

# UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

## EFFECTOS HIDRODINÁMICOS Y DE ANCLAJE EN LA PROPAGACIÓN DE CAMPOS ÓPTICOS EN GUÍAS DE ONDAS CON CRISTAL LÍQUIDO NEMÁTICO



Tesis Profesional

TODO LO ILUMINAN

Que para obtener el título de:

LICENCIADA EN FÍSICA

Presenta

1942

Sandra Abigail Salazar Torres

EL SABER DE MIS HIJOS  
HARÁ MI GRANDEZA

Hermosillo, Sonora

Julio de 2009

# Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

# Índice

0. Introducción .....	1
1. Fenomenología de los cristales líquidos	
1.1 Cristales líquidos .....	3
1.2 Componentes estructurales .....	5
1.3 Clasificación de las mesofases .....	8
1.3.1 Nemática .....	9
1.3.2 Colestérica .....	10
1.3.3 Esméctica .....	10
1.3.4 Discótica .....	12
1.4 Modelos microscópicos para cristales líquidos nemáticos .....	13
1.4.1 Parámetro de Orden .....	13
2. Cristal líquido nemático dentro de un capilar	
2.1 Deformaciones elásticas de los cristales líquidos .....	16
2.2 Energía elástica de Frank – Oseen .....	17
2.3 Condiciones en la frontera y tipo de anclaje .....	19
2.3.1 Anclaje fuerte .....	20
2.3.2 Anclaje débil .....	21
2.4 Texturas del cristal líquido nemático 5CB en un capilar .....	22
2.4.1 Ecuaciones de equilibrio mecánico .....	23
2.4.2 Resultados .....	27
3. Nematodinámica	
3.1 Dinámica de fluidos .....	29

3.2 Hidrodinámica .....	33
3.3 Nematodinámica .....	36
4. Campos ópticos en guías de ondas	
4.1 Guías de ondas .....	47
4.2 Guía de ondas rectangular hueca .....	51
4.2.1 Modos TE .....	52
4.2.2 Modos TM .....	51
4.3 Guía de ondas cilíndrica hueca .....	56
4.3.1 Modos TE .....	59
4.3.2 Modos TM .....	61
4.4 Guía de ondas cilíndrica con núcleo de cristal líquido nemático .....	62
5. Conclusiones .....	83
6. Apéndice .....	85
7. Bibliografía .....	88

# Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a mi madre por todo su apoyo en todos y cada uno de los momentos fáciles y difíciles de la carrera y mi vida, gracias a ella he nacido más de una vez, gracias mami gracias por todo y a ti va dedicado el esfuerzo que representa este trabajo. A mi padre, que aunque ya no está con nosotros le dedico orgullosamente este trabajo, papi tu pequeña genio ¡ya es licenciada! A mis hermanos que aunque a veces la relación es difícil el apoyo nunca falta. Gracias familia, ustedes son el principal pilar en mi vida, los amo.

Muy en especial al Dr. Adalberto Corella Madueño por todo su apoyo tanto académico como personal y porque sin él este trabajo nunca hubiese sido posible, por su paciencia y comprensión, gracias.

A los maestros Arturo Rosas, Arnulfo Castellanos, Adrian Reyes y Sergio Gutiérrez por sus consejos y enseñanzas sobre el tema tratado en este trabajo, gracias a todos, no les debo una, les debo mil.

A las maestras Laura Yeomans, María Elena Tejeda, Angelina Uribe y al maestro Carlos Calcáneo porque sin importar la hora se que podía contar con ustedes para lo que fuera y siempre estaban disponibles para un consejo emocional, los quiero mucho profes y nunca los olvidaré.

A mis amigos por su compañerismo y complicidad en cada momento que pasamos juntos, por su apoyo incondicional por todo chicos y chicas los quiero mucho.

Muy en especial, al Dr. Arturo Rosas, Dra. Laura Yeomans, Dra. Ma. Elena Tejeda y Dr. Carlos Calcáneo, Dr. Adalberto Corella y su esposa Olga, Dr. Roberto Pedro Duarte y M. C. Adriana Ocejo gracias por todo su apoyo, ustedes saben a que me refiero esta oportunidad que me dan jamás la voy a olvidar les prometo que no les voy a fallar.

A ti que lees este trabajo porque lo necesitas, porque te interesó el tema o sea cual sea la razón, espero te sirva porque indirectamente también lo hice pensando en ti y aunque quizás no te conozco y quizás nunca lo haga, te dejo algo de mí que perdurará por siempre, que lo disfrutes.

# Introducción

Los cristales líquidos son medios anisotrópicos e inhomogéneos que se caracterizan por poseer un eje óptico y es gracias a éste que adquieren propiedades ópticas especiales que los distingue de la fase sólida y la líquida isotrópica. En trabajos anteriores se han hecho estudios teóricos de cristal líquido confinado en un capilar con condiciones de anclaje fuerte y escapada radial; siguiendo estos resultados surge este trabajo al estudiar el mismo sistema pero ahora con condiciones de anclaje débil. Es importante mencionar que el material considerado fue el 5CB; éste se escogió debido a que es cristal líquido nemático a temperatura ambiente (22.5°C - 35°C) y en la práctica puede resultar cómodo trabajar con él.

El trabajo realizado en esta tesis es presentado por etapas en donde cada una de ellas ocupa uno de los cuatro capítulos y la etapa anterior es la antesala de la siguiente, siendo el cuarto capítulo la esencia del trabajo.

El primer capítulo habla sobre las generalidades de los cristales líquidos, comenzando por la historia, continuando con el análisis de sus componentes estructurales, seguido de la clasificación y las propiedades de cada una de las distintas mesofases, para finalizar con la descripción de una teoría microscópica para estos interesantes materiales.

En el segundo capítulo se estudia el confinamiento de estos materiales dentro de un capilar cilíndrico ( $\sim 10\mu\text{m}$  diámetro) de material dieléctrico. El sistema es estacionario, considerándose como condiciones iniciales escapada radial y como

condiciones de frontera el anclaje fuerte o débil, llevándonos esto a un estudio analítico y cuantitativo de las configuraciones para el ángulo de anclaje final con la pared del contenedor.

En el tercer capítulo el sistema es similar al tratado en el capítulo dos pero la diferencia se basa principalmente en que ahora se aplica un gradiente de presión en los extremos del capilar con el fin de que el material fluya, convirtiéndose en un sistema dinámico. De igual manera se obtienen las configuraciones para el ángulo de anclaje además los perfiles de velocidad que dependen directamente de este ángulo. Se calculan de manera explícita las configuraciones para el caso de anclaje fuerte con el fin de hacer comparaciones pues este tipo de anclaje es un caso particular del caso anclaje débil en el que el ángulo puede variar indistintamente.

En el capítulo 4, además de lo expuesto en los capítulos anteriores, se hace pasar a través del capilar campos ópticos con el fin de estudiar la propagación de éstos en el material. Se encuentran los modos TE y TM para guías de ondas rectangulares y cilíndricas conductoras huecas y para guías de ondas no conductoras en cuyo interior se encuentra un cristal líquido nemático para finalmente encontrar las configuraciones que nos llevarán a determinar cuáles son los efectos que se producen sobre estos campos debidos a este material.

# Capítulo 1

## Fenomenología de los cristales líquidos

### 1.1 Cristales líquidos

Comúnmente la materia suele presentarse, a presión y temperaturas ordinarias, en tres estados o fases: sólida, líquida y gaseosa. Cabe distinguir la fase sólida de los fluidos porque en estos últimos sus propiedades físicas no dependen de la posición ni de la orientación en que se observe al material.

En 1888, el botánico austriaco F. Reinitzer (1857-1927) descubrió que el compuesto orgánico benzoato de colesterol poseía algo parecido a dos puntos de fusión<sup>[1,2]</sup>. El primero a 145 °C, la temperatura de fusión ordinaria, donde el ya fluido era turbio pero perfectamente líquido, y el segundo punto a 179 °C en el que el fluido se hacía totalmente claro. Este tipo de observaciones fueron corroboradas igualmente por el físico alemán O. Lehmann (1855-1922) quien además observó que, aparte de ser translúcidos, los materiales de este tipo poseían una propiedad típica de los sólidos cristalinos, la *birrefringencia* (este fenómeno consiste en que un rayo de luz incidente al atravesar el cuerpo considerado se desdobra en dos rayos luminosos). Esta propiedad indujo a Lehmann a denominarlos *cristales líquidos* a pesar de que conservan la imagen característica de cualquier líquido, es decir, fluyen, forman gotas, se derraman, etc. Después, Friedel en 1922 propuso denominarlos estados *mesomórficos* o *mesofases*,

debido a que la fase cristal líquida aparece como un estado intermedio entre el sólido y el líquido; los clasificó en tres tipos de mesofases: *nemática*, *colestérica* y *esmética*.

Basta hacer una breve descripción de las distintas fases para comprender por qué un cristal líquido es una nueva fase de la materia:

- *Cristal*: En esta fase, las componentes están dispuestas de tal modo que sus centros de gravedad ocupan los nodos de una red periódica tridimensional. Presentan orden de largo alcance.
- *Líquido*: En esta fase, al contrario de un cristal, no existe ningún tipo de orden posicional de los centros de gravedad de sus componentes a largo alcance, sólo a muy corto alcance.
- *Cristal líquido*: Macroscópicamente fluyen como un líquido isotrópico, pero microscópicamente sus moléculas presentan un orden orientacional apuntando en promedio en una misma dirección, aunque no presentan un orden posicional puesto que sus centros de masa no se encuentran ordenados como en un sólido cristalino. Presentan orden a largo alcance como los cristales sólidos que se manifiesta por sus propiedades anisotrópicas.

La asimetría molecular de los cristales líquidos tiene una consecuencia muy importante<sup>[3]</sup>. La disposición de los núcleos y los electrones sigue una distribución compleja dentro de la molécula. Es necesario tener en cuenta que las moléculas tienen libertad de movimiento, de este modo, cuando se acercan a distancias comparadas con las dimensiones moleculares, las nubes electrónicas son las primeras en entrar en contacto mediante una fuerza intermolecular repulsiva. Esta repulsión no sólo produce el alejamiento de las moléculas sino que también provoca el desplazamiento relativo de las nubes electrónicas respecto a sus núcleos. Podemos considerar esta distribución como la de un dipolo eléctrico, cuyo eje coincide con el eje largo de la molécula. Así

podemos decir que la molécula de cristal líquido crea un campo a su alrededor induciendo la formación de dipolos en las moléculas vecinas. Las moléculas se situarán a una distancia en la que las fuerzas atractivas y repulsivas estén equilibradas de modo que la configuración relativa de las moléculas sea la más estable y la más favorable desde un punto de vista energético. Por lo tanto, es de esperar que las moléculas tiendan a adoptar una configuración en la que mantengan sus ejes dipolares paralelos o en planos característicos paralelos. La peculiaridad de este tipo de materiales es que la orientación de las moléculas en una dirección privilegiada, definida como *vector director*, afecta el comportamiento de los rayos luminosos en el material, cambiando su intensidad, color y dirección de propagación. Esta dirección privilegiada se conoce como el eje óptico y coincide con el eje dipolar de la molécula. Una propiedad fundamental de los cristales líquidos es que pueden presentar birrefringencia, es decir, poseen doble refracción: la luz incidente (no polarizada) se divide en dos rayos linealmente polarizados que viajarán con distinta velocidad según se encuentren paralelos o perpendiculares al vector director, lo que origina una diferencia de fase entre ambos. Si el material tiene un solo eje de anisotropía, la birrefringencia puede formalizarse asignando dos índices de refracción diferentes al material para las distintas polarizaciones.

## 1.2 Componentes estructurales

Hasta el momento, todos los experimentos realizados con cristales líquidos indican que éstos consisten de moléculas orgánicas, las cuales son rígidas en su centro y flexibles por los bordes, además de que sus centros de masa son capaces de moverse libremente dentro del contenedor y la orientación colectiva de todas ellas da origen a un orden orientacional macroscópico<sup>[3]</sup>.

Los cristales líquidos son altamente anisotrópicos pues una o varias propiedades físicas dependen de la dirección en que se estudien, así que para obtenerlos es preciso construir un sistema cuyos componentes sean moléculas orgánicas que tengan un alto grado de anisotropía. Las moléculas de cristal líquido pueden presentar dos tipos de anisotropía<sup>[3,4]</sup>:

- *Anisotropía de forma*, que es la debida a la forma que presentan las moléculas, que a su vez pueden ser:
  - ✓ *Calamíticos*: hace referencia a moléculas alargadas en forma de barra.
  - ✓ *Discóticos*: hace referencia a una estructura molecular plana en forma de disco.

A los compuestos que presentan estas fases comúnmente se les llama *termotrópicos*, puesto que su característica principal es que son estables en un cierto rango de temperatura. La Figura 1.1 muestra ejemplos de estas formas.

- *Anisotropía de solubilidad*, la presentan las moléculas que sólo son capaces de formar cristales líquidos cuando están mezclados con algún solvente. En este tipo de compuestos la concentración de la solución es muy importante para determinar si la fase cristal líquido es o no estable. Al tipo de compuestos que presentan estas características se les llama *liotrópicos*.

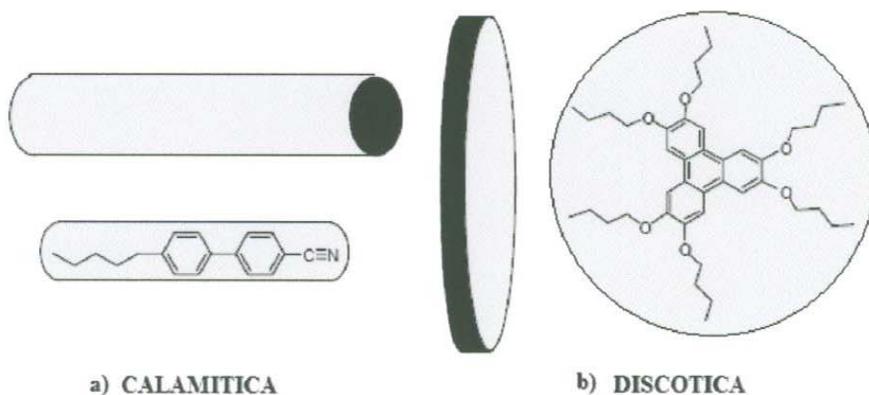


Figura 1.1: Diagrama ejemplar de cristal líquido calamítico y discótico.

Hoy en día se conoce una gran cantidad de compuestos orgánicos que poseen varios puntos de fusión así como propiedades anisotrópicas. Desde el punto de vista molecular tales compuestos están formados por moléculas de unos 20Å. Una de las estructuras químicas más comunes que presenta un cristal líquido es la presencia de anillos bencénicos rígidamente enlazados. En la Figura 1.2 se muestran ejemplos clásicos de cristales líquidos. En general, toda clase de molécula que satisface el patrón de la Figura 1.2d (dos anillos aromáticos para-sustituídos rígidamente unidos por algún tipo de enlace A – B) da lugar a mesofases. Esta última descripción corresponde a moléculas para las cuales sus sistemas anillados eslabonados con los grupos terminales y cadenas laterales presentan forma alargada (calamíticos) que son los cristales líquidos más comúnmente estudiados.

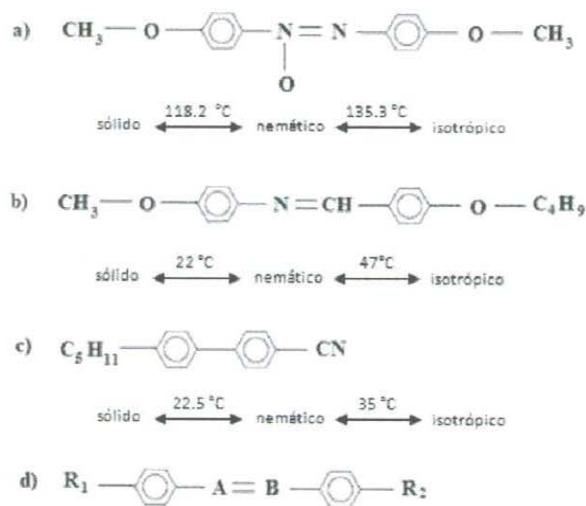


Figura 1.2: Ejemplos de moléculas orgánicas que son cristales líquidos: a) p-azoxianisol (PAA), b) p-metoxibencilideno p-a-butilanilina (MBBA), c) 4'-n-pentil 4-cianobifenilo o 5CB, d) estructura general de una clase de nematógenos. Todos del tipo calamítico.

Un modelo a seguir para la descripción de un cristal líquido calamítico o discótico es considerar como variable la dirección promedio en que apuntan los ejes de las moléculas, el cual se conoce como eje óptico y se representa por el vector director  $\hat{n}$ .

### 1.3 Clasificación de las mesofases

Dependiendo de su estructura molecular, los cristales líquidos pueden pasar por una o más de las distintas mesofases antes de volverse un líquido isotrópico o un sólido cristalino. Estas transiciones pueden producirse, como ya se mencionó, por cambios en la temperatura (termotrópicos) o por cambios en la concentración (liotrópicos), pero también pueden clasificarse en términos de la simetría que presenten<sup>[5]</sup>. Los líquidos isotrópicos con moléculas esféricas simétricas son invariantes frente a transformaciones de simetría rotacional  $O(3)$ , y traslacional  $T(3)$ ; en consecuencia el grupo total de un líquido isotrópico es  $O(3) \times T(3)$ . Pero si la temperatura de este líquido disminuye, usualmente ocurre el rompimiento de la simetría  $T(3)$  lo cual corresponde a la transición de líquido isotrópico a sólido. Para un líquido formado por moléculas anisotrópicas, al disminuir la temperatura se observa que primero se rompe la simetría rotacional  $O(3)$ , lo que resulta en la formación de un cristal líquido. A las mesofases en que se ha roto la simetría rotacional pero que conservan la simetría traslacional, se les llama *nemáticos* que son los estudiados en este trabajo. Existen por supuesto otras mesofases que exhiben otras simetrías, como las que sólo exhiben simetría traslacional  $T(2)$  a las cuales se les llama *esméticas*, y las que únicamente exhiben simetría traslacional  $T(1)$  se denominan fases *columnares*<sup>[5]</sup>.

Actualmente se tienen identificadas más diez mesofases diferentes y existen alrededor de seis mil sustancias líquido cristalinas; las mesofases más estudiadas se discuten a continuación.

### 1.3.1 Nemática

La palabra nemático proviene del griego  $\nu\eta\mu\alpha$  que significa *hilo*, aludiendo a la estructura en forma de hilo observada en los materiales nemáticos. Ésta es la más desordenada de las fases líquido-cristalinas y la más cercana a un líquido isotrópico puesto que los centros de gravedad de las moléculas carecen de orden posicional aunque siguen un orden orientacional pues las moléculas se mantienen apuntando en promedio en una misma dirección  $\hat{n}$ , aún cuando cada una de las moléculas tiende a vibrar térmicamente en torno al director (Figura 1.3). Tienen además perfecta simetría rotacional en torno a  $\hat{n}$ , poseen simetría cuadrupolar lo que significa que los estados  $\hat{n}$  y  $-\hat{n}$  son indistinguibles (esto significa que un nemático es considerado centrosimétrico). La fase nemática ocurre sólo en materiales aquirales, esto es, en materiales que no distinguen de derecha e izquierda en una reflexión especular, lo que da lugar a que cada molécula constituyente es idéntica a su imagen en un espejo. Esta mesofase debe su fluidez a la facilidad con la que las moléculas pueden deslizarse unas sobre otras manteniendo su paralelismo<sup>[6]</sup>.

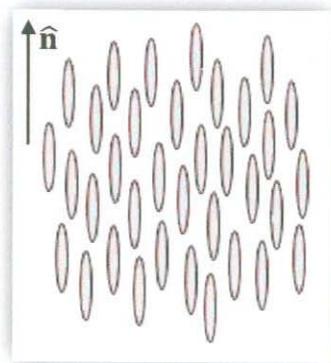


Figura 1.3: Diagrama ejemplar de la mesofase nemática.

### 1.3.2 Colestérica

La fase colestérica es localmente igual a la nemática. Los centros de gravedad de las moléculas están completamente desordenados mientras que sus orientaciones se concentran preferentemente en torno a un eje marcado por el director  $\hat{n}$ . Sin embargo, éste no es constante en el espacio (como ocurre en la fase nemática), pues adopta una configuración helicoidal donde el director tiende a girar espontáneamente en torno al eje perpendicular<sup>[6,24]</sup> (Figura 1.4). El giro puede ser derecho o izquierdo dependiendo de la conformación molecular, pudiendo tener quiralidad izquierda o derecha. Una característica importante de la mesofase colestérica es el *paso*  $p$  de la hélice (*pitch*) que se define como la distancia que requiere el director para dar una vuelta completa a la hélice. Debido a la equivalencia entre  $\hat{n}$  y  $-\hat{n}$ , el sistema es periódico con período espacial  $L$  igual a la mitad del paso,  $L = \frac{p}{2}$ .

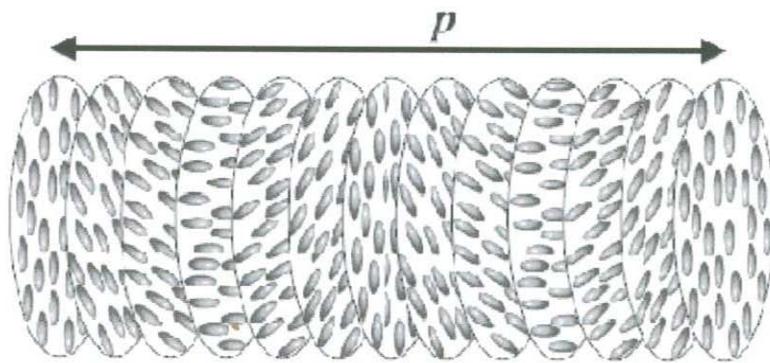


Figura 1.4 Diagrama que muestra la mesofase colestérica. Nótese que el director cambia y tras un período espacial  $L = \frac{p}{2}$  vuelve al inicio (teniendo en cuenta que  $\hat{n}$  y  $-\hat{n}$  son indistinguibles).

### 1.3.3 Esmética

Desde el punto de vista estructural se puede decir que los cristales líquidos esméuticos son los más ordenados debido a que tienden a ordenarse por sí mismos en

capas bien definidas. En el conjunto de cada capa, las moléculas están orientadas en una dirección determinada. Al igual que los nemáticos, las moléculas son capaces de vibrar en torno a la dirección del director  $\hat{n}$  pero con la diferencia de que no pueden moverse de la capa en que se encuentran. Existen varios tipos de cristales líquidos esmécticos, pero son tres tipos de esmécticos los mejor estudiados<sup>[6]</sup>: A, B y C.

*Esméctico A:* La estructura es en capas de espesor equivalente a la longitud de las moléculas. Dentro de cada capa, los centros de gravedad de las moléculas no guardan orden espacial, es decir, en cada capa el fluido se comporta como bidimensional. Ópticamente el fluido es uniaxial (existe una dirección privilegiada) y ello se debe a que las moléculas guardan una orientación perpendicular al plano de cada capa (Figura 1.5a).

*Esméctico C:* Se conservan las propiedades del tipo A, excepto la última pues la orientación molecular ahora forma un cierto ángulo con respecto a la normal al plano esméctico. Esto se traduce en la existencia de dos direcciones privilegiadas, una siendo la propia de la orientación molecular, y la segunda la de la perpendicular a la capa. Así, el tipo C se llama *biaxial* (Figura 1.5c).

*Esméctico B:* Este tipo difiere de los A y C en que las moléculas muestran dentro de cada capa una cierta estructura periódica y una mayor y excepcional rigidez en comparación con los tipos anteriores. Aquí las moléculas tienden a arreglarse dentro de un plano en un patrón de hexágonos y se dice que exhiben orden orientacional de ligaduras de largo alcance (Figura 1.5b).

Otros tipos de cristales líquidos esmécticos también se identifican por su orientación y se denominan D, E, F, G, etc., pero sus estructuras están aún poco estudiadas.

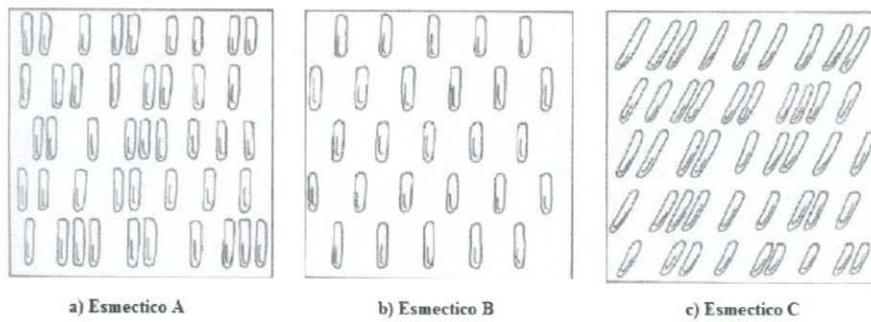


Figura 1.5 Diagrama donde se muestran las distintas mesofases esmécticas.

### 1.3.4 Discótica.

Dentro de los cristales líquidos discóticos hay dos fases<sup>[18]</sup>: la fase *columnar* es la más simple, consistiendo de discos acomodados uno encima de otro formando columnas; las diferentes columnas constituyen una red bidimensional (Figura 1.6a) y la fase *nemática* que consiste en un arreglo de discos con orden orientacional pero sin orden traslacional de largo alcance (Figura 1.6b).

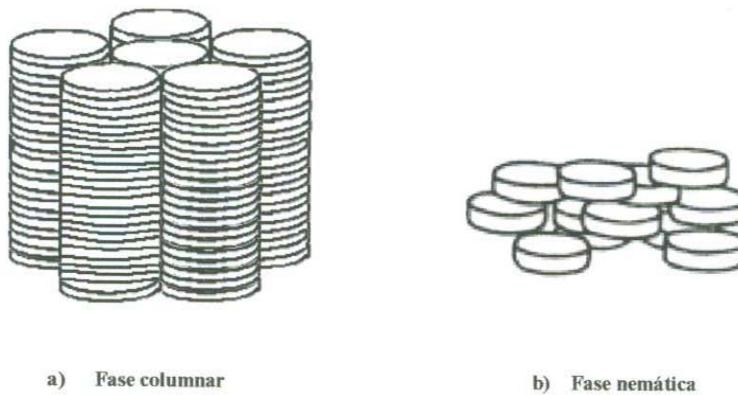


Figura 1.6: Diagrama ilustrativo del tipo discótico.

## 1.4 Modelos microscópicos para cristales líquidos nemáticos

El estudio teórico de los cristales líquidos se inició con Onsager en 1949, quien formuló una teoría mecánico estadística de un sistema de varillas duras cuando éstas son infinitamente largas y el sistema está infinitamente diluido. Él demostró que en este límite particular el sistema presenta una transición orientacional de primer orden pasando de una fase isotrópica a baja densidad a una fase nemática a alta densidad. Posteriormente, Maier y Saupe en 1958 propusieron una teoría alternativa que atribuía la transición orientacional a la presencia de un potencial de interacción atractivo y anisótropo. Esta alternativa abrió la discusión sobre si la existencia de las mesofases se debe al carácter anisótropo de la molécula o si necesita una interacción atractiva para producirlas<sup>[17,20]</sup>.

