

# Descripción Relativista al Problema de Campo Central

Una tesis presentada a la Universidad de Sonora  
para la obtención del Título de  
Licenciado en Física

por

*Oscar René Salcido Valle*



Departamento de Física  
Universidad de Sonora  
Febrero de 2010

# Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

# Agradecimientos

A lo largo de mi camino, tanto en lo profesional como en la vida diaria siempre conté principalmente con el apoyo de dos personas que han demostrado que me quieren mucho, así como yo a ellos, el cual hoy en día no tengo palabras para agradecerles por todo el apoyo que me han brindado. Muchas gracias papás, a ti mamá (Ana Rosa Valle) por todo el cariño y consejos que siempre me has dado, sé que puedo contar contigo para lo que sea sin importar si es de Física o no, tú siempre estas ahí para escucharme y por eso te doy gracias mamá. A ti papá (Mario Salcido Romo) por enseñarme a trabajar y saber que las cosas que uno quiere no se obtienen de un día para otro, hoy les agradezco a los dos por estar siempre conmigo, apoyarme en mis decisiones y este trabajo es para ustedes, los quiero mucho.

Y por supuesto quiero agradecer a la maestra María Elena Tejeda por brindarme su apoyo en este trabajo y durante toda la carrera, siempre estubo disponible para darme consejos, impartirme asesorías e incluso para platicar. Por eso y por más, y estoy seguro que no alcanzaría una tesis para agradecerle, muchas gracias maestra.

Al maestro Carlos Calcáneo, que sin su ayuda este trabajo no hubiera sido posible, además que fue el primer maestro que me tendió la mano, me ofreció su apoyo y estubo conmigo en los momentos mas difíciles de mi carrera; usted me ayudo a salir adelante. Maestro muchas gracias por esas horas en las que me estubo atendiendo. También quiero agradecer al pequeño Luca por compartir el tiempo de sus papás conmigo.

Agradesco también a todos mis maestros que han influido en mí formación académica, especialmente a la maestra Angelina por todos los consejos y en darme esa confianza que me hacía falta, maestra ya me cayó el veinte. Al maestro Antonio Jáuregui por su disposición incondicional para la revisión de este trabajo, además de contar con él para aclarar dudas de la vida académica diaria. A Sergio por formar parte del equipo y porque estoy seguro que seguiremos en este mismo barco.

Quiero agradecer a todos mis compañeros a Luis Ortiz, Jano y en especialmente a la original

clika: Yofre, Mayrita, Dupret, Adrian, Sandra, Nadia, El Tatemis (Jaziel), Areli y Lupita, siempre están cuando los necesito y ya saben que cuentan conmigo para lo que sea, a por cierto ya les puse el recibo en el saco.

# Contenido

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Lista de Figuras</b>  | <b>II</b> |
| <b>Introducción</b>  | <b>1</b>  |
| <b>1 Solución Clásica al Problema de Campo Central</b>                 | <b>3</b>  |
| 1.1. Conservación de la Energía . . . . .                              | 4         |
| 1.2. Momento Angular . . . . .   | 6         |
| 1.3. Potencial Efectivo en la Mecánica Clásica . . . . .               | 8         |
| 1.4. Órbitas de los Planetas del Sistema Solar . . . . .               | 14        |
| <b>2 Conceptos de Relatividad</b>                                      | <b>17</b> |
| 2.1. Espaciotiempo Plano . . . . .                                     | 17        |
| 2.2. Conservación de la Energía y Momento . . . . .                    | 22        |
| 2.3. Gravedad y Curvatura del Espaciotiempo . . . . .                  | 25        |
| 2.4. Corrimiento al Rojo Gravitacional . . . . .                       | 28        |
| 2.5. Ecuación de Einstein . . . . .                                    | 30        |
| <b>3 Problema de Campo Central en Relatividad General</b>              | <b>32</b> |
| 3.1. Métrica de Schwarzschild . . . . .                                | 32        |
| 3.2. Energía en la Geometría de Schwarzschild . . . . .                | 34        |
| 3.3. Conservación del Momento Angular en Relatividad General . . . . . | 38        |
| 3.4. Potencial Efectivo en el Espaciotiempo de Schwarzschild . . . . . | 40        |
| 3.5. Aproximación a la órbita de Mercurio. . . . .                     | 48        |
| <b>Conclusiones</b>  | <b>51</b> |
| <b>Bibliografía</b>  | <b>54</b> |

# Lista de Figuras

|  |    |
|--|----|
| 1.1. Potencial efectivo clásico, para diferentes valores del momento angular . . . . .         | 9  |
| 1.2. Potencial efectivo con distintos valores de energía mecánica total . . . . .              | 10 |
| 1.3. Potencial y trayectoria para un nivel de energía $E_0$ . . . . .                          | 13 |
| 1.4. Potencial y trayectoria para un nivel de energía $\frac{1}{2}E_0$ . . . . .               | 13 |
| 1.5. Potencial y trayectoria para un nivel de energía $E = 0$ . . . . .                        | 14 |
| 1.6. Potencial y trayectoria para un nivel de energía $-\frac{1}{2}E_0$ . . . . .              | 15 |
| 2.1. Sistema de Caída Libre . . . . .  | 18 |
| 2.2. Una de las restricciones para un sistema de referencia en de la relatividad . . . .       | 19 |
| 2.3. Distancia entre dos eventos . . . . .   | 20 |
| 2.4. Distintos diagramas de espaciotiempo . . . . .  | 22 |
| 2.5. Una partícula que se mueve en línea recta a velocidad constante . . . . .                 | 23 |
| 2.6. Parábola de los viajeros . . . . .  | 27 |
| 2.7. Trayectoria de una partícula en presencia de un centro atractor . . . . .                 | 28 |
| 2.8. Corrimiento al rojo gravitacional . . . . .   | 29 |
| 3.1. Simulación de la caída radial de una partícula hacia el centro atractor . . . . .         | 35 |
| 3.2. Simulación del movimiento angular de una partícula alrededor del centro atractor          | 38 |
| 3.3. Potencial relativista y clásico . . . . .   | 41 |
| 3.4. Potenciales relativistas con diferentes valores del momento angular . . . . .             | 45 |
| 3.5. Potenciales efectivo relativista, tal que el máximo se encuentra en $'V(r_c)' \leq 1$ . . | 46 |
| 3.6. Potencial relativista con energías, tal que, existen todas las órbitas posibles. . . .    | 47 |

# Introducción

En este trabajo calculamos el avance del perihelio de Mercurio usando Relatividad General.

En Mecánica Clásica aprendemos que si consideramos solamente la interacción entre un planeta y el Sol, el tiempo necesario para una oscilación radial hacia adentro y hacia afuera en una órbita elíptica corresponde exactamente a un múltiplo entero de  $2\pi$ . Es decir, las órbitas son cerradas, por lo tanto el punto orbital más cercano al Sol, llamado perihelio, regresa al mismo lugar en cada órbita. En este trabajo comenzaremos por verificar la forma de las órbitas predichas por la Mecánica Clásica.

En el caso particular de la órbita de Mercurio el perihelio no regresa al mismo lugar después de una órbita. El eje mayor de la elipse rota a una razón de  $574''$  cada siglo. En la Mecánica Clásica se le atribuyen  $531''$  por el hecho de considerar la perturbación de los otros planetas. Esta discrepancia fue calculada por observaciones de LeVerrier de 1859[1].

En la Relatividad General, se explica a la gravedad con una curvatura del espaciotiempo. Particularmente el Sol hace que se curve el espacio y a medida que nos alejamos de él, esta curvatura va desapareciendo. Así, cuando nos encontremos muy cerca de una estrella más grande que el Sol, el espacio a su alrededor será cada vez más curvo, al grado de ser tan grande que al caer jamás podríamos salir. Tal es el caso de un agujero negro de donde ni la luz puede escapar.

Cada objeto masivo establece un potencial que nos dice como serán las órbitas para diferentes energías. Por eso, en este trabajo analizaremos primero al potencial en la Mécanica Clásica y después en Relatividad General para usarlo en la descripción de las órbitas alrededor de objetos masivos.

Para describir el movimiento esperado en un campo central partiremos de las expresiones para las *constantes de movimiento*, lo cual nos permitirá definir un potencial efectivo y esta técnica se puede traducir de manera inmediata para el problema relativista.

Con una aproximación sencilla podremos predecir el avance en el perihelio de Mercurio con una precisión suficiente como para justificar las observaciones de este fenómeno.

En el capítulo 1 resolvemos el problema clásico y encontramos sus órbitas exactamente,

mientras que en el capítulo 2 desarrollamos los conceptos mínimos necesarios para construir nuestra solución relativista y por último, en el capítulo 3 presentamos la aproximación a la órbita y el cálculo del avance del perihelio, mismo que comparamos con algunos datos observados.

# Capítulo 1

## *Solución Clásica al Problema de Campo Central*

La descripción de la interacción entre dos cuerpos donde la fuerza que actúa sobre ellos está en la línea más corta que los une y pasa por su centro se conoce como el problema de campo central. Ésto tiene como consecuencia que la fuerza tiene simetría esférica, es decir apunta en todas direcciones y depende sólo de la distancia al centro de fuerzas.

En particular, estudiaremos la interacción responsable del movimiento de los cuerpos celestes: *la fuerza gravitacional*,

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \quad (1.1)$$

donde  $G$  es la constante gravitacional,  $M$  y  $m$  son las masas de los cuerpos que interactúan,  $r$  es la distancia entre los cuerpos y  $\hat{r}$  es el vector unitario en la dirección radial. Como la interacción sólo es en la dirección radial, conviene elegir coordenadas que aprovechen la simetría del problema, en este caso, coordenadas esféricas; las cuales definimos, en términos de las coordenadas cartesianas como:

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad \theta = \text{Arctan} \left( \frac{x^2 + y^2}{z^2} \right)^{1/2}, \quad \varphi = \text{Arctan} \frac{y}{x}. \quad (1.2)$$

En estas coordenadas también es posible definir vectores unitarios en las distintas direcciones:  $\hat{r}$ ,  $\hat{\theta}$  y  $\hat{\varphi}$ ; ésto lo haremos con precisión en la sección 1.2.

Dos características importantes para describir los movimientos de una partícula bajo la influencia del campo central son la conservación de la energía y la conservación del momento angular. En las siguientes dos secciones, estudiamos brevemente estas cantidades dinámicas para poder describir el movimiento esperado.

## 1.1. Conservación de la Energía

Cuando en un sistema mecánico sólo actúan fuerzas conservativas la energía mecánica total es una constante de movimiento; de lo contrario, por ejemplo en la presencia de fricción, se pierde esta constante de movimiento. Podemos asociar una función de energía potencial con cada fuerza conservativa.

Para describir la energía cinética partiremos de las componentes, en en coordenadas cartesianas, de la ecuación de movimiento. Multiplicamos a cada lado por su velocidad respectiva y obtenemos:

$$mv_x \frac{d^2x}{dt^2} = F_x v_x, \quad mv_y \frac{d^2y}{dt^2} = F_y v_y, \quad mv_z \frac{d^2z}{dt^2} = F_z v_z \quad (1.3)$$

como  $v_x$ ,  $v_y$  y  $v_z$  dependen de  $t$  podemos escribir en general la siguiente igualdad

$$\frac{1}{2}m \frac{d}{dt} v_i^2 = mv_i \frac{d^2x_i}{dt^2} \quad x_i = x, y, z \quad (1.4)$$

Ahora podemos sustituir la ecuación (1.4) en (1.3) y agrupar todo en una sola expresión:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mv^2 \right) = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

En esta expresión reconocemos a la energía cinética,  $T = \frac{1}{2}mv^2$ . Si integramos desde un tiempo inicial,  $t_1$ , hasta un tiempo posterior,  $t_2$  y reconociendo a  $r$  como función de  $t$ , por lo que  $\vec{v}dt = d\vec{r}$ , podemos escribir

$$T_2 - T_1 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (1.5)$$

A esta ecuación se le conoce como el "Teorema de Trabajo y la Energía", donde el lado derecho es el trabajo realizado por la partícula al viajar desde una posición,  $r_1$ , hasta otra  $r_2$  y el lado izquierdo es el cambio de energía cinética. Esta expresión también describe el movimiento de un cuerpo.

Si calculamos el trabajo hecho sobre una partícula por una fuerza  $\vec{F}$  que es función sólo de la posición  $\vec{r} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  entonces el trabajo hecho cuando la partícula se mueve de un punto inicial  $r_1$  a uno final  $r_2$  es dada por la integral de línea:

$$\int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Para calcular este trabajo ahora definimos la energía potencial  $\mathcal{V}(x)$  como el trabajo hecho por una fuerza cuando la partícula va de un punto cualquiera,  $r$ , al origen del potencial,  $r_s$ .

$$\mathcal{V}(\vec{r}) = \int_r^{r_s} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_{r_s}^r \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (1.6)$$

Entonces de la ecuación anterior nos fijamos en el cambio de la energía potencial cuando la partícula se mueve de  $\vec{r}$  a  $\vec{r} + d\vec{r}$ .

$$d\mathcal{V}(\vec{r}) = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (1.7)$$

Desarrollando un poco el lado izquierdo de la ecuación, sabiendo que el potencial depende solamente de la variable  $\vec{r} = (x, y, z)$

$$d\mathcal{V}(\vec{r}) = (dx, dy, dz) \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \right) = d\vec{r} \cdot \nabla \mathcal{V}$$

Usando el resultado anterior en (1.7) tenemos

$$d\vec{r} \cdot \nabla \mathcal{V} = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

De tal manera que nos queda

$$\vec{F} = -\nabla \mathcal{V} \quad (1.8)$$

Ahora buscamos una condición en la cual el trabajo no dependa de la trayectoria. Recordemos que una de las propiedades de los vectores es que el producto cruz de un vector con sí mismo siempre es cero de tal manera que:

$$\nabla \times \vec{F} = -\nabla \times \nabla \mathcal{V} = 0$$

La condición anterior es necesaria y suficiente para la existencia de un potencial, donde el trabajo realizado por éste es independiente de la trayectoria. Esta condición se cumple para campo central, entonces existe una constante de movimiento, la energía mecánica total,  $\mathcal{E}$ , que escribiremos en general para el movimiento de una partícula:

$$\mathcal{E} = T + \mathcal{V} \quad (1.9)$$

Podemos encontrar el potencial gravitacional directamente de la fuerza. Para ello definimos:

$$\vec{F}(r) = -\nabla \mathcal{V}(r)$$

Al desarrollar el lado derecho tenemos que:

$$F(r)\hat{r} = - \left( \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{V}(r) + \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{V}(r) + \frac{\hat{\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathcal{V}(r) \right)$$

Como el potencial sólo es función de  $r$  entonces las derivadas con respecto a  $\theta$  y  $\varphi$  desaparecen por lo que nos queda sólo la derivada del potencial con respecto a la distancia radial, hemos reducido a un problema en una sola dimensión:

$$F(r) = -\frac{d}{dr} \mathcal{V}(r)$$

Nos preguntamos por el trabajo necesario para traer una partícula desde el infinito hasta una distancia  $r$

$$\int_{\infty}^r F(r') dr' = \int_r^{\infty} \frac{d}{dr'} \mathcal{V}(r') dr'$$

La fuerza corresponde a la atracción gravitacional, dada por la ecuación (1.1), tomamos el origen del potencial al infinito del centro atractor y obtenemos:

$$\mathcal{V}(r) = -\frac{GMm}{r}$$

Éste es el potencial gravitacional clásico generado por una partícula central de masa  $M$  sobre un objeto de masa  $m$ .

