



**UNIVERSIDAD DE SONORA**

Escuela de Altos Estudios

**EL  $(\text{He})_4$  A MUY BAJAS TEMPERATURAS**

**TESIS**

Que para obtener el Título de

LICENCIADO EN FISICA

Presenta

**Saúl Robles García**

Hermosillo, Sonora

Octubre de 1974

# Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

Para el maestro  
Leberio... nov 19-74  
Sail

Agradezco al Dr. Muntaz Zaidi y al  
M. en C. Abelardo L. Rodríguez S.  
la ayuda que me brindaron en el de  
sarrollo de este trabajo; así como  
al Físico Luis Felipe del Castillo  
sus observaciones y sugerencias,  
muy valiosas para la realización -  
del mismo.

Mecánica Cuántica 2

EL  $(He)_4$  A MUY BAJAS  
TEMPERATURAS.



## C O N T E N I D O

### C A P I T U L O U N O

HELIO LIQUIDO.

### C A P I T U L O D O S

DISCUSION DE LA TRANSICION  $\lambda$ .

- 2,1) EFECTOS CUANTICOS.
- 2,2) UN ARGUMENTO CUALITATIVO DE LA CONDENSACION DE BOSE EINSTEIN.
- 2,3) TEORIA DEL GAS LIBRE DE BOSONES.
- 2,4) CALOR ESPECIFICO Y ENTROPIA DEL GAS DE BOSE.

### C A P I T U L O T R E S

TEORIA DEL ESPECTRO DE ENERGIA DEL HELIO II.

- 3,1) ESPECTRO DE ENERGIA DEL HELIO II.
- 3,2) TERMODINAMICA ESTADISTICA DEL HELIO II.
- 3,3) SUPERFLUIDEZ DEL HELIO II.
- 3,4) JUSTIFICACION MICROSCOPICA DEL ESPECTRO DE LANDAU SEGUN FEYNMAN.

## CAPITULO CUATRO

TEORIA FENOMENOLOGICA DEL HELIO II.

- 4,1) EFECTO MECANOCALORICO.
- 4,2) EFECTO TERMOMECANICO.
- 4,3) HIDRODINAMICA DE LOS DOS FLUIDOS.

## CAPITULO CINCO

PROPAGACION DE ONDAS EN EL HELIO II.

- 5,1) SEGUNDO SONIDO.

## APENDICE UNO

SISTEMA DE PARTICULAS IDENTICAS.

- A1,1) DISTRIBUCION GRAND CANONICA.
- A1,2) CALCULO DE  $\langle n_p \rangle$ ,  $\langle N \rangle$  Y  $U$  PARA BOSONES.
- A1,3) ENERGIA LIBRE DE UN GAS DE FOMONES.
- A1,4) ENERGIA LIBRE DE UN GAS DE BOLTZMAN.

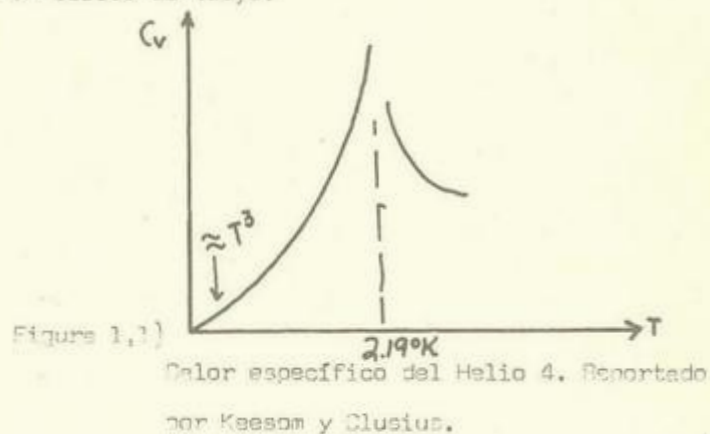
## APENDICE DOS

- A2,1) DE LA TEORIA DE LOS DOS FLUIDOS.

## HELIO LIQUIDO.

El Helio 4 permanece en estado líquido en el cero absoluto y a presión normal y en una temperatura de  $2.19^{\circ}\text{K}$  (Punto  $\lambda$ ) realiza la llamada "transición  $\lambda$ " pasando a una segunda fase líquida (Helio II) en la que adquiere un número de propiedades, las cuales se deben a la naturaleza cuántica del Helio y son poco comunes en otros líquidos.

Así, en 1932 Keesom y Clusius observaron que el calor específico del Helio 4 tiene una singularidad en la temperatura arriba mencionada, (véase figura 1,1) y que cerca del cero absoluto se comporta en función de  $T^3$ , como lo hace un sólido de Debye.



En 1936 Keesom y Keesom midieron cuantitativamente la conductividad térmica del Helio II y encontraron que no es proporcional al gradiente de la temperatura, como se predice clásicamente, sino mucho más grande.

Despues Kapitza encontró que la viscosidad del Helio II depende fuertemente de la temperatura, observando que bajo ciertas condiciones puede fluir sin fricción a través de capilares muy delgados. Este fenómeno se conoce con el nombre de "superfluidez".

Otra de las propiedades más notables que presenta el Helio II es que puede soportar la propagación de dos tipos de ondas. Una de ellas es el sonido ordinario y se propaga en el líquido con velocidad constante. La otra onda es el llamado segundo sonido y consiste en variaciones periódicas en la temperatura. La velocidad de esta onda depende fuertemente de la temperatura.

Estas y otras propiedades del Helio II es lo que pensamos discutir en este trabajo.

Así, en el capítulo dos discutimos porqué el Helio 4 permanece líquido en el cero absoluto y como el punto de vista de la mecánica cuántica es necesario en su estudio. También, para entender cualitativamente la transición  $\lambda$ , discutimos el fenómeno llamado "Condensación de Bose Einstein".

En el capítulo tres, discutimos la teoría de Landau acerca del espectro de energía del Helio II, con ayuda de la cual se explica la superfluidez del mismo. También calculamos el calor específico y la entropía asociados al líquido. Despues complementamos la Teoría de Landau con una discusión acerca de los estados de baja energía del Helio segun los argu-

mentos microscópicos de Feynman.

En el capítulo cuatro discutimos los resultados experimentales de Kapitza y la teoría fenomenológica de los dos fluidos. En el capítulo cinco, finalmente, discutimos la propagación de ondas en el Helio II.

DISCUSION DE LA TRANSICION  $\lambda$ 

Para explicar algunas de las propiedades del Helio II, primero discutimos porqué permanece líquido en el cero absoluto y como es que el punto de vista de la mecánica cuántica es necesario en el estudio de sus propiedades. Después discutimos el fenómeno llamado "Condensación de Bose Einstein". Damos un argumento cualitativo para predecir dicho fenómeno en un gas de partículas con espín entero y finalmente discutimos la teoría del gas libre de Bose para explicar cualitativamente la transición realizada por el Helio 4.

## 2,1) EFECTOS CUANTICOS.

Clasicamente se predice que en el cero absoluto no existe movimiento. Pero desde el punto de vista de la mecánica cuántica esto no es cierto, pues existe un movimiento llamado "movimiento del punto cero". El Helio así lo demuestra, permanece líquido hasta el cero absoluto. Lo hace debido a que la energía necesaria para solidificarse, proporcionada por las fuerzas interatómicas, es menor que la energía cinética correspondiente al punto cero. De esta manera el Helio permanece líquido en temperaturas en donde los efectos cuánticos son importantes. Estos efectos, los cuales se manifiestan en las propiedades del Helio II, aparecen cuando la longitud de onda  $\lambda$  de De Broglie asociada al movimiento térmico de los átomos es del orden de la distancia interatómica. Como  $\lambda$  está dada por

$$\lambda = \left( \frac{2\pi \hbar^2}{m k T} \right)^{1/2}$$



si sustituimos el valor de la masa del Helio 4 ( $m = 6.4 \times 10^{-24}$  gr.) para una temperatura del orden de  $1^\circ\text{K}$  obtenemos que  $\lambda \approx 2.6\text{Å}$ . Por otro lado el volumen específico  $V = 45.2\text{Å}^3/\text{atomo}$ , entonces la distancia interatómica  $r_0 \approx 3.2\text{Å}$ . Así  $\lambda \approx r_0$ , lo que significa que los paquetes de onda que describen a los átomos de Helio se traslapan.

Como los átomos de Helio 4 tienen espín cero, la descripción microscópica debe hacerse con ayuda de la estadística de Bose.

Para temperaturas mayores que  $2.19^\circ\text{K}$  los efectos cuánticos no son de importancia y entonces el líquido (Helio I) se comporta como un fluido normal.

## 2,2) UN ARGUMENTO CUALITATIVO DE LA CONDENSACION DE BOSE EINSTEIN.

Consideremos dos partículas de Helio 4, en una caja de volumen  $V$ , interactuando con un potencial de corto alcance. La función de onda de orden cero del sistema de bosones es

$$(2,1) \quad \Psi_{\vec{p}_1, \vec{p}_2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ e^{i\vec{p}_1 \cdot \vec{r}_1 + i\vec{p}_2 \cdot \vec{r}_2} + e^{i\vec{p}_1 \cdot \vec{r}_2 + i\vec{p}_2 \cdot \vec{r}_1} \right\}$$

cuando las partículas están muy juntas  $\vec{r}_1 \approx \vec{r}_2$ , entonces la función de onda del sistema queda dada por

$$(2,2) \quad \Psi_{\vec{p}_1, \vec{p}_2}(\vec{r}_1, \vec{r}_1) = \frac{\sqrt{2}}{V} e^{i(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \cdot \vec{r}_1}$$

Por otro lado, la función de onda del sistema cuando  $\vec{p}_1 \approx \vec{p}_2$  es

$$(2,3) \quad \Psi_{\vec{p}, \vec{p}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{V} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)}$$

Así mismo la fuerza repulsiva entre las partículas de Helio 4 proporciona una energía positiva al sistema. Si  $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  es el potencial repulsi

vo entre las dos partículas, la contribución a la energía del sistema debida a este potencial, a primera aproximación, esta dada por

$$(2,4) \quad \langle V \rangle = \iint \psi_{\vec{p}_1, \vec{p}_2}^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2) V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \psi_{\vec{p}_1, \vec{p}_2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) d^3r_1 d^3r_2.$$

donde  $\psi_{\vec{p}_1, \vec{p}_2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  es la función de onda asociada al sistema. Debido al poco alcance del potencial, podemos aproximarlo de la siguiente manera

$$(2,5) \quad V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V_0 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

donde  $\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$  es la función delta de Dirac y  $V_0$  es una constante.

Con esta aproximación la contribución a la energía del sistema está dada por

$$(2,6) \quad \langle V \rangle = V_0 \iint \psi_{\vec{p}_1, \vec{p}_2}^*(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \psi_{\vec{p}_1, \vec{p}_2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) d^3r_1 d^3r_2$$

cuando el sistema está en un estado al que se le asocia la función de onda dada por la ecuación (2,2) nos queda que la energía proporcionada por el potencial repulsivo esta dado por

$$\langle V \rangle_{\vec{r}} = \frac{2V_0}{V^2} \iint \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) d^3r_1 d^3r_2$$

usando la siguiente propiedad de la función delta

$$(2,7) \quad \int f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$$

nos queda que

$$(2,8) \quad \langle V \rangle_{\vec{r}} = \frac{2V_0}{V}.$$

Por otro lado, cuando el sistema está en un estado al que se le asocia la función de onda dada por la ecuación (2,3), la ecuación (2,6) queda así

$$\langle V \rangle_{\vec{p}} = \frac{V_0}{V^2} \iint \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) d^3r_1 d^3r_2$$



con el mismo argumento usado atrás, nos queda que  $\langle v \rangle$  para un estado con  $\bar{p}_1 \approx \bar{p}_2$  está dado por

$$(2,9) \quad \langle v \rangle_p = \frac{V_0}{V}.$$

Como el estado más estable de cualquier sistema es cuando su energía es mínima, comparando las ecuaciones (2,8) y (2,9) vemos que todos los bosones tienden a concentrarse en un estado con igual momento. Esto minimiza la energía potencial. La energía cinética de las partículas es cero cuando su momento  $\bar{p}$  sea cero. De esta manera los bosones tienden a "concentrarse" en el estado de una partícula con momento  $\bar{p}=0$ . Esto representa el mecanismo del fenómeno llamado "Condensación de Bose Einstein".