Trabajos posteriores de simulación han demostrado que un potencial puramente repulsivo puede dar cuenta de la existencia de mesofases. En particular, se han obtenido por simulación la fase nemática, la esméctica A y la columnar, entre otras que aún no se han encontrado en la naturaleza. También se ha demostrado que en sistemas bidimensionales pueden existir mesofases. Toda esta evidencia ha de apoyar la idea de que cualquier mesofase, ya sea real o teórica, puede ser obtenida mediante algún modelo de molécula dura<sup>[5]</sup>.

### 1.4.1 Parámetro de orden

Onsager se planteó el problema de estudiar estadísticamente un sistema de varillas duras (cilindros) de longitud  $L$  y diámetro  $D$  en el límite de gran longitud y baja densidad. Si  $\rho$  es la densidad, esto es, el número de varillas  $N$  dividido por el volumen

$$S = \langle P_z(\cos \theta) \rangle = \frac{1}{2} \langle 3 \cos^2 \theta - 1 \rangle$$

polinomio de Legendre [17,19,20,24].

cantidad particular escogida por convención y que se ha elegido como el segundo sobre las orientaciones de muchas moléculas consideradas al mismo tiempo de una perfectamente orientadas. Así pues, el parámetro de orden se define como el promedio en 1942. Si  $S = 0$  no hay orden orientacional y si  $S = 1$  las moléculas están una fase líquido cristalina a través de un parámetro de orden  $S$  introducido por Tsvetkov ángulo azimutal  $\phi$ . Se puede cuantificar la cantidad de orden orientacional que existe en perpendiculares a  $\mathbf{n}$  son equivalentes; en estos casos, la distribución no depende del sólo en el caso de las fases líquido cristalinas más simples, todas las direcciones probabilidad de orientaciones  $f(\theta, \phi) d\Omega$  de los ejes moleculares alrededor del director, respecto del que existe en un cristal sólido. Se puede definir una distribución de grado de orden que existe en un cristal líquido nemático es relativamente pequeño todas la funciones de respuesta del material serán también anisótropas (uniaxiales). El La fase nemática se caracteriza por una anisotropía uniaxial, consecuentemente,

$$\int f(n) du = 1$$

$\mathbf{n}$ , de modo que:

moléculas cuya orientación está dentro del ángulo sólido  $du$  en torno al vector unitario distribuida según una función  $f(n)$  de tal modo que  $f(n) du$  es la fracción de Para un sistema en tales condiciones, la orientación de las varillas está

límite en que  $n \ll 1$  y  $\kappa \gg 1$  el producto  $n\kappa$  permanece finito.

varilla como el cociente entre sus dimensiones características,  $\kappa = \frac{D}{l}$ ; así, en el relación de volumen ocupado por las varillas al volumen total, y la elongación de la  $V$ , se pueden definir entonces la fracción de empaquetamiento,  $n = \rho \frac{4}{\pi} D^2 L$ , como la

## 2.2 Energía elástica de Frank - Oseen

Debido a que las dimensiones de las moléculas de un cristal líquido ( $\sim 5\text{\AA} \times 20\text{\AA}$ ) son mucho menores que las dimensiones típicas de sus contenedores ( $\geq 1\mu\text{m} - 10\mu\text{m}$ ), es posible describir las deformaciones del cristal líquido usando una teoría de medio continuo, la cual permite dejar de lado los detalles de su estructura molecular. Así pues, para construir esta teoría, un posible punto de partida es especificar la energía libre del sistema y dado que se supone que el sistema se encuentra en equilibrio a temperatura  $T$ , entonces la energía libre a considerar es la *energía libre de Helmholtz*<sup>[23]</sup>.

El estado deformado del cristal líquido puede describirse completamente por el director, esto es, se puede obtener la energía a través de las posibles deformaciones de éste. Como es usual, las ecuaciones de equilibrio que contendrán a  $\hat{\mathbf{n}}$  y sus derivadas, se obtienen minimizando la energía libre. Es importante tener en cuenta que sólo aquellas soluciones asociadas con la energía mínima representan las soluciones físicamente relevantes.

El alineamiento molecular promedio del cristal líquido en el punto  $\mathbf{r}$  queda determinado por el director:

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \quad \text{tal que} \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 1 \quad (2.1)$$

En esta descripción la densidad de energía libre,  $f$ , depende de  $\hat{\mathbf{n}}$  y sus derivadas, representadas por  $\nabla\hat{\mathbf{n}}$ , y se denomina densidad de energía elástica de Frank-Oseen; ésta es:

$$f = f(\hat{\mathbf{n}}, \nabla\hat{\mathbf{n}}) \quad (2.2)$$

La energía elástica total se obtiene integrando la densidad de energía  $f$  sobre el volumen  $V$  ocupado por el cristal líquido y está dada por:

$$F = \int_V f(\hat{\mathbf{n}}, \nabla\hat{\mathbf{n}}) dV \quad (2.3)$$

Se supone que la muestra de cristal líquido es incompresible, que  $f = f_0 = \text{const.}$  (o bien  $f = 0$ ) en ausencia de fuerzas, y en caso de una orientación inducida  $f \geq 0$ , además como  $\hat{\mathbf{n}}$  y  $-\hat{\mathbf{n}}$  son indistinguibles  $f$  es función par de  $\hat{\mathbf{n}}$  y debe ser invariante ante rotaciones.

Para obtener una expresión para la densidad de energía  $f$  que contenga las distintas deformaciones elásticas, se escoge un sistema de coordenadas rectangulares con el eje  $z$  en la dirección del director en un estado sin deformación, esto es,

$$\hat{\mathbf{n}}_0 = (0,0,1) \quad (2.4)$$

Se tienen 6 posibilidades de curvatura asociadas a 3 deformaciones de  $\hat{\mathbf{n}}_0$  (Figura 2.2). Estas pueden obtenerse mediante un desarrollo en serie de Taylor de las componentes de  $\hat{\mathbf{n}} = (n_x, n_y, n_z)$  alrededor del origen; con  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 1$ , se sigue que

$$\nabla(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) = 2\hat{\mathbf{n}}\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}} = 2e_j n_i n_{i,j} = 0, \quad \left( n_{i,j} = \frac{\partial n_i}{\partial x_j} \right) \quad (2.5)$$

donde  $e_j$ , con  $j = 1,2,3$  son los vectores base, y además se cumple que

$$n_{z,j}(\vec{0}) = 0. \quad (2.6)$$

Así, la densidad de energía libre para cristales líquidos nemáticos toma la forma (en notación vectorial)<sup>[7]</sup>:

$$f = \frac{1}{2}K_1(\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 + \frac{1}{2}K_2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2 + \frac{1}{2}K_3(\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2 - \frac{1}{2}K_4\nabla \cdot [(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)\hat{\mathbf{n}} + (\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}] \quad (2.7)$$

donde  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$  son las constantes de esparcimiento, de torsión y de pandeamiento, respectivamente, y  $K_4$  es la llamada constante de *superficie elástica* debido a que entra

en la expresión de la energía libre del cristal líquido como el coeficiente de un término de divergencia, el cual puede ser transformado en una integral de superficie por el teorema de la divergencia.

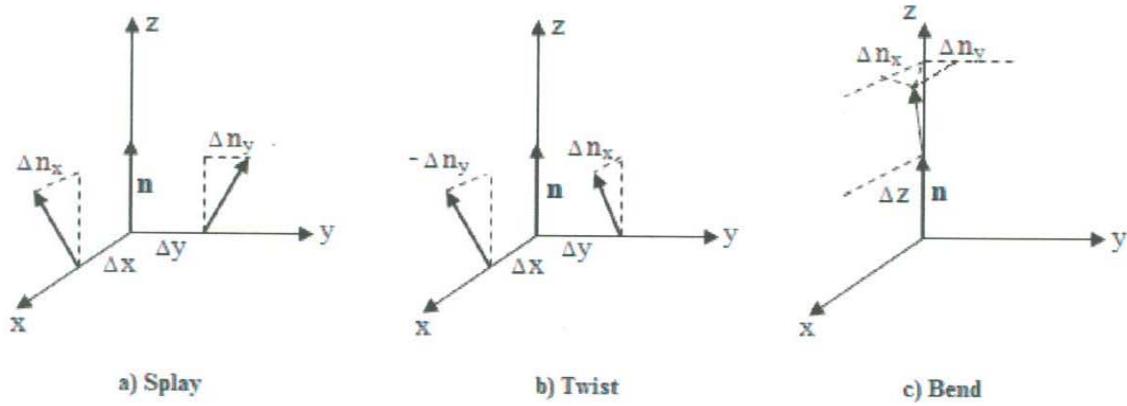


Figura 2.2: Deformaciones posibles para  $\hat{\mathbf{n}}$ .

### 2.3 Condiciones en la frontera y tipos de anclaje

Tenemos que la energía elástica total está dada por<sup>[7]</sup>:

$$\begin{aligned}
 F &= \int_V f(\hat{\mathbf{n}}, \nabla \hat{\mathbf{n}}) dV \\
 &= \frac{1}{2} \int_V [K_1 (\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 + K_2 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2 + K_3 (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2 \\
 &\quad - K_4 \nabla \cdot [(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{n}} + (\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}}]] dV
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Para obtener las ecuaciones de equilibrio es necesario que se cumpla que la variación de  $F$  sea cero, esto es:

$$\delta F = 0 \tag{2.9}$$

Las ecuaciones de equilibrio que resultan de esta condición son las ecuaciones de *Euler-Lagrange*<sup>[24]</sup>, las cuales pueden escribirse, considerando que  $\hat{n} = \hat{n}(\theta) \Rightarrow f = f\left(\theta, \frac{\partial\theta}{\partial x_j}\right)$ , como:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial \left( \frac{\partial\theta}{\partial x_j} \right)} \right) - \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \quad (2.10)$$

### 2.3.1 Anclaje fuerte

El anclaje fuerte es una condición en la frontera asociada con un ángulo específico fijo bajo el cual las moléculas del cristal líquido se adhieren a las paredes del contenedor<sup>[3,24]</sup>. Si se da un tratamiento mecánico (pulimento) a la superficie de la placa de modo tal que las moléculas se orientan paralelamente a ésta, entonces las condiciones se denominan *planares*. También es posible obtener por la aplicación de ciertos químicos (surfactantes) un alineamiento de las moléculas perpendicular a la superficie, en cuyo caso se les denomina condiciones *homeotrópicas*. Es posible inducir también ambas condiciones al mismo tiempo, llamándose condiciones *híbridas* si se tratase de dos placas de vidrio que contienen entre ellas al cristal líquido<sup>[3]</sup> (Figura 2.3).

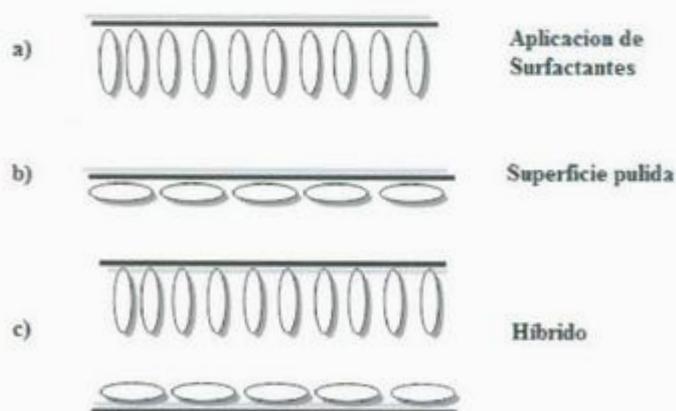


Figura 2.3: Condiciones de anclaje fuerte: a) por aplicación de surfactantes, b) por superficies pulidas, c) híbrido.

En el caso de anclaje fuerte, se considera que la intensidad de la interacción del cristal líquido con la superficie del contenedor es infinita así que el término de energía elástica superficial caracterizado por la constante elástica  $K_4$  se vuelve irrelevante cuando se compara con la intensidad de dicha interacción por lo que la energía elástica preserva sólo los términos de volumen y adopta la forma<sup>[7]</sup>:

$$F = \frac{1}{2} \int_V [K_1(\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 + K_2(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2 + K_3(\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2] dV \quad (2.11)$$

### 2.3.2 Anclaje débil

La condición en la frontera del tipo de anclaje débil implica que la interacción del cristal líquido con la pared del contenedor es finita y que por lo tanto la orientación de las moléculas en la superficie interna del recipiente no necesariamente sea homeotrópica o planar<sup>[3,24]</sup>. Esta condición en la frontera puede expresarse por la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial f_s}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)} = 0, \quad \text{en } S \quad (2.12)$$

donde  $f$  es la densidad de energía elástica en el volumen del cristal líquido asociada a los tres tipos de deformaciones caracterizadas por las constantes elásticas  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$ , y  $f_s$  es la densidad de energía de interacción con la superficie que incluye la energía elástica superficial del cristal líquido.

## 2.4 Texturas del cristal líquido nemático 5CB en un capilar

Debido a que la orientación de los cristales líquidos está determinada por el vector director  $\hat{\mathbf{n}}$ , primero estudiaremos las distorsiones que este vector puede tener debido a la interacción del cristal líquido con la pared del contenedor que en nuestro caso es un cilindro de paredes rígidas de radio  $R$  y longitud  $L$ , por lo que utilizaremos coordenadas cilíndricas para la descripción de  $\hat{\mathbf{n}}$ :

$$\hat{\mathbf{n}} = (n_r, n_\varphi, n_z) \quad (2.13)$$

Una de las posibles configuraciones que el nemático puede adoptar es la denominada de *escapada radial*<sup>[12]</sup>, la cual puede realizarse a base de aplicar un tratamiento químico específico a la superficie interna del contenedor. En esta configuración la orientación de las moléculas de cristal líquido es en promedio perpendicular (o preferencialmente perpendicular) a dicha superficie, dependiendo de lo adecuado del tratamiento inicial dado a la pared, y esta orientación promedio cambia gradualmente hacia el interior del contenedor hasta que las moléculas quedan ordenadas paralelas al eje del cilindro, dando la impresión de que escapan por el eje. El ángulo específico que forme el director con la pared interna del contenedor depende de las condiciones experimentales en que ésta se preparó, estas condiciones determinan la forma en que las moléculas se fijan a las paredes y a su vez permiten especificar el tipo de condiciones en la frontera que se deben considerar en el cálculo teórico. Los dos tipos de condiciones en la frontera que consideraremos aquí son las llamadas condiciones de *anclaje fuerte* y de *anclaje débil*.

Si hacemos coincidir el eje  $z$  con el eje del cilindro y suponemos que la orientación del nemático ocurre sólo en el plano  $r - z$ , y que además ésta es sólo

función de  $r$ , entonces no habrá dependencia de la coordenada angular  $\varphi$ , y  $\hat{\mathbf{n}}$  tomará la forma:

$$\hat{\mathbf{n}} = (\text{sen}\theta, 0, \text{cos}\theta) \quad (2.14)$$

que es unitario puesto que  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 1$ . Aquí,  $\theta = \theta(r)$  es el ángulo que forma el director con el eje del cilindro (Figura 2.4).

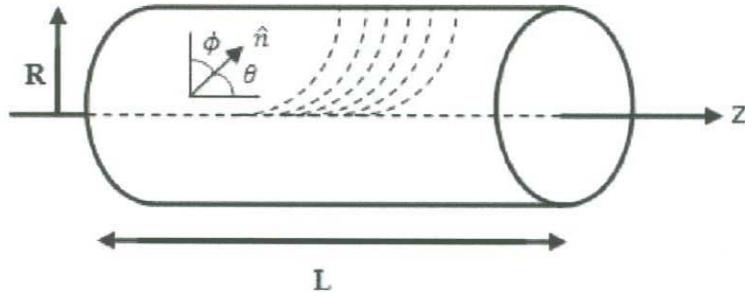


Figura 2.4: Cilindro relleno de cristal líquido nemático con configuración de escapada radial.

#### 2.4.1 Ecuaciones de equilibrio mecánico

La condición en la frontera de anclaje fuerte en la superficie cilíndrica así como la orientación del director en el eje del cilindro quedan expresadas como sigue<sup>[11]</sup>:

$$\theta(r = 0) = 0 \quad , \quad \theta(r = R) = \frac{\pi}{2} \quad (2.15)$$

Tomando en cuenta la expresión para el director en la Ec. (2.14) obtenemos:

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 &= \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 \cos^2\theta + \frac{2}{r} \left(\frac{d\theta}{dr}\right) \text{sen}\theta \text{cos}\theta + \frac{1}{r^2} \text{sen}^2\theta \\ (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2 &= 0 \\ (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2 &= \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 \text{sen}^2\theta \end{aligned} \quad (2.16)$$

Sustituyendo en la Ec. (2.11), definiendo  $K = \frac{K_3}{K_1}$  y realizando algunos cálculos

llegamos a que la expresión para la energía libre elástica total para este sistema es:

$$F = \pi L K_1 \int_0^R \left[ \left( \frac{d\theta}{dr} \right)^2 (\cos^2\theta + K \operatorname{sen}^2\theta) + \frac{1}{r^2} \operatorname{sen}^2\theta \right] r dr + \pi L K_1 \quad (2.17)$$

Cambiando a la variable adimensional  $x = \frac{r}{R}$ , la ecuación de equilibrio, de acuerdo con

la Ec. (2.10), se obtiene de:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \left( \frac{d\theta}{dx} \right)} \right) - \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0, \quad (2.18)$$

donde  $f$  es la densidad de energía libre elástica<sup>[10]</sup>:

$$f = f \left( \theta, \frac{d\theta}{dx} \right) = \pi L K_1 \left[ x \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 (\cos^2\theta + K \operatorname{sen}^2\theta) + \frac{1}{x} \operatorname{sen}^2\theta \right] \quad (2.19)$$

Finalmente la ecuación de equilibrio es:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta}{dx^2} (\cos^2\theta + K \operatorname{sen}^2\theta) + \frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 (K - 1) \operatorname{sen} 2\theta \\ + \frac{1}{x} \left( \frac{d\theta}{dx} \right) (\cos^2\theta + K \operatorname{sen}^2\theta) - \frac{1}{2x^2} \operatorname{sen} 2\theta = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Cuando la condición en la frontera es de anclaje débil, la interacción superficial se puede describir a través del potencial  $w_s$  dado por<sup>[7]</sup>:

$$w_s = \frac{1}{2} W_\theta \operatorname{sen}^2\phi = \frac{1}{2} W_\theta \cos^2\theta \quad (2.21)$$

24

de energía por área<sup>[7]</sup>.

En este caso la condición de configuración de escapada radial se mantiene tal que en  $x = 0$ :

$$\theta(x = 0) = 0 \quad (2.22)$$

La interacción entre las moléculas de la superficie del cristal líquido y la pared

donde  $\phi$  es el ángulo que el director forma con la normal a la superficie del contenedor, esto es  $\phi = 90^\circ - \theta$ , y  $W_\theta$  es una medida de la intensidad de la interacción en unidades de energía por área<sup>[7]</sup>.

En este caso la condición de configuración de escapada radial se mantiene tal que en  $x = 0$ :

$$\theta(x = 0) = 0 \quad (2.22)$$

La interacción entre las moléculas de la superficie del cristal líquido y la pared del cilindro contribuye a la energía libre superficial tal que:

$$F_S = -K_4 \int_V \nabla \cdot [\hat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \hat{\mathbf{n}}) + \hat{\mathbf{n}}(\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}})] dV + \frac{1}{2} \int_S W_\theta \text{sen}^2 \phi dS \quad (2.23)$$

así la energía libre total es:

$$F = F_e + F_S = \frac{1}{2} \int_V \{K_1 (\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 + K_2 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2 + K_3 (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2\} dV - K_4 \int_V \nabla \cdot [\hat{\mathbf{n}} \times (\nabla \times \hat{\mathbf{n}}) + \hat{\mathbf{n}}(\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}})] dV + \frac{1}{2} \int_S W_\theta \text{cos}^2 \theta dS \quad (2.24)$$

la cual puede expresarse como:

$$F = \pi L K_1 \int_0^R \left[ \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 (\text{cos}^2 \theta + K \text{sen}^2 \theta) + \frac{1}{x^2} \text{sen}^2 \theta \right] x dx + \pi L K_1 \sigma \text{cos}^2 \theta + \pi L K_1 \left( 1 - \frac{K_4}{K_1} \right) \quad (2.25)$$

de donde la ecuación de equilibrio que resulta es:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta}{dx^2}(\cos^2\theta + K\text{sen}^2\theta) + \frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2(K-1)\text{sen}2\theta \\ + \frac{1}{x}\left(\frac{d\theta}{dx}\right)(\cos^2\theta + K\text{sen}^2\theta) - \frac{1}{2x^2}\text{sen}2\theta = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

La Ec. (2.12) establece la condición en la frontera con anclaje débil en la superficie:

$$\frac{\partial f_s}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)} = 0 \quad ; \quad \text{en } x = 1, \quad (2.27)$$

donde  $f$  es la densidad de energía elástica libre total y  $f_s$  es la densidad de energía libre superficial que incluye la interacción con la superficie:

$$f_s = \pi L K_1 \sigma \cos^2\theta + \pi L K_1 \left(1 - \frac{K_4}{K_1}\right) \quad (2.28)$$

Aplicando la condición en la frontera, Ec. (2.27), se llega a que:

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=1} = \frac{\frac{1}{2}\sigma \text{sen}2\theta}{\cos^2\theta + K\text{sen}^2\theta} \Bigg|_{x=1} \quad (2.29)$$

lo que significa que cuando el anclaje es débil el ángulo cambia según esta última relación y depende del parámetro adimensional  $\sigma$ , el cual ahora mide la intensidad de la interacción del cristal líquido con la pared del cilindro, es decir, entre mayor sea el valor de este parámetro más fuerte será el anclaje a la pared.  $\sigma$  tiene la forma<sup>[7]</sup>:

$$\sigma = \frac{RW_\theta}{K_1} + \frac{K_4}{K_1} - 1 \quad (2.30)$$

Así, la ecuación de equilibrio (2.26) junto con la condición en la frontera (2.29) deben resolverse simultáneamente para encontrar las configuraciones del cristal líquido para un valor dado de  $\sigma$ .

## 2.4.2 Resultados

En nuestro estudio consideramos el cristal líquido nemático 4'-n-pentil-4-cianobifenilo (5CB), cuyas propiedades se muestran en la Tabla 2.1.

Usando el método de disparo (Apéndice A) resolvimos las Ecs. (2.26) y (2.29).

En la Figura 2.5 se muestran algunas configuraciones para  $\theta(x)$ , para diferentes valores de  $\sigma$ .

Cantidad	5CB a 26°
Viscosidades (Pa s)	
$\eta_1$	0.0204
$\eta_2$	0.1052
$\eta_3$	0.0326
$\eta_{12}$	-0.0060
$\gamma_1$	0.0777
$\gamma_2 = \eta_1 - \eta_2$	-0.0848
$\alpha_1$	-0.0060
$\alpha_2$	-0.0812
$\alpha_3$	-0.0036
$\alpha_4$	0.0652
$\alpha_5$	0.0640
$\alpha_6$	-0.0208
Constantes elásticas (N)	
$K_1$	$6.2 \times 10^{-12}$
$K_2$	$3.9 \times 10^{-12}$
$K_3$	$8.2 \times 10^{-12}$
Tensión superficial (N m <sup>-1</sup> )	
$\gamma$	$32.6 \times 10^{-3}$
Constantes dieléctricas	
$\epsilon_{  }$	18.5
$\epsilon_{\perp}$	7
$\epsilon_a = \epsilon_{  } - \epsilon_{\perp}$	11.5
Anisotropía magnética	
$\Delta\chi$ (sin unidades) en el SI	$1.43 \times 10^{-6}$
$\chi_a$ en el cgs	$1.14 \times 10^{-7}$
Densidad (kg m <sup>-3</sup> )	
$\rho$	1020
Volumen específico (m <sup>3</sup> kg <sup>-1</sup> )	
$v = 1/\rho$	$9.8 \times 10^{-4}$
$T_N$	34.5°C

Tabla 2.1. Propiedades del cristal líquido 5CB a 26°C

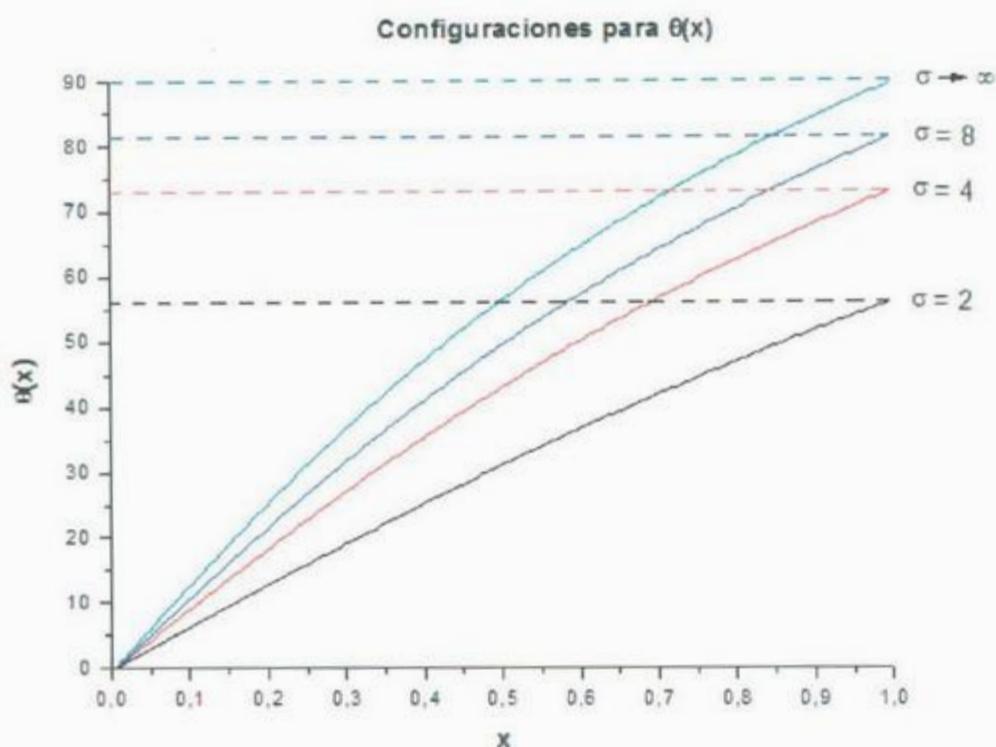


Figura 2.5: Configuraciones para  $\theta(x)$  para distintos valores de  $\sigma$ .

