

# UNIVERSIDAD DE SONORA

Departamento de Física

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

## Esparcimiento de Luz por una Película Dieléctrica Rugosa sobre un Sustrato Metálico

Tesis para cubrir los requisitos mínimos necesarios para obtener el  
grado de: Licenciatura en Física

Presenta:

B. CIENCIAS EXACTAS  
Y NATURALES

Alvaro Soto Pérez

R. T 5 92

Hermosillo, Sonora a 06 de Junio del 2003

# Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



“El saber de mis hijos  
hará mi grandeza”



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

# UNIVERSIDAD DE SONORA

Departamento de Física

## Esparcimiento de Luz por una Película Dieléctrica Rugosa sobre un Substrato Metálico

Tesis para cubrir los requisitos mínimos necesarios para obtener el  
grado de  
Licenciatura en Física que presenta Alvaro Soto Pérez

Revisión y Aprobación:

---

Dr. Raúl García Llamas  
Director de Tesis

---

Dr. Felipe Ramos Mendieta

---

M. C. Jorge Sandoval Chávez

---

Dr. Alejandro Apolinar Iribe

Hermosillo, Sonora a 06 de Junio del 2003

# Contenido

Lista de Figuras	ii
Introducción	1
<b>1 Películas Delgadas</b>	<b>3</b>
1.1 Las Ecuaciones de Maxwell . . . . .	3
1.2 Las Condiciones en las Fronteras . . . . .	5
1.3 Modos Guiados en una Película con Interfaces Lisas . . . . .	7
1.4 La Superficie Rugosa . . . . .	11
1.5 Película con Superficie Rugosa . . . . .	12
1.6 Solución Perturbativa . . . . .	16
1.7 Coeficiente Diferencial de Reflexión CDR . . . . .	18
1.8 Esparcimiento Total Integrado ETI . . . . .	21
1.9 Picos Satélite . . . . .	21
<b>2 Resultados y Discusión</b>	<b>24</b>
2.1 Película Dieléctrica sobre Conductor Perfecto . . . . .	24
2.2 Película Dieléctrica sobre Sustrato Metálico . . . . .	25
2.2.1 Propuesta Experimental. Región visible. . . . .	27
2.2.2 Propuesta experimental. Región Infrarojo. . . . .	30
2.3 Validez de la Aproximación a Cuarto Orden . . . . .	30
<b>3 Conclusiones</b>	<b>33</b>
<b>Apéndice</b>	<b>35</b>
Condiciones en las Fronteras aire/dieléctrico . . . . .	35
Códigos de Programación . . . . .	37
La Transformada de Fourier . . . . .	41
<b>Bibliografía</b>	<b>42</b>

# Lista de Figuras

1.1	Película dieléctrica de espesor $d_2$ con superficie rugosa, caracterizada por $f_1(y)$ , depositada sobre un sustrato. Una onda con amplitud $U_1$ incide a un ángulo $\theta_i$ y se esparce a los ángulos $\theta_s$ . . . . .	5
1.2	Relación de dispersión de los primeros modos guiados y el plasmón de superficie en una película con interfaces lisas. Modos TM (líneas gruesas) y TE (líneas delgadas). . . . .	9
1.3	Modos guiados en una película dieléctrica lisa con espesor $d_2 = 774$ nm, depositada sobre un metal. (a) Modos guiados TM-1 (—), TM-2 (---) y el plasmón de superficie TM-0 (-·-·-·-·-). (b) Modos guiados TE-1 (—) y TE-2 (---). . . . .	10
1.4	Espectros de rugosidad, gaussiano con $\sigma = 100$ nm y el espectro WO para $K_{\max} = (\omega/c)1.44$ y $K_{\min} = (\omega/c)0.95$ . Las flechas indican las posiciones de los números de onda $\pm q_1^{TM}$ y $\pm q_2^{TM}$ de los modos guiados en TM de la película Au/MgF <sub>2</sub> /aire. . . . .	13
1.5	Interacción de la luz incidente con los modos guiados en una película dieléctrica. . . . .	22
2.1	Dependencia angular del CDR promedio para una película sobre sustrato metálico para el espectro G (—) y el WO (-·-·-·-·-). . . . .	26
2.2	Integral de la parte coherente del CDR promedio $R_C$ con respecto al espesor $d_2$ de la película en polarización $p$ (—) y $s$ (-·-·-·-·-). Un mínimo en la reflectancia se tiene en $d_2 = 774$ nm a incidencia normal para ambas polarizaciones. . . . .	28
2.3	Dependencia angular del CDR promedio de la película para el espectro WO con $h = 5$ nm en polarización $p$ (—) y $s$ (-·-·-·-·-). . . . .	29
2.4	Dependencia angular de la parte incoherente del CDR promedio para el sistema Au/ZnS/aire en polarización $p$ para el espectro WO. Incidencia normal (—) y $\theta_s = 5^\circ$ (-·-·-·-·-). . . . .	31
2.5	Esparcimiento total integrado para el espectro de rugosidad Gaussiano G y West-O'Donnell WO. . . . .	32

# Introducción

Los efectos ópticos que se inducen cuando una onda electromagnética incide sobre la superficie rugosa de una película delgada, son de interés teórico-práctico, puesto que permiten caracterizar la forma geométrica y las propiedades ópticas de este sistema. De los estudios teóricos, se encuentra que el esparcimiento de la luz es fuertemente dependiente de las propiedades ópticas y geométricas de la superficie sobre la que incide, y que ocurre el fenómeno de aumento luz esparcida en la dirección de retroreflexión (backscattering enhancement). El retroesparcimiento aumentado, es la presencia de un pico bien definido en la dependencia angular de la intensidad de la luz esparcida incoherentemente por una superficie rugosa [1].

Además, debido a la excitación de dos modos guiados de la película, se producen picos satélite en el esparcimiento de luz [1, 2].

En este trabajo, nuestro propósito es mostrar la solución teórica del problema de esparcimiento de luz por una película dieléctrica con una superficie rugosa unidimensional, depositada sobre un sustrato metálico o sobre un conductor perfecto (CP). También se calcula numéricamente el esparcimiento de luz por éste sistema mediante el método perturbativo y mostramos resultados hasta cuarto orden en la altura de la rugosidad. La rugosidad de la película está caracterizada por una función aleatoria con propiedades estadísticas determinadas, tales como el valor promedio de la función y función de autocorrelación. Para calcular el esparcimiento de luz, se utilizan dos espectros de rugosidad, este espectro está dado por la transformada de Fourier de la función de autocorrelación que caracteriza la rugosidad.

El esparcimiento de luz por una capa con rugosidad bidimensional, depositada sobre

un sustrato metálico, ha sido resuelto recientemente [3, 4], pero en estos trabajos, no se obtienen resultados satisfactorios para mostrar la presencia de picos satélite, y solo usan un espectro de rugosidad. Aunque ese trabajo es una generalización de este en el sentido que la rugosidad aleatoria que se considera es bidimensional.

#### RESUMEN DE CAPITULOS:

En el capítulo 1 se analiza teóricamente el problema de una película dieléctrica con una superficie rugosa sobre un sustrato metálico. Se plantean las ecuaciones y las condiciones de frontera que satisfacen los campos esparcidos. El resultado queda expresado como una ecuación integral, ecuaciones reducidas de Rayleigh, que relaciona las amplitudes de los campos a la amplitud de la onda incidente, a las propiedades ópticas y geométricas del sistema.

Posteriormente, las ecuaciones reducidas de Rayleigh son resueltas teóricamente a través del método perturbativo y se obtiene el coeficiente diferencial de reflexión (CDR) promedio hasta cuarto orden en la altura de la rugosidad.

Se obtiene la relación de dispersión de los modos guiados transversales magnéticos (TM) y transversales eléctricos (TE) que soporta una película dieléctrica sobre un sustrato metálico.

Los resultados numéricos son presentados y discutidos en el capítulo 2, y se obtienen a partir de la programación, en lenguaje Fortran, de las ecuaciones obtenidas. Primero se obtiene el esparcimiento de luz para el sistema CP/dieléctrico/aire para comparar con resultados obtenidos por otros autores y así validar que el algoritmo usado es correcto. Y en seguida se proponen dos conjuntos de parámetros ópticos adecuados a los materiales y valores de rugosidad que se podrán obtener en el laboratorio de películas delgadas de este centro, para llevar a cabo un experimento en el que se mida el esparcimiento de un sistema metal/dieléctrico/aire, así como los picos satélite. Se proponen los parámetros para analizar una película iluminada con luz visible y otra película iluminada con luz en el infrarrojo. Por último se analiza la validez del método perturbativo con respecto a la altura de la rugosidad.

En el capítulo 3 se dan las conclusiones generales que se derivan del análisis de los resultados del capítulo anterior.

# Capítulo 1

## Películas Delgadas

Para analizar las propiedades ópticas de una película delgada, vamos a considerar que los medios que la rodean y la capa misma son isotrópicos, homogéneos, no magnéticos, no contienen carga externa y que se comportan de manera lineal ante un campo electromagnético externo que se le aplique. Existe un amplio conjunto de materiales, metálicos y dieléctricos, que tienen estas cualidades en la región visible y en el cercano infrarrojo del espectro electromagnético.

### 1.1 Las Ecuaciones de Maxwell

Bajo estas condiciones, las ecuaciones de Maxwell, expresadas en unidades gaussianas, que describen el comportamiento de un campo electromagnético son

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.4)$$

donde  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  son el campo eléctrico, desplazamiento eléctrico, el campo magnético y la inducción magnética, respectivamente. La constante  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío.

Cuando el material, de constante dieléctrica compleja  $\varepsilon = (n + ik)^2$  y permeabilidad magnética  $\mu$ , responde de manera lineal ante la interacción de una onda electromagnética. las relaciones constitutivas entre estos campos quedan:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.6)$$

El sentido físico de una constante dieléctrica compleja es la representación de la absorción de energía por el medio. Ya que en este trabajo queremos analizar las propiedades ópticas de materiales no magnéticos, tenemos que la permeabilidad magnética  $\mu = 1$ .

Asumiendo una dependencia temporal  $\exp(-i\omega t)$  para los campos, donde  $\omega$  es la frecuencia de la onda electromagnética; a partir de las ecuaciones (1.1) a (1.4), y usando las relaciones constitutivas, ecuaciones (1.5) y (1.6), se obtiene una ecuación diferencial con la forma de una ecuación de Helmholtz:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{U}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.7)$$

donde  $\mathbf{U}(\mathbf{r})$  representa a los campos eléctrico o magnético.

Consideremos dos medios semi-infinitos, separados por una película delgada de constante dieléctrica  $\varepsilon_2 = (n_2 + ik_2)^2$  y espesor  $d_2$ , el primer medio es el vacío con constante dieléctrica  $\varepsilon_1 = n_1^2$  ( $n_1 = 1$ ) y el otro medio es el sustrato (metal) de constante dieléctrica  $\varepsilon_3 = (n_3 + ik_3)^2$ . El diagrama de este arreglo se muestra en la figura 1.1.

La rugosidad está representada por una función aleatoria  $f_1(y)$  que es diferenciable, además cumple la condición  $\max[f_1(y)] \ll d_2$ . En este diagrama el campo incidente con vector de onda  $\mathbf{k}$ , linealmente polarizado (eléctrico para polarización  $s$  o magnético para polarización  $p$ ), oscila paralelamente a los surcos de la rugosidad, de tal manera que es invariante ante una traslación sobre el eje  $x$ . En este esquema solo se observa el esparcimiento en un punto de la frontera, pero debe tenerse en cuenta que esto sucede para todos los puntos a lo largo de la frontera. También debe tomarse en cuenta que parte del campo incidente penetra dentro de la película y se refleja en el sustrato metálico, esta situación no está esquematizada totalmente en la figura 1.1 para mejor claridad.

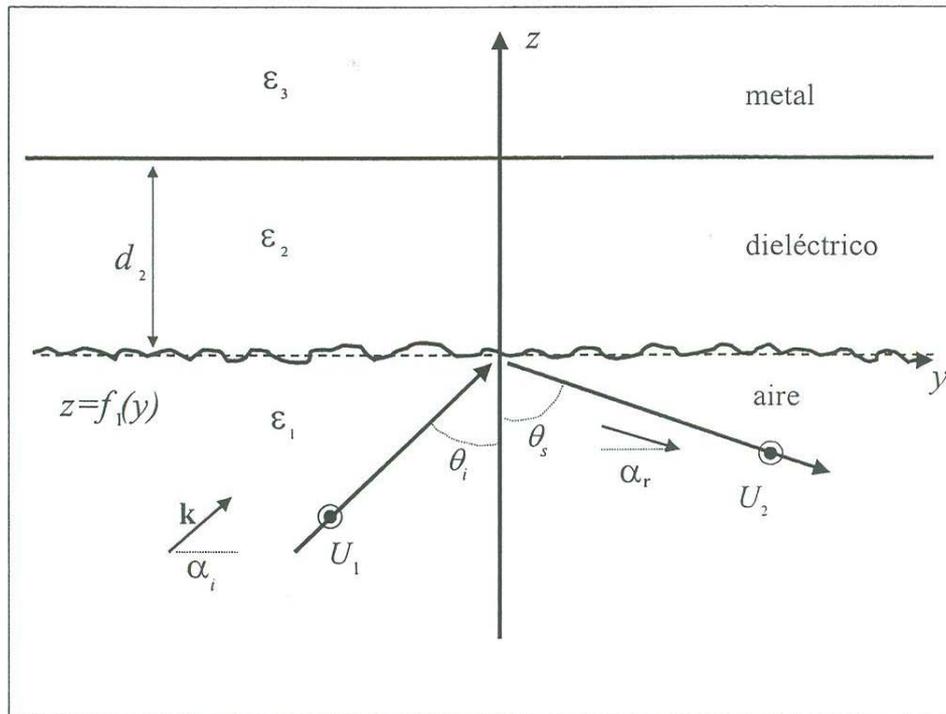


Figura 1.1: Película dieléctrica de espesor  $d_2$  con superficie rugosa, caracterizada por  $f_1(y)$ , depositada sobre un sustrato. Una onda con amplitud  $U_1$  incide a un ángulo  $\theta_i$  y se esparce a los ángulos  $\theta_s$ .

