Hermosillo, Son. Junio 03 de 1988

T E S I S

OSCAR RUBEN GOMEZ ALDAMA

TEOREMAS DE PUNTO FIJO APLICADOS A ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

D E D I C A T O R I A

A mi madre por
su apoyo constante.

A mis amigos por
su estímulo y comprensión.

A la Universidad por
esta oportunidad brindada.

AGRADECIMIENTO

Agradezco al grupo de personas que hicieron posible la realización de esta tesis, en particular al DR. RUBEN FLORES ESPINOZA por su ayuda y el estímulo que mostró durante la elaboración de la misma, así como al comité revisor de tesis, por sus comentarios y sugerencias que enriquecieron y clarificaron este material. MIS RESPETOS.

C O N T E N I D O

I N T R O D U C C I O N

La importancia que han adquirido algunos teoremas de punto fijo en diversas áreas de Matemática, como son: Topología, Análisis, Cálculo Numérico, Ecuaciones Diferenciales, etc., es debido a que diversas demostraciones y cálculos pueden plantearse de tal manera que se reducen a determinar la existencia de un punto fijo.

Los Teoremas de Punto Fijo son aquellos que bajo ciertas condiciones a satisfacerse, garantizan la existencia de algún punto fijo de una aplicación T, definido de un conjunto A en sí mismo. Lo anterior hace importante considerar la existencia de un punto fijo para una función T, así como el mecanismo a seguir para hallarlo.

En este material se utilizarán los Teoremas de Punto Fijo de Contracción de Banach, así como el Teorema de Punto Fijo de Schauder. Dichos Teoremas se aplicarán a ecuaciones diferenciales ordinarias.

Se tiene como objetivo hacer énfasis sobre la utilidad de los diferentes teoremas de punto fijo, al aplicarlos en la demostración de teoremas de existencia y unicidad o existencia de soluciones de ecuaciones diferencia les ordinarias con condiciones iniciales o condiciones de frontera.

El contenido de esta Tesis se desarrollará en tres partes principales:

PARTE A. En esta parte se probará el Teorema de Punto Fijo de Contracción de Banach, así como el Teorema de Dependencia Contínua y Diferenciable, en espacios euclidianos R^n, y la aplicación del primero a la demostración del Teorema de Picard, que prueba la existencia y unicidad de solución de una ecuación diferencial ordinaria en espacios de Banach con condición inicial en cierto intervalo:

$$|t-t_0| \leq \alpha \subset R \quad \alpha > 0$$

PARTE B. Se hará mención del Teorema de Punto Fijo de Schauder en espacios de Banach (espacios euclidianos), y la aplicación de éste a la demostración del Teorema de Peano, el cual prueba la existencia de solución de una ecuación diferencial ordinaria en espacios de Banach con condición inicial en cierto intervalo: $|t-t_0| \leq \alpha \subset R$. Además se aplicará el Teorema de Punto Fijo a ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios de Banach con condiciones de frontera, en donde es necesario introducir la función de

Green por construcción para encontrar una solución a dicho problema, bosquejando con ejemplos.

PARTE C. Se enunciará un Teorema de Existencia de Solución Periódica de una ecuación diferencial en espacios de Banach (espacio euclidiano R^n), el cual se aplicará a la demostración de otro teorema de existencia de soluciones periódicas, el cual tiene como hipótesis la equivalencia asintótica de ecuaciones diferenciales ordinarias. Por último se combinarán el Teorema de Existencia de Soluciones Periódicas con el Teorema de Punto Fijo de Schauder para solucionar un problema de condición de frontera, es decir, se busca una solución de una ecuación diferencial ordinaria en espacios de Banach (espacios euclidianos R^n) que sea periódica y satisfaga las condiciones de frontera, en cierto intervalo:
$[A,B] \subset R$, real.

PARTE A.

En esta parte se presentará material bibliográfico a desarrollar con ciertas variantes con respecto a la forma usual de presentarlo en clases.

Se empezará por definir el concepto de punto fijo de una aplicación T definida de un conjunto A en sí mismo, presentando algunos ejemplos elementales, donde se observará que una aplicación T definida de un conjunto A en sí mismo puede poseer uno o más puntos fijos sobre A, así como no poseer punto fijo en A, además una aplicación elemental de transformación de un problema físico a un problema de punto fijo.

Se definirá también el concepto de aplicación contraída de una aplicación T definida de un conjunto A en sí mismo, la cual se aplicará a la demostración del Teorema de Punto Fijo de Contracción de Banach, donde, por la necesidad de la misma demostración se hace necesaria la definición de la Sucesión de Cauchy.

Como una consecuencia del teorema de punto fijo de contracción de Banach, se hace necesario definir el Teorema de Dependencia Continua y Diferenciable de un operador T_y.

Se aplicará el teorema de punto fijo de contracción de Banach a la demostración de un teorema de existencia y unicidad de solución de una ecuación diferencial ordinaria con condición inicial (Teorema de Picard), en un intervalo dado, además se presentará una conclusión con respecto a la parte A.

2.a.- TEOREMA DE PUNTO FIJO DE CONTRACCION DE BANACH.

2.a.1.- DEFINICION DE PUNTO FIJO.

Sea X un conjunto y T una aplicación definida $T: X \longrightarrow X$ entonces un punto $X \in X$ es un punto fijo de T si se satisface TX=X, es decir, T deja fijo a X.

- Ejemplos:

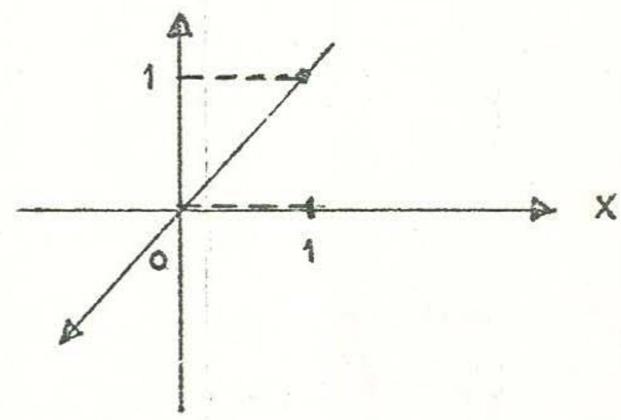
a).- Sea $X = R$ y $T: R \longrightarrow R$, donde $T(x) = x+1$ se concluye que no existe un $x \in R$ tal que $T(x) = x$ es decir, T no posee un punto fijo en R, calculando se tiene que $T(x) = x+1$; para que existiera un punto fijo debe cumplirse que $T(x) = x$, por igualación se tiene que: $x = x+1 \Longrightarrow 1 = 0$, por lo tanto no cualquier aplicación posee punto fijo en un conjunto determinado.

b).- Sea $x = [0,1]$, $T: [0,1] \longrightarrow [0,1]$ donde $T(x) = x^2$ se satisface que $T(x) = x$ para $x = 0,1$, lo que indica es que $x = 0$ ó $x = 1$ son los puntos fijos de la aplicación T sobre $x = [0,1]$, se pueden encontrar si reemplazamos $T(x) = x$ se convierte en $x = x^2$, es decir, $x^2 - x = 0$ se cumple $x = 0$ ó $x = 1$, obsérvese que pueden existir más de un punto fijo de la aplicación T sobre el conjunto $x = [0,1]$.

c).-Sea $x = [0,1]$, $T: [0,1] \longrightarrow [0,1]$, $T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in Q \\ 1 & \text{si } x \in I \end{cases}$

El único punto fijo de la aplicación $T(x)$ sobre el conjunto $x = [0,1]$ es $x = 0$, dado que $T(0) = 0$.

Graficando la función $T(x)$:



d).-Una aplicación práctica de la definición de punto fijo:

Sea $x = R$ y $T: R \longrightarrow R$, donde T sea la ecuación definida $T = \frac{9}{5} C + 32$, la cual transforma una lectura de grados centígrados a grados Farenheit:

¿A que temperatura las dos escalas termométricas marcan la misma lectura? :

Si $T: R \longrightarrow R$ y $T(C) = \frac{9}{5} C + 32$, la pregunta la podemos transformar a otra equivalente:

¿ T tiene un punto fijo, es decir, $T(C) = C$?

$C = \frac{9}{5}C + 32 \Longrightarrow C = -40$ por lo tanto $T(-40) = -40$, lo que indica que $T(C)$ posee un punto fijo en R, entonces la temperatura que marca la misma lectura en ambos termóme-- tros es -40.

2.a.2. DEFINICION DE APLICACION CONTRAIDA

Sea F un subconjunto cerrado de un espacic de Banach X y T una aplicación definida de $T: F \longrightarrow F$ entonces T será una aplicación contraída, si e- xiste un valor $K \in [0,1)$ tal que:

$$|TU_1 - TU_2| \leq K\ |U_1 - U_2|\ \forall\ U_1,\ U_2 \in F$$

- Al valor K se le llama constante de contracción.
- En particular la aplicación será contraída si la función tiene en el conjunto F una derivada $T'(x)$ tal que: $|T'(x)| \leq K < 1$.

2.a.3. DEFINICION DE SUCESION DE CAUCHY.

Una sucesión $\{x_n\}$ en X es una sucesión de Cauchy si $\forall \epsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) > 0$, tal que $|x_m - x_n| < \epsilon$, si $n\ m \geq N(\varepsilon)$.

2.a. 4. DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE PUNTO FIJO DE CONTRACCION DE BANACH.

TEOREMA DE PUNTO FIJO DE CONTRACCION DE BANACH.

Sea F un subconjunto cerrado de un espacio de Banach $\mathfrak{X}$ y T una aplicación contraída $T:F \longrightarrow F$ entonces T tiene un único punto fijo $\bar{x}$, $\bar{x} \in F$ tal que $T\bar{x} = \bar{x}$. Además, si $x_0 \in F$ es un punto arbitrario del conjunto F, entonces la sucesión $\{x_{n+1} = Tx_n$ donde $n = 0,1,2,\ldots\}$ converge al punto fijo $\bar{x}$ cuando $n \to +\infty$ y $|\bar{x} - x_n| \leq \frac{K^n}{1-K}|x_1 - x_0|$ donde $K \in [0,1)$ es la constante de contracción de T sobre F.

