \epsilon$ si y sólo si $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$.*

Demostración.
Para mostrar que, si $H(A,B) < \epsilon$ entonces $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$.
Tomemos $\epsilon > 0$ tal que

$$H(A,B) = \text{ínf}\{\delta > 0 : A \subset N(\delta,B) \text{ y } B \subset N(\delta, A)\} < \epsilon$$

entonces existe $\epsilon_0 \in \{\delta > 0 : A \subset N(\delta, B) \text{ y } B \subset N(\delta, A)\}$ tal que $H(A,B) < \epsilon_0 < \epsilon$. Entonces $A \subset N(\epsilon_0, B)$ y $B \subset N(\epsilon_0, A)$. Como $\epsilon_0 < \epsilon$ entonces

$A \subset N(\epsilon, A)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$.
Ahora mostraremos que, si $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$ entonces $H(A, B) < \epsilon$. Como $A \subset N(\epsilon, B)$ tenemos que, para toda $a \in A$ existe $b_a \in B$ tal que $d(a, b_a) < \epsilon$, es decir, $a \in B(\epsilon, b_a)$. De manera que existe δ_a tal que $d(a, b_a) < \delta_a < \epsilon$. Así $A \subset \bigcup_{a \in A} B(\delta_a, b_a)$, como A es compacto, tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ y elementos $a_1, a_2, ..., a_n$ tales que

$$A \subset B(\delta_{a_1}, b_{a_1}) \cup ... \cup B(\delta_{a_n}, b_{a_n}) \subset N(\delta_{a_1}, B) \cup ... \cup N(\delta_{a_n}, B)$$

De manera similar tenemos que, existe $m \in \mathbb{N}$ y elementos $b_1, ..., b_m$ tales que

$$B \subset N(\delta_{b_1}, A) \cup ... \cup N(\delta_{b_n}, A)$$

sea $\delta = \text{máx}\{\delta_{a_1}, ..., \delta_{a_n}, \delta_{b_1}, ..., \delta_{b_m}\}$. Así que, $A \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\delta, A)$. Por lo que $H(A, B) \leq \delta < \epsilon$. Por lo tanto $H(A, B) < \epsilon$.□

En el resultado que se presenta en seguida, mostramos otra manera de medir la distancia entre dos subconjuntos A, B y, ésta resulta ser equivalente a la métrica de Hausdorff.

Proposición 3.1.5 *Sean* $A, B \in 2^X$, *y* $D : 2^X \to \mathbb{R}$.
Como $D(A, B) = máx\{sup\{d(a, B) : a \in A\}, sup\{d(b, A) : b \in B\}$, *entonces* $D(A, B) = H(A, B)$

Demostración.
Notemos que $sup\{d(a, B) : a \in A\} = \text{ínf}\{r > 0 : B \subset N(r, A)$.
Para cualquier $\epsilon > 0$, $sup\{d(a, B) : a \in A\} + \epsilon \in \{r > 0 : B \subset N(r, A)\}$, pues cualquier elemento de B está a una distancia menor o igual que $sup\{d(a, B) : a \in A\}$ de cualquier elemento de A.
Esto es, $B \subset N(sup\{d(a, B) : a \in A\} + \epsilon, A)$.
Hemos probado que $sup\{d(a, B) : a \in A\} = \text{ínf}\{r > 0 : B \subset N(r, A)$.
De manera análoga, mostramos que
$sup\{d(b, A) : b \in B\} = \text{ínf}\{r > 0 : A \subset N(r, B)$.

Sean $a = \text{máx}\{sup\{d(b, A) : b \in B\}, sup\{d(a, B) : a \in A\}\}$ y $\epsilon > 0$.
Entonces
$a + \epsilon \in \{r > 0 : B \subset N(r, A)\}$ y $a + \epsilon \in \{r > 0 : A \subset N(r, B)\}$.
Es decir, para cada $\epsilon > 0$, $a + \epsilon \in \{r > 0 : B \subset N(r, A)\ y\ A \subset N(r, B)\}$. De doned $a = \text{ínf}\{r > 0 : B \subset N(r, A)\ y\ A \subset N(r, B)\}$.
Entonces $a = H(A, B)$.□

3.2. Convergencia en 2^X

En esta sección damos una caracterización para la convergencia de una sucesión en el hiperespacio 2^X con respecto a la métrica de Hausdorff en términos de subconjuntos de X. En seguida damos la definición de límite superior e inferior.

Definición 3.2.1 *Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de 2^X.*

1. *lím inf$(A_n) = \{x \in X : \forall \epsilon > 0, B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para casi toda $n\}$ (todas excepto un número finito)*

2. *lím sup$(A_n) = \{x \in X : \forall \epsilon > 0, B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de $n's\}$*

En el resultado que se presenta a continuación damos características del límite superior e inferior.

Proposición 3.2.1 *Sea X un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ uana sucesión de elementos en 2^X. Entonces:*

1. *lím inf$(A_n) \subseteq$ lím sup(A_n).*

2. *lím inf(A_n) y lím sup(A_n) son subconjuntos cerrados.*

3. *lím sup$(A_n) \neq \emptyset$.*

Demostración.
Para mostrar que lím inf$(A_n) \subseteq$ lím sup(A_n).
Sea $\epsilon > 0$ y $x \in$ lím inf(A_n), entonces $B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$, excepto un número finito. Por lo que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para toda $n \geq N$, de donde la intersección es no vacía para una infinidad de $n's$.
Por lo tanto $x \in$ lím sup(A_n) y así lím inf$(A_n) \subseteq$ lím sup(A_n).

Para mostrar que lím sup(A_n) es un conjunto cerrado, basta con probar que $Cl_X($lím sup$(A_n)) \subseteq$ lím sup(A_n).
Sea $\epsilon > 0$ y $x \in Cl_X($ lím sup$(A_n))$, entonces $B(\epsilon, x) \cap$ lím sup$(A_n) \neq \emptyset$. Por lo que existe $z \in B(\epsilon, x) \cap$ lím sup(A_n), de donde $d(x, z) < \epsilon$ y para todo $\delta > 0$ $B(\delta, z) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de $n's$. De modo que $B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de $n's$, pues existe $\gamma > 0$ tal que $B(\gamma, z) \subset B(\epsilon, x)$. Por lo tanto $x \in$ lím sup(A_n) y así lím sup(A_n) es cerrado.

Para probar que lím sup$(A_n) \neq \emptyset$. Tomemos la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos en X, formada por $a_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como X es compacto, entonces existe una subsucesión $\{a_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge, por lo que existe $x \in X$ tal que lím$(a_{nk}) = x$, esto es, para $\epsilon > 0$ existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $d(a_{nk}, x) < \epsilon$ para $k \geq K$. Por lo tanto para $\epsilon > 0$, $B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de $n's$ y así $x \in$ lím sup(A_n). □

Del resultado anterior observemos que lím sup(A_n) es un elemento de 2^X, pues es un subconjunto de X, que es cerrado y no vacío.

Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de 2^X, en el resultado que presentamos en seguida se caracterizan a los elementos del límite superior de dicha sucesión.

Teorema 3.2.1 *Sea X un continuo y $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset 2^X$ una sucesión de subconjuntos de X. $x \in$ lím sup(A_n) si y sólo si existe una sucesión de números $n_1, n_2, \ldots$ y existen puntos $x_{nk} \in A_{nk}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que lím$x_{nk} = x$.*

Demostración.
Supongamos que existen puntos $x_{nk} \in A_{nk}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que lím$x_{nk} = x$, mostraremos que $x \in$ lím sup(A_n).
Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{nk}, x) < \epsilon$ para toda $k \geq K$. De donde $x_{nk} \in A_{nk} \cap B(\epsilon, x)$ para toda $k \geq K$. Por lo tanto $B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de $n's$, y así $x \in$ lím sup(A_n).

En el otro sentido, tomemos $x \in$ lím sup(A_n). Entonces, para todo $\epsilon > 0$ $B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de $n's$. En particular tomemos $\epsilon = 1$, entonces tenemos que $B(1, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de $n's$. Elegimos $n_1 \in \mathbb{N}$ y $x_{n1} \in B(1, x) \cap A_n$, entonces $d(x_{n1}, x) < 1$ y $x_{n1} \in A_{n1}$
Ahora para $\epsilon = \frac{1}{2}$, se tiene que $B(\frac{1}{2}, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de $n's$, entonces podemos elegir $n_2 > n_1$ tal que $B(\frac{1}{2}, x) \cap A_{n2} \neq \emptyset$. Escogemos $x_{n2} \in B(\frac{1}{2}, x) \cap A_n$, entonces $d(x_{n2}, x) < \frac{1}{2}$ y $x_{n2} \in A_{n2}$
Procediendo inductivamente, construimos una sucesión de números $n_1 < n_2 < \ldots$ y de puntos $x_{nk} \in A_{nk}$ tales que $d(x_{nk}, x) < \frac{1}{k}$.
De esto concluimos que lím$x_{nk} = x$. □

A continuación presentamos un resultado que nos muestra como debe ser la relación entre el límite superior y el inferior, para que una sucesión converja con la métrica de Hausdorff.

Teorema 3.2.2 *Sea* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq 2^X$ *entonces* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *converge con la métrica de Hausdorff a* $A \in 2^X$ *si y sólo si* $lím\ sup(A_n) = A = lím\ inf(A_n)$.

Demostración.
Supongamos que $\text{lím} A_n = A$ en 2^X con la métrica de Hausdorff. Mostraremos que $\text{lím sup}(A_n) = A = \text{lím inf}(A_n)$.
Sabemos que $\text{lím inf}(A_n) \subseteq \text{lím sup}(A_n)$. Así que es suficiente probar que $A \subseteq \text{lím inf}(A_n)$ y $\text{lím sup}(A_n) \subseteq A$, que es precisamente mostrar que:

1. $A \subseteq \text{lím inf}(A_n) \subseteq A \Rightarrow \text{lím inf}(A_n) = A$.
2. $A \subseteq \text{lím sup}(A_n) \subseteq A \Rightarrow \text{lím sup}(A_n) = A$.

Para demostrar 1.
Sea $a \in A$, nos queda mostrar que $a \in \text{lím inf}(A_n)$.
Dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_n) < \epsilon$ para $n \geq N$. Entonces $A \subseteq N(\epsilon, A_n)$ y $A_n \subseteq N(\epsilon, A)$, para $n \geq N$. Por lo que $a \in A \subseteq N(\epsilon, A_n)$ y así $a \in N(\epsilon, A_n)$ para $n \geq N$.
Entonces existe $x_n \in A_n$ tal que $d(a, x_n) < \epsilon$ si $n \geq N$. Por lo tanto para $n \geq N$ $x_n \in A_n \cap B(\epsilon, a)$. Así que para $\epsilon > 0$ $A_n \cap B(\epsilon, a) \neq \emptyset$ para todas excepto un número finito de $n's$. Por lo tanto $a \in \text{lím inf}(A_n)$.
Con esto $A \subseteq \text{lím inf}(A_n)$ y $A = \text{lím inf}(A_n)$.

Para demostrar 2.
Supongamos lo contrario, es decir, $\text{lím sup}(A_n) \nsubseteq A$. Así que existe $x \in \text{lím sup}(A_n)$ tal que $x \notin A$.
Como A es cerrado, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B(\epsilon, x) \cap A = \emptyset$. Ahora como $x \in \text{lím sup}(A_n)$, tenemos que para $\epsilon > 0$, $B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de $n's$.
Como $\text{lim} A_n = A$, entonces para $\frac{\epsilon}{2} > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_n) < \frac{\epsilon}{2}$ para $n \geq N$. Es decir, $A \subseteq N(\frac{\epsilon}{2}, A_n)$ y $A_n \subseteq N(\frac{\epsilon}{2}, A)$ para $n \geq N$.
Tomemos $M \geq N$ tal que $B(\frac{\epsilon}{2}, x) \cap A_M \neq \emptyset$ y sea $z \in B(\frac{\epsilon}{2}, x) \cap A_M$. Entonces $d(x, z) < \frac{\epsilon}{2}$ y $z \in A_M \subseteq N(\frac{\epsilon}{2}, A)$, de donde existe $a \in A$ tal que $d(z, a) < \frac{\epsilon}{2}$. Por lo tanto $d(x, a) < \epsilon$ para $a \in A$. Con lo cual tenemos que $B(\epsilon, x) \cap A \neq \emptyset$. Pues $a \in B(\epsilon, x) \cap A$, pero esto contradice el hecho que $B(\epsilon, x) \cap A = \emptyset$. Por lo tanto $\text{lím sup}(A_n) \subseteq A$ y $\text{lím sup}(A_n) = A$.
De 1 y 2 tenemos que $\text{lím}(A_n) = A$.

En otro sentido, supongamos que $\text{lím inf}(A_n) = \text{lím sup}(A_n)$. Mostraremos que $A_n \in 2^X$ si $n \to \infty$.