## 1.2 Las Condiciones en las Fronteras

En la interface, vacío/película  $z = f_1(y)$ , las componentes tangenciales  $[(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B})_y$  y  $(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E})_x$  en polarización  $p$  o  $(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E})_y$  y  $(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B})_x$  para el caso de polarización  $s$ , ver apéndice I] de los campos deben ser continuas:

$$U_2[y, z = f_1(y)] = U_1[y, z = f_1(y)] \quad (1.8)$$

$$\frac{1}{w_2} \frac{\partial}{\partial n} U_2[y, z = f_1(y)] = \frac{1}{w_1} \frac{\partial}{\partial n} U_1[y, z = f_1(y)] \quad (1.9)$$

y en la interface película/sustrato  $z = d_2$ , también las componentes tangenciales de los campos son continuas

$$U_3(y, z = d_2) = U_2(y, z = d_2) \quad (1.10)$$

$$\frac{1}{w_3} \frac{\partial}{\partial z} U_3(y, z = d_2) = \frac{1}{w_2} \frac{\partial}{\partial z} U_2(y, z = d_2) \quad (1.11)$$

donde  $w_j = 1$  para polarización  $s$  y  $w_j = \varepsilon_j$  en el caso de polarización  $p$ . Además se tiene

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla U = \left\{ 1 + [f_1'(y)]^2 \right\}^{-1/2} \left[ -f_1'(y) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right] U \quad (1.12)$$

Aquí  $\hat{\mathbf{n}}$  es un vector unitario normal a la superficie rugosa en un punto  $f_1(y)$  arbitrario y  $f_1'(y)$  es su derivada.

Una onda de amplitud unitaria (del campo magnético para polarización  $p$  o del campo eléctrico para polarización  $s$ ) que incide sobre la superficie, a un ángulo  $\theta_i$  con respecto al eje  $z$ , se propaga en el plano perpendicular al eje  $x$ , por lo tanto es independiente de  $x$ : está descrita por

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}) = U_i(y, z) \hat{\mathbf{i}} \quad (1.13)$$

$$U_i(y, z) = e^{i[\alpha_i y + \beta_1(\alpha_i) z]} \quad (1.14)$$

donde  $\alpha_i = (\omega/c) \sqrt{\varepsilon_1} \sin \theta_i$  y  $\beta_1(\alpha_i) = (\omega/c) \sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_i = \sqrt{(\omega/c)^2 \varepsilon_1 - \alpha_i^2}$  son las componentes paralela y perpendicular del vector de onda incidente, respectivamente.

Como el campo incidente magnético (o eléctrico), dependiendo de la polarización lineal elegida, solo tiene componente paralela a los surcos de la rugosidad, entonces los campos electromagnéticos esparcidos en cada medio son invariantes ante una traslación en la dirección  $x$ , así, los campos solo dependen de la componentes espaciales  $y$  y  $z$ .

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}) = U_j(y, z) \hat{\mathbf{i}}. \quad (1.15)$$

Además, recordemos que estos campos deben satisfacer la ecuación de Helmholtz en cada uno de los medios.

Para resolver la ecuación (1.7) proponemos la solución como la transformada de Fourier de una función  $V_j(\alpha, z)$  con respecto a la variable  $y$

$$U_j(y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha V_j(\alpha, z) e^{i\alpha y} \quad (1.16)$$

sustituyendo en la ecuación de Helmholtz, se encuentra una ecuación diferencial de segundo orden para  $V_j(\alpha, z)$  cuya solución es directa. Sustituyendo esta solución en la ecuación (1.16) se obtienen los campos, como una superposición de ondas planas. para

cada región caracterizadas por  $\varepsilon_j$ :

$$U_j(y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \left\{ a(\alpha) e^{i[\alpha y + \beta_j(\alpha)z]} + b(\alpha) e^{i[\alpha y - \beta_j(\alpha)z]} \right\} \quad (1.17)$$

donde  $\alpha = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon_j} \sin \theta$  y  $\beta_j(\alpha) = \sqrt{(\omega/c)^2 \varepsilon_j - \alpha^2}$  son las componentes paralela y perpendicular del vector de onda esparcido, respectivamente. Además, estas soluciones deben de satisfacer las condiciones de frontera que se presentaron anteriormente y donde ya se incluye la rugosidad. Antes de hacer esto analizaremos los modos guiados soportados por un capa lisa.

### 1.3 Modos Guiados en una Película con Interfaces Lisas

El sistema descrito en la figura 1.1 puede ser visto como una guía de ondas, es decir, la película puede soportar modos guiados, que son excitaciones electromagnéticas que transportan energía a lo largo de la guía y cuyos campos decaen exponencialmente en la dirección perpendicular a la superficie. Para examinar las características de los modos guiados, calculamos su relación de dispersión (RD), considerando la película con interfaces lisas.

La solución para el campo en el primer medio es:

$$A_1(y, z) = r_o(q) e^{i[qy - \beta_1(q)z]}, \quad (1.18)$$

donde  $r_o(q)$  es la amplitud del modo en el vacío y se desconoce su valor *a priori*. La componente del vector de onda  $\beta_1(q) = \sqrt{(\omega/c)^2 \varepsilon_1 - q^2}$  es imaginario porque los modos decaen fuera de la película, una característica que debe satisfacer todo modo. De esta condición se obtiene  $(\omega/c)\sqrt{\varepsilon_1} \leq q$ .

El campo dentro de la película tiene la siguiente forma,

$$A_2(y, z) = \frac{r_o(q)w_2}{2\beta_2(q)} e^{iqy} \left\{ - \left[ \frac{\beta_1(q)}{w_1} - \frac{\beta_2(q)}{w_2} \right] e^{+i\beta_2(q)z} + \left[ \frac{\beta_1(q)}{w_1} + \frac{\beta_2(q)}{w_2} \right] e^{-i\beta_2(q)z} \right\}, \quad (1.19)$$

donde  $\beta_2(q) = \sqrt{(\omega/c)^2 \varepsilon_2 - q^2}$  es positivo porque los modos oscilan dentro de la película. De esta condición se obtiene  $q \leq (\omega/c)\sqrt{\varepsilon_2}$ . En el metal se tiene:

$$A_3(y, z) = \frac{r_o(q)w_2}{2\beta_2(q)} e^{i[qy + \beta_3(q)(z-d_2)]} \times \left\{ - \left[ \frac{\beta_2(q)}{w_2} - \frac{\beta_3(q)}{w_3} \right] e^{+i\beta_2(q)d_2} + \left[ \frac{\beta_2(q)}{w_2} + \frac{\beta_3(q)}{w_3} \right] e^{-i\beta_2(q)d_2} \right\} \quad (1.20)$$

esta solución decae exponencialmente para  $z > d_2$ .

Sustituyendo  $A_2(y, z)$  y  $A_3(y, z)$  en la condición de frontera dada por las ecuaciones 1.9 y 1.11, se obtiene la condición:

$$\left[ \frac{\beta_1(q)}{w_1} - \frac{\beta_2(q)}{w_2} \right] \left[ \frac{\beta_2(q)}{w_2} - \frac{\beta_3(q)}{w_3} \right] e^{+i\beta_2(q)d_2} + \left[ \frac{\beta_1(q)}{w_1} + \frac{\beta_2(q)}{w_2} \right] \left[ \frac{\beta_2(q)}{w_2} + \frac{\beta_3(q)}{w_3} \right] e^{-i\beta_2(q)d_2} = 0 \quad (1.21)$$

Resolviendo esta ecuación para  $q$ , fijando la longitud de onda  $\lambda$  y variando el espesor  $d_2$  de la película, se obtiene la relación de dispersión  $d_2(q)$  de los modos guiados TM y TE. En el caso de que  $w_1 = w_2 = w_3 = 1$  se obtienen los modos TE y  $A(y, z)$  es la componente  $x$  del campo eléctrico, mientras que para  $w_1 = \varepsilon_1$ ,  $w_2 = \varepsilon_2$  y  $w_3 = \varepsilon_3$  se obtienen los modos TM y  $A(y, z)$  es la componente  $x$  del campo magnético.

En la figura 1.2 se grafica la relación de dispersión de los modos guiados TM y TE para una película dieléctrica de  $\text{MgF}_2$ , de constante dieléctrica  $\varepsilon_2 = 1.37^2$  sobre un sustrato de Au, cuya constante dieléctrica es  $\varepsilon_3 = (0.18 + i2.98)^2$ , a una longitud de onda  $\lambda = 632.8$  nm. De esta manera, podemos elegir el espesor  $d_2$  del dieléctrico para que la guía de ondas soporte un determinado número de modos de oscilación. Las constantes ópticas de los materiales analizados en este trabajo fueron obtenidos de [5] y el código, en lenguaje Fortran, del programa que calcula la relación de dispersión  $d_2(q)$  se transcribe en el apéndice II. a).

La línea horizontal  $d_2 = 774$  nm indica que para este espesor se tienen dos modos guiados  $q_1^{TM} = (\omega/c)1.30$  y  $q_2^{TM} = (\omega/c)1.09$  y el plasmón de superficie  $q_0^{TM} = (\omega/c)1.53$  para los modos TM y  $q_1^{TE} = (\omega/c)1.33$  y  $q_2^{TE} = (\omega/c)1.19$  para los TE. Se observa

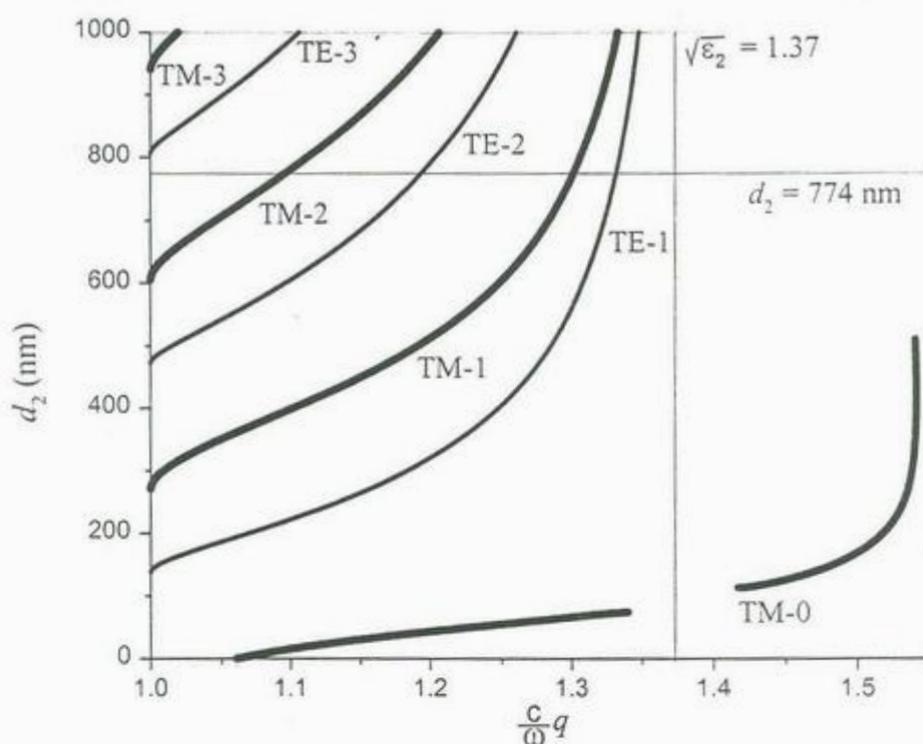


Figura 1.2: Relación de dispersión de los primeros modos guiados y el plasmón de superficie en una película con interfaces lisas. Modos TM (líneas gruesas) y TE (líneas delgadas).

que los modos están localizados entre la línea de luz del vacío  $q = \omega/c$  y del dieléctrico  $q = (\omega/c) \sqrt{\epsilon_2}$ . También se muestra que el plasmón de superficie posee carácter TM, como se espera, y existe para cualquier espesor  $d_2$  de la película.

Con estos valores de  $q_1^{TX}$  y  $q_2^{TX}$ , donde TX son TM o TE, se obtienen los campos  $A_1(y, z)$ ,  $A_2(y, z)$  y  $A_3(y, z)$  dados por las ecuaciones (1.18), (1.19) y (1.20); para cada tipo de modo de oscilación.

En la Figura 1.3 se grafica el módulo del campo magnético y eléctrico, normalizado a la amplitud del campo en el vacío, a lo largo de la dirección perpendicular a la película.