PRUEBA:

Existencia:

Sea $x_0 \in F$ un punto arbitrario de F, y si definimos una sucesión de aproximaciones sucesivas $x_{n+1} = Tx_n$ donde $n = 0,1,2,\ldots$, de tal manera que cada uno de los $x_{n+1} \in F$, esto es por hipótesis, dado que T es una contracción definida $T:F \longrightarrow F$, tenemos también que:

1) $$|x_{n+1} - x_n| = |Tx_n - Tx_{n-1}| \leq K|x_n - x_{n-1}| = K|Tx_{n-1} - Tx_{n-2}| \leq$$
$$\leq K.K|x_{n-1} - x_{n-2}| = K^2|x_{n-1} - x_{n-2}|$$

y así sucesivamente, de tal manera que:

1) $|x_{n+1} - x_n| \leq K^n|x_1 - x_0|$, donde $n = 0,1,2,\ldots$

Probaremos que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy, sea $m > n$ entonces:

2) $|x_m - x_n| \leq K^n|x_{m-n} - x_0|$ por 1)

$$|x_m - x_n| \leq K^n|x_{m-n} - x_{m-n-1} + x_{m-n-1} - x_{m-n-2} + \ldots + x_1 - x_0| \leq$$
$$\leq K^n\left[K^{m-n-1}|x_1 - x_0| + K^{m-n-2}|x_1 - x_0| + K^{m-n-3}|x_1 - x_0| + \ldots + |x_1 - x_0|\right] =$$

$$= K^n |x_1 - x_0| \left[K^{m-n-1} + K^{m-n-2} + K^{m-n-3} + \dots + 1 \right] \leq$$

$$\leq K^n |x_1 - x_0| \frac{1}{1-K} = \frac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0|$$

Entonces tenemos que:

2) $|x_m - x_n| \leq \frac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0|$

Ahora dado a que $K \in [0,1)$ se tiene que para n muy grande, es decir, cuando $n \to +\infty$, el miembro del lado derecho se puede hacer tan pequeño como se quiera, es decir, se satisface que $|x_m - x_n| < \epsilon$, lo cual indica que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy en F, y si es de Cauchy implica que existe un elemento $\bar{x}$ en F al cual converge, es decir,

3) $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \bar{x}$, por ser F un conjunto cerrado.

-Dado a que definimos:

$Tx_n = x_{n+1}$ tenemos que calculando límites:

4) $\lim\limits_{n \to +\infty} Tx_n = \lim\limits_{n \to +\infty} x_{n+1}$

-por la ecuación 3) se tiene que:

5) $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{n+1} = \bar{x}$

Ahora, puesto que T es una aplicación continua:

6) $\lim\limits_{n \to +\infty} Tx_n = T\left(\lim\limits_{n \to \infty} x_n\right) = T\bar{x}$

usando 5) y 6) en 4) se tiene que:

4) $T\bar{x} = \bar{x}$

-Lo que indica es que existe un punto fijo $\bar{x}$ en F, de la aplicación T sobre F.

Lo que falta probar es la convergencia, es decir, que:

$$\left|\bar{x} - x_n\right| \leq \frac{K^n}{1-K}\left|x_1 - x_0\right|$$

-Calculando el límite a la ecuación 2) se tiene: $m \to \infty$

7.) $$\lim_{m \to +\infty}\left|x_m - x_n\right| \leq \lim_{m \to +\infty}\frac{K^n}{1-K}\left|x_1 - x_0\right|$$

Por la continuidad de T se tiene que:

$$\left|\lim_{m \to +\infty}\left(x_m - x_n\right)\right| \leq \frac{K^n}{1-K}\left|x_1 - x_0\right|$$

$$\left|\lim_{m \to +\infty} x_m - \lim_{m \to +\infty} x_n\right| \leq \frac{K^n}{1-K}\left|x_1 - x_0\right|$$

$$\left|\bar{x} - x_n\right| \leq \frac{K^n}{1-K}\left|x_1 - x_0\right|$$

Por lo tanto, tenemos que existe un punto fijo $\bar{x}$ de la aplicación T sobre F, el cual lo encontramos a partir de cualquier punto x_0 dado.

UNICIDAD:

Sea $K \in [0,1)$ la constante de contracción de T sobre F, y si $\bar{x}$, $\bar{y}$ son dos puntos fijos de la aplicación T, es decir, $T\bar{x} = \bar{x}$, $T\bar{y} = \bar{y}$ donde $\bar{x}, \bar{y} \in F$ supóngase que $\bar{x} \neq \bar{y}$.

Entonces: $\left|\bar{x}-\bar{y}\right| = \left|T\bar{x} - T\bar{y}\right| \leq K\left|\bar{x} - \bar{y}\right|$

puesto que suponemos que $\bar{x} \neq \bar{y}$ entonces $K \geq 1$ y esto no puede ser porque K es la constante de contracción de T sobre F, lo que indica que $\bar{x} = \bar{y}$, por lo tanto, existe un único punto fijo $\bar{x}$ de la aplicación T sobre F.

2.6).- TEOREMA DE DEPENDENCIA CONTINUA Y DIFERENCIABLE.

DEFINICION DE CONTRACCION UNIFORME:

Sea F un subconjunto de un espacio de Banach *, G es un subconjunto de un espacio de Banach Y y sea:

$A=\{Ty: y\in G\}$ una familia de operadores definido $Ty:F\longrightarrow$.

El operador Ty se define como contracción uniforme sobre F, si $Ty:F\longrightarrow F$ y existe un valor $k\in[0,1)$ tal que:

$$|Tyx-Ty\bar{x}|\leq k|x-\bar{x}| \qquad \forall y\in G,\ x,\bar{x}\in F.$$

TEOREMA:

Si F es un subconjunto cerrado de un espacio de Banach *, G es un subconjunto abierto de un espacio de Banach Y, $Ty:F\longrightarrow F$ $y\in G$ es una contracción uniforme sobre F, y Tyx es continuo en y para todo x fijo en F, entonces el único punto fijo $g(y)$ de Ty, $y\in G$ es continuo en y.

Además si F,G son las cerraduras de los conjuntos abiertos F°, G° y Tyx tiene primeras derivadas continuas $A(x,y)$, $B(x,y)$ con respecto a y, x respectivamente. Entonces $g(y)$ tiene primera derivada continua con respecto a $y\in G^{\circ}$.

PRUEBA: 1a. PARTE (La continuidad de g(y))

Puesto que $Ty:F\longrightarrow F$ es una contracción uniforme, indica que existe $K\in[0,1)$ tal que:

$|Tyx-Ty\bar{x}|\leq k|x-\bar{x}| \quad \forall y\in G,\ x,\bar{x}\in F$, sea $g(y)$ el único punto fijo del operador Ty en F, el cual existe por el teorema anterior.

Sea $h\varepsilon y$, arbitraria, entonces se tiene que:

1). $T_y g(y)=g(y)$

2). $T_{y+h}\, g(y+h)=g(y+h)$

Calculando la diferencia de 2)- 1) entonces tenemos:

3). $g(y+h)-g(y)=T_{Y+h}\, g(y+h)-T_y g(y)$

3). $g(y+h)-g(y)=T_{y+h}\, g(y+h)-T_y\, g(y)$

$$=T_{y+h}\, g(y+h)-T_{y+h}\, g(y)+T_{y+h}\, g(y)-T_y\, g(y)$$

Calculando la norma 3):

3)' $$|g(y+h)-g(y)|=|T_{y+h}\, g(y+h)-T_{y+h}\, g(y)+T_{y+h}\, g(y)-T_y\, g(y)|\leq$$

$$\leq|T_{y+h}\, g(y+h)-T_{y+h}\, g(y)|+|T_{y+h}\, g(y)-T_y g(y)|\leq$$

$$\leq k|g(y+h)-g(y)|+|T_{y+h}\, g(y)-T_y\, g(y)|$$

Entonces:

3)' $$|g(y+h)-g(y)|\leq\frac{|T_{y+h}\, g(y)-T_y\, g(y)|}{1-k}=$$

$$=(1-k)^{-1}|T_{y+h}\, g(y)-T_y\, g(h)|$$

Por lo tanto:

3)' $$|g(y+h)-g(y)|\leq(1-k)^{-1}|T_{y+h}\, g(y)-T_y\, g(y)|.$$

Puesto que $T_y x$ es continuo en y para cada x fijo en F, entonces la función $g(y)$ es continua en y.

En ecuaciones diferenciales ordinarias, es muy característico presentarlas sujetas a un conjunto de restricciones, las cuales todas ellas pueden estar sujetas a únicamente un solo punto ó más puntos dependiendo de la finalidad que se persiga al analizar determinado fenómeno.

Si una ecuación diferencial ordinaria está sujeta a un conjunto de restricciones y éstas únicamente en un solo punto A, se le llama problema de condición inicial, donde se busca una solución al problema dado, si es que existe, ó existe y es única en cierto intervalo de definición de la misma solución, la cual debe de verificar la ecuación diferencial ordinaria y satisfacer al conjunto de restricciones, en dicho intervalo.

Un teorema de ecuación diferencial ordinaria lo es el teorema de existencia y unicidad de solución de una ecuación diferencial ordinaria (Teorema de Picard), el cual se demostrará haciendo uso del teorema de punto fijo de contracción de Banach.

Se iniciará por la transformación del problema de condiciones I* a una ecuación integral equivalente donde todas las soluciones de la ecuación integral en un intervalo dado, son también las soluciones del problema de condición inicial en el mismo intervalo.

I* = iniciales

Se hace necesario definir el espacio completo de funciones vectoriales continuas $\phi \in \mathscr{C}[I, R^n]$ con cierta norma específica, en el cual definimos el operador T para cada función vectorial contínua $\phi \varepsilon \bar{\mathscr{C}}[I, \bar{B} C R^n]$ de tal manera que el problema de condición inicial es equivalente a probar la existencia de un punto fijo del operador T en $\bar{\mathscr{C}}[I, BCR^n]$ es decir, probar que existe una función vectorial continua $\phi \varepsilon \bar{\mathscr{C}}[I, \bar{B} C R^n]$ tal que satisface $T\phi = \phi$ en un intervalo dado.

Entonces decimos que el problema de condición inicial tiene solución en el intervalo, donde se utilizará el teorema de punto fijo de contracción de Banach.

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Aplicación del teorema de punto fijo de contracción de Banach, a la demostración de existencia y unicidad de soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias en un espacio de Banach.

Sea UCR^n un conjunto abierto y conexo, y T es un intervalo real abierto $T=(T_1, T_2)CR$, U puede ser todo R^n y T puede ser todo R, es decir, $T=R$, $U=R^n$ sea U^* un conjunto abierto y conexo definido en R^{n+1} por $U^*=TXU$, donde U^*CR^{n+1}.

Consideremos una ecuación diferencial ordinaria:

1).- $\dot{x} = f(t,x)$

con condición inicial.

2).- $x(t_0) = x_0$ $\quad t \in T$, donde $f(t,x)$

satisface las siguientes condiciones:

a) $f(t,x)$ está definida y continúa en U*

3).- b) $f(t,x)$ satisface la condición de Lipschitz, es decir, existe un valor $L > 0$ tal que:

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2| \qquad \forall x_1, x_2 \in U, \forall t \in T$$

El problema de condición inicial se puede transformar a la siguiente ecuación integral equivalente, es decir, las ecuaciones 1) y 2) se transforman a la ecuación 4).

4).- $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds \qquad t \in \{|t - t_0| \leq \bar{S}\} \subset T$

Donde todas las soluciones $x(t)$ de la ecuación 4) en el intervalo $|t - t_0| \leq \bar{S}$ son también soluciones del problema de condición inicial, es decir, satisfacen la ecuación 1) y verifica la ecuación 2) en el intervalo $|t - t_0| \leq \bar{S}$.