Sea A =lím sup(A_n) y $A \in 2^X$. Probaremos que lím$A_n = A$ con la métrica de Hausdorff.
Sea $\epsilon > 0$ mostremos que:

1. Existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que $A \subseteq N(\epsilon, A_n)$ para toda $n \geq M_1$.

2. Existe $M_2 \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subseteq N(\epsilon, A)$ para toda $n \geq M_2$.

Para demostrar 1.
Observemos que la familia $\{B(\frac{\epsilon}{2}, a) : a \in A\}$ es una cubierta abierta para A. A es compacto, entonces existen $m \in \mathbb{N}$ y puntos $a_1, ..., a_m \in A$ tal que $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} B(\frac{\epsilon}{2}, a_k)$. Ahora como A =lím inf(A_n) y $a_i \in A$ para $i \in \{1, .., m\}$. Entonces para $\delta > 0$, $B(\delta, a_i) \cap A_n \neq \emptyset$ para toda n excepto un número finito, así para $i \in \{1, ..., m\}$ existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N_i$, entonces $B(\frac{\epsilon}{2}, a_i) \cap A_n \neq \emptyset$.
Sea $M_1 = \text{máx}\{N_1, .., N_m\}$.
Así dada $n \geq M_1$ y $i \in \{1, ..., m\}$, $B(\frac{\epsilon}{2}, a_i) \cap A_n \neq \emptyset$.
Con esto tenemos la siguiente afirmación:

$$A \subseteq N(\epsilon, A_n) \text{ para todo } n \geq M_1.$$

En efecto, sea $n \geq M_1$ y $a \in A \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(\frac{\epsilon}{2}, a_k)$, entonces existe $k_0 \in \{1, ..., m\}$ tal que $a \in B(\frac{\epsilon}{2}, a_{k0})$, es decir, $d(a, a_{ko}) < \frac{\epsilon}{2}$. Además para $n \geq M_1$ existe $x \in B(\frac{\epsilon}{2}, a_{k0}) \cap A_n$. Luego $d(a, x) < d(a, a_{ko}) + d(a_{k0}, x) < \epsilon$. Lo que implica que $a \in N(\epsilon, A_n)$ para $n \geq M_1$. Por lo tanto $A \subseteq N(\epsilon, A_n)$ para $n \geq M_1$.

Para demostrar 2.
Supongamos que es falso, es decir, para toda $N \in \mathbb{N}$ existe $n \geq N$ tal que $A_n \not\subseteq N(\epsilon, A)$. Así:

$$\begin{gathered}\text{Para } N = 1 \text{ existe } n_1 \geq 1 \text{ tal que } A_{n1} \not\subseteq N(\epsilon, A) \\ \text{Para } N = n_1 + 1 \text{ existe } n_2 > n_1 \text{ tal que } A_{n2} \not\subseteq N(\epsilon, A) \\ \text{PAra } N = n_2 + 1 \text{ existe } n_3 > n_2 \text{ tal que } A_{n3} \not\subseteq N(\epsilon, A)\end{gathered}$$

Procediendo de manera inductiva, existe una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < ...$ tal que $A_{nk} \not\subseteq N(\epsilon, A)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
Luego para cada $k \in \mathbb{N}$ tomemos $x_{nk} \in A_{nk} \backslash N(\epsilon, A) \subseteq X$. Como X es compacto, existe $x_0 \in X$ y una subsucesión $\{x_{nk_i}\}_{i=1}^{\infty}$ de $\{X_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que lím$(x_{nk_i}) = x_0$.
Observemos que para todo $i \in \mathbb{N}$, $x_{nk_i} \in X \backslash N(\epsilon, A)$, conjunto cerrado en X. De aquí que $x_0 \in X \backslash N(\epsilon, A)$ por lo que $x_0 \notin A$.

existe una función continua $\alpha : [0,1] \to F_n(X)$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. Como X es conexo por trayectorias, existen $\alpha_1, ..., \alpha_2 : [0,1] \to X$ continuas tales que $\alpha_i(0) = x_i$ y $\alpha_i(1) = y_i$.
Sea $\alpha : [0,1] \to F_n(X)$ como, $\alpha(t) = \{\alpha_1(t), ..., \alpha_n(t)\}$ veamos que es continua.
Sea $\epsilon > 0$. Para cada α_i, existe δ_i tal que $|t - t_0| < \delta_i \Rightarrow d(\alpha(t), \alpha(t_0)) < \epsilon$.

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, ..., \delta_n\}$.
Entonces $|t - t_0| < \delta$ implica que

$$\{\alpha_1(t), ..., \alpha_n(t)\} \subset N(\epsilon, \{\alpha_1(t_0), ..., \alpha_n(t_0)\}) \text{ y}$$
$$\{\alpha_1(t_0), ..., \alpha_n(t_0)\} \subset N(\epsilon, \{\alpha_1(t), ..., \alpha_n(t)\})$$

Por lo tanto
$H(\{\alpha_1(t), ..., \alpha_n(t)\}, \{\alpha_1(t_0), ..., \alpha_n(t_0)\}) < \epsilon$, es decir, $H(\alpha(t), \alpha(t_0)) < \epsilon$.
Por lo tanto α es continua y como $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. Por lo que $F_n(X)$ es conexo por trayectorias.□

A continuación mostraremos que el Hiperespacio 2^X es también un continuo.

Teorema 3.3.1 *El hiperespacio 2^X es conexo.*

Demostración.
Puesto que para cada $n \in \mathbb{N}$, $F_1(X) \subset F_n(X)$ y el Hiperespacio $F_n(X)$ es conexo, tenemos que el hiperespacio $F(X) = \bigcup\{F_n(X) : n \in (N)\}$ es la unión de conexos cuya interseccion es $F_1(X)$. Entonces $F(X)$ es conexo, ahora como $F(X)$ es denso en 2^X, la cerradura de $F(X)$ es 2^X, de manera que 2^X también es conexo.□

Antes de mostrar que el hiperespacio 2^X es compacto, probaremos que toda sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq 2^X$ contiene una subsucesión de Cauchy y que toda sucesión de Cauchy en 2^X converge, es decir, 2^X es completo. Juntando estos dos resultados tendremos que 2^X es compacto.

En el siguiente resultado se muestra la completez de 2^X.

Teorema 3.3.2 *Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en 2^X, entonces $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge con la métrica de Hausdorff a un $A \in 2^X$*

Demostración.
El único candidato para límite es $A = \text{lím sup}(A_n)$ que es un conjunto no vacío y cerrado de X. Y para ver la convergencia, solamente tenemos que probar que $\text{lím sup}(A_n) \subseteq \text{lím inf}(A_n)$.
Sea $x \in \text{lím sup}(A_n)$ y $\epsilon > 0$, entonces $B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de $n's$. Por otra parte, como $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_n, A_m) < \epsilon$ para todo $n, m \geq N$.
En particular tomemos $M_0 \in \mathbb{N}$, $M_0 > N$, entonces $B(\frac{\epsilon}{2}, x) \cap A_{M_0} \neq \emptyset$ y además $H(A_{M_0}, A_n) < \frac{\epsilon}{2}$ pues ambos índices $M_0, n \geq N$. Lo que implica que $A_{M_0} \subseteq N(\frac{\epsilon}{2}, A_n)$.