### 2,3) TEORIA DEL GAS LIBRE DE BOSONES.

Pasaremos ahora al estudio detallado del gas libre de Bose<sup>1)</sup> de donde surgirá una conexión entre la transición del "punto  $\lambda$ " y la "Condensación de Bose Einstein". Es bien conocido (véase el apéndice I) que para un sistema de bosones no interactuantes el número total de partículas está dado por la ecuación

$$(2,10) \quad \langle N \rangle = \sum_p \frac{1}{e^{(\epsilon_p - \mu)/kT} - 1} = \sum_p \langle n_p \rangle$$

donde  $\langle n_p \rangle$  es la ocupancia promedio en el estado con momento  $\bar{p}$ .

Cuando el volumen es muy grande, los estados de una partícula forman un espectro continuo. Entonces la sumatoria de la ecuación (2,10) podemos

aproximarla a una integral de la forma

$$(2,11) \quad \sum_p \frac{1}{e^{(\epsilon_p - \mu)/kT} - 1} = \frac{\gamma V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \frac{1}{e^{(\epsilon - \mu)/kT} - 1}$$

donde  $\hbar$  es la constante de Planck,  $V$  es el volumen ocupado por el gas,  $\gamma = 2S + 1$  donde  $S$  es el espín de las partículas y la integral se calcula sobre todo el espacio momental. Como el integrando de la ecuación (2,11) tiene simetría esférica, integramos sobre los ángulos  $\theta$  y  $\varphi$  y nos queda que

$$\langle N \rangle = \frac{\gamma V}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{(\epsilon - \mu)/kT} - 1}$$

Como la energía de las partículas está dada por  $\epsilon = p^2/2m$ , con esto obtenemos que  $p^2 dp = 2^{1/2} m^{3/2} \epsilon^{1/2} d\epsilon$  y entonces

$$\langle N \rangle = \frac{m^{3/2} \gamma V}{2^{1/2} \pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{e^{1/2} d\epsilon}{e^{(\epsilon - \mu)/kT} - 1}$$

haciendo el cambio de variable  $\frac{\epsilon}{kT} = \xi$  entonces

$$(2,12) \quad \frac{\langle N \rangle}{V} = \frac{\gamma V (m k T)^{3/2}}{2^{1/2} \pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{\xi^{1/2} d\xi}{e^{\xi - \mu/kT} - 1}$$

esta ecuación implícitamente determina el potencial químico  $\mu$  (para bosones siempre es menor que cero. Véase apéndice I) del gas en función de la temperatura  $T$  y la densidad  $\langle N \rangle/V$ .

Si bajamos la temperatura del gas, manteniendo la densidad  $\langle N \rangle/V$  cons-

tante, el potencial químico  $\mu$  se acerca a cero, alcanzándolo en una temperatura  $T_0$  determinada por la ecuación

$$(2,13) \quad \frac{\langle N \rangle}{V} = \frac{\delta (m k T)^{3/2}}{2^{1/2} \pi^2 \hbar^3} \int_0^{\infty} \frac{\xi^{1/2} d\xi}{e^{\xi} - 1}$$

Como la integral vale  $2.612 \sqrt{\pi}/2$  <sup>1)</sup> entonces la temperatura  $T_0$  vale

$$(2,14) \quad T_0 = \frac{2\pi \hbar^2}{m k} \left[ \frac{\langle N \rangle}{2.612 V \delta} \right]^{2/3}$$

Qué pasa cuando la temperatura es menor que  $T_0$ ?. Físicamente muchos bosones tienden a concentrarse en el estado de mínima energía de una partícula, o sea su estado base, hasta que en  $T=0^\circ\text{K}$  todas las partículas "están allí".

Sin embargo con  $\mu=0$  y  $T < T_0$  la integral en la ecuación (2,13) es menor que la densidad  $\langle N \rangle / V$ ; pues el término de menor energía de la sumatoria, cuando pasamos según la ecuación (2,11) a la integral es multiplicado por  $\sqrt{\epsilon=0}$  y entonces no es tomado en cuenta. Por otro lado si nos fijamos en la sumatoria de la ecuación (2,10), con  $\mu=0$  todos los términos dan un valor finito; excepto el que corresponde a  $\epsilon_k=0$ , tiene un valor infinito. Esta situación requiere que el potencial químico para bosones, cuando  $T$  tiende a cero, no tienda a cero sino a un valor menor, cuyo valor absoluto sea muy pequeño, de tal manera que el primer término en la sumatoria nos dé el valor deseado.

Para calcular el número de partículas en el estado base, en la sumatoria separamos el término que corresponde al de mínima energía, y el resto, los que corresponden a  $\epsilon > 0$ , son distribuidos de acuerdo con la ecuación (2,12) con  $\mu=0$ :

$$\langle N \rangle_{\epsilon > 0} = \frac{\delta V (m k T)^{3/2}}{2^{1/2} \pi^2 \hbar^3} \int_0^{\infty} \frac{\xi^{1/2} d\xi}{e^{\xi} - 1}$$

Usando la ecuación para  $T_0$  obtenemos que

$$(2,15) \quad \langle N \rangle_{\epsilon > 0} = \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \langle N \rangle$$

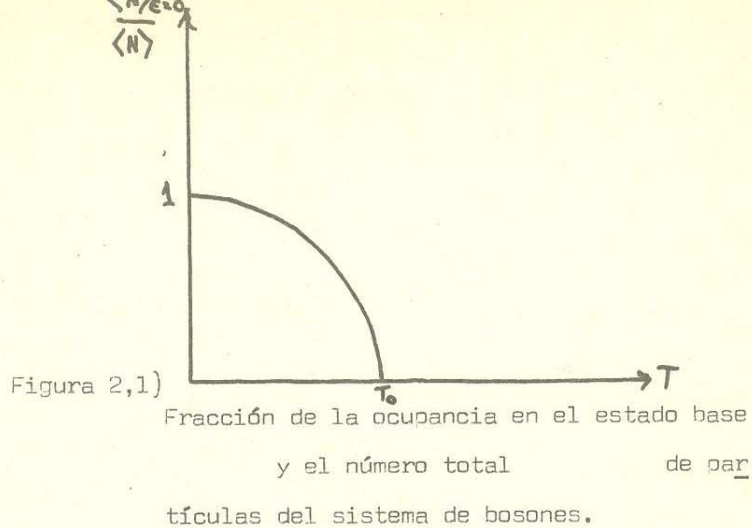
y el número de partículas en el estado de mínima energía es

$$\langle N \rangle_{\epsilon=0} = \langle N \rangle - \langle N \rangle_{\epsilon > 0}$$

Usando la ecuación (2,15) nos queda que

$$(2,16) \quad \langle N \rangle_{\epsilon=0} = \langle N \rangle \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \right]$$

Conforme la temperatura  $T$  se acerca al cero absoluto, todos los bosones comienzan a concentrarse en el estado de mínima energía. Este fenómeno es llamado "Condensación de Bose Einstein" y comienza a aparecer a partir de la temperatura  $T_0$ . (Véase figura 2,1).



Como vimos atrás el gas libre de Bose exhibe una transición en una temperatura  $T_0$  dada por la ecuación (2,14).

$$T_0 = \frac{2\pi\hbar^2}{mk} \left( \frac{\rho}{2.6128} \right)^{2/3}$$

Abajo de esta temperatura una fracción finita de todas las partículas se va al estado base de una partícula o sea el estado de momento cero. En 1939 London conjeturó que, como los átomos de Helio 4 obedecen la estadística de Bose, esa transición  $\lambda$  es la "Condensación de Bose Einstein" modificada por fuerzas interatómicas. Esta conjetura es reforzada por el hecho de que tal transición no ocurre en el Helio 3, cuyos átomos obedecen la estadística de Fermi. Más aún, si sustituimos la masa  $m = 6.4 \times 10^{-24}$  gr y la densidad  $\rho = 0.145$  gr/cm<sup>3</sup> del Helio 4 en la ecuación de arriba obtenemos una temperatura de transición  $T_0 = 3.14^\circ\text{K}$ . Comparada con  $2.19^\circ\text{K}$  vemos que  $T_0$  está dentro del orden de magnitud correcto.



Así mismo las ideas de la teoría de los dos fluidos de Tisza fueron también derivadas del modelo del gas ideal de Bose. De acuerdo al modelo de los dos fluidos, el Helio II tiene dos componentes llamados normal y superfluida. La superfluida es identificada con la parte que se condensa en el estado cuántico de más baja energía, la cual, consecuentemente, no puede tener entropía. El líquido normal, por otro lado, es identificado con la parte que contiene a las partículas en los estados con momento diferente de cero. Así la parte normal si tiene una entropía y es la que arrastra las excitaciones térmicas.

Como vemos el modelo del gas libre de Bose explica cualitativamente el comportamiento del Helio II. Pero como es un modelo ideal tiene fuertes discrepancias cuantitativas con los resultados experimentales presentados por el Helio 4. Para ver esto con más detalle calcularemos el calor específico y la entropía del gas de Bose.

#### 2,4) CALOR ESPECIFICO Y ENTROPIA DEL GAS DE BOSE.

Para calcular el calor específico y la entropía del gas de Bose, emplearemos el valor de la energía interna  $U \equiv \langle \sum_p \epsilon_p n_p \rangle$ . En el apéndice I demostramos que  $U$  está dada por

$$(2,17) \quad U = \sum_p \frac{\epsilon_p}{e^{(\epsilon_p - \mu)/kT} - 1} = \sum_p \epsilon_p \langle n_p \rangle$$

Partiendo de esta ecuación, ayudados de las hipótesis empleadas para calcular  $\langle N \rangle$  cuando el volumen ocupado por el gas es muy grande, es

fácil demostrar que abajo de  $T_0$

$$U = U_0 + \frac{8V m^{3/2} (kT)^{5/2}}{2^{1/2} \pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{3/2} d\epsilon}{e^\epsilon - 1}$$

donde  $U_0$  es la energía del estado de momento cero y el segundo término proporciona la energía de las partículas en los estados con  $\epsilon > 0$ .

Como la integral vale  $\frac{3}{4} \sqrt{\pi}$  (1.341), obtenemos que

$$(2,18) \quad U = U_0 + \frac{38V}{2} (1.341) \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} (kT)^{5/2}$$

De aquí, usando ciertas relaciones termodinámicas, obtenemos que el calor específico y la entropía del gas de Bose están dados por

$$(2,19) \quad C_v = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_v = \frac{158V k}{4} (1.341) \left( \frac{m k T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2}$$

$$(2,20) \quad S = \int_0^T \frac{C_v dT}{T} = \frac{58V k}{2} (1.341) \left( \frac{m k T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2}$$

La entropía del sistema tiende a cero cuando la temperatura se acerca al cero absoluto, de acuerdo con la tercera ley de la termodinámica.

Por otro lado el calor específico desaparece en función de  $T^{3/2}$ .

Sin embargo el comportamiento del calor específico del Helio 4 es muy diferente. Cerca del cero absoluto se comporta como  $T^3$  y cerca del punto  $\lambda$  se va logarítmicamente al infinito. Por otro lado el modelo de

gas de Bose excluye, para cualquier velocidad finita, la superfluidez del Helio II.

Como vemos el modelo de Bose del gas libre adolece de fuertes defectos. Pero esto no se debe a que la mecánica estadística esté fallando. Se debe exclusivamente al espectro de energía ( $\epsilon = p^2/2m$ ) aquí usado. Esta situación llevó a Landau a proponer un espectro de energía para el Helio II más acorde con sus propiedades. Supuso que cerca del cero absoluto las excitaciones que aparecen en el Helio son de larga longitud de onda, con una relación de dispersión  $\epsilon = pc$ , análoga al caso del sólido de Debye en bajas temperaturas, lo cual sugiere que se trata de ondas sonoras (fonones). Además de estas excitaciones, para temperaturas mayores cercanas a la del punto de transición, supuso la existencia de otras excitaciones a las que llamó "rotones". Este espectro, con ayuda de la mecánica estadística, nos permite explicar más realísticamente el comportamiento del Helio II en el capítulo siguiente.