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

(Teorema de Picard)

Dada una ecuación diferencial ordinaria 1) con condición 2), donde f(t,x) satisface las condiciones 3), y dado cualquier punto $P_o=(t_o,x_o)\varepsilon U^*$, es decir, $x_o \varepsilon U$, $t_o \varepsilon T$; probamos que existe en un intervalo $|t-t_o|\leq \bar{S}$ donde $\bar{S}>0$ una única solución $x(t)=\phi(t)$ definida en $|t-t_o|\leq\bar{S}$, con valores en U, que satisface la ecuación 1) y verifica la ecuación 2).

PRUEBA:

Sea $\bar{B}(\bar{S},B,t_o,x_o)=B(\bar{S},B,1)=\{(t,x):|t-t_o|\leq\bar{S},\ |x-x_o|\leq B\}CU^*$ el punto $P_o(t_o,x_o)\varepsilon\bar{B}(\bar{S},B)$ por la continuidad de la función f(t,x) existe un valor M>0 tal que:

$$|f(t,x)|\leq M \quad \forall (t,x)\varepsilon\bar{B}\ (\bar{S},B).$$

Escojamos un valor $\bar{S}>0$ de tal manera que se satisfagan las siguientes condiciones: $\bar{S}M\leq B$ $\bar{S}L<1$

Sea $\mathscr{C}[|t-t_o|\leq\bar{S},\ R^n]$ el espacio vectorial normado de todas las funciones vectoriales continuas ϕ, con norma $||\phi||=\max_t |\phi(t)|$, definidas del intervalo cerrado y acotado $|t-t_o|\leq\bar{S}$, sobre el espacio R^n. Si el conjunto - $\bar{B}(\bar{S},B)$ definimos por $\mathscr{C}[|t-t_o|\leq\bar{S},|x-x_o|\leq B]$ el subconjunto cerrado de funciones ϕ, definidas del intervalo - $|t-t_o|\leq\bar{S}$ sobre $|x-x_o|\leq B$ tal que $|\phi(t)-x_o|\leq B$.

Se define para cada función vectorial continua $\phi\varepsilon\bar{\mathcal{C}}[|t-t_o|\leq \bar{S},|x-x_o|\leq B]$ la transformación $T\phi$, por la relación:

$$5)\quad T\phi(t)= x_o + \int_{t_o}^{t} f(S,\phi(s))ds \qquad t\varepsilon|t-t_o|\leq \bar{S}$$

De tal manera que resolver el problema de condición inicial es equivalente a probar la existencia de un punto fijo de la transformación T sobre el conjunto cerrado

$$\bar{\mathcal{C}}[|t-t_o|\leq \bar{S},|x-x_o|\leq B],$$

es decir, si en el conjunto

$\bar{\mathcal{C}}[|t-t_o|\leq\bar{S}, |x-x_o|\leq B]$ existe una función vectorial continua ϕ tal que satisfaga $T\phi=\phi$, para $t\varepsilon|t-t_o|\leq\bar{S}$, entonces decimos que existe una única solución $x(t)$ de la ecuación 4) en el intervalo $|t-t_o|\leq\bar{S}$.

Probaremos la existencia de un único punto fijo de la transformación T sobre

$\bar{\mathcal{C}}[|t-t_o|\leq\bar{S},|x-x_o|\leq B]$ aplicando el Teorema de Punto Fijo de Contracción de Banach.

Condiciones a probar:

6) $T:\bar{\mathcal{C}}\to\bar{\mathcal{C}}$

7) T es una contracción sobre $\bar{\mathcal{C}}$

PRUEBA:

6) $T:\bar{\mathcal{C}}\to\bar{\mathcal{C}}$

Sea $\phi\varepsilon\bar{\mathcal{C}}$ definida en $|t-t_o|\leq\bar{S}$ calculemos:

$$|T\varphi(t)-x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\,ds\right| \leq \left|\int_{t_0}^{t} |f(s,\varphi(s))|\,ds\right| \leq M\left|\int_{t_0}^{t} ds\right|$$

$$= M|t-t_0| \leq M\bar{S} \leq B$$

Entonces: $|T\varphi(t)-X_0| \leq B$, lo que indica es que: $T(\bar{\mathcal{E}}) \subset \bar{\mathcal{E}}$, es decir, $T\varphi \in \bar{\mathcal{E}}$ donde se observa que T transforma funciones vectoriales continuas de $\bar{\mathcal{E}}$ funciones vectoriales continuas de $\bar{\mathcal{E}}$, por lo tanto se cumple que $T: \bar{\mathcal{E}} \to \bar{\mathcal{E}}$

7). T es una contracción sobre $\bar{\mathcal{E}}$

Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in \bar{\mathcal{E}}$, calculemos:

$$|T\varphi_1(t)-T\varphi_2(t)| = \left|x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_1(s))\,ds - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_2(s))\,ds\right|$$

$$= \left|\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_1(s))\,ds - \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_2(s))\,ds\right|$$

$$= \left|\int_{t_0}^{t} \left[f(s,\varphi_1(s)) - f(s,\varphi_2(s))\right] ds\right|$$

$$\leq \left|\int_{t_0}^{t} |f(s,\varphi_1(s)) - f(s,\varphi_2(s))|\,ds\right|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} L \max_{t} |\varphi_1-\varphi_2|\,ds \leq L\bar{S} \max_{t} |\varphi_1-\varphi_2|$$

Entonces: $|T\varphi_1-T\varphi_2| \leq L\bar{S}\max|\varphi_1-\varphi_2|$, puesto que $L\bar{S} < 1$, entonces T es una aplicación contraída sobre $\bar{\mathcal{E}}$.

Dado a que T satisface las condiciones del teorema de punto fijo de contracción de Banach, entonces existe una única función vectorial continua $\varphi \in \bar{\mathcal{E}}$ que satisface $T\varphi = \varphi$ sobre el intervalo $|t-t_0| \leq \bar{S}$, esto implica que el problema de condición inicial 4) posee una única solución x(t) sobre el intervalo $|t-t_0| \leq \bar{S}$.

CONCLUSION DE LA PARTE A.

Por lo general, las demostraciones de los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias con condición inicial, nos dan información sobre la existencia y unicidad de solución de una ecuación diferencial ordinaria con condición inicial en un intervalo dado, más no un método para encontrar dicha solución. A diferencia, se riene que el Teorema de Punto fijo de contracción de Banach aplicado a la demostración de un teorema de existencia y unicidad de solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias con condición inicial en un intervalo dado (Teorema de Picard), el cual, aparte de garantizar la existencia y unicidad de solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias con condición inicial en un intervalo dado, aporta el método de aproximaciones sucesivas mediante el cual a veces se puede encontrar la solución al problema de condición inicial, en un intervalo dado, digo a veces porque en ocasiones la integral a resolver es realmente compleja e irresoluble mediante los métodos tradicionales.

OBSERVACION:

La función f se condiciona a que sea continua y Lipschitziana, dichas condiciones son suficientes más no necesarias; hay funciones que no satisfacen ninguna condición o a lo más una y posee solución única. Si f es función continua y lipschitziana, entonces el problema de condición inicial tiene solución única; en caso de que f sea únicamente una función continua, entonces a lo más se puede asegurar la existencia de solución para el problema de condición inicial. Para detallar esta última idea, pasaremos a demostrar un teorema de existencia de solución (Teorema de Peano), donde en su demostración es necesario hacer mención del Teorema de Punto Fijo de Schauder.

PARTE B.

Empezaremos por mencionar el Teorema de Punto Fijo-de Schauder,así como dar referencia de su demostración. Se continuará con la aplicación del teorema de punto fijo de Schauder a la demostración de un teorema de existen--cia de solución de una ecuación diferencial ordinaria con condiciones iniciales en un intervalo dado (Teorema de-Peano),donde se hace necesario introducir el teorema de -Arzela-Ascoli [8].Además,se aplicará el teorema de punto-fijo de schauder a la demostración de existencia de solu-ción de una ecuación diferencial ordinaria de 2do. orden-con condiciones de frontera en un intervalo dado,donde se observará que en el problema de condición de frontera es-necesario introducir la función de Green por construcción ver [1],[2] ,para su demostración,aparte del teorema de Ar-zela-Ascoli.

Se ilustrará mediante algunos ejemplos la construc--ción de la función de Green para el problema de condición de frontera (usando 2 formas) y obtendremos la ecuación--de la curva integral que satisfaga a la ecuación diferen-cial ordinaria de 2do. orden y verifique las condiciones-frontera en un intervalo dado. Además,se dará una conclu--sión de la parte B.

3. MENCION DEL TEOREMA DE PUNTO FIJO DE SCHAUDER.

Sea $\mathfrak{X}$ un espacio de Banach y sea $C \subset \mathfrak{X}$ un conjunto cerrado y convexo,y suponer que T es una aplicación continua y definida de C en sí mismo,$T:C \to C$,tal que $T(C)$ es relativamente compacto,entonces existe un punto $x \in C$ tal que $Tx = x$.

Para su demostración ver [4] pag. IO y [II] pag. 415.

Si una ecuación diferencial ordinaria está sujeta a un conjunto de restricciones y éstas únicamente en un solo punto A, se le llama problema de condición inicial, donde se busca una solución al problema dado, si es que existe, o existe y es única en cierto intervalo de definición de la misma solución, la cual debe de verificar la ecuación diferencial ordinaria y satisfacer al conjunto de restricciones, en dicho intervalo.

Un teorema de ecuación diferencial ordinaria lo es el teorema de existencia de solución de una ecuación diferencial ordinaria (Teorema de Peano), el cual se demostrará haciendo uso del teorema de punto fijo de Schauder.

Se iniciará por la transformación del problema de condiciones iniciales a una ecuación integral equivalente, donde todas las soluciones de la ecuación integral en un intervalo dado, son también las soluciones del problema de condición inicial en el mismo intervalo.

Se hace necesario definir el espacio completo de funciones vectoriales continuas $\varphi \in \mathcal{C}\left[I, R^n\right]$ con cierta norma específica, en el cual definimos el operador T para cada función vectorial continua $\varphi \in \mathcal{C}\left[I, A \subset R^n\right]$, de tal manera que el problema de condición inicial es equivalente a probar la existencia de un punto fijo del operador T en $\bar{\mathcal{C}}[I, A\subset R^n]$, tal que se satisface $T\phi=\phi$ en un intervalo dado.

Entonces decimos que el problema de condición inicial tiene solución en el intervalo, donde se utilizará el teorema de punto fijo de Schauder.

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Aplicación del teorema de punto fijo de Schauder a la demostración de existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias en un espacio de Banach.

TEOREMA DE EXISTENCIA (TEOREMA DE PEANO)

Sea $U\subset R^n$ un conjunto abierto y conexo, y T es un intervalo real y abierto:

$T=(T_1, T_2)\subset R$, U puede ser todo R^n y T puede ser todo R, $U=R^n$ y $T=R$; sea U^* un conjunto abierto y conexo definido en R^{n+1} por $U^*=T\times U$, , $U^*\subset R^{n+1}$.

Consideremos una ecuación diferencial ordinaria:

1) $\dot{x}=f(t,x)$

con condición inicial

2) $x(t_0)=x_0$ para $t\in T$, donde $f(t,x)$ satisface la siguiente condición:

3) $f(t,x)$ está definida y continua en U^*.