## 1.2. Momento Angular

*A* sí como existe una medida para la cantidad de movimiento en una línea recta y que definimos como momento lineal

$$\vec{P} = m\vec{v}, \quad (1.10)$$

el momento angular se define como el análogo de momento lineal pero ahora el sistema está en rotación: *La cantidad de movimiento que adquiere un cuerpo cuando está en rotación:*

$$\vec{\mathcal{L}} = m\vec{r} \times \vec{v} \quad (1.11)$$

Recordemos que por la simetría de nuestro problema, conviene usar coordenadas esféricas, por lo que la velocidad depende de  $r$ ,  $\theta$  y  $\varphi$ . Analicemos esta velocidad, empezando por el vector posición:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = r\hat{r}$$

como los vectores unitarios en coordenadas esféricas están dados por:

$$\hat{r} = \sin\theta \cos\varphi\hat{i} + \sin\theta \sin\varphi\hat{j} + \cos\theta\hat{k}$$

$$\hat{\theta} = \cos\theta \cos\varphi\hat{i} + \cos\theta \sin\varphi\hat{j} - \sin\theta\hat{k}$$

$$\hat{\varphi} = -\sin\varphi\hat{i} + \cos\varphi\hat{j}$$

si escribimos la velocidad en estas coordenadas:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{r}) = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}, \quad (1.12)$$

y usamos la definición de  $\hat{r}$ , podemos calcular el segundo término de la ecuación 1.12:

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(\cos\theta \cos\varphi\hat{i} + \cos\theta \sin\varphi\hat{j} - \sin\theta\hat{k}) - \sin\theta \frac{d\varphi}{dt}(-\sin\varphi\hat{i} + \cos\varphi\hat{j})$$

en esta ecuación identificamos a los vectores unitarios  $\hat{\theta}$  y  $\hat{\varphi}$ . Definiremos también la velocidad angular polar como  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$  y la velocidad angular azimutal:  $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$  para poder escribir:

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta}\hat{\theta} + \sin\theta\dot{\varphi}\hat{\varphi}$$

Así, el vector velocidad tiene una componente radial y dos angulares

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\varphi}\hat{\varphi} = v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta} + v_\varphi\hat{\varphi} \quad (1.13)$$

con esta forma de escribir la velocidad podemos calcular el momento angular por unidad de masa, sustituyendo en (1.11)

$$\frac{\vec{\mathcal{L}}}{m} = rv_\theta\hat{\varphi} - rv_\varphi\hat{\theta}. \quad (1.14)$$

Como el cambio del momento angular corresponde a la torca

$$\frac{d}{dt}\vec{\mathcal{L}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

si sustituimos la forma específica de la fuerza para nuestro problema, encontramos que no existe torca actuando sobre la partícula y el momento angular es constante. Esto significa que el movimiento de una partícula bajo la acción de una fuerza central está confinada a un plano y, sin pérdida de generalidad, podemos escoger el plano  $xy$  ( $\theta = \pi/2$ ). Así, de la ecuación (1.14) tenemos:

$$\frac{\vec{\mathcal{L}}}{m} = r^2\dot{\varphi}\hat{k}$$

Como esperabamos, el momento angular quedó como un vector perpendicular al plano de movimiento por lo que podemos considerar solo su magnitud en esta dirección.

$$\mathcal{L} = mr^2\dot{\varphi} \quad (1.15)$$

Como el movimiento será en un plano entonces, sólo requerimos dos ecuaciones para describirlo. La primera de éstas es la conservación de momento angular, en su versión escrita en la ecuación (1.15) y la segunda, la conservación de la energía:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv^2 + \mathcal{V}(r)$$

Escribimos la magnitud de la velocidad en coordenadas esféricas

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \dot{\phi}^2$$

Recordando nuestra elección para el plano de movimiento, la conservación de la energía se escribe

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \mathcal{V}(r)$$

o bien, usando la conservación del momento angular  $\mathcal{L}$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\mathcal{L}^2}{2mr^2} + \mathcal{V}(r)$$

### 1.3. Potencial Efectivo en la Mecánica Clásica

Describir el movimiento de una partícula es responderse a la pregunta ¿Cómo se moverá? En nuestro caso, debido a que el movimiento está confinado a un plano, significa encontrar los valores de  $r$  y  $\phi$  para distintos tiempos. En la Mecánica Clásica, es común partir de las ecuaciones de movimiento para hacer esta descripción, sin embargo, podemos aprovechar la existencia de las constantes apenas encontradas, ya que representan la primera integral de estas ecuaciones. Además, como veremos en el capítulo 3, este tratamiento se puede aplicar de manera directa al considerar las correcciones relativistas del problema.

Partimos entonces de las ecuaciones obtenidas para la conservación del momento y la energía, mismas que escribimos ahora en términos del momento y la energía por unidad de masa:

$$L = \frac{\mathcal{L}}{m} = r^2\dot{\phi} \quad (1.16)$$

$$E = \frac{\mathcal{E}}{m} = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{M}{r} \quad (1.17)$$

Hemos elegido escribir estas constantes por unidad de masa para tener una similitud completa con la discusión que haremos al introducir las correcciones relativistas. La justificación completa para hacer ésto la abordaremos en las secciones 2.1 y 2.2; por lo pronto, notemos que en estas expresiones hemos usado la forma explícita del potencial gravitacional y hemos tomado unidades tales que  $G = 1$ , lo cual también justificaremos en el capítulo 2.

De la ecuación de la energía mecánica total, definiremos al potencial efectivo como:

$${}^{\prime}V = \frac{{}^{\prime}\mathcal{V}}{m} = \frac{L^2}{2r^2} - \frac{M}{r} \quad (1.18)$$

En la Figura 1.1 hemos graficado este potencial efectivo, para valores diferentes del momento angular. Notemos que existe un pozo más pronunciado para los objetos que se encuentren con menor momento angular.

Identificando a cada uno de los términos del potencial efectivo dado por la ecuación anterior podemos asociar al primer término con una fuerza repulsiva y al segundo con una fuerza atractiva. La parte atractiva es de la forma  $-1/r$  mientras que la repulsiva como  $1/r^2$  por lo que esta última es menos importante para radios grandes, mientras que a radios pequeños es la que domina.

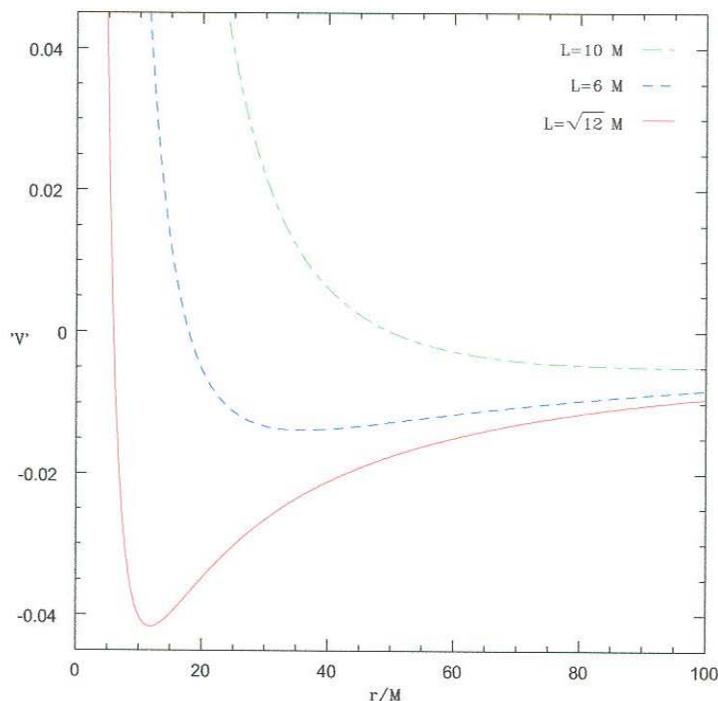


Figura 1.1: Esta gráfica muestra el potencial efectivo clásico, para diferentes valores del momento angular. Podemos apreciar que para valores más pequeños de esta constante, existe un pozo más pronunciado.

Aunque se observa mejor la existencia del mínimo para potenciales efectivos con menor momento angular, éste siempre existe. Procedemos a calcular el mínimo de la forma usual, sabiendo que en este valor la derivada del potencial se anula:

$$\left. \frac{dV}{dr} \right|_{r_0} = -\frac{L^2}{r_0^3} + \frac{M}{r_0^2} = 0$$

por lo tanto resulta que el potencial tiene un mínimo en:

$$r_0 = \frac{L^2}{M}$$

Encontramos que el potencial tiene el mínimo en  $r_0$  con un valor de la energía:

$$E_0 = -\frac{1}{2} \frac{M^2}{L^2}$$

Esta es la energía mínima a partir de la cual está permitido el movimiento en el potencial gravitacional.

Hacemos como ejemplo, en la Figura 1.2, el análisis del potencial efectivo con  $L = \sqrt{12}M$ . En esta figura aparecen distintos valores de energía que definen el tipo de movimiento esperado.

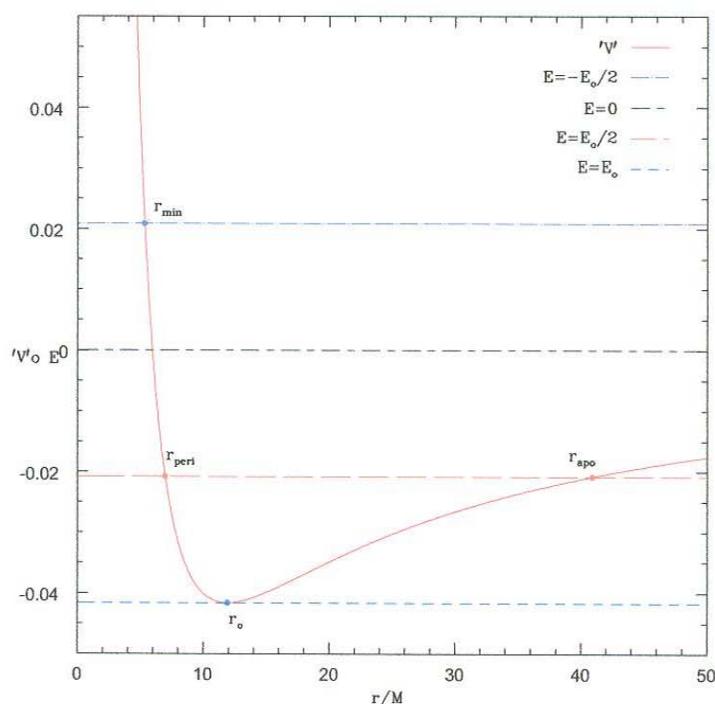


Figura 1.2: Potencial efectivo con distintos valores de la energía, en la cual hemos partido de la energía mínima  $E_0$  hacia valores más grandes.

Anteriormente encontramos la expresión de la energía mínima  $E_0$ , que puede tener una partícula con momento angular  $L$ , para moverse bajo la influencia de un campo central; para cualquier objeto que tenga una energía menor a ésta,  $E < E_0$ , el movimiento no es permitido ya que se encuentra en una región donde el potencial es mayor que la energía y como resultado se tendría un número negativo para el cuadrado de la velocidad radial.

Cuando la partícula tenga una energía  $E = E_0$ , el movimiento está restringido por el mínimo del potencial efectivo, ahí adquiere un valor radial constante  $r = r_0$ , entonces lo identificamos con una trayectoria circular.

Para las energías que se encuentran entre el valor mínimo y cero,  $E_0 < E < 0$ , el movimiento es restringido por dos puntos de retorno,  $r_{peri}$  y  $r_{apo}$  donde la distancia de  $r_0$  a  $r_{apo}$ , es mayor que la distancia de  $r_0$  a  $r_{peri}$ . En este rango de valores para  $r$  las energías son mayores que el potencial y el movimiento es permitido. Por estar acotada por dos radios, uno mayor que el otro, identificamos la trayectoria con una elipse.

Para la energía  $E = 0$  el movimiento está restringido por un punto de retorno, por lo que una partícula con esta energía describe una trayectoria abierta.

Para las energías  $E > 0$  tenemos también un punto de retorno que llamamos  $r_{min}$ , este punto es cada vez más cercano al centro atractor conforme aumentamos la energía, el movimiento siempre está restringido por este punto de retorno y lo asociamos también con una trayectoria abierta.

Como ya mencionamos, las ecuaciones (1.16) y (1.17) describen el movimiento de la partícula, por lo que es posible encontrar, a partir de ellas, su trayectoria. Resolvamos estas ecuaciones para verificar el tipo de órbitas existentes.

Como  $r$  y  $\varphi$  son funciones de  $t$ , y la ecuación de la órbita es  $r = r(\varphi)$  la regla de la cadena garantiza que:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}$$

Para hacer más sencillos los cálculos involucrados es usual cambiar a la variable  $u(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)}$ . De tal manera que la razón de cambio de la coordenada radial con respecto al tiempo queda:

$$\frac{dr}{dt} = -u^{-2} \frac{du}{dt} = -u^{-2} \frac{du}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -L \frac{du}{d\varphi}$$

hemos usado (1.16) para eliminar  $\dot{\varphi}$ . Sustituimos esta derivada con respecto al tiempo en la ecuación (1.17) y después de acomodar términos obtenemos:

$$\left( \frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2E}{L^2} - u^2 + \frac{2M}{L^2} u \quad (1.19)$$

En la ecuación anterior completamos el binomio cuadrado perfecto, agrupamos términos semejantes y resolvemos para tener:

$$u = u_0 [1 + \epsilon \cos(\varphi - \varphi_0)]$$

Regresamos a la variable original,  $r$ , y escribimos finalmente:

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad (1.20)$$

donde definimos a la excentricidad,  $\epsilon$ ,

$$\epsilon^2 = 1 + \frac{2EL^2}{M^2} = 1 - \frac{E}{E_0} \quad (1.21)$$

y usamos la expresiones para el radio de la órbita circular,

$$r_0 = \frac{L^2}{M}, \quad (1.22)$$

y la energía de esta órbita,

$$E_0 = -\frac{1}{2} \frac{M^2}{L^2}. \quad (1.23)$$

La ecuación 1.20 es la expresión general para una sección cónica, que describe órbitas circulares, elípticas, parabólicas e hiperbólicas, dependiendo del valor que tome la excentricidad de la órbita.

Tomando los casos para la energía, analicemos las trayectorias generadas de la ecuación (1.20):

- Para la energía  $E = E_0$ , la mínima que podemos escoger, tenemos  $\epsilon = 0$ . Con este valor de excentricidad, la trayectoria se reduce a:

$$r = r_0$$

corroborando el análisis cualitativo anterior. En la Figura 1.3 hemos graficado el potencial efectivo con el correspondiente valor de energía y su trayectoria.

- Ahora analicemos energías tales que  $E_0 < E < 0$  por lo que  $\epsilon$  es tal que  $0 < \epsilon < 1$ . En este caso la órbita queda acotada entre dos valores para el radio:  $r_1 > r_0$  y  $r_2 < r_0$ . Identificamos con estos radios a  $r_{apo} > r_0$  y  $r_{peri} < r_0$  por lo que de nuevo se confirma el análisis cualitativo inicial.

Para graficar, escojamos como ejemplo  $E = \frac{1}{2}E_0$ ; sustituyendo este valor de la energía en la ecuación (1.21) tenemos  $\epsilon = \sqrt{1/2}$  entonces la trayectoria queda de la siguiente manera

$$r = \frac{r_0}{1 + \sqrt{\frac{1}{2}} \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

Ésta es la ecuación de una elipse descrita por un objeto con energía  $E = \frac{1}{2}E_0$ . Hemos graficado esta trayectoria y su correspondiente valor de energía en la Figura 1.4

- Si tomamos la energía  $E = 0$  entonces  $\epsilon = 1$  y la ecuación para la trayectoria toma la forma

$$r = \frac{r_0}{1 + \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

que es la ecuación de una parábola. En la gráfica 1.5 ilustramos esta trayectoria.