## CAPITULO TRES

### TEORIA DEL ESPECTRO DE ENERGIA DEL HELIO II.

Para calcular las observables termodinámicas asociadas a un sistema es necesario conocer la función que caracteriza la dependencia de la energía con respecto al momento; es decir, el espectro de energía del sistema.

Del espectro de energía propuesto por Landau se predice la superfluidez del Helio II y se predice la velocidad a partir de la cual aparecen las excitaciones térmicas.

Así mismo, como las excitaciones térmicas determinan las propiedades termodinámicas del Helio II, usando las estadísticas de Bose y Maxwell-Boltzmann calculamos el calor específico y la entropía del sistema.

Por último, con ayuda de la teoría de Feynman, desde el punto de vista de la mecánica cuántica discutimos porqué las excitaciones térmicas de la parte baja del espectro de energía del Helio II son fonones.

### 3,1) ESPECTRO DE ENERGIA DEL HELIO II.

En el cero absoluto el Helio II no tiene excitaciones térmicas.

Segun la hipótesis de Landau<sup>(1),(9)</sup>, la absorción de energía por el sistema, ya sea mecánica o térmicamente, se traduce en la formación de cuasipar-

tículas o excitaciones térmicas las cuales, de acuerdo a su naturaleza cuántica, no aparecen gradualmente sino para determinados paquetes de energía. Dichas excitaciones se mueven dentro del líquido interactuando entre sí y con las paredes del recipiente. En tal circunstancia, el sistema se separa en dos componentes: una que podemos considerarla como un trasfondo que no transporta entropía y se llama componente superfluida y la otra es un conjunto de excitaciones térmicas que determinan las propiedades termodinámicas del sistema y se llama componente normal del líquido. El espectro de energía del sistema de cuasipartículas, propuesto por Landau, corresponde a dos tipos de excitaciones térmicas: los fonones y los rotones.

Los fonones corresponden a estados débilmente excitados cuya longitud de onda es mucho más grande que la distancia interatómica correspondiendo a una acción correlacionada de muchos átomos, mostrando macroscópicamente variaciones en la densidad del líquido indicando con esto un comportamiento de onda sonora. La energía de esta onda de compresión está dada por

$$(3,1) \quad \epsilon(p) = pc$$

donde  $c$  es la velocidad con la que se propaga la excitación y  $p = |\vec{p}|$  es el momento asociado a la cuasipartícula. En un diagrama  $\epsilon(p)$  contra  $p$  este espectro posee un comportamiento lineal.

Los rotones corresponden a estados de mayor energía que los fonones y poseen una longitud de onda del orden de la distancia interatómica. Su espectro de energía se localiza después del espectro de los fonones y

su comportamiento no es lineal, sino que llega a un máximo y luego decrece llegando a un mínimo en  $P_0$  (vease figura 3,1); más adelante la forma de la curva no se conoce. En equilibrio termodinámico la mayoría de las excitaciones en el líquido tienen su energía cerca de las regiones  $\epsilon=0$  y  $\epsilon(P_0)$ .

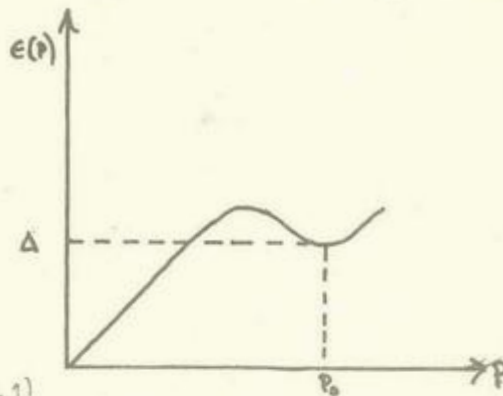


Figura 3,1)

Espectro de energía del Helio II.

Si desarrollamos la función  $\epsilon(p)$  en serie de potencias de Taylor alrededor de  $P_0$  y tomamos una aproximación de segundo orden obtenemos

$$\epsilon(p) = \epsilon(P_0) + (p - P_0) \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial p} \right)_{P_0} + \frac{(p - P_0)^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial p^2} \right)_{P_0}$$

Como en  $P_0$  la curva tiene un mínimo  $\left( \frac{\partial \epsilon}{\partial p} \right)_{P_0} = 0$ . Entonces tenemos que

$$(3,2) \quad \epsilon(p) = \Delta + \frac{(p - P_0)^2}{2\mu}$$

donde  $\Delta = \epsilon(P_0)$ ,  $\mu^{-1} = \left( \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial p^2} \right)_{P_0}$  y  $P_0$  son constantes.

Los valores encontrados experimentalmente por Peshkov para las constantes son los siguientes

$$(3,3) \quad \begin{aligned} \Delta/k &= 9.6^\circ \text{ K} \\ \rho_0/\hbar &= 1.95 \times 10^8 \text{ cm}^{-1} \\ \mu &= 0.77 m_{\text{He}}. \end{aligned}$$

donde  $k$  es la constante de Boltzmann,  $\hbar$  es la constante de Planck y  $m_{\text{He}}$  es la masa del Helio.

Con ayuda del espectro de energía arriba descrito y haciendo uso de la ley de distribución de Bose, a la cual obedecen los fonones y los rotones, calcularemos algunas funciones termodinámicas asociadas al sistema, considerando a los fonones y a los rotones como dos gases ideales. Es decir no consideramos interacciones entre ellos.

### 3,2) TERMODINAMICA ESTADISTICA DEL HELIO II.

Como vimos en la parte anterior, los fonones y los rotones caracterizan las propiedades termodinámicas del Helio II. Calcularemos la contribución de cada gas al calor específico y a la entropía del sistema.

Como un gas de fonones satisface la estadística de Bose, entonces la energía libre por unidad de volumen asociada al gas está dado por la ecuación (véase apéndice I)

$$(3,4) \quad F = -\frac{1}{3(2\pi^2\hbar^3)} \int_0^\infty \frac{p^3 dp}{e^{\beta\epsilon} - 1} \frac{\partial \epsilon}{\partial p}$$

debido a que  $\epsilon = pc$  entonces  $\frac{\partial \epsilon}{\partial p} = c$ . Haciendo el cambio de variable  $\beta pc = x$  nos queda que

$$F = -\frac{4\pi}{3} \left(\frac{kT}{2\pi\hbar c}\right)^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

finalmente nos queda

$$(3,5) \quad F = -\frac{4\pi^5}{45} \frac{(kT)^4}{(2\pi\hbar c)^3}$$

De esta expresión para la energía libre del gas de fonones obtenemos para la entropía y el calor específico

$$(3,6) \quad S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = \frac{16\pi^5 k}{45} \left(\frac{kT}{2\pi\hbar c}\right)^3$$

$$(3,7) \quad C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{16\pi^5 k}{15} \left(\frac{kT}{2\pi\hbar c}\right)^3$$

Como vemos en las ecuaciones (3,6) y (3,7) la entropía y el calor específico de un gas de fonones son función de  $T^3$ . Debido a que la contribución de los fonones es dominante cerca del cero absoluto entonces el comportamiento del calor específico del Helio II predicho por la teoría coincide con el que se observa experimentalmente. De esta manera cerca del cero absoluto el Helio II se comporta como un sólido de Debye.

Ahora calcularemos la contribución del gas de rotones al calor específico y a la entropía del Helio II.



Como la energía de los rotones siempre contiene la cantidad  $\Delta$  (véase ecuación 3,2), la cual es grande comparada con  $kT$  ( $T < 2.19^\circ K$ ), podemos considerar al gas de rotones como un gas de Maxwell Boltzmann.

Entonces la energía libre del gas de rotones está dada por la ecuación (véase apéndice A1,4)

$$(3,8) \quad F_r = -N_r kT \log \frac{eV}{N_r (2\pi\hbar)^3} \int d^3p e^{-\epsilon/kT}$$

donde  $N_r$  es el número de rotones y  $V$  es el volumen ocupado. El número de rotones depende de la temperatura y es determinado por la condición de que la energía libre sea mínima (entonces el sistema está en equilibrio termodinámico):

$$\frac{\partial F_r}{\partial N_r} = 0$$

de aquí obtenemos que la energía libre está dada por

$$(3,9) \quad F_r = -N_r kT$$

y el número de rotones por

$$(3,10) \quad N_r = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p e^{-\epsilon/kT}$$

usando el valor de la energía de los rotones dada por la ecuación (3,2) nos queda que

$$N_r = \frac{V e^{-\Delta/kT}}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2\mu kT}}$$

integrando sobre los ángulos  $\theta$  y  $\psi$  y haciendo el cambio de variable

$p = p_0 + (2\mu kT)^{1/2} x$  obtenemos que

$$N_r = \frac{4\pi V e^{-\Delta/kT}}{(2\pi\hbar)^3} \left[ P_0^2 \int_{-P_0}^{\infty} e^{-x^2} dx + 2P_0(2\mu kT)^{1/2} \int_{-P_0}^{\infty} x e^{-x^2} dx + 2\mu kT \int_{-P_0}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx \right]$$

como  $P_0^2 \gg \mu kT$ , despreciamos los dos últimos términos a la derecha.

Integrando desde  $-\infty$  hasta  $+\infty$  nos queda que

$$(3,11) \quad N_r = \frac{2(\mu kT)^{1/2} P_0^2 V}{(2\pi)^{3/2} \hbar^3} e^{-\Delta/kT}$$

nótese que para  $T = 0$   $N_r = 0$ . De la ecuación (3,9), con ayuda de la ecuación (3,11) obtenemos para la entropía y el calor específico asociados al gas de rotones

$$S_r = - \frac{\partial F_r}{\partial T} = k N_r \left( \frac{\Delta}{T} + \frac{3}{2} \right)$$

$$C_{V,r} = T \left( \frac{\partial S_r}{\partial T} \right)_V = k N_r \left( \frac{\Delta}{T^2} + \frac{\Delta}{T} + \frac{3}{4} \right)$$

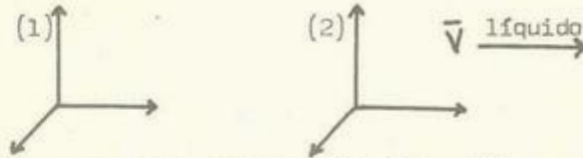
la contribución del gas de rotones es dominante cerca del punto  $\lambda$ .

### 3,3) SUPERFLUIDEZ DEL HELIO II.

El Helio II tiene propiedades de superfluidez; o sea puede fluir sin fricción a través de capilares muy delgados. Empleando el espectro de energía discutido antes, determinaremos la condición para que pueda hacerlo. Supongamos que el Helio II a 0°K fluye a través de un capilar con velocidad  $V$ . Si el flujo es acompañado por fricción entonces una parte de la energía de movimiento se disipa y el sistema realiza tran-

siciones a estados excitados. Mientras no aparezca una excitación térmica, el líquido, o una parte de él, fluirá sin fricción a través del capilar debido a su incapacidad de absorber dicha energía.