El problema de condición inicial se puede transformar en una expresión equivalente, es decir, a la siguiente ecuación integral que contiene a la ecuación 1) y 2):

$$4) \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$$

$$t \in \{|t-t_0| \leq \bar{S}\} \subset T \ , \quad t \in T\ .$$

Donde todas las soluciones $x(t)$ de la ecuación 4) sobre un intervalo $|t-t_0| \leq \bar{S}$, son también soluciones del problema de condición inicial, es decir, satisfacen las ecuaciones 1) y 2) en el intervalo $|t-t_0| \leq \bar{S}$.

TEOREMA DE EXISTENCIA (TEOREMA DE PEANO)

Dada una ecuación diferencial ordinaria 1) con condiciones 2) y donde $f(t,x)$ satisface la condición 3) y dado cualquier punto $P_0 = (t_0, x_0) \in U^*$, es decir, $x_0 \in U$, $t_0 \in T$ probaremos que al menos existe en un intervalo $|t-t_0| \leq \bar{S}$ y donde $\bar{S} > 0$, una solución $x(t)$ definida en $|t-t_0| \leq \bar{S}$ y con valores en U, que satisface la ecuación 1) y verifica la ecuación 2).

PRUEBA:

Sean S, B valores positivos de tal manera que definimos el rectángulo cerrado:

$$J(S, B, t_0, x_0) = J(S, B) = \{(t,x) : |t-t_0| \leq S \ , \ |x-x_0| \leq B\} \subset U^*,$$

el punto $P_0 = (t_0, x_0) \in J(S,B)$, por la continuidad de la función $f(t,x)$ existe un valor $M>0$, tal que:

$$|f(t,x)|\leq M \qquad \forall (t,x)\varepsilon J(S,B).$$

Sean $\bar{S}$, $\bar{B}$ valores positivos, donde $0<\bar{S}\leq S$, $0<\bar{B}\leq B$, $M\bar{S}\leq\bar{B}$ y definimos el rectángulo cerrado y acotado:

$$A(\bar{S},\bar{B},t_o,x_o)= A(\bar{S},\bar{B})=\{(t,x):|t-t_o|\leq\bar{S},|x-x_o|\leq\bar{B}\}\subset J(S,B).$$

Sea $\mathcal{C}[|t-t_o|\leq\bar{S},R^n]$ el espacio de todas las funciones vectoriales continuas ϕ, definidas en el intervalo $|t-t_o|\leq\bar{S}$, sobre el espacio R^n.

Sea $\bar{\mathcal{C}}[|t-t_o|\leq\bar{S},|x-x_o|\leq\bar{B}]$, el subconjunto de todas las funciones ϕ, definidas en $|t-t_o|\leq\bar{S}$, y con valores en $|x-x_o|\leq\bar{B}$, es decir

$$\text{si } \phi\varepsilon\bar{\mathcal{C}}[|t-t_o|\leq\bar{S},\ |x-x_o|\leq\bar{B}]\rightarrow |\phi(t)-x_o|\leq \bar{B}.$$

$\bar{\mathcal{C}}$ es un conjunto cerrado, acotado y convexo, ya que si $\phi_1,\phi_2\varepsilon\bar{\mathcal{C}}\rightarrow (1-t)\phi_1 + t\phi_2\varepsilon\bar{\mathcal{C}}$.

Se define para cada función vectorial continua $\phi\varepsilon\bar{\mathcal{C}}[|t-t_o|\leq\bar{S},|x-x_o|\leq\bar{B}]$, la transformación $T\phi$ por la relación:

$$5)\quad T\phi(t)=x_o + \int_{t_o}^{t} f(S,\phi(s))ds \qquad t\varepsilon|t-t_o|\leq\bar{S}$$

De tal manera que el problema de probar la existencia de un punto fijo de la transformación $T\phi$ (relación 5), es equivalente a resolver el problema de condiciones iniciales, es decir, si en $\bar{\mathcal{C}}[|t-t_o|\leq S,|x-x_o|\leq B]$ existe una función vectorial continua ϕ, tal que satisfaga T $T\phi=\phi$ para: $t\varepsilon|t-t_o|\leqslant \bar{S}$ entonces decimos decimos que existe una solución $x(t)$ de la ecuación 4) en el intervalo $|t-t_o|\leqslant\bar{S}$.

Probaremos la existencia de un punto fijo de la transformación T sobre $\bar{\mathscr{C}}[\,|t-t_o|\leqslant\bar{S},\ |x-x_o|\leqslant\bar{B}\,]$ aplicando al teorema de punto fijo de Schauder.

Condiciones a probar:

1). $T:\bar{\mathscr{C}}\rightarrow\bar{\mathscr{C}}$

2) $T(\bar{\mathscr{C}})$ es relativamente compacto.

1). $T:\bar{\mathscr{C}}\rightarrow\bar{\mathscr{C}}$

Sea $\phi\varepsilon\mathscr{C}$, $T\phi(t_o)=x_o$, $t\varepsilon|t-t_o|\leqslant\bar{S}$, calculemos,

$$|T\phi(t)-x_o|=|\int_{t_o}^{t} f(S,\phi(S))ds|\leqslant\int_{t_o}^{t}|F(S,\phi(S))|\,ds\leqslant M\int_{t_o}^{t}ds|\leqslant$$
$$\leqslant M|t-t_o|\leqslant M\bar{S}\leqslant\bar{B}$$

Entonces: $|T\phi(t)-x_o|\leqslant\bar{B}$, lo que indica es que $T(\bar{\mathscr{C}})C\bar{\mathscr{C}}$, es decir $T\phi\varepsilon\bar{\mathscr{C}}$, donde se observa que T transforma el conjunto $\bar{\mathscr{C}}$ en sí mismo, por lo tanto $T:\bar{\mathscr{C}}\rightarrow\bar{\mathscr{C}}$.

2) $T(\bar{\mathscr{C}})$ es relativamente compacto.

Sea $\phi\varepsilon\bar{\mathscr{C}}$ arbitrario, $S,t\varepsilon|t-t_o|\leqslant\bar{S}$, calculemos:

$$|T\varphi(t)-T\varphi(s)|=\left|x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds-x_0-\int_{t_0}^{s} f(s,\varphi(s))ds\right|=$$

$$=\left|\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds+\int_{s}^{t_0} f(s,\varphi(s))ds\right|$$

$$=\left|\int_{s}^{t} f(s,\varphi(s))ds\right|\leq\int_{s}^{t}|f(s,\varphi(s))|ds$$

$$\leq M\left|\int_{s}^{t} ds\right|\leq M|t-s|$$

Entonces $|T\varphi(t)-T\varphi(s)|\leq M|t-s|$ para $t,s\in|t-t_0|\leq\bar{S}$ lo cual indica que $T(\bar{\mathcal{F}})$ es una familia equicontinua en $\bar{\mathcal{F}}$ y además equiacotada ya que $|TQ(t)|\leq\|X_0\|+\bar{B},\forall\phi$ y $\forall t$ y por T de Ascoli-Arsela véase apéndice A. $T(\bar{\mathcal{F}})$ es relativamente compacto.

Dado a que T satisface las condiciones de existencia de un punto fijo del teorema de Schauder, entonces existe una función vectorial continua:

$\varphi\in\bar{\mathcal{F}}\left[|t-t_0|\leq\bar{S},|X-X_0|\leq\bar{B}\right]$ que satisface la relación $T\varphi=\varphi$ en el intervalo $|t-t_0|\leq\bar{S}$, esto implica que el problema de condición inicial 4) posee una solución x(t) en el intervalo $|t-t_0|\leq\bar{S}$.

Nota:

Es esencial la dimensión finita del espacio para establecer que $T(\bar{\mathcal{F}})$ es relativamente compacto.

La continuidad de f(t,x), no garantiza la existencia de soluciones en espacios de dimensión infinita véase [3].

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Si la ecuación diferencial ordinaria está sujeta a un conjunto de restricciones y éstas a dos puntos A,B, se le llama problema de condición de frontera, donde se busca una solución al problema dado, si es que existe, o si existe y es única, de tal manera que la solución que buscamos está limitada al intervalo [A,B], es decir, donde se va a definir la solución, así como verificar la ecuación diferencial ordinaria y satisfacer el conjunto de restricciones preasignadas.

El siguiente problema de condiciones de frontera, se va a resolver utilizando el Teorema de Punto Fijo de Schauder ; para probar la existencia de solución, y donde en su desarrollo es necesario introducir la función de Green, la cual se definirá en dos formas distintas, pero dando el mismo resultado. En una de las formas es necesario introducir el concepto de función escalón unidad para obtener el resultado, y en la otra es necesario el manejo del wronskiano de las soluciones linealmente independiente.

Se darán algunos ejemplos, a los cuales se les calcula la función de Green por las dos formas, para visualizar cual de los métodos es más fácil de obtener la función de Green.

Un problema de condición de frontera se puede transformar a una ecuación integral equivalente, de tal manera que las soluciones de la ecuación integral en un intervalo $[A,B]$, son también soluciones del problema de condición de frontera en el intervalo $[A,B]$.

Se hace necesario definir el espacio de funciones vectoriales continuas $\varphi \in \mathscr{C}[T,R^n]$, con cierta norma específica, en el cual definimos el operador $\bar{T}$ para cada función vectorial continua $\varphi \in \mathscr{C}[T,BCR^n]$, de tal manera que el problema de condición de frontera es equivalente a probar la existencia de un punto fijo del operador $\bar{T}$ en el espacio de función vectorial continua $\varphi \in \mathscr{C}[T,BCR^n]$, es decir, probar que existe una función vectorial continua $\varphi \in \mathscr{C}[T,BCR^n]$, tal que si se satisface $\bar{T}\phi=\phi$, en un intervalo dado, entonces decimos que el problema de condición de frontera tiene solución en el intervalo donde se utilizará el teorema de punto fijo de Schauder.

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Aplicación del Teorema de Punto Fijo de Schauder, a la demostración de existencia de soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

- Problema de condición de frontera -

El problema de condición de frontera, a diferencia del problema de condición inicial, es que la solución general está sujeta a más de un punto; cuando son dos puntos, por lo general son los puntos extremos del intervalo en definición, y es de esperarse que el número de condiciones a dicho problema sean más de una. Se resolverá el problema de condición de frontera haciendo uso de la función de Green, construida de acuerdo a las condiciones de [1] y [2] y del Teorema de Punto Fijo de Schauder .

Sea $U \subset R^n$ un conjunto abierto y conexo, y T es un intervalo real cerrado y acotado:

$T=[0,P] \subset R$, sea $U^* \subset R^{n+1}$ definido por $U^*=T \times U$.

Consideremos una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

1). $\ddot{y}(x)=f(x,y(x))$

con condiciones de frontera

2). $y(0)=0$, $y(P)=0$ $x \in [0,P]=T$ donde $f(x,y)$ satisface la siguiente condición:

3). $f(x,y)$ está definida y continua en U^*.

El problema de condición de frontera se puede transformar a la siguiente ecuación integral equivalente, es decir, las ecuaciones 1), 2) se transforman a la ecuación:

$$4)\quad y(x)=\int_0^P G(x,t)\, f(t,y(t))\,dt \qquad x\in[0,P]$$

Donde $G(x,t)$ es una función de Green que cumple con las propiedades que se mencionan en el apéndice A.