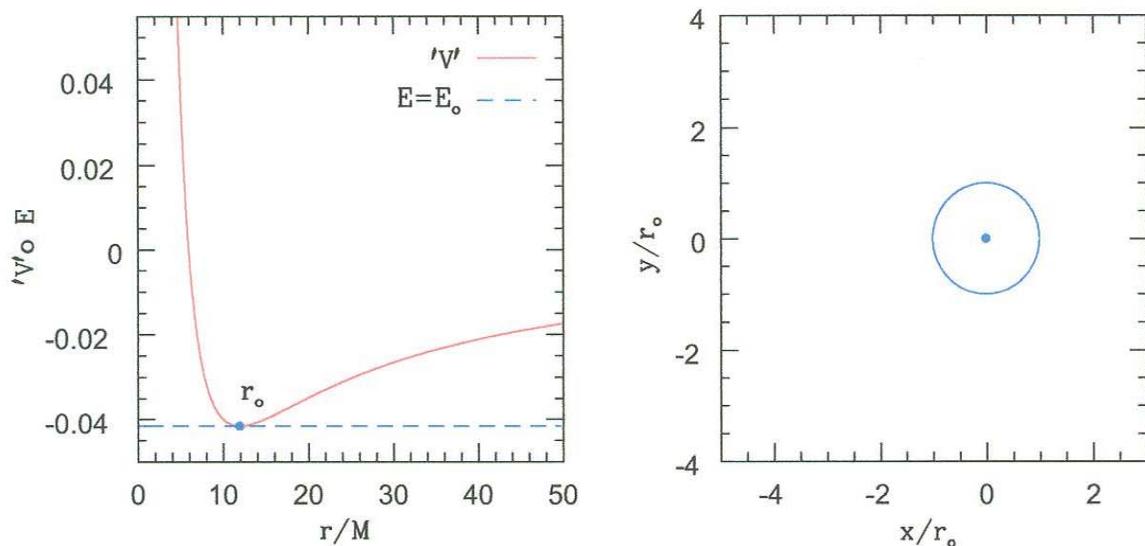


Figura 1.3: En esta gráfica, del lado izquierdo, mostramos el potencial efectivo clásico para un campo gravitacional y el nivel de energía que corresponde al mínimo que puede tomar una partícula. En el lado derecho, mostramos la trayectoria de la partícula correspondiente a esta energía mínima  $E_0$ , el punto representa el centro de atracción gravitacional.

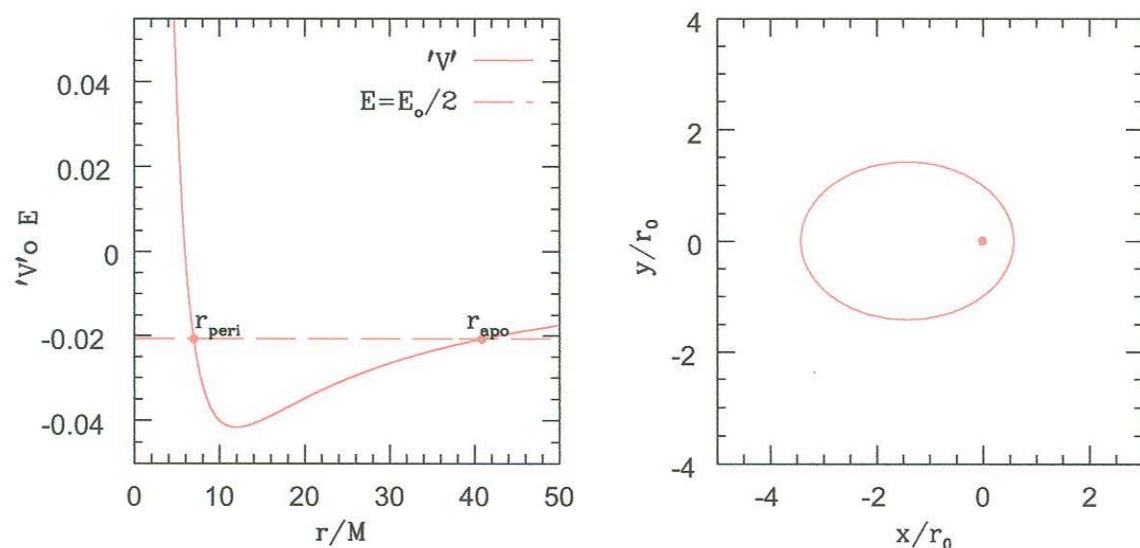


Figura 1.4: En la gráfica mostramos, en el lado izquierdo, al potencial efectivo clásico así como el nivel de energía correspondiente a  $E = \frac{1}{2}E_0$ , con sus dos puntos de retorno,  $r_{\text{peri}}$  y  $r_{\text{apo}}$ . En el lado derecho graficamos la órbita que describe una partícula con esta energía, el punto representa el centro de atracción gravitacional.

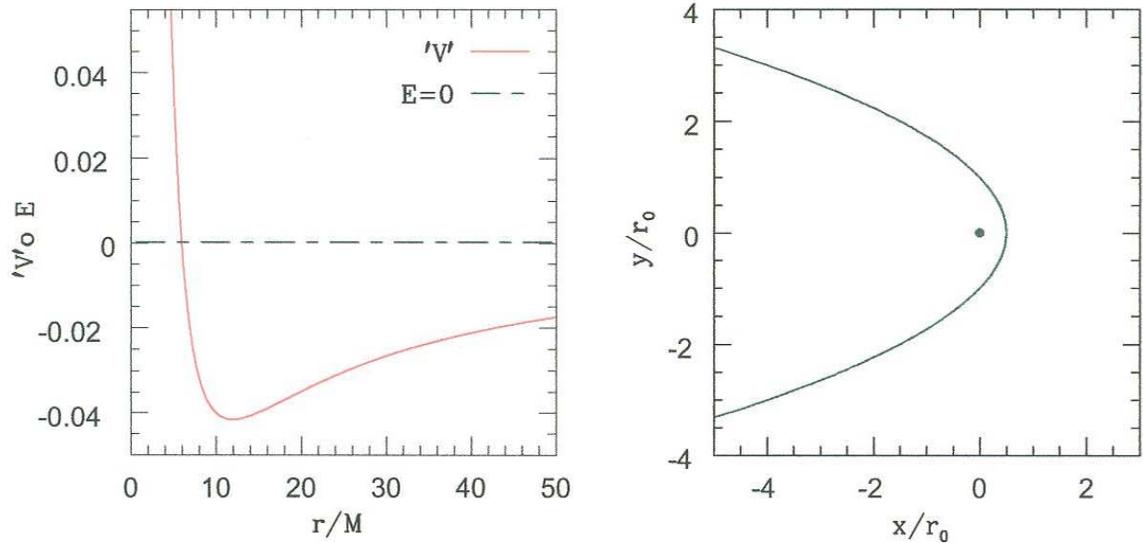


Figura 1.5: En esta gráfica, del lado izquierdo, tenemos al potencial efectivo clásico en ahora para una partícula con energía  $E = 0$ . Del lado derecho hemos graficado su órbita correspondiente.

- Para las energías que son mayores que cero,  $E > 0$ ,  $\epsilon$  toma valores mayores a uno,  $\epsilon > 1$ . Para este valor de la excentricidad, el radio de la trayectoria está acotado a un máximo acercamiento, mismo que, en nuestro análisis cualitativo llamamos  $r_{min}$ , la órbita es ahora una hipérbola.

Como ejemplo escojamos el valor de la energía:  $E = -\frac{1}{2}E_0$  sustituyendo este valor en la ecuación (1.21) queda  $\epsilon = \sqrt{3/2}$  y la trayectoria es:

$$r = \frac{r_0}{1 + \sqrt{3/2} \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

Ésta es la ecuación de una hipérbola descrita por una partícula con  $E = -\frac{1}{2}E_0$ , graficamos de nuevo la pareja de potencial y trayectoria en la Figura 1.6.

## 1.4. Órbitas de los Planetas del Sistema Solar

En el sistema solar los planetas giran alrededor del Sol sobre trayectorias que forman órbitas elípticas, con él en uno de los focos de estas trayectorias. Describimos este hecho natural reconociendo al Sol como el centro de atracción gravitacional.

Uno de los logros más importantes de la Mecánica Clásica es que, considerando que existe una fuerza gravitacional como la definida en (1.1), podemos describir el movimiento de los planetas,

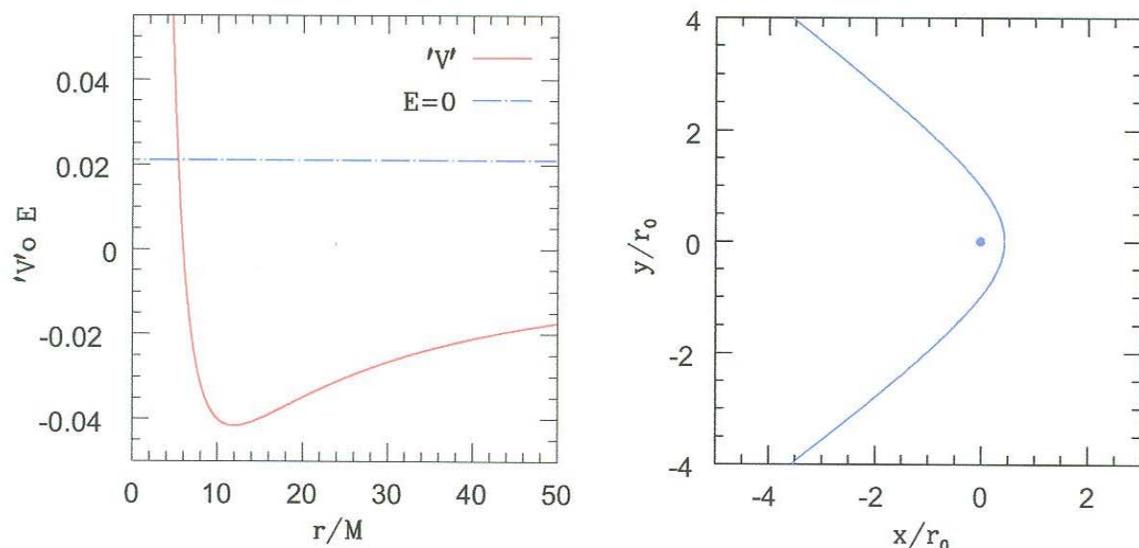


Figura 1.6: Aquí, del lado izquierdo, graficamos al potencial efectivo clásico y al nivel de energía  $E = -\frac{1}{2}E_0$ . Del lado derecho graficamos las trayectorias, éstas serán mas abiertas que en el caso  $E = 0$ , formando así órbitas hiperbólicas

de hecho, el movimiento de los cuerpos celestes se describe con sorprendente precisión usando esta forma de proceder. Reconocemos a la Mecánica Celeste como uno de los logros más importantes de la Mecánica.

En el análisis de las secciones anteriores hemos considerado solo la interacción entre dos cuerpos, para una descripción completa de sistemas reales (por ejemplo para describir las trayectorias de los planetas del Sistema Solar) es necesario incorporar la interacción de todos los cuerpos que pertenecen al sistema. En este caso el problema deja de ser analítico por lo que ya no podemos escribir una ecuación como (1.20), sin embargo, empleando técnicas numéricas, es posible describir las trayectorias reales.

Aún cuando se hiciera el cálculo completo, tomando en cuenta el efecto de los otros cuerpos en el sistema solar, existen una discrepancias entre las órbitas calculadas y las observadas que no es posible eliminar usando solo Mecánica Clásica. Uno de estos efectos es que las órbitas ya no son exactamente cerradas por lo que los planetas no regresan a su posición radial original en un período completo. A este fenómeno de le conoce como *avance en el perihelio*, de hecho, a medida; que los planetas se encuentran más cerca de su centro gravitacional, existe mayor avance. En particular este efecto es más evidente en el caso de la órbita de Mercurio, la cual tiene un avance en el perihelio de  $43''/\text{siglo}$ .

El cálculo de este avance se considera como uno de los grandes logros de la Relatividad General, junto con la predicción de la desviación de la luz por su interacción gravitacional con los cuerpos; sin duda estas dos predicciones fueron las causantes de que la teoría fuera adoptada por la comunidad científica.

Resulta que, para predecir el avance en el perihelio, es suficiente aplicar una primera aproximación de la Relatividad General en la que tomamos en cuenta sólo la interacción entre dos cuerpos. En este trabajo usaremos esta aproximación para calcular el avance en el perihelio de Mercurio, considerando sólo la interacción Planeta-Sol. Después compararemos nuestro resultado con las mediciones que aparecen en [7] y [8]. Antes de hacer esto empezamos por revisar algunos conceptos indispensables de Relatividad.

## Capítulo 2

## *Conceptos de Relatividad*

En el capítulo anterior vimos que la Mecánica Clásica describe muy bien a cuerpos en movimiento bajo la acción de un campo central considerando sólo la interacción gravitacional entre dos cuerpos. Pudimos observar que el potencial efectivo es una herramienta muy poderosa para describir las órbitas alrededor del centro de atracción. Para poder describir el movimiento con mayor precisión, por ejemplo las correcciones a la precesión de Mercurio, como acabamos de mencionar en el capítulo anterior es necesario introducir Relatividad General, la cual describe el movimiento producido por la interacción gravitacional. Antes de describir los movimientos celestes de esta manera, revisaremos algunos conceptos de Relatividad.

### 2.1. Espaciotiempo Plano

La Teoría de la Relatividad Especial es necesaria para describir el movimiento de partículas que viajan a velocidades cercanas a la de la luz, sin importar el sistema de referencia de donde se observe, esta teoría descansa sobre la aplicación rigurosa del Principio de Relatividad:

*Todas las leyes físicas se cumplen de la misma manera, conservando el valor de sus constantes y su forma funcional, en cualquier sistema de referencia inercial.*

Esta teoría también descansa en el hecho experimental de que la velocidad de la luz tiene el mismo valor constante en cualquier sistema de referencia.

En cualquier lugar del espacio podemos fijar un sistema de referencia y estos sistemas pueden moverse uno respecto al otro. Desde ahí, observamos y medimos los eventos, éste es nuestro laboratorio.

La motivación principal para este trabajo es explicar con mayor precisión la órbita de Mercurio, para lo cual debemos describir sistemas de referencia en presencia de un campo gravitacional. Para estudiar la gravedad escogemos Sistemas de Referencia Inerciales donde se cumpla la Primera Ley de Newton por un periodo de tiempo determinado. Llamemos a éstos, Sistemas de Caída Libre (SCL).

En la Figura 2.1 ejemplificamos un SCL con el siguiente experimento pensado: en el interior de un elevador sin ventanas se encuentra un observador haciendo experimentos sobre el movimiento de un proyectil. Primeramente hace el experimento sobre la superficie de la tierra y después cuando el elevador se encuentra en caída libre. Notemos que en este experimento existen dos límites.

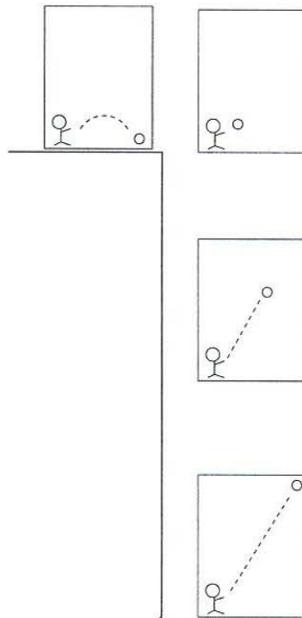


Figura 2.1: Representación de un Sistema de Caída Libre. Cuando el elevador se deja caer, y en ese momento lanzamos un proyectil, observamos que éste sigue en una línea recta, obedeciendo a la Primera Ley de Newton. En algún momento el elevador llegará a la superficie y perderá su característica de Sistema de Caída Libre.

En el caso del elevador cayendo, mientras realiza el experimento, el observador no sabe en que sistema de referencia se encuentra, pero puede verificar que se cumple la Primera Ley y asegurar que se encuentra en un SCL. Notemos que ésto es posible, debido a que todos los objetos caen a la tierra con la misma aceleración. De hecho, éste es un resultado general: Todos los objetos que caen en un campo gravitacional uniforme, lo hacen con la misma aceleración, independientemente de su composición. A este hecho, famosamente observado por primera vez por Galileo en la torre de Pisa, se le conoce como Principio débil de Equivalencia[2]. Este principio nos permite considerar a las cantidades dinámicas por unidad de masa, como se introdujo en el capítulo 1.

Notemos que este experimento, del elevador cayendo, no puede durar un tiempo infinito ya que, tarde o temprano, el elevador llegará a tocar tierra y en este momento cambiará, con

consecuencias catastróficas para sus ocupantes, la naturaleza del sistema de referencia.

En la Figura 2.1 ilustramos otro experimento en donde se muestra que el sistema de referencia no puede ser muy extenso. En este caso transformamos al elevador en un “vagón sin ventanas” de anchura  $a$  y altura  $h$ . Volvemos a dejar caer el sistema de referencia desde una altura  $H$  muy superior a la superficie de la tierra. De nuevo estudiamos el movimiento de proyectiles en este SCL. Si permitimos que la anchura del vagón sea muy grande ( $a \gg h$ ) cuando colocamos dos proyectiles en reposo separados una distancia fija observamos que después de un tiempo  $t$ , disminuye la distancia entre los proyectiles, acercándose al centro vagón. En ese momento deducimos que no nos encontramos en un SCL.

Regresaremos a este experimento en la sección 2.3 para explicar a la gravedad.