Sea $y \in B(\frac{\epsilon}{2}, x) \cap A_{M_0} \subseteq N(\frac{\epsilon}{2}, A_n)$. Así existen $z_n \in A_n$ tal que $d(y, z_n) < \frac{\epsilon}{2}$ y por lo tanto $d(x, z_n) \leq d(x, y) + d(y, z_n) < \epsilon$.
Con esto probamos que $B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para toda $n \geq N$. Por lo que $x \in \text{lím inf}(A_n)$ y concluimos que toda sucesión de Cauchy converge en 2^X y así este hiperespacio es completo.$\square$

Ahora sí, estamos listos para mostrar que el hiperesacio 2^X es compacto. Esto lo haremos usando la caracerización de espacios compactos que dice, un espacio es compacto si y sólo si toda sucesión tiene una subsucesión convergente.

Teorema 3.3.3 *El Hiperespacio 2^X es compacto.*

Demostración.
Por lo mencionado en el resultado y en el párrafo anterior, es suficiente probar que toda sucesión tiene una subsucesión de Cauchy.
La cual construiremos inductivamente.

Afirmamos que para $\epsilon > 0$ y un subconjunto infinito J de $\mathbb{N}$, existe otro subconjunto infinito J_1 de J tal que $H(A_n, A_r) \leq \epsilon$ para todo $n, r \in J_1$.

Sean $\epsilon > 0$ y J un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Como X es compacto, existen $m \in \mathbb{N}$ y puntos $x_1, .., x_m \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{m} B(\epsilon, x_i)$. Ahora para cada $n \in J$ definimos $K_n = \{i \in \{1, .., m\} : A_n \cap B(\epsilon, x_i) \neq \emptyset\}$, observemos que K_n esta bien definido para toda $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\Lambda = \{F : F \subset \{1, ..., m\}\}$, notemos que Λ tiene cardinalidad finita. Definamos la función $f : J \to \Lambda$ tal que $f(n) = K_n$. Entonces $J = \bigcup\{f^{-1}(K) \subset J : K \in \Lambda\}$.

Como J es infinito y Λ es finito, entonces algún conjunto $f^{-1}(K)$ debe ser infinito.
Definamos $J_1 = f^{-1}(K)$. Es claro que $J_1 \subset J$ y es infinito. falta ver que $H(A_n, A_m) \leq \epsilon$ si $n, m \in J_1$.

Sea $G = \{x_i : i \in K\} \in 2^X$. Veamos que dada $n \in J_1$, tenemos $H(A_n, G) < \frac{\epsilon}{2}$. Sea pues $n \in J_1$, entonces $f(n) = K_n = K$.
Así $K_n = \{i \in \{1, .., m\} : A_n \cap B(\frac{\epsilon}{2}, x_i) \neq \emptyset\} = K$.
De modo que $G = \{x_i \in X : A_n \cap B(\frac{\epsilon}{2}, x_i) \neq \emptyset\}$.
Si $x_i \in G$ entonces $A_n \cap B(\frac{\epsilon}{2}, x_i) \neq \emptyset$. De manera que existe $a \in A_n$ tal que $d(a, x_i) < \frac{\epsilon}{2}$. Así $x_i \in N(\frac{\epsilon}{2}, A_n)$. Esto prueba que $G \subseteq N(\frac{\epsilon}{2}, A_n)$.
Por otro lado tomemos $x \in A_n$, entonces $x \in X = \bigcup_{i=1}^{m} B(\frac{\epsilon}{2}, x_i)$, así que existe $i_0 \in \{1, .., m\}$ tal que $x \in B(\frac{\epsilon}{2}, x_{i0})$. De modo que $A_n \cap B(\frac{\epsilon}{2}) \neq \emptyset$ y $d(x, x_{i0}) < \frac{\epsilon}{2}$. Con esto $A_n \subseteq N(\frac{\epsilon}{2}, G)$.
Podemos asegurar que $H(A_n, G) < \frac{\epsilon}{2}$ para toda $n \in J_1$ por lo probado anteriormente, y como G es fijo, tenemos que $H(A_n, A_r) < \epsilon$ para $n, r \in J_1$. Y con esto probamos la afirmación.
Ahora nos queda construir la sucesión de Cauchy, repitiendo el proceso que se hizo anteriormente, obtenemos la sucesión $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos de $\mathbb{N}$ infinitos, tal que $J_1 \supseteq J_2 \supseteq ....$
Y además, para todo $n \in \mathbb{N}$, $H(A_n, A_r) < \frac{1}{k}$ para todo $n, r \in J_k$.
Construcción de la sucesión:
Tomemos $n_1 \in J_i$. Como J_2 es infinito, existe $n_2 \in J_2$ de manera que $n_1 < n_2$. Como J_3 es infinito, existe $n_3 \in J_3$ tal que $n_2 < n_3$.
Por lo tanto, existe $n_1, n_2, ...$ tal que $n_i \in J_i$ y $n_i < n_{i+1}$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

Sea $\epsilon > 0$ por la propiedad arquimediana existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < \epsilon$. Luego afirmamos que si $r, s \geq K$, entonces $H(A_{n_r}, A_{n_s}) < \epsilon$. En efecto, sea $r, s \geq K$, entonces $J_s, J_r \subseteq J_K$, de manera que $n_s \in J_s$ y $n_r \in J_r$ implican que $n_s, n_r \in J_K$, y por la elección del J_K, tenemos que $H(A_{n_s}, A_{n_r}) < \frac{1}{K} < \epsilon$. Por lo que 2^x es compacto. $\square$

Hemos probado la conexidad y compacidad de 2^X y dotado de la métrica de Hausdorff es un espacio métrico, en consecuencia tenemos que el Hiperespacio 2^X es un continuo. En seguida su muestra que la misma conclusión es válida para el Hiperespacio $C(X)$. Para ello probaremos primero que es compacto.