De la gráfica puede verse que en  $x = 1$ , para distintos valores del parámetro  $\sigma$ , el valor de  $\theta(x = 1)$  en la ordenada va cambiando, su valor aumenta conforme aumenta  $\sigma$ . Cualitativamente esto ocurre debido a que entre mayor sea la intensidad de interacción con la superficie ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) mayor será el ángulo de anclaje ( $\theta \rightarrow 90^\circ$ ), hasta alcanzar la condición homeotrópica; y por el contrario, si la intensidad de interacción con la pared es débil el ángulo de anclaje es menor. Cuantitativamente estas conclusiones se desprenden de la expresión de la condición en la frontera para la resolución de la ecuación diferencial pues se relaciona con la derivada del ángulo, Ec. (2.29), que a su vez puede relacionarse con la función tangente, de modo que entre más grande sea  $\sigma$  (que es el valor predominante pues las funciones seno y coseno son periódicas y nunca toman valores mayores a 1 y  $K$  es una constante) mayor es el ángulo, y entre menor sea el valor de  $\sigma$  menor será el ángulo de anclaje.

# Capítulo 3

## Nematodinámica

### 3.1 Dinámica de fluidos

El estudio del movimiento de fluidos (líquidos y gases) constituye lo que se denomina *dinámica de fluidos*. La teoría del medio continuo es la teoría fundamental en que se basa la dinámica de fluidos pues tal como su nombre lo indica, esta teoría considera al fluido como un medio continuo, esto es, siempre se supone que cualquier elemento de volumen pequeño del fluido es suficientemente grande para contener un número elevado de moléculas aún cuando hablamos de elementos de volumen infinitamente pequeños (físicamente), es decir, muy pequeños en comparación con el volumen del cuerpo o sistema en consideración, pero grandes comparados con las distancias entre las moléculas. Con esta teoría se puede considerar que las demás propiedades del fluido (como densidad, velocidad, etc.) pueden considerarse continuas<sup>[23]</sup>.

La descripción matemática del estado de un fluido móvil se efectúa con funciones que dan la distribución de ciertas cantidades físicas, tales como la posición  $\mathbf{r}$  (en general, función de  $x, y, z$ ), la velocidad  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ , la densidad  $\rho(\mathbf{r}, t)$ , la presión  $P(\mathbf{r}, t)$  y las fuerzas en general  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ .

Consideremos un elemento de volumen de un fluido  $dV = dx dy dz$  como el de la Figura 3.1 moviéndose en el espacio con una velocidad  $\mathbf{v}$ .

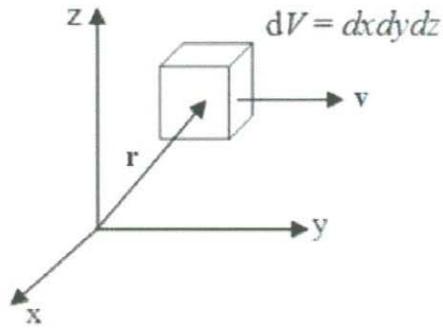


Figura 3.1: Elemento de volumen de un fluido moviéndose a velocidad  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  en el espacio.

Para los líquidos la ecuación de continuidad es

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.1)$$

La ecuación de movimiento para este elemento de volumen es

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (3.2)$$

la derivada  $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$  designa la variación respecto del tiempo de la velocidad de una partícula fluida determinada cuando se mueve en el espacio y no la variación respecto al tiempo de la velocidad del fluido en un punto fijo del espacio. Dado que  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  entonces

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} \quad (3.3)$$

La fuerza  $\mathbf{F}$  puede tener su origen en varias fuentes tales como el gradiente de presión  $-\Delta P$ , la fuerza viscosa  $\mathbf{F}_{\text{vis}}$  y las provenientes de campos externos (eléctrico, magnético, óptico, etc.). Así, de las Ecs. (3.2) y (3.3) la ecuación de movimiento para el sistema es

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \right] = -\Delta P + \mathbf{F}_{\text{vis}} + \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (3.4)$$

Dejando de lado las otras fuerzas externas y considerando sólo los términos de gradiente de presión y fuerza viscosa, la formulación de la ecuación de movimiento para el fluido estará completa cuando podamos decir la forma de esta última fuerza.

Para un líquido isotrópico entre dos placas (Figura 3.2)

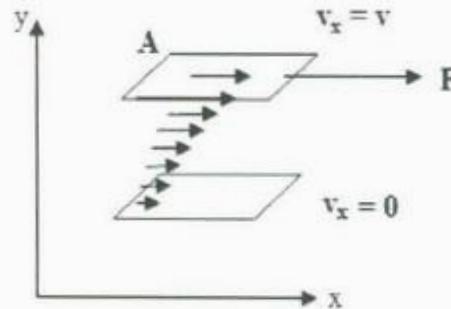


Figura 3.2 Líquido moviéndose entre dos placas.

la viscosidad está dada por la siguiente relación<sup>[21]</sup>

$$\frac{\mathbf{F}}{A} = \eta \frac{dv}{dy} \quad (3.5)$$

donde  $\eta$  es el coeficiente de viscosidad. Los esfuerzos de corte se ilustran en el elemento de volumen de la Figura 3.3

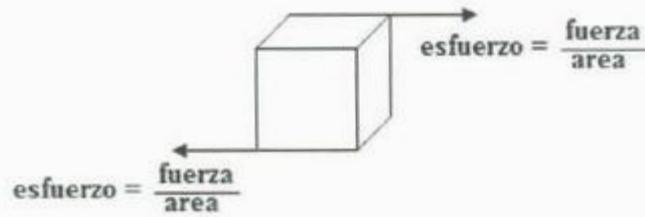


Figura 3.3 Esfuerzos actuando en planos opuestos de un elemento de volumen de un fluido.

La fuerza viscosa  $\mathbf{F}_{vis}$ , puede escribirse en términos del *tensor de esfuerzos*<sup>[23]</sup>  $\vec{\sigma}$ ,

$$F_{\alpha}^{vis} = \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \sigma_{\alpha\beta} \quad (3.6)$$

$\vec{\sigma}$  expresa la parte del flujo del impulso que no se debe a transferencia directa de impulso con la masa del fluido móvil (la derivada implica suma sobre índices repetidos). Finalmente la ecuación de movimiento queda

$$\rho \left[ \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial t} + v_{\beta} \left( \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} \right) \right] = - \frac{\partial P}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} \quad (3.7)$$

con el tensor de esfuerzos

$$\sigma_{\alpha\beta} = \eta \left( \frac{\partial v_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial v_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} \right) \quad (3.8)$$

Las Ecs. (3.7) y (3.8) forman la base para estudiar la hidrodinámica de un fluido isotrópico. La fuerza viscosa  $\mathbf{F}_{vis}$  es la derivada del tensor de esfuerzos el cual a su vez es la derivada espacial de la velocidad por lo que la ecuación 3.4 puede escribirse

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{1}{\rho}\eta\nabla^2\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (3.9)$$

Esta es la ecuación de Navier – Stokes para un fluido incompresible.

Consideremos ahora que el flujo se da dentro de un capilar cilíndrico. Aplicando un gradiente de presión en los bordes y paralelo a su eje, es posible inducir un *flujo de Poiseuille*<sup>[17,21]</sup> tal que el fluido adopta el perfil de velocidades que se muestra en la Figura 3.4.

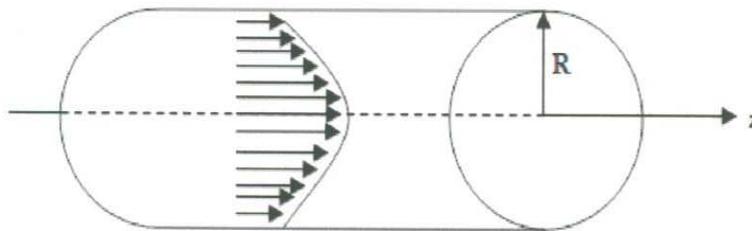


Figura 3.4: Fluido de viscosidad  $\eta$  que fluye estacionariamente por un tubo cilíndrico de radio  $R$  y longitud  $L$ .

En las secciones (3.2) y (3.3) estudiaremos el flujo de Poiseuille en dos casos distintos, primeramente el caso hidrodinámico con un líquido isotrópico y un segundo caso con un líquido anisotrópico como el cristal líquido nemático 5CB.

### 3.2 Hidrodinámica

Consideremos un fluido de viscosidad  $\eta$  que fluye estacionariamente por un tubo cilíndrico de radio  $R$  y longitud  $L$  (Figura 3.5), con un flujo como el de la Figura 3.4. La viscosidad está dada por

$$\eta = \frac{F}{\frac{dv}{dr}} = \frac{\text{esfuerzo cortante}}{\text{deformación}} \quad (3.10)$$

con  $F'$  la fuerza viscosa

$$F = -\eta A \frac{dv}{dr} = -\eta(2\pi r L) \frac{dv}{dr} \quad (3.11)$$

Tomemos un elemento de volumen de fluido de radio  $r$  a lo largo del eje del cilindro de radio  $R$ .

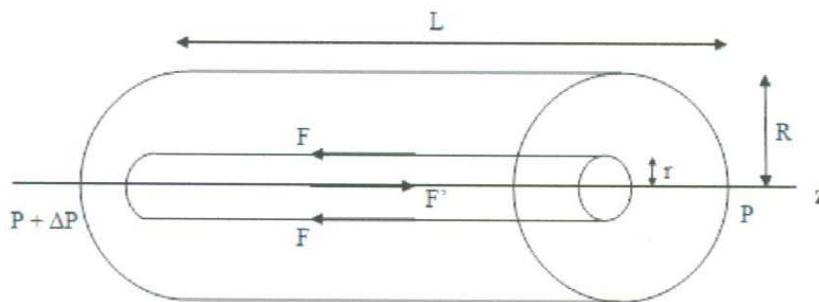


Figura 3.5: Cilindro de radio  $R$  y longitud  $L$  por el que fluye un fluido de viscosidad  $\eta$ .

debido a que suponemos que  $v$  disminuye al aumentar  $r$ , la fuerza  $F'$  debida al gradiente de presión y que empuja al elemento de fluido de radio  $r$  es:

$$\begin{aligned} F' &= (P + \Delta P)A - PA \\ &= \Delta P A \\ &= \pi r^2 \Delta P \end{aligned} \quad (3.12)$$

En estado de equilibrio

$$F = F'$$

esto es,

$$-\eta(2\pi rL) \frac{dv}{dr} = \pi r^2 \Delta P$$

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta P}{2\eta L} r$$

Integrando respecto de  $r$

$$\int_{v_0}^{v(r)} \frac{dv}{dr} dr = -\frac{\Delta P}{2\eta L} \int_0^r r' dr'$$

$$v(r) - v_0 = -\frac{\Delta P}{4\eta L} r^2$$

Al determinar  $v_0$  en  $r = R$  con la condición de no deslizamiento en la superficie,  $v(R) = 0$ , nos queda

$$v_0 = \frac{\Delta P}{4\eta L} R^2 \quad (3.13)$$

entonces

$$v(r) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (3.14)$$

ésta es una ecuación cuadrática en  $r$ . La grafica de  $v(r)$  se muestra en la Figura 3.6.

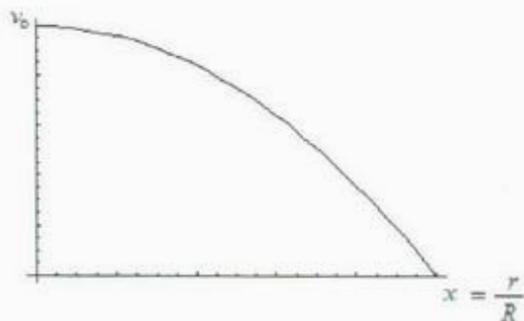


Figura 3.6: Gráfica esquemática de la velocidad para un líquido isotrópico.

### 3.3 Nematodinámica

Nematodinámica es el término utilizado para el estudio de la hidrodinámica de cristales líquidos, en particular, la mesofase nemática. Estudiaremos el flujo del cristal líquido nemático 5CB (Figura 1.2 c) en un cilindro circular. Esta sustancia es en particular de las más utilizadas porque el rango de temperatura a la que es un cristal líquido resulta más favorable al momento de experimentar con él.

Como se planteó en el Cap. 2, supondremos que la reorientación del nemático ocurre en el plano  $r - z$  y que sólo es función de  $r$ . Con esto, el director  $\hat{\mathbf{n}}$  no tiene dependencia en la coordenada  $\phi$ , por tanto, según la Figura 3.7 el director tiene la forma

$$\hat{\mathbf{n}} = [\sin\theta(r), 0, \cos\theta(r)] \quad (3.15)$$

con  $\theta$  definido en la misma figura. Supondremos también que el flujo se da a lo largo del eje del cilindro, esto es, en la dirección del eje  $z$

$$\mathbf{v}(r) = (0, 0, v_z(r)) \quad (3.16)$$

Ambos campos vectoriales satisfacen condiciones de frontera en la pared del cilindro, anclaje débil para  $\hat{\mathbf{n}}$  y no deslizamiento para  $\mathbf{v}$ :

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=1} = \frac{\frac{1}{2} \sigma \sin 2\theta}{\cos^2 \theta + K \sin^2 \theta} \Big|_{x=1} \quad v_z(x=1) = 0 \quad (3.17)$$

Con  $x = r/R$ . Suponemos que el cristal líquido adopta una configuración de escapada radial, situación en la cual el director en el eje del cilindro es paralelo a éste, y después su inclinación aumenta gradualmente hasta quedar *anclado* en la pared.

La ecuación de movimiento para  $\hat{n}$  y el campo de velocidad  $v$  pueden ser escritos de la forma<sup>[29]</sup> (la suma es sobre índices repetidos)

$$\begin{aligned} \frac{dn_i}{dt} = & \frac{1}{2}(\partial_k v_i - \partial_i v_k)n_k + \frac{\lambda}{2}(\delta_{il} - n_i n_l)n_k(\partial_k v_l - \partial_l v_k) \\ & + \frac{1}{\gamma_1}(\delta_{im} - n_i n_m)\frac{\delta f}{\delta n_m} \end{aligned} \quad (3.18)$$

y

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv_i}{dt} = & -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\lambda \frac{\partial}{\partial x_j}(n_i h_j + n_j h_i) \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \prod_{jl} \frac{\partial}{\partial x_i} n_l + \prod_{il} \frac{\partial}{\partial x_j} n_l \right) \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \left[ \left( \prod_{ij} + \prod_{ik} \right) n_l - \prod_{il} n_j - \prod_{jl} n_i \right] + \alpha_4 \frac{\partial}{\partial x_j} v_{ij} \\ & + \alpha_3 (1 + \lambda) \frac{\partial}{\partial x_j} (n_i n_l v_{jl} + n_j n_l v_{il}) \\ & + \frac{1}{2} (\alpha_5 + \alpha_1 - \alpha_6 - 2\lambda) \frac{\partial}{\partial x_j} (n_i n_j n_l n_m v_{lm}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

En estas ecuaciones,  $\lambda$  y  $\gamma_1$  son coeficientes cinéticos;  $\gamma_1$  tiene dimensiones de viscosidad mientras que  $\lambda = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ , es la razón de dos viscosidades nemáticas, y es adimensional.  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  y  $\alpha_6$  son los coeficientes de Leslie,  $f$  es la densidad de energía libre total,  $p$  es la presión y  $\rho$  es la densidad de masa.  $h_i$  es el campo molecular y está dado por

$$h_i \equiv \frac{1}{\gamma_1} (\delta_{im} - n_i n_m) \frac{\delta f}{\delta n_m} \quad (3.20)$$

donde  $\frac{\delta f}{\delta n_m}$  es la derivada funcional,  $\prod_{jl}$  está dado por:

$$\prod_{jl} = \frac{\partial F}{\partial \left( \frac{\partial n_l}{\partial x_j} \right)} - n_r n_l \frac{\partial F}{\partial \left( \frac{\partial n_r}{\partial x_j} \right)} \quad (3.21)$$

La parte simétrica del gradiente de velocidad es el tensor  $v_{jl} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_l}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_l} \right)$ . La energía elástica está dada para nuestro caso como:

$$F_e = \frac{1}{2} \int_V [K_1 (\nabla \cdot \hat{n})^2 + K_2 (\hat{n} \cdot \nabla \times \hat{n})^2 + K_3 (\hat{n} \times \nabla \times \hat{n})^2 - K_4 \nabla \cdot [\hat{n} (\nabla \cdot \hat{n}) + \hat{n} \times (\nabla \times \hat{n})]] dV \quad (3.22)$$

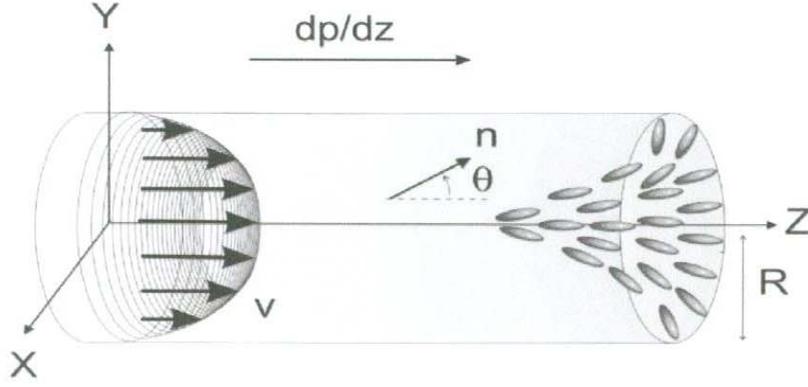


Figura 3.7: Cristal líquido en un capilar con flujo de Poiseuille con condiciones de frontera de anclaje débil.

La energía superficial está dada por

$$F_s = \frac{1}{2} \int_S W_\theta \cos^2 \theta dS \quad (3.23)$$

Debido al flujo, hemos de agregar un término más a la energía, el referente a la parte nematodinámica, la cual tiene la forma:

$$F_N = \frac{1}{2} \rho \int_V v^2 dV \quad (3.24)$$

Sumando las expresiones dadas por las Ecs. (3.22), (3.23) y (3.24), desarrollando términos e introduciendo la variable adimensional  $x = \frac{r}{R}$ , las ecuaciones de equilibrio de Euler-Lagrange son:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2\theta}{dx^2} x^2 (\cos^2\theta + K \operatorname{sen}^2\theta) + \frac{x^2}{2} \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 (K-1) \operatorname{sen}2\theta \\
& + x \left( \frac{d\theta}{dx} \right) (\cos^2\theta + K \operatorname{sen}^2\theta) - \frac{1}{2} \operatorname{sen}2\theta \\
& + \frac{\gamma_2 R}{2K_1} \frac{dv_z}{dx} x^3 (\cos 2\theta - \cos 2\theta_0) = 0
\end{aligned} \tag{3.25}$$

y

$$\frac{dv_z}{dx} = \frac{R^2}{g(\theta)} \left[ -\frac{dP}{dz} \frac{x}{2} + \frac{b}{R^2 x} \right] \tag{3.26}$$

donde  $\gamma_2$  es la viscosidad, y  $b$  es una constante de integración que tomaremos como cero para valores finitos de  $v_z$  en  $x = 0$ . Desacoplando ambas ecuaciones<sup>[11]</sup> obtenemos para  $\theta$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2\theta}{dx^2} x^2 (\cos^2\theta + K \operatorname{sen}^2\theta) + \frac{x^2}{2} \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 (K-1) \operatorname{sen}2\theta \\
& + x \left( \frac{d\theta}{dx} \right) (\cos^2\theta + K \operatorname{sen}^2\theta) - \frac{1}{2} \operatorname{sen}2\theta \\
& - \frac{\Lambda \gamma_2}{g(\theta)} x^3 (\cos 2\theta - \cos 2\theta_0) = 0
\end{aligned} \tag{3.27}$$

el último término es debido a la parte hidrodinámica, donde  $\cos 2\theta_0 = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$  y  $K = \frac{K_3}{K_1}$ .

Para  $v_z$  se tiene:

$$v_z = \Lambda v_0 \gamma_2 \int_x^1 \frac{s}{g(\theta(s))} ds \tag{3.28}$$

donde se han utilizado las condiciones dadas en la Ec. (3.17).  $\Lambda$  es un importante parámetro adimensional en términos del gradiente de presión definido como:

$$\Lambda \equiv \frac{1}{4} \frac{dP}{dz} \frac{R^3}{K_1} \tag{3.29}$$

y con dimensiones de velocidad se define el parámetro

$$v_0 = \frac{2K_1}{R\gamma_2} \quad (3.30)$$

además

$$g(\theta) = \frac{1}{2} [2\alpha_1 \text{sen}^2\theta \cos^2\theta + (\alpha_5 - \alpha_2) \text{sen}^2\theta + (\alpha_6 + \alpha_3) \cos^2\theta + \alpha_4] \quad (3.31)$$

$g(\theta)$  es la viscosidad dependiente de la posición<sup>[11]</sup>, pues  $\theta = \theta(x)$ ; su valor será más grande en la frontera del cilindro que en el eje. Para anclaje débil se tiene que  $\theta(x)$  satisface las condiciones de frontera

$$\theta(x=0) = 0 \quad ; \quad \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=1} = \frac{\frac{1}{2} \sigma \text{sen} 2\theta}{\cos^2\theta + K \text{sen}^2\theta} \Bigg|_{x=1} \quad (3.32)$$

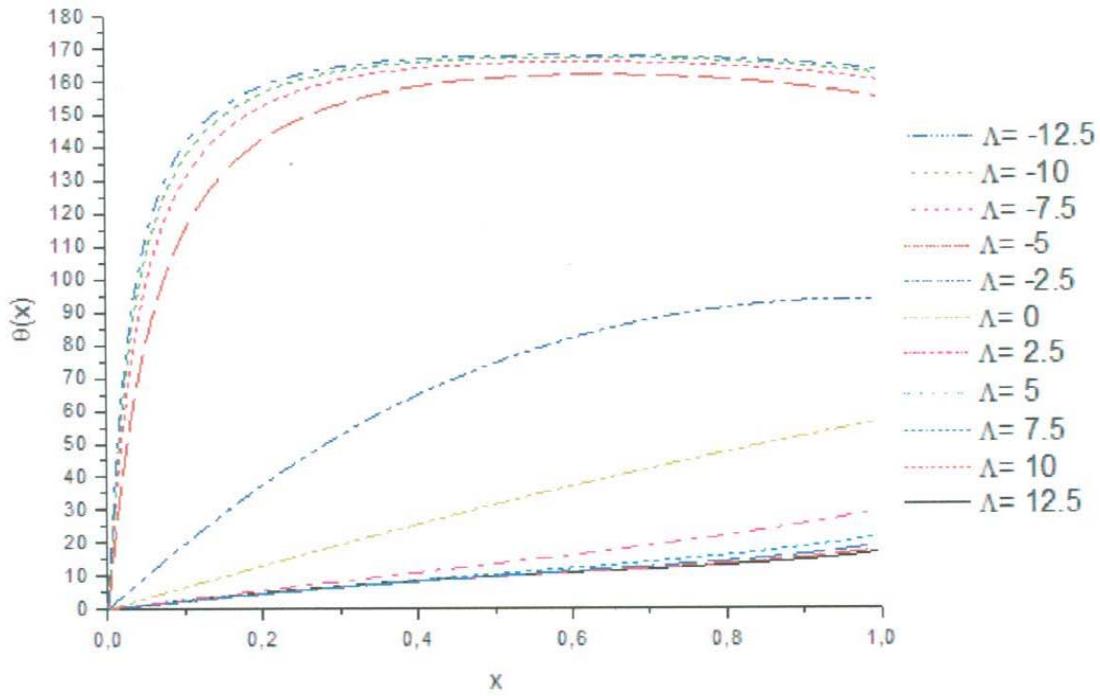
donde

$$\sigma = \frac{RW_\theta}{K_1} + \frac{K_4}{K_1} - 1 \quad (3.33)$$

La ecuación diferencial (3.27) se resuelve para  $\theta(x)$  con las condiciones en la frontera (3.32) usando el *método de disparo*, para diferentes valores de  $\sigma$  y  $\Lambda$ .

Las soluciones  $\theta(x)$  que especifican las configuraciones que el nemático adopta dentro del cilindro se muestran en la Figura 3.8. Los perfiles de velocidad  $v_z(x)$  calculados de la Ec. (3.28), correspondientes a los distintos valores de  $\Lambda$  y  $\sigma$  considerados se muestran en la Figura 3.9.

Configuraciones para  $\theta(x)$  para  $\sigma = 2$



Configuraciones para  $\theta(x)$  para  $\sigma = 4$

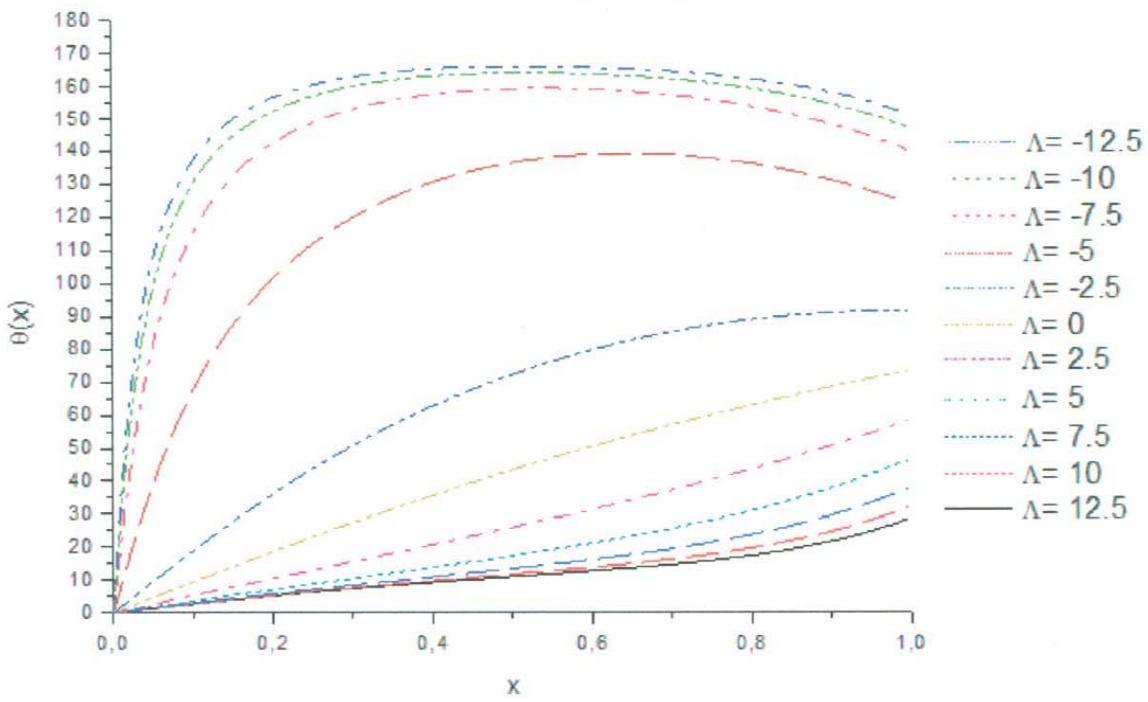


Figura 3.8: Configuraciones para  $\theta(x)$  como función de  $x = r/R$  para  $\sigma = 2, 4$  y valores positivos y negativos de  $\Lambda$ . El parámetro  $\sigma$  mide la intensidad de anclaje a la pared interna mientras que  $\Lambda$  mide la intensidad del flujo a través del gradiente de presión.