Supongamos que al moverse el Helio II, con velocidad  $\bar{V}$  en el capilar, aparece una excitación térmica de momento  $P$  y energía  $E(P)$ . Desde los sistemas de referencia donde el capilar y el líquido están en reposo respectivamente tenemos:



(1) Sistema de referencia donde el líquido está en reposo:

$$\bar{P}_0 = 0 \quad \epsilon_0 = 0$$

(2) Sistema de referencia donde el capilar está en reposo:

$$\bar{P} = M\bar{V} \quad E = \frac{1}{2} \frac{P^2}{M}$$

después de la aparición de la excitación, desde el sistema de referencia donde el líquido estaba en reposo

$$\epsilon_0 = E(\bar{P}) \quad \bar{P}_0 = \bar{P}$$

y desde el sistema de referencia donde el capilar está en reposo

$$(3,14) \quad \bar{P} = \bar{P}_0 + M\bar{V} \quad E = \frac{P^2}{2M} = P_0^2 + P_0 \cdot V + \frac{1}{2} M V^2$$

De la ecuación (3,14) obtenemos finalmente que la energía desde el sistema de referencia donde el capilar está en reposo

$$E = \frac{M V^2}{2} + \bar{P} \cdot \bar{V} + E(P)$$

donde el término  $\frac{M V^2}{2}$  es la energía cinética del líquido y la expresión



sión  $E(\vec{P}) + \vec{P} \cdot \vec{V} = -\left(\frac{Mv^2}{2} - E\right)$  es el cambio de la energía debida a la aparición de la excitación. Si  $\frac{Mv^2}{2} > E > 0$ , la transición a un estado excitado será energéticamente posible, pues el Helio II puede absorber energía (disminuyendo su energía cinética). Esto se traduce a la condición de que la relación

$$(3,15) \quad E(\vec{P}) + \vec{P} \cdot \vec{V} < 0$$

se cumpla. Obviamente la situación más favorable es aquella en la cual el momento  $\vec{P}$  de la excitación creada es directamente opuesto a la velocidad  $\vec{V}$  ( $\vec{P} \cdot \vec{V} = -PV$ ). En este caso tenemos

$$V > \frac{E(P)}{P}$$

Luego la condición final que hace posible la aparición de una excitación térmica en el líquido moviéndose con velocidad  $\vec{V}$ , será obtenida cuando encontremos el mínimo de la cantidad  $E(P)/P$ . Así la condición necesaria para la creación de una excitación es que

$$V > \min \frac{E(P)}{P}$$

y la superfluidez del líquido ocurrirá para velocidades menores que

$$(3,16) \quad V_{CRITICA} = \min \frac{E(P)}{P} \neq 0.$$

entonces la aparición de una excitación térmica será energéticamente desfavorable y el fluido fluirá sin disipación de energía, o sea sin fricción. Por otro lado es obvio que para velocidades del fluido mayores que la velocidad crítica aparecen excitaciones y consecuentemente habrá disipación de energía.

El mínimo de  $E/P$  podemos calcularlo ayudados del espectro de energía

y la condición extrema  $\frac{d}{dp} \left( \frac{\epsilon}{p} \right) = 0$  . Esto nos da

$$(3,17) \quad \frac{d\epsilon'}{dp} = \frac{\epsilon}{p}.$$

De la gráfica del espectro se observa que para los fonones  $\frac{d\epsilon}{dp} = c$  por lo que la velocidad crítica asociada con la creación de un fonón es

$$(3,18) \quad V_{\text{crítica f}} = \frac{\epsilon(p)}{p} \approx 240 \text{ m/seg.}$$

Para los rotones de la condición dada por (3,17) con  $\epsilon$  dada por (3,2) obtenemos que  $p = (p_0^2 + 2\mu\Delta)^{1/2}$ . Así, a segundo orden de aproximación ( $p \approx p_0 + 2\mu\Delta$ ), obtenemos que la velocidad crítica asociada a la aparición de una excitación de este tipo está dada por

$$(3,19) \quad V_{\text{crítica R}} = \frac{\Delta}{p_0} = \frac{(9.6^\circ\text{K})k}{1.95 \times 10^8 \text{ cm}^{-1} \hbar} \approx 60 \text{ m/seg.}$$

El espectro de energía del gas de Bose no predice la superfluidez del Helio por la siguiente razón:

Supongamos que tenemos un "líquido de Bose" con un espectro de energía (véase figura 3,2) dado por la ecuación

$$\epsilon(p) = \epsilon_0 + \frac{p^2}{2M}$$

con ayuda de las condiciones dadas por las ecuaciones (3,16) y (3,17) obtenemos que este "líquido de Bose" tiene propiedades de superfluidez para velocidades menores que

$$V_{\text{crítica B}} = \left( \frac{\epsilon_0}{2M} \right)^{1/2}$$

pero como para el gas ideal de Bose  $\epsilon_0 = 0$  entonces de su espectro de energía no se puede predecir ni explicar la superfluidez.

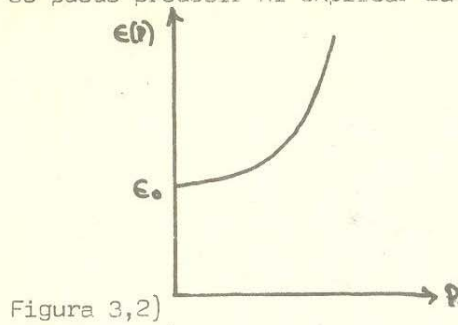


Figura 3,2)

Un líquido con este espectro de energía se comporta como un superfluido para una velocidad  $V < \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2m}}$ .

Cualitativamente los argumentos mencionados son suficientes para explicar la superfluidez del Helio II. Pero cuantitativamente los resultados teóricos no están de acuerdo con los obtenidos experimentalmente. Esto se explica por el hecho de que además de los fonones y los rotones aparecen en el Helio II otro tipo de excitaciones, con características de remolino. Son llamadas vértices cuánticos. Tienen poco peso estadístico por lo que no influyen en las cantidades termodinámicas del sistema pero hidrodinámicamente son importantes como en el caso de las velocidades críticas.

En nuestra discusión, inicialmente hemos supuesto la ausencia de excitaciones térmicas, es decir, consideramos que el Helio II se encontraba en el cero absoluto. Si ahora consideramos que  $T \neq 0^\circ\text{K}$  tendremos en nues

tro sistema los dos tipos de excitaciones. Los fonones predominan para temperaturas menores que  $0.6^{\circ}\text{K}$  y los rotones para temperaturas  $T$  tales que  $0.6^{\circ}\text{K} < T < 2.19^{\circ}\text{K}$ . La presencia de las excitaciones no invalida el argumento dado anteriormente sobre el origen de la superfluidez; pues las excitaciones son bloqueadas por el capilar debido a que al chocar con las paredes transfieren su energía. Macroscópicamente esto aparece como viscosidad. El resultado neto es que sólo pasa la componente superfluida, la que no lleva entropía, comportándose el capilar como una membrana semipermeable. La observación de este fenómeno es el llamado efecto termomecánico.

En conclusión podemos considerar a las excitaciones como un fluido normal y al líquido como un superfluido. La suma de las propiedades hidrodinámicas de estas dos componentes dan por resultado el comportamiento observado en el fluido Helio II y nos llevan a la teoría fenomenológica de los dos fluidos.

#### 3,4) JUSTIFICACION MICROSCOPICA DEL ESPECTRO DE LANDAU SEGUN FEYNMAN.

Hemos visto que con ayuda del espectro de energía, propuesto por Landau, el comportamiento termodinámico del Helio II ha sido explicado ampliamente. Desde el punto de vista de la mecánica cuántica usando argumentos puramente cualitativos Feynman<sup>6)</sup> ha explicado porqué las excitaciones que aparecen cerca del cero absoluto son solo fonones.

Consideremos la función de onda del estado base  $\psi(R_1, R_2, \dots, R_N)$  donde



$R_i$  es el radiovector del  $i$ -ésimo átomo. A cada conjunto de valores de los radiovectores le llamaremos "configuración" y representan las posiciones de los  $N$  átomos de Helio. Para cada configuración hay una amplitud o número  $\varphi$ , el cual es grande para configuraciones probables, densidad uniforme, y es pequeña para configuraciones poco probables - (cuando dos átomos están muy juntos, por ejemplo).

Debido a que los átomos de Helio  $^4$  tienen espín cero, la función de onda del estado base es simétrica. También la podemos tomar como una función real, pues para estados estacionarios tenemos

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_j \nabla_j^2 + \sum_{i < j} U_{ij} \right] \psi = E \psi$$

donde  $U_{ij}$  es la energía potencial entre dos átomos y es real. Claramente, si conjugamos la ecuación, nos queda que

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_j \nabla_j^2 + \sum_{i < j} U_{ij} \right] \psi^* = E \psi^*$$

entonces, como la ecuación de Schroedinger es lineal, podemos escoger la función de onda del estado base  $\varphi = \frac{1}{2}(\psi + \psi^*)$ , la cual es una función real.

La función de onda del estado base minimiza el valor esperado del Hamiltoniano del sistema.<sup>3)</sup> El valor esperado del Hamiltoniano, está dado

por

$$(3,22) \quad \langle H \rangle = \int \dots \int \left[ \frac{\hbar^2}{2m} \sum_j (\nabla_j \varphi)^2 + \sum_{i < j} U_{ij} \varphi^2 \right] dx_1 \dots dx_N = E_0 \int \dots \int \varphi^2 dx_1 \dots dx_N$$

donde estamos suponiendo que  $\varphi$ , en la frontera de la región de inte-

gración, se anula. Si consideramos una variación

$$(3,23) \quad \psi \rightarrow \psi + \delta\psi$$

obtenemos

$$(3,24) \quad \int \dots \int \left[ \frac{\hbar^2}{2m} \sum_s \nabla_s \psi \nabla_s \delta\psi + \sum_{i,j} U_{i,j} \psi \delta\psi - E_0 \psi \delta\psi \right] dx_1 \dots dx_N$$

ya que  $\delta E_0 = 0$ . Ahora usando la identidad vectorial

$$\nabla \cdot (a \vec{A}) = a \nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla a$$

y tomando  $A = \nabla_s \psi$  y  $a = \delta\psi$  obtenemos que

$$(3,25) \quad \nabla_s \psi \nabla_s \delta\psi = -\delta\psi \nabla^2 \psi + \nabla_s (\delta\psi \nabla_s \psi)$$

sustituyendo la ecuación (3,25) en (3,24), el término  $\nabla_s (\delta\psi \nabla_s \psi)$ , con ayuda del Teorema de Gauss, se puede convertir en una integral de superficie y como allí la variación  $\delta\psi = 0$  entonces la integral se anula y nos queda

$$\int \dots \int \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_s \nabla_s^2 \psi + \sum_{i,j} U_{i,j} \psi - E_0 \psi \right] \delta\psi dx_1 \dots dx_N$$

Como las variaciones  $\delta\psi$  son arbitrarias, nos queda que  $\psi$  debe satisfacer la ecuación de Schroedinger

$$(3,26) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_s \nabla_s^2 \psi + \sum_{i,j} U_{i,j} \psi = E_0 \psi.$$

Ahora, debido a que  $\psi$  es real y simétrica,  $|\psi|$  también satisface las condiciones que satisface  $\psi$  y entonces también satisface la ecuación

(3,26). Por lo que también minimiza la expresión (3,22). La primera derivada de  $|\psi|$  debe de ser continua pues satisface la ecuación de Schroedinger y el potencial entre los átomos es finito. Entonces  $\psi$  es positiva (véase figura 3,4) y la podemos escoger normalizada.

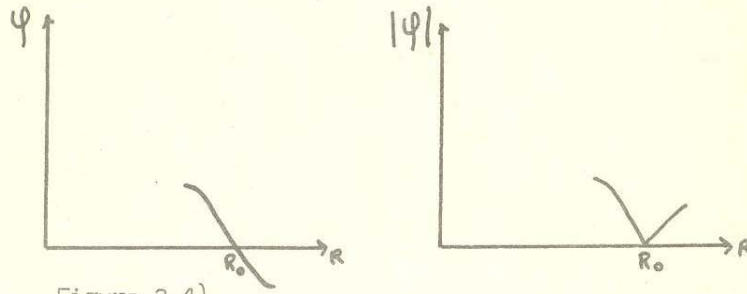


Figura 3,4)

Si  $\psi$  cambia de signo en  $R_0$ , entonces la primera derivada de  $|\psi|$  tiene una discontinuidad en  $R_0$ .

Suponiendo que existen  $\psi_1$  y  $\psi_2$  tales que satisfacen todas las condiciones de arriba (reales, positivas y normalizadas). Como la ecuación de Schroedinger es lineal,  $\psi_1 - \psi_2$  también satisface las condiciones de arriba y no cambia de signo. Pero esto contradice la hipótesis de que  $\psi_1$  y  $\psi_2$  están normalizadas. Entonces la función de onda del estado base es única.

Estados excitados:

La función de onda  $\psi$  asociada a los estados excitados del Helio II deben ser ortonormales a la función de onda del estado base

$$\int \dots \int \psi \psi dx_1 \dots dx_n = 0.$$

En particular, la asociada al primer estado excitado debe tener un nodo, de tal manera que es positiva para un número de configuraciones y es negativa para otro número igual de ellas.

Ahora podemos ver que las excitaciones de más baja energía son fonones ya que éstas son las únicas excitaciones que cambian la densidad del líquido, apareciendo configuraciones, en las que el líquido es comprimido y enrarecido, a las que la función de onda les asocia una amplitud de probabilidad baja y alta respectivamente. Los fonones tienen una baja energía y una larga longitud de onda, abarcando a muchos átomos y originando variaciones en la densidad.