Teorema 3.3.4 *El Hiperesapcio $C(X)$ es compacto.*

Demostración.
Como ya probamos que 2^X es compacto, basta probar que $C(X)$ es cerrado en 2^X. Tomemos una sucesión convergente $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $C(X)$ y supongamos que $\lim A_n = A$, con $A \in 2^X$. Vamos a demostrar que $A \in C(X)$. Para ello necesitamos probar que A es un subconjunto conexo de X. Supongamos que A no es conexo, entonces existen dos subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos D y E de X tales que $A = D \cup E$.
Sea $\epsilon = \inf\{d(x,y) : x \in D \text{ y } y \in E\}$. Como D, E son compactos y ajenos, tenemos que $\epsilon > 0$.
Puesto que $\lim A_n = A$, para $\frac{\epsilon}{2}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_n, A) < \frac{\epsilon}{2}$ Así

$$A \subset N(\tfrac{\epsilon}{2}, A_n) \text{ y } A_n \subset N(\tfrac{\epsilon}{2}, A) = N(\tfrac{\epsilon}{2}, D) \cup N(\tfrac{\epsilon}{2}, E)$$

Notemos que, por la elección de ϵ, los conjuntos $N(\frac{\epsilon}{2}, D)$ y $N(\frac{\epsilon}{2}, E)$ son ajenos y abiertos. Ya que A_n es conexo, debe estar contenido en sólo uno de los conjuntos. Supongamos que $A_n \subset N(\frac{\epsilon}{2}, D)$, de modo que

$$E \subset A \subset N(\tfrac{\epsilon}{2}, A_n) \subset N(\epsilon, D).$$

Pero E es ajeno a $N(\frac{\epsilon}{2}, D)$, así que tiene que ser vacío, lo que contradice la elección de E y entonces A es conexo. Por lo tanto $C(X)$ es cerrado en 2^X y así es compacto.$\square$

Teorema 3.3.5 *El Hiperespacio $C(X)$ es conexo.*

Demostración.
Este resultado se deriva del hecho de que éste hiperespacio es conexo por arcos.

Se ha mostrado que los Hiperespacios 2^X, $C(X)$, $F_n(X)$ son también continuos.

3.4. Modelos de Hiperespacios

Los Hiperespacios que hemos definido anteriormente son subconjuntos de un continuo X, en algunas ocaciones es más deseable conocer a un espacio viéndolo como un conjunto de puntos. Por esta razón, encontrar un modelo para un Hiperespacio $\mathbb{H}$ consiste en encontrar un espacio conocido, que sea homeomorfo a $\mathbb{H}$ y que sus elementos sean puntos en lugar de subconjuntos.

En seguida, presentaremos algunos ejemplos de Modelos para el continuo $[0, 1]$.

Comenzamos con este continuo por ser el más sencillo, sus subcontinuos son los intervalos cerrados y los conjuntos formados por un punto.

Ejemplo 3.4.1

$C([0,1]) = \{A \subset [0,1] : A$ *es cerrado, conexo y no vacío de* $[0,1]\}$

Sabemos que los subconjuntos cerrados, conexos y no vacíos del intervalo $[0,1]$, son sus subintervalos cerrados. Entonces podemos usar la identificación $\phi : C([0,1]) \to \mathbb{R}^2$ tal que $A = [a,b] \to \left(\frac{a+b}{2}, b-a\right)$. Es decir, a cada intervalo le asignamos su punto medio y su longitud.
Con esta identificación, podemos observar algunas representaciones, por ejemplo el mismo intervalo $[0,1]$ queda representado por el punto $(\frac{1}{2},1)$; un conjunto de la forma $\{p\}$ donde $p \in [0,1]$, también pertenece a $C([0,1])$ y lo podemos representar como $\{p\} = [p,p]$ por lo que el punto que lo representa es el punto $(p,0)$; otros conjuntos que valen la pena considerar son los de la forma $[0,b]$, donde $b \in [0,1]$, a un subconjunto de éstos le corresponde el punto $(\frac{b}{2},b)$; también consideremos los conjuntos de la forma $[a,1]$, donde $a \in [0,1]$, a un subconjunto de éstos le corresponde el punto $(\frac{a+1}{2}, 1-a)$.
Con las observaciones realizadas vemos que la imagen de $C([0,1])$ es la región triandular T de $\mathbb{R}^2$ que mostramos en seguida, cuyos vétices son los puntos $(0,0)$, $(1,0)$ y $(\frac{1}{2},1)$.

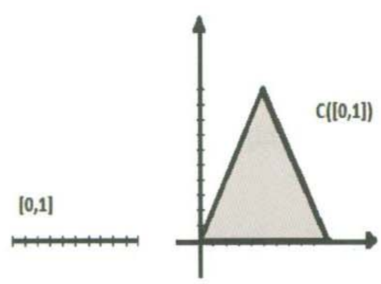


Figura 9: Modelo para $C([0,1])$

La representación que usamos es inyectiva y su imagen es T, además es una función continua y dado que $C(X)$ es compacto, tenemos que ésta representación es un homeomorfismo sobre T. Con esto hemos probado que $C([0,1])$ es una $2-$celda.

siguiendo con el intervalo $[0,1]$ en seguida mostramos un modelo para $F_2([0,1])$

Ejemplo 3.4.2

$F_2([0,1]) = \{A \subset [0,1] : A \textit{ es cerrado, no vacío y tiene a lo más } 2 \textit{ elementos}\}$

Los elementos de $F_2([0,1])$ pueden ser denotados en la forma $\{a,b\}$, con $a,b \in [0,1]$.
Al conjunto $\{a,b\}$ le podemos asocial la pareja $f(\{a,b\}) = (\text{mín}\ \{a,b\}, \text{máx}\ \{a,b\})$. Claramente, cada conjunto $\{a,b\}$ está determinado de manera única por su pareja $(\text{mín}\ \{a,b\}, \text{máx}\ \{a,b\})$ y viceversa. Ahora notemos que $0 \leq \text{mín}\ \{a,b\} \leq \text{máx}\ \{a,b\} \leq 1$ y que cualquier pareja de la forma (u,v) con $0 \leq u \leq v \leq 1$ es igual a $f(\{u,v\})$. Por lo que la imagen de f es exactamente el triángulo $T = \{(u,v) : 0 \leq u \leq v \leq 1\}$. Otra vez tenemos una $2-$celda como modelo para un hiperespacio de $[0,1]$.

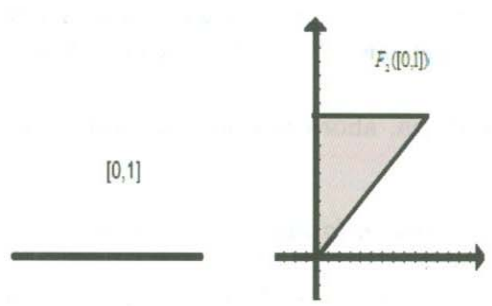


Figura 10: Modelo para $F_2([0,1])$

Otros Modelos que deseamos mostrar son del continuo S^1. Este continuo presenta facilidad con su trabajo pues tiene pocos subcontinuos, de hecho sólo lo son los conjuntos formados por un punto, los subarcos cerrados y a S^1 mismo.

Ejemplo 3.4.3

$C(S^1) = \{A \subset S^1 : A \textit{ es cerrado, conexo y no vacío de } S^1\}$

Para la construcción del Modelo para $C(S^1)$ usaremos la representación $f(A) = \left(1 - \frac{l(A)}{2\pi}\right) m(A)$, para cuando A es un subarco de S^1, donde $l(A)$ y $m(A)$ son la longitud y el punto medio del subarco respectivamente. Para el caso de los conjuntos de la forma $\{p\}$ se les asigan p, es decir, $f(\{p\}) = p$ y $f(S^1) = (0,0)$. Así tenemos definida $f(A)$ para toda $A \in C(S^1)$
En la siguiente imagen se presenta S^1 con el Modelos para $C(S^1)$.