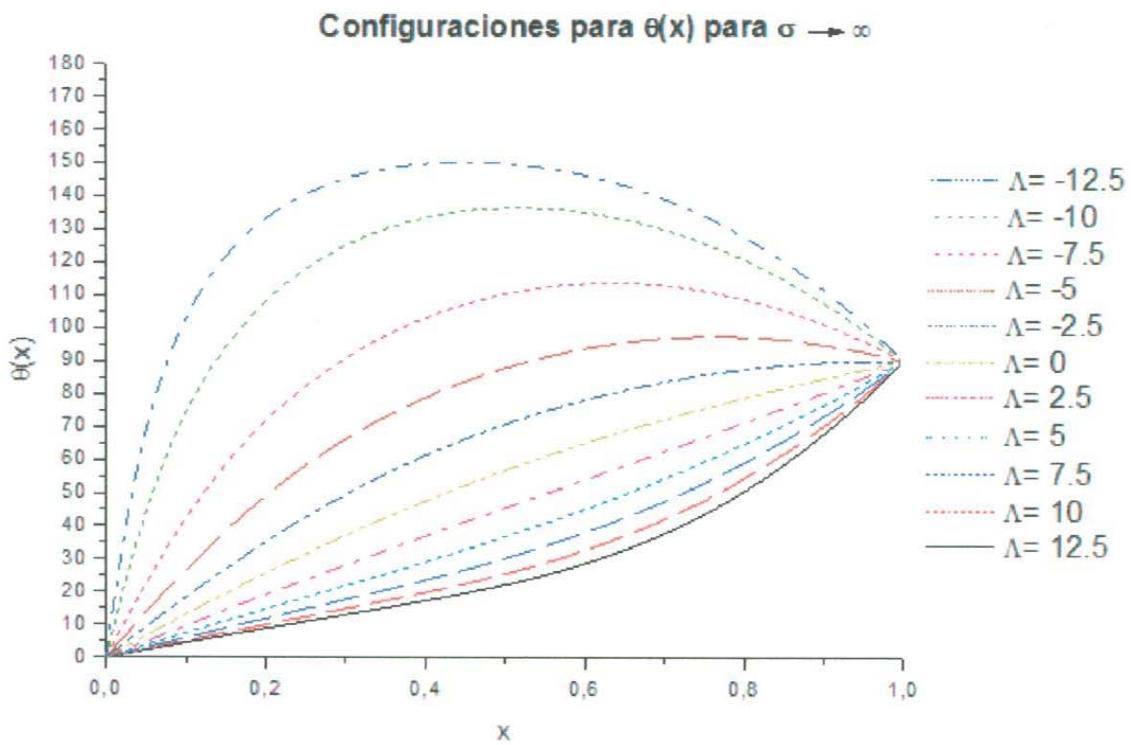
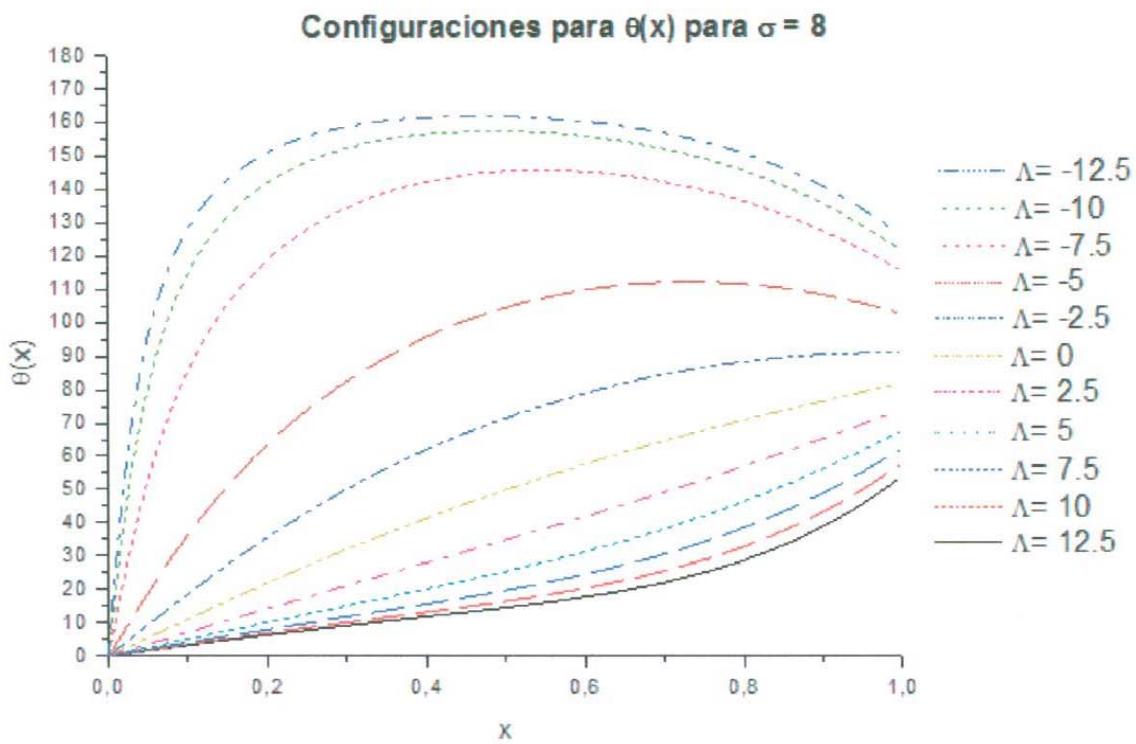


Figura 3.8 cont.: Configuraciones para  $\theta(x)$  como función de  $x = r/R$  para  $\sigma = 8$  y  $\sigma \rightarrow \infty$  y valores positivos y negativos de  $\Lambda$ . El parámetro  $\sigma$  mide la intensidad de anclaje a la pared interna mientras que  $\Lambda$  mide la intensidad del flujo a través del gradiente de presión.

Se pueden tomar cuantos valores se deseen, aquí se tomaron cuatro valores distintos para  $\sigma$  y once valores para  $\Lambda$  como ejemplos. También, se ha considerado un valor muy grande (infinito) para  $\sigma$  que es el valor que ésta toma cuando se trata de un anclaje fuerte, para comparar configuraciones y observar cómo para distintos valores finitos de este parámetro, aún para los mismos valores de  $\Lambda$ , las configuraciones son distintas y, conforme aumentamos el valor de  $\sigma$ , las curvas para  $\theta(x)$  se van cerrando al ángulo máximo de  $90^\circ$ . Es interesante ver que cuando  $\sigma \rightarrow 0$  la condición en la frontera, Ec. (3.32), es cero, es decir, el nemático no adopta la configuración de escapada radial porque las moléculas del cristal líquido no quedan ancladas a la superficie. Una vez obtenidas las configuraciones  $\theta(x)$  se calculan los perfiles de velocidad  $v_z(x)$  con la Ec. (3.28) correspondientes a los distintos valores de  $\Lambda$  y  $\sigma$  considerados. Los resultados se muestran en la Figura 3.9.

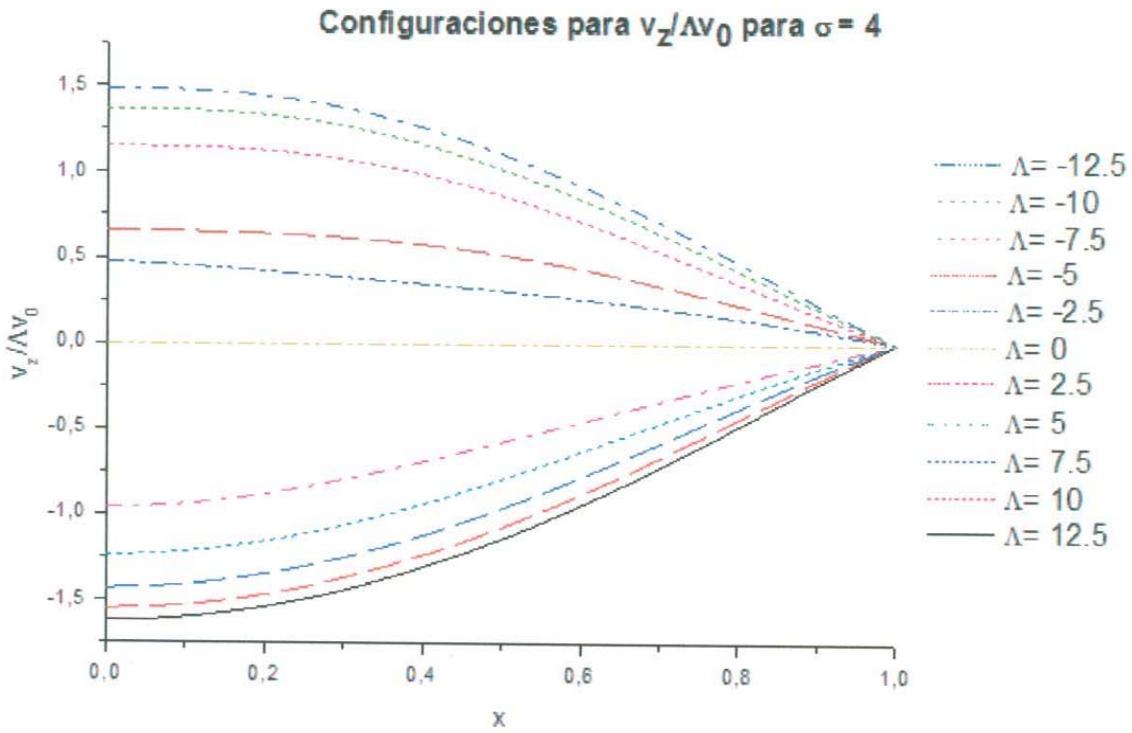
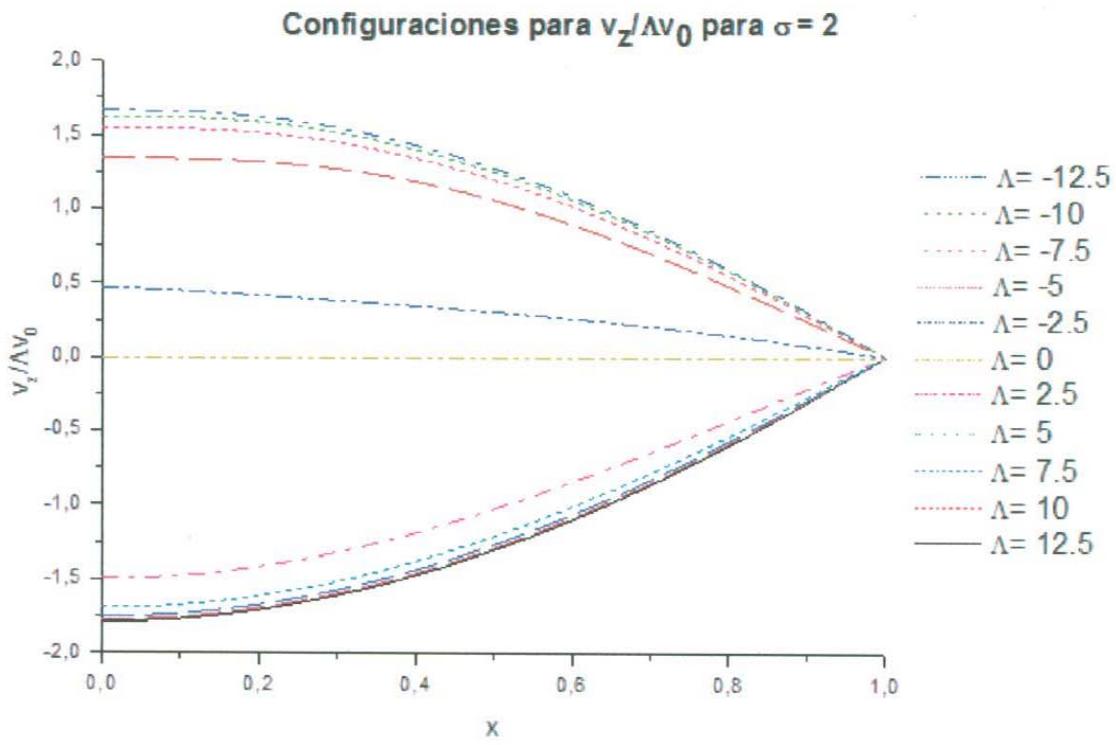


Figura 3.9: Perfiles de velocidad como función de  $x = r/R$  para  $\sigma = 2, 4$  y valores positivos y negativos de  $\Lambda$ . El parámetro  $\sigma$  mide la intensidad de anclaje a la pared interna mientras que  $\Lambda$  mide la intensidad del flujo a través del gradiente de presión.

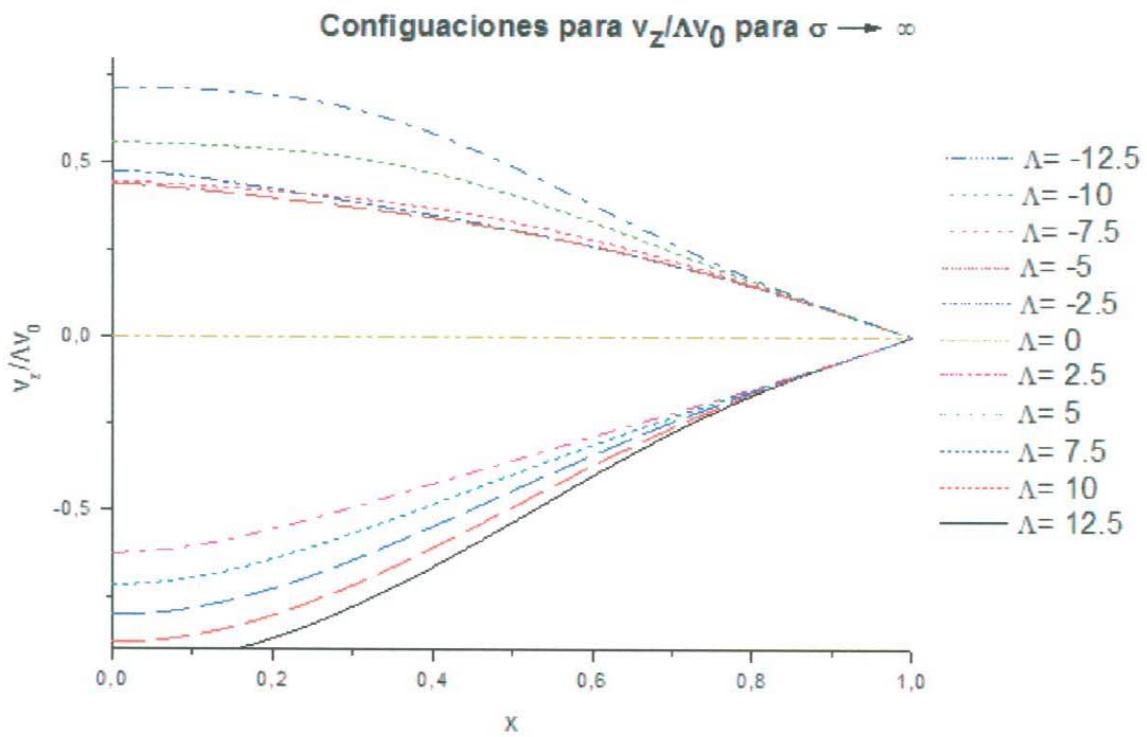
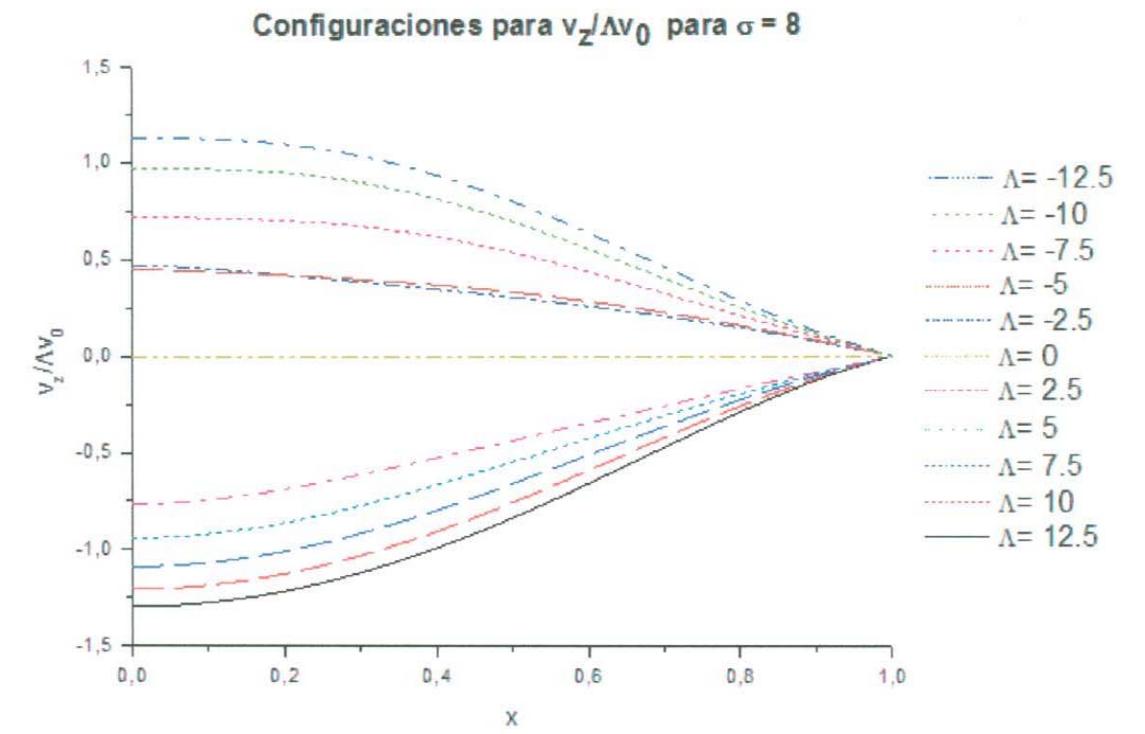


Figura 3.9 cont.: Perfiles de velocidad como función de  $x = r/R$  para  $\sigma = 8$  y  $\sigma \rightarrow \infty$  y valores positivos y negativos de  $\Lambda$ . El parámetro  $\sigma$  mide la intensidad de anclaje a la pared interna mientras que  $\Lambda$  mide la intensidad del flujo a través del gradiente de presión.

Es importante tener en mente la relación que guarda  $\theta(x)$  con  $v_z(x)$ . Recordemos que la ecuación (3.27) nos arroja las configuraciones para el ángulo que forma la molécula con la superficie según las condiciones de frontera impuestas (de anclaje débil y flujo nulo en la pared). Por otro lado, al ser  $\Lambda$  negativa indica un gradiente de presión negativo (Figura 3.8) es decir un flujo hacia la derecha, por el contrario si  $\Lambda$  es positivo indica un gradiente de presión positivo y el flujo es hacia la izquierda; tomando esto en cuenta, y observando las gráficas para los perfiles de velocidad, se puede ver que éstas no son simétricas y esto puede explicarse precisamente debido al flujo inducido por el gradiente de presión, puesto que, por la condición de escapada radial, al material le es más fácil fluir en una dirección que en otra debido a la inclinación de las moléculas. Si se toman distintos valores de  $\sigma$  con  $\Lambda$  de la misma magnitud pero signo opuesto, ha de verse que en las configuraciones para flujo para gradientes negativos, el director puede rotar en ángulos mayores a los  $90^\circ$  disminuyendo después para alcanzar el ángulo definitivo en la pared, mientras que para gradientes positivos el ángulo aumenta poco a poco hasta alcanzar el ángulo final en la superficie. Es visible en las configuraciones para  $\theta(x)$  que para valores mayores de  $\sigma$  el ángulo tiende a  $90^\circ$  (caso anclaje fuerte). Los perfiles de velocidad muestran una desviación del flujo parabólico tipo de Poiseuille debido a la viscosidad dependiente de la posición  $g(\theta)$ .

# Capítulo 4

## Campos ópticos en guías de ondas

### 4.1 Guías de ondas

Consideremos ahora la propagación de ondas electromagnéticas en el interior de tubos huecos de extremos abiertos o *guías de ondas*, como la mostrada en la Figura 4.1. Supondremos que éstas tienen la misma sección transversal en toda su longitud y que están hechas de un conductor perfecto, entonces  $\mathbf{E} = 0$  y  $\mathbf{B} = 0$  en el conductor mismo; esta propiedad define las condiciones en la frontera (en la pared interior), que a saber son:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\parallel} &= 0 \\ B^{\perp} &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

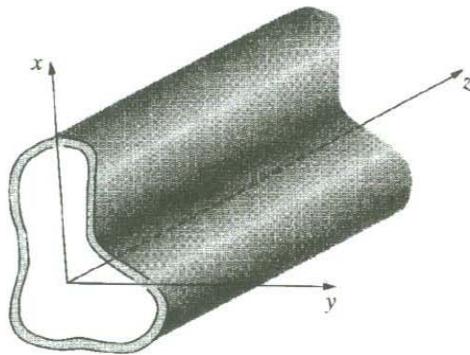


Figura 4.1: Guía de ondas.

Consideremos campos electromagnéticos que se propagan a lo largo de la guía de ondas y fijemos el eje  $z$  en esa dirección. También supondremos campos armónicos, representados por ondas planas, de manera que las expresiones de los campos deben incorporar el factor  $\exp[i(kz - \omega t)]$ . La *constante de propagación* a lo largo del eje  $z$ ,  $k$ , dará información sobre el tipo de propagación (si hay o no atenuación, las velocidades de fase y de grupo, etc.), para nuestro estudio interesa solo el caso de  $k$  real; los campos pueden escribirse como<sup>[25,26]</sup>:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z, t) &= \tilde{\mathbf{E}}_0(x, y) \exp [i(kz - \omega t)] \\ \mathbf{B}(x, y, z, t) &= \tilde{\mathbf{B}}_0(x, y) \exp [i(kz - \omega t)] \end{aligned} \quad (4.2)$$

Supondremos que no existen fuentes de campo en el interior de la guía (cargas y corrientes independientes o inducidas por el campo eléctrico presente) por lo que  $\mathbf{J} = 0$ . Estos campos deberán cumplir las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned} a) \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 & c) \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ b) \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & d) \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.3)$$

El problema consiste en encontrar  $\tilde{\mathbf{E}}_0$  y  $\tilde{\mathbf{B}}_0$  tal que los campos, Ecs. (4.2), satisfagan las ecuaciones de Maxwell, Ecs. (4.3), junto con las condiciones en la frontera, Ecs. (4.1). En general las ondas confinadas no son transversales por lo que para que las condiciones en la frontera se ajusten a nuestros cálculos debemos incluir las componentes longitudinales  $E_z$  y  $B_z$ , así pues

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_0 &= E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k} \\ \tilde{\mathbf{B}}_0 &= B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Por convención se llama modo **TEM** (Transversal Electromagnético) a la situación donde ambos campos son transversales a la dirección de propagación,  $E_z = B_z = 0$ , modo

donde cada una de las componentes es función solo de  $x$  e  $y$ . Al sustituir en las Ecs.

(4.3c) y (4.3d) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 a) \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - ikE_y &= i\omega B_x & d) \quad \frac{\partial B_z}{\partial y} - ikB_y &= -i\frac{\omega}{c^2}E_x \\
 b) \quad ikE_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= i\omega B_y & e) \quad ikB_x - \frac{\partial B_z}{\partial x} &= -i\frac{\omega}{c^2}E_y \\
 c) \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= i\omega B_z & f) \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} &= -i\frac{\omega}{c^2}E_z
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Resolviendo para  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $B_x$  y  $B_y$  en términos de las componentes longitudinales se tiene:

$$\begin{aligned}
 a) \quad E_x &= \frac{i}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2} \left( k \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) \\
 b) \quad E_y &= \frac{i}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2} \left( k \frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \\
 c) \quad B_x &= \frac{i}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2} \left( k \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) \\
 d) \quad B_y &= \frac{i}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2} \left( k \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Sustituyendo las Ecs. (4.6) en las Ecs. (4.3a) y (4.3b) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2 \right] E_z &= 0 \\
 \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2 \right] B_z &= 0
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Por convención se llama modo **TEM** (Transversal Electromagnético) a la situación donde ambos campos son transversales a la dirección de propagación,  $E_z = B_z = 0$ , modo

**TE** (Transversal Eléctrico) cuando sólo el campo eléctrico es transversal,  $E_z = 0$ , y modo **TM** (Transversal Magnético) cuando sólo el campo magnético es transversal,  $B_z = 0$ , (véase la Figura 4.2).

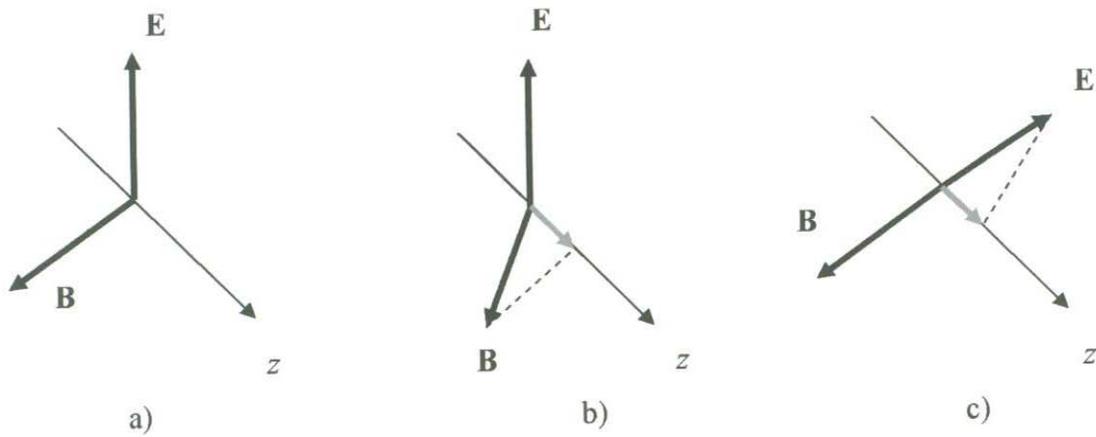


Figura 4.2: Modos transversales: a) Electromagnético, b) Eléctrico, c) Magnético.

Los modos TEM no pueden ocurrir en una guía de ondas hueca y para probarlo tomemos  $E_z = 0$  en la ley de Gauss, Ec. (4.3a), para tener

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \quad (4.8)$$

y si  $B_z = 0$ , la ley de Faraday, Ec. (4.3c), queda

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \quad (4.9)$$

Así, el vector  $\tilde{\mathbf{E}}_0$  en la Ec. (4.4) tiene divergencia cero y rotacional cero, entonces puede escribirse como el gradiente de un potencial escalar que satisface la ecuación de Laplace, pero por la condición en la frontera sobre  $\mathbf{E}$ , Ec. (4.1), se requiere que la superficie sea equipotencial, y como la ecuación de Laplace no admite máximos ni

mínimos locales, esto significa que el potencial es constante en la guía y por lo tanto, el campo eléctrico es cero, es decir, no existen ondas TEM.