Los parámetros del sistema son los mismos que se usaron para la gráfica de la figura

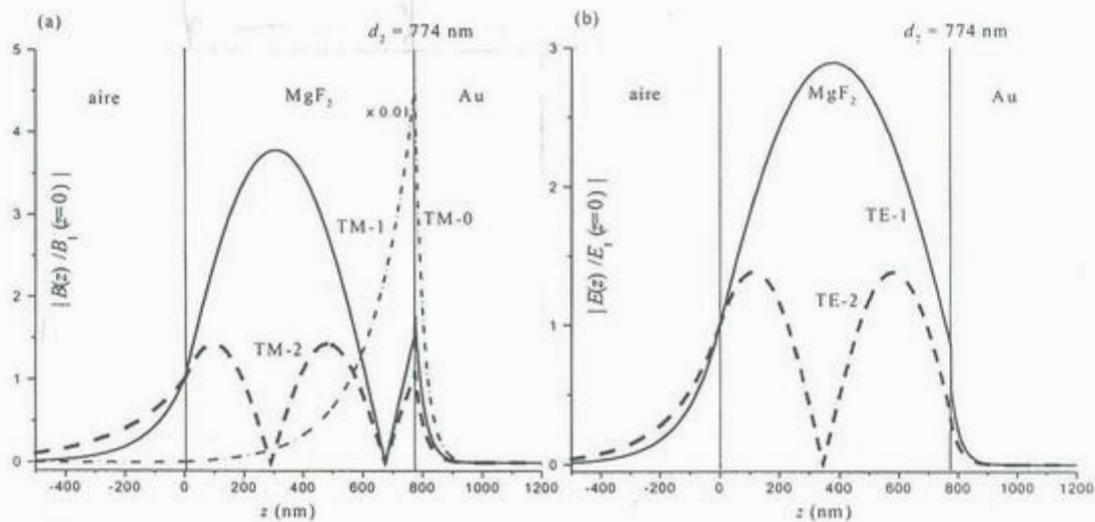


Figura 1.3: Modos guiados en una película dieléctrica lisa con espesor  $d_2 = 774$  nm, depositada sobre un metal. (a) Modos guiados TM-1 (—), TM-2 (---) y el plasmón de superficie TM-0 (-·-·-·-·-). (b) Modos guiados TE-1 (—) y TE-2 (---).

1.2. En la figura 1.3 (a), el primer modo TM-0 (---) es el plasmón de superficie, decae rápidamente dentro del metal, mientras que los modos TM-1 (—) y TM-2 (- - - -) son oscilatorios dentro de la película y su amplitud es mucho menor que la del plasmón de superficie TM-0.

En la Figura 1.3 (b) se grafica el módulo del campo eléctrico, normalizado a la amplitud del campo en el vacío, a lo largo de la dirección perpendicular a la película. Los modos TE-1 (—) y TE-2 (- - - -) son oscilatorios y ambos decaen fuera de la película.

Tanto los modos TM como los TE de una película pueden ser acoplados con luz monocromática que incide sobre su superficie rugosa. Cuando la película tiene rugosidad en la interface aire/dieléctrico, esta rugosidad actúa como acoplador, entonces los modos guiados TM o TE dentro de la película pueden ser excitados con luz monocromática.

## 1.4 La Superficie Rugosa

El esparcimiento de las ondas electromagnéticas se debe a la superficie rugosa que separa la película y el vacío. La superficie está representada por  $z = f_1(y)$ , donde consideramos que  $f_1(y)$  es una función aleatoria con valor promedio  $\langle f_1(y) \rangle = 0$  y con una altura rms  $h = \langle f_1^2(y) \rangle^{1/2}$ . Vista en tres dimensiones, la superficie rugosa tiene surcos orientados a lo largo de la dirección  $x$ . Además de las propiedades estadísticas de la rugosidad mencionadas, su autocorrelación está dada por

$$\langle f_1(y)f_1(y') \rangle = \bar{g}(y - y') \quad (1.22)$$

donde  $y$  y  $y'$  representan dos puntos distintos y  $\bar{g}(y - y')$  es la función de autocorrelación, esta es una comparación entre la función  $f_1(y)$  y su valor en otro punto  $f_1(y')$ . A la transformada de Fourier de la función de autocorrelación se le llama espectro de rugosidad, en alusión al espectro de potencia que se usa en teoría de señales aleatorias.

En este trabajo se utilizan dos tipos de espectros de rugosidad, el espectro de rugosidad gaussiano  $G$  dado por

$$g(|\alpha|) = \frac{\sigma h^2}{2\sqrt{\pi}} e^{-\sigma^2 \alpha^2/4}, \quad (1.23)$$

donde  $h$  es la raíz media cuadrática de la altura de la rugosidad, y  $\sigma$  es la longitud de correlación.

El otro espectro de rugosidad es el West-O'Donnell WO (rectangular), que esta dado por

$$g(|\alpha|) = \begin{cases} \frac{h^2}{2|K_{\max}^{TX} - K_{\min}^{TX}|} & \text{si } K_{\min}^{TX} \leq |\alpha| \leq K_{\max}^{TX} \\ 0 & \text{en otro lugar.} \end{cases}, \quad (1.24)$$

donde  $K_{\max}^{TX}$  y  $K_{\min}^{TX}$  son constantes que indican los extremos del espectro de rugosidad. Ambos espectros de rugosidad cumplen con la condición

$$\int d\alpha g(|\alpha|) = h^2 \quad (1.25)$$

En la figura 1.4 se muestran ambos espectros de rugosidad. El espectro WO se calcula con  $K_{\max}^{TM} = q_1^{TM} + \Delta = (\omega/c)1.44$  y  $K_{\min}^{TM} = q_2^{TM} - \Delta = (\omega/c)0.95$  con  $\Delta = (\omega/c)0.14$ , estos valores son elegidos para que contengan los números de onda  $q_1^{TM}$  y  $q_2^{TM}$  (que se calcularon en la sección 1.3) de los modos guiados TM-1 y TM-2, aunque en este caso también contiene los TE-1 y TE-2 de la película de  $\text{MgF}_2$ , mientras que para el espectro G se grafica para  $\sigma = 100$  nm.

Se han elegido estos parámetros del espectro de rugosidad WO para que los números de onda de los modos guiados TM esten colocados simétricamente dentro de la ventana  $|K_{\max}^{TM} - K_{\min}^{TM}|$ . Este espectro está optimizado para los modos TM, pero los modos TE quedan dentro de una región  $g(|\alpha|) \neq 0$ . Como demostraremos más adelante, esta elección será necesaria si se quieren observar los picos satélite en la respuesta angular del esparcimiento de luz por el sistema considerado, en este sentido, diremos que el espectro es adecuado para ambos tipos de modos guiados.

## 1.5 Película con Superficie Rugosa

La onda electromagnética incide desde el vacío sobre la superficie  $z = f_1(y)$ , se esparce y se transmite a través de la película.

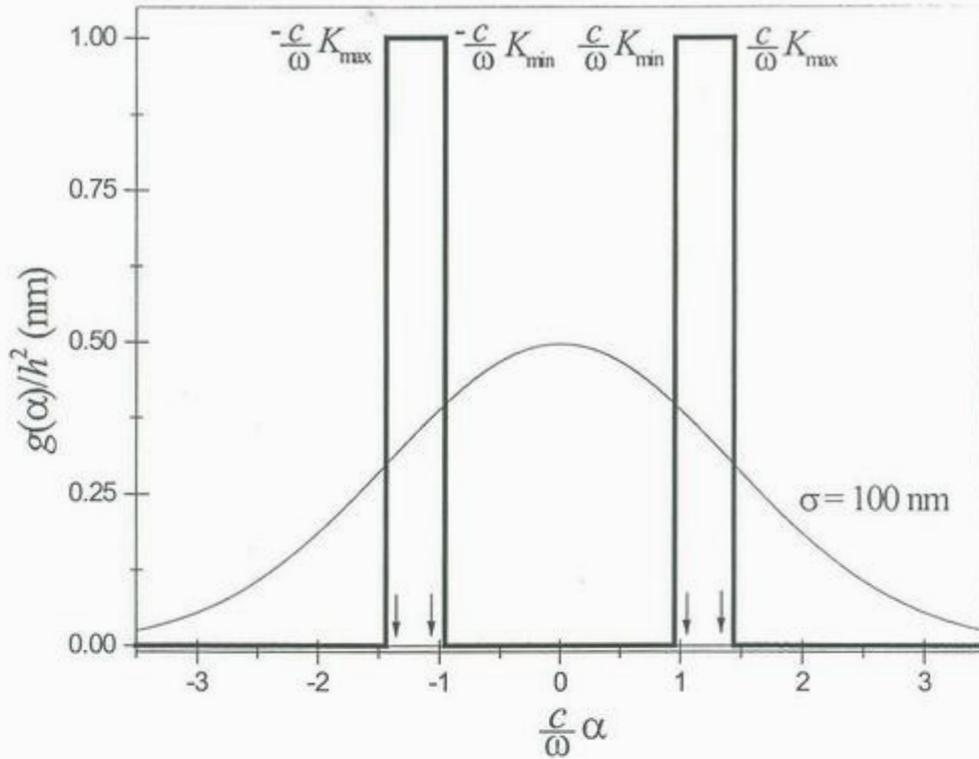


Figura 1.4: Espectros de rugosidad, gaussiano con  $\sigma = 100$  nm y el espectro WO para  $K_{\max} = (\omega/c)1.44$  y  $K_{\min} = (\omega/c)0.95$ . Las flechas indican las posiciones de los números de onda  $\pm q_1^{TM}$  y  $\pm q_2^{TM}$  de los modos guiados en TM de la película Au/MgF<sub>2</sub>/aire.

De acuerdo a las ecuaciones de Maxwell, para una onda que se comporta armónicamente en el tiempo con frecuencia  $\omega$ , los campos  $U_j(y, z)$  cumplen con la ecuación de Helmholtz, ecuación (1.7), excepto en la región de rugosidad, sin embargo, si la altura de la rugosidad es mucho menor que la longitud de onda de la luz incidente, es decir, cumple con la condición de Rayleigh, que restringe la altura de la rugosidad ( $h \ll \lambda$ ), las soluciones son válidas en ésta región.

La solución en el vacío está dada por la superposición del campo incidente, ec. (1.14), más el campo esparcido

$$U_1(y, z) = e^{i[\alpha_i y + \beta_1(\alpha_i)z]} + \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha r(\alpha) e^{i[\alpha y - \beta_1(\alpha)z]} \quad (1.26)$$

dentro de la película

$$U_2(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \{ a(\alpha) e^{i[\alpha y + \beta_2(\alpha)z]} + b(\alpha) e^{i[\alpha y - \beta_2(\alpha)z]} \} \quad (1.27)$$

donde  $a(\alpha)$  y  $b(\alpha)$  son las amplitudes de los campos dentro de la película dieléctrica, para el sustrato se tiene

$$U_3(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha t(\alpha) e^{i[\alpha y + \beta_3(\alpha)z]} \quad (1.28)$$

donde  $t(\alpha)$  representa la amplitud del campo dentro del sustrato, y  $\alpha_i = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon_1} \sin \theta_i$  es la componente paralela del vector de onda incidente y las componentes perpendiculares están dadas por  $\beta_j(\alpha) = \sqrt{(\omega/c)^2 \varepsilon_j - \alpha^2}$ . Si las cantidades  $\varepsilon_j$ ,  $\omega$  y  $\theta_i$  son conocidas, por lo tanto, se pueden determinar las amplitudes de los campos  $r(\alpha)$ ,  $a(\alpha)$ ,  $b(\alpha)$  y  $t(\alpha)$ , para un espectro de rugosidad  $g(\alpha)$  arbitrario que caracteriza la rugosidad de la película.

Para encontrar la amplitud de los campos, se sustituye  $U_j(y, z)$  en las condiciones de frontera (1.8)-(1.11) y se obtiene un conjunto de cuatro ecuaciones acopladas, que involucran las amplitudes  $r(\alpha)$ ,  $a(\alpha)$ ,  $b(\alpha)$  y  $t(\alpha)$ . A continuación se detalla este proceso.

Sustituyendo los campos dados por las ecs. (1.26) y (1.27) en las condiciones de frontera, ecs. (1.8) y (1.9), evaluadas en la interface aire/película  $z = f_1(y)$ , se obtiene el siguiente par de ecuaciones:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \{ a(\alpha) e^{i[\alpha y + \beta_2(\alpha)f_1(y)]} + b(\alpha) e^{i[\alpha y - \beta_2(\alpha)f_1(y)]} \} = e^{i[\alpha_i y + \beta_1(\alpha_i)f_1(y)]} + \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha r(\alpha) e^{i[\alpha y - \beta_1(\alpha)f_1(y)]} \quad (1.29)$$

y

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{i}{w_2 \sqrt{1 + [f_1'(y)]^2}} [-f_1'(y)\alpha + \beta_2(\alpha)] a(\alpha) e^{i[\alpha y + \beta_2(\alpha)f_1(y)]} + \\ & \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{i}{w_2 \sqrt{1 + [f_1'(y)]^2}} [-f_1'(y)\alpha - \beta_2(\alpha)] b(\alpha) e^{i[\alpha y - \beta_2(\alpha)f_1(y)]} = \\ & \frac{i}{w_1 \sqrt{1 + [f_1'(y)]^2}} [-f_1'(y)\alpha_i - \beta_1(\alpha_i)] e^{i[\alpha_i y + \beta_1(\alpha_i)f_1(y)]} + \\ & \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{i}{w_1 \sqrt{1 + [f_1'(y)]^2}} [-f_1'(y)\alpha - \beta_1(\alpha)] r(\alpha) e^{i[\alpha y - \beta_1(\alpha)f_1(y)]} \end{aligned} \quad (1.30)$$

Ahora, Sustituyendo los campos dados por las ecs. (1.27) y (1.28) en las condiciones de frontera, ecs. (1.10) y (1.11), evaluadas en la interface aire/película  $z = d_2$ , se obtiene el siguiente par de ecuaciones:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha t(\alpha) e^{i[\alpha y + \beta_3(\alpha)d_2]} = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha a(\alpha) e^{i[\alpha y + \beta_2(\alpha)d_2]} + \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha b(\alpha) e^{i[\alpha y - \beta_2(\alpha)d_2]} \quad (1.31)$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{i\beta_3(\alpha)}{w_3} t(\alpha) e^{i[\alpha y + \beta_3(\alpha)d_2]} = \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{+i\beta_2(\alpha)}{w_2} a(\alpha) e^{i[\alpha y + \beta_2(\alpha)d_2]} + \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{-i\beta_2(\alpha)}{w_2} b(\alpha) e^{i[\alpha y - \beta_2(\alpha)d_2]} \quad (1.32)$$

De esta manera se ha obtenido un sistema de cuatro ecuaciones acopladas para las amplitudes de los campos  $r(\alpha)$ ,  $a(\alpha)$ ,  $b(\alpha)$  y  $t(\alpha)$ , en términos de los parámetros conocidos del sistema.