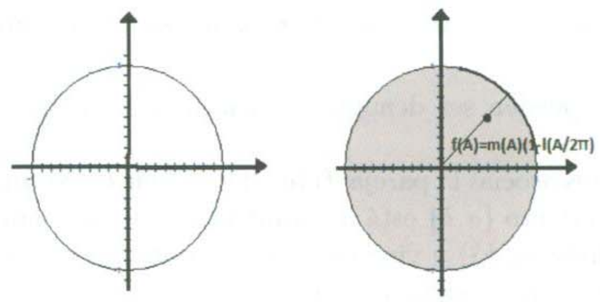


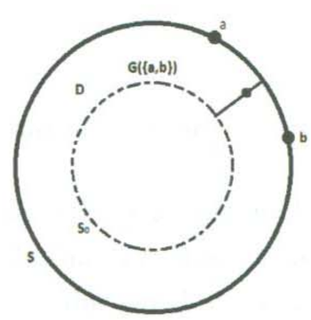
Figura 11: Modelo para $C(S^1)$

Tenemos entonces que f es un homeomorfismo de $C(S^1)$ en el disco unitario con centro en el origen, es decir una $2-$celda . Observemos que el Modelo para $C([0,1])$ y el Modelo para $C(S^1)$ son homeomorfos, pero no lo son los continuos $[0,1]$ y S^1. Esto es, que los hiperespacios de continuos sean homeomorofos no implica que los continuos de donde provienen lo sean.

Siguiendo con la circunferencia unitaria, ahora veamos un Modelo para $F_2(S^1)$

Ejemplo 3.4.4 $F_2(S^1) = \{A \subset S^1 : A$ *tiene a lo más* 2 *elementos* $\}$

Dado un subconjunto $A = \{a, b\}$ de S^1 escojamos el arco menor que une a a y b, sea $m(A)$ el punto medio del arco y sea $l(A)$ la longitud del arco. Entonces hagamos la asignación $G(A) = (1 - \frac{l(A)}{2\pi})m(A)$
Esta asociación es perfecta para los conjuntos para los que existe tal arco menor, dichos conjuntos son aquellos en los que a y b no son puntos antípodas. De modo que si omitimos los pares de conjuntos antípodas, tenemos una función G cuya imagen es el conjunto $\{z \in R^2 : \frac{1}{2} < \|z\| \leq 1\}$



Si insistimos en asociarle algo parecido a puntos antípodas, a un conjunto de la forma $A = \{a, -a\}$ le corresponderían dos puntos y obtenemos como

imagen total al anillo $D = \{z \in R^2 : \frac{1}{2} \leq \|z\| \leq 1\}$. Estaría bien salvo que a cada par de antípodas le estarían asociando un par de puntos también antípodas de la circunferencia $S_0 = \{z \in R^2 : \|z\| = \frac{1}{2}\}$. Entonces todo se resuelve si en el conjunto D identificamos cada par de puntos antípodas del conjunto S_0 y así obtener el medelo final para $F_2(S^1)$.
Primero ponemos flechas en la circunferencia interior S_0. Le ponemos dos flechas etiquetadas con la letra c, hacemos dos cortes donde están las flechas a y b. En el segundo dibujo de la figura de abajo ponemos las piezas 1 y 2 que resultaron despues de cortar. Para el tercer dibujo hemos girado la pieza 2 para que las flechas c puedan pegarse, notemos que ahora tenemos un cuadrado en el que hay que pegar dos orillas y también notemos que si torcemos el cuadrado las flechas quedan listas para pegarse; al hacer esto se obtiene la banda de Moebius.

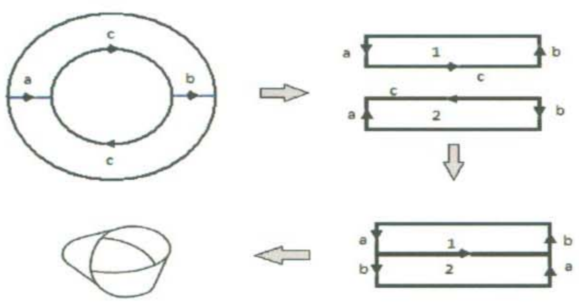


Figura 12: Modelo para $F_2(S^1)$

Hemos mostrado continuos para los cuales se puede construir un modelo geométrico visible para sus hiperespacios $C(X)$, $F_2(X)$. Pero existen continuos que no admiten un modelo visible. Por ejemplo para el arcoiris de Knaster su hiperespacio $C(X)$ es homeomorfo a su cono.

Capítulo 4

Funciones de Whitney

Una función de Whitney es una manera de medir el tamaño de subconjuntos cerrados de un continuo X. En este capítulo mostraremos que las funciones de Whitney existen y mencionaremos unos ejemplos.

4.1. Existencia de Funciones de Whitney

Mencionabamos que las funciones de Whitney miden el tamaño de subconjuntos cerrados de un continuo, es decir, miden el tamaño de los elementos de 2^X. A continuación presentamos la definición de estas funciones.

Definición 4.1.1 *Sea X un continuo. Una función de Whitney para 2^X, es una función continua $\mu : 2^X \to [0, \infty)$ que satisface las siguientes condiciones:*

1. $\mu(\{p\}) = 0$ *para cada* $p \in X$.

2. *Si* $A, B \in 2^X$ *y* $A \subsetneq B$, *entonces* $\mu(A) < \mu(B)$.

Supongamos que X es un continuo y $\mu : 2^X \to [0, \infty)$ es una función de Whitney para 2^X. Como X es compacto, y μ es continua, entonces μ alcanza su valor máximo. Si definimos la función μ', de manera que, para cada $A \in 2^X$

$$\mu' = \frac{\mu(A)}{\mu(X)}$$

tenemos que μ' también es una función de Whitney para 2^X y, además, toma valores en el intervalo $[0, 1]$.

La función $D : 2^X \to [0, \infty)$ dada por $D(A) =$ diámetro de (A), es casi una función de Whitney. Sólo le falta que $D(A)$ fuera estrictamente menor que $D(B)$, cuando $A \subsetneq B$. Pero cuando el continuo es el intervalo $[0, 1]$ con la topología usual inducida por $\mathbb{R}$, entonces la función D, es una función de Whitney.

Para poder presentar resultados que tengan validez para cualquier continuo necesitamos mostrar que, para cualquier continuo X existen funciones de Whitney para 2^X.