## TEORIA FENOMENOLOGICA DEL HELIO II.

De la teoría microscópica discutida en el capítulo anterior se deduce que bajo ciertas condiciones el Helio II se comporta como si tuviera dos componentes: una de ellas superfluida y la otra un fluido normal. Con esta hipótesis explicaremos los efectos mecanocalórico y termomecánico. Al final del capítulo discutimos la teoría fenomenológica de los dos fluidos de Landau, la cual parte de los resultados experimentales obtenidos por Kapitza al estudiar este último efecto.

## 4,1) EFECTO MECANOCALORICO.

Este fenómeno fué observado por primera vez por Daunt y Mendelssohn.<sup>10)</sup>

Observaron que cuando cierta cantidad de Helio II sale por la parte baja del vaso de la figura 4,1), la temperatura marcada por el termómetro aumenta.

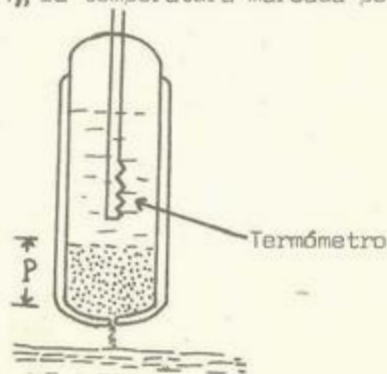


Figura 4,1) Vaso conteniendo Helio II. La posición P está hecha de polvo de esmeril.

Este fenómeno es explicado de la siguiente manera: como el material que está en la región  $P$  del vaso permite sólo el paso de la componente superfluida, y como ésta no lleva entropía, entonces cuando el Helio II abandona el vaso, la energía térmica por unidad de masa aumenta causando un aumento en la temperatura del líquido. Así, la cantidad de calor que debe removerse del vaso para que la temperatura dentro de éste no cambie, cuando sale cierta cantidad de Helio II, es

$$(4,1) \quad Q = TS$$

donde  $S$  es el aumento de entropía por unidad de masa. Es claro que si la componente superfluida del Helio II entra a un vaso conteniendo Helio II (podría ser Helio 3), sucede lo contrario: aparece un enfriamiento por unidad de masa y una cantidad de calor dado por la ecuación (4,1) deberá cederse al vaso para mantener la temperatura constante.

#### 4,2) EFECTO TERMOMECANICO.

En 1938 Allen y Jones <sup>11)</sup> observaron por primera vez que cuando dos vasos conteniendo Helio II, son conectados por un capilar muy delgado, un calentamiento en el interior de uno de los vasos ocasiona no solo una diferencia de temperatura  $\Delta T$ , sino también un flujo de líquido hacia el vaso donde se aplica la energía. Esto origina una diferencia de niveles entre los vasos. Para explicar lo que ocurre, discutiremos antes lo que ocasiona un gradiente de temperatura.

Sea un sistema de Helio II en equilibrio termodinámico. Si aplicamos una cantidad de energía  $W$  en una región del líquido (región 1 de la fi-

gura 4,2) obtenemos un cambio de temperatura con respecto al resto del vaso. Este incremento en la temperatura ocasiona que la componente normal del Helio II aumente. Como consecuencia de esto surge un desequilibrio termodinámico entre la región 1 y el resto del vaso. Para lograr de nuevo el equilibrio, se forman dos corrientes dentro del vaso: la componente superfluida, la cual no transporta entropía, se mueve hacia la región I mientras que la componente normal sale de la región I hacia el resto del vaso. Entonces la transferencia de calor en el Helio II tiene una naturaleza diferente <sup>4)</sup> de la conducción térmica ordinaria. Una diferencia de temperatura en el líquido causa que las dos componentes se muevan, de tal manera que microscópicamente no se observa transferencia de masa.

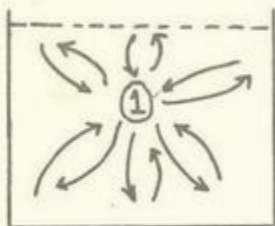


Figura 4,2) Corrientes de convección en el Helio II causadas por un incremento de temperatura en la región I.

Con las ideas anteriores discutiremos el experimento de Kapitza en el cual se observó con mucho detalle el efecto termomecánico y jugó un papel muy importante en la formulación de la teoría de los dos fluidos de Landau.

Consideremos un dispositivo como el de la figura 4,3). Inicialmente su-  
pongamos un equilibrio termodinámico entre A y B. Si aumentamos la tem-  
peratura en A entonces surgen dos corrientes a través de **S** : Componente  
superfluida entra en A y componente normal sale de A. Si disminuimos el  
diámetro del capilar **S** , la componente normal es frenada debido a su vis-  
cosidad; pero la componente superfluida sí pasa hasta que se restablece  
el equilibrio termodinámico. Entonces aparece una diferencia de niveles  
entre A y B. Esta diferencia de niveles corresponde a una presión hidros-  
tática  $\Delta P$  entre los vasos.

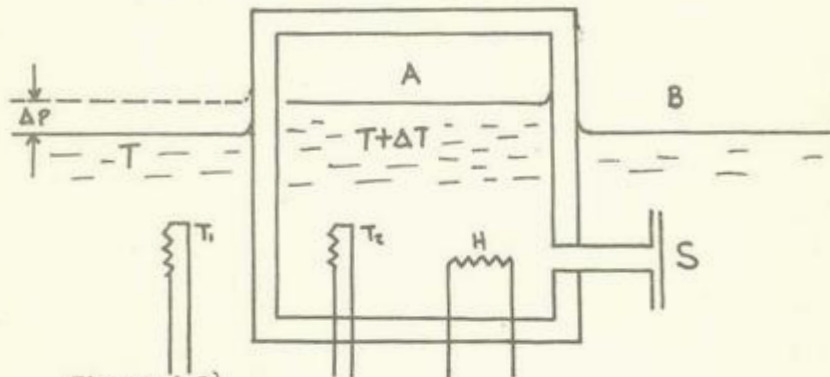


Figura 4,3)

Dispositivo empleado por Kapitza para estu-  
diar el efecto termomecánico.

Quando cesa el movimiento a través del capilar **S** , o sea, cuando el  
superfluido se detiene, se debe cumplir que  $\nabla\mu = 0$  entre los vasos.

Pero como  $\nabla\mu = -s\nabla T + \frac{1}{\rho}\nabla P$  entonces

$$(4,2) \quad \frac{\Delta P}{\Delta T} = \rho s$$



y como  $\rho$  y  $S$  son positivas entonces  $\frac{\Delta p}{\Delta T} > 0$ . Es decir, si aumenta la temperatura en A, también lo hace la presión. La ecuación (4,2) vale solo cuando la energía  $W$  es pequeña. Existe un valor crítico a partir del cual no funciona. Este resultado es fundamental en el avance de la teoría fenomenológica, pues de él se deduce que el flujo del superfluido es causado por el gradiente del potencial químico  $\mu$ . Esto condujo a Landau a proponer la ecuación (4,5) como una de las ecuaciones de movimiento del fluido Helio II.

#### 4,3) HIDRODINAMICA DE LOS DOS FLUIDOS.

Ahora discutiremos la teoría de los dos fluidos de Landau,<sup>2)</sup> la cual da un sistema completo de ecuaciones que describen macroscópicamente el flujo del Helio II.

En esta teoría, las ecuaciones de movimiento envuelven, en cada punto, dos velocidades:  $\bar{v}_n$  y  $\bar{v}_s$ . Entonces a primera aproximación, para velocidades pequeñas, el vector flujo de momento está dado por

$$(4,3) \quad \bar{J} = \rho_n \bar{v}_n + \rho_s \bar{v}_s$$

donde  $\rho_n$  y  $\rho_s$  son las densidades de la componente normal y superfluida respectivamente. Como supondremos que no hay transferencia de momento entre las dos componentes entonces  $\rho_n$  y  $\rho_s$  dependen solo de la presión y de la temperatura del líquido y son tales que su suma es la densidad total del líquido

$$(4,4) \quad \rho = \rho_n + \rho_s$$



debemos aclarar que el hablar de dos componentes del fluido no significa que el Helio II pueda ser separado en las dos partes.

$\bar{V}_n$  es la velocidad de la componente normal y  $\bar{V}_s$  es la velocidad de la componente superfluida. Supondremos que esta última realiza un flujo irrotacional ( $\bar{\nabla} \times \bar{V}_s = 0$ ) y es tal que es empujada por el gradiente de un potencial  $\psi$ ; es decir, satisface la ecuación

$$(4,5) \quad \frac{\partial \bar{V}_s}{\partial t} + (\bar{V}_s \cdot \bar{\nabla}) \bar{V}_s = -\bar{\nabla} \psi$$

además el movimiento del fluido deberá satisfacer ciertas leyes de conservación. Una de ellas es la de conservación de masa

$$(4,6) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \bar{J} = 0$$

con  $\bar{J}$  y  $\rho$  dadas por las ecuaciones (4,3) y (4,4) respectivamente.

Otra es la de conservación de momento

$$(4,7) \quad \frac{\partial J_i}{\partial t} + \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} = 0$$

donde  $P_{ik} = \rho \delta_{ik} + \pi_{ik}$  es el tensor densidad de momento y  $\rho$  es la presión del líquido. Como no consideramos procesos disipativos, entonces la entropía se conserva y el flujo debe satisfacer la ecuación

$$(4,8) \quad \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \bar{f} = 0$$

donde  $\rho S$  es la densidad de entropía y  $\bar{f}$  es el vector flujo de densidad de entropía.

Estas ecuaciones, (4,5), (4,6), (4,7) y (4,8), son las que describen el

movimiento del fluido Helio II. Son significantes cuando separamos los valores de  $\psi$ ,  $P_{ik}$  y  $\bar{f}$ . Además estas ecuaciones deben implicar una ecuación que estipule la conservación de la energía

$$(4,9) \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \bar{v} \cdot \bar{Q} = 0$$

donde  $U$  es la energía por unidad de volumen y  $\bar{Q}$  es el vector flujo de energía.

En el apéndice dos demostramos que el principio de relatividad galilea no combinado con la ley de la conservación de la energía nos permite - identificar a  $\psi$  con  $\mu$  y

$$(4,10) \quad \bar{f} = \rho S \bar{v}_n$$

$$(4,11) \quad \bar{Q} = \left(\frac{1}{2} v_s^2 + \mu\right) \bar{J} + \rho S T \bar{v}_n + \rho_n \bar{v}_n [\bar{v}_n \cdot (\bar{v}_n - \bar{v}_s)]$$

$$(4,12) \quad P_{ik} = \rho \delta_{ik} + \rho_n v_{ni} v_{nk} + \rho_s v_{si} v_{sk}$$

en el sistema de referencia laboratorio. Nótese que la ecuación (4,12) es una generalización natural de la expresión  $P_{ik} = \rho \delta_{ik} + \rho v_i v_k$  para un fluido ordinario y que en la ecuación (4,10) el vector flujo de entropía es función solo de  $\bar{v}_n$ . Esto resulta natural si recordamos que solo la componente normal transporta entropía. Entonces la transferencia de calor en el Helio II se debe solo a la componente normal y es función de  $\rho S T \bar{v}_n$ .

las condiciones a la frontera de las ecuaciones de movimiento de los dos fluidos son tales que la componente perpendicular del vector flujo de momento  $\vec{J}$  debe desoacarecer en cualquier superficie sólida.

La componente tangente de  $\vec{V}_n$  en la superficie sólida, debido a su viscosidad (interacción de las excitaciones térmicas con la superficie), se anula.

La componente tangente de la velocidad del superfluido, como no tiene viscosidad, en la superficie es distinta de cero.

Por otro lado la componente perpendicular de  $\vec{V}_n$  no debe ser cero, ya que las excitaciones térmicas pueden ser emitidas o absorbidas por la superficie.

Para velocidades y variaciones en  $\rho, S, T$  y  $P$  muy pequeñas, podemos considerar solo términos lineales. En este caso, las ecuaciones de movimiento para el fluido Helio II quedan expresadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \vec{\nabla} P &= 0 \\ \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \rho S \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_n &= 0 \\ \frac{\partial \bar{V}_s}{\partial t} - S \bar{\nabla} T + \frac{1}{\rho} \bar{\nabla} P &= 0, \end{aligned}$$

(4, 14)

Estas ecuaciones las emplearemos para demostrar que el Helio II puede soportar la propagación de dos tipos de ondas: primero y segundo sonido.