## 4.2 Guía de ondas rectangular hueca

Ahora hemos de encontrar los modos TE y TM en una guía de ondas rectangular, como la que se muestra en la Figura 4.3. Para ello, necesitamos resolver las Ecs. (4.7) proponiendo para los campos eléctrico y magnético la forma:

$$\Psi_z(x, y) = X(x)Y(y) \quad (4.10)$$

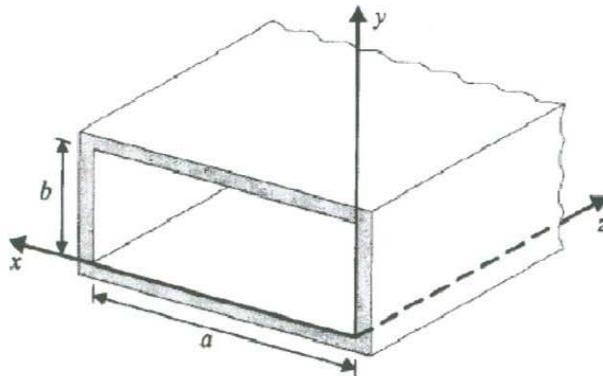


Figura 4.3: Guía de ondas rectangular.

Como se estableció en las Ecs. (4.1), para un conductor perfecto las condiciones en la frontera son:

$$a) \mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad ; \quad b) \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.11)$$

donde  $\mathbf{n}$  es un vector unitario perpendicular a la superficie, lo que nos lleva a:

$$\begin{aligned} E_y = E_z = B_x = 0 & \quad \text{en } x = 0, a \\ E_x = E_z = B_y = 0 & \quad \text{en } y = 0, b \end{aligned} \quad (4.12)$$

### 4.2.1 Modos TE

En los modos TE,  $E_z = 0$  y  $B_z \neq 0$ , por lo tanto hemos de encontrar la expresión para  $B_z$ . La segunda de las Ecs. (4.7) es:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 - k^2 \right] B_z = 0 \quad (4.13)$$

y de la Ec. (4.10) se sigue que

$$B_z = X(x)Y(y) \quad (4.14)$$

Sustituyendo en la ecuación para  $B_z$ ,

$$Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \left[ \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 - k^2 \right] XY = 0$$

Dividiendo por  $B_z$

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 - k^2 = 0$$

luego haciendo

$$\left( \frac{\omega}{c} \right)^2 - k^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (4.15)$$

obtenemos las ecuaciones para  $X(x)$  y  $Y(y)$

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k_x^2 \\ b) \quad & \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -k_y^2 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Así, la solución para  $X(x)$  es

$$X(x) = A \operatorname{sen} k_x x + B \operatorname{cos} k_x x \quad (4.17)$$

Las condiciones en la frontera dadas por la Ec. (4.12) requieren que  $B_x$  y también  $\frac{dX}{dx}$  (según la Ec. (4.6c)) se anulen en  $x = 0$  y en  $x = a$ . Aplicando la primera de ellas en  $x = 0$  se obtiene  $A = 0$ , de modo que

$$X(x) = B \operatorname{cos} k_x x \quad (4.18)$$

Al aplicar la condición en  $x = a$  se obtiene

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.19)$$

entonces la solución para  $X(x)$  es

$$X(x) = B \operatorname{cos} \frac{m\pi}{a} x \quad (4.20)$$

Siguiendo un procedimiento similar para  $Y(y)$  obtenemos

$$k_y = \frac{n\pi}{b} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.21)$$

la solución para  $Y(y)$

$$Y(y) = D \operatorname{cos} \frac{n\pi}{b} y \quad (4.22)$$

Con estos resultados obtenemos finalmente la expresión para  $B_z$

$$B_z(x, y) = B_o \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (4.23)$$

donde  $B_o$  es una constante.

#### 4.2.2 Modos TM

En los modos TM,  $B_z = 0$  y  $E_z \neq 0$  por lo que hay que encontrar la expresión para  $E_z$ . De la primera de las Ecs. (4.7) tenemos:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2 \right] E_z = 0 \quad (4.24)$$

de la Ec. (4.10) se sigue que

$$E_z = X(x)Y(y) \quad (4.25)$$

Sustituyendo en la Ec. (4.24) y siguiendo un procedimiento similar al de la sección anterior, obtenemos que las ecuaciones para  $X(x)$  y  $Y(y)$  son:

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} &= -k_x^2 \\ \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} &= -k_y^2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

donde  $k_x^2$  y  $k_y^2$  están relacionadas por la Ec. (4.15). La solución para  $X(x)$  es:

$$X(x) = A \sin k_x x + B \cos k_x x \quad (4.27)$$

Las condiciones en la frontera dadas por la Ec. (4.12) indican que  $E_z = 0$  en  $x = 0$  y en  $x = a$  por lo que se debe cumplir que  $X(0) = 0$ , por lo tanto  $B = 0$ , de modo que

$$X(x) = A \operatorname{sen} k_x x \quad (4.28)$$

Al aplicar la condición en  $x = a$  se obtiene

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.29)$$

entonces

$$X(x) = A \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \quad (4.30)$$

Siguiendo el mismo procedimiento para  $Y(y)$

$$k_y = \frac{n\pi}{b} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.31)$$

y

$$Y(y) = C \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y \quad (4.32)$$

por lo tanto,

$$E_z(x, y) = E_o \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \quad (4.33)$$

Una vez obtenidos los valores para  $k_x$  y  $k_y$ , de la ecuación (4.15) podemos obtener la constante de propagación que resulta ser la misma para ambos modos (TE y TM):

$$k = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \pi^2 \left[ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]} \quad (4.34)$$

Por otra parte, la frecuencia límite a la cual la onda se vuelve imaginaria se le llama *frecuencia de corte*, esto es, una frecuencia  $\omega_{mn}$  tal que  $\omega_{mn} < \omega$  y está dada por<sup>[25]</sup>:

$$\omega_{mn} = c\pi \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (4.35)$$

Así, en términos de la frecuencia de corte,  $k$  es:

$$k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2} \quad (4.36)$$

la velocidad de la onda está dada por:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{mn}}{\omega}\right)^2}} \quad (4.37)$$

mientras que la velocidad de grupo es:

$$v_g = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{mn}}{\omega}\right)^2} \quad (4.38)$$

### 4.3 Guía de ondas cilíndrica hueca

Para analizar las propiedades de transmisión de una guía de ondas cilíndrica (Figura 4.4) conviene utilizar un sistema de coordenadas cilíndricas. Las ecuaciones correspondientes a las Ecs. (4.7) en estas coordenadas son<sup>[25,22]</sup>

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 - k^2 \right] E_z = 0 \quad (4.39)$$

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 - k^2 \right] B_z = 0$$

Para resolverlas aplicaremos las condiciones en la frontera adecuadas a la geometría cilíndrica y se obtendrán las distribuciones del campo electromagnético dentro de la guía. De la figura 4.4 se puede ver que para un conductor perfecto  $E_\phi$  es cero para toda  $\phi$  en la frontera, es decir, en  $r = a$ . Así mismo para los modos TE,  $E_z = 0$  en todos los

puntos interiores y para los modos TM,  $E_z \neq 0$  con excepción de la frontera donde  $E_z = 0$  para toda  $\phi$  ya que no puede haber componente tangencial de campo eléctrico en el conductor.

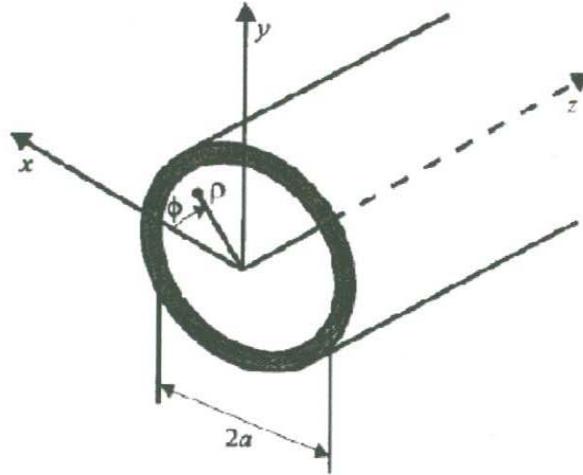


Figura 4.4: Guía de ondas cilíndrica.

Siguiendo un procedimiento similar al de la Sección 4.2, la Ec. (4.10) en este caso toma la forma

$$\Omega(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi) \quad (4.40)$$

Al sustituir la Ec. (4.40) en cualquiera de las Ecs. (4.39) se obtiene

$$\frac{\Phi}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{R}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \left[ \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 - k^2 \right] R\Phi = 0$$

Tomando

$$\left( \frac{\omega}{c} \right)^2 - k^2 = \gamma^2 \quad (4.41)$$

dividiendo por  $\Omega$  y multiplicando por  $r^2$  se obtiene

$$\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \gamma^2 r^2 = 0$$

Tomando a  $m^2$  como la constante de separación obtenemos

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + m^2 = 0 \quad (4.42)$$

$$\frac{r^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial R}{\partial r} + \gamma^2 r^2 - m^2 = 0$$

La segunda de las Ecs. (4.42) es la ecuación diferencial Bessel cilíndrica. La solución para  $\Phi(\phi)$  es

$$\Phi(\phi) = A \cos m\phi + B \sin m\phi \quad (4.43)$$

De la ecuación para  $R(r)$  se obtiene

$$R(r) = C J_m(\gamma r) + D N_m(\gamma r) \quad (4.44)$$

La función de Neumann (función Bessel de segundo tipo,  $N_m$ ) tiene una singularidad en  $r = 0$ , pues tiende a menos infinito cuando su argumento tiende a cero. Dado que sería imposible tener un campo de magnitud infinita en el centro de la guía donde  $r = 0$ , entonces  $D = 0$  para toda  $m$ . Por otra parte la geometría del problema exige que  $m$  sea entero, puesto que cada vez que  $\phi$  aumente en  $2\pi$  se debe obtener el mismo valor para el campo. Esta condición de periodicidad (o univaluamiento) indica que es suficiente elegir de las funciones  $\cos m\phi$  y  $\sin m\phi$  dadas en la Ec. (4.43) a una cualquiera de ellas, según la referencia que se elija para  $\phi = 0^\circ$ . Usando sólo la función  $\cos m\phi$  la solución para  $\Omega$  es

$$\Omega(r, \phi) = A_0 J_m(\gamma r) \cos m\phi \quad (4.45)$$

con  $A_0$  una constante.

Una vez conocidos  $B_z$  para los modos TE y  $E_z$  para los modos TM, las demás componentes del campo se obtienen a partir de las ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{aligned}
 a) \quad E_r &= \frac{i}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \left( k \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\omega}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \phi} \right) \\
 b) \quad E_\phi &= \frac{-i}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \left( \omega \frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{k}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \right) \\
 c) \quad B_r &= \frac{i}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \left( k \frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{\omega}{c^2 r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \right) \\
 d) \quad B_\phi &= \frac{i}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \left( \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{k}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \phi} \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.46}$$

### 4.3.1 Modos TE

De la Ec. (4.45) tenemos que  $B_z$  es:

$$B_z(r, \phi) = A_0 J_m(\gamma r) \cos m\phi \tag{4.47}$$

De la Ec. (4.46b) y del hecho de que para los modos TE se cumple que  $E_z = 0$ , se obtiene la condición en la frontera, en  $r = a$

$$E_\phi|_{r=a} = \frac{-i}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \omega \frac{\partial B_z}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0 \tag{4.48}$$

por lo que

$$\frac{\partial B_z}{\partial r} \Big|_{r=a} = A_0 \gamma J'_m(\gamma r) \cos m\phi|_{r=a} = 0 \tag{4.49}$$

En general  $A_0 \gamma \cos m\phi \neq 0$ , luego debe cumplirse que

$$J'_m(\gamma r)|_{r=a} = 0 \tag{4.50}$$

La naturaleza oscilatoria de la función Bessel permite tabular los argumentos para los cuales la función vale cero. En la tabla 4.1 se muestran algunos ceros de la función Bessel.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$ ...
$m = 0$	2.405	5.520	8.654 ...
$m = 1$	3.832	7.016	10.173 ...
$m = 2$	5.136	8.417	11.620 ...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$ ...

Tabla 4.1. Raíces de la función Bessel.

Estas raíces dan origen a la nomenclatura de cada uno de los modos de propagación en la guía; así denotando con  $\kappa_{mn}$  a las raíces  $(\gamma r)_{mn}$  de  $J'_m(\gamma r) = 0$  como

$$\gamma a = \kappa_{mn} \tag{4.51}$$

entonces para los modos  $TE_{mn}$  se tiene

$$\gamma = \frac{\kappa_{mn}}{a} \tag{4.52}$$

Sustituyendo en la ecuación (4.41) encontramos que

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \frac{\kappa_{mn}^2}{a^2} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\kappa_{mn}^2}{a^2}} \tag{4.53}$$

Siguiendo un criterio similar al que se aplicó a las guías rectangulares, se deduce que no habrá propagación en la guía a partir de la frecuencia en que  $k$  sea puramente

imaginario. Dicha frecuencia de corte se obtiene igualando la última de las Ecs. (4.53) a cero:

$$\omega_{mn} = c \frac{\kappa_{mn}}{a} \quad (4.54)$$

La constante de propagación  $k$  de cada modo  $mn$  en función de la frecuencia de corte es:

$$k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2} \quad (4.55)$$

la velocidad de la onda es:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{mn}}{\omega}\right)^2}} \quad (4.56)$$

mientras que la velocidad de grupo está dada por:

$$v_g = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{mn}}{\omega}\right)^2} \quad (4.57)$$

#### 4.3.2 Modos TM

En este caso  $B_z = 0$  y  $E_z$  está dada por la Ec. (4.45)

$$E_z(r, \phi) = A_0 J_m(\gamma r) \cos m\phi \quad (4.58)$$

La condición en la frontera que debe cumplirse es

$$E_z|_{r=a} = 0 \quad (4.59)$$

de manera que de la ecuación (4.58) se tiene que

$$E_z|_{r=a} = 0 = J_m(\gamma r)|_{r=a} \quad (4.60)$$

Si siguiendo un procedimiento similar al que se hizo para los modos TE, designemos con  $\tau_{mn}$  a las raíces  $(\gamma r)_{mn}$  para los cuales  $J_m(\gamma r) = 0$

$$\gamma a = \tau_{mn} \Rightarrow \gamma = \frac{\tau_{mn}}{a} \quad (4.61)$$

entonces de la Ec. (4.41) se sigue que

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\tau_{mn}^2}{a^2}} \quad (4.62)$$

La frecuencia de corte para estos modos  $TM_{mn}$  está dada por una ecuación similar a la Ec. (4.54)

$$\omega_{mn} = c \frac{\tau_{mn}}{a} \quad (4.63)$$

de modo que la constante de propagación en términos de la frecuencia de corte es

$$k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_{mn}^2} \quad (4.64)$$

#### 4.4 Guía de ondas cilíndrica con núcleo de cristal líquido nemático

En las secciones anteriores analizamos guías de ondas huecas hechas de material conductor perfecto. En esta sección se ha de analizar una guía de ondas cilíndrica de radio  $R$  y longitud  $L$  rodeado por un medio dieléctrico isotrópico y homogéneo, con constante dieléctrica  $\epsilon_m$ , en cuyo interior se encuentra un cristal líquido nemático (5CB). Las configuraciones de equilibrio orientacional se determinan minimizando la correspondiente energía libre de Frank y asumiendo una configuración inicial de

escapada radial. Bajo estas condiciones se hace incidir un haz de luz linealmente polarizado de amplitud  $E_0$  dentro de la guía. La dinámica de la propagación de campos ópticos a través del nemático anisotrópico es descrita en términos de las correspondientes ecuaciones de Maxwell sin fuentes. Las ecuaciones de onda para los campos son<sup>[13]</sup>

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon_{\perp}\epsilon_{\parallel}}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} + \nabla \times [\epsilon^{-1}\nabla \times \mathbf{H}] &= 0 \\ \frac{\epsilon_{\perp}\epsilon_{\parallel}}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + \nabla \times [\epsilon^{-1}\nabla \times \mathbf{E}] &= 0\end{aligned}\tag{4.65}$$

Los vectores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{E}$  están relacionados por la ecuación constitutiva<sup>[13]</sup>

$$D_i = \epsilon_{ij}[\theta(r)]E_j\tag{4.66}$$

donde  $\epsilon_{ij}$  es el tensor de permitividad el cual para un nemático uniaxial, tiene la forma<sup>[13]</sup>

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{\perp}\delta_{ij} + \epsilon_a n_i n_j\tag{4.67}$$

donde  $\hat{\mathbf{n}}$  es el vector director. Los principales valores de este tensor para un nemático uniaxial son denotados por  $\epsilon_{\perp}$  y  $\epsilon_{\parallel}$  que corresponden a las constantes dieléctricas perpendicular y paralela al eje de la molécula respectivamente. En coordenadas cilíndricas  $r, \phi, z$ , las componentes del tensor son<sup>[16]</sup>

$$\begin{aligned}\epsilon_{rr} &= \epsilon_{\perp} + \epsilon_a \sin^2\theta \\ \epsilon_{rz} = \epsilon_{zr} &= \epsilon_a \sin\theta \cos\theta \\ \epsilon_{\phi\phi} &= \epsilon_{\perp} \\ \epsilon_{zz} &= \epsilon_{\perp} + \epsilon_a \cos^2\theta \\ \epsilon_{r\phi} = \epsilon_{\phi r} = \epsilon_{z\phi} = \epsilon_{\phi z} &= 0\end{aligned}\tag{4.68}$$

donde  $\epsilon_a = \epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}$  es la anisotropía y  $\theta$  es el ángulo entre el director del nemático y el eje del cilindro. Para muchos nemáticos, la susceptibilidad magnética es mucho más pequeña que en un dieléctrico, supondremos un medio no magnético, esto es

$$B = \mu_0 H \quad (4.69)$$

En general el rayo incidente no es plano o gaussiano, pero supondremos que los modos normales dentro de la cavidad cilíndrica son ondas planas propagándose a lo largo del eje  $z$ , esto es

$$\begin{aligned} E_j(z, r, t) &= E_j(r, k_0) \exp [i(\beta z - \omega t)] \\ B_j(z, r, t) &= B_j(r, k_0) \exp [i(\beta z - \omega t)] \end{aligned} \quad (4.70)$$

donde  $j = r, \phi, z$ ;  $\beta$  es la constante de propagación y  $\omega$  es la frecuencia angular de la onda. Para cada valor de  $\beta$  hay una distribución específica del campo descrita por las ecuaciones en (4.70) las cuales permanecen sin cambios al propagarse a lo largo de la guía. Estas distribuciones son llamados modos de las guías de ondas. Es importante enfatizar que sólo las componentes transversales magnéticas  $E_r, E_z$  y  $H_{\phi}$  del campo óptico se acoplan a la dinámica de reorientación, mientras que los modos TE no lo hacen, como lo mostraremos más adelante. Los modos TM tienen sólo una componente transversal magnética y está definida por las condiciones<sup>[13]</sup>

$$\begin{aligned} a) H_{\phi}(x = 0, k_0) &= 0 \\ b) H_{\phi}(x = 1, k_0) &= H_{\phi}^m \\ c) E_z(x = 1, k_0) &= E_z^m(x = 1, k_0) \end{aligned} \quad (4.71)$$

donde  $H_{\phi}^m(x, k_0)$  y  $E_z^m(x, k_0)$  son los campos magnético y eléctrico en el medio que rodea al cilindro, cuyas expresiones explícitas están dadas por<sup>[8,10]</sup>

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\epsilon_{\parallel}} \frac{dE_{\phi}}{dx} \right) + E_{\phi} = 0$$

$$H_z = -\frac{1}{\epsilon_{\parallel} k_0 R} \left( \frac{dE_{\phi}}{dx} + E_{\phi} \right) \quad (4.77)$$

$$H_r = \frac{p E_{\phi}}{\epsilon_{\parallel}} \quad (4.78)$$

donde  $k_0 = \omega/c$  y  $p = \beta/k_0$ . Nótese que las ecuaciones (4.76), (4.77) y (4.78) no

$$H_{\phi}^m(x, k_0) = AK_1(xk_0R\sqrt{p^2 - \epsilon_m}) = 0 \quad (4.72)$$

$$E_z^m(x, k_0) = -Ak_0R\sqrt{p^2 - \epsilon_m}K_0(xk_0R\sqrt{p^2 - \epsilon_m})$$

aquí,  $K_0$  y  $K_1$  son las funciones Bessel cilíndrica modificadas de orden  $n = 0, 1$ <sup>[22]</sup>,  $A$  es una constante indeterminada y hemos introducido la variable adimensional  $x = \frac{r}{R}$ . Al sustituir las expresiones de los campos expresados en (4.70) en las ecuaciones (4.65) obtenemos el sistema de ecuaciones acopladas para los modos TM ( $H_{\phi}$ ,  $E_r$  y  $E_z$ )

$$\epsilon_{rr} \frac{d^2 H_{\phi}}{dx^2} + \left( \frac{\epsilon_{rr}}{x} + \frac{d\epsilon_{rr}}{dx} - 2ipk_0R\epsilon_{rz} \right) \frac{dH_{\phi}}{dx} \quad (4.73)$$

$$+ \left[ (k_0R)^2(\epsilon_{\perp}\epsilon_{\parallel} - p^2\epsilon_{zz}) - \frac{\epsilon_{rr}}{x^2} - \frac{ipk_0R}{x} \frac{d(x\epsilon_{rz})}{dx} \right] H_{\phi} = 0$$

$$E_r = \frac{1}{\epsilon_{\perp}\epsilon_{\parallel}} \left[ p\epsilon_{zz}H_{\phi} + i \frac{\epsilon_{rz}}{k_0Rx} \frac{d(xH_{\phi})}{dx} \right] \quad (4.74)$$

$$E_z = -\frac{1}{\epsilon_{\perp}\epsilon_{\parallel}} \left[ p\epsilon_{rz}H_{\phi} + i \frac{\epsilon_{rr}}{k_0Rx} \frac{d(xH_{\phi})}{dx} \right] \quad (4.75)$$

y para los modos TE ( $E_{\phi}$ ,  $H_r$  y  $H_z$ ) obtenemos el conjunto

$$\frac{d^2 E_{\phi}}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dE_{\phi}}{dx} + \left[ (k_0R)^2(\epsilon_{\parallel} - p^2) - \frac{1}{x^2} \right] E_{\phi} = 0 \quad (4.76)$$

$$H_z = -\frac{1}{\epsilon_{\parallel}k_0R} \left( \frac{dE_{\phi}}{dx} + E_{\phi} \right) \quad (4.77)$$

$$H_r = \frac{pE_{\phi}}{\epsilon_{\parallel}} \quad (4.78)$$

donde  $k_0 = \omega/c$  y  $p = \beta/k_0$ . Nótese que las ecuaciones (4.76), (4.77) y (4.78) no dependen de  $\theta$  y por lo tanto no se acoplan con la reorientación, tal y como se había mencionado, esto significa que el cristal líquido es transparente a los modos TE.

$$\epsilon_m \sqrt{p^2 - \epsilon_m} K_1(k_0R\sqrt{p^2 - \epsilon_m}) \quad (4.02)$$

$$F_{\phi}(0) = 0$$

Las ecuaciones que gobiernan la propagación de ondas electromagnéticas son las derivadas de las ecuaciones de Maxwell sin fuentes y en medios cuya conductividad es cero. Así entonces, suponiendo campos monocromáticos como los de la ecuación (4.70) propagándose a lo largo del cilindro, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para  $H_\phi$ ,  $E_r$  y  $E_z$ . Sin embargo, hemos de resolver un sistema de ecuaciones más simple para valores reales de las amplitudes de ambos campos, eléctrico y magnético, los cuales podemos redefinir introduciendo las variables

$$G_z = -iE_z \exp(-if) \quad (4.79)$$

$$F_\phi = H_\phi \exp(-if)$$

cuya fase real  $f$  común es

$$f = pk_0 R \int_0^r \frac{\epsilon_{rz}}{\epsilon_{rr}} dr' \quad (4.80)$$

de modo que al sustituir (4.79) y (4.80) en las ecuaciones (4.73) y (4.75) se obtiene el sistema de ecuaciones simplificado

$$\begin{aligned} \frac{dG_z}{dx} + k_0 R (\epsilon_{rr} - p^2) F_\phi &= 0 \\ G_z &= \frac{1}{k_0 R \epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp}} \frac{\epsilon_{rr}}{x} \frac{d(xF_\phi)}{dx} \end{aligned} \quad (4.81)$$

Las condiciones en la frontera requieren la continuidad tangencial de ambos campos en el borde del cilindro, así pues sustituyendo las mismas definiciones para  $G_z$  y  $F_\phi$  en las Ecs. (4.71b) y (4.71c) resulta

$$\begin{aligned} G_z(1) + \frac{F_\phi(1)}{\epsilon_m} \sqrt{p^2 - \epsilon_c} \frac{K_0(k_0 R \sqrt{p^2 - \epsilon_m})}{K_1(k_0 R \sqrt{p^2 - \epsilon_m})} &= 0 \\ F_\phi(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.82)$$

Las ecuaciones expresadas en las ecuaciones (4.81) y (4.82) definen un problema de valores en la frontera debido a que (4.81) ha de ser evaluada en diferentes puntos. Este problema tiene las siguientes características: primeramente, contiene coeficientes que son funciones reales y segundo, están escritos en términos de operadores diferenciales autoadjuntos de primer orden. Estas propiedades, junto con la teoría de Sturm Liouville, implican que sus eigenfunciones son reales. Resolvemos este problema de valores en la frontera utilizando el método de disparo en el cual se emplea el algoritmo de Runge – Kutta para resolver simultáneamente las Ecs. (4.81) usando como condiciones iniciales la segunda de las Ecs. (4.82) y un valor arbitrario para  $G_z(0)$ ; así encontramos el valor de  $p$  para el cual la primera de las Ecs. (4.82) que relaciona  $G_z(1)$  y  $F_\phi(1)$  se satisface.

En las Figuras 4.5, 4.6 y 4.7 mostramos la fase y las amplitudes de los campos eléctrico y magnético para el modo TM de orden cero, respectivamente, en una guía de ondas cilíndrica multimodal con núcleo de cristal líquido nemático 5CB, donde hemos considerado el valor  $k_0R = 13.6$ , para valores positivos y negativos de  $\Lambda$  (Ec. (3.29)), así como diferentes valores de  $\sigma$ .