Ejemplo 4.1.1 *Sea X un continuo, $D = \{p_1, p_2, ...\}$ un subconjunto denso y numerable de X y, supongamos que la métrica d en X es tal que $d(x, y) \leq 1$, para cualesquier $x, y \in X$. Dado $A \in 2^X$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos:*

$$\mu_n(A) = \textit{máx}\{d(a, p_n) : a \in A\} - \textit{mín}\{d(a, p_n) : a \in A\}.$$

Luego definimos $\mu : 2^X \to [0, 1]$ por:

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(A)}{2^n}.$$

Para probar que μ es una función de Whitney, primero mostraremos algunas propiedades.

Propiedad 1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ la función μ_n es continua.
Para probarlo, tomemos $\epsilon > 0$.
Sean $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ y $A, B \in 2^X$ tales que $H(A, B) < \delta$.
Mostraremos que $|\mu_n(A) - \mu_n(B)| < \epsilon$.
Como A es compacto, existen elementos $a_1, a_2 \in A$ tales que

$$d(a_1, p_n) = \text{mín}\{d(a, p_n) : a \in A\} \text{ y}$$
$$d(a_2, p_n) = \text{máx}\{d(a, p_n) : a \in A\}.$$

Como $H(A, B) < \delta$, tenemos que $A \subset N(\delta, B)$ por lo que existen $b_1, b_2 \in B$ tales que $d(a_1, b_1) < \delta$ y $d(a_2, b_2) < \delta$. Entonces tenemos que:

$$\text{máx}\{d(a, p_n) : a \in A\} = d(a_2, p_n) \leq d(a_2, b_2) + d(b_2, p_n) < \delta + \text{máx}\{d(b, p_n) : b \in B\} \text{ y,}$$
$$\text{mín}\{d(b, p_n) : b \in B\} \leq d(b_1, p_n) \leq d(b_1, a_1) + d(a_1, p_n) < \delta + \text{mín}\{d(a, p_n) : a \in A\}.$$

De donde

$$(\text{máx}\{d(a, p_n) : a \in A\} - \text{mín}\{d(a, p_n) : a \in A\}) - (\text{máx}\{d(b, p_n) : b \in B\} - \text{mín}\{d(b, p_n) : b \in B\}) < 2\delta = \epsilon.$$

De esta forma $\mu_n(A) - \mu_n(B) < \epsilon$.
De manera similar obtenemos que $\mu_n(B) - \mu_n(A) < \epsilon$.
Por lo tanto $|\mu_n(A) - \mu_n(B)| < \epsilon$.
Lo que concluye la prueba de la continuidad de μ_n.

Propiedad 2. La función μ está bien definida y es continua.
Para probarlo, bastará con mostrar que la sucesión de funciones $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisface el criterio M de Weierstrass. De modo que sólo nos falta verificar que existe una sucesión de números positivos $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $\left|\frac{\mu_n(A)}{2^n}\right| \leq M_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y toda $A \in 2^X$ y que cumple que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge.
Notemos que para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $A \in 2^X$

$$0 \leq \mu_n(A) \leq \text{máx}\{d(a, p_n) : a \in A\} \leq 1.$$

De modo que

$$\frac{\mu_n(A)}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

Por lo tanto basta hacer $M_n = \frac{1}{2^n}$ para concluir la prueba.

Propiedad 3. Para cada $p \in X$, $\mu(\{p\}) = 0$.
Observemos que

$$\mu_n(\{p\}) = \text{máx}\{d(a, p_n) : a \in \{p\}\} - \text{mín}\{d(a, p_n) : a \in \{p\}\} = d(p, p_n) - d(p, p_n) = 0$$

Por lo tanto $\mu(\{p\}) = 0$.

Propiedad 4. Si $A \subsetneq B$, entonces $\mu_n(A) \leq \mu_n(B)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
Como $A \subsetneq B$, $\{d(a, p_n) : a \in A\} \subset \{d(b, p_n) : b \in B\}$. De manera que $\text{máx}\{d(a, p_n) : a \in A\} \leq \text{máx}\{d(b, p_n) : b \in B\}$ y, $\text{mín}\{d(b, p_n) : b \in B\} \leq \text{mín}\{d(a, p_n) : a \in A\}$.
Por lo tanto $\mu_n(A) \leq \mu_n(B)$.

Propiedad 5. Si $A \subsetneq B$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_n(A) < \mu_n(B)$.
Para probarlo, tomemos $b_0 \in B \setminus A$. Como A es cerrado, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(2\epsilon, b_0) \cap A = \emptyset$.
Como el conjunto $\{p_1, p_2, ...\}$ es denso, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $d(b_0, p_m) < \epsilon$.

Si existiera un punto $a \in A$ tal que $d(a, p_m) \leq \epsilon$, entonces $d(a, b_0) < 2\epsilon$. Lo cual es una contradicción con el hecho de que $B(2\epsilon, b_0) \cap A = \emptyset$. Por lo tanto $\epsilon < \text{mín}\{d(a, p_m) : a \in A\}$.
Notemos que $\text{mín}\{d(b, p_m) : b \in B\} \leq d(b_0, p_m) < \epsilon$. Por lo tanto

$$\text{mín}\{d(b, p_m) : b \in B\} < \text{mín}\{d(a, p_m) : a \in A\}$$

Procediendo como en la propiedad 4 tenemos que $\text{máx}\{d(a, p_m) : a \in A\} \leq \text{máx}\{d(b, p_m) : b \in B\}$. Combinando estas dos desigualdades obtenemos:

$$\mu_m(A) < \mu_m(B).$$

Propiedad 6. Si $A \subsetneq B$ entonces $\mu(A) < \mu(B)$. Combinando las propiedades 4 y 5 obtenemos esta propiedad.

Por tanto tenemos que μ cumple las propiedades de la definición de funciones de Whitney, así se normaliza y tendremos una función de Whitney para 2^X y, además toma valores en el intervalo $[0, 1]$.□

Ejemplo 4.1.2 *Supongamos que la métrica d en X es tal que $d(x, y) \leq 1$, para cada $x, y \in X$. Dado $A \in 2^X$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos:*

$$L_n(A) = \{\epsilon \geq 0 : \textit{existen puntos } a_1, ..., a_{n+1} \in A \textit{ tales que si } i \neq j, \\ \textit{entonces } B_\epsilon(a_i) \cap B_\epsilon(a_j) = \emptyset\}.$$

Luego, definimos

$$\mu_n(A) = supL_n(A), \text{ y } \mu(A) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(A)}{2^n}.$$

Aquí, extendemos la definición de $B(\epsilon, p)$ entendiendo que $B(0, p) = \emptyset$. Al igual que en el ejemplo anterior, para mostrar que μ es una función de Whitney mostraremos una serie de propiedades para L_n y para μ_n.