Obtención de la ecuación 4):

Dado que:

1) $\ddot{y}(x)=f(x,y(x)) \qquad x\in[0,P]$

con condiciones de frontera

2) $y(0)=y(P)=0$, suponiendo que se satisface 3)

Integrando dos veces la ecuación 1):

$$\int_0^s d\dot{y}=\int_0^s f(t,y(t))\,dt$$

$$\dot{y}(s)=\int_0^s f(t,y(t))\,dt+C_1$$

$$\int_0^x dy=\int_0^x\int_0^s f(t,y(t))\,dt\,ds+C_1\int_0^x ds$$

$$4')\quad y(x)=\int_0^x\int_0^s f(t,y(t))\,dt\,ds+C_1x+C_2$$

Ahora, utilizando las condiciones de frontera izquierda $y(0)=0$ en $x=0$, y condición de frontera derecha $y(P)=0$ en $x=P$, en la ecuación 4), para obtener C_1 , C_2 .

Calculemos:

6) $$y(0)=\int_0^0\int_0^s f(t,y(t))\,dt\,ds + C_1(0)+C_2=0 \Longrightarrow C_2=0$$

7) $$y(P)=\int_0^P\int_0^s f(t,y(t))\,dt\,ds + C_1P+0=0 \Rightarrow C_1=-\frac{1}{P}\int_0^P\int_0^s f(t,y(t))\,dt\,ds$$

Llevando 6) y 7) a 4'):

4') $$y(x)=\int_0^x\int_0^s f(t,y(t))\,dt\,ds-\frac{x}{P}\int_0^P\int_0^s f(t,y(t))\,dt\,ds \qquad x\in[0,P]$$

Definiendo la función escalón unitario:

8) $$U_o(S)=\begin{cases}0 & \text{si } S\leq 0\\ 1 & \text{si } S>0\end{cases}$$

y se tiene :

9) $$U_o(x-S)=\begin{cases}0 & \text{si } x-S\leq 0\\ 1 & \text{si } x-S>0\end{cases}$$

Aplicando 9) a la ecuación 4') se transforma en:

4'') $$y(x)=\int_0^P U_o(x-s)\int_0^s f(t,y(t))\,dt\,ds-\frac{x}{P}\int_0^P\int_0^s f(t,y(t))\,dt\,ds$$
$$=\int_0^P\int_0^s\left[U_o(x-s)-\frac{x}{P}\right]f(t,y(t))\,dt\,ds \qquad x\in[0,P]$$

De la misma manera :

10) $$U_o(S-t)=\begin{cases}0 & \text{si } S-t\leq 0\\ 1 & \text{si } S-t>0\end{cases}$$

Aplicando 10) a la ecuación 4'') se transforma en:

$$4)\quad y(x)=\int_0^P\int_0^P U_0(s-t)\left[U_0(x-s)-\frac{x}{P}\right]f\big(t,y(t)\big)\,dt\,ds$$

$$=\int_0^P\left[\int_0^P U_0(s-t)\left[U_0(x-s)-\frac{x}{P}\right]ds\right]f\big(t,y(t)\big)\,dt\;.\quad x\in[0,P]$$

Por lo tanto; la ecuación 4) queda definida:

$$4)\quad y(x)=\int_0^P G(x,t)\,f\big(t,y(t)\big)\,dt \qquad x\in[0,P]$$

Donde 5) $G(x,t)=\int_0^P U_0(s-t)\left[U_0(x-s)-\frac{x}{P}\right]ds$ es la función de Green descrita.

Para obtener la función de Green en forma explícita se usará la ecuación 5):

$$5)\quad G(x,t)=\int_0^P U_0(s-t)\left[U_0(x-s)-\frac{x}{P}\right]ds$$

Puesto que la función de Green está definida:

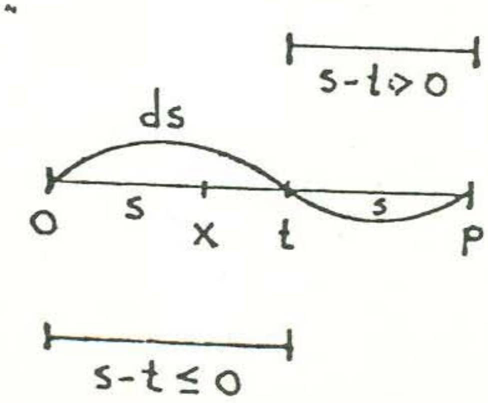
$G(x,t)=[0,P]\times[0,P]\longrightarrow R$, entonces fijando un valor $t\in[0,P]$ Calculemos la función de Green:

a). $x\leq t$ es decir $x\in[0,t]$ condición de frontera izquierda.

b) $x\geq t$ es decir $x\in[t,P]$ condición de frontera derecha.

Desarrollando a):

Sea $x\leq t$, t fijo fig. a)



5) $$G(x,t)=\int_0^t U_o(s-t)\left[U_o(x-s)-\frac{x}{P}\right]ds+\int_t^P U_o(s-t)\left[U_o(x-s)-\frac{x}{P}\right]ds$$

Analicemos a la función escalón unidad en los intervalos:

$[0,t]$, $[t,P]$ puesto que $U_o(S-t)=\begin{cases}0 & \text{si } S-t\le 0\\ 1 & \text{si } S-t>0\end{cases} \Longrightarrow$

i). En el intervalo $[0,t]$, ver fig. a)

$S-t\le 0 \Longrightarrow U_o(S-t)=0$

ii). En el intervalo $[t,P]$, ver fig. a)

$S-t>0 \Longrightarrow U_o(S-t)=1$

De acuerdo a i), ii) $\Longrightarrow$ 5) se transforma en:

5) $$G(x,t)=\int_t^P\left[U_o(x-s)-\frac{x}{P}\right]ds$$

Por ii) se tiene que $S>t$, y dado que $t\ge x$ entonces $S>x$ por lo tanto $x-S<0 \Longrightarrow U_o(x-S)=0$

Llevado a 5)

5) $$G(x,t)=\int_t^P\left(-\frac{x}{P}\right)ds$$

$$=-\frac{x}{P}(P-t)=\frac{(t-P)x}{P} \qquad \text{si } t\ge x$$

Desarrollando b)

Sea $x\geqslant t$, t fijo

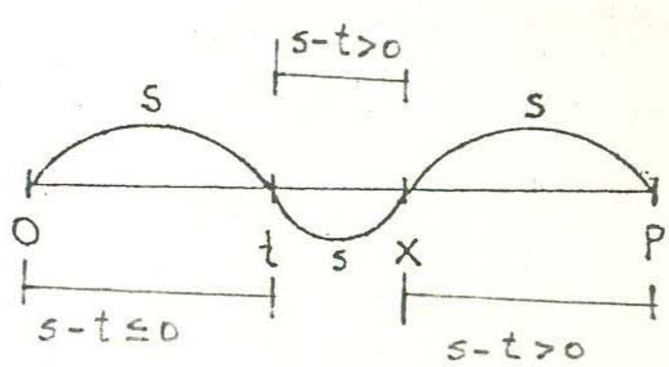


fig. b)

$$5)\quad G(x,t)=\int_0^t U_o(s-t)\left[U_o(x-s)-\frac{x}{P}\right]ds+$$

$$+\int_t^x U_o(s-t)\left[U_o(x-s)-\frac{x}{P}\right]ds+\int_x^P U_o(s-t)\left[U_o(x-s)-\frac{x}{P}\right]ds$$

Analicemos a la función escalón unidad en los intervalos: $[0,t]$, $[t,x]$, $[x,P]$ puesto que $U_o(S-t)=\begin{cases}0 & \text{si } S-t\leq 0\\ 1 & \text{si } S-t>0\end{cases}$

i) En el intervalo $[0,t]$, ver fig. b)

$S\leq t \Longrightarrow S-t\leq 0 \Longrightarrow U_o(S-t)=0$

ii) En el intervalo $[t,x]$ ver fig. b)

$S>t \Longrightarrow S-t>0 \Longrightarrow U_o(S-t)=1$

iii) En el intervalo $[x,P]$ ver fig. b)

$S>t \Longrightarrow S-t>0 \Longrightarrow U_o(S-t)=1$

De acuerdo a i), ii), iii), 5) se transforma en:

$$5)\quad G(x,t)=\int_t^x \left[U_o(x-s)-\frac{x}{P}\right]ds+\int_x^P\left[U_o(x-s)-\frac{x}{P}\right]ds$$

Analicemos la función escalón unidad en los intervalos:

$[t,x]$, $[x,P]$ puesto que $U_o(x-S)=\begin{cases}0 & \text{si } x-S\leq 0\\ 1 & \text{si } x-S>0\end{cases}$

iv) En el intervalo $|x,t|$ ver fig. b),

$x>S \Longrightarrow x-S>0 \Longrightarrow U_o(x-S)=1$

v) En el intervalo $|x,P|$ ver fig b) ,

$x\leq S \Longrightarrow x-S\leq 0 \Longrightarrow U_o(x-S)=0$

De acuerdo a iv) y v), 5) se transforma en:

$$5)\quad G(x,t)=\int_t^x\left[1-\frac{x}{P}\right]ds+\int_x^P\left(-\frac{x}{P}\right)ds=\frac{P-x}{P}\int_t^x ds-\frac{x}{P}\int_x^P ds=$$

$$=\frac{P-x}{P}\cdot(x-t)-\frac{x}{P}(P-x)=\frac{P-x}{P}\left[x-t-x\right]$$

$$=\frac{P-x}{P}\left[-t\right]=\frac{t}{P}\left[x-P\right]\qquad \text{si } x\geq t$$

Finalmente, se obtiene que:

$$G(x,t)=\begin{cases}\frac{x}{P}(t-P) & \text{si } 0\leq x\leq t \quad \text{condición de frontera izquierda}\\[2ex] \frac{t}{P}(x-P) & \text{si } t\leq x\leq P \quad \text{condición de frontera derecha}\end{cases}$$

Nota: Para mayor detalle véase [2]

Otra forma de obtener la función de Green es la siguiente:

Sea $G(x,t) : T\text{x}T \to R$, definida por:

$$5)'\,G(x,t)=\begin{cases}C_1(t)y_1(x) & 0\leq x\leq t \quad \text{condic. de frontera izq.}\\[1ex] C_2(t)y_2(x) & t\leq x\leq P \quad \text{condic. de frontera der.}\end{cases}$$

5' forma B

Este tipo de funciones están asociadas a la ecuación diferencial lineal de segundo orden $\ddot{y}+a(x)y'+b(x)y=f(x)$ con condiciones de frontera $y(a)=y(b)=0$.

Dicha construcción de la función de Green está definida en (1), se bosquejará la obtención 5)' (forma B) al problema que se está tratando, de acuerdo a (1).