PROPAGACION DE ONDAS EN EL HELIO II.

En este capítulo discutiremos las consecuencias que surgen de la teoría fenomenológica de los dos fluidos. En particular estudiaremos la propagación de ondas en el Helio II.

5,1) SEGUNDO SONIDO.

De la teoría de los dos fluidos se deducen dos ecuaciones de onda,<sup>2)</sup> cada una con su respectiva velocidad de propagación; una corresponde al sonido ordinario y otra al segundo sonido. Las obtendremos partiendo de las ecuaciones de movimiento del fluido Helio II. Primero, como consideraremos pequeñas variaciones de  $\rho, S, T, P$  supondremos que

$$(5,1) \quad \begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \rho' \\ S &= S_0 + S' \\ T &= T_0 + T' \\ P &= P_0 + P' \end{aligned}$$

donde las letras primas denotan pequeños cambios en las cantidades correspondientes durante la propagación de las ondas y las que tienen subíndice cero son los valores en equilibrio. Con esto y del hecho de considerar que la velocidad del fluido es mucho menor que la velocidad de propagación de las ondas, emplearemos las ecuaciones de movimiento para el fluido Helio II con solo variaciones de primer orden. Ellas son las ecuaciones (4,14):



(5,2)

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \bar{v} \cdot \bar{J} = 0$$

(5,3)

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial t} + \bar{v} p = 0$$

(5,4)

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} + \rho_0 s_0 \bar{v} \cdot \bar{v}_u = 0$$

(5,5)

$$\frac{\partial \bar{v}_s}{\partial t} - s_0 \bar{\nabla} T + \frac{1}{\rho_0} \bar{\nabla} p = 0$$

Derivando (5,2) con respecto al tiempo y usando (5,3) obtenemos para

$p'$  y  $p'$

(5,6)

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \nabla^2 p' = 0$$

Esta es la ecuación de onda para la propagación de cambios de presión o de densidad en el líquido.

Ahora si usamos el hecho de que

$$\bar{J} = \rho_u \bar{v}_u + \rho_s \bar{v}_s$$

y si sus-

tituimos  $\bar{\nabla} p$  dado por la ecuación (5,3), en la ecuación (5,5), obtenemos que

(5,7)

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\bar{v}_u - \bar{v}_s) = -\rho_0 s_0 \bar{\nabla} T$$

usando la identidad

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_s}{\partial t} - \frac{s}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t}$$

y usando las ecuaciones (5,2) y (5,3) nos queda que

$$\frac{\partial s'}{\partial t} = -\frac{s_0 \rho_0}{\rho_0} \bar{\nabla} \cdot (\bar{v}_u - \bar{v}_s)$$

Derivando esta ecuación con respecto al tiempo y usando la ecuación (5,7)

obtenemos para  $T'$  y  $S'$  :

$$(5,8) \quad \frac{\partial^2 S'}{\partial t^2} - \frac{\rho_{s_0} S_0^2}{\rho_{n_0}} \nabla^2 T' = 0$$

esta es la ecuación de onda para la propagación de variaciones de la entropía o bien de la temperatura. Trataremos de obtener las velocidades de propagación de las dos ondas. Especificando a la presión  $P$  y a la temperatura  $T$  en función de la densidad y la entropía; es decir,  $P = P(\rho, S)$  y  $T = T(\rho, S)$  obtenemos para las pequeñas variaciones  $P'$  y  $T'$

$$(5,9) \quad \begin{aligned} P' &= \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S \rho' + \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_\rho S' \\ T' &= \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_S \rho' + \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_\rho S' \end{aligned}$$

Sustituyendo las ecuaciones (5,9) en las ecuaciones (5,6) y (5,8) nos queda

$$(5,10) \quad \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S \nabla^2 \rho' - \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_\rho \nabla^2 S' = 0$$

$$(5,11) \quad \frac{\partial^2 S'}{\partial t^2} - \frac{\rho_{s_0} S_0^2}{\rho_{n_0}} \left[ \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_S \nabla^2 \rho' + \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_\rho \nabla^2 S' \right] = 0$$

Si suponemos que las soluciones de estas ecuaciones son ondas planas, en las cuales  $\rho'$  y  $S'$  son proporcionales al factor  $e^{i\omega(t - x/u)}$  donde  $u$  es la velocidad de propagación de la onda, entonces de las ecuaciones (5,10) y (5,11) obtenemos

$$-w^2 p' + \left(\frac{\partial p}{\partial p}\right)_s \frac{w^2}{u^2} p' + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_p \frac{w^2}{u^2} s' = 0$$

$$-w^2 s' + \frac{p_0 s_0^2}{\rho_0} \left[ \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \frac{w^2}{u^2} p' + \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p \frac{w^2}{u^2} s' \right] = 0$$

Multiplicando por  $u^2/w^2$  y agrupando nos queda

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_p s' + \left[ u^2 - \left(\frac{\partial p}{\partial p}\right)_s \right] p' = 0$$

$$\left[ u^2 - \frac{p_0 s_0^2}{\rho_0} \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p \right] s' - \frac{p_0 s_0^2}{\rho_0} \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s p' = 0$$

Este sistema de ecuaciones tiene solución solo si su determinante vale cero. O sea que

$$\left[ u^2 - \frac{p_0 s_0^2}{\rho_0} \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p \right] \left[ u^2 - \left(\frac{\partial p}{\partial p}\right)_s \right] = \frac{p_0 s_0^2}{\rho_0} \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_p$$

si tomamos

$$u_1^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial p}\right)_s, \quad u_2^2 = \frac{p_0 s_0^2}{\rho_0} \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_p$$

y usando la identidad termodinámica

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_p = - \frac{VT}{K} \frac{C_p - C_v}{C_p C_v}$$

donde  $K = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s$  es el coeficiente de compresibilidad adiabática, nos queda que

$$(5,12) \quad (u^2 - u_1^2)(u^2 - u_2^2) = - \frac{p_0 s_0^2}{\rho_0} \frac{VT}{K} \frac{C_p - C_v}{C_p C_v}$$

Como el coeficiente de expansión térmica del Helio II es muy pequeño entonces los calores específicos  $C_p$  y  $C_v$  son casi iguales. Tomando  $C_p = C_v = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_p$  de la ecuación (5,12) obtenemos las velocidades de propagación del primero y segundo sonido del Helio II:

$$(5,13) \quad u_1 = \sqrt{\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s}$$

$$(5,14) \quad u_2 = \sqrt{\frac{\rho_{s0} S_0^2 T}{\rho_{n0} C_v}}$$

Nótese que  $u_2$  la velocidad del segundo sonido, depende de la temperatura de tal manera que en el punto  $\lambda$  vale cero (véase figura 5,1). Peshkov<sup>5)</sup> observó la propagación del segundo sonido en el Helio II encontrando que los resultados teóricos concuerdan con los resultados experimentales, con lo cual se confirma la parte fenomenológica de los dos fluidos.

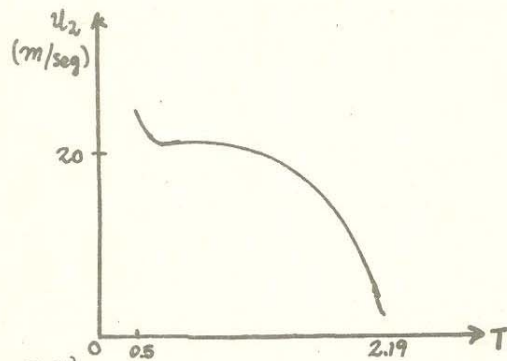


Figura 5,1) Dependencia de la velocidad del segundo sonido con respecto a la temperatura. Peshkov, 1946.

El segundo sonido se excita en el Helio II cuando éste está en contacto con un cuerpo cuya temperatura varía periódicamente de tal manera que en un tubo resonante, lleno con Helio II, podemos observar ondas estacionarias usando termómetros como detectores (véase figura 5,2)

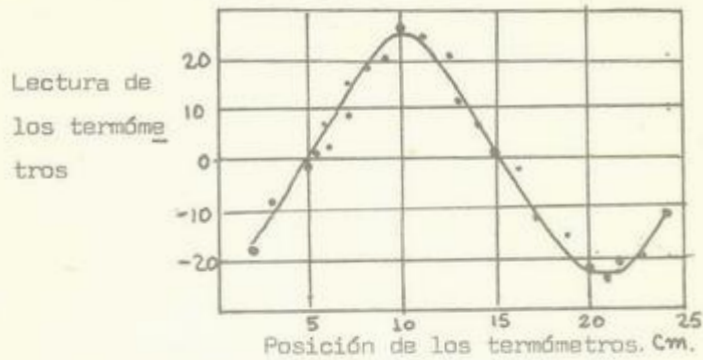


Figura 5,2) Patrón de ondas estacionarias de segundo sonido en el Helio II,

Usando el segundo sonido se puede medir la variación de los componentes normal y superfluida con respecto a la temperatura. Peshkov <sup>5)</sup> encontró que  $\rho_n/\rho = 1$  en el punto  $\lambda$  y que cae a cero conforme la temperatura disminuye (véase figura 5,3)

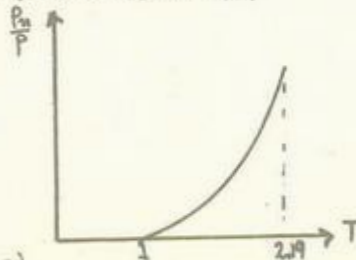


Figura 5,3) Dependencia de la componente normal con respecto a la temperatura.



Si se mide  $\rho_s$  empleando el segundo sonido se encuentra que abajo de 0.9°K es el total de la densidad del líquido<sup>5)</sup>. Sin embargo cálculos teóricos (Penrose y Onsager) y también medidas experimentales dan - fuertes indicaciones de que el condensado del Helio en el estado de momento cero es más o menos el 10%. Entonces surge la pregunta de - cuál es la naturaleza microscópica de la  $\rho_s$  que entra en las ecuaciones de Landau.

SISTEMAS DE PARTICULAS IDENTICAS.

Consideremos un cuerpo muy grande, tal que podamos suponer que tiene una energía y un número de partículas constantes. Supongamos que está formado de dos partes: La parte que vamos a considerar la llamamos sistema y la otra parte, mucho más grande la llamamos depósito. El sistema puede intercambiar energía y materia con el depósito de tal manera que podamos considerar que están en equilibrio termodinámico.

Si la temperatura de nuestro sistema es cercana al cero absoluto, entonces los grados de libertad asociados a él disminuyen y la estadística de Maxwell-Boltzmann ya no es aplicable, pues la ocupancia promedio en cada estado del sistema no es muy pequeña.

La nueva estadística que hay que emplear depende de si las funciones de onda asociadas a las partículas son simétricas o antisimétricas. En el primer caso tenemos la estadística de Bose-Einstein y en el segundo la de Fermi-Dirac. Como los átomos de Helio 4 tienen espín entero, haremos énfasis en la de Bose-Einstein. La estadística de Fermi-Dirac es aplicable a partículas de espín semientero.

A1,1) DISTRIBUCION GRAND CANONICA DE GIBBS.

La distribución grand canónica de Gibbs da la probabilidad de encontrar

al sistema (el cual se encuentra en contacto termodinámico con el depósito) con  $N$  partículas y  $n_p$  de ellas en el estado con momento  $\bar{p}$ .

Dicha probabilidad está dada por la función de distribución:

$$(A1,1) \quad W_{N\{n_p\}} = e^{\frac{1}{kT}(-\Omega + \mu N - E_{N\{n_p\}})}$$

donde  $k$  es la constante de Boltzmann,  $T$  es la temperatura,  $\Omega = -PV$  es el potencial termodinámico,  $\mu$  es el potencial químico y  $E_{N\{n_p\}}$  es la energía total proporcionada por los niveles de energía.