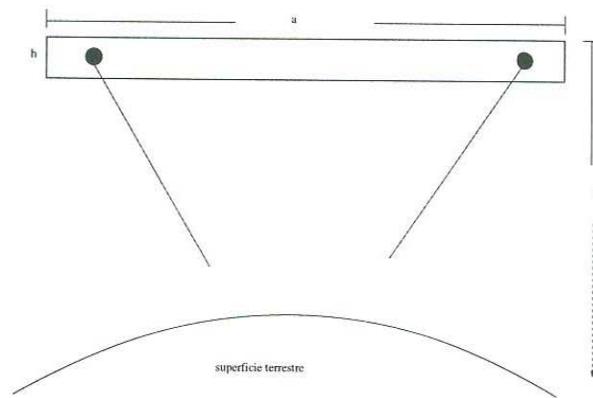


Figura 2.2: Representación de una de las restricciones para un SCL en relatividad. El experimento consta en colocar al interior del vagón dos proyectiles en reposo, colocados cada uno en un extremo. Después de un tiempo  $t$ , los proyectiles se mueven hacia el centro del vagón.

Para hacer experimentos dentro de un campo gravitacional debemos escoger bien nuestro sistema ya que éste no debe de tener una extensión infinita y tampoco debe de durar mucho tiempo. Con estas dos constricciones un SCL es:

*Una región de espaciotiempo donde toda partícula inicialmente en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme conserva la misma rapidez y dirección en que se mueve, con respecto a ese sistema de referencia y hasta cierta precisión con la cual se miden las variables mecánicas.*

El evento es fundamental para medir el intervalo de espaciotiempo, un evento es algo que ocurre en el espacio en un tiempo preciso en algún sistema de referencia (no todos los observadores registran las mismas coordenadas). Es decir un evento es un suceso físico independientemente del sistema de referencia donde se mida. Estos eventos son los que tenemos como referencia para

calcular el tiempo propio (lo cual lo explicaremos más adelante).

El espaciotiempo, es un concepto extremadamente útil en la Teoría de la Relatividad Especial, la idea es muy simple: si queremos describir un evento que ocurre en cierto lugar y en cierto momento, debemos especificar no sólo las tres coordenadas espaciales sino también una cuarta coordenada, el tiempo en que ocurrió el suceso. Cada punto en este espacio es un evento, si un evento ocurre en un punto con coordenadas  $(x, y, z)$  en el tiempo  $t$ , tendrá coordenadas  $(t, x, y, z)$  en el espaciotiempo. Notemos que estas coordenadas no es posible relacionarlas ya que no se encuentran en las mismas unidades, por lo que la manera de poder relacionar unas coordenadas con otras en el espaciotiempo es necesario introducir unas nuevas unidades de tal manera que todas las coordenadas tengan las mismas unidades, a éstas se le llaman unidades geométricas. Para definir estas unidades utilizaremos una constante que contiene tanto unidades de distancia como de tiempo y esta constante es la velocidad de la luz,  $c = 2.99792458 \times 10^8 \frac{m}{s}$ , entonces si queremos que el tiempo tenga coordenadas de distancia entonces las coordenadas de ese evento será  $(ct, x, y, z)$ , por esa razón introducimos la constante  $c$  en las ecuaciones para la energía y el momento definidas anteriormente.

Una cantidad fundamental en relatividad es el tiempo propio entre dos eventos, que se denota comúnmente por la letra griega  $\tau$ . Este tiempo es más útil en nuestro estudio de movimiento que la coordenada de tiempo,  $t$ , ya que es universal. Para definir  $\Delta\tau$  hagamos uso del siguiente ejemplo: un observador en la tierra que quiere medir la distancia entre la tierra y la luna, entonces manda un rayo de luz a la luna en donde observa los siguientes dos eventos:

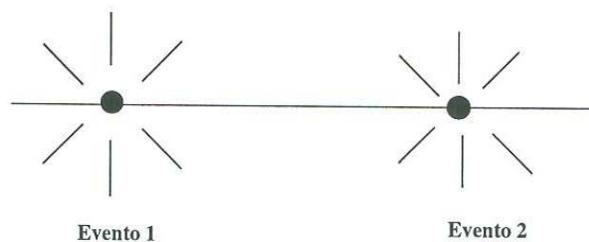


Figura 2.3: Representación de dos eventos (pulsos de luz) entre los cuales queremos medir distancia.

Evento 1: Sale el rayo de la tierra

Evento 2: Llega el rayo a la luna

En un sistema de referencia centrado en la tierra las coordenadas de los eventos son:

$$E_1 = (0, 0, 0, 0)$$

$$E_2 = (t_L, x_L, y_L, z_L)$$

Entonces con el rayo podemos calcular la distancia entre la tierra y la luna de dos maneras

$$d_{tierra-luna}^2 = (x_L - 0)^2 + (y_L - 0)^2 + (z_L - 0)^2$$

$$d_{tierra-luna}^2 = c^2(t_L - 0)^2$$

Ahora igualaremos las dos ecuaciones anteriores

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = 0$$

Definiremos el lado izquierdo de esta ecuación cómo el intervalo de espaciotiempo entre dos eventos.

$$\Delta\tau^2 = c^2\Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) \quad (2.1)$$

Si consideramos cambios muy pequeños y definimos que  $c \equiv 1$  podemos reescribir la definición anterior en unidades geométricas:

$$d\tau^2 = dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (2.2)$$

Así como en la geometría Euclideana, necesitamos una representación gráfica que nos permita visualizar los cambios en el espaciotiempo, a dicha representación se le llama diagramas de espaciotiempo. Para el movimiento bidimensional y unidimensional, los diagramas representan exactamente el movimiento, para el caso tridimensional es necesario hacer proyecciones de tal manera que en los diagramas siempre aparezca un eje temporal y al menos un eje espacial.

Empecemos, por claridad, considerando el caso sencillo con dos coordenadas; la temporal y una espacial:  $(t, x)$ . En el eje de las ordenadas representaremos el tiempo y en el eje de las abscisas las posiciones.

Notemos que los eventos son los puntos en un diagrama y que al moverse, un objeto ocupa diferentes puntos dibujando una trayectoria en el espaciotiempo misma que ahora llamaremos línea mundo.

En la figura 2.4 mostramos líneas mundo para varios objetos.

En Mecánica Clásica aprendemos que podemos construir una variable dinámica, la acción, y que el movimiento es tal que ésta es extrema. En relatividad hacemos uso de un principio equivalente llamado “El principio de extremo envejecimiento”: *El camino que una partícula recorre entre dos eventos en el espaciotiempo es tal que el lapso de tiempo entre éstos, medido por un reloj que va con la partícula, es un extremo.*

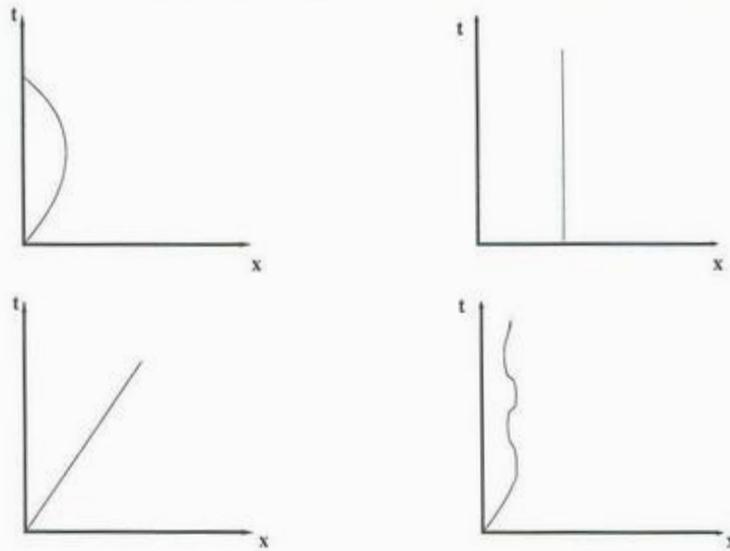


Figura 2.4: Esbozo de distintos diagramas de espaciotiempo, las líneas mundo representan las trayectorias de la partícula en el espaciotiempo. Las líneas mundo curvas representan que en algún momento del recorrido la partícula tuvo una aceleración, las líneas mundo rectas representan que la partícula escogió el camino más recto posible o en su caso sólo dejó transcurrir el tiempo, permaneciendo en el mismo lugar.

## 2.2. Conservación de la Energía y Momento

La relatividad define a la energía mecánica total y al momento lineal en su forma relativista, de tal manera que ahora la energía mecánica total se define como:

$$\mathcal{E} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Por otro lado el momento lineal se define como:

$$P = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2}}$$

El momento, la masa y la energía al igual que el tiempo se deben modificar de la Mecánica Clásica a la Relatividad Especial, para hacer estas modificaciones usaremos el principio de extremo envejecimiento.

Pero tendremos que tener cuidado porque sabemos que cualquier objeto con masa no puede moverse a la velocidad de la luz, cuando tal objeto se aproxima a la velocidad de la luz un observador estacionario medirá que la energía cinética del objeto y el momento tienden a infinito.

Encontraremos las constantes de movimiento para la relatividad, considerando el siguiente ejemplo:

Una partícula se mueve en línea recta y emite tres pulsos de luz de los cuales el primero y el último son fijos separados a una distancia  $S$ . Consideremos que el pulso 1 sucede a un tiempo cero y el pulso 3 un tiempo,  $T$ , posterior y permitamos que la emisión del punto intermedio ocurra en diferentes tiempos,  $t$ , pero en el mismo lugar, como se muestra en la figura 2.5:

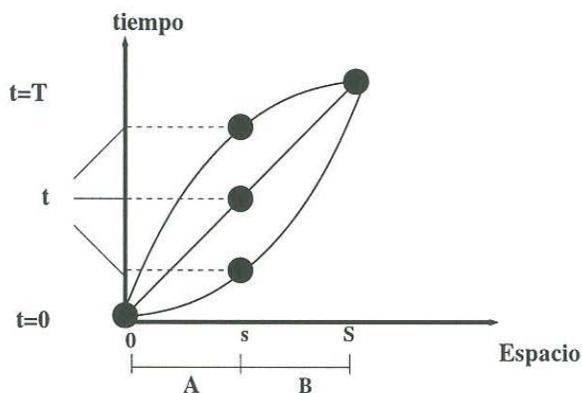


Figura 2.5: En este diagrama tenemos la representación de una partícula que se mueve con velocidad constante en línea recta por tres diferentes trayectorias posibles, en su trayecto emite tres pulsos de luz donde el inicial y el final permanecen fijos, dejando así, libre el pulso número dos, ¿Cuál es el camino que debe seguir la partícula? la respuesta es que la partícula sigue el camino más recto posible.

Calculando el intervalo de espaciotiempo el segmento A, entre los pulsos 1 y 2, al cual le llamaremos  $d\tau_A$  tenemos

$$d\tau_A = [(t - 0)^2 - (s - 0)^2]^{1/2} \quad (2.3)$$

De igual manera calcularemos el tiempo propio para segmento B, mismo que le llamaremos  $d\tau_B$ .

$$d\tau_B = [(T - t)^2 - (S - s)^2]^{1/2} \quad (2.4)$$

Entonces el tiempo propio total del evento inicial hasta el evento final es la suma de los tiempos propios de los segmentos A y B

$$d\tau = d\tau_A + d\tau_B$$

De 2.3 y 2.4 podemos ver que la expresión para el tiempo propio a quedado como función del tiempo intermedio  $t$ , el parámetro que debemos variar para encontrar el máximo tiempo propio

posible. Procedemos en cada parte, primero en el segmento A:

$$\delta_t \tau_A = \frac{(t-0)}{[(t-0)^2 - (s-0)^2]^{1/2}} = \frac{(t-0)}{d\tau_A} \tag{2.5}$$

Para el segmento B tenemos

$$\delta_t \tau_B = -\frac{(T-t)}{[(T-t)^2 - (S-s)^2]^{1/2}} = -\frac{(T-t)}{d\tau_B} \tag{2.6}$$

Para encontrar en que tiempo pasa la partícula emitiendo el pulso 2 tal que el tiempo propio total sea un extremo, calculamos:

$$\delta_t \tau = \delta_t \tau_A + \delta_t \tau_B = \frac{t}{d\tau_A} - \frac{T-t}{d\tau_B} = 0$$

y encontramos que

$$\frac{t}{d\tau_A} = \frac{T-t}{d\tau_B} \tag{2.7}$$

Reflexionando sobre las distintas cantidades en esta última ecuación, permitamos que el cambio en las coordenadas sea arbitrariamente pequeño, por lo que identificamos a  $t$ , el tiempo que tarda en recorrer la partícula el segmento A, con  $dt_A$ . De igual manera el tiempo en el cual la partícula recorre el segmento B,  $(T-t)$  lo identificamos con  $dt_B$  por lo que la ecuación 2.7 se puede escribir como:

$$\frac{dt_A}{d\tau_A} = \frac{dt_B}{d\tau_B} \tag{2.8}$$

Ahora nos preguntamos: ¿Qué pasa si a la línea que recorre la partícula le aumenta un segmento más, llamémosle C? Ahora la partícula emitirá otro pulso más y calcularemos su  $\tau_C$ , entonces tomariamos en cuenta sólo al segmento B y C de manera tal que llegaríamos a una ecuación similar a la 2.8 pero con B y C en los tiempos. Podemos seguir añadiendo segmentos (o considerando pulsos), de esta manera la ecuación 2.8 se aplicaría para todos los demás segmentos ya que cada uno sería igual al anterior por lo que podríamos escribir:

$$\frac{dt_A}{d\tau_A} = \frac{dt_B}{d\tau_B} = \frac{dt_C}{d\tau_C} = \frac{dt_D}{d\tau_D} = \dots \tag{2.9}$$

Llegamos a la conclusión de que esta relación entre el tiempo medido por distintos observadores y el tiempo propio es una constante de movimiento para una partícula libre moviéndose en el espaciotiempo plano

$$\frac{dt}{d\tau} = C \tag{2.10}$$

Pero no sabemos cuál es esa constante de movimiento ¿cuánto vale?, para encontrar su valor sustituiremos en  $\tau$  la métrica como la conocemos, la ecuación 2.2, y tenemos

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{dt}{((dt)^2 - (ds)^2)^{1/2}} = \frac{dt}{(dt)(1 - (\frac{ds}{dt})^2)^{1/2}} = \frac{1}{(1 - v^2)^{1/2}} = \frac{\mathcal{E}}{m}$$

Encontramos que el valor de la constante corresponde a la definición de la energía en Relatividad definida anteriormente:

$$\mathcal{E} = m \frac{dt}{d\tau} \quad (2.11)$$

Podemos repetir el análisis para el momento, ahora permitimos que el pulso numero 2 ocurra en el mismo tiempo y variamos la distancia  $s$ , con este análisis, la constante de movimiento queda:

$$\frac{ds}{d\tau} = \frac{ds}{(dt^2 - ds^2)^{1/2}} = \frac{ds/dt}{[1 - \frac{ds^2}{dt^2}]^{1/2}} = \frac{v}{(1 - v^2)^{1/2}} = \frac{P}{m} \quad (2.12)$$

Podemos usar las dos constantes encontradas para escribir la relación entre el momento lineal y la energía. Partimos del intervalo entre dos eventos, separados una distancia  $ds$  y que ocurren a una diferencia de tiempos  $dt$ :

$$d\tau^2 = dt^2 - ds^2$$

multiplicamos la ecuación anterior por  $\frac{m^2}{d\tau^2}$

$$m^2 = \left(m \frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(m \frac{ds}{d\tau}\right)^2 \quad (2.13)$$

sustituyendo las ecuaciones 2.11 y 2.12

$$m^2 = \mathcal{E}^2 - P^2$$

Aquí vemos que energía, momento lineal y masa están unidos en esta descripción geométrica del espaciotiempo. Por esta razón, siempre discutiremos a la energía por unidad de masa y al momento por unidad de masa.