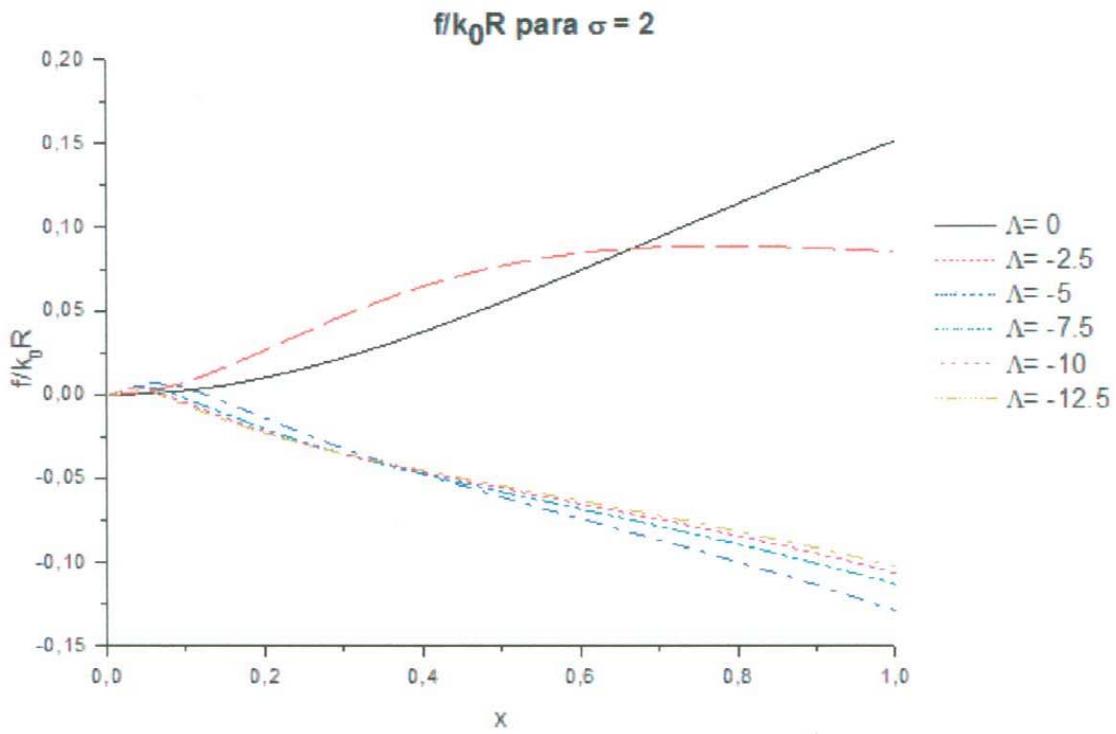
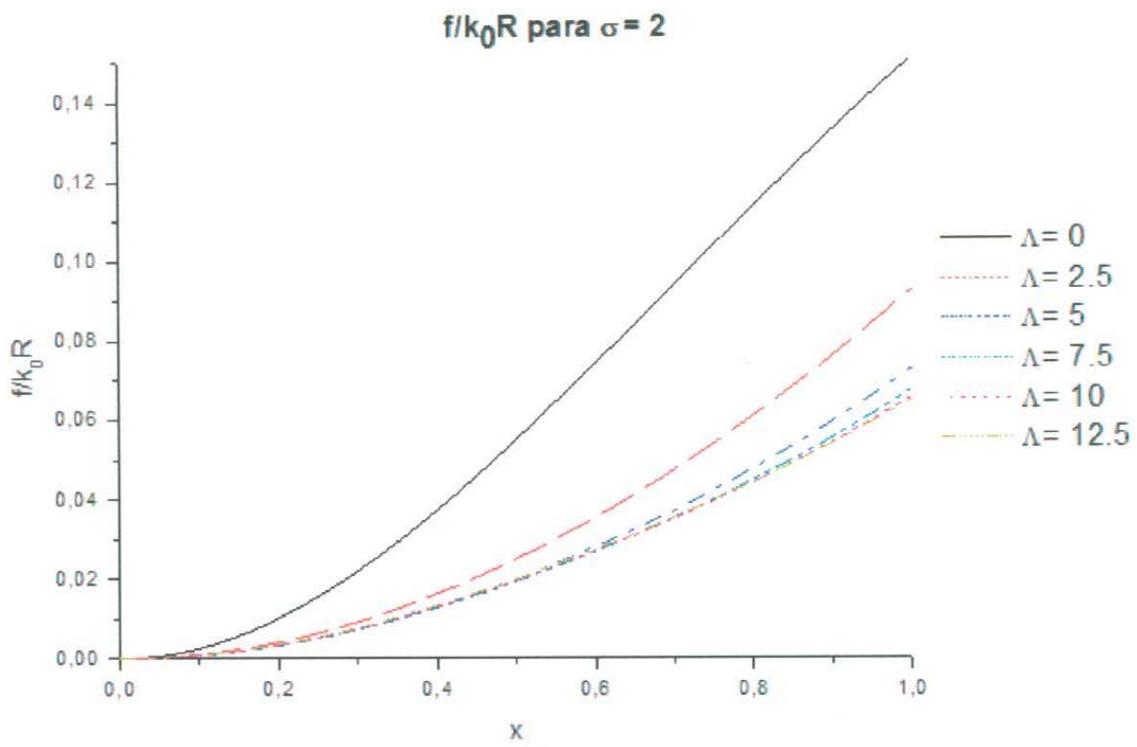


Fig. 4.5: Diagramas que representan la fase como función de  $x = r/R$  para el cristal líquido 5CB con  $\sigma = 2$  y valores de  $\Lambda$  positivos y negativos. El parámetro  $\sigma$  mide la intensidad de anclaje a la pared interna mientras que  $\Lambda$  mide la intensidad del flujo a través del gradiente de presión.

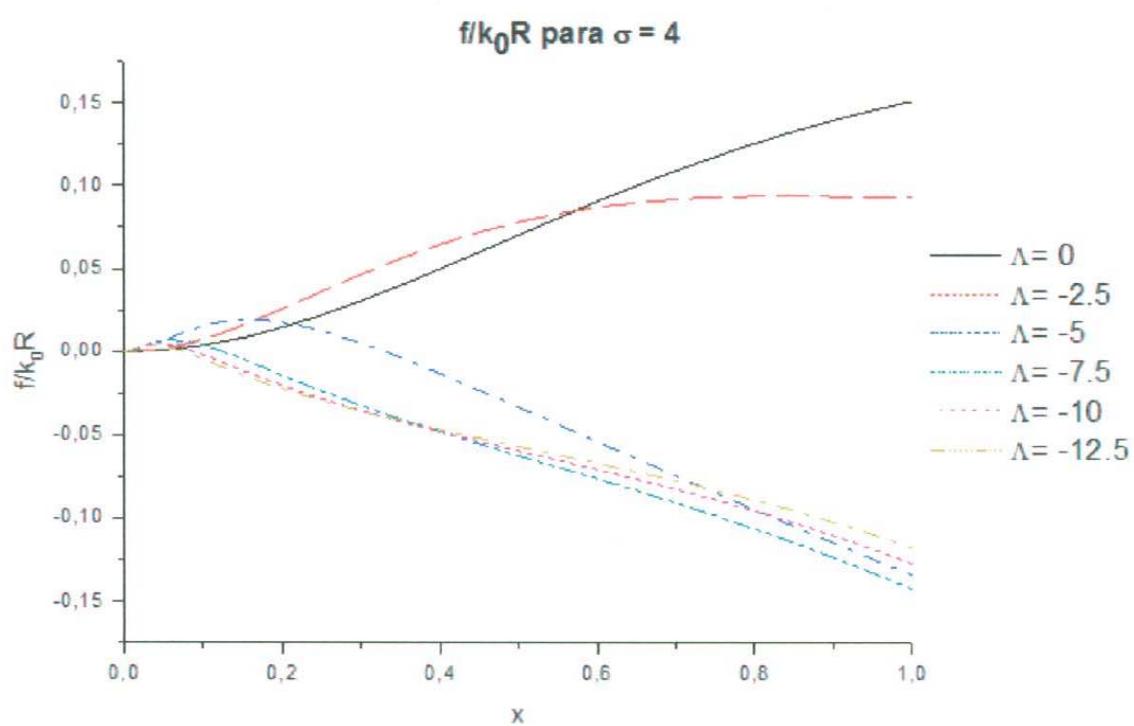
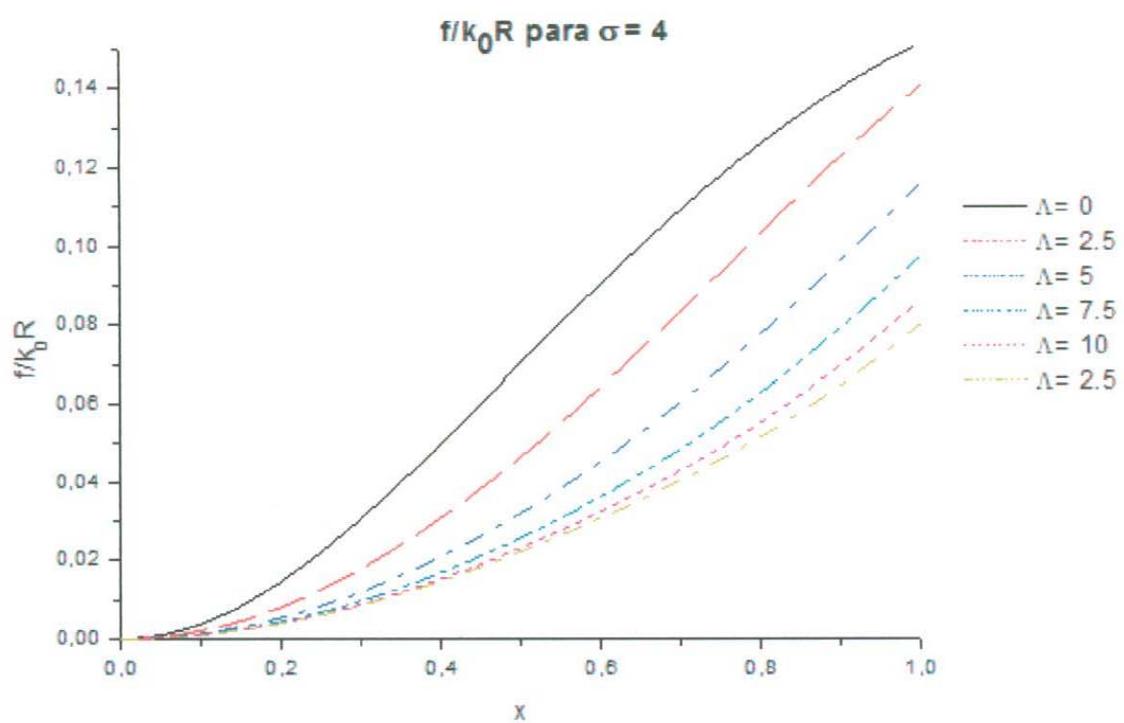


Fig. 4.5: Diagramas que representan la fase como función de  $x - r/R$  para el cristal líquido 5CB con  $\sigma = 4$  y valores de  $\Lambda$  positivos y negativos. El parámetro  $\sigma$  mide la intensidad de anclaje a la pared interna mientras que  $\Lambda$  mide la intensidad del flujo a través del gradiente de presión.

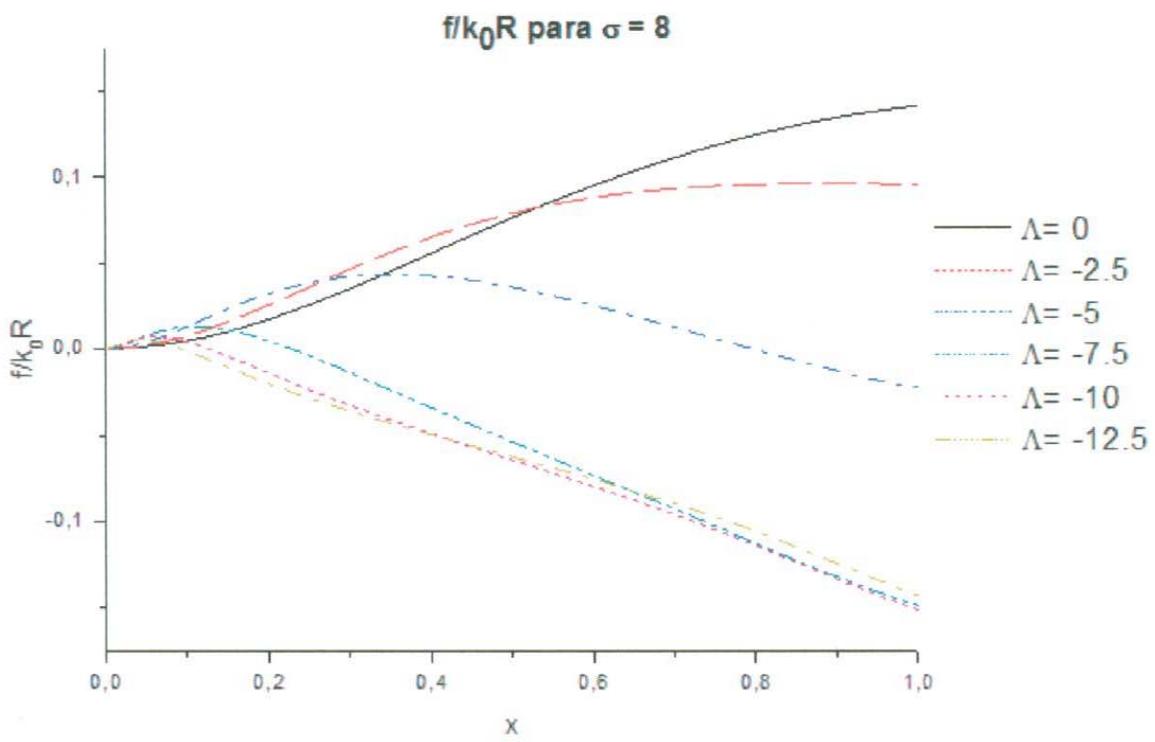
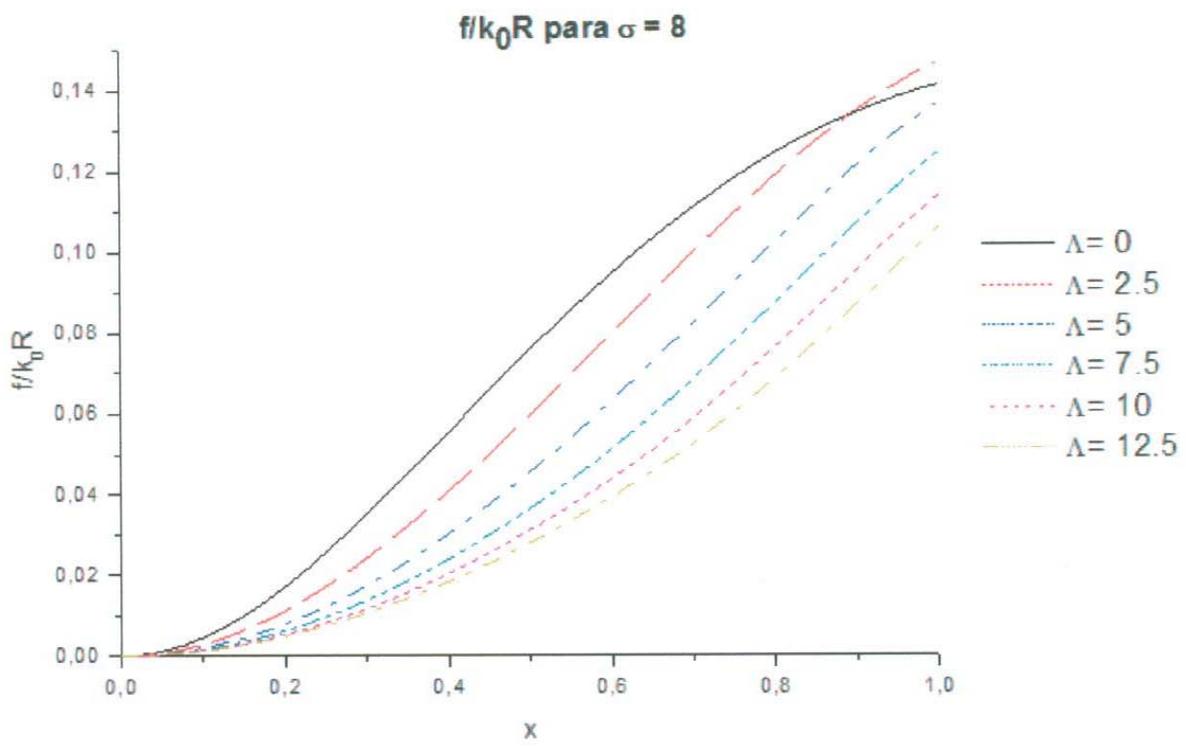


Fig. 4.5: Diagramas que representan la fase como función de  $x - r/R$  para el cristal líquido 5CB con  $\sigma = 8$  y valores de  $\Lambda$  positivos y negativos. El parámetro  $\sigma$  mide la intensidad de anclaje a la pared interna mientras que  $\Lambda$  mide la intensidad del flujo a través del gradiente de presión.

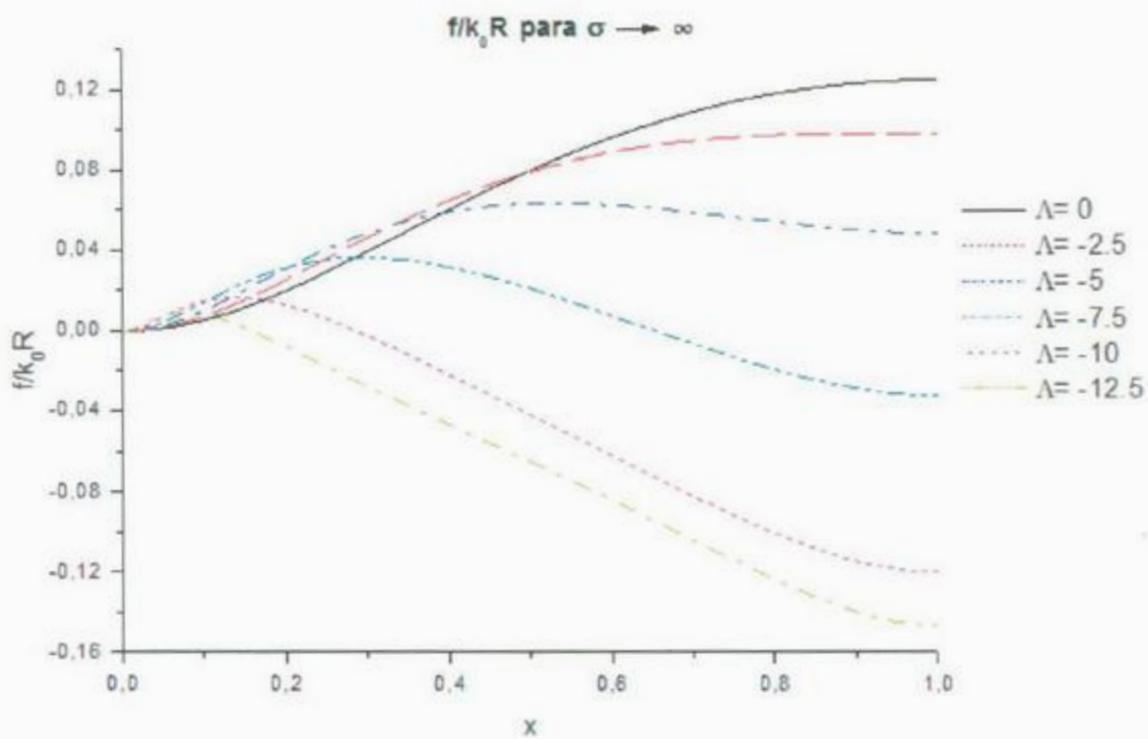
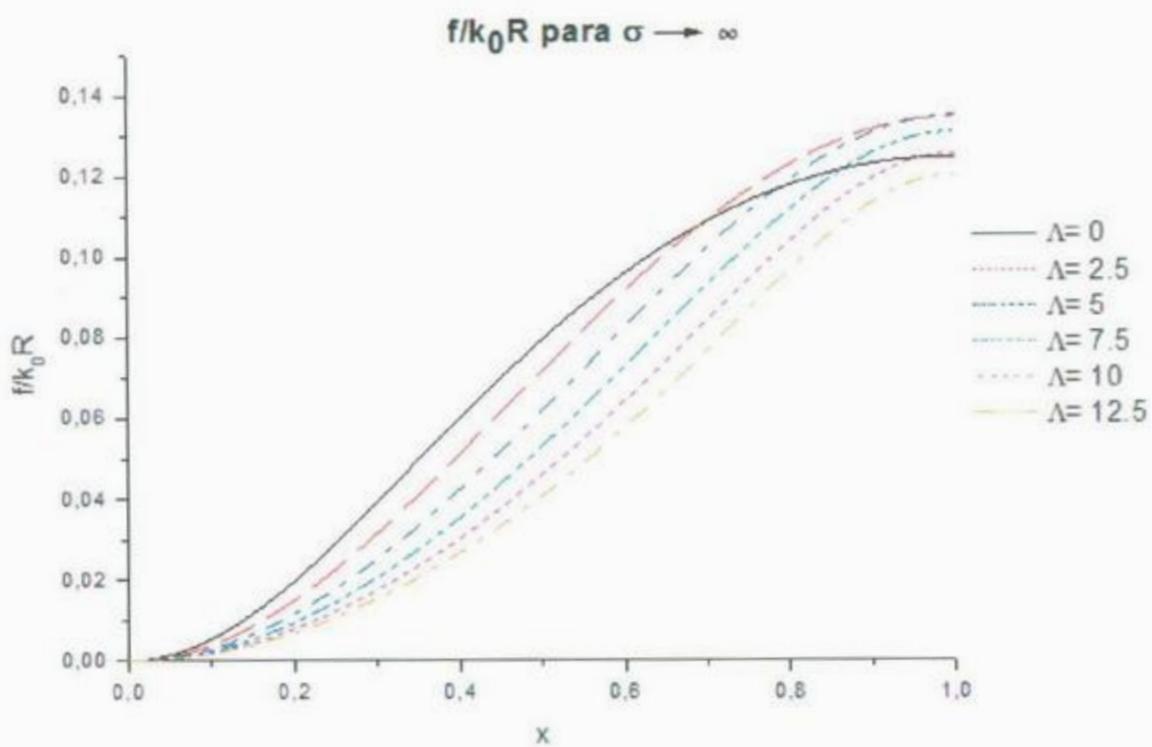


Fig. 4.5: Diagramas que representan la fase como función de  $x = r/R$  para el cristal líquido 5CB con  $\sigma \rightarrow \infty$  y valores de  $\Lambda$  positivos y negativos. El parámetro  $\sigma$  mide la intensidad de anclaje a la pared interna mientras que  $\Lambda$  mide la intensidad del flujo a través del gradiente de presión.

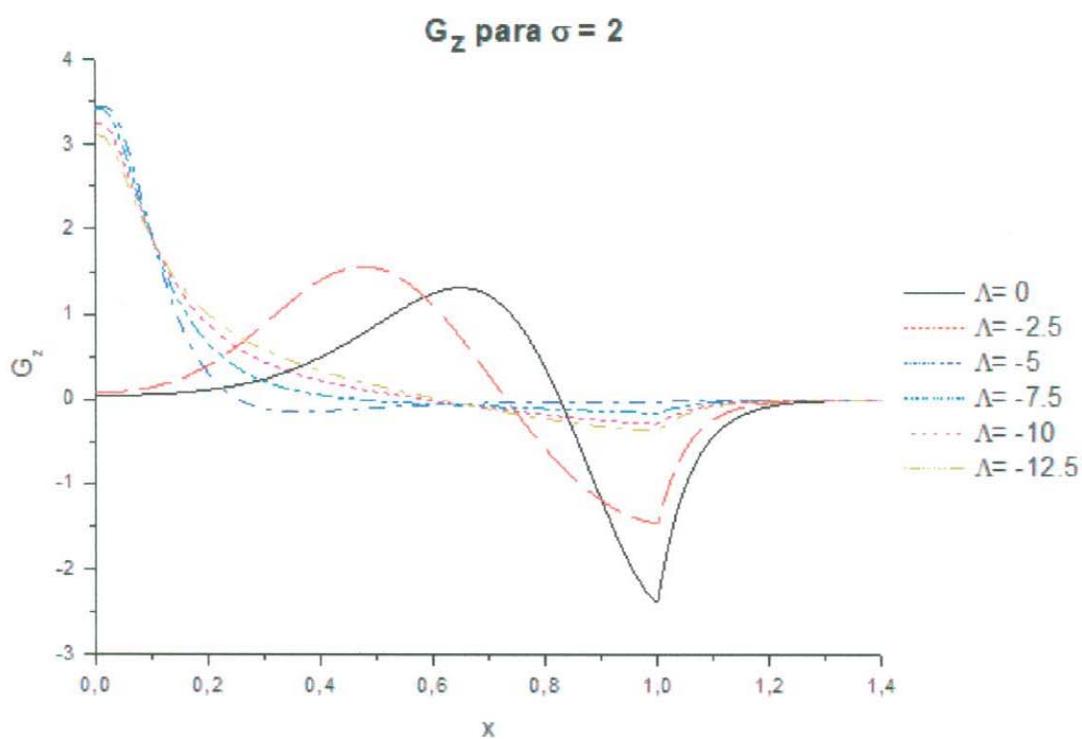
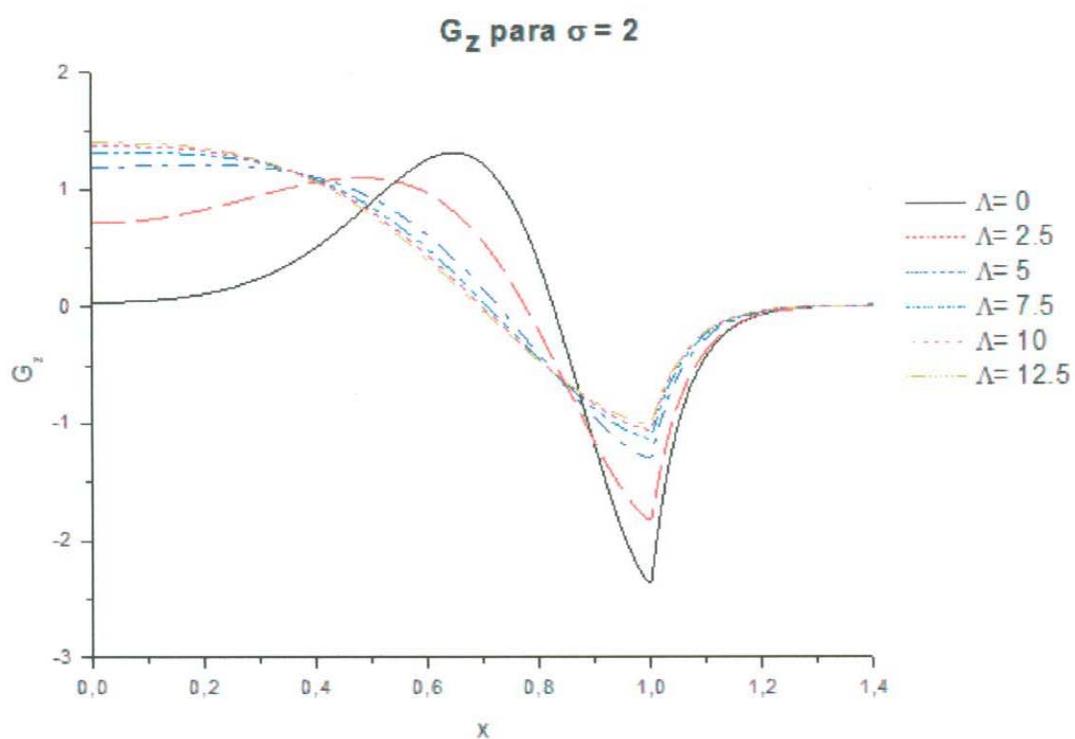


Figura 4.6: Diagrama de amplitudes del campo eléctrico  $G_z$  para los modos TM de orden cero como función de  $x = r/R$  para el cristal líquido 5CB para  $\sigma = 2$  y valores positivos y negativos de  $\Lambda$ . El parámetro  $\sigma$  mide la intensidad de anclaje a la pared interna mientras que  $\Lambda$  mide la intensidad del flujo a través del gradiente de presión.