Construcción:

6)' $C_1(t)$ es una función que depende de t, y se calcula mediante la expresión:

$$C_1(t)=\frac{y_2(t)}{w(t)P(t)}$$

7)' $C_2(t)$ es una función que depende de t, y se calcula mediante la expresión:

$$C_2(t)=\frac{y_1(t)}{w(t)P(t)}$$

8)' $y_1(x)$, $y_2(x)$ son las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria de 2o. orden homogénea, donde $y_1(x)$ es la solución de la condición de frontera izquierda, $y_2(x)$ es la solución de la condición de frontera a la derecha, entonces $y_1(t)$, $y_2(t)$ son las soluciones evaluadas en x=t dado que $y_1(x)$, $y_2(x)$ son soluciones linealmente independientes, sucede que:

$y_1(0)\neq y_2(0)$ y $y_1(P)\neq y_2(P)$.

9)' Dado a que $y_1(x)$, $y_2(x)$ son linealmente indepen--tes, entonces su wronskiano está definido por:

$$w(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}\neq 0$$

Entonces w(t) es el wronskiano evaluado x=t.

10)' P(t) es la función de la mayor derivada evaluada x=t.

De acuerdo a lo anterior, la función de Green a tra bajar queda definida por:

$$5)' \quad G(x,t)=\begin{cases} \dfrac{y_2(t)\, y_1(x)}{w(t)\, P(t)} & \text{si } 0 \le x \le t \quad \text{condición de front. izq.} \\[2ex] \dfrac{y_1(t)\, y_2(x)}{w(t)\, P(t)} & \text{si } t \le x \le P \quad \text{condición de front. derecha} \end{cases}$$

Nota: véase con mayor detalle en [1] .

- Problema a resolver utilizando la forma B)-

Dada la ecuación diferencial ordinaria de 2o. orden:

1)' $\ddot{y}=f(x,y)$, con condiciones de frontera

2)' $y_1(0)=0$, $y_2(P)=0$ $x \in T=[0,P]$,

3)' $f(x,y)$ está definida y continua en U^*

Se construye la función de Green para la ecuación

1)'' $\ddot{y}=0$ de acuerdo al método anterior

Donde las soluciones de la ecuación 1)'', que satisfacen las condiciones de frontera, son:

6)' $y_1(x)=x$ verifica la condición de frontera izquierda, es decir, $y_1(0)=0$

7)' $y_2(x)=x-P$ verifica la condición de frontera derecha, es decir, $y_2(P)=0$

8)' $y_1(t)=t$

9)' $y_2(t)=t-P$

10)' $P(t)=1$

11)' $$w(x)=\begin{vmatrix} x & x-P \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=x-(x-P)=P\neq 0 \Longrightarrow w(t)=P$$

12)' $$C_1(t)=\frac{y_2(t)}{P(t)w(t)}=\frac{t-P}{(1)(P)}=\frac{t-P}{P}$$

13)' $$C_2(t)=\frac{y_1(t)}{P(t)w(t)}=\frac{t}{(1)(P)}=\frac{t}{P}$$

Reemplazando las ecuaciones 6)', 7)', 12)', 13)' en 5)', obtenemos que la función de Green queda definida por:

5)' $$G(x,t)=\begin{cases} \frac{x}{P}(t-P) & 0\leq x\leq t \quad \text{cond. de front. izq.} \\ \frac{t}{P}(x-P) & t\leq x\leq P \quad \text{cond. de front. der.} \end{cases}$$

Se puede observar que la función de Green es la misma. Todas las soluciones $y(x)$ de la ecuación 4) en el intervalo $T=[0,P]$, son también soluciones del problema de condiciones a la frontera, en el intervalo $T=[0,P]$, es decir, se satisface la ecuación 1), y verifica la ecuación 2).

--Problema de condiciones a la frontera--

Dada una ecuación diferencial ordinaria de 2o. orden 1), con condición 2), y donde $f(x,y)$ satisface la condición 3), y dada la pareja de puntos $(0,0)$, $(P,0)$ U^*, es decir 0, $P\in T=[0,P]$, $0\in U$, probaremos que existe en el intervalo $T=[0,P]$, al menos una solución $y(x)$ definida en el intervalo $T=[0,P]$, y con valores en U, que satisface la ecuación 1) y verifica la ecuación 2).

PRUEBA:

Sean P,r valores positivos, que definen al rectángulo cerrado y acotado:

$$B(P,r)=\{(x,y):\ x\in[0,P]\equiv T,\ |y-0|\leq r\}\subset U^*$$

los puntos:

$(0,0)$, $(P,0)\in B(P,r)$, por la continuidad de la función $f(x,y)$ existe un valor $M>0$ tal que $M\leq\frac{8r}{P^2}$ tal que:

$$|f(x,y)|\leq M \qquad \forall\,(x,y)\in B(P,r).$$

Sea $\mathcal{E}\left[[0,P]\ ,R^n\right]$ el espacio de todas las funciones vectoriales continuas ϕ, definidas del intervalo $T=[0,P]$ sobre el espacio R^n.

En el conjunto $B(P,r)$ definimos por:

$\mathcal{E}\left[[0,P]\ ,\ |y|\leq r\right]$ el subconjunto de funciones vectoriales continuas φ , definidas en el intervalo:

$$T=[0,P] \text{ sobre } |y|\leq r.$$

Por la forma en que está definido el conjunto $B(P,r)$, es un conjunto cerrado, acotado y convexo, se define para cada función vectorial continua $\varphi \in \mathcal{E}[[0,P], |y| \leq r]$ la transformación $\bar{T}\varphi$ por la relación:

$$14)' \quad \bar{T}\varphi(x) = \int_0^P G(x,t)\, f(t, \varphi(t))\, dt \qquad x \in T = [0,P]$$

De tal manera que el problema de existencia de un punto fijo de la transformación $\bar{T}\varphi$, ecuación 14)' es equivalente resolver el problema de condición de frontera, ecuación 4), es decir, si en $\bar{\mathcal{E}}[[0,P], |y| \leq r]$, existe una función vectorial continua ϕ, tal que satisfaga $\bar{T}\phi = \phi$ - para $t \in T = [0,P]$ entonces decimos que existe una solución $y(x)$ de la ecuación 4) en el intervalo $T = [0,P]$.

Probaremos la existencia de un punto fijo de la transformación $\bar{T}$ sobre $\bar{\mathcal{E}}[[0,P], |y| \leq r]$ aplicando el teorema de punto fijo de Schauder .

Condiciones a probar:

1). $\bar{T}: \bar{\mathcal{E}} \longrightarrow \bar{\mathcal{E}}$

2). $\bar{T}(\bar{\mathcal{E}})$ es relativamente compacto.

i). Si S, $x \in T$, tal que $0 \leq x \leq S \leq t$ y usando la condición de frontera izquierda de la función de Green se tiene que:

a). $\left|G(x,t)-G(s,t)\right| = \left|\frac{x}{P}(t-P)-\frac{s}{P}(t-P)\right| = \frac{(t-P)}{P}\cdot(x-s)\Big| = \frac{P-t}{P}\left|x-s\right|$

ii). Si S, $x \in T$, tal que $t \leq S \leq x \leq P$, y usando la condición de frontera derecha de la función de Green se tiene que:

b). $\left|G(x,t)-G(s,t)\right| = \left|\frac{t}{P}(x-P)-\frac{t}{P}(s-P)\right| = \left|\frac{t}{P}\left[x-P-s+P\right]\right| = \left|\frac{t}{P}(x-s)\right| =$

$$= \frac{t}{P}\left|x-s\right|$$

iii). Probar que:

c). $\left|\int_0^P G(x,t)\,dt\right| \leq \frac{P^2}{8}$

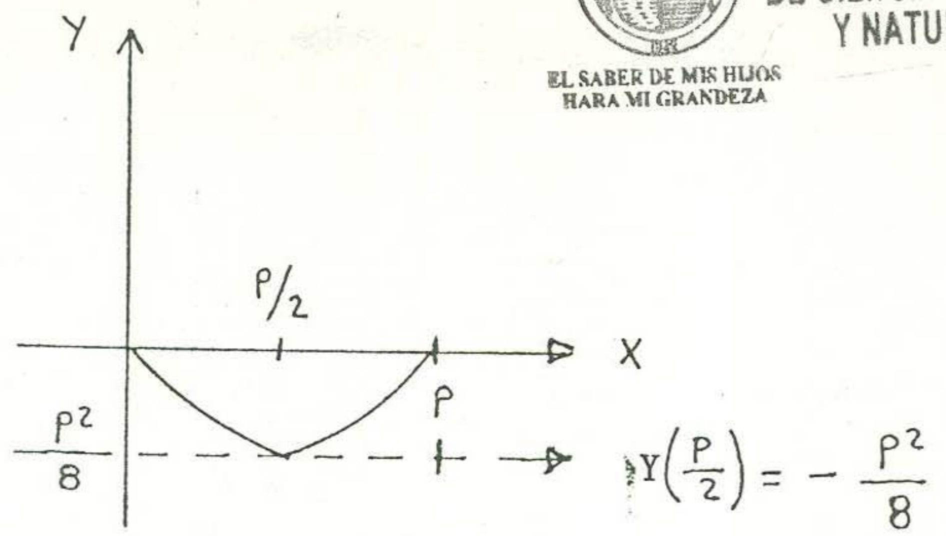
$$Y(x) = \int_0^P G(x,t)\,dt = \int_0^x G(x,t)\,dt + \int_x^P G(x,t)\,dt = \int_0^x \frac{(x-P)}{P}t\,dt + \int_x^P \frac{x}{P}(t-P)\,dt =$$

$$= \frac{x-P}{P}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_0^x + \frac{x}{P}\left(\frac{t^2}{2}-tP\right)\Big|_x^P = \frac{x^2(x-P)}{2P} + \frac{x}{P}\left[-\frac{P^2}{2}-\frac{x^2}{2}+xP\right]$$

$$= \frac{x^3}{2P} - \frac{Px^2}{2P} - \frac{Px}{2} - \frac{x^3}{2P} + x^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{Px}{2} = \frac{x}{2}(x-P)$$

Por lo tanto: $\quad Y(x) = \frac{x^2-Px}{2}$

Si graficamos la función $Y(x)$ en el intervalo $[0,P]$, donde su mínimo relativo se obtiene en el punto crítico $x=\frac{P}{2}$.



Por lo tanto si $x \in [0,P]$ $|Y(x)| \leq \frac{P^2}{8}$, es decir,

c). $\left| \int_0^P G(x,t)\,dt \right| \leq \frac{P^2}{8}$

PRUEBA:

1). $\bar{T}: \bar{\mathcal{E}} \longrightarrow \bar{\mathcal{E}}$

Sea $\varphi \in \bar{\mathcal{E}}$, donde $\bar{T}\varphi(0)=0$, $\bar{T}\varphi(P)=0$, $x \in T$, usando c):

Calculemos:

$$\left|\bar{T}\varphi(x)\right| = \left| \int_0^P G(x,t) f(t,\varphi(t))\,dt \right| \leq \left| f(t,\varphi(t)) \right| \left| \int_0^P G(x,t)\,dt \right| \leq$$

$$\leq M \left| \int_0^P G(x,t)\,dt \right| \leq M \frac{P^2}{8} \leq \frac{P^2}{8} \cdot \frac{8}{P^2} r = r$$

Por lo tanto: $\left|\bar{T}\varphi(x)\right| \leq r$

Entonces:

$\left|\bar{T}\varphi(x)\right| \leq r$ lo que indica es que $\bar{T}(\bar{\mathcal{E}}) \subset \bar{\mathcal{E}}$, es decir,

$\overline{T}\varphi \in \overline{E}$ donde se observa que $\overline{T}$ transforma funciones vectoriales continuas en funciones vectoriales continuas, φ, $\overline{T}\varphi \in B(P,r)$, por lo tanto $\overline{T}: \overline{E} \longrightarrow \overline{E}$.