La condición de normalización para la función de distribución requiere que el resultado de sumar  $W_{N\{n_p\}}$  primero sobre todos los estados cuánticos (para una  $N$  dada) y luego sobre todos los valores de  $N$  sea igual a la unidad:

$$(A1,2) \quad \sum_N \sum_{\{n_p\}} W_{N\{n_p\}} = e^{\beta\Omega} \sum_N \left[ e^{\beta\mu N} \sum_{\{n_p\}} e^{-\beta E_{N\{n_p\}}} \right] = 1$$

donde  $\beta = \frac{1}{kT}$

de aquí obtenemos para el potencial termodinámico

$$\Omega = -kT \log \sum_N \left[ e^{\beta\mu N} \sum_{\{n_p\}} e^{-\beta E_{N\{n_p\}}} \right]$$

o sea

$$(A1,3) \quad \Omega = -kT \log Q$$

donde

$$(A1,4) \quad Q = \sum_N \left[ e^{\beta\mu N} \sum_{\{n_p\}} e^{-\beta E_{N\{n_p\}}} \right]$$

es la función partición asociada al sistema. Esta función contiene toda la información necesaria para calcular las cantidades termodinámicas pertinentes del sistema.

A1,2) CALCULO DE  $\langle n_p \rangle$ ,  $\langle N \rangle$  Y  $U$  PARA BOSONES.

En general el valor promedio de una observable física está dado por

A1,5) 
$$\langle A \rangle = \frac{1}{Q} \sum_N \sum_{\{n_p\}} A e^{\beta(\mu N - E_{\{n_p\}})}$$

donde  $Q$  es la función partición del sistema y está dada por la ecuación (A1,4).

En particular, para cierta temperatura  $T$ , el número promedio de partículas en el estado con momento  $\vec{p}$  está dado por

$$\langle n_p \rangle = \frac{1}{Q} \sum_N \left[ e^{\beta \mu N} \sum_{\{n_p\}} n_p e^{-\beta \sum \epsilon_p n_p} \right]$$

Si consideramos la derivada de  $\log Q$  con respecto a  $\epsilon_p$ , es fácil demostrar que

A1,6) 
$$\langle n_p \rangle = -kT \frac{\partial \log Q}{\partial \epsilon_p} = \frac{\partial R}{\partial \epsilon_p}$$

Así mismo, para el número total promedio de partículas del sistema tenemos

$$\langle N \rangle = \frac{1}{Q} \sum_N \left[ N e^{\beta \mu N} \sum_{\{n_p\}} e^{-\beta \sum \epsilon_p n_p} \right]$$

Considerando la derivada de  $\log Q$  con respecto a  $\mu$ , obtenemos que:

A1,7) 
$$\langle N \rangle = kT \frac{\partial \log Q}{\partial \mu} = - \frac{\partial R}{\partial \mu}$$

Para la energía interna del sistema, definida por

$$U = \langle \sum_p n_p \epsilon_p \rangle$$

obtenemos que

$$U = \frac{1}{Q} \sum \left[ e^{\beta \mu N} \sum_{\{n_p\}} \left( \sum_p \epsilon_p n_p \right) e^{-\beta \sum_p \epsilon_p n_p} \right]$$

Si consideramos la variación de  $\log Q$  con respecto a  $\beta$  nos queda que

$$U = - \frac{\partial \log Q}{\partial \beta} + \frac{1}{Q} \sum_N \sum_{\{n_p\}} \mu N e^{\beta(\mu N - \sum_p \epsilon_p n_p)}$$

Como  $\mu$  no depende de los índices, pues es una cantidad intensiva del sistema, nos queda que

$$(A1,8) \quad U = - \frac{\partial \log Q}{\partial \beta} + \mu \langle N \rangle$$

El potencial termodinámico del conjunto de todas las partículas en el gas las cuales están en un estado cuántico con momento  $\vec{p}$  está dado por

$$(A1,9) \quad -\Omega_p = -kT \log \sum_{n_p=0}^{\infty} [e^{\beta(\mu - \epsilon_p)}]^{n_p}$$

ya que la energía de  $n_p$  partículas en el  $p$ -ésimo estado es  $n_p \epsilon_p$ .

Como el número de ocupación de los estados cuánticos para un sistema de bosones no está restringido, pues no obedecen el principio de exclusión de Pauli, entonces debemos tener que  $e^{\beta(\mu - \epsilon_p)} < 1$  para

que la sumatoria de la ecuación (A1,9) sea convergente. Esta condición debe ser válida para todo valor de  $\epsilon_p$  incluso cuando vale cero. Enton



ces el potencial químico para bosones es siempre negativo:

$$(A1,10) \quad \mu < 0.$$

Entonces la sumatoria en la ecuación (A1,9) es igual a  $[1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_p)}]^{-1}$   
por lo que

$$(A1,11) \quad \Omega_p = kT \log(1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_p)})$$

El potencial termodinámico  $\Omega$  del gas, lo obtenemos sumando  $\Omega_p$   
sobre todos los estados cuánticos:

$$(A1,12) \quad \Omega = kT \sum_p \log(1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_p)})$$

de esta ecuación y de (A1,3) obtenemos que la función partición para  
un gas libre de bosones está dada por

$$(A1,13) \quad Q = \prod_p \frac{1}{1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_p)}}$$

De la ecuación (A1,6) con  $\Omega$  dado por la ecuación (A1,12) obtenemos  
que

$$(A1,14) \quad \langle n_p \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} - 1}$$

ésta es la función de distribución de Bose - Einstein. Así mismo, obte  
nemos de (A1,7) para el número promedio de partículas

$$(A1,15) \quad \langle N \rangle = \sum_p \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} - 1} = \sum_p \langle n_p \rangle$$

y por último, de la ecuación (A1,8) y (A1,13) obtenemos que la energía interna  $U$  está dada por:

$$(A1,16) \quad U = \sum_p \epsilon_p \langle n_p \rangle$$

A1,3) ENERGIA LIBRE DE UN GAS DE FONONES.

Como el número de fonones  $\langle N \rangle$  en un sólido o en un líquido como el Helio II es un número variable, entonces debe de ser determinado de las condiciones de equilibrio termodinámico del sistema. Esto es, la energía libre de el gas debe de ser un mínimo (para  $T$  y  $V$  dadas) con respecto al número de fonones. Es decir  $\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} = 0$ . Pero como

$$\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} = \mu \quad \text{entonces}$$

$$\mu = 0$$

el potencial químico para un gas de fonones es cero.

Entonces la energía libre coincide con el potencial termodinámico pues

$$F = N\mu + R$$

Así, la energía libre para un gas de fonones está dada por la ecuación

(A1,12) con  $\mu = 0$

$$F = kT \sum_p \log(1 - e^{-\beta \epsilon_p})$$

donde  $\epsilon_p = pc$ . Cuando el volumen ocupado por el gas es muy grande, entonces la sumatoria la podemos aproximar de la siguiente manera

$$F = \frac{kTV}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \log(1 - e^{-\beta pc})$$

Como el integrando no depende de  $\theta$  ni de  $\psi$ , nos queda que

$$F = \frac{4\pi V kT}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty dp p^2 \log(1 - e^{-\beta\epsilon})$$

integrando por partes, tomando  $u = \log(1 - e^{-\beta\epsilon})$  y  $dv = p^2 dp$

obtenemos que la energía libre para un gas de fonones está dada por

$$F = -\frac{V}{3(2\pi^2\hbar^3)} \int_0^\infty \frac{p^3 dp \frac{\partial \epsilon}{\partial p}}{e^{\beta\epsilon} - 1}$$

A1,4) ENERGIA LIBRE DE UN GAS PERFECTO DE BOLTZMAN.

La energía libre para un gas la podemos calcular usando la expresión general

$$F = -kT \log \sum_{\{n_p\}} e^{-\beta E\{n_p\}}$$

la expresión

$$Q = \sum_{\{n_p\}} e^{-\beta E\{n_p\}}$$

es la función partición del sistema.

Podemos reducir la sumatoria sobre todos los estados del sistema a sumatoria sobre todos los estados de una partícula individual escribiendo

$$E\{n_p\} \text{ como una suma de energías } \epsilon_k. E\{n_p\} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \dots + \epsilon_N,$$

donde N es el número de partículas del gas.

Escribiendo  $e^{-\beta E\{n_p\}}$  como un producto de factores  $e^{-\beta \epsilon_k}$  para

cada molécula y sumando independientemente para cada molécula obtenemos que

$$Q = \left( \sum_K e^{-\beta \epsilon_K} \right)^N$$

pues el conjunto de valores de cada  $\epsilon_K$  es el mismo para todas las moléculas del gas.

Cada conjunto de  $N$  diferentes valores  $\epsilon_K$  difieren solo en la distribución de las moléculas idénticas del gas sobre los niveles  $\epsilon_K$  pero corresponden al mismo estado cuántico entonces debemos dividir por el número de posibles permutaciones de las  $N$  partículas. Entonces nos queda que

$$Q = \frac{1}{N!} \left( \sum_K e^{-\beta \epsilon_K} \right)^N$$

y la energía libre

$$F = -kT \log \frac{1}{N!} \left( \sum_K e^{-\beta \epsilon_K} \right)^N$$

Cuando  $N$  es grande se puede usar la aproximación

$$\log N! = N \log \frac{N}{e}$$

entonces nos queda que

$$F = -NkT \log \left[ \frac{e}{N} \sum_K e^{-\beta \epsilon_K} \right]$$

Cuando el volumen ocupado por el gas es muy grande esto se reduce a

$$F = -NkT \log \left[ \frac{e v}{N (2\pi\hbar)^3} \int d^3p e^{-\beta \epsilon} \right]$$

A2,1) DE LA TEORIA DE LOS DOS FLUIDOS.

En este apéndice demostraremos que los valores de  $\bar{Q}$ ,  $P_{ik}$  y  $\bar{f}$  para el fluido Helio II están dados por

$$(A2,1) \quad \bar{Q} = \left(\frac{1}{2}V_s^2 + \mu\right)\bar{J} + pST\bar{V}_n + p_n\bar{V}_n \left[\bar{V}_n \cdot (\bar{V}_n - \bar{V}_s)\right]$$

$$(A2,2) \quad P_{ik} = p\delta_{ik} + p_n V_{ni} V_{nk} + p_s V_{si} V_{sk}$$

$$(A2,3) \quad \bar{f} = pS\bar{V}_n$$

y que el potencial que empuja a la componente superfluida es el potencial químico  $\mu$ .

Usaremos el sistema de referencia laboratorio K y el sistema de referencia local  $K_0$  donde la componente superfluida está en reposo.  $K_0$  se mueve con velocidad  $\bar{V}_s$  con respecto a K. Los valores del vector flujo de momento  $\bar{J}$  y la energía por unidad de volumen (interna más cinética)  $U$  en el sistema K están relacionados con los valores de  $J_0$  y  $U_0$  en  $K_0$  por las fórmulas de transformación de mecánica

$$(A2,4) \quad \bar{J} = p\bar{V}_s + \bar{J}_0$$

$$(A2,5) \quad U = \frac{1}{2}pV_s^2 + \bar{J}_0 \cdot \bar{V}_s + U_0$$



donde  $\bar{J}_0 = \rho_n \bar{V}_0 = \rho_n (\bar{V}_n - \bar{V}_s)$  y  $U_0$  en función de  $\rho$ ,  $S$  y el momento  $\bar{J}_0$  satisface la identidad termodinámica

$$(A2,6) \quad dU_0 = \mu d\rho + \tau dS + \bar{V}_0 \cdot d(\bar{J} - \rho \bar{V}_s)$$

donde los dos primeros términos corresponden a la relación usual y el tercero corresponde al cambio de energía debida a la transferencia de momento en  $K_0$ .

La descripción completa del movimiento del Helio II debe envolver ocho ecuaciones dinámicas. Las ecuaciones de conservación

$$(A2,7) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \bar{J} = 0$$

$$(A2,8) \quad \frac{\partial J_i}{\partial t} + \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} = 0$$

$$(A2,9) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \bar{f} = 0$$

y la ecuación que satisface la velocidad  $\bar{V}_s$ :

$$(A2,10) \quad \frac{\partial \bar{V}_s}{\partial t} + (\bar{\nabla} \cdot \bar{V}_s) \bar{V}_s = - \bar{\nabla} \psi$$

De estas ecuaciones debemos obtener la ecuación de conservación de energía:

$$(A2,11) \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \bar{Q} = 0$$

Partiendo de la ecuación (A2,5) y con ayuda de las ecuaciones (A2,7), (A2,8), (A2,9) y (A2,10) obtendremos la ecuación (A2,11) y demostraremos que es necesario que  $\bar{Q}$ ,  $\bar{f}$ ,  $P_{ik}$  y  $\Psi$  tomen los valores arriba mencionados.