Para desacoplar estas ecuaciones y obtener las amplitudes del campo, en este caso  $r(\alpha)$ , se emplea un método algebraico [6] que se describe a continuación:

Se multiplica la ecuación (1.29) por  $\frac{1}{w_2} [f_1'(y)\gamma - \beta_2(\gamma)] \exp\{-i[\gamma y - \beta_2(\gamma)f_1(y)]\}$  y a la ecuación (1.30) por el factor  $\exp\{-i[\gamma y - \beta_2(\gamma)f_1(y)]\}$  se suman estas ecuaciones resultantes y se integra sobre la variable  $y$ , agrupando así esta dependencia en una sola integral. Luego, despejamos a  $a(\alpha)$  y  $b(\alpha)$  de la ecuaciones (1.31) y (1.32), es decir, eliminamos  $t(\alpha)$  de esas ecuaciones.

Susituyendo  $a(\alpha)$  y  $b(\alpha)$  en la ecuación anterior se obtiene una ecuación integral para la amplitud del campo reflejado  $r(\gamma)$ , (llamada integral de esparcimiento)

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\gamma G^{(2b)}(\alpha, \gamma) r(\gamma) = H^{(2b)}(\alpha, \alpha_i), \quad (1.33)$$

a este conjunto de ecuaciones también se les conoce con el nombre de ecuaciones reducidas de Rayleigh, donde  $G^{(2b)}(\alpha, \gamma)$  representa al sistema de doble interfaz que se está analizando. Las funciones  $G^{(2b)}(\alpha, \gamma)$  y  $H^{(2b)}(\alpha, \gamma)$  se expresan como

$$G^{(2b)}(\alpha, \gamma) = D^{(1)}(\alpha, \gamma) D^{(2)}(\alpha, \alpha) I^{(1)}\{-[\beta_1(\gamma) + \beta_2(\alpha)]\} e^{+i\beta_2(\alpha)d_2} + C^{(1)}(\alpha, \gamma) C^{(2)}(\alpha, \alpha) I^{(1)}\{-[\beta_1(\gamma) - \beta_2(\alpha)]\} e^{-i\beta_2(\alpha)d_2} \quad (1.34)$$

y

$$H^{(2b)}(\alpha, \alpha_i) = C^{(1)}(\alpha, \alpha_i) D^{(2)}(\alpha, \alpha) I^{(1)}\{+[\beta_1(\gamma) - \beta_2(\alpha)]\} e^{+i\beta_2(\alpha)d_2} + \\ D^{(1)}(\alpha, \alpha_i) C^{(2)}(\alpha, \alpha) I^{(1)}\{+[\beta_1(\gamma) + \beta_2(\alpha)]\} e^{-i\beta_2(\alpha)d_2} \quad (1.35)$$

donde las integrales espaciales, que contienen la información de la rugosidad, están dadas por

$$I^{(1)}\{\pm[\beta_1(\gamma) \pm \beta_2(\alpha)]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{i(\gamma-\alpha)y} e^{\pm[\beta_1(\gamma) \pm \beta_2(\alpha)]f_1(y)} \quad (1.36)$$

y los coeficientes, que contienen solo información sobre las propiedades ópticas del sistema, son

$$C^{(j)}(\alpha, \gamma) = \left( \frac{\gamma}{w_j} + \frac{\alpha}{w_{j+1}} \right) \frac{\gamma - \alpha}{\beta_j(\gamma) - \beta_{j+1}(\alpha)} + \left[ \frac{\beta_j(\gamma)}{w_j} + \frac{\beta_{j+1}(\alpha)}{w_{j+1}} \right] \quad (1.37)$$

$$D^{(j)}(\alpha, \gamma) = \left( \frac{\gamma}{w_j} + \frac{\alpha}{w_{j+1}} \right) \frac{\gamma - \alpha}{\beta_j(\gamma) + \beta_{j+1}(\alpha)} + \left[ \frac{\beta_j(\gamma)}{w_j} - \frac{\beta_{j+1}(\alpha)}{w_{j+1}} \right] \quad (1.38)$$

con  $j = 1, 2$ . Estos coeficientes dependen de las componentes paralelas  $\gamma$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha_i$  y perpendiculares  $\beta_j(\gamma)$ ,  $\beta_j(\alpha)$  y  $\beta_j(\alpha_i)$  del vector de onda, respectivamente.

## 1.6 Solución Perturbativa

La ec. 1.33 puede ser resuelta considerando que la razón altura de la rugosidad a la longitud de onda es muy pequeña, es decir, considerando la hipótesis de Rayleigh. Por medio del desarrollo en series del integrando de las integrales espaciales  $I^{(1)}\{\pm[\beta_1(\gamma) \pm \beta_2(\alpha)]\}$ , las funciones  $G^{(2b)}(\alpha, \gamma)$  y  $H^{(2b)}(\alpha, \alpha_i)$ , pueden ser escritas de la forma siguiente,

$$G^{(2b)}(\alpha, \gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} F_{\alpha-\gamma}^{(n)} G^{(n)}(\alpha, \gamma) \quad (1.39)$$

$$H^{(2b)}(\alpha, \alpha_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} F_{\alpha-\alpha_i}^{(n)} H^{(n)}(\alpha, \alpha_i) \quad (1.40)$$

siendo  $F_{\alpha-\gamma}^{(n)}$  la transformada de Fourier de la función perfil elevada a la  $n$ -ésima potencia, que se define como

$$F_{\alpha-\gamma}^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy f_1^n(y) e^{i(\gamma-\alpha)y} \quad (1.41)$$

y las funciones  $G^{(n)}(\alpha, \gamma)$  y  $H^{(n)}(\alpha, \alpha_i)$  son

$$\begin{aligned} G^{(n)}(\alpha, \gamma) = & D^{(1)}(\alpha, \gamma)D^{(2)}(\alpha, \alpha)\{-[\beta_1(\gamma) + \beta_2(\alpha)]\}^n e^{+i\beta_2(\alpha)d_2} + \\ & C^{(1)}(\alpha, \gamma)C^{(2)}(\alpha, \alpha)\{-[\beta_1(\gamma) - \beta_2(\alpha)]\}^n e^{-i\beta_2(\alpha)d_2} \end{aligned} \quad (1.42)$$

y

$$\begin{aligned} H^{(n)}(\alpha, \alpha_i) = & C^{(1)}(\alpha, \alpha_i)D^{(2)}(\alpha, \alpha)\{+[\beta_1(\gamma) - \beta_2(\alpha)]\}^n e^{+i\beta_2(\alpha)d_2} + \\ & D^{(1)}(\alpha, \alpha_i)C^{(2)}(\alpha, \alpha)\{+[\beta_1(\gamma) + \beta_2(\alpha)]\}^n e^{-i\beta_2(\alpha)d_2} \end{aligned} \quad (1.43)$$

El código de programación para calcular las funciones  $G^{(n)}(\alpha, \gamma)$  y  $H^{(n)}(\alpha, \alpha_i)$ , ecuaciones (1.42) y (1.43), se transcribe en el apéndice II.b).

Si la altura de la rugosidad cumple con la condición de Rayleigh,  $h \ll \lambda$ , la amplitud del campo reflejado puede escribirse como

$$r(\gamma) = r^{(0)}(\gamma) + r^{(1)}(\gamma) + r^{(2)}(\gamma) + r^{(3)}(\gamma) + \dots \quad (1.44)$$

ahora, sustituyendo este desarrollo en series para  $r(\gamma)$ , las funciones  $G^{(2b)}(\alpha, \gamma)$  y  $H^{(2b)}(\alpha, \alpha_i)$ , dadas por las ecuaciones (1.39) y (1.40); en la integral de esparcimiento, ecuación (1.33), y reagrupando términos, se obtiene una relación de recurrencia para la amplitud de los campos  $r^{(k)}(\gamma)$ :

$$\sum_{n=0}^k \frac{i^n}{n!} \int d\gamma F_{\alpha-\gamma}^{(n)} G^{(n)}(\alpha, \gamma) r^{(k-n)}(\gamma) = \frac{i^k}{k!} F_{\alpha-\alpha_i}^{(k)} H^{(k)}(\alpha, \alpha_i) \quad (1.45)$$

y de esta ecuación se encuentra el campo reflejado hasta el tercer orden en la altura de la rugosidad. Para simplificar un poco lo que sigue definimos la función

$$E^{(k)}(\alpha, \alpha_i) = H^{(k)}(\alpha, \alpha_i) - G^{(k)}(\alpha, \alpha_i)r^{(0)}(\alpha_i) \quad (1.46)$$

Ahora, desarrollado para cada valor de  $k$ , se encuentra que el primer término, para  $k = 0$  es

$$r^{(0)}(\alpha) = \frac{H^{(0)}(\alpha, \alpha_i)}{G^{(0)}(\alpha, \alpha)} \delta(\alpha - \alpha_i) \quad (1.47)$$

para  $k = 1$  se tiene

$$r^{(1)}(\alpha) = i \frac{E^{(1)}(\alpha, \alpha_i)}{G^{(0)}(\alpha, \alpha)} F_{\alpha-\alpha_i}^{(1)} \quad (1.48)$$

para  $k = 2$  es

$$r^{(2)}(\alpha) = \frac{1}{G^{(0)}(\alpha, \alpha)} \int d\gamma G^{(1)}(\alpha, \gamma) \frac{E^{(1)}(\gamma, \alpha_i)}{G^{(0)}(\gamma, \gamma)} F_{\alpha-\gamma}^{(1)} F_{\gamma-\alpha_i}^{(1)} - \frac{E^{(2)}(\alpha, \alpha_i)}{2G^{(0)}(\alpha, \alpha)} \int d\gamma F_{\gamma}^{(1)} F_{\alpha-\alpha_i-\gamma}^{(1)} \quad (1.49)$$

para  $k = 3$ , se tiene

$$\begin{aligned} r^{(3)}(\alpha) = & -\frac{i}{G^{(0)}(\alpha, \alpha)} \int \frac{G^{(1)}(\alpha, \gamma)}{G^{(0)}(\gamma, \gamma)} \int d\eta \frac{G^{(1)}(\gamma, \eta)}{G^{(0)}(\eta, \eta)} E^{(1)}(\eta, \alpha_i) F_{\alpha-\gamma}^{(1)} F_{\gamma-\eta}^{(1)} F_{\eta-\alpha_i}^{(1)} \\ & + \frac{i}{2G^{(0)}(\alpha, \alpha)} \int d\gamma \frac{G^{(1)}(\alpha, \gamma)}{G^{(0)}(\gamma, \gamma)} E^{(2)}(\gamma, \alpha_i) \int d\eta F_{\alpha-\gamma}^{(1)} F_{\eta}^{(1)} F_{\gamma-\alpha_i-\eta}^{(1)} \\ & + \frac{i}{2G^{(0)}(\alpha, \alpha)} \int d\gamma \frac{G^{(2)}(\alpha, \gamma)}{G^{(0)}(\gamma, \gamma)} E^{(1)}(\gamma, \alpha_i) \int d\eta F_{\eta}^{(1)} F_{\alpha-\gamma-\eta}^{(1)} F_{\gamma-\alpha_i}^{(1)} \\ & - \frac{iE^{(3)}(\alpha, \alpha_i)}{6G^{(0)}(\alpha, \alpha)} \int d\gamma \int d\eta F_{\gamma}^{(1)} F_{\eta}^{(1)} F_{\alpha-\alpha_i-\gamma-\eta}^{(1)} \end{aligned} \quad (1.50)$$

Como se podrá constatar más adelante, la información más relevante se obtiene hasta el orden que se está considerando.

## 1.7 Coeficiente Diferencial de Reflexión CDR

Se define el Coeficiente Diferencial de Reflexión CDR promedio como la fracción de energía total incidente sobre la superficie que es esparcida alrededor del ángulo de esparcimiento  $\theta_s$  en el intervalo  $d\theta_s$ :

$$\left\langle \frac{dR}{d\theta_s} \right\rangle = \frac{\cos^2 \theta_s}{\cos \theta_i} \langle |r(\alpha)|^2 \rangle \quad (1.51)$$

Esta expresión puede separarse en dos contribuciones, la contribución coherente está dada por

$$\left\langle \frac{dR}{d\theta_s} \right\rangle_C = \frac{\cos^2 \theta_s}{\cos \theta_i} |\langle r(\alpha) \rangle|^2 \quad (1.52)$$

Usando la aproximación a segundo orden para  $r(\alpha)$ , la contribución coherente del CDR es:

$$\left\langle \frac{dR}{d\theta_s} \right\rangle_C \simeq |r^{(0)}(\alpha)|^2 + 2 \operatorname{Re} [r^{(0)*}(\alpha) \langle r^{(2)}(\alpha) \rangle] \quad (1.53)$$

donde  $r^{(0)}(\alpha)$  está dada por la ecuación (1.47) y el promedio de  $r^{(2)}(\alpha)$  dado por la ecuación (1.49), es

$$\langle r^{(2)}(\alpha) \rangle = \frac{\delta(|\alpha - \alpha_i|)}{G^{(0)}(\alpha_i, \alpha_i)} \left[ \int d\gamma G^{(1)}(\alpha, \gamma) \frac{E^{(1)}(\gamma, \alpha_i)}{G^{(0)}(\gamma, \gamma)} g(|\alpha - \gamma|) - \frac{1}{2} E^{(2)}(\alpha, \alpha_i) \int d\gamma g(|\gamma|) \right] \quad (1.54)$$

donde se han utilizado las propiedades de la transformada de Fourier del apéndice III para evaluar los promedios y  $g(|\alpha - \gamma|)$  es el espectro de rugosidad.