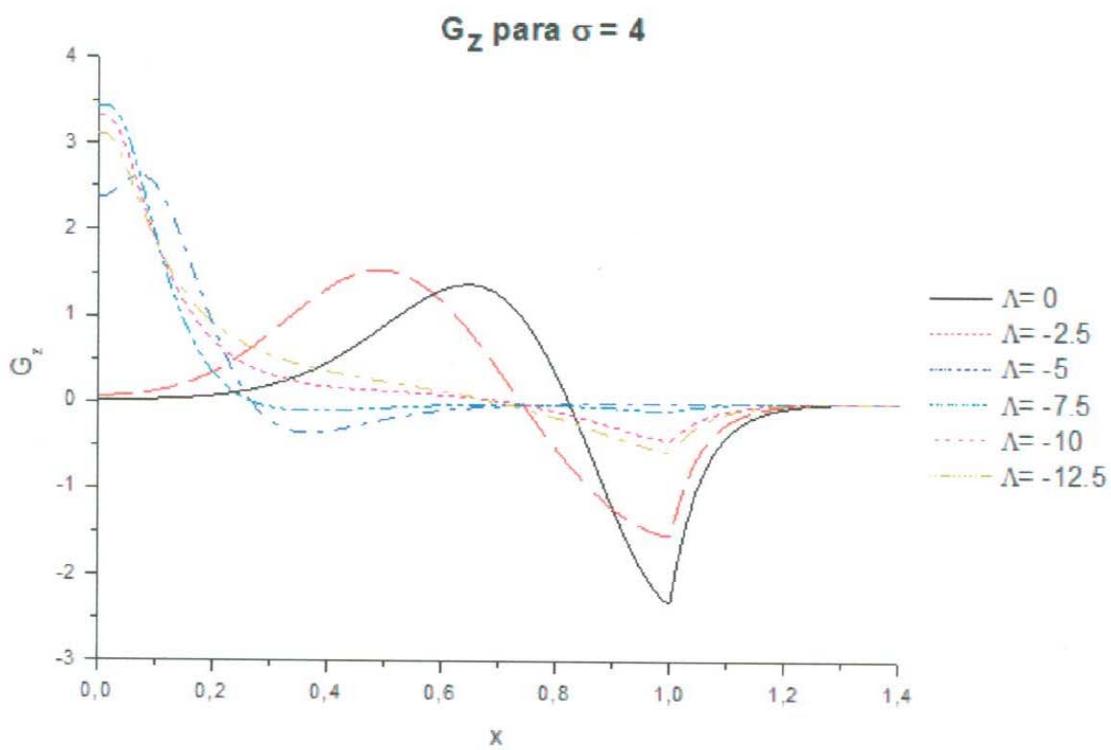
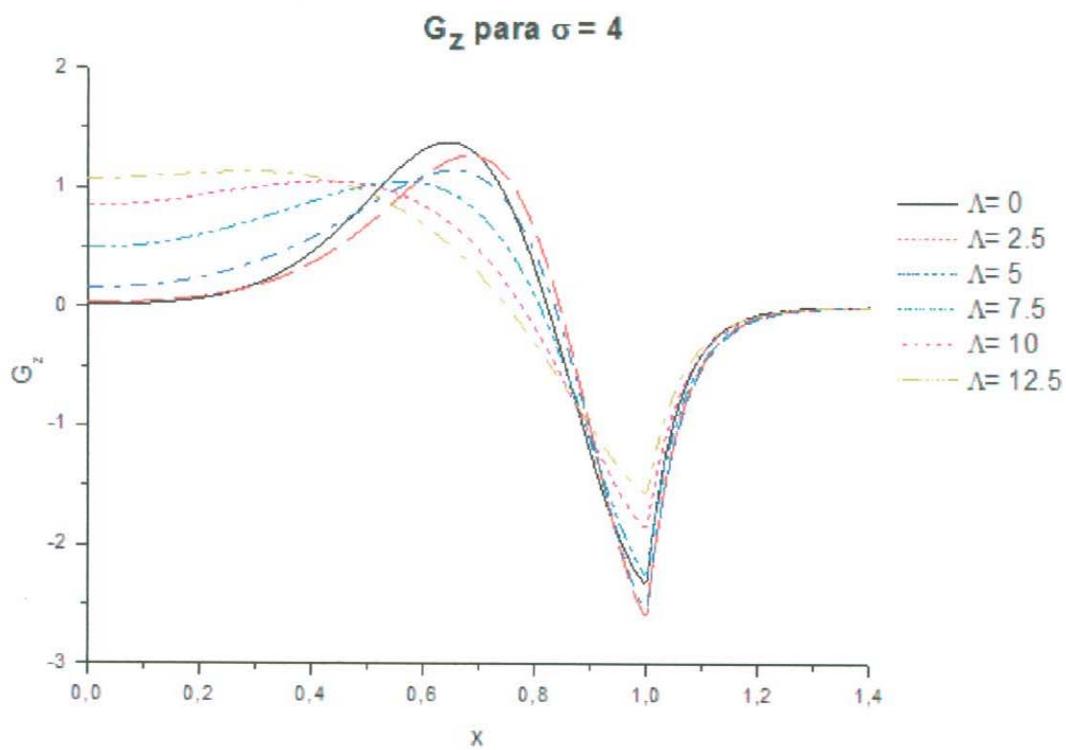


Figura 4.6 cont.: Diagrama de amplitudes del campo eléctrico  $G_z$  para los modos TM de orden cero como función de  $x = r/R$  para el cristal líquido 5CB para  $\sigma = 4$  y valores positivos y negativos de  $\Lambda$ . El parámetro  $\sigma$  mide la intensidad de anclaje a la pared interna mientras que  $\Lambda$  mide la intensidad del flujo a través del gradiente de presión.

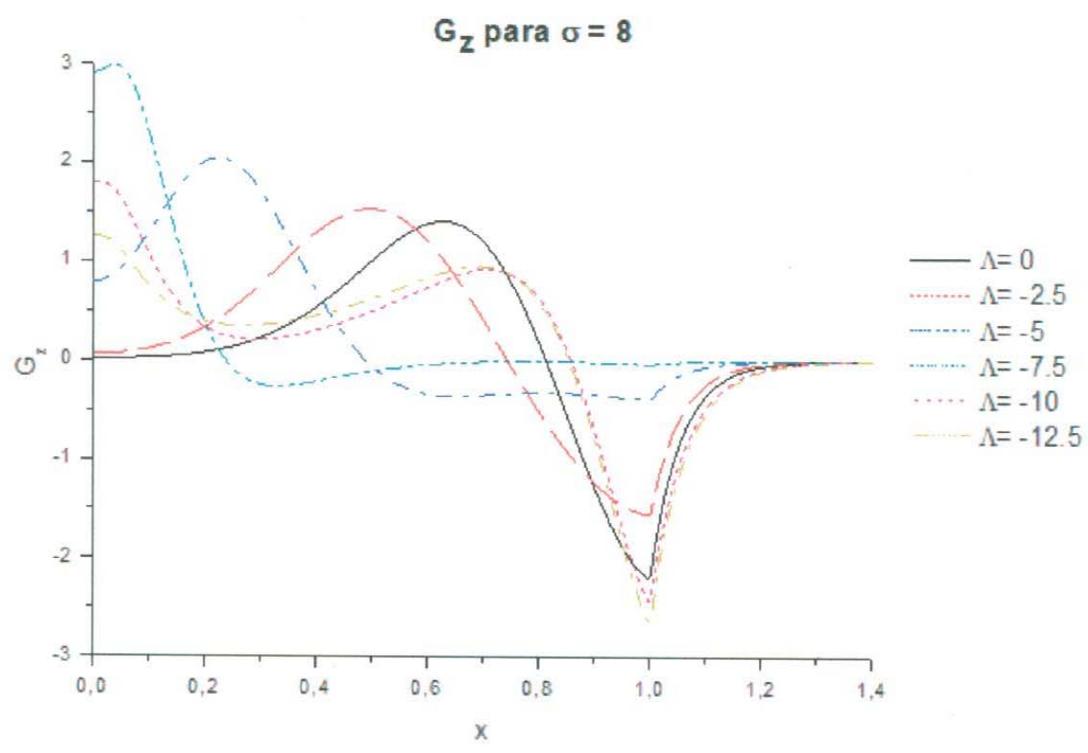
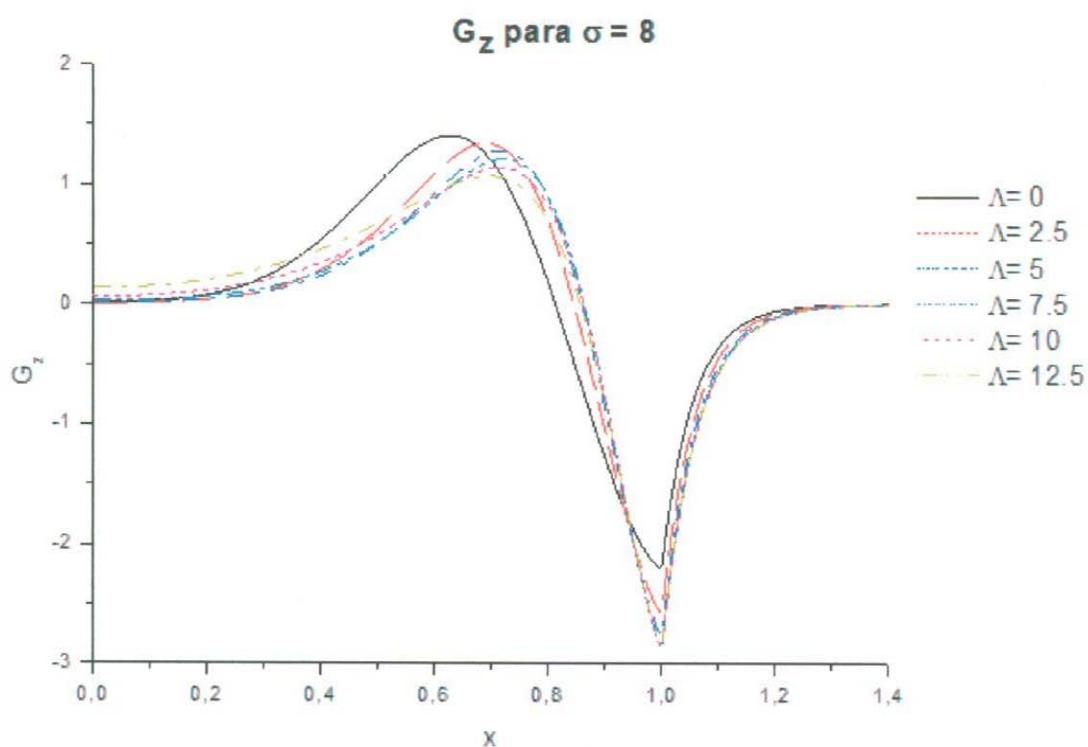


Figura 4.6 cont.: Diagrama de amplitudes del campo eléctrico  $G_z$  para los modos TM de orden cero como función de  $x = r/R$  para el cristal líquido 5CB para  $\sigma = 8$  y valores positivos y negativos de  $\Lambda$ . El parámetro  $\sigma$  mide la intensidad de anclaje a la pared interna mientras que  $\Lambda$  mide la intensidad del flujo a través del gradiente de presión.

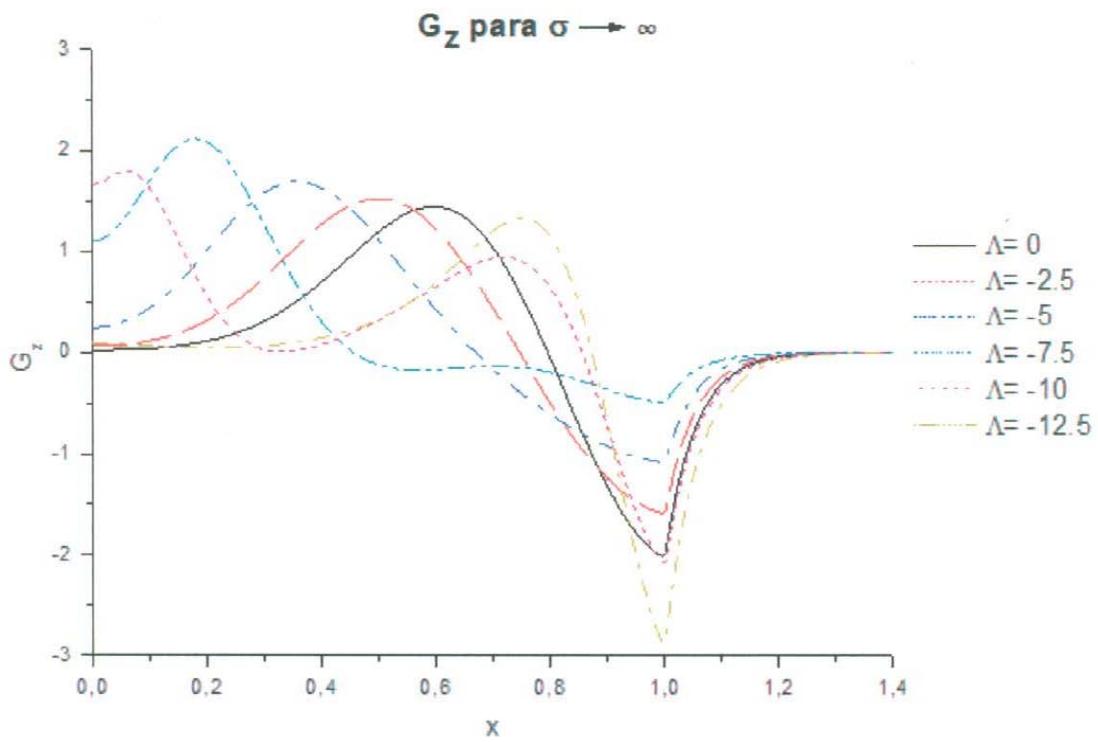
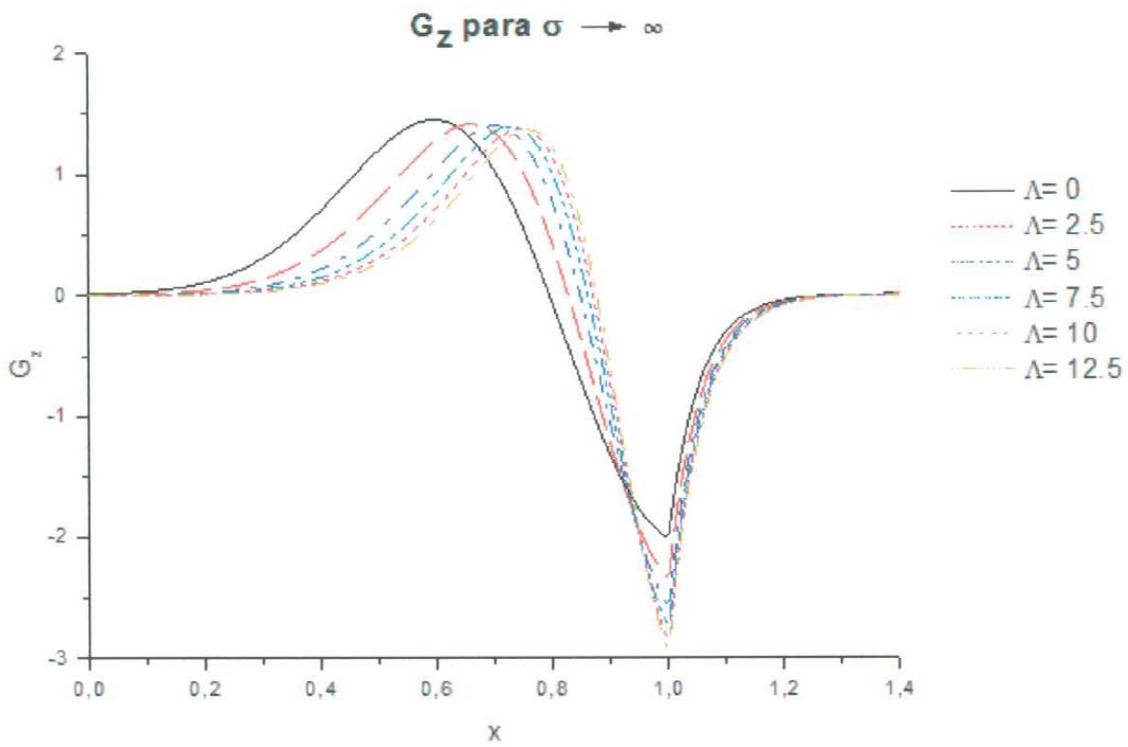


Figura 4.6 cont.: Diagrama de amplitudes del campo eléctrico  $G_z$  para los modos TM de orden cero como función de  $x - r/R$  para el cristal líquido 5CB para  $\sigma \rightarrow \infty$  y valores positivos y negativos de  $\Lambda$ . El parámetro  $\sigma$  mide la intensidad de anclaje a la pared interna mientras que  $\Lambda$  mide la intensidad del flujo a través del gradiente de presión.

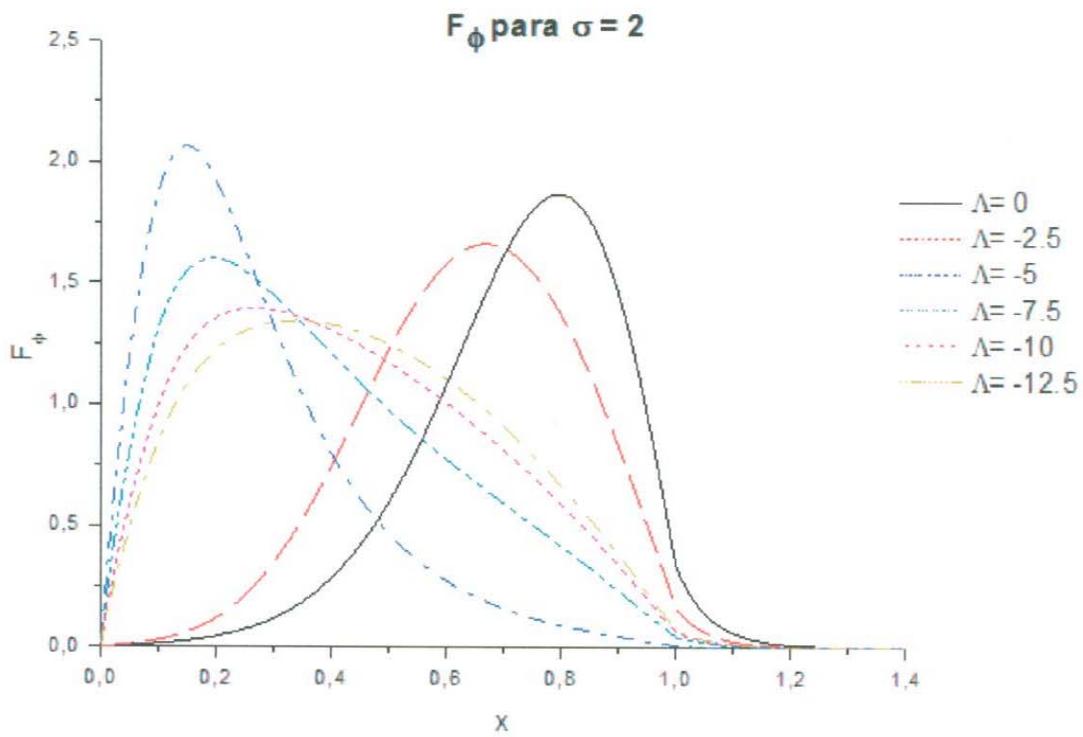
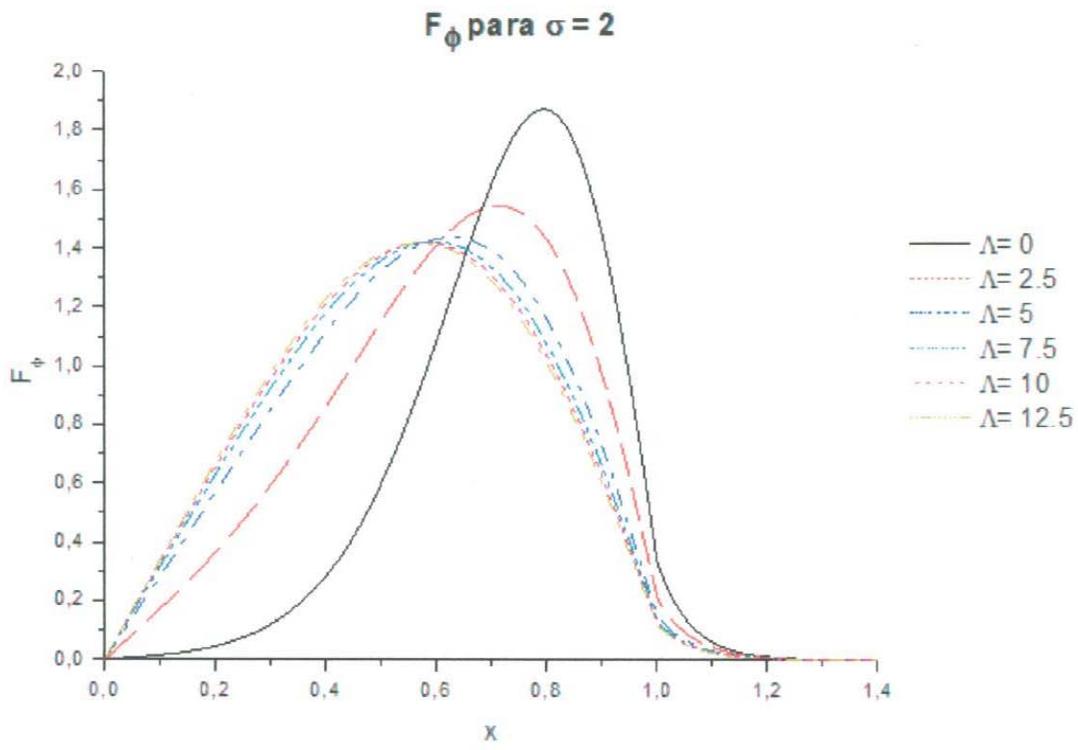


Figura 4.8: Diagrama de de amplitudes del campo magnético  $F_\phi$  de los modos TM de orden cero como función de  $x = r/R$  para el cristal líquido 5CB para  $\sigma = 2$  y valores positivos y negativos de  $\Lambda$ . El parámetro  $\sigma$  mide la intensidad de anclaje a la pared interna mientras que  $\Lambda$  mide la intensidad del flujo a través del gradiente de presión.

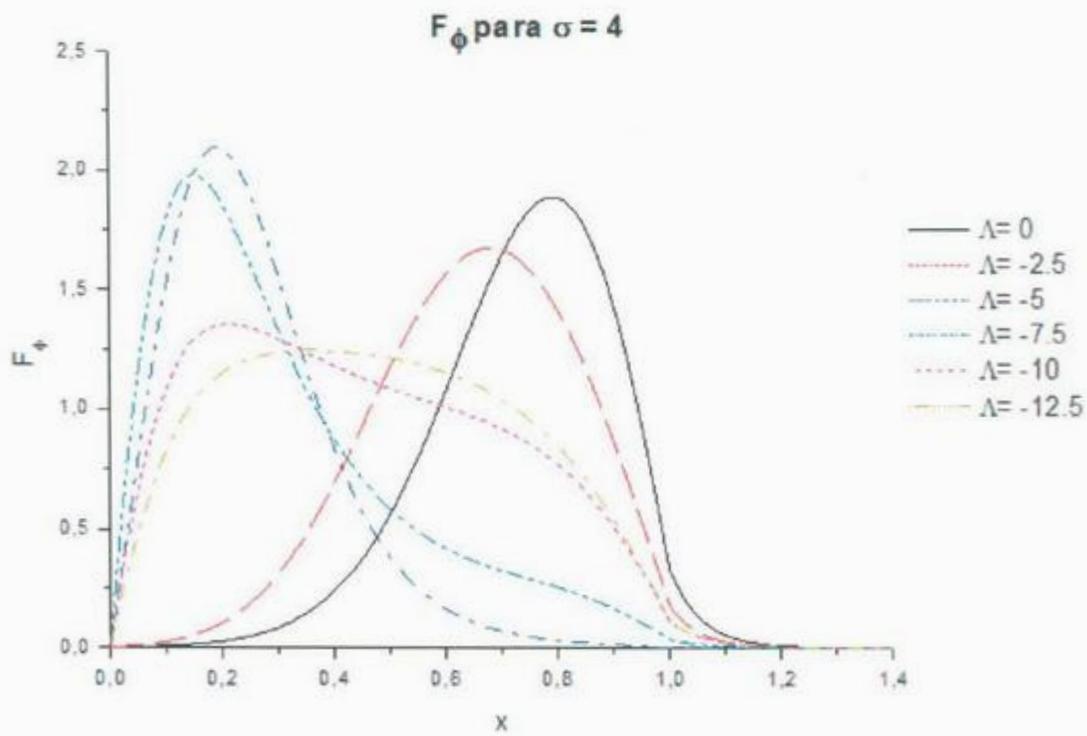
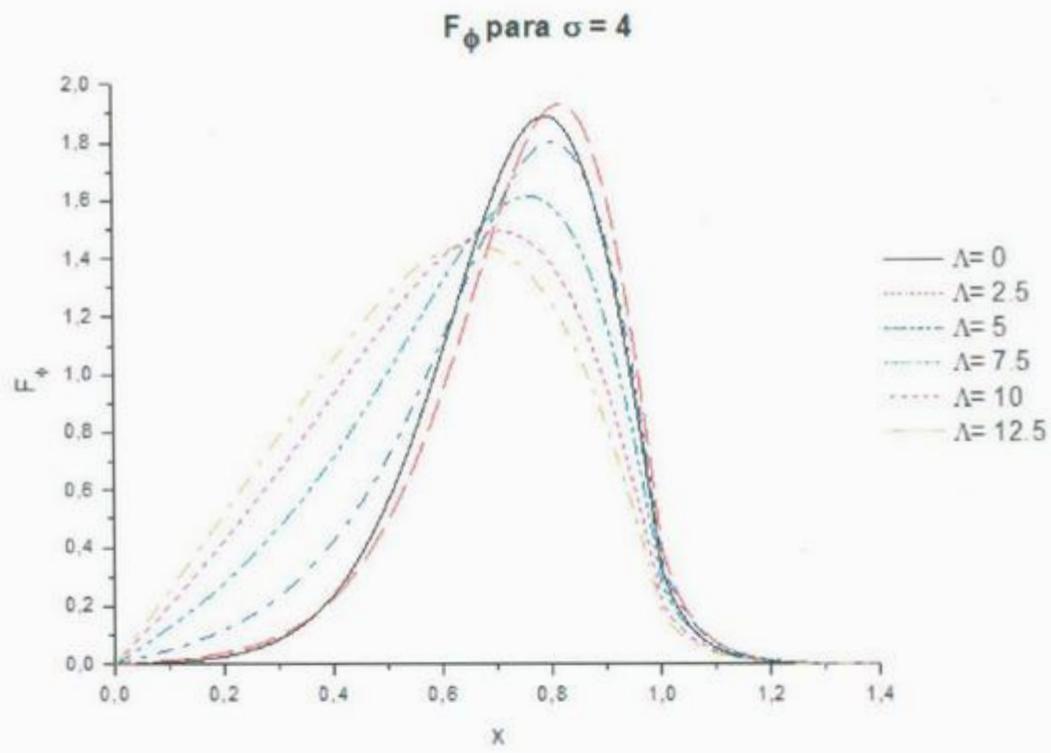


Figura 4.8: Diagrama de de amplitudes del campo magnético  $F_\phi$  de los modos TM de orden cero como función de  $x = r/R$  para el cristal líquido 5CB para  $\sigma = 4$  y valores positivos y negativos de  $\Lambda$ . El parámetro  $\sigma$  mide la intensidad de anclaje a la pared interna mientras que  $\Lambda$  mide la intensidad del flujo a través del gradiente de presión.