Propiedad 1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ la función μ_n está definida y $\mu_n(A) \leq 1$ para toda $A \in 2^X$.
Notemos que 0 siempre pertenece a $L_n(A)$, por lo que $L_n(A) \neq \emptyset$. Luego, si $\epsilon > 0$ y $\epsilon \in L_n(A)$, entonces existen puntos $a_1, ..., a_{n+1} \in A$ tales que las bolas de la forma $B(\epsilon, a_i)$ son ajenas entre sí.
De manera que $\epsilon \leq d(a_1, a_{n+1}) \leq$ diámetro de $X \leq 1$. Esto muestra que

el conjunto $L_n(A)$ está acotado superiormente por el número 1. Por tanto su supremo existe y es menor o igual que 1. Por lo tanto $\mu_n(A)$ está bien definida y es menor que 1.

Propiedad 2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función μ_n es continua.
Para probarlo, tomemos δ un número positivo y, supongamos que $A, B \in 2^X$ son tales que $H(A, B) < \delta$, mostraremos que $|\mu_n(A) - \mu_n(B)| < \delta$.
Sea $\epsilon \in L_n(A)$ entonces existen elementos $a_1, ..., a_{n+1} \in A$ tales que las bolas $B(\epsilon, a_1), ..., B(\epsilon, a_{n+1})$ son ajenas entre sí. Como $A \subset N(\delta, B)$, existen elementos $b_1, ..., b_{n+1} \in B$ tales que $d(a_i, b_i) < \delta$ para cada $i \in \{1, ..., n+1\}$.
Hacemos $\epsilon_0 = \text{máx}\{0, \epsilon - \delta\}$. Dada $i \in \{1, ..., n+1\}$, veremos que $B(\epsilon_0, b_i) \subset B(\epsilon, a_i)$. Diferenciamos dos casos, si $\epsilon - \delta \leq 0$ entonces $\epsilon_0 = 0$, de modo que $B(\epsilon_0, b_i) = \emptyset$ y la contención es cierta. Ahora, si $\epsilon_0 = \epsilon - \delta > 0$, dada $p \in B(\epsilon_0, b_i)$, tenemos que:

$$d(p, a_i) \leq d(p, b_i) + d(b_i, a_i) < \epsilon_0 + \delta = \epsilon$$

De manera que $p \in B(\epsilon, a_i)$. Hemos probado que $B(\epsilon_0, b_i) \subset B(\epsilon, a_i)$. Ya que las bolas $B(\epsilon, a_1), ..., B(\epsilon, a_{n+1})$ son ajenas entre sí, concluimos que las bolas $B(\epsilon_0, b_1), ..., B(\epsilon_0, b_{n+1})$ son ajenas entre sí. Por lo que $\epsilon_0 \in L_n(B)$. De modo que $\mu_n(B) = \text{sup}L_n \geq \epsilon_0 \geq \epsilon - \delta$. Como ϵ era un elemento cualquiera de $L_n(A)$ y δ está fijo, el número $\mu_n(B) + \delta$ es cota superior del conjunto $L_n(A)$ y, por ende, tiene que ser mayor o igual que su supremo. Esto muestra que $\mu_n(B) + \delta \geq \mu_n(A)$, que es precisamente $\mu_n(A) - \mu_n(B) \leq \delta$.
De manera similar se demuestra que $\mu_n(B) - \mu_n(A) \leq \delta$. Por lo tanto $|\mu_n(A) - \mu_n(B)| \leq \delta$. Por lo tanto μ_n es continua.

Propiedad 3. Si A tiene al menos $n + 1$ puntos distintos, entonces $\mu_n(A) > 0$.
Es claro, ya que hay números positivos en $L_n(A)$. Como hay $n + 1$ puntos distintos, tomamos r como la mitas de la mínima distancia entre dos de esos n+1 puntos, y es claro que $r \in L_n(A)$

Propiedad 4. Si A tiene exactamente n puntos distintos, entonces $0 = \mu_n(A) = \mu_{n+1}(A) = ...$
Como A tiene exactamente n puntos, al tomar $a_1, ..., a_{n+1} \in A$, por el principio de las casillas, existen $i, j \in \{1, ..., n+1\}$ tales que $a_i = a_j$. Es decir, uno de ellos debe repetirse. Luego, la única manera de que $B(\epsilon, a_i) \cap B(\epsilon, a_j) = \emptyset$

es si $\epsilon = 0$. Po lo tanto $L_n(A) = \{0\}$ y que $\mu_n(A) = 0$. El mismo argumento usamos para $n+1, n+2, ...$

Propiedad 5. Para cada $p \in X$ y cada $n \in \mathbb{N}, \mu_n(\{p\}) = 0$.
Esta propiedad es un caso particular de la propiedad 4.

Propiedad 6. Para cada $A \in 2^X$ y cada $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n(A) \geq \mu_{n+1}(A)$.
Sea $\epsilon \in L_{n+1}$. Entonces se pueden encontrar $n+2$ bolas ajenas por parejas, centradas en puntos de A. En particular se pueden encontrar $n+1$ bolas ajenas por parejas, centradas en puntos de A. Por lo tanto $\epsilon \in L_n(A)$.

Propiedad 7. Para cada $A \in 2^X$, la sucesión $\{\mu_n(A)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a 0.
Sea $\epsilon > 0$. Como A es compacto, existen $m \in \mathbb{N}$ y existen puntos $a_1, ..., a_m$ tales que $A \subset \bigcup_{n=1}^{m} B(\frac{\epsilon}{2}, a_n)$.
Si tomamos $m+1$ puntos $p_1, ..., p_{m+1} \in A$, entonces ellos estan en esa unión de bolas. Así que una de ellas tiene que contener a dos de los puntos. Supongamos que $p_1, p_2 \in B(\frac{\epsilon}{2}, a_1)$, entonces tenemos que $d(p_1, p_2) \leq d(p_1, a_1) + d(a_1, p_2) < \epsilon$. Entonces $p_1 \in B(\epsilon, p_2) \cap B(\epsilon, p_1)$. Esto prueba que ningún número mayor puede estar en $L_m(A)$. Y, por lo tanto $\mu_m(A) \leq \epsilon$. Además, por la propiedad 6, tenemos que $\mu_n(A) \leq \epsilon$ para toda $n \geq m$. Lo que concluye la prueba.

Propiedad 8. Si $A, B \in 2^X$ y $A \subsetneq B$, entonces $\mu_n(A) \leq \mu_n(B)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
Esta propiedad se sigue de la definición de μ_n.

Propiedad 9. La función μ es continua.
De la propiedad 1, y el criterio M de Weierstrass, sabemos que la serie que define a μ converge uniformemente. Por la propiedad 2, concluimos que μ debe ser continua.

Para demostrar que μ es una función de Whitney para 2^X, solamente falta probar que si $A, B \in 2^X$ y $A \subsetneq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$. De acuerdo a la propiedad 8, basta probar que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_m(A) < \mu_m(B)$.