La contribución incoherente del CDR se define como

$$\left\langle \frac{dR}{d\theta_s} \right\rangle_I = \frac{\cos^2 \theta_s}{\cos \theta_i} [\langle |r(\alpha)|^2 \rangle - |\langle r(\alpha) \rangle|^2] \quad (1.55)$$

Usando la aproximación para  $r(\alpha)$  y calculando el CDR hasta cuarto orden, la parte incoherente del CDR queda:

$$\left\langle \frac{dR}{d\theta_s} \right\rangle_I = \frac{\cos^2 \theta_s}{\cos \theta_i} \left\{ \langle r^{(1)}(\alpha) r^{(1)*}(\alpha) \rangle + \left[ \langle r^{(2)}(\alpha) r^{(2)*}(\alpha) \rangle - \langle r^{(2)}(\alpha) \rangle \langle r^{(2)*}(\alpha) \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle r^{(1)*}(\alpha) r^{(3)}(\alpha) \rangle \right] \right\} \quad (1.56)$$

donde se han usado las expresiones dadas para  $r^{(1)}(\alpha)$ ,  $r^{(2)}(\alpha)$  y  $r^{(3)}(\alpha)$  dadas por las ecuaciones (1.48), (1.49) y (1.50). El primer sumando del lado derecho de la igualdad da la contribución a segundo orden en la altura de la rugosidad, mientras que el resto de los sumandos da la contribución a cuarto orden en la altura de la rugosidad. Debido a las propiedades impuestas a la rugosidad no existen contribuciones de orden impar.

Para evaluar los promedios se usan las propiedades de la rugosidad dadas en el apéndice III, y se obtiene

$$\left\langle \frac{dR}{d\theta_s} \right\rangle_I = \frac{\cos^2 \theta_s}{\cos \theta_i} \left[ \left| \frac{E^{(1)}(\alpha, \alpha_i)}{G^{(0)}(\alpha, \alpha)} \right|^2 g(|\alpha - \alpha_i|) + I_{2,2} + 2 \operatorname{Re} I_{1,3} \right] \quad (1.57)$$

donde

$$\begin{aligned} I_{2,2} = & \langle r^{(2)}(\alpha) r^{(2)*}(\alpha) \rangle - \langle r^{(2)}(\alpha) \rangle \langle r^{(2)*}(\alpha) \rangle = \\ & + \frac{1}{|G^{(0)}(\alpha, \alpha)|^2} \left\{ \int d\gamma G^{(1)}(\alpha, \gamma) G^{(1)*}(\alpha, \gamma) \frac{E^{(1)}(\gamma, \alpha_i)}{G^{(0)}(\gamma, \gamma)} \frac{E^{(1)*}(\gamma, \alpha_i)}{G^{(0)*}(\gamma, \gamma)} g(|\alpha - \gamma|) g(|\gamma - \alpha_i|) \right. \\ & \left. + \int d\gamma G^{(1)*}(\alpha, \alpha + \alpha_i - \gamma) E^{(1)}(\gamma, \alpha_i) \frac{G^{(1)}(\alpha, \gamma)}{G^{(0)}(\gamma, \gamma)} \frac{E^{(1)*}(\alpha + \alpha_i - \gamma, \alpha_i)}{G^{(0)*}(\alpha + \alpha_i - \gamma, \alpha + \alpha_i - \gamma)} g(|\alpha - \gamma|) g(|\gamma - \alpha_i|) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \operatorname{Re} \left[ E^{(2)*}(\alpha, \alpha_i) \int d\gamma \frac{G^{(1)}(\alpha, \gamma)}{G^{(0)}(\gamma, \gamma)} E^{(1)}(\gamma, \alpha_i) g(|\alpha - \gamma|) g(|\gamma - \alpha_i|) \right] \\
& + \frac{1}{2} |E^{(2)}(\alpha, \alpha_i)|^2 \int d\gamma g(|\gamma|) g(|\alpha - \alpha_i - \gamma|) \left. \right\} \quad (1.58)
\end{aligned}$$

y la otra integral es

$$\begin{aligned}
I_{1,3} &= \langle r^{(1)*}(\alpha) r^{(3)}(\alpha) \rangle = \\
& - \frac{E^{(1)*}(\alpha, \alpha_i)}{|G^{(0)}(\alpha, \alpha)|^2} g(|\alpha - \alpha_i|) \left[ \frac{G^{(1)}(\alpha, \alpha_i)}{G^{(0)}(\alpha_i, \alpha_i)} \int d\eta \frac{G^{(1)}(\alpha_i, \eta)}{G^{(0)}(\eta, \eta)} E^{(1)}(\eta, \alpha_i) g(|\alpha_i - \eta|) \right. \\
& + \int d\gamma \frac{G^{(1)}(\alpha, \gamma)}{G^{(0)}(\gamma, \gamma)} G^{(1)}(\gamma, \gamma - \alpha + \alpha_i) \frac{E^{(1)}(\gamma - \alpha + \alpha_i, \alpha_i)}{G^{(0)}(\gamma - \alpha + \alpha_i, \gamma - \alpha + \alpha_i)} g(|\alpha - \gamma|) \\
& + \int d\gamma \frac{G^{(1)}(\alpha, \gamma)}{G^{(0)}(\gamma, \gamma)} G^{(1)}(\gamma, \alpha) \frac{E^{(1)}(\alpha, \alpha_i)}{G^{(0)}(\alpha, \alpha)} g(|\alpha - \gamma|) \\
& - \int d\gamma \frac{G^{(1)}(\alpha, \gamma)}{G^{(0)}(\gamma, \gamma)} E^{(2)}(\gamma, \alpha_i) g(|\alpha - \gamma|) \\
& - \left. \int d\gamma \frac{G^{(2)}(\alpha, \gamma)}{G^{(0)}(\gamma, \gamma)} E^{(1)}(\gamma, \alpha_i) g(|\alpha_i - \gamma|) \right. \\
& - \left. \frac{1}{2} \frac{G^{(2)}(\alpha, \alpha)}{G^{(0)}(\alpha, \alpha)} E^{(1)}(\alpha, \alpha_i) - \frac{1}{2} \frac{G^{(1)}(\alpha, \alpha_i)}{G^{(0)}(\alpha_i, \alpha_i)} E^{(2)}(\alpha_i, \alpha_i) + \frac{1}{2} E^{(3)}(\alpha, \alpha_i) \right] \quad (1.59)
\end{aligned}$$

El primer término de la ecuación (1.57), es proporcional a  $h^2$ , por la forma funcional de  $g(|\alpha|)$ , mientras que los términos  $I_{2,2}$  e  $I_{1,3}$  son proporcionales a  $h^4$ . Además, como el primer y tercer términos son proporcionales a  $g(|\alpha - \alpha_i|)$ , sus contribuciones al CDR promedio serán nulas cuando se utilice el espectro de rugosidad WO con  $|K_{\min}^{TX}| \geq \omega/c$ , aún para incidencia oblicua  $\alpha_i \neq 0$  ( $\theta_i \neq 0$ ), en cuyo caso los números de onda  $q_1^{TX}$  y  $q_2^{TX}$  pueden quedar en una región donde  $g(|\alpha - \alpha_i|) = 0$ .

La formulación algebraica para encontrar la parte incoherente del CDR promedio, expresada en la ecuación (1.57), es completamente equivalente a la presentada en [1], esto lo hemos verificado tanto analíticamente como numéricamente y es una generalización de la formulación obtenida en [7] para el CP como sustrato.

## 1.8 Esparcimiento Total Integrado ETI

Cuando la luz incide sobre la superficie rugosa de la película dieléctrica, una parte de la luz se refleja, otra se esparce y una pequeña cantidad es absorbida en el dieléctrico. Si el sustrato es un conductor perfecto la energía no lo penetra y no hay absorción en este material; por otro lado, si el sustrato es metálico, la energía absorbida es pequeña, como se muestra en la figuras 1.3 (a) y 1.3 (b). Como el dieléctrico es débilmente disipativo, la energía absorbida es despreciable, de tal manera que podemos decir que la energía total del sistema está dada por

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta_s \left\langle \frac{dR}{d\theta_s} \right\rangle_C + \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta_s \left\langle \frac{dR}{d\theta_s} \right\rangle_I \simeq 1 \quad (1.60)$$

donde la integral de la parte coherente da la reflectancia  $R_C$  y la otra parte nos da el Esparcimiento Total Integrado ETI (energía total esparcida). Dado que la solución presentada en este trabajo depende de la razón altura promedio a la longitud de onda, se verifica en todo momento que los resultados numéricos sean consistentes con esta ecuación, que físicamente representa el principio de conservación de la energía. Más adelante usaremos esta ecuación para delimitar la validez de esta solución.

## 1.9 Picos Satélite

El origen físico de los picos satélite, además del pico de retroesparcimiento del CDR, se explica mediante el análisis de la diferencia de fase de las ondas electromagnéticas esparcidas.

En la figura 1.5 se muestra una guía de ondas que soporta  $N \geq 2$  modos, una onda incidente mediante su vector de onda  $\mathbf{k}_i$  y la onda esparcida  $\mathbf{k}_s$ . Puesto que la guía de ondas soporta  $N$  modos de oscilación, existen los números de onda de los modos guiados  $q_n^{TX}$  y  $q_m^{TX}$  dentro de la película en la dirección del vector unitario  $\hat{\mathbf{r}}$ , paralelo a los vectores de onda de los modos guiados.

Siguiendo la trayectoria de la onda incidente, la fase de la onda esparcida es

$$\delta\phi = \mathbf{k}_i \cdot \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{k}_s \cdot \hat{\mathbf{r}} \pm q_n^{TX} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \pm q_m^{TX} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (1.61)$$

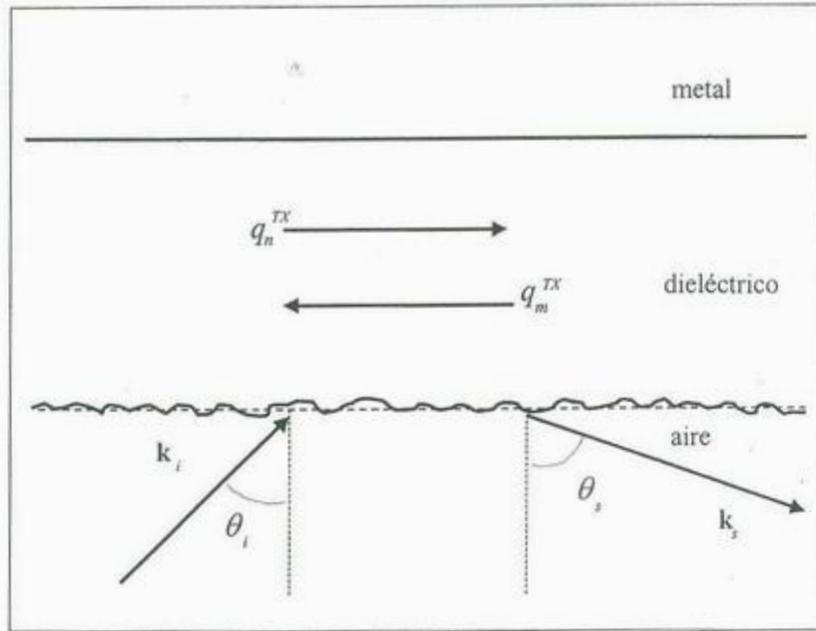


Figura 1.5: Interacción de la luz incidente con los modos guiados en una película dieléctrica.

donde debemos notar que dentro de la película las trayectorias son degeneradas, es decir, debemos considerar todas las posibilidades de la trayectoria con los signos ( $\pm$ ) para el par de modos guiados  $q_{n,m}^{TX}$ . En esta ecuación las trayectorias dentro de la película, que permiten que la fase de la onda esparcida sea cero, son  $-q_n^{TX} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}$  con  $+q_m^{TX} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}$  o bien  $-q_m^{TX} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}$  con  $+q_n^{TX} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}$ , por lo tanto la ecuación (1.61) puede ser escrita como

$$\delta\phi = \mathbf{k}_i \cdot \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{k}_s \cdot \hat{\mathbf{r}} \pm |q_n^{TX} - q_m^{TX}| \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (1.62)$$

A partir de esta ecuación se evidencia que la interferencia constructiva ocurre para la dirección de retroesparcimiento  $\mathbf{k}_s = -\mathbf{k}_i$  con  $n = m$ , dando lugar al pico de retroesparcimiento. Pero también la fase es cero cuando  $n \neq m$ , es decir, habrá interferencia constructiva en otras posiciones angulares, además de la del retroesparcimiento. A estas interferencias constructivas se les denomina picos satélite. Por lo tanto, igualando la ecuación (1.62) a cero, se obtienen las posiciones angulares  $\theta_s$  de los picos satélite y el de

retroesparcimiento:

$$\text{sen } \theta_s = -\text{sen } \theta_i \pm \frac{c}{\omega} (q_n^{TX} - q_m^{TX}) \quad (1.63)$$

es decir, los picos satélite se deben a la interacción de los modos de oscilación de la película con la luz incidente. Si consideramos que la película soporta dos modos guiados, la ecuación anterior queda

$$\text{sen } \theta_s = -\text{sen } \theta_i \pm \frac{c}{\omega} (q_1^{TX} - q_2^{TX}) \quad (1.64)$$

donde  $q_{1,2}^{TX}$  son los números de onda de los modos guiados que soporta la película.

## Capítulo 2

# Resultados y Discusión

La mayor parte de los resultados teóricos que se han reportado son para el cálculo del esparcimiento de luz por una película dieléctrica con superficie rugosa, y son realizados utilizando el espectro de rugosidad gaussiano  $G$ , para el sistema CP/dieléctrico/aire.

En este trabajo, reportamos resultados del esparcimiento de luz monocromática para una película depositada sobre un sustrato metálico (o conductor perfecto). La superficie aire/dieléctrico es rugosa, mientras que la superficie dieléctrico/metal es lisa y se usa el espectro de rugosidad  $WO$  además del gaussiano, las propiedades de la función que caracteriza a la rugosidad fueron dadas en la sección 1.3.