## 2.3. Gravedad y Curvatura del Espaciotiempo

 En Relatividad hablamos con frecuencia de observadores. Nos referimos a un observador por un sistema que registra las coordenadas  $(t, x, y, z)$  de un evento en algún sistema de referencia inercial. Como consecuencia del Principio de Relatividad este observador no puede registrar todos los eventos ocurridos en el espaciotiempo y sólo podrá registrar el evento

que ha ocurrido en el mismo lugar donde se encuentra su origen. Para medir todos los eventos que ocurren en el espaciotiempo debemos construir un arreglo cúbico distribuido por todo el espacio tal que este arreglo tendrá en cada esquina colocado un reloj en reposo, sincronizados todos ellos con respecto al reloj de origen éstos registrarán los eventos ocurridos sobre todo el espacio. La separación entre estos relojes es arbitraria, sin embargo entre más pequeña sea más precisos serán los valores que se registren de cada evento. Los relojes así colocados serán los observadores y el hecho de que este arreglo sea cúbico significa que el espaciotiempo es plano en la Relatividad Especial. Sólo podrá medir los eventos que ocurran localmente, todas las mediciones registradas en el espaciotiempo pueden ser recogidas y analizadas por cualquier experimentador.

¿Cómo podemos darnos cuenta de que estamos en un espacio curvo si no tenemos un aparato que mida la presencia de gravedad o de curvatura?

Regresemos al ejemplo del vagón mencionado en la sección 2.1. Cuantifiquemos el experimento suponiendo que el observador que viaja en dentro del vagón coloca dos pelotitas separadas a  $20m$  y que el laboratorio se deja caer, del reposo, desde una altura de  $315m$  sobre la superficie de la tierra. Después de  $8s$  el obrervador ve que la distancia de las pelotas se ha reducido  $10^{-3}m$  de modo que puede adjudicar el movimiento a la presencia de una fuerza gravitacional sobre su laboratorio.

¿Cómo explicamos este comportamiento sin recurrir a la definición de fuerza? Analicemos la siguiente parábola para encontrar una explicación alternativa:

Un viajero,  $A$ , parado en el ecuador, listo para viajar al norte en una línea recta. Un compañero  $B$ , parado hombro con hombro, gira  $90$  grados y camina en línea recta hacia el este. Después de un tiempo corto.  $B$  está a  $20km$  separado de  $A$  a lo largo del ecuador y gira  $90$  grados quedando de nuevo hacia el norte. Ahora los dos viajan  $200km$  hacia el norte.

En el principio los dos comienzan estrictamente paralelos. Cada uno de ellos no se desvía ni a la derecha ni a la izquierda, sin embargo al llegar a los  $200Km$  miden su separación y encuentran que es menor de  $20Km$ . Nosotros sabemos bien que la superficie de la Tierra es curva, entonces si ellos continúan caminando se encontrarán en un punto llamado el polo norte. Ahora uno acelera con respecto a otro y vuelven a hacer el experimento y a pesar de esa aceleración el resultado es el mismo. Sin importar que transporte escojan para su viaje, al medir la separación entre ellos en un punto, será cada vez menor, los viajeros concluyen que ese acercamiento es parecido al experimento del observador que se encuentra dentro del vagón, esto sugiere que podemos tratar a la gravedad como curvatura y viceversa.

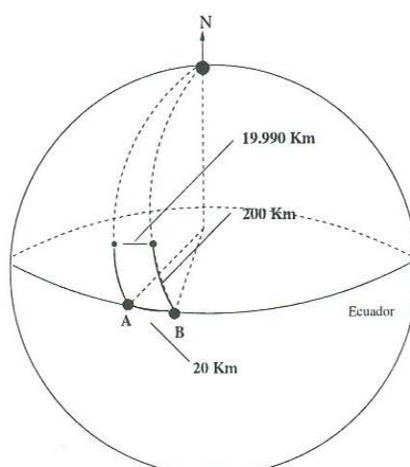


Figura 2.6: Representación de la parábola de los viajeros, en el cual están parados en el ecuador, listos para emprender un viaje hacia el norte sobre la línea más recta posible. El viajero *B* se encuentra separado del viajero *A* a una distancia de 20km, los dos viajan hacia el norte 200km, al final de su trayecto miden de nuevo su separación y reconocen que ésta es menor a la inicial.

Entonces nuestro espacio se puede curvar mediante la presencia de un objeto masivo, debemos tener claro que curvatura y gravedad están ligados, es decir la curvatura le dice al objeto masivo como acomodarse y el objeto masivo le dice al espacio como curvarse, por lo tanto gravedad y curvatura son uno mismo.

Reconocemos de inmediato que un arreglo cúbico funciona muy bien para espacios planos, pero ¿Qué pasa cuando nuestro espacio ya no es plano?.

Para eso el observador tendrá que usar muchos sistemas de referencia, suficientemente pequeños de tal manera que al hacer un experimento éste cumpla con la primera ley de Newton, y todos estos sistemas pequeñitos de alguna manera se tienen que conectar, la manera de conectarlos es con Relatividad General.

En presencia de objetos masivos que curven nuestro spaciotiempo plano el observador debe cambiar el arreglo cúbico de relojes sincronizados a un arreglo esférico imaginario, que estará a una distancia  $r$ . No podemos medir el radio directamente, ya que es en la dirección radial donde actúa la gravedad. Colocamos alrededor de estos objetos masivos un cascarón esférico, todos los puntos de éste serán igualmente afectados por la gravedad de tal manera que podemos medir sin problema el perímetro de ese cascarón esférico, la circunferencia de una esfera. Dividimos esta circunferencia por  $2\pi$  y obtenemos así la distancia radial hacia el centro de atracción gravitacional.

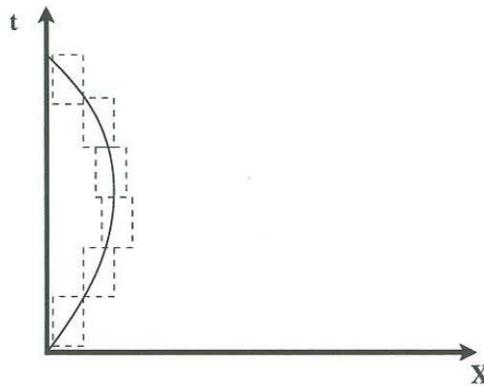


Figura 2.7: En este diagrama de espaciotiempo representamos la trayectoria de una partícula que se encuentra bajo la presencia de un centro atractor. Si vemos toda la trayectoria, la partícula no se encuentra en un Sistema de Caída Libre, sin embargo si escogemos sistemas de referencia suficientemente pequeños, entonces nos encontraremos una secuencia de Sistemas de Caída Libre donde es más sencillo explicar el movimiento.

El radio del objeto esférico producido por este método de medición recibe el nombre de “r-coordenada”, en nuestro caso le llamaremos distancia radial y la denotaremos por  $r$ :

$$\begin{aligned} \text{circunferencia reducida} &= r \\ &= \frac{\text{circunferencia}}{2\pi} \\ &= \text{r-coordenada} \end{aligned}$$

La r-coordenada es el radio calculado por la circunferencia de la esfera. Este valor de  $r$  es calculado en todos los cascarones que pongamos alrededor del centro de atracción gravitacional en donde la separación entre cascarones es un poco más que la distancia radial entre ellos y en donde abordaremos más adelante la forma de medir estas distancias entre los cascarones esféricos.

## 2.4. Corrimiento al Rojo Gravitacional

El corrimiento al rojo gravitacional es diferente al efecto Doppler, el primero, como su nombre lo dice, es debido a la presencia de un campo gravitacional, producido por un objeto masivo alrededor del cual el espaciotiempo es curvo. Supongamos un objeto masivo en el cual ponemos a un observador a una distancia  $r$  del centro de atracción gravitacional y ponemos otro observador a una distancia remota  $r_1$  del centro de atracción gravitacional donde

$r_1 > r$  en donde cada observador pondrá un cascarón esférico alrededor del objeto masivo. El observador que se encuentra parado en el cascarón esférico de radio  $r$  manda un pulso de luz cada segundo, el observador lejano mide el periodo entre los pulsos de luz y éstos son más largos. Esto es porque a medida que nos vamos acercando al centro de atracción gravitacional el periodo de luz incrementa cada vez más. Todo lo que tenga un periodo se verá afectado por la gravedad, el observador lejano verá todo más lento, comparado con lo que ve un observador cercano al centro de atracción gravitacional.

Para cuantificar este efecto, realicemos el siguiente experimento pensado: Una torre de altura  $h$  está construida sobre la superficie de la tierra, colocamos una partícula en reposo de masa  $m$  en un extremo de la torre y dejamos caer la partícula con una aceleración  $g$ . En la base de la torre se coloca un aparato capaz de convertir toda la masa en un pulso de luz, en el aparato la partícula llega con una energía mecánica total  $\mathcal{E} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}$ . Después de hacer un desarrollo de  $(1-v^2)^{-1/2}$ , tenemos que la energía mecánica total es  $\mathcal{E} = m + \frac{1}{2}mv^2 + O(v^4)$ , sustituyendo a su vez la velocidad (de la conservación de la energía,  $v = \sqrt{2gh}$ ) se tiene que  $\mathcal{E} = m + mgh + O(v^4)$ .

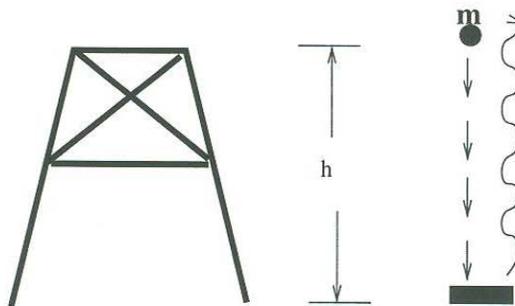


Figura 2.8: Una partícula de masa  $m$  en reposo, se deja caer desde una torre de altura  $h$ . En la superficie de la tierra se coloca una caja que convierte toda la masa a un pulso de luz, el cual es dirigido nuevamente hacia arriba.

Toda la energía de la partícula se convierte en el pulso, el cual es dirigido hacia arriba. A su llegada a la cima de la torre éste llega con una energía total  $\mathcal{E}'$  y es transformado de nuevo a una partícula en reposo de masa  $m' = \mathcal{E}'$ . Para que la partícula de masa  $m'$  permanezca en reposo entonces se debe cumplir que  $m' = m$ , de no ser así podríamos generar masa con este mecanismo, lo cual no es posible, así que  $\mathcal{E}' = m$ . Analizando ahora las energías

$$\frac{\mathcal{E}'}{\mathcal{E}} = \frac{h\nu'}{h\nu} = \frac{m}{m + mgh + O(v^4)} < 1$$

Esta ecuación nos confirma que hay corrimiento, debido a que el cociente de energías resultó menor que uno, pero para saber hacia donde es el corrimiento, es necesario analizar la ecuación en términos de sus frecuencias, recordando que hacia el azul la frecuencia es cada vez mayor.

$$\frac{\nu'}{\nu} < 1$$

$$\nu' < \nu$$

Esto es que la frecuencia que es observada es menor que la frecuencia emitida, por lo que existe un corrimiento al rojo y en nuestro caso es gravitacional: debido a la presencia de un cuerpo masivo. Así, el observador lejano siempre medirá las frecuencias de alguna variable oscilatoria mayores a las emitidas por el observador en un cascarón cercano al centro de atracción gravitacional.

## 2.5. Ecuación de Einstein

Todo lo estudiado hasta ahora nos lleva a concluir, que la Relatividad Especial describe espacios vacíos de masa, con una geometría plana cuya métrica está dada por la ecuación 2.2. La Teoría de Relatividad General incluye el efecto de la gravedad, la cual es generada por la masa al curvar el espaciotiempo.

La ecuación fundamental de la Relatividad General es la ecuación de Einstein[6]

$$G^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu} \quad (2.14)$$

que resume la naturaleza geométrica de la interacción gravitacional. En su lado izquierdo, aparece el tensor de curvatura:

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R$$

define la forma del espaciotiempo a través del tensor de Ricci,  $R^{\mu\nu}$ , y el escalar de Ricci,  $R$ , los cuales a su vez, son definidos por la métrica,  $g^{\mu\nu}$ , por lo tanto en este término se resumen el efecto que tiene la masa sobre una región de espaciotiempo.

El lado derecho de la ecuación para el campo gravitacional corresponde al tensor de esfuerzo y energía,  $T^{\mu\nu}$ , éste es un objeto que resume el contenido energético en una región del espaciotiempo. Como en Relatividad la masa es sólo una forma más de energía, el campo gravitacional se verá afectado por la distribución tanto de energía como de materia en una región. Cada elemento del tensor está definido de la siguiente manera:

$$T^{\alpha\beta} \equiv \begin{array}{l} \text{Flujo de la } \alpha\text{-ésima componente de momento} \\ \text{a través de una superficie con } X^\beta \text{ constante.} \end{array}$$

Con esta definición,  $T^{00}$ , es la densidad de energía; mientras que,  $T^{ij}$ , es el flujo de la  $i$ -ésima componente de momento a través de la superficie con coordenada  $X^j$  constante.

La solución a la ecuación 2.14 está más allá de los alcances de este trabajo; por lo pronto sólo mencionaremos que al resolverla podremos conocer la métrica  $g^{\mu\nu}$ , del espaciotiempo curvo por contener una región material.

En este trabajo consideramos que la curvatura es producto de la presencia de un objeto esféricamente simétrico, que no posee carga y cuyo giro es despreciable. La condición de simetría esférica se debe a que el efecto de gravedad es radial e igual en todas direcciones; por otra parte, la naturaleza de todos los cuerpos celestes es neutra (macroscópicamente no existen cuerpos cargados) y la condición sobre la velocidad de giro nos limita al estudio de centros atractores que giran con una velocidad mucho menor que la velocidad de la luz, como el Sol. Nos interesa imponer estas condiciones pues los sistemas que estudiamos son estrellas alrededor de las cuales giran planetas y en particular aplicaremos nuestros resultados a una aproximación del sistema Sol-Mercurio.

## Capítulo 3

### *Problema de Campo*

### *Central en Relatividad*

### *General*

En el capítulo anterior estudiamos algunos conceptos de Relatividad para encontrar, al igual que en la Mecánica Clásica, constantes de movimiento: la energía mecánica total y el momento lineal. Hicimos lo anterior para espaciotiempos planos, pero la manera de encontrar estas constantes de movimiento nos servirá para buscar constantes similares, ahora en espaciotiempos curvos. Como mencionamos en el capítulo anterior, debemos aplicar la métrica para espaciotiempos curvos generados por un centro atractor. A continuación empezamos por describir esta métrica.

### 3.1. Métrica de Schwarzschild

Recordemos que en el capítulo anterior presentamos la métrica en coordenadas cartesianas para espaciotiempos planos dada por la ecuación 2.2, ya que en coordenadas esféricas está dada por

$$d\tau^2 = dt^2 - (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Como ya mencionamos para obtener la métrica que describa el movimiento en espaciotiempos curvos, es necesario resolver la ecuación de Einstein. En nuestro caso nos concentraremos en describir aquellos espaciotiempos curvos generados por una masa sin carga, sin girar y esféricamente simétrica, en tal situación la solución a la ecuación de Einstein provee la siguiente métrica[6]:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Justificaremos más adelante que, con esta elección, de igual manera se conserva la energía mecánica total y el momento angular por lo que, como lo hicimos en el estudio clásico, podemos

escoger el plano  $\theta = \pi/2$  y la métrica queda

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} - r^2 d\varphi^2 \quad (3.1)$$

Recordemos que  $r$  es ahora la circunferencia reducida,  $t$  es llamado el tiempo del observador lejano y  $r d\varphi$  es la distancia medida tangencialmente a lo largo de cascarones concéntricos a la masa atractora. Para distancias muy lejanas al centro de atracción la métrica se reduce a la forma de medir los espaciotiempos planos. Los términos que aparecen en  $dt$  y  $dr$  son el factor de curvatura, observemos que éstos sólo dependen de la circunferencia reducida, no del ángulo  $\varphi$ . Para el caso en que  $r$  toma el valor  $2M$  el término que contiene a  $dt$  se anula y observemos que se indefine la parte radial. Por otra parte si  $r < 2M$  cambia el signo de la métrica en los términos que contienen al factor de curvatura intercambiando los sectores como el espacio y como el tiempo es esta región ( $r < 2M$ ). Notemos que  $r = 2M$  sirve de horizonte para dividir el espaciotiempo en dos regiones, una exterior ( $r > 2M$ ) donde la métrica se comporta de la manera que hemos estudiado en la relatividad especial y una interior ( $r < 2M$ ) en donde el comportamiento no corresponde a la experiencia cotidiana. Regresaremos a esta discusión una vez que hayamos discutido más propiedades de la métrica, en la sección 3.4.