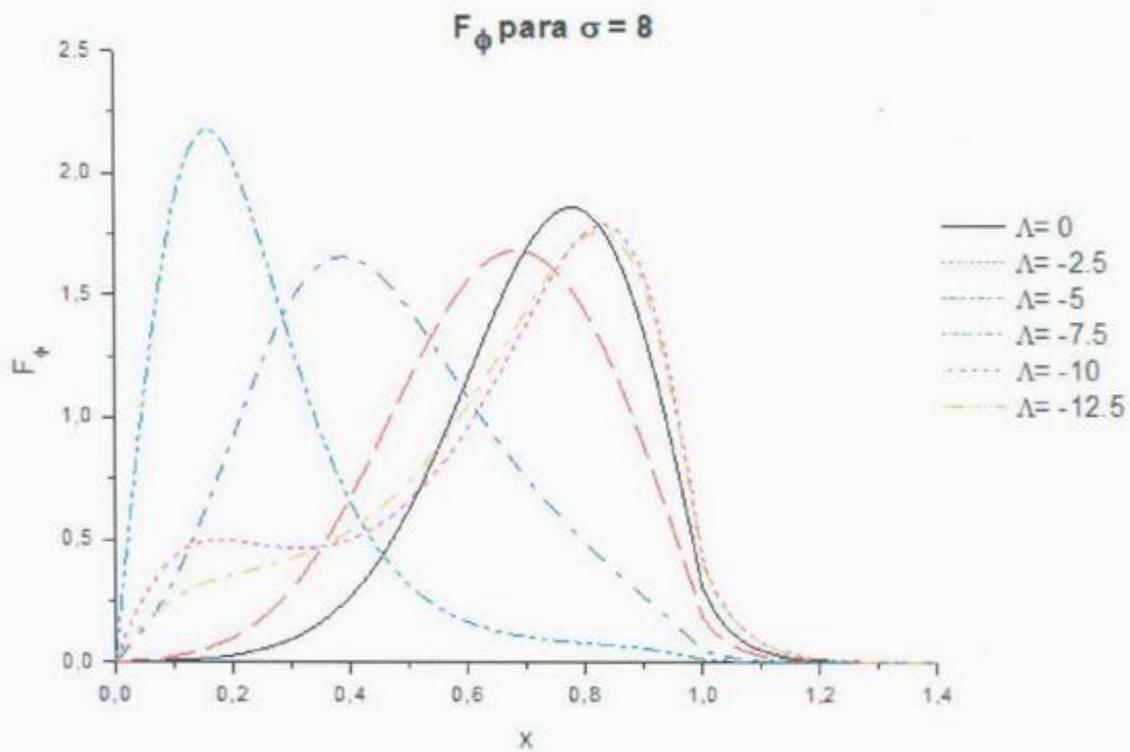
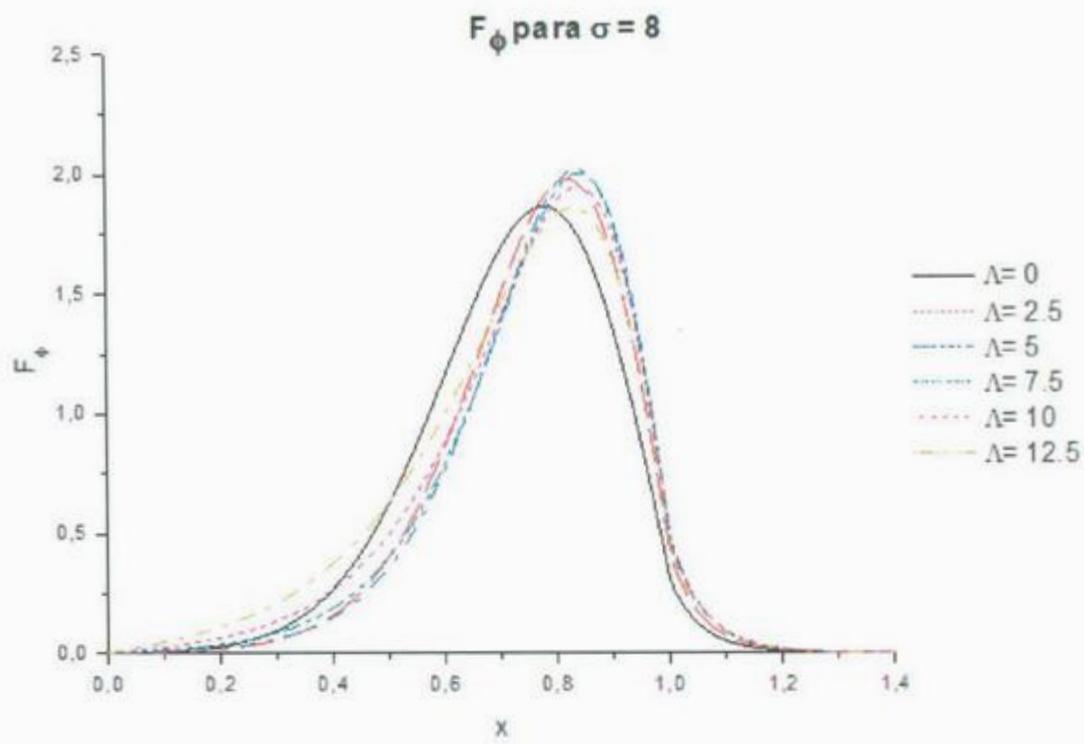


Figura 4.8 cont.: Diagrama de de amplitudes del campo magnético  $F_\phi$  de los modos TM de orden cero como función de  $x = r/R$  para el cristal líquido 5CB para  $\sigma = 8$  y valores positivos y negativos de  $\Lambda$ . El parámetro  $\sigma$  mide la intensidad de anclaje a la pared interna mientras que  $\Lambda$  mide la intensidad del flujo a través del gradiente de presión.

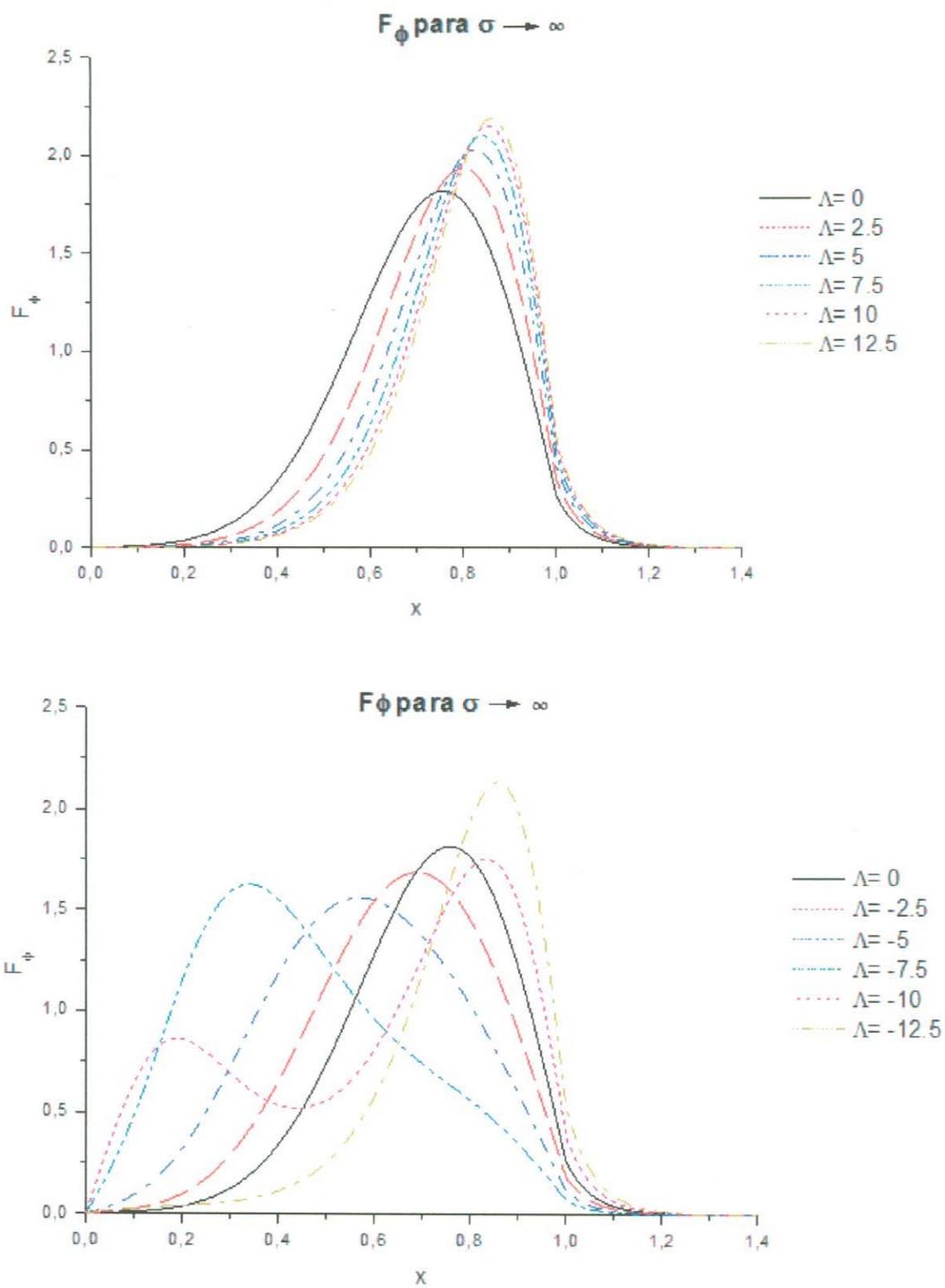


Figura 4.8 cont.: Diagrama de de amplitudes del campo magnético  $F_\phi$  de los modos TM de orden cero como función de  $x = r/R$  para el cristal liquido 5CB para  $\sigma \rightarrow \infty$  y valores positivos y negativos de  $\Lambda$ . El parámetro  $\sigma$  mide la intensidad de anclaje a la pared interna mientras que  $\Lambda$  mide la intensidad del flujo a través del gradiente de presión.

Se han calculado los modos TM para el cristal líquido nemático 5CB sujeto a un gradiente de presión externo moviéndose en dos direcciones: hacia delante y hacia atrás. El valor finito tomado para  $k_0R = 13.6$ , permite tener una guía multimodal de la cual solo se han considerado en este trabajo el caso de modo más bajo que es el de orden cero.

De los resultados puede verse que la configuración distorsionada del nemático afecta dramáticamente la distribución de las amplitudes de los campos ópticos en la guía. Algunas observaciones para las amplitudes de los campos eléctrico y magnético respectivamente son las siguientes.

Para  $\sigma = 2, 4$  y  $\Lambda$  positiva, en el centro del cilindro hay un máximo de tal forma que en esa región se observaría un punto intenso a lo largo del eje, excepto en algunos caso como para  $\Lambda = 0, 2.5, 5$  y  $\sigma = 4$  en los que en el centro del cilindro está totalmente oscuro y observándose anillos en regiones cercanas a  $0.5 < x < 0.7$ . En los bordes hay un mínimo de tal forma que en esa región se observaría un anillo intenso para todo valor de  $\sigma$  y  $\Lambda$ .

Para  $\sigma = 8$  y  $\sigma \rightarrow \infty$  y  $\Lambda$  positiva puede observarse que hay un máximo alrededor de  $0.5 < x < 0.8$  y un mínimo en el borde del cilindro. Los máximos están tan cerca que nos induce a pensar que no importa que tan grande en magnitud sea el gradiente de presión pues para estos casos influye más el anclaje que el flujo puesto que las amplitudes son las mismas solo hay desplazamiento en  $x$ .

Para  $\sigma = 2, 4$  y  $\Lambda$  negativa de igual manera en el centro del cilindro hay máximos que se observarían como puntos intensos a lo largo del cilindro pero inclusive para esos mismos valores se observa que en las demás regiones del cilindro para valores entre  $-7.5 < \Lambda < -5$  la amplitud del campo para  $0.2 < x < 1$  es casi nula, mientras que

para  $-2.5 < \Lambda < 0$  en el centro es nula pero presenta un máximo alrededor de  $0.5 < x < 0.7$  y mínimo alrededor de  $x = 1$  que se observarían como anillos brillantes en ambas regiones.

Para  $\sigma = 8$  y  $\Lambda$  negativa se ve que para  $-12.5 < \Lambda < -5$  hay máximos alrededor de  $0 < x < 0.1$  lo que indica que se observaría un punto de intensidad máxima en esa región, para  $\Lambda = -10, -12.5$  se observa que hay otro máximo alrededor de  $x = 0.7$  y un mínimo en  $x = 1$  lo que se deduce entonces que en la guía habrá tres regiones distintas donde se propaga la onda, un punto en el centro, un anillo en  $x = 0.7$  y un anillo mas en  $x = 1$ . Para  $\Lambda = -7.5$  se observa que para regiones  $x > 0.4$  no hay transmisión de la onda por la guía salvo en  $0 < x < 0.1$  donde se observara un anillo pequeño en esa región. Para  $\Lambda = -5$  para regiones comprendidas entre  $0.5 < x < 1$  la onda se trasmite con intensidad constante.

Para  $\sigma \rightarrow \infty$  con  $\Lambda$  negativa, se puede ver que los máximos para valores distintos de  $\Lambda$  están en diferentes regiones a lo largo de  $x$  inclusive los máximos observados para  $\Lambda = -10, -12.5$  son más pronunciados que para  $\sigma$  más pequeña, esto nos indica que el campo puede transmitirse por regiones distintas a la vez habiendo regiones anulares entre máximos.

Para  $\sigma = 2, 4$  y valores de  $\Lambda$  positivas, indican que en el centro del cilindro no hay transmisión del campo sólo en regiones comprendidas entre  $0.5 < x < 0.8$  donde se observarían anillos, mientras que en los bordes de nuevo no se observaría nada.

Para  $\sigma = 8$  y  $\sigma \rightarrow \infty$  y valores de  $\Lambda$  positiva la transmisión de la onda se da de igual manera que para  $\sigma$  pequeña con la diferencia que para estos casos la transmisión se da casi en la misma región solo desplazada cierta cantidad una de la otra con la

misma intensidad lo que nos indica que para  $\sigma$  grande no importa que tan grande o pequeño es el flujo pues la condición en la frontera toma mayor relevancia.

Para  $\sigma = 2, 4$  y valores de  $\Lambda$  negativa se observa que para ciertos valores de  $\Lambda$  tales como  $-10$  y  $-12.5$  la onda se transmite por toda la guía sin un máximo especificado, mientras que para los demás valores de  $\Lambda$  sigue habiendo máximos locales representados en la guía como anillos de intensidad máxima.

Para  $\sigma = 8$  y  $\sigma \rightarrow \infty$  y valores de  $\Lambda$  negativa puede verse que para ciertos valores de  $\Lambda$  puede haber transmisión del campo en dos regiones distintas de la guía, regiones que al cambiar el flujo o la intensidad del anclaje, varía tanto el tamaño del máximo como la posición donde aparece.

Debido a que la orientación de las moléculas se da a la formación de dipolos, la interacción de éstos con los campos es la principal razón de la observación de estos resultados. El ángulo que va formando la molécula debido al flujo desde el eje hasta la pared influye directamente en la intensidad de los campos.

Es posible combinar dos señales ópticas, una de ellas correspondiendo a un modo TM de orden más alto, tal que se propaguen independientemente en cada región anular.

## Conclusiones

Partimos de un sistema estático para un cilindro relleno de cristal líquido en el que el sistema sólo presentaba configuración de escapada radial e introduciendo los términos de anclajes fuerte y débil. Se obtuvieron las configuraciones de los ángulos de anclaje para diferentes valores del parámetro  $\sigma$  que mide la intensidad de interacción con la pared observándose que entre mayor es éste parámetro el cristal líquido tiende a una configuración homeotrópica.

Siguiendo con el mismo sistema pero considerando la aplicación de un gradiente de presión en los extremos del cilindro, se definió un parámetro real  $\Lambda$  en términos del gradiente de presión pudiendo éste ser negativo o positivo, convirtiéndose en un sistema dinámico. Se obtuvieron configuraciones para los ángulos de anclaje para diferentes valores del parámetro  $\sigma$  y  $\Lambda$  así como los perfiles de velocidad para esos mismos valores. En general se observó que para  $\sigma$  pequeña y  $\Lambda$  grandes en magnitud no hay anclamiento mientras que para  $\Lambda$  pequeñas si lo hay, y entre más grande fuese el valor de  $\sigma$  predominaba esta condición de frontera más que el gradiente aplicado. Para los perfiles de velocidad se observó que para  $\sigma$  pequeña y magnitudes de  $\Lambda$  grandes el flujo de Poiseuille no se ve tan afectado, para el caso de  $\sigma$  pequeña y magnitudes de  $\Lambda$  pequeñas los perfiles son totalmente asimétricos. Para el caso de  $\sigma$  grandes en los que aun para magnitudes de  $\Lambda$  iguales, los perfiles no son simétricos. La asimetría es debida a que por la configuración de escapada radial el flujo es más favorable en una dirección que en otra.

Después se consideró la propagación de campos ópticos. Se obtuvieron los diagramas de fase y amplitudes de campos eléctrico y magnético. La transmisión de los campos a través de la guía con núcleo de cristal líquido depende fuertemente del signo del parámetro de flujo  $\Lambda$ , para valores de  $\sigma$  pequeñas. Para valores de  $\sigma$  grande el parámetro  $\Lambda$  con valores positivos se hace irrelevante tanto para los campo eléctrico y magnético pues se observa la misma región anular solo desplazados entre sin una cierta distancia mientras que para valores de  $\Lambda$  negativos y los valores de  $\sigma$  para el campo eléctrico se observan máximos por el centro y máximos por el centro y bordes indicando regiones de transmisión máxima. Para el campo magnético sólo se observan máximos y en casos de  $\sigma$  grande se llegan a observar incluso más de un máximo donde la el campo se transmite a la vez por esas regiones.

# Apéndice

## Método de Disparo

Tomemos la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' = f(x, y, y') \quad a \leq x \leq b$$

con las condiciones

$$y(a) = \alpha \quad y(b) = \beta$$

Este tipo de problema es conocido como problema de valor en la frontera. En el caso de una ecuación de segundo orden hacen falta las condiciones  $y(a)$  y  $y'(a)$  lo cual no es el caso en este problema y en muchos otros. Hacen falta técnicas nuevas para resolver este tipo de problemas cuando las condiciones impuestas son de un valor de frontera y no del tipo de valor inicial; así, antes de enunciar cualquier esquema numérico es necesario decir bajo qué condiciones existe solución a un problema de valores en la frontera y si ésta es única.

### *Teorema:*

Supongamos que  $f(x, y, y')$  es continua en la región

$$R = \{(x, y, y') : a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty, -\infty < y' < +\infty\}$$

y que  $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y, y')$  y  $\frac{\partial f}{\partial y'} = f_{y'}(x, y, y')$  son continuas en  $R$ . Si existe una  $M$  tal que:

$$f_y(x, y, y') > 0 \quad \forall (x, y, y') \in R$$

$$|f_{y'}(x, y, y')| \leq M \quad \forall (x, y, y') \in R$$

entonces el problema con valor en la frontera

$$y'' = f(x, y, y') \quad a \leq x \leq b$$

$$y(a) = \alpha \quad y(b) = \beta$$

tiene solución única  $y(x)$  en  $a \leq x \leq b$

*Método de disparo simple:*

Veamos este método para resolver problemas no lineales de segundo orden con valor en la frontera. Sea:

$$y'' = f(x, y, y') \quad a \leq x \leq b$$

$$y(a) = \alpha \quad y(b) = \beta$$

que supondremos admite solución única. Para abordar este problema, tomamos el valor inicial  $y'(a) = s$  a fin de solucionar el problema de valor inicial relacionado. Entonces podemos integrar la ecuación para obtener una solución aproximada con la esperanza de que  $y(b) = \beta$ , si no resulta así, entonces podemos alterar el valor de  $y'(a)$  que se ha supuesto y comenzar el cálculo de nuevo. Denotemos por  $s$  el valor hipotético para  $y'(a)$  de modo que el correspondiente problema de valor inicial es

$$y'' = f(x, y, y')$$

$$y(a) = \alpha \quad y'(a) = s$$

asumiendo que dicho problema tiene solución única  $y(x; s)$  para cada  $s \in R$  definida en todo intervalo  $[a, b]$ . Si podemos encontrar una solución  $s^*$  tal que  $y(b; s^*) = \beta$  entonces  $y(x; s^*)$  es la solución de nuestro problema de valores en la frontera. Para encontrar  $s^*$ , definimos la ecuación  $E(s) = y(b; s) - \beta$  y por lo tanto se trata de encontrar la raíz de esta ecuación, podemos utilizar para ello el método de *Runge - Kutta*. Partimos de un valor inicial  $s_0$  "próximo a la raíz  $s^*$ " y hacemos la iteración:

$$s_{i+1} = s_i - \frac{E(s_i)}{E'(s_i)}$$

la cual converge a  $s^*$  si  $E$  satisface ciertas hipótesis. En general no es posible calcular una expresión analítica para  $y(x; s^*)$  y por lo tanto tampoco de  $E(s)$ , entonces la derivada la calculamos como:

$$E'(s_i) \cong \frac{E(s_i + h) - E(s_i)}{h}$$

Los valores para  $E(s_i + h)$  y  $E(s_i)$  se obtienen a partir de la resolución de dos problemas de valores iniciales de la forma anterior en los casos  $s = s_i$  y  $s = s_i + h$ . Ninguno de los problemas de valores iniciales puede resolverse exactamente así pues tiene que recurrirse a algún método de solución numérico. Una vez obtenidas  $y(x; s_i)$  y  $y(x; s_i + h)$  sustituimos  $x$  por  $b$ , restamos  $\beta$  y obtenemos los valores de  $E(s_i)$  y  $E(s_i + h)$ .

La convergencia y exactitud del método dependen de la elección del punto inicial  $s_0$  y  $h$  y del método numérico para resolver los dos problemas de valores iniciales.

## Bibliografía

- [1] P. Palffy – Mohoray, *Physics Today* **60**, 9 (2007).
- [2] S. Pikin y L. Blinov, *Cristales líquidos*, Mir: Moscú (1985).
- [3] L. Jiménez, Tesis Profesional, *Trazado de rayos en gotas de cristal líquido nemático*, Facultad de Ciencias, UNAM (2005).
- [4] P. Fernández, *Cristales Líquidos*, UCM (2007).
- [5] R. F. Rodríguez, J. A. Reyes, *Ciencia Ergo Sum* **8**, 3 (2001).
- [6] M. García, J. Salan, *El Basilisco* **7**, (1979).
- [7] G. P. Crawford, D. W. Allender and J. W. Doane, *Phys. Rev A* **45**, 12 (1992).
- [8] A. Corella M., J. A. Reyes, *Optics Communications* **264**, 148 (2006).
- [9] A. Corella, A. Castellanos, S. Gutiérrez, R. Rosas, *Phys. Rev E* **78**, 022701 (2008).
- [10] A. Corella, J. A. Reyes *Physica B* **403**, 1949 (2008).
- [11] C.I. Mendoza, A. Corella, J. A. Reyes, *Phys. Rev E* **77**, 011706 (2008).
- [12] A. Corella, J. A. Reyes, *J. Appl. Phys.* **99**, 114507 (2006).
- [13] R. F. Rodríguez and J. A. Reyes, *Rev. Mex. Fis.* **45**, 254 (1999).
- [14] H. Lin and P. Palffy – Muhoray, *Opt. Lett.* **45**, 3 (1999).
- [15] H. Lin and P. Palffy – Muhoray, *Opt. Lett.* **19**, 7 (1993).
- [16] H. Lin and P. Palffy – Muhoray, *Opt. Lett.* **17**, 10 (1992).
- [17] S. Chandrasekhar, *Liquid Crystals*, Cambridge University Press: USA (1992).
- [18] P. G. de Gennes and J. Prost, *The physics of Liquid Crystals*, Oxford University Press: USA (1993).
- [19] M. Warner and E. M. Terentjev, *Liquid crystals elastomers*, Oxford University

Press: USA (2003).

- [20] Iam – Choon Khoo, *Liquid Crystals*, Wiley: USA (2007).
- [21] R. Resnick, D. Halliday y K. S. Krane, *Física Vol.1*, CECSA; México (2002).
- [22] Arfken and Weber, *Mathematical methods for physicist*, Harcourt: USA (2001).
- [23] L. Landau y E. Lifshitz, *Mecánica de Fluidos*, Reverté: Moscú (1985).
- [24] Ian W. Stewart, *The static and dynamic continuum theory of Liquid Crystals*, Taylor and Francis group: USA and Canada (2004).
- [25] D. Griffiths, *Introduction to electrodynamics*, Prentice Hall: USA (1999).
- [26] J. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley: USA (1999).
- [27] J. C. Fernández, *Electromagnetismo*, Argentina (2004).
- [28] R.F. Rodríguez, *Introducción a las propiedades ópticas de los Cristales Líquidos*, UNAM (2007).
- [29] L. Landau y E. Lifshitz, *Theory of Elasticity*, Pergamon, Oxford: Moscú (1986).