Para verificar nuestros resultados, comparamos el cálculo del CDR promedio para un CP como sustrato. Esto se puede hacer con la mismas ecuaciones obtenidas para el metal, haciendo  $\varepsilon_3 \rightarrow -\infty$ ; o bien resolviendo el problema para el sistema con CP, como en [1].

Además, se hace un análisis de la conservación de energía para tener una referencia acerca de la validez de la aproximación a cuarto orden en la altura de la rugosidad.

### 2.1 Película Dieléctrica sobre Conductor Perfecto

Mediante la aproximación a cuarto orden en la altura de la rugosidad, el CDR promedio es calculado para una película dieléctrica con  $\varepsilon_2 = (1.64 + i0.0023)^2$ , depositada sobre un conductor perfecto. La longitud de onda de la luz incidente es  $\lambda = 632.8$  nm con

polarización  $s$ . El espesor de la película elegido para que soporte dos modos guiados es  $d_2 = 500$  nm, y los vectores de onda que resultan son  $q_1^{TE} = (\omega/c)1.5466$  y  $q_2^{TE} = (\omega/c)1.2423$ . Con estos valores, los picos satélite, de acuerdo a la ec. (1.64), deben estar en  $\theta_s = \pm 17.72^\circ$ , además del pico de retroesparcimiento en  $\theta_s = 0^\circ$ , para incidencia normal.

El CDR promedio se calcula para el espectro de rugosidad G con  $\sigma = 100$  nm, y el espectro WO con  $K_{\max}^{TE} = q_1^{TE} + \Delta = (\omega/c)1.97$ ,  $K_{\min}^{TE} = q_2^{TE} - \Delta = (\omega/c)0.81$  con  $\Delta = (\omega/c)0.43$ , para ambos casos la altura rms de la rugosidad es  $h = 15$  nm.

En la figura 2.1 se presenta la parte incoherente media del CDR como función del ángulo de esparcimiento, cuando la luz incide normal a la superficie. La línea continua corresponde a los datos calculados usando el espectro de rugosidad G y los parámetros antes mencionados. Mientras que la curva discontinua corresponde al espectro WO.

En ambas curvas se observan tres picos, el pico angosto localizado a  $0^\circ$  se le conoce como pico de retroesparcimiento (backscattering), ha sido ampliamente estudiado tanto teórica como experimentalmente y ha sido demostrado que es un efecto de doble esparcimiento. Los dos picos a  $\theta_s = \pm 17.70^\circ$  se les llaman picos satélites y fueron predichos teóricamente por Sánchez-Gil *et al* [1]. Se ha demostrado que también este efecto es de doble esparcimiento y está contenido en una de las dos contribuciones a cuarto orden dado por la ec. (1.58).

El resultado para el espectro G concuerda exactamente con el resultado de Sánchez-Gil *et al* [1]. Es notable que para el espectro WO, debido sus características selectivas, los picos están bien definidos.

## 2.2 Película Dieléctrica sobre Sustrato Metálico

Muchos estudios, [1, 8, 9, 10], que usan la aproximación perturbativa para analizar el comportamiento del esparcimiento de luz, son dados hasta primer primer o segundo orden en la altura de la rugosidad y solo para un espectro de rugosidad.

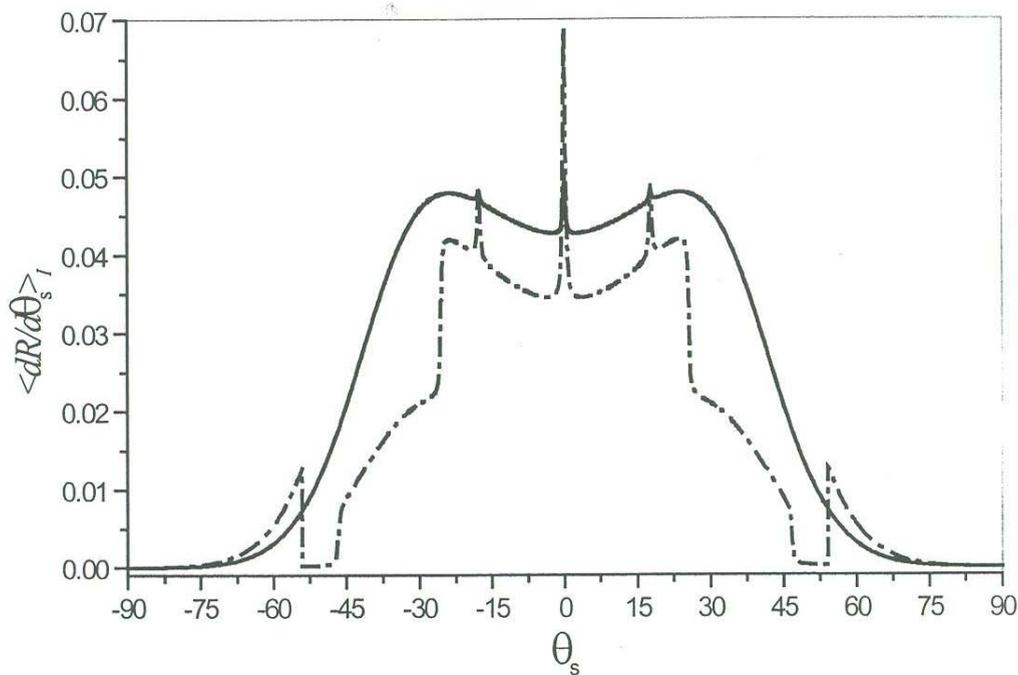


Figura 2.1: Dependencia angular del CDR promedio para una película sobre sustrato metálico para el espectro G (—) y el WO (- · - · - · -).

En esta sección, reportamos resultados del esparcimiento de luz monocromática para una película depositada sobre un sustrato metálico. Anteriormente se había considerado un conductor perfecto como sustrato. La superficie aire/dieléctrico es rugosa, mientras que la superficie dieléctrico/metal es lisa y se usa el espectro de rugosidad WO además del gaussiano.

Considerar al metal introduce un elemento realista cuando el estudio se realiza a longitudes de onda en la región visible y el infrarrojo cercano del espectro electromagnético, puesto que un metal sólo se comporta como CP en la región del infrarrojo lejano, microondas, etc.

### 2.2.1 Propuesta Experimental. Región visible.

En lo que sigue presentamos una manera de establecer los parámetros que intervienen en el cálculo, por ejemplo, las propiedades ópticas del metal (Aluminio, Cobre, Oro, Plata) y del dieléctrico ( $\text{CaF}_2$ ,  $\text{MgF}_2$ ,  $\text{ZnS}$ ), el espesor de la capa, longitud de onda del experimento, y los parámetros de la superficie rugosa. Los materiales que se mencionan entre paréntesis son los que usualmente se han trabajado en el laboratorio de películas delgada del DIFUS y se tiene experiencia en sus crecimientos por evaporación térmica. Para que sea una propuesta experimental viable se deben tomar en cuenta las restricciones experimentales para fabricar la superficie rugosa [11].

De los metales seleccionamos el oro, ya que la experiencia dice que crece sin mayores problemas por evaporación térmica y su superficie no se oxida.

La longitud de onda que se selecciona, para esta propuesta experimental en el visible, es  $\lambda = 632.8$  nm, que es una de las líneas de emisión de un laser de He-Ne.

De los materiales dieléctricos antes mencionados se selecciona el fluoruro de magnesio, y aunque es difícil de establecer el porqué en este momento, solo diremos que es debido al espectro de rugosidad.

De la figura 1.2, sabemos que la película de  $\text{MgF}_2$  soporta dos modos guiados TM en el rango de espesores (607 – 947 nm) y dos modos guiados TE en el rango (472 – 806 nm), entonces para que existan dos modos, el espesor debe estar entre 607 nm y 806 nm. Así que tenemos la incertidumbre de que espesor escoger para obtener el mejor resultado para poder observar los picos satélite en la respuesta angular del esparcimiento de luz por el sistema considerado.

Un resultado importante es que el Esparcimiento Total Integrado, y por tanto el esparcimiento angular, es máximo cuando la reflexión especular es mínima [7].

En la figura 2.2, se grafica la reflexión especular  $R_C$  (reflectancia), dada por la primera parte de la ecuación (1.60), con respecto al espesor  $d_2$  del sistema  $\text{Au}/\text{MgF}_2/\text{aire}$  y considerando una incidencia normal. Los parámetros ópticos para la capa de  $\text{MgF}_2$  y el sustrato de oro fueron dados en la sección 1.3. Los máximos y mínimos en la curva son debido a efectos de interferencia dentro de la capa dieléctrica. Los máximos representan

interferencia constructiva y los mínimos destructiva.

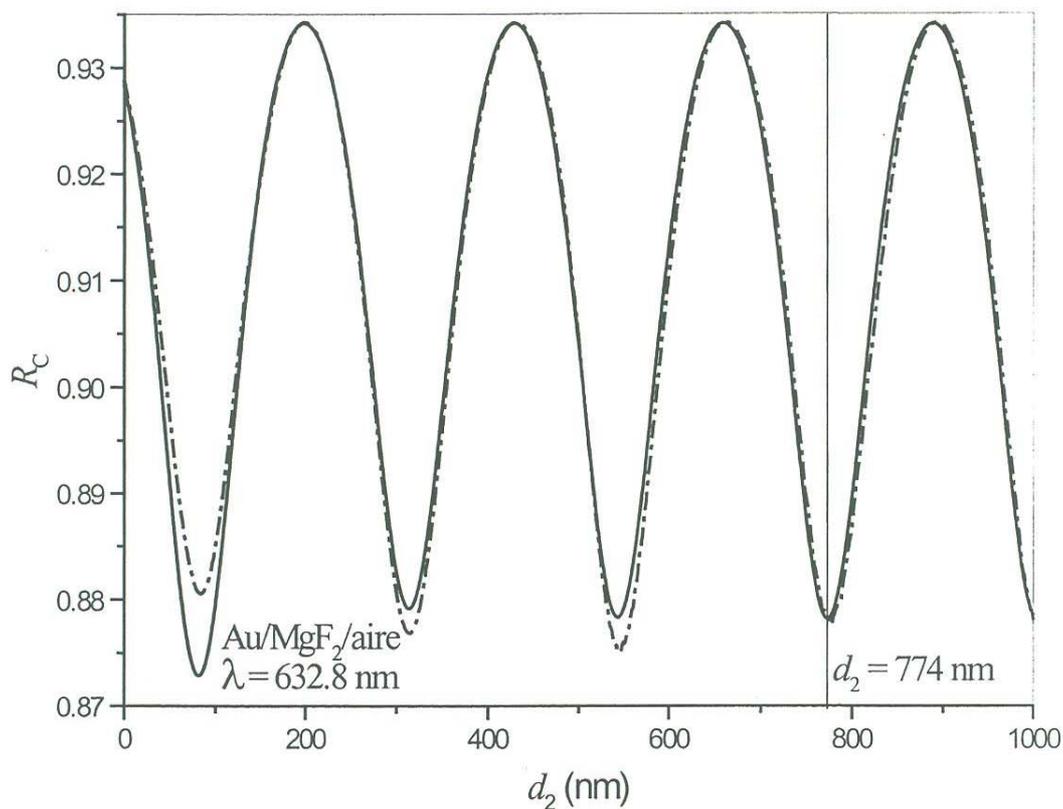


Figura 2.2: Integral de la parte coherente del CDR promedio  $R_C$  con respecto al espesor  $d_2$  de la película en polarización  $p$  (—) y  $s$  (-·-·-·-·-). Un mínimo en la reflectancia se tiene en  $d_2 = 774$  nm a incidencia normal para ambas polarizaciones.

La línea continua (—) es la reflectancia en polarización  $p$ , y la línea discontinua (-·-·-·-·-) para polarización  $s$  de la luz incidente. Se observa que para un espesor  $d_2 = 774$  nm se tiene un mínimo en la reflectancia  $R_C$ . Por tanto habrá un esparcimiento total integrado ETI máximo para este espesor de la película. Este resultado se deduce a partir de la conservación de la energía (1.60). Cabe mencionar que este fue el espesor empleado para obtener la figura 1.3.

De tal forma que si el espesor de la capa de  $\text{MgF}_2$  depositada sobre oro es  $d_2 = 774$

nm, garantiza que existan dos modos para ambas polarizaciones, que la reflexión especular alcance un mínimo y que el ETI sea máximo.

En la figura 2.3 se grafica el CDR promedio como función del ángulo de esparcimiento, para el sistema Au/MgF<sub>2</sub>/aire, para ambas polarizaciones y utilizando una longitud de onda  $\lambda = 632.8$  nm de la luz incidente. El CDR promedio se calcula usando el espectro WO cuyos parámetros son  $K_{\min}^{TM} = (\omega/c)0.95$  y  $K_{\max}^{TM} = (\omega/c)1.44$  con un valor rms de la altura de la rugosidad  $h = 5$  nm. Hemos elegido los parámetros  $K_{\min}^{TM}$  y  $K_{\max}^{TM}$  del espectro WO, para esta película, porque satisfacen las condiciones experimentales para su fabricación y posterior análisis del esparcimiento de la luz, tal como se describe en [11].