Calcularemos el tiempo propio de dos flachazos de luz, para eso consideremos una varilla rígida que mide la distancia radial entre dos cascarones, en donde en cada extremo se emite un flachazo de luz al mismo tiempo,  $dt = 0$ , y en donde los 2 pulsos ocurren en igual coordenada azimutal,  $d\varphi = 0$ . Entonces al tiempo propio le llamaremos ahora distancia propia al sobrevivir sólo la parte que contiene  $dr$ , la métrica queda:

$$dr_{shell} = d\tau = \frac{dr}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}} \quad (3.2)$$

Aquí  $dr$  es la diferencia entre los dos cascarones dadas por la circunferencia reducida, mientras que  $dr_{shell}$  es la distancia medida directamente entre los cascarones por algún instrumento que apunte en la dirección radial.

Ahora pondremos un ejemplo para analizar el término de la métrica (3.1) que contiene  $dt^2$ , en donde también se encuentra el factor de curvatura. Pensemos en un reloj anclado en un cascaron de radio  $r$ . Escojemos dos eventos tales que se emite un pulso de luz por el reloj separados por un intervalo de tiempo  $d\tau$ , medidos por el reloj. Entre estos dos eventos del reloj los términos que contienen a  $dr$  y  $d\varphi$  en la métrica son cero, pues recordemos que está anclado a la superficie de un cascarón particular, llamemos  $dt_{shell}$  al tiempo entre cada evento, medido por el observador

que acompaña al reloj, así la métrica queda

$$d\tau = dt_{shell} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} dt$$

donde  $dt$  corresponde al lapso de tiempo lejano y  $dt_{shell} < dt$ , lo cual es congruente con el corrimiento al rojo gravitacional, la relación de distintos observadores es similar al caso del espaciotiempo plano, donde colocamos un arreglo cúbico de relojes sincronizados, ahora en espacios curvos, no podemos poner ese arreglo ya que se vería afectado por el centro de atracción gravitacional, de ahí la necesidad de poner cascarones esféricos para observar los eventos.

### 3.2. Energía en la Geometría de Schwarzschild

Para calcular la energía en esta geometría es necesario usar el principio de extremo envejecimiento, solo que ahora asumimos que el espaciotiempo es curvo, debido a la presencia de un objeto masivo, central. En este caso la partícula escoge la línea mas recta posible que corresponde ahora a una geodésica. Consideremos una partícula que cae radialmente un centro de atracción gravitacional descrito por la métrica de Schwarzschild.

Pensemos en una partícula cayendo radialmente hacia el centro de atracción, en este caso tendrá siempre la misma coordenada azimutal por lo que  $d\varphi = 0$ . Consideremos que, al caer, la partícula emite tres pulsos de luz, donde el inicial,  $t = 0$ , y el final, en  $t = T$ , son fijos.

En el siguiente análisis examinaremos el tiempo propio de los segmentos A y B usando la métrica de Schwarzschild. El primer pulso de luz ocurre a un tiempo  $t = 0$  y el último a un tiempo  $T$ , dejando el segundo pulso a un tiempo  $t$  arbitrario. Vamos a considerar variaciones en la línea mundo al variar sólo el tiempo por lo que podemos escribir la métrica de la siguiente manera:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + f(r)$$

Procedemos a calcular el tiempo propio total de la partícula

$$d\tau = d\tau_A + d\tau_B$$

por lo que primero calcularemos por separado los segmentos A y B usando el principio de extremo envejecimiento.

$$\delta_t d\tau = \delta_t(d\tau_A + d\tau_B) = 0 \tag{3.3}$$

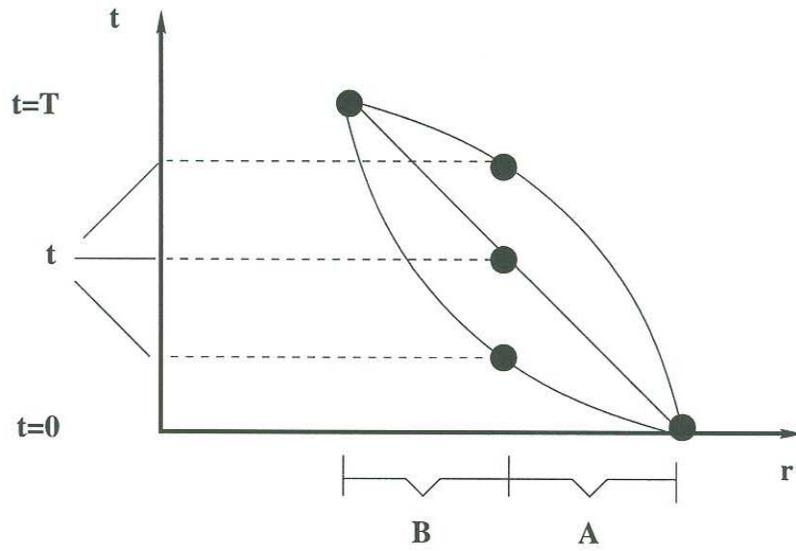


Figura 3.1: Simulación de la caída radial de una partícula hacia el centro atractor, la cual emite tres pulsos de luz a diferentes tiempos. El inicial y el final son fijos, mientras que el segundo es emitido a un tiempo arbitrario  $t$ , correspondiente a diferentes caminos posibles. La partícula siempre tendrá la misma coordenada azimutal

calculamos el tiempo propio del segmento A y su variación en el tiempo. El tiempo propio del segmento A está dado de la siguiente manera

$$d\tau_A = \left[ \left( 1 - \frac{2M}{r_A} \right) dt^2 + f(r) \right]^{1/2}$$

Donde hay que tener en cuenta que usamos la notación  $dt = (t - 0)$ , ya que los pulsos ocurren a intervalos infinitesimalmente pequeños de tiempo y separados por distancias pequeñas. Por esta última razón hemos escrito  $r_A$  para la coordenada radial durante el segmento A, por considerarlo como el radio promedio del segmento.

$$\delta_t d\tau_A = \frac{\left( 1 - \frac{2M}{r_A} \right) dt}{\left[ \left( 1 - \frac{2M}{r_A} \right) dt^2 + f(r) \right]^{1/2}} = \left( 1 - \frac{2M}{r_A} \right) \frac{t}{d\tau_A}$$

Guardemos este cálculo por un momento y procedemos a calcular el tiempo propio del segmento B y de igual manera su variación en el tiempo. El tiempo propio del segmento B está dado de la siguiente manera:

$$d\tau_B = \left[ \left( 1 - \frac{2M}{r_B} \right) dt^2 + f(r) \right]^{1/2}$$

Donde ahora para el segmento B tendremos que  $dt = (T - t)$

$$\delta_t d\tau_B = \frac{-\left(1 - \frac{2M}{r_B}\right) dt}{\left[\left(1 - \frac{2M}{r_B}\right) dt^2 + f(r)\right]^{1/2}} = -\left(1 - \frac{2M}{r_B}\right) \frac{(T - t)}{d\tau_B}$$

Sustituimos ahora  $\delta_t d\tau_A$  y  $\delta_t d\tau_B$  en la ecuación 3.3 tenemos

$$\left(1 - \frac{2M}{r_A}\right) \frac{t}{d\tau_A} - \left(1 - \frac{2M}{r_B}\right) \frac{(T - t)}{d\tau_B} = 0$$

Llamaremos también  $t = dt_A$  y  $(T - t) = dt_B$

$$\left(1 - \frac{2M}{r_A}\right) \frac{dt_A}{d\tau_A} = \left(1 - \frac{2M}{r_B}\right) \frac{dt_B}{d\tau_B}$$

En la expresión anterior del lado izquierdo depende solo de los parámetros del primer segmento,  $A$ ; mientras que la del lado derecho depende solo de los parámetros del segmento,  $B$ . Esta ecuación indica una cantidad que no cambia de un segmento a otro. El valor de la constante es independiente de cuál segmento escojamos. Hemos encontrado una constante de movimiento que es la misma para todos los segmentos. De la misma manera que en relatividad especial le llamaremos a esa constante Energía mecánica, sólo que ahora tendrá un factor de curvatura.

$$E = \frac{\mathcal{E}}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau}$$

Analizando un poco la ecuación anterior observemos que cuando  $r \rightarrow \infty$  recuperamos la expresión para la energía en relatividad especial,  $E = dt/d\tau$ . Esta es la energía mecánica total de una partícula que se mueve alrededor del centro de atracción gravitacional, esféricamente simétrico, sin girar y sin carga.

Encontramos que el factor  $E$  es una constante de movimiento, supongamos ahora que se deja caer desde el infinito a una partícula que se encuentra inicialmente en reposo, entonces su energía mecánica total es  $E = 1$  y como es una constante de movimiento entonces podemos escribir

$$E = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} = 1$$

Elevamos al cuadrado la ecuación anterior y multiplicamos ambos lados por  $d\tau^2$

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 dt^2 = d\tau^2$$

Identificamos el lado derecho con la métrica de Schwarzschild dada por la ecuación 3.1, no hay que olvidar que estamos suponiendo caída radial entonces  $d\varphi = 0$ .

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 dt^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}}$$

Dividimos todo por  $dt^2$  y resolveremos para  $\frac{dr}{dt}$

$$\frac{dr}{dt} = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2}$$

Escogemos el signo negativo para indicar que la partícula está cayendo hacia el centro atractor. Esta es la velocidad del observador lejano dada en términos de la circunferencia reducida y el tiempo del observador lejano, cuando  $r = 2M$  la velocidad es cero, esto es que el observador lejano ve que la partícula nunca cruza el horizonte.

Ahora analizaremos como es la velocidad vista por un observador que se encuentra a una distancia  $r$  del centro del atractor, es decir en un cascarón esférico (imaginario), recordemos como es la distancia y el tiempo en éste:

$$\begin{aligned} dr_{shell} &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} dr \\ dt_{shell} &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} dt \end{aligned}$$

Con estas dos ecuaciones obtenemos la velocidad del observador en el cascarón:

$$\frac{dr_{shell}}{dt_{shell}} = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} dr}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} dt}$$

Observemos que  $\frac{dr}{dt}$  es la velocidad del observador lejano calculada anteriormente por lo que la sustituimos en la ecuación anterior.

$$v_{shell} = \frac{dr_{shell}}{dt_{shell}} = - \frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} = - \left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2}$$

Cuando el observador está parado en un cascarón esférico donde  $r = 2M$ , observa que la velocidad de la partícula es igual a la velocidad de la luz, lo que concuerda con el corrimiento al rojo gravitacional, mientras que el observador lejano percibe que la partícula nunca llega al horizonte, el observador del cascarón no sólo ve que llega, sino que pasa a una velocidad igual a la de la luz. Encontraremos ahora la energía en el cascarón usando la ecuación 2.11 encontrada con la relatividad especial y sustituyendo en ella  $v_{shell}$ .

$$E_{shell} = \frac{1}{(1 - v_{shell}^2)^{1/2}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}}$$

Esta energía es una cantidad local medida por el observador en el cascarón, no es una constante de movimiento, usamos relatividad especial porque en el instante que pasa la partícula por el cascarón su sistema de referencia es inercial, en donde incluye a la energía en reposo y la energía cinética.

## 3.3. Conservación del Momento Angular en Relatividad General

Cuando estudiamos a la energía y al momento lineal en relatividad especial, encontramos que estas cantidades físicas son constantes de movimiento. Por su parte, en el capítulo 1, encontramos que en presencia de un campo gravitacional, la energía mecánica total y el momento angular se conservan; ahora esperamos que suceda algo similar en Relatividad General.

Para analizar el momento angular consideremos el siguiente ejemplo: Una partícula se mueve alrededor de un centro atractor, el cual emite tres pulsos de luz, tales que el pulso 1 y 3 son fijos, mientras permitimos que el pulso 2 pueda variar. Para calcular las coordenadas con las que ocurre el siguiente pulso sabemos que éste se debe emitir a un tiempo que el total entre los dos pulsos fijos será extremo. Calcularemos el tiempo propio partiendo de la métrica de Schwarzschild, pero hay que tener en cuenta que la partícula está girando por lo que la variable  $\varphi$  está cambiando.

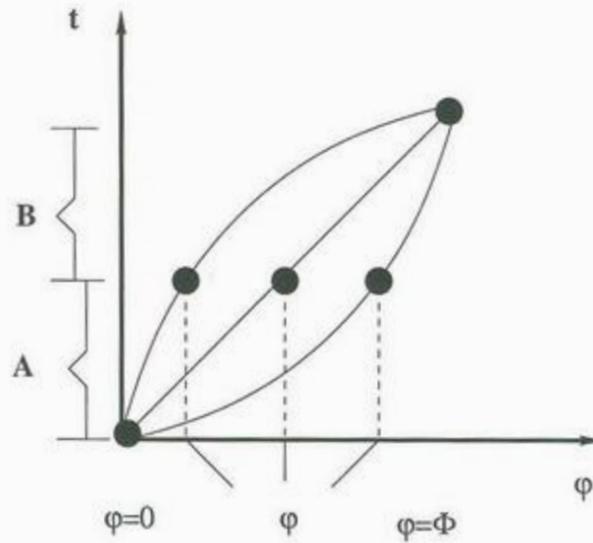


Figura 3.2: En esta figura estamos considerando a una partícula que se mueve alrededor del centro atractor, esto implica no hay cambios en la dirección radial, por lo que la variable cambiante es la azimutal. Esta partícula emite tres pulsos de luz donde el inicial y el final son fijos, el segundo se emite arbitrariamente a una  $\varphi$

$$d\tau = [-r^2 d\varphi^2 + f(r, t)]^{1/2}$$

Calcularemos el tiempo propio del segmento A y su variación con respecto a la variable  $\varphi$  (dode

usamos  $d\varphi_A = \varphi - 0$ )

$$\begin{aligned} d\tau_A &= [-r_A^2 d\varphi^2 + f(r, t)]^{1/2} \\ \delta_\varphi d\tau_A &= \frac{1}{2} [-r_A^2 d\varphi^2 + f(r, t)]^{-1/2} (-2r_A^2 d\varphi_A) \\ \delta_\varphi d\tau_A &= -\frac{r_A^2 d\varphi_A}{d\tau_A} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Calcularemos lo mismo ahora para el tiempo propio para el segmento  $B$  (con  $d\varphi_B = \phi - \varphi$ )

$$\begin{aligned} d\tau_B &= [-r_B^2 d\varphi_B^2 + f(r, t)]^{1/2} \\ \delta_\varphi d\tau_B &= \frac{1}{2} [-r_B^2 d\varphi_B^2 + f(r, t)]^{-1/2} (2r_B^2 d\varphi_B) \\ \delta_\varphi d\tau_B &= \frac{r_B^2 d\varphi_B}{d\tau_B} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Aplicando de nuevo el principio de extremo envejecimiento sobre el tiempo propio total para la partícula:

$$\delta_\varphi d\tau = \delta_\varphi (d\tau_A + d\tau_B) = 0$$

Sustituimos en la ecuación anterior las ecuaciones 3.4 y 3.5 para obtener:

$$\frac{r_A^2 d\varphi_A}{d\tau_A} = \frac{r_B^2 d\varphi_B}{d\tau_B}$$

El lado derecho depende solo del segmento  $A$ , el lado izquierdo depende solo del segmento  $B$  entonces podemos generalizar ya que no depende del segmento que escojamos, siempre será igual a una constante. Igual que en mecánica clásica, excepto por el tiempo propio  $d\tau$  que aparece en el denominador nombramos a esta cantidad constante "momento angular"

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} &= cte \\ L &= \frac{\mathcal{L}}{m} \equiv r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} \end{aligned}$$

Esta es una nueva forma de medir el momento angular en donde  $d\tau$  no es el tiempo universal de Newton. Notemos que el momento angular constante, no implica que su velocidad sea constante ya que ésta depende explícitamente de la coordenada  $r$ .