2). $\overline{T}(\overline{E})$ es relativamente compacto

Sea $\varphi \in \overline{E}$, $x \in [0,P] = T$

Calculemos:

$$\left|\overline{T}\varphi(x) - \overline{T}\varphi(s)\right| = \left|\int_0^P G(x,t) f(t,\varphi(t))dt - \int_0^P G(s,t) f(t,\varphi(t))dt\right| =$$

$$= \left|\int_0^P [G(x,t) - G(s-t)][f(t,\varphi(t))]dt\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_0^P |G(x,t) - G(s,t)|\,|f(t,\varphi(t))|\,dt\right| \leq$$

$$\leq M\left|\int_0^P |G(x,t) - G(s,t)|\,dt\right| \leq M|x-s|\frac{P}{2}$$

Entonces:

$\left|\overline{T}\varphi(x) - \overline{T}\varphi(s)\right| \leq \frac{MP}{2}|x-s|$, donde s, $x \in T = [0,P]$, se llega al mismo resultado si en 2) usamos i) ó ii).

Lo que indica es que $\overline{T}(\overline{E})$ es una familia equi--continua en el $\overline{E}[[0,P], |y| \leq r]$ y por el teorema de Ascoli [8], $\overline{T}(\overline{E})$ es relativamente compacto.

Dado a que $\overline{T}$ satisface las condiciones de existencia de un punto fijo del teorema Schauder , entonces existe una función vectorial continua $\varphi \in \bar{E}\left[[0,P], |y| \leq r\right]$ que satisface la relación $\bar{T}\varphi = \varphi$ en el intervalo $T = [0,P]$; esto implica que el problema de condición de frontera 4) posee una solución $y(x)$ en el intervalo $T = [0,P]$.

Nota:

Es esencial la dimensión finita del espacio, para establecer que $\bar{T}(\bar{E})$ es relativamente compacto.

La continuidad de $f(x,y)$ no garantiza la existencia de soluciones en espacios de dimensión infinita.

Véase [3] .

Ejemplos:

1.- Resolución del problema 1), 2), considerando 3) $f(x,y)=x$, la cual es una función continua y definida en U^*. Ahora, puesto que la solución particular al problema, está determinada por la ecuación 4).

4) $$y(x) = \int_0^P G(x,t)\, f(t, y(t))\, dt \qquad x \in [0,P]$$

Donde $G(x,t)$ en la función de Green propuesta en 5), la cual está definida por:

5). $$G(x,t) = \begin{cases} \frac{x}{P}(t-P) & \text{si } 0 \leq x \leq t \quad \text{cond. de frontera izquierda} \\ \frac{t}{P}(x-P) & \text{si } t \leq x \leq P \quad \text{cond. de frontera derecha} \end{cases}$$

Desarrollando 4):

$$4).\quad y(x)=\int_0^x G(x,t)\,f(t,y(t))\,dt+\int_x^P G(x,t)\,f(t,y(t))\,dt$$

Substitución de 3) en 4):

$$4).\quad y(x)=\int_0^x G(x,t)\,.\,t\,dt+\int_x^P G(x,t)\,.\,t\,dt$$

Aplicando la ecuación 5) en 4):

$$4).\quad y(x)=\int_0^x \frac{t}{P}(x-P)\,t\,dt+\int_x^P \frac{x}{P}(t-P)\,t\,dt$$

$$=\frac{x-P}{P}\int_0^x t^2dt+\frac{x}{P}\int_x^P (t^2-Pt)\,dt$$

$$=\frac{x-P}{P}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_0^x+\frac{x}{P}\left[\frac{t^3}{3}-\frac{Pt^2}{2}\Big|_x^P\right]$$

$$=\frac{x-P}{P}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{x}{P}\left[\frac{P^3}{3}-\frac{P^3}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2P}{2}\right]$$

$$=\frac{x^4}{3P}-\frac{x^3}{3}-\frac{xP^2}{6}-\frac{x^4}{3P}+\frac{x^3}{2}$$

$$=\frac{x^3}{6}-\frac{xP^2}{6}=\frac{x}{6}(x^2-P^2)$$

Por lo tanto:

$$4).\quad y(x)=\frac{x}{6}(x^2-P^2)$$

Verificación de 1), 2) en $[0,P]$, evaluando 4) en $x=0,P$

4) $y(0)=\frac{0}{6}(0-P^2)=0$

4) $y(P)=\frac{P}{6}(P^2-P^2)=0$, se cumple 2)

Derivando dos veces 4):

$y(x)=\frac{x^3}{6}-\frac{xP^2}{6}$

$y'(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{P^2}{6}$

$y''(x)=x$, se cumple 1).

Ejemplo 2:

Dada la siguiente ecuación diferencial ordinaria de 2o. orden:

1). $\ddot{y}(x)=-y+x$, con condiciónes de frontera

2). $y(0)=0$, $y(1)=0$ $x\in[0,1]$

3). Sea $f(x,y)=x-y$ la cual es una función contínua. Encontrar su función de Green, así como la solución particular que satisfaga a 1) y verifique a 2) en el intervalo $[0,1]$, usando la forma B).

Desarrollando 1):

1) $\ddot{y}+y=x$, donde la ecuación homogénea de 1) es

1)' $\ddot{y}+y=0$, entonces las soluciones de frontera de 1) son:

a) $y_1(x)=\operatorname{Sen} x$ para $x=0$ condición de frontera izq.

b) $y_2(x)=\operatorname{Sen}(x-1)$ para $x=1$ cond. de frontera derecha

Por la forma en que están definidos $y_1(x)$, $y_2(x)$ se puede verificar que son soluciones linealmente independientes de 1)', y donde su wronskiano es el siguiente:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \operatorname{Sen} x & \operatorname{Sen}(x-1) \\ \operatorname{Cos} x & \operatorname{Cos}(x-1) \end{vmatrix} = \operatorname{Sen} x \operatorname{Cos}(x-1) - \operatorname{Cos} x \operatorname{Sen}(x-1) =$$

$$= \operatorname{Sen}(1) \neq 0$$

c). $W(t) = \operatorname{Sen} 1$

d) $p(t) = 1$

e) $y_1(t) = \operatorname{Sen} t$

f) $y_2(t) = \operatorname{Sen}(t-1)$

g) $C_1(t) = \dfrac{\operatorname{Sen}(t-1)}{\operatorname{Sen}(1)}$

h) $C_2(t) = \dfrac{\operatorname{Sen} t}{\operatorname{Sen}(1)}$

Puesto que la función de Green está definida por:

$$5)' \quad G(x,t) = \begin{cases} C_1(t)\, y_1(x) & \text{si } 0 \leq x \leq t \quad \text{cond. de front. izquierda} \\ C_2(t)\, y_2(x) & \text{si } x \leq t \leq 1 \quad \text{cond. de front. derecha} \end{cases}$$

Llevando a), b), g), h) a 5)' se tiene que:

$$5)' \quad G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Sen}(t-1)}{\operatorname{Sen}(1)} \operatorname{Sen} x & \text{si } 0 \leq x \leq t \quad \text{cond. de front. izquierda} \\ \dfrac{\operatorname{Sen} t}{\operatorname{Sen}(1)} \operatorname{Sen}(x-1) & \text{si } t \leq x \leq 1 \quad \text{cond. front. derecha} \end{cases}$$

Utilizando la función de Green, 5)' en la ecuación 4) se tiene que:

4). $$y(x)=\int_0^1 G(x,t)\,f(t,y(t))\,dt \qquad x\in[0,1]$$

4). $$y(x)=\int_0^x G(x,t)\,t\,dt+\int_x^1 G(x,t)\,t\,dt$$

$$=\int_0^x \frac{\text{Sen } x-1}{\text{Sen}(1)}\cdot t\,\text{Sen } t\,dt+\int_x^1 \frac{\text{Sen } x}{\text{Sen}(1)}+\text{Sen}(t-1)\,dt$$

$$=\frac{\text{Sen}(x-1)}{\text{Sen}(1)}\int_0^x t\,\text{Sen } t\,dt+\frac{\text{Sen } x}{\text{Sen}(1)}\int_x^1 t\,\text{Sen}(t-1)\,dt$$

$$=\frac{\text{Sen}(x-1)}{\text{Sen}(1)}\left[\text{Sen } t-t\,\text{Cos } t\Big|_0^x\right]+\frac{\text{Sen } x}{\text{Sen}(1)}\left[\text{Sen}(t-1)-t\,\text{Cos}(t-1)\Big|_x^1\right]$$

$$=\frac{\text{Sen}(x-1)}{\text{Sen}(1)}\left[\text{Sen } x-x\,\text{Cos } x\right]+\frac{\text{Sen } x}{\text{Sen}(1)}\left[-1-\text{Sen}(x-1)+x\,\text{Cos}(x-1)\right]$$

$$=\frac{\text{Sen}(x-1)\,\text{Sen } x-x\,\text{Sen}(x-1)\,\text{Cos } x-\text{Sen } x-\text{Sen } x\,\text{Sen}(x-1)+x\,\text{Sen } x\,\text{Cos}(x-1)}{\text{Sen}(1)}$$

$$=\frac{-x\,\text{Sen}(x-1)\,\text{Cos } x-\text{Sen } x+x\,\text{Sen } x\,\text{Cos}(x-1)}{\text{Sen}(1)}$$

$$=\frac{x\left[\text{Sen } x\,\text{Cos}(x-1)-\text{Sen}(x-1)\,\text{Cos } x\right]-\text{Sen } x}{\text{Sen}(1)}$$

$$=\frac{x\,\text{Sen}(1)-\text{Sen } x}{\text{Sen}(1)}$$, por lo tanto:

4). $$y(x)=x-\frac{\text{Sen } x}{\text{Sen}(1)}$$

Verificación de 1), 2) en $[0,1]$, evaluando 4) en x=0,1

4) $$\left.\begin{aligned} y(0) &= 0 - \frac{\text{Sen}(0)}{\text{Sen}(1)} = 0 \\ y(1) &= 1 - \frac{\text{Sen}(1)}{\text{Sen}(1)} = 0 \end{aligned}\right\}$$ entonces se cumple 2)

Derivando dos veces 4):

$$y(x) = x - \frac{\text{Sen}(x)}{\text{Sen}(1)}$$

$$\dot{y}(x) = 1 - \frac{\text{Cos}(x)}{\text{Sen}(1)}$$

$$\ddot{y}(x) = \frac{\text{Sen}\, x}{\text{Sen}(1)}$$

Sumando $\ddot{y} + y = x - \dfrac{\text{Sen}\, x}{\text{Sen}(1)} + \dfrac{\text{Sen}\, x}{\text{Sen}(1)} = x$

Por lo tanto se verifica 1), es decir:

$$\ddot{y} + y = x \qquad \blacksquare$$

CONCLUSION DE LA PARTE B.