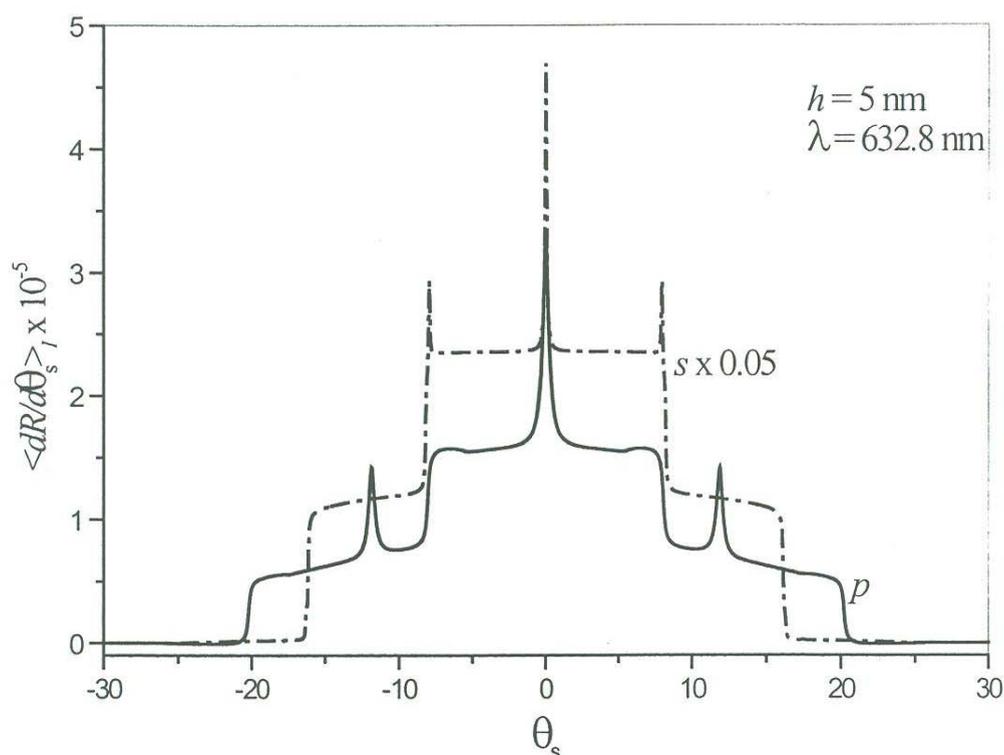


Figura 2.3: Dependencia angular del CDR promedio de la película para el espectro WO con  $h = 5$  nm en polarización  $p$  (—) y  $s$  (- · - · -).

La parte incoherente del CDR promedio en polarización  $p$  (—) tiene los picos

satélite en los ángulos  $\theta_s = \pm 12.1^\circ$ , de acuerdo a la ecuación (1.64). Para polarización  $s$  (— · — · — · —) se tiene  $q_1^{TE} = (\omega/c)1.33$  y  $q_2^{TE} = (\omega/c)1.19$  y los picos satélite están en  $\theta_s = \pm 8.0^\circ$ .

Hemos encontrado que el sistema Au/MgF<sub>2</sub>/aire para el espectro WO, figura 2.3, con un espesor  $d_2 = 774$  nm, tiene un esparcimiento de luz con los picos bien definidos cuando es iluminado con luz visible monocromática  $\lambda = 632.8$  nm, por lo tanto esta película dieléctrica con tal espectro de rugosidad es susceptible de ser caracterizada analizando el CDR promedio calculado para una longitud de onda fija, con ambas polarizaciones.

### 2.2.2 Propuesta experimental. Región Infrarojo.

Siguiendo la misma metodología que en el caso anterior, estudiamos el esparcimiento de una película de ZnS con constante dieléctrica  $\epsilon_2 = (2.3 + i 5 \times 10^{-5})^2$ , depositada sobre oro cuya constante es  $\epsilon_3 = (0.318 + i 8.15)^2$  con una rugosidad  $h = 5$  nm, cuando es iluminada con luz monocromática en el infrarojo  $\lambda = 1152$  nm (línea de emisión de un laser de He-Ne). El espesor de la película es  $d_2 = 610$  nm y los números de onda de los modos guiados TM son:  $q_1^{TM} = (\omega/c)2.15$  y  $q_2^{TM} = (\omega/c)1.65$ .

En la figura 2.4 se grafica la dependencia angular de la parte incoherente del CDR promedio para este sistema a incidencia normal  $\theta_i = 0^\circ$  (—) y  $\theta_i = 5^\circ$  (— — —).

Los parámetros del espectro WO son  $K_{\max}^{TM} = (\omega/c)2.30$  y  $K_{\min}^{TM} = (\omega/c)1.50$ . Los picos satélite están bien definidos en  $\theta_s = \pm 30^\circ$  de acuerdo a la ecuación (1.64) para incidencia normal. En el caso de incidencia  $\theta_i = 5^\circ$ , los picos se desplazan en la misma proporción, esto es importante puesto que será una situación experimental.

Solo se presenta el CDR promedio en polarización  $p$  de la luz incidente porque para polarización  $s$  los números de onda de los modos guiados TE quedan fuera de la ventana  $|K_{\max}^{TM} - K_{\min}^{TM}|$  del espectro de rugosidad y no es posible observar los picos satélite.

## 2.3 Validez de la Aproximación a Cuarto Orden

La solución aproximada de CDR promedio a cuarto orden está restringida a los valores de la altura de la rugosidad, esto debido a la condición de Rayleigh.

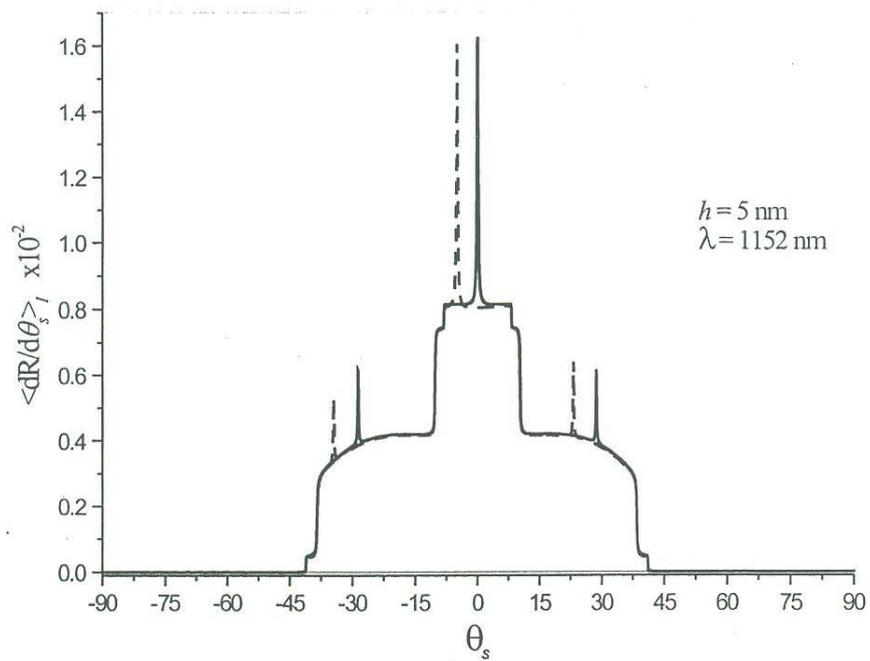


Figura 2.4: Dependencia angular de la parte incoherente del CDR promedio para el sistema Au/ZnS/aire en polarización  $p$  para el espectro WO. Incidencia normal (—) y  $\theta_s = 5^\circ$  (- - - -).

En la siguiente figura se muestra el esparcimiento total integrado ETI dado por la segunda integral de la ecuación (1.60) con respecto a la altura de la rugosidad  $h$  para ambos espectros de rugosidad.

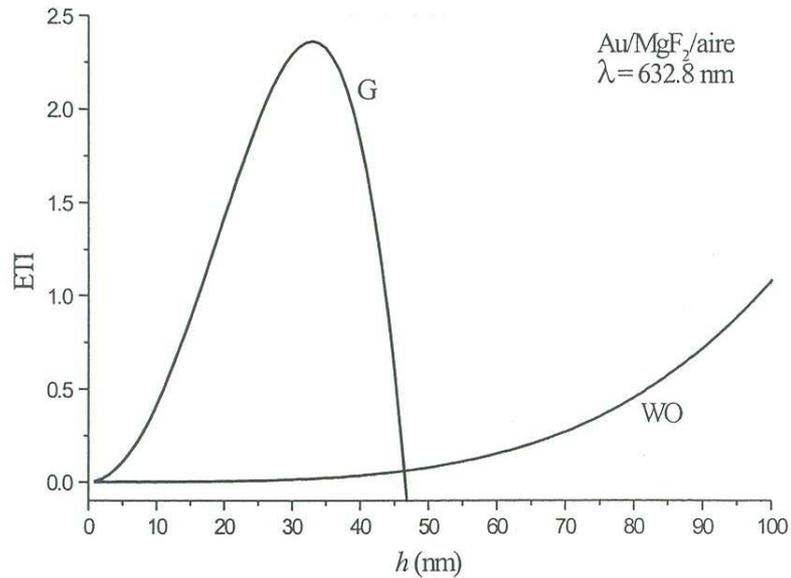


Figura 2.5: Esparcimiento total integrado para el espectro de rugosidad Gaussiano G y West-O'Donnell WO.

En esta figura, el ETI es graficado con respecto a la altura de la rugosidad para ambos espectros de rugosidad en polarización  $p$ . Para el espectro G, se obtiene que cuando aumenta la altura de la rugosidad aumenta el ETI, sabemos que esta cantidad está asociada a la energía total esparcida por el sistema, así que cuando ETI es mayor que uno (a partir de  $h = 15$  nm o  $h/\lambda = 0.024$ ), la aproximación ya no es válida. Ya que entonces estaríamos obteniendo mayor energía de la que entra.

En el caso del espectro WO, la aproximación puede ser válida para un rango de alturas mucho mayor (a partir de  $h = 100$  nm o  $h/\lambda = 0.158$ ).

Así que la validez de la solución aproximada del CDR promedio a cuarto orden en la altura de la rugosidad depende fuertemente del espectro de rugosidad.

## Capítulo 3

### Conclusiones

En este trabajo, se ha obtenido una formulación algebraica para resolver teóricamente y de forma aproximada el problema de esparcimiento de luz por una película dieléctrica depositada sobre un sustrato metálico. Mediante el método perturbativo a cuarto orden, se calcula la parte incoherente del CDR promedio, esparcimiento de luz, que permite conocer las propiedades ópticas y geométricas de una película delgada.

El método perturbativo a cuarto orden es suficiente para observar el pico de retroesparcimiento y los picos satélite en la dependencia angular del esparcimiento de luz.

Los resultados obtenidos coinciden satisfactoriamente con los ya reportados para el mismo sistema, de esta manera corroboramos nuestra formulación y la implementación del código de programación en Fortran.

El espectro de rugosidad West-O'Donnell tiene la ventaja de ser selectivo de los picos del esparcimiento de luz, por lo tanto es más adecuado que el espectro gaussiano, que no tiene esta característica.

La película dieléctrica de  $\text{MgF}_2$  es adecuada para ser fabricada y observar el fenómeno. en el caso del visible ( $\lambda = 632.8$  nm), de los picos satélite, caracterizar sus propiedades ópticas y geométricas con el espectro de rugosidad WO, para esto hemos analizado la película con espesor  $d_2 = 774$  nm, que soporta dos modos guiados TM y dos TE. Los parámetros del espectro de rugosidad WO son  $K_{\min}^{TM} = (\omega/c)0.95$  y  $K_{\max}^{TM} = (\omega/c)1.44$  para un valor rms de la altura de la rugosidad  $h = 5$  nm. Los picos satélite aparecen

en los ángulos de esparcimiento  $\theta_s = \pm 12.1^\circ$  para polarización  $p$  y  $\theta_s = \pm 8.0^\circ$  en polarización  $s$ . En ambos casos a incidencia normal  $\theta_i = 0^\circ$ . También se obtiene el pico de retroesparcimiento.

Otra propuesta experimental es para una película de ZnS depositada sobre oro, con espesor  $d_2 = 610$  nm que soporta dos modos TM cuando es iluminada con luz en el infrarrojo cercano ( $\lambda = 1152$  nm), se usan  $K_{\max}^{TM} = (\omega/c)2.30$  y  $K_{\min}^{TM} = (\omega/c)1.50$  del espectro WO. Aquí se muestra también el esparcimiento para incidencia oblicua  $\theta_i = 5^\circ$ .

El método perturbativo a cuarto orden es suficiente para calcular el esparcimiento de luz, así como efectos relacionados y la conservación de energía se satisface siempre y cuando  $h/\lambda \leq 0.024$ , de acuerdo al análisis del esparcimiento total integrado ETI, para ambos espectros de rugosidad.

Con la formulación teórica establecida en este trabajo, se pueden analizar otros tipo de sistemas, tales como aire/dieléctrico/aire o dieléctrico/dieléctrico/aire para calcular el coeficiente diferencial de reflexión CDR y transmisión CDT, y el esparcimiento por una multicapa con la rugosidad en cualquiera de las interfaces.

# Apéndice

## I. Las Condiciones en la Frontera aire/dieléctrico

Si consideramos el caso de incidencia TM.

Las componentes tangenciales del campo magnético

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B} = (n_y B_z - n_z B_y)\hat{\mathbf{i}} + (n_z B_x - n_x B_z)\hat{\mathbf{j}} + (n_x B_y - n_y B_x)\hat{\mathbf{k}}$$

que en las condiciones del problema nos da

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B} = B_x \hat{\mathbf{j}} - n_y B_x \hat{\mathbf{k}}$$

Las componentes tangenciales del campo eléctrico

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = (n_y E_z - n_z E_y)\hat{\mathbf{i}} + (n_z E_x - n_x E_z)\hat{\mathbf{j}} + (n_x E_y - n_y E_x)\hat{\mathbf{k}}$$

que en las condiciones del problema nos da

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = \left(-\frac{\partial f}{\partial y} E_z - E_y\right)\hat{\mathbf{i}}$$

y de las ecuaciones de Maxwell 1.4

$$\begin{aligned} -\frac{\omega}{c}\varepsilon E_y &= \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ -\frac{\omega}{c}\varepsilon E_z &= \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \end{aligned}$$

que en este caso obtenemos

$$-\frac{\omega}{c}\varepsilon E_y = +\frac{\partial B_x}{\partial z}$$

$$-\frac{\omega}{c}\varepsilon E_z = -\frac{\partial B_x}{\partial y}$$

y la condición de frontera tangencial para el campo eléctrico

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = \left[ -\frac{df}{dy} \frac{c}{\omega} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial B_x}{\partial y} + \frac{c}{\omega} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial B_x}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{i}} = \frac{c}{\omega} \frac{1}{\varepsilon} \left[ -\frac{df}{dy} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right] B_x \hat{\mathbf{i}} \quad (\text{I.1})$$

y

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B} = B_x \hat{\mathbf{j}} + \frac{df}{dy} B_x \hat{\mathbf{k}} \quad (\text{I.2})$$

Si consideramos el caso de incidencia TE.