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{L}{r^2} \quad (3.6)$$

Notemos que estas constantes de movimiento están ligadas a la métrica. Si en la métrica variamos  $\varphi$  ésta permanece constante, lo cual está ligado a una constante de movimiento que llamamos

momento angular; podemos escribir las primeras dos ecuaciones que describen al movimiento como:

$$dt = \frac{E}{1 - \frac{2M}{r}} d\tau \quad (3.7)$$

$$d\varphi = \frac{L}{r^2} d\tau \quad (3.8)$$

Y obtenemos la tercera de la métrica de Schwarzschild, sustituyendo en ella las dos ecuaciones anteriores.

$$dr = \pm \left\{ E^2 - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left( 1 + \frac{L^2}{r^2} \right) \right\}^{1/2} d\tau \quad (3.9)$$

### 3.4. Potencial Efectivo en el Espaciotiempo de Schwarzschild

Al igual que en mecánica clásica, el potencial efectivo relativista es construido con la ayuda de las constantes de movimiento. En este caso partimos de la métrica de Schwarzschild y sustituyendo los valores para  $dt$  y  $d\varphi$  de las constantes de movimiento 3.7 y 3.8:

$$d\tau^2 = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{E^2}{\left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^2} d\tau^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} - r^2 \frac{L^2}{r^4} d\tau^2$$

Despejamos el término con la dependencia en  $r$  y reacomodamos para escribir

$$\left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 = E^2 - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left[ 1 + \frac{L^2}{r^2} \right]$$

Recordando la expresión de la mecánica clásica cuando obtuvimos el potencial efectivo, podemos observar que lo definimos como el término que es restado a la energía. En este caso hemos llegado a una expresión cuadrática, por lo que nuestro potencial efectivo estará al cuadrado. El argumento anterior nos permite escribir al potencial efectivo relativista como:

$${}^{\prime}V^{/2} = \left( \frac{{}^{\prime}\mathcal{V}(r)}{m} \right)^2 = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left[ 1 + \frac{L^2}{r^2} \right] \quad (3.10)$$

Esta función depende sólo de la coordenada  $r$ , es decir, de la circunferencia reducida. Observemos que cuando  $r$  tiende a valores muy grandes el potencial es igual a la energía en reposo,  $m$ , que es el caso donde el espaciotiempo es plano y donde se aplica relatividad especial.

Cuando graficamos el potencial efectivo clásico, una parte de él es negativo, ahora para poder compararlo con el relativista debemos subir en una unidad al potencial efectivo clásico, añadiendo el término de energía de reposo. Observemos en la gráfica 3.3, que en el potencial

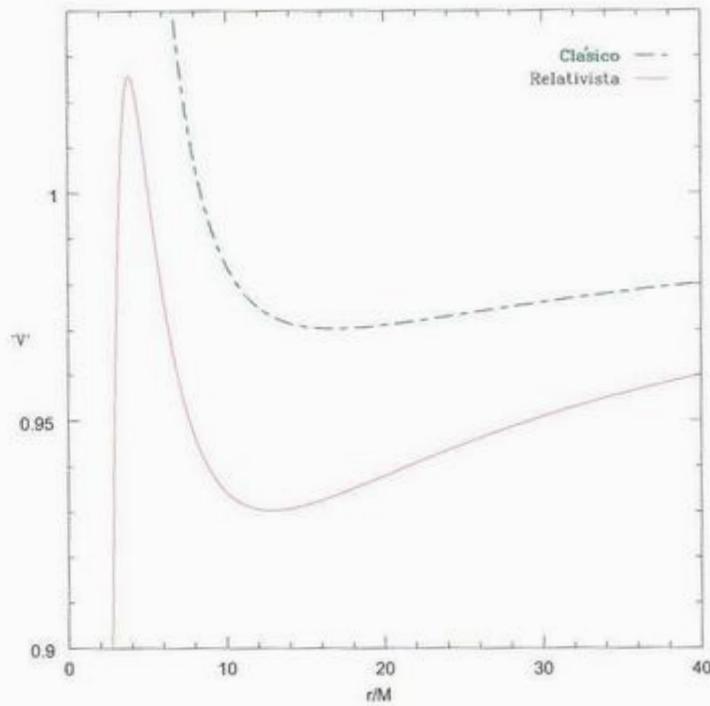


Figura 3.3: En esta gráfica comparamos el potencial relativista con el clásico en donde la diferencia mas notable es la existencia de un máximo en el potencial relativista.

efectivo relativista existen dos puntos críticos, máximo y mínimo. Como antes, en el mínimo se encuentra una órbita circular estable; en el máximo tenemos una órbita circular inestable. La existencia de este máximo define valores de energía tales que, si una partícula se encuentra con energía mayor, su órbita ya no tendrá un punto de retorno, que en el caso clásico llamamos  $r_{min}$ . Los objetos con estas energías caerán directamente hacia el centro de atracción gravitacional.

Recordando que, desde el inicio de este capítulo, hemos limitado nuestra discusión al estudio del espacio-tiempo alrededor de objetos esféricamente simétricos, las propiedades que acabamos de mencionar para el potencial nos permiten estar en condiciones de discutir el horizonte de eventos mencionado en la sección 3.1.

Nos preguntamos ahora por el destino de partículas que llegan a ocupar radios menores al horizonte: ¿Cuál será su destino? Para empezar a contestar esta pregunta empecemos por calcular la velocidad de escape de un objeto de masa  $m$ , a una distancia  $r$  del centro de atracción gravitacional de masa  $M$ . La solución clásica a este problema, usando el potencial en unidades

geométricas,

$$V(r) = -\frac{M}{r}$$

se basa en imponer la condición de que el objeto llegue a una distancia muy lejana del centro atractor y permanezca ahí en reposo. El problema se resuelve reconociendo que su energía mecánica total es

$$E = 0 = \frac{1}{2}v^2 - \frac{M}{r}$$

por lo que la velocidad para que el objeto pueda salir del centro de atracción gravitacional es de la siguiente manera

$$v = \left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2}$$

Esta ecuación es correcta también para la relatividad general, solo que como ya calculamos, aquí la velocidad es interpretada como la velocidad de un objeto cayendo medida por un observador del cascarón. Cuando nos encontramos a una distancia  $r = 2M$  la velocidad de escape es  $v_{esc} = 1$ , lo cual quiere decir que sólo la luz podrá salir a esa distancia, misma que habíamos llamado horizonte,  $r_{horizonte} = 2M$ . Una vez cruzando el horizonte, para  $r < 2M$ , ni la luz podrá escapar.

En nuestro estudio del campo gravitacional, hemos llegado a la conclusión de que los centros de atracción gravitacional curvan el espacio. A una distancia  $r = 2M$  de este centro se encuentra el horizonte, una vez cruzándolo ya nada puede salir, incluso la luz ya no puede escapar. Cuando el horizonte se encuentra dentro de la superficie del objeto masivo, entonces tenemos una estrella como el Sol, si pudiéramos comprimir la masa del atractor gravitacional a un volumen menor que su horizonte entonces éste no podría emitir luz y nos encontraríamos con un "agujero negro". La realidad física de estos objetos se ha podido demostrar indirectamente, lo cual se considera una corroboración de la Relatividad General. [9]

Por el momento calculemos los puntos críticos,  $r_c$ , de la ecuación 3.10 de la manera tradicional, donde el lado derecho de la ecuación es una función que depende solo de  $r$ , llamémosle  $f(r)$ :

$$V'^2 = f(r)$$

derivamos la ecuación anterior y nos preguntamos cuando la derivada es igual a cero para obtener los puntos críticos:

$$\left. \frac{dV'}{dr} \right|_{r_c} = \left. \frac{f'(r)}{2V'} \right|_{r_c} = 0$$

Para saber cuando la ecuación anterior es igual a cero, basta con saber que el potencial  $V' \neq 0$  para toda  $r \neq 2M$ , puesto que este es el valor mínimo que consideraremos para  $r$ ,

entonces  $V' > 0$  en la región de interés, por lo que basta con encontrar,  $r_c$ , tal que  $f'(r_c) = 0$

$$f'(r_c) = \frac{2M}{r_c^4} [r_c^2 - L^2 r_c + 3L^2]$$

Para que esta derivada sea cero solo basta que, lo que está entre corchetes sea cero, resolvemos para  $r_c$

$$r_c^2 - L^2 r_c + 3L^2 = 0 \quad (3.11)$$

y obtenemos

$$r_c = \frac{L^2}{2M} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{12M^2}{L^2}} \right] \quad (3.12)$$

Analizando el término que contiene la raíz, éste debe ser mayor que cero para tener soluciones reales entonces para que eso suceda se debe cumplir que

$$L^2 > 12M^2$$

Este límite lo discutiremos más adelante.

Para demostrar la característica de máximo o mínimo de los puntos críticos,  $r_c$ , aplicaremos la condición de la segunda derivada. Recordemos que si:

$$\left. \frac{d^2V}{dr^2} \right|_{r_c} \begin{cases} > 0 & \text{es mínimo} \\ < 0 & \text{es máximo} \end{cases}$$

Calculamos la derivada necesaria de manera implícita

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2V}{dr^2} \right|_{r_c} &= \left. \frac{d}{dr} \left( \frac{f'(r)}{2V'} \right) \right|_{r_c} \\ &= \left. \left( \frac{f''(r)}{2V'} \right) \right|_{r_c} - \left. \left( \frac{f'(r)}{2V'^2} \frac{dV'}{dr} \right) \right|_{r_c} \end{aligned}$$

la condición para punto crítico garantiza que el segundo término de esta expresión se anule:

$$\left. \left( \frac{f'(r)}{2V'^2} \frac{dV'}{dr} \right) \right|_{r_c} = 0$$

ahora bien, como el potencial valuado en ambos puntos críticos es positivo, tenemos que la condición para máximo o mínimo se puede reescribir asegurando que si

$$f''(r_c) \begin{cases} > 0 & r_c \text{ es mínimo} \\ < 0 & r_c \text{ es máximo} \end{cases}$$

Ahora bien, calculando la segunda derivada encontramos:

$$f''(r_c) = -\frac{8M}{r_c^5} \left[ r_c^2 - L^2 \frac{r_c}{M} + 3L^2 \right] + \frac{2M}{r_c^4} \left[ 2r_c - \frac{L^2}{M} \right]$$

el primer término de esta expresión se anula ya que corresponde a la condición para el punto crítico, contemplada en la ecuación 3.11, así que podemos escribir:

$$f''(r_c) = \frac{2M}{r_c^4} \left[ 2r_c - \frac{L^2}{M} \right]$$

por último el signo de la segunda derivada proviene directamente del término entre corchetes, de tal manera que la condición para máximo o mínimo se convierte en:

$$\begin{aligned} r_c &> \frac{L^2}{2M} && \text{si } r_c \text{ es mínimo} \\ r_c &< \frac{L^2}{2M} && \text{si } r_c \text{ es máximo} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución con el signo positivo

$$r_{c+} = \frac{L^2}{2M} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{12M^2}{L^2}} \right]$$

corresponde al mínimo del potencial, mientras que la solución con signo negativo

$$r_{c-} = \frac{L^2}{2M} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{12M^2}{L^2}} \right]$$

corresponde al máximo del potencial.

Regresamos al resultado obtenido para la cota del momento angular:

$$L \geq \sqrt{12}M$$

Si consideramos a los puntos críticos como funciones de  $L$  y evaluamos en este valor del momento angular, máximo y mínimo coinciden  $r_{c-} = r_{c+} = 6M$ .

Para el mínimo del potencial,  $r_{c+}$ , que corresponde a la órbita circular estable, este es el valor más pequeño que puede tener; ya que, si consideramos el límite de momento angular muy grande, entonces la órbita circular estable más alejada al centro atractor corresponde al resultado clásico y no está acotada:

$$r_{c+} \geq 6M \quad \lim_{L \rightarrow \infty} r_{c+} = r_0$$

Como ya vimos la órbita circular inestable (correspondiente al máximo del potencial) está limitada por el valor más pequeño que puede tomar el momento angular y ahí la órbita es de radio  $6M$ . Ahora bien, analizando el mismo límite que en el caso anterior (momento angular muy grande), encontramos que el valor más pequeño que puede tomar la órbita inestable es  $r_{c-} = 3M$ . Notemos que este valor es mayor a  $2M$ , que es el horizonte, lo cual quiere decir que siempre tendremos órbitas inestables sin importar que tan grande sea el momento angular. Es

importante remarcar que la existencia de la órbita inestable en el potencial gravitacional no está predicha por la mecánica clásica.

En la Figura 3.4 hemos graficado el potencial efectivo relativista para tres valores diferentes de momento angular, empezando por el valor más pequeño que puede tomar esta variable. Ahí podemos apreciar el comportamiento de  $r_{c-}$  y  $r_{c+}$  como funciones del momento angular.

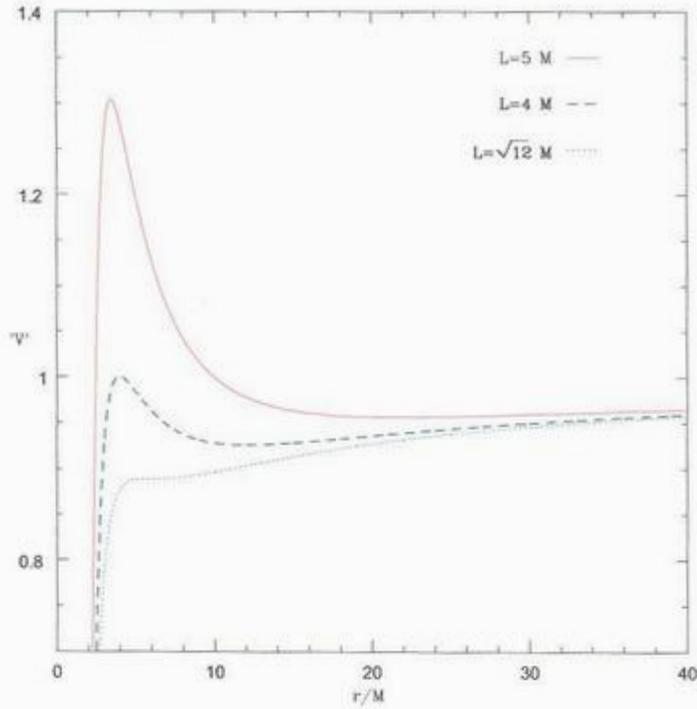


Figura 3.4: Potenciales relativistas con diferentes valores del momento angular, donde el máximo se encuentra en diferentes energías, en estos potenciales, se encuentran todas las órbitas posibles

La aparición de la órbita circular inestable, genera dos casos:  $'V(r_c)' \leq 1$  y  $'V(r_c)' > 1$ .

Cuando el máximo del potencial se encuentra por debajo de la energía de reposo ( $'V(r_c)' \leq 1$ ), como mostramos en la Figura 3.5, las órbitas posibles para un objeto en órbita alrededor de un centro atractor son:

- Si la partícula tiene una energía,  $E = E_{min}$ , que corresponde al mínimo del potencial, tendremos una órbita circular estable.
- Ahora si tenemos una energía mayor que la energía mínima, pero menor que la energía correspondiente al máximo del potencial ( $E_{max}$ ),  $E_{min} < E < E_{max}$ , tendremos órbitas ligadas, haciendo una analogía con el potencial clásico, supondremos que la partícula tie-

ne una trayectoria elíptica. Mas adelante podremos obtener una aproximación para esta trayectoria.

- En el máximo del potencial se encuentra una órbita inestable con energía,  $E = E_{max}$ .
- Para todas las partículas que tengan una energía mayor que el máximo de potencial,  $E > E_{max}$ , la trayectoria de éstas, no tendrán punto de retorno y caerán directamente hacia el horizonte.

Notemos que para este caso del potencial efectivo,  $'V(r_c)' \leq 1$ , no existen órbitas abiertas

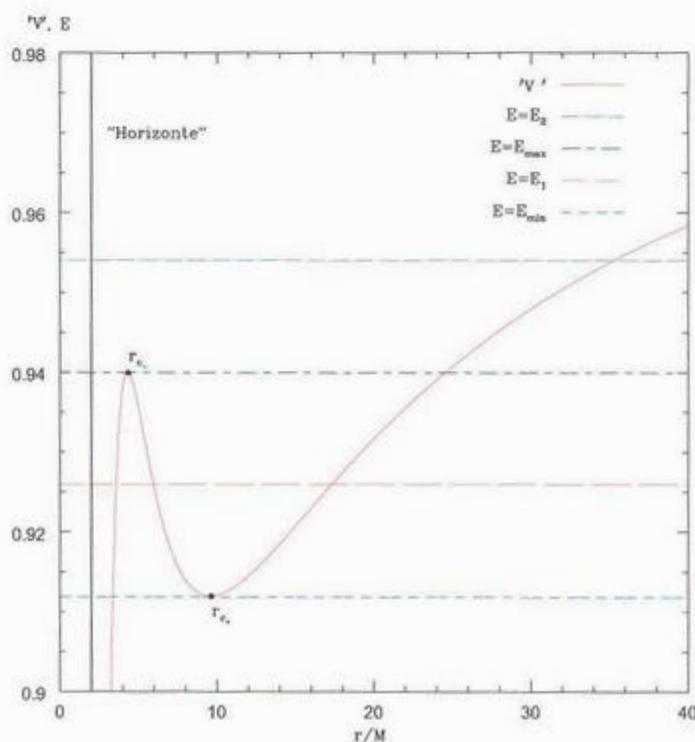


Figura 3.5: Potenciales efectivo relativista, tal que el máximo se encuentra en  $'V(r_c)' \leq 1$ , hemos graficado también distintos valores de energía.