El Teorema de Punto Fijo de Schauder aplicado a la demostración de existencia de solución de una ecuación diferencial ordinaria con condición inicial ó condición de frontera, solamente nos garantiza la existencia de solución, más no la unicidad, debido a que la función f se condiciona únicamente a que sea una función continua y definida en U^{*}.

Se tiene q'en el problema de condición de frontera es ventajosa la construcción de la función de Green debido a que a que se facilita en ocasiones la ontención de la función solución que a la ecuación diferencial ordinaria de 2do. orden y verifique las condiciones de frontera en un intervalo dado.

Se puede observar que existe una diferencia entre el teorema de punto fijo de contracción de Banach y el teorema de punto fijo de Schauder, debido a que el primero garantiza la existencia y unicidad de solución y el segundo garantiza la existencia de solución de una ecuación diferencial ordinaria.

PARTE C.

Se empezará por demostrar un Teorema de Existencia-- de Soluciones Periódicas de las ecuaciones diferenciales- ordinarias en un intervalo dado,donde la función f está-- sujeta a ciertas condiciones específicas,Además se rela-- ciona el teorema de existencia de soluciones periódicas-- de una ecuación diferencial ordinaria con la existencia-- de solución de un problema de condición de frontera de ~~un~~ una ecuación diferencial ordinaria en un intervalo dado.

Por último,utilizando el teorema de existencia de -- soluciones periódicas se demuestra que éste es equivalen- te a la hipótesis de equivalencia asintótica de una ecua- ción diferencial ordinaria que posee una solución y(t),la cual es p-periódica ó $\lim_{t \to +\infty} y(t)$ existe.

UN CRITERIO DE EXISTENCIA DE SOLUCIONES PERIODICAS DE UNA ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA.

Sea $U \subset R^n$ un conjunto abierto y conexo, T un intervalo real, es decir $T = [a,+\infty)$, sea U^* un conjunto abierto y conexo definido por $U^* = T \times U \subset R^{n+1}$.

Consideremos una ecuación diferencial ordinaria por:

I).- $\dot{x} = f(t,x) \qquad t \in I \subset J$

donde $f(t,x)$ satisface las siguientes condiciones:

2).
- i).- $f(t,x)$ es una función continua y está definida en U^*.
- ii).- $f(t,x)$ es una función p-periódica, es decir, existe un valor $P > 0$ tal que:
  $f(t,x) = f(t+p,x) \qquad \forall (t,x) \in U^*$.

4. TEOREMA DE EXISTENCIA DE SOLUCIONES PERIODICAS.

Dada una ecuación diferencial I), donde $f(t,x)$ satisface 2), entonces existe una función continua $y(t)$ solución de I) en $I \subset T$, la cual es p-periódica si y sólo si existe una función solución $x(t)$ que satisface las siguientes condiciones:

i).- $\overline{x(I)}$ es compacto y está contenido en U.

ii).- Existe una sucesión $(n_k)_k$ de enteros positivos tendiendo a $+\infty$, tal que:

$$\lim_{k \to +\infty} \left| x(a+(n_k+1)P) - x(a+n_kP) \right| = 0$$

PRUEBA:

La ecuación I) la podemos transformar en la siguiente ecuación integral equivalente:

3).- $x(t) = x(a) + \int_a^t f(s,x(s))\,ds \qquad t \in I \subset T$,

donde todas las soluciones de la ecuación 3) en un intervalo $I \subset T$ son también soluciones de la ecuación I) en el intervalo $I \subset T$.

Sea P,R valores positivos donde $PM \leq R$ que definen un rectángulo:

$$B(P,R)=\{(t,x): t\in[a,a+P]=I\subset T,\ \{|x(t)-x(a)|\leq R\}=A\subset U\}\subset U^{*},$$

por la continuidad de la función f, se tiene que existe un valor $M>0$, tal que $|f(t,x)|\leq M \quad \forall (t,x)\in B(P,R)$.

- Necesidad:

Si x(t) es una solución p-periódica en el intervalo $I=[a,a+P]\subset T$, es decir, $x(I)=x([a,a+P])$, donde

3). $x(t)=x(a)+\int_a^t f(S,x(S))ds \quad t\in I$, puesto que x(I) es la imagen continua de un conjunto compacto $I=[a,a+P]$, entonces x(I) es un conjunto compacto, y por consiguiente $x(I)=\overline{x(I)}$.

- Probemos que $x(I)\subset U$:

Sean $t, a\in I$, usando 3), calculemos:

$$|x(t)-x(a)|=\left|\int_a^t f(s,x(s))ds\right|\leq\left|\int_a^t |f(s,x(s))|ds\right|\leq M\left|\int_a^t ds\right|\leq M|t-a|\leq MP\leq R$$

lo que implica es que:

$x(t)\subseteq U \quad \forall t\in I$, es decir, $x(I)\subseteq U$, por lo tanto se cumple i).

Si x(t) es una solución p-periódica de la ecuación 1) en el intervalo I, entonces tenemos que:

$x(a+(n_K+1)P)=x(a+n_KP)$, lo que implica es que:

$\lim_{n\to\infty}|x(a+(n_K+1)P)-x(a+n_KP)|=0$, por lo tanto se cumple ii).

- Suficiencia: Supongamos que existe una solución x(t) que satisface i), ii), Tenemos que para $K \varepsilon Z^+$, definimos una sucesión de funciones continuas $X_k : I \to R^n$ donde:

4). $X_K(t) = x(t + n_K P) \qquad n_K \geq 1$

Dado que f es una función p-periódica, se tiene que: $X_K(t)$ es una solución de la ecuación 1), es decir:

5). $X_K(t) = X_K(a) + \int_a^t f(s, X_K(s))\,ds \qquad t \in I$

Donde cada una de las funciones X_K toman sus valores en el conjunto compacto $\overline{X(I)}$, entonces se satisface que existe un valor $M > 0$, tal que:

$$|f(t, X_K(t))| \leq M \qquad \forall (t, X_K(t)) \qquad \in B(P, R)$$

La sucesión de funciones X_K es equicontinua

Ya que: Si t_1, $t \in I$, calculamos:

$$|X_K(t) - X_K(t_1)| = \left| X_K(a) + \int_a^t f(s, X_K(s))\,ds - X_K(a) - \int_a^{t_1} f(s, X_K(s))\,ds \right| =$$

$$= \left| \int_a^t f(s, X_K(s))\,ds - \int_a^{t_1} f(s, X_K(s))\,ds \right| = \left| \int_a^t f(s, X_K(s))\,ds + \int_{t_1}^a f(s, X_K(s))\,ds \right| =$$

$$= \left| \int_{t_1}^t f(s, X_K(s))\,ds \right| \leq \left| \int_{t_1}^t |f(s, X_K(s))|\,ds \right| \leq M \left| \int_{t_1}^t ds \right| \leq M |t - t_1|, \ \forall K \varepsilon Z^+$$

Ahora, puesto que $X_K(t)$ toma sus valores en el conjunto compacto $\overline{X(I)}$, aplicando el teorema de Ascoli, llegamos a que existe una subsucesión de funciones continuas $(X_K)_i$ de (X_K), que converge uniformemente sobre I, a una función continua y, es decir:

6). $\lim_{k_i \to +\infty} X_{k_i} = y$

Aplicando el teorema de convergencia de Lebosgue a 5), se tiene que:

7). $y(t) = y(a) + \int_a^t f(s, y(s))\, ds \qquad t \in I$

• Calculemos:

8). $$|y(a+p) - y(a)| = |y(a+p) - X_{k_i}(a+p) + X_{k_i}(a+p) - X_{k_i}(a) + X_{k_i}(a) - y(a)| \leq$$
$$\leq |y(a+p) - X_{k_i}(a+p)| + |X_{k_i}(a+p) - X_{k_i}(a)| + |X_{k_i}(a) - y(a)|$$

Aplicando:

$\lim_{k_i \to +\infty}$ a 8).

8)'. $\lim\limits_{K_1\to\infty} |y(a+p)-y(a)| \leq \lim\limits_{K_1\to\infty} |y(a+p)-X_{K_i}(a+p)| +$

$+ \lim\limits_{K_1\to\infty} |X_{K_i}(a+p)-X_{K_i}(0)| + \lim\limits_{K_1\to\infty} |X_{K_i}(a)-y(a)|$

Por lo continuidad de lo función y se tiene que:

8)'. $|y(a+p)-y(a)| \leq \lim\limits_{K_1\to+\infty} |X_{K_i}(a+p)-X_{K_i}(a)|$

ya que en el 1^{a} y 3^{a} términos tienden a cero, debido a que:

6). $\lim\limits_{K_i\to\infty} X_{K_i} = y$

calculemos:

9). $\lim\limits_{K_1\to\infty} |X_{K_i}(a+p)-X_{K_i}(a)| = ?$

Usando 4) tenemos que:

10). $X_{K_i}(a+p) = x(a+p+n_{K_i}P)$

11). $X_{K_i}(a) = x(a+n_{K_i}P)$

calculando la diferencia de 10) y 11) tenemos:

12). $X_{K_i}(a+p) - X_{K_i}(a) = x(a+p+n_{K_i}P) - x(a+n_{K_i}P)$

Entonces aplicando $\lim\limits_{K_1\to+\infty}$, a la norma de 12) tenemos que:

12). $\lim\limits_{K_1\to\infty} |X_{K_i}(a+p)-X_{K_i}(a)| = \lim\limits_{K_1\to\infty} |x(a+p+n_{K_i}P)-x(a+n_{K_i}P)| = 0$

Esto es por ii), entonces:

9). $\lim\limits_{K_1\to\infty} |X_{K_i}(a+p)-X_{K_i}(a)| = 0$, lo que indica es que:

8)'. $|y(a+p)-y(a)| \leq 0$ entonces $y(a+p)=y(a)$,

Por lo tanto, la función y es una función p-periódica sobre el intervalo $I\subset T$, y es una solución de la ecuación 1), en el intervalo $I\subset T$, la cual la podemos definir también como una función $z: J \to R^n$ donde:

$z(t) = y(t-n_K P)$, $n_K = \max\{n\in N : a+nP \leq t\}$. ■

EJEMPLO:

Si reemplazamos en la ecuación diferencial ordinaria 1), la función $f(t,x)$, por $f(t,x)=2\sqrt{x+3}$

1) se transforma en:

1)' $\dot{x}=2\sqrt{x-3}$ $\qquad t\in\left[4-\sqrt{3},\ 4+\sqrt{3}\right]=I\subset T$

Por la forma en que está definida la función $f(t,x)$, ésta satisface 2), entonces por el teorema anterior, 1)' posee una solución p-periódica en el intervalo $I=[4-\sqrt{3},\ 4+\sqrt{3}]\subset T$ de período $P=2\sqrt{3}$.

Se tiene que la solución $x(t