Las componentes tangenciales del campo eléctrico

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = (n_y E_z - n_z E_y) \hat{\mathbf{i}} + (n_z E_x - n_x E_z) \hat{\mathbf{j}} + (n_x E_y - n_y E_x) \hat{\mathbf{k}}$$

que en las condiciones del problema nos da

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{j}} - n_y E_x \hat{\mathbf{k}}$$

Las componentes tangenciales del campo magnético

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B} = (n_y B_z - n_z B_y) \hat{\mathbf{i}} + (n_z B_x - n_x B_z) \hat{\mathbf{j}} + (n_x B_y - n_y B_x) \hat{\mathbf{k}}$$

que en las condiciones del problema nos da

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B} = (n_y B_z - B_y) \hat{\mathbf{i}}$$

y de las ecuaciones de Maxwell 1.2

$$-\frac{\omega}{c} B_y = -\left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)$$

$$-\frac{\omega}{c} B_z = -\left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

que en este caso obtenemos

$$-\frac{\omega}{c} B_y = \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$-\frac{\omega}{c} B_z = \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

y la condición de frontera tangencial para el campo eléctrico

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B} = \left[ -\frac{df}{dy} \frac{c}{\omega \varepsilon} \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{c}{\omega \varepsilon} \frac{\partial E_x}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{i}} = \frac{c}{\omega \varepsilon} \left[ -\frac{df}{dy} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right] E_x \hat{\mathbf{i}} \quad (\text{I.3})$$

y

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{j}} + \frac{df}{dy} E_x \hat{\mathbf{k}} \quad (\text{I.4})$$

## II. Códigos de Programación

a). Código fortran del programa para calcular la relación de dispersión  $d_2(q)$ :

```

program rdnkm
parameter(nm=3)
complex*16 en(nm),wi(nm),b(nm),c(nm-1),d(nm-1),&
& f1(nm-1),fx1(nm-1),fx2(nm-1),qbd,uim,uno
real*8 an(nm),ak(nm),d2,qi,qf,dq,xl,pil,q2,ql,vx1,vx2,vx3,er,di,df,dd
integer*4 nd, nq, n, m, i ; open(6,file='auzns.dat')
uim = dcplx(0.0,1.0) ; uno = dcplx(1.0,0.0) ; pil = 4.0*datan(1.0d0)
!! constantes de materiales y particiones
an(1) = 1.0 ; ak(1) = 0.0
an(2) = 2.353 ; ak(2) = 3.58d-6
an(3) = 0.318 ; ak(3) = 8.15
xl = 1152 ; er = 0.5
nd = 20000 ; nq = 20000
di = 0.00 ; df = 1000.0 ; dd = (df - di)/nd
qi = 1.0 ; qf = 3.0 ; dq = (qf - qi)/nq
ql = 2.0*pil/xl
!! elegir polarizacion
do 10 n = 1, 3
en(n) = dcplx(an(n),ak(n))*dcplx(an(n),ak(n))
!!wi(n) = uno !! wi(n) = uno para pol s.
wi(n) = en(n) !! wi(n) = en(n) para pol p.

```

```

10 continue
do 100 i = 0, nd
d2 = di + i*dd
vx1 = 0.0 ; vx2 = 0.0 ; vx3 = 0.0
q2 = qi
do 15 n = 1, 3
b(n) = cdsqrt(en(n) - q2*q2)
15 continue
do 20 n = 1, 1
c(n) = (b(n)/wi(n) + b(n+1)/wi(n+1))*(b(n+1)/wi(n+1) + b(n+2)/wi(n+2))
d(n) = (b(n)/wi(n) - b(n+1)/wi(n+1))*(b(n+1)/wi(n+1) - b(n+2)/wi(n+2))
20 continue
fx1(1) = c(1) ; fx2(1) = d(1)
do 25 n = 2, 2
qbd = uim*ql*b(n)*d2
fl(n) = fx2(n-1)*cdexp(+qbd) + fx1(n-1)*cdexp(-qbd)
25 continue
vx1 = cdabs(fl(2))
q2 = qi + dq
do 30 n = 1, 3
b(n) = cdsqrt(en(n) - q2*q2)
30 continue
do 35 n=1, 1
c(n) = (b(n)/wi(n) + b(n+1)/wi(n+1))*(b(n+1)/wi(n+1) + b(n+2)/wi(n+2))
d(n) = (b(n)/wi(n) - b(n+1)/wi(n+1))*(b(n+1)/wi(n+1) - b(n+2)/wi(n+2))
35 continue
fx1(1) = c(1) ; fx2(1) = d(1)
do 40 n = 2, 2
qbd = uim*ql*b(n)*d2
fl(n) = fx2(n-1)*cdexp(+qbd) + fx1(n-1)*cdexp(-qbd)

```

```

40 continue
vx2 = cdabs(f1(2))
do 200 m = 2, nq
q2 = qi + m*dq
do 45 n = 1, 3
b(n) = cdsqrt(en(n) - q2*q2)
45 continue
do 50 n=1, 1
c(n) = (b(n)/wi(n) + b(n+1)/wi(n+1))*(b(n+1)/wi(n+1) + b(n+2)/wi(n+2))
d(n) = (b(n)/wi(n) - b(n+1)/wi(n+1))*(b(n+1)/wi(n+1) - b(n+2)/wi(n+2))
50 continue
fx1(1) = c(1) ; fx2(1) = d(1)
do 55 n = 2, 2
qbd = uim*ql*b(n)*d2
f1(n)= fx2(n-1)*cdexp(+qbd) + fx1(n-1)*cdexp(-qbd)
55 continue
!! imprimir resultados
vx3 = cdabs(f1(2))
if(vx2 <= vx1.and.vx2 <= vx3.and.vx2 <= er) then
write(*,*) q2,d2,vx2 ; write(6,*) q2,d2,vx2
endif
vx1 = vx2 ; vx2 = vx3
200 continue
100 continue
end

```

b). Código fortran para las subrutinas, para calcular la función  $G^{(n)}(\alpha, \gamma)$ :

```

subroutine gags(d2,qlp,ei1,ei2,ei3,wi1,wi2,wi3,a1,a2,ipw,gag)
implicit real*8(a-h,o-z)
complex*16 uim,ei1,ei2,ei3,wi1,wi2,wi3,b2x,b3x,b1y,cj1,dj1,cj2,dj2,gag,qbd
uim = dcplx(0.0,1.0)

```

```

b2x = cdsqrt(ei2 - a1*a1)
b3x = cdsqrt(ei3 - a1*a1)
b1y = cdsqrt(ei1 - a2*a2)
qbd = uim*qlp*b2x*d2
cj1 = b1y/wi1 + b2x/wi2 + (a2/wi1 + a1/wi2)*(a2 - a1)/(b1y - b2x)
cj2 = b2x/wi2 + b3x/wi3
dj1 = b1y/wi1 - b2x/wi2 + (a2/wi1 + a1/wi2)*(a2 - a1)/(b1y + b2x)
dj2 = b2x/wi2 - b3x/wi3
gag = dj1*dj2*cdexp(+qbd)*(-(b1y + b2x))**ipw &
& + cj1*cj2*cdexp(-qbd)*(-(b1y - b2x))**ipw
return ; end

```

y para calcular la función  $H^{(n)}(\alpha, \gamma)$ :

```

subroutine hags(d2,qlp,ei1,ei2,ei3,wi1,wi2,wi3,a1,a2,ipw,hag)
implicit real*8(a-h,o-z)
complex*16 uim,ei1,ei2,ei3,wi1,wi2,wi3,b2x,b3x,b1y,cj1,dj1,cj2,dj2,hag,qbd
uim = dcmplx(0.0,1.0)
b2x = cdsqrt(ei2 - a1*a1)
b3x = cdsqrt(ei3 - a1*a1)
b1y = cdsqrt(ei1 - a2*a2)
qbd = uim*qlp*b2x*d2
cj1 = b1y/wi1 + b2x/wi2 + (a2/wi1 + a1/wi2)*(a2 - a1)/(b1y - b2x)
cj2 = b2x/wi2 + b3x/wi3
dj1 = b1y/wi1 - b2x/wi2 + (a2/wi1 + a1/wi2)*(a2 - a1)/(b1y + b2x)
dj2 = b2x/wi2 - b3x/wi3
hag = cj1*dj2*cdexp(+qbd)*(b1y - b2x)**ipw &
& + dj1*cj2*cdexp(-qbd)*(b1y + b2x)**ipw
return ; end

```

### III. La transformada de Fourier

Definimos la transformada de Fourier de una función  $f(y)$  elevada a la potencia  $k$

$$F_{\alpha}^{(k)} = \frac{1}{2\pi} \int dy f^k(y) e^{-i\alpha y}$$

con  $k = 1$ ,

$$F_{\alpha}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int dy f(y) e^{-i\alpha y}$$

para  $k = 2, 3$  se tienen las relaciones

$$F_{\alpha}^{(2)} = \int d\eta F_{\eta}^{(1)} F_{\alpha-\eta}^{(1)}$$

$$F_{\alpha}^{(3)} = \int \int d\eta d\gamma F_{\gamma}^{(1)} F_{\eta}^{(1)} F_{\alpha-\gamma-\eta}^{(1)}$$

y para calcular los promedios se usan las siguientes propiedades

$$\langle F_{\alpha}^{(1)} F_{\gamma}^{(1)} \rangle = g(|\alpha|) \delta(\alpha + \gamma) = g(|\gamma|) \delta(\alpha + \gamma)$$

$$\langle F_{\alpha}^{(1)} F_{\gamma}^{(1)*} \rangle = g(|\alpha|) \delta(\alpha - \gamma) = g(|\gamma|) \delta(\alpha + \gamma)$$

$$\langle F_{\alpha}^{(1)} F_{\gamma}^{(1)} F_{\eta}^{(1)} F_{\mu}^{(1)} \rangle =$$

$$\langle F_{\alpha}^{(1)} F_{\gamma}^{(1)} \rangle \langle F_{\eta}^{(1)} F_{\mu}^{(1)} \rangle + \langle F_{\alpha}^{(1)} F_{\eta}^{(1)} \rangle \langle F_{\gamma}^{(1)} F_{\mu}^{(1)} \rangle + \langle F_{\alpha}^{(1)} F_{\mu}^{(1)} \rangle \langle F_{\gamma}^{(1)} F_{\eta}^{(1)} \rangle$$

## Bibliografía

- [1] J. A. Sánchez-Gil, A. A. Maradudin, Jun Q. Lu, V. D. Freilikher, M. Pustilnik and I. Yurkevich, “Scattering of electromagnetic waves from a bounded medium with a random surface”, *Phys. Rev. B* **50**, 15353-15368(1994). J. A. Sánchez-Gil, A. A. Maradudin, Jun Q. Lu, V. D. Freilikher, M. Pustilnik and I. Yurkevich, “Satellite peaks in the scattering of p-polarized light from a randomly rough film on a perfectly conducting substrate”, *J. Mod. Optics* **43**, 435-452 (1996). J. A. Sánchez-Gil, A. A. Maradudin, Jun Q. Lu, V. D. Freilikher, “Transmission of electromagnetic waves through thin metallic films with a random rough surface”, *Phys. Rev. B* **50**, 17100-17115 (1995).
- [2] A. Madrazo and A. A. Maradudin, “Numerical solutions of the reduced Rayleigh equation for the scattering of electromagnetic waves from rough dielectric films on a perfectly conducting substrates”, *Opt. Commun.* **134**, 251-263 (1997).
- [3] A. Soubret, G. Berginc, C. Bourrely, “Application of Reduced Rayleigh equations to electromagnetic wave scattering by two-dimensional randomly rough surfaces”, *Phys. Rev. B*, **63**, 245411-1-20 (2001).
- [4] A. Soubret, G. Berginc, C. Bourrely, “Backscattering enhancement of an electromagnetic wave scattered by two-dimensional rough layers.”, *J. Opt. Soc. Am. A*, **18**, 2778-2788 (2001).
- [5] E. D. Palik, *Handbook of optical Constants of Solids*, Academic, New York, 1985.

- [6] Toigo *et al.* Phys. Rev. B **15** (1977). *Optical properties of rough surfaces: general theory and the small roughness limit.*
- [7] R. García-Llamas and C. Marquez-Beltran, "Scattering of s-polarized electromagnetic plane waves from a film with a shallow random rough surface on a perfect conductor". Appl. Opt., **39** (25), 4698-4705 (2000).
- [8] García Llamas, R. J. Opt. Soc. Am. B **11** 1874-1885 (1994). *Scattering of electromagnetic plane waves from rough periodic multilayered films.*
- [9] R. García-Llamas and L. E. Regalado, "Effects of rough interfaces in a multilayer stack". in Optical Interference Coatings, Florin Abelès, Ed., Proc. SPIE Vol. **2253**(2), 1298-1312 (1994).
- [10] R. García-Llamas and L. E. Regalado, "Scattering of light from a thin metallic film with shallow random rough interfaces between dissimilar media", Opt. Commun. **142**, 167-172 (1997).
- [11] C. S. West and K. A. O'Donnell, "Observation of backscattering enhancement from polaritons on a rough metal surface", J. Opt. Soc. Am. A, **12**, 390-397 (1995).