La variación de  $U$  con respecto al tiempo está dada por

$$(A2,12) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \left(\frac{1}{2} v_s^2 - v_s^2\right) \frac{\partial p}{\partial t} + (\bar{J} - p \bar{v}_s) \cdot \frac{\partial \bar{v}_s}{\partial t} + \bar{v}_s \cdot \frac{\partial \bar{J}}{\partial t} + \frac{\partial v_o}{\partial t}$$

donde hemos cambiado  $\bar{J}_o$  usando la ecuación (A2,4). Usando la ecuación (A2,6) para  $d v_o$ , la ecuación (A2,12) nos queda

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \left[\frac{1}{2} v_s^2 + \mu - (\bar{v}_s + \bar{v}_o) \cdot \bar{v}_s\right] \frac{\partial p}{\partial t} + T \frac{\partial p_s}{\partial t} + [\bar{J} - p(\bar{v}_s + \bar{v}_o)] \cdot \frac{\partial \bar{v}_s}{\partial t} + (\bar{v}_s + \bar{v}_o) \cdot \frac{\partial \bar{J}}{\partial t}$$

con ayuda de las ecuaciones (A2,7), (A2,8), (A2,9) y (A2,10) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} = & - \left[\frac{1}{2} v_s^2 + \mu - (\bar{v}_s + \bar{v}_o) \cdot \bar{v}_s\right] \bar{v} \cdot \bar{J} - T \bar{v} \cdot \bar{f} - [\bar{J} - p(\bar{v}_s + \bar{v}_o)]_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \\ & - [\bar{J} - p(\bar{v}_s + \bar{v}_o)]_i v_{sk} \frac{\partial v_{si}}{\partial x_k} - (\bar{v}_s + \bar{v}_o)_i \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} \end{aligned}$$

donde estamos usando la convención de que se suma cuando hay índices repetidos. Recordando que  $P_{ik} = p \delta_{ik} + \pi_{ik}$  nos queda que

$$(A2,13) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = - \left[ \frac{1}{2} v_s^2 + \mu - (\bar{v}_s + \bar{v}_0) \cdot \bar{v}_s \right] \bar{\nabla} \cdot \bar{J} - T \bar{\nabla} \cdot \bar{f} - [\bar{J} - \rho(\bar{v}_s + \bar{v}_0)] \cdot \bar{\nabla} \psi \\ - [\bar{J} - \rho(\bar{v}_s + \bar{v}_0)]_i v_{sk} \frac{\partial v_{si}}{\partial x_k} - (v_s + v_0) \cdot \bar{\nabla} p - (\bar{v}_s + \bar{v}_0)_i \frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_k}$$

como en (A2,13) tenemos términos del tipo  $a \bar{\nabla} \cdot \bar{A}$  entonces usando la identidad vectorial

$$\bar{\nabla} \cdot (a \bar{A}) = a \bar{\nabla} \cdot \bar{A} + \bar{A} \cdot \bar{\nabla} a$$

nos queda

$$(A2,14) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = - \nabla \cdot \left\{ \left[ \frac{1}{2} v_s^2 + \mu - (\bar{v}_s + \bar{v}_0) \cdot \bar{v}_s \right] \bar{J} + T \bar{f} + (\bar{v}_s + \bar{v}_0)_i \pi_{ik} \right\} + \pi_{ik} \frac{\partial (\bar{v}_s + \bar{v}_0)_i}{\partial x_k} \\ + \bar{J} \cdot \nabla \left[ \frac{1}{2} v_s^2 + \mu - (\bar{v}_s + \bar{v}_0) \cdot \bar{v}_s \right] + \bar{f} \cdot \bar{\nabla} T - [\bar{J} - \rho(\bar{v}_s + \bar{v}_0)] \cdot \bar{\nabla} \psi - [\bar{J} - \rho(\bar{v}_s + \bar{v}_0)]_i v_{sk} \frac{\partial v_{si}}{\partial x_k}$$

Como la presión P satisface la relación

$$(A2,15) \quad \bar{\nabla} p = \rho_s \bar{\nabla} T + \rho \bar{\nabla} \mu + (\bar{J} - \rho \bar{v}_s)_i \bar{\nabla} v_{0i}$$

entonces sustituyendo la ecuación (A2,15) en (A2,14) obtenemos

$$(A2,16) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = - \nabla \cdot \left\{ \left[ \frac{1}{2} v_s^2 + \mu - (\bar{v}_s + \bar{v}_0) \cdot \bar{v}_s \right] \bar{J} + T \bar{f} + (\bar{v}_s + \bar{v}_0)_i \pi_{ik} + [\bar{f} - \rho_s (\bar{v}_s + \bar{v}_0)] \cdot \bar{\nabla} T \right. \\ \left. + [\bar{J} - \rho(\bar{v}_s + \bar{v}_0)] \cdot \bar{\nabla} (\mu - \psi) + \bar{J} \cdot \bar{\nabla} \left[ \frac{1}{2} v_s^2 - (\bar{v}_s + \bar{v}_0) \cdot \bar{v}_s \right] + \pi_{ik} \frac{\partial (\bar{v}_s + \bar{v}_0)_i}{\partial x_k} \right. \\ \left. - [\bar{J} - \rho(\bar{v}_s + \bar{v}_0)]_i \frac{\partial v_{si}}{\partial x_k} - (\bar{v}_s + \bar{v}_0)_k (\bar{J} - \rho \bar{v}_s)_i \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k} \right\}$$

donde hemos agrupado los términos correspondientes. Expresando la cantidad  $\bar{J} \cdot \bar{\nabla} \left[ \frac{1}{2} v_s^2 - (\bar{v}_s + \bar{v}_0) \cdot \bar{v}_s \right]$  en notación de índices repetidos nos queda que

$$\begin{aligned}
 \bar{J} \cdot \bar{\nabla} \left[ \frac{1}{2} v_s^2 - (\bar{v}_s + \bar{v}_0) \cdot \bar{v}_s \right] &= J_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{1}{2} v_{si} v_{si} - (v_s + v_0)_i v_{si} \right] \\
 (A2,17) \qquad \qquad \qquad &= J_k v_{si} \frac{\partial v_{si}}{\partial x_k} - J_k (\bar{v}_s + \bar{v}_0)_i \frac{\partial v_{si}}{\partial x_k} - J_k v_{si} \frac{\partial (v_s + v_0)_i}{\partial x_k} \\
 &= -J_k v_{si} \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k} - J_k (\bar{v}_s + \bar{v}_0)_i \frac{\partial v_{si}}{\partial x_k}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación (A2,17) en (A2,16)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial t} &= -\bar{\nabla} \cdot \left\{ \left[ \frac{1}{2} v_s^2 + \mu - (\bar{v}_s + \bar{v}_0) \cdot \bar{v}_s \right] \bar{J} + T \bar{f} + (\bar{v}_s + \bar{v}_0)_i \bar{\pi}_{ik} \right\} \\
 &\quad + \left[ \bar{J} - \rho (\bar{v}_s + \bar{v}_0) \right] \cdot \bar{\nabla} (\mu - \psi) + \left[ \bar{f} - \rho S (\bar{v}_s + \bar{v}_0) \right] \cdot \bar{\nabla} T + \pi_{ik} \frac{\partial (v_s + v_0)_i}{\partial x_k} \\
 &\quad - \left[ J_k v_{si} + (v_s + v_0)_k (\bar{J} - \rho \bar{v}_s)_i \right] \frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k} - \left\{ \left[ \bar{J} - \rho (v_s + v_0) \right]_i + J_k (\bar{v}_s + \bar{v}_0)_i \right\} \frac{\partial v_{si}}{\partial x_k}
 \end{aligned}$$

Es fácil ver que los coeficientes de  $\frac{\partial v_{0i}}{\partial x_k}$  y  $\frac{\partial v_{si}}{\partial x_k}$  son iguales ya que  $v_{0i} J_{0k} = v_{0k} J_{0i}$  pues  $\bar{J}_0$  y  $\bar{v}_0$  son paralelos. Es decir:

$$\left[ \bar{J} - \rho (v_s + v_0) \right]_i v_{sk} + J_k (v_s + v_0)_i = J_k v_{si} + (v_s + v_0)_k (\bar{J} - \rho v_s)_i$$

Así, finalmente nos queda que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial t} &= -\bar{\nabla} \cdot \left\{ \left[ \frac{1}{2} v_s^2 + \mu - (\bar{v}_s + \bar{v}_0) \cdot \bar{v}_s \right] \bar{J} + T \bar{f} + (v_s + v_0)_i \pi_{ik} \right\} + \left[ \bar{f} - \rho S (\bar{v}_s + \bar{v}_0) \right] \cdot \bar{\nabla} T \\
 &\quad + \left[ \bar{J} - \rho (\bar{v}_s + \bar{v}_0) \right] \cdot \bar{\nabla} (\mu - \psi) + \left[ \pi_{ik} - v_{sk} J_k - (J - \rho v_s)_i (v_s + v_0)_k \right] \frac{\partial (v_0 + v_s)_i}{\partial x_k}
 \end{aligned}$$

Para que esto nos de la ecuación de conservación de energía debemos tener que

$$\bar{Q} = \left[ \frac{1}{2} v_s^2 + \mu - (\bar{v}_s + \bar{v}_0) \cdot \bar{v}_s \right] \bar{J} + T \bar{f} + (\bar{v}_s + \bar{v}_0)_i \pi_{ik}$$

$$\pi_{ik} = v_{si} J_k + (J - P v_s)_i (v_s + v_0)_k$$

$$\bar{f} = P S (v_s + v_0)$$

$$\Psi = \mu$$

recordando que  $v_s + v_0 = v_n$  es la velocidad de la componente normal y agrupando nos queda que

$$\bar{Q} = \left( \frac{1}{2} v_s^2 + \mu \right) \bar{J} + P S T \bar{v}_n + P_n \bar{v}_n [\bar{v}_n \cdot (\bar{v}_n - \bar{v}_s)]$$

$$P_{ik} = P \delta_{ik} + P_n v_{ni} v_{nk} + P_s v_{si} v_{sk}$$

$$\bar{f} = P S \bar{v}_n$$

$$\Psi = \mu$$

lo que queremos demostrar.



B I B L I O G R A F I A :

- 1) Landau y Lifshitz, Statistical Physics, Addison Wesley.
- 2) Landau y Lifshitz, Fluid Mechanics, Addison Wesley.
- 3) Penrose Oliver y Lars Onsager, "Rose-Einstein Condensation and Liquid Helium" Physical Review, vol. 104, núm. 3, nov. 1, 1956.
- 4) Kapitza, P.L., The Study of Heat Transfer en Helium II, Journal of Physics (USSR) 5, 59 (1941).  
LIQUID HELIUM: SELECTED REPRINTS \*
- 5) Peshkov, V., "Velocity of Second Sound in Helium II", Journal of Physics (USSR) 10, 389 (1946).  
LIQUID HELIUM: ( SELECTED REPRINTS )
- 6) Feynman, R.P., "Aplications of Quantum Mechanics to Liquid Helium", Progress in Low Temperature Physics, 1, 17 (1955).  
LIQUID HELIUM ( SELECTED REPRINTS )
- 7) Feynman, R.P., Statistical Mechanics a Set of Lectures, W.A. Benjamin, Inc.

Res 554

- 8) Putterman, Seth, Towards a Macroscopic Theory of Superfluids, Rockefeller University, New York, N. Y.
  
- 9) Landau, "The Theory of Superfluidity of Helium II", Journal of Physics, V. 71, 90 (1941).
  
- 10) Daunt y Mendelssohn, "Surface Transport in Liquid Helium", Nature 143, 719 (1939).  
LIQUID HELIUM ( SELECTED REPRINTS )
  
- 11) Allen y Jones, "New Phenomena Connected With Heat Flow in Helium II", Nature 141, 243 (1936).  
LIQUID HELIUM ( SELECTED REPRINTS )
  
- 12) Wilks, J., "Liquid Helium", Oxford.

\* SELECTED REPRINTS es publicado por el AMERICAN INSTITUTE OF PHYSICS.