Analicemos ahora el caso, cuando el máximo del potencial se encuentra por arriba de la energía en reposo,  $'V(r_c)' > 1$ , tal como se muestra en la Figura 3.6. En este caso las trayectorias de un objeto en órbita alrededor del centro de atracción son:

- Al igual que antes, las partículas que tengan una energía,  $E = E_{min}$ , tendrán una trayectoria circular estable.



## 3.5. Aproximación a la órbita de Mercurio.

Como ya mencionamos, los planetas giran alrededor del Sol en trayectorias elípticas. Para la descripción con relatividad general de estas órbitas es necesario que los planetas se encuentren con un valor de energía entre  $E_{min} < E < 1$ , en el potencial gravitacional generado por el Sol. En particular esperamos que, al resolver con las correcciones estudiadas en este capítulo, podamos predecir el avance del perihelio de Mercurio.

Procedemos a resolver las ecuaciones 3.6 y 3.9 para encontrar, de nuevo como en el caso clásico, el cambio de  $r$  en función de  $\varphi$  de tal manera que:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right)}{\frac{L^2}{r^4}} \quad (3.13)$$

Como antes, hacemos el cambio de variable  $u = \frac{1}{r}$ .

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{E - 1 + 2Mu}{L^2} - u^2 + 2Mu^3$$

Consideramos órbitas cercanas a la órbita circular clásica  $u = u_0 = \frac{1}{r_0} = \frac{M}{L^2}$ , y nos preguntamos por pequeñas desviaciones a esta órbita,  $y = u - u_0$ , tenemos entonces:

$$\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = A_1^2 + y\left(\frac{2M}{L^2} - 2u_0 + 6Mu_0^2\right) + y^2(-1 + 6Mu_0) + 2My^3 \quad (3.14)$$

con  $A_1^2 = \frac{E^2 - 1 + 2Mu_0}{L^2} - u_0^2 + 2Mu_0^3$ .

Ahora si analizamos el término  $-1 + 6Mu_0$ . Como  $u_0 = M/L^2$  entonces  $6Mu_0 = 6M/L^2$ , además, de manera independiente, encontramos que  $L^2 > 12M^2$  por lo que  $\frac{6M}{L^2} < \frac{1}{2}$  y entonces este término es negativo por lo que podemos definir:

$$k^2 = (1 - 6Mu_0)$$

si despreciamos términos cúbicos en  $y$  ( $y \ll 1$ ) en la ecuación 3.14, podemos hacer de nuevo un cambio de variable  $x = ky$ , para obtener:

$$\frac{1}{k^2} \left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 = A_1^2 + \frac{2}{k} \left(\frac{M}{L^2} - u_0 + 3Mu_0^2\right) x - x^2$$

hacemos  $x_0 = \frac{1}{k}(M/L^2 - u_0 + 3Mu_0^2)$ , completamos el trinomio cuadrado perfecto y factorizamos la ecuación, para tener:

$$\frac{1}{k} \left(\frac{dx}{d\varphi}\right) = A_1^2 - (x - x_0)^2 + x_0^2$$

cambiamos ahora a  $z = x - x_0$

$$\frac{1}{k} \left( \frac{dz}{d\varphi} \right) = A^2 - z^2$$

con  $A^2 = \frac{E^2 - 1 + 2Mu_0}{L^2} - u_0^2 + 2Mu_0^3 + x_0^2$  y resolviendo proponiendo como solución a

$$z = A \cos[k(\varphi - \varphi_0)]$$

Donde  $\varphi_0$  es una constante arbitraria, definida por las condiciones iniciales.

Regresandonos a la variable original  $u$  tenemos:

$$u = u_0 + \frac{x_0}{k} + \frac{A}{k} \cos[k(\varphi - \varphi_0)]$$

El hecho de que apareció la constante  $\frac{x_0}{k}$  significa que la solución oscila alrededor de  $u'_0 = u_0 + \frac{x_0}{k}$  y no en  $u_0$  como suponíamos entonces:

$$u = u'_0 + \frac{A}{k} \cos[k(\varphi - \varphi_0)] = u'_0 \left[ 1 + \frac{A}{u'_0 k} \cos[k(\varphi - \varphi_0)] \right]$$

Si definimos una excentricidad  $\epsilon = \frac{A}{u'_0 k}$ , entonces las soluciones son:

$$u = u'_0 [1 + \epsilon \cos[k(\varphi - \varphi_0)]]$$

y regresandonos a la variable  $r$

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos[k(\varphi - \varphi_0)]} \quad (3.15)$$

Reconocemos la ecuación anterior como secciones cónicas, sólo que en un ciclo de  $2\pi$  para  $\varphi$   $r$  no regresa al mismo punto. Con esto vemos, incluso en la aproximación de órbitas cercanas a la circular estable, tal como es el ejemplo del avance del perihelio de mercurio.

Si, en particular nos preguntamos por el incremento angular necesario para empezar en el perihelio y regresar a él, entonces el cambio en  $\varphi$ , es decir el periodo de una órbita completa, es:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \left( 1 - \frac{6M^2}{L^2} \right)^{-1/2}$$

Consideremos que la órbita de Mercurio es casi circular y haciendo un desarrollo de  $\left( 1 - \frac{6M^2}{L^2} \right)^{-1/2}$  quedandonos con la aproximación a primer orden, tenemos:

$$\Delta\varphi \sim 2\pi \left( 1 + \frac{3M^2}{L^2} \right) = 2\pi + \Delta\varphi_{av}$$

Donde  $2\pi$  es la órbita podemos aproximar el avance del perihelio entre una órbita y la siguiente por:

$$\Delta\varphi_{av} = 6\pi \frac{M^2}{L^2}$$

En esta expresión el avance del perihelio se reporta en radianes por órbita, sin embargo, en la literatura encontramos esta cantidad medida en segundos de arco por siglo. Considerando que Mercurio tarda .241 años terrestres en dar una vuelta al Sol, podemos escribir la ecuación para el avance del perihelio (o el afelio) de este planeta de la siguiente manera:

$$\Delta\varphi_{av} = 1613278008.3 \frac{M^2}{L^2} \frac{''}{siglo}$$

Calcularemos el mometo angular de la manera clásica, por lo que tomaremos  $r_{peri} = 46 \times 10^6 km$  y su velocidad en ese punto  $v_{max} = 58.98 \frac{km}{s}$  [8]:

$$L = 2713.2 \times 10^6 \frac{km^2}{s}$$

cambiamos las unidades del momento angular a masas solares de tal manera que\* :

$$L = 6124.9 M_{\odot}$$

Así avance del perihelio de Mercurio es:

$$\Delta\varphi_{av} = 1613278008.3 \frac{M_{\odot}^2}{(6124.9 M_{\odot})^2} = \frac{43.004''}{siglo}$$

Cabe destacar que para este cálculo consideramos sólo la interacción entre Mercurio-Sol y que hicimos la aproximación de órbita circular para Mercurio.

A pesar de las aproximaciones hechas en este trabajo, nuestro resultado se encuentra dentro del error para las mediciones del avance del perihelio que consultamos. Por ejemplo, en la referencia [5], el valor es  $\Delta\varphi_{av} = 43.11 \pm 0.45$  segundos de arco por siglo. Para la referencia [7], la más antigua que consultamos, el valor reportado es  $\Delta\varphi_{av} = 43.03 \pm 8.847$ , de nuevo en segundos de arco por siglo.

*215 ± 1487*

---

\*  $1M_{\odot} = 1.477 \times 10^6 km$ ,  $c = 2.99792458 \times 10^5 km/s$

## Conclusiones

En este trabajo estudiamos el problema de campo central generado por un objeto de masa  $M$  con la teoría clásica y la teoría relativista, para hacer un análisis de las órbitas de partículas de masa  $m$  en estos potenciales. Reconocemos en este problema que hay tres grados de libertad para la descripción del movimiento, por lo que introducimos coordenadas esféricas para aprovechar la simetría del problema. Nuestro estudio nos llevó a establecer las dos constantes de movimiento, energía mecánica total,  $\mathcal{E}$  y momento angular  $\mathcal{L}$ , que aparecen debido a la naturaleza del campo central (mismo que sólo afecta la dirección radial). Para la descripción de las órbitas escogemos a la coordenada radial  $r$  y al desplazamiento angular  $\varphi$ . Encontramos que las ecuaciones para describir al movimiento son:

$$L = \frac{\mathcal{L}}{m} = r^2 \dot{\varphi}$$
$$E = \frac{\mathcal{E}}{m} = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{M}{r}$$

Fue de gran utilidad definir el siguiente potencial efectivo clásico:

$$V' = \frac{L^2}{2r^2} - \frac{M}{r}$$

ya que éste nos permitió estudiar las distintas órbitas permitidas para diferentes niveles de energía. Una característica importante del potencial es la existencia de un mínimo para el radio en  $r_0 = \frac{M}{L^2}$ . Este mínimo define las energías donde es permitido el movimiento y la forma particular de las órbitas para diferentes energías. En el problema clásico, encontramos que una partícula orbita alrededor de un cuerpo masivo y puede moverse en trayectorias circulares, elípticas, parabólicas e hiperbólicas cerradas y regulares, definidas por la ecuación:

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

con excentricidad,  $\epsilon^2 = 1 + \frac{2EL^2}{M^2} = 1 - \frac{E}{E_0}$ . Observemos que las trayectorias cerradas de esta solución tienen período  $\Delta\varphi = 2\pi$ .

Revisamos el caso particular de Mercurio, en el cual la órbita presenta precesión, un fenómeno que no puede ser descrito completamente por el tratamiento clásico y para ello fue necesario estudiar algunos conceptos de relatividad para describir mejor el movimiento.

Recordemos que la mecánica relativista exige que tengamos más cuidado con los sistemas de referencia y que especifiquemos por quien son medidas las variables que describen nuestro problema. Para el estudio de este trabajo fue necesario introducir el concepto de tiempo propio,  $\tau$ , que es el tiempo medido por un observado cuando los eventos ocurren en el mismo lugar. También fue necesario introducir la circunferencia reducida,  $r$ , que corresponde al radio equivalente de una circunferencia dada alrededor del centro atractor. De nuevo el movimiento angular se describió usando la coordenada  $\varphi$ . Debemos recalcar que  $r$ ,  $\varphi$  y  $t$ , en el contexto relativista son medidas por un observador lejano al centro atractor.

El estudio de la relatividad general nos lleva a sustituir la fuerza gravitacional por curvatura, la cual se describe mediante la métrica del espaciotiempo. Como en este trabajo nos interesaba estudiar el movimiento de planetas alrededor del Sol (en particular Mercurio), escogimos como métrica aquella que es válida para un objeto esféricamente simétrico sin carga y sin girar, la métrica de Schwarzschild:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} - r^2 d\varphi^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2$$

Con esta métrica encontramos de nuevo dos constantes de movimiento y pudimos establecer el plano  $X - Y$  como el plano de la órbita.

Aplicando las mismas técnicas que en el caso clásico obtuvimos las ecuaciones para describir el movimiento:

$$L = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau}$$

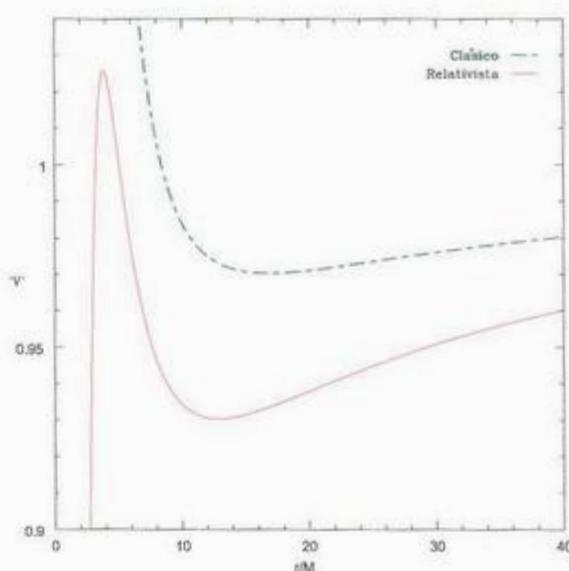
$$E = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau}$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right)$$

En el caso relativista también fue posible escribir un potencial efectivo:

$$V'^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[1 + \frac{L^2}{r^2}\right]$$

En éste, resalta la aparición del primer término, al que definimos como factor de curvatura y es necesario porque nos dice como el objeto masivo curva al espacio. Pudimos graficar los potenciales efectivos clásico y relativista para compararlos. Ésto lo logramos una vez que añadimos el término



de masa en reposo al potencial clásico. En la siguiente figura reproducimos esta gráfica y podemos resaltar de inmediato la existencia de un máximo para el caso relativista.

Como antes existen órbitas circulares en el mínimo, orbitas ligadas y órbitas abiertas. La presencia del máximo en el potencial predice una órbita circular inestable, ésta no existe en el caso clásico. Además, en el potencial efectivo clásico las órbitas son abiertas para partículas con energía,  $E > E_0$ , en el potencial efectivo relativista todas las partículas que tengan una energía,  $E > E_{max}$ , caen hacia el horizonte.

En la región donde es posible encontrar órbitas cerradas y particularmente para casos cercanos al mínimo, pudimos encontrar una ecuación que describe la trayectoria en el caso relativista:

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos[k(\varphi - \varphi_0)]}$$

En la ecuación anterior observamos que la órbita no regresa al mismo punto  $r$ , sino que tiene un desplazamiento en  $\varphi$  de tal manera que el período es  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{k}$ , este desplazamiento no existe en el caso clásico. Con esta expresión aplicada a órbitas elípticas, pudimos calcular el corrimiento en el perihelio.

Aplicamos nuestro resultado en particular, para el caso de la órbita de Mercurio y encontramos que el avance es de  $\frac{43.004''}{siglo}$ , a pesar de las aproximaciones hechas en este trabajo, el resultado se asemeja mucho a los observados [1][5][6][7].

## Bibliografía

- [1] Edwin F. Taylor, Jhon Archibald Wheeler. *Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity*. Addison Wesley Longman; ISBN: 0-201-38423-χ
- [2] Edwin F. Taylor, Jhon Archibald Wheeler. *Spacetime Physics*. W.H. Freeman and Company New York; 2ª edición. ISBN: 0-7167-2327-1.
- [3] Charles Kittel, Walter D. Knight, Malvin A. Ruderman. *Mecánica berkeley physics course-volumen 1*. Reverté, S.A.; 2ª edición. ISBN: 84-291-4282-7.
- [4] Vernon Barger, Martin Olsson. *Classical Mechanics: A Modern Perspective*. McGRAN-Hill, INC; 2ª edición. ISBN: 0-07-003734-5.
- [5] J:Foster, J.Nightingale. *A short Course in General Relativity*. Springer; 3ª edición (Agosto, 2005). ISBN: 978-0387260785.
- [6] Bernard F. Schutz. *A first course in General Relativity*. Cambridge University; 1ª edición ( 1985). ISBN: 0 521 27703 5.
- [7] G.M.Clemence *The Relativity in Planetary Motions*. **Rev.Mod.Phys.** **19**, 361(1947)
- [8] Datos Planetarios de la Nasa. <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/mercuryfact.html>
- [9] Datos de Cygnus X-1. [http://imagine.gsfc.nasa.gov/docs/science/know\\_l2/black\\_holes.html](http://imagine.gsfc.nasa.gov/docs/science/know_l2/black_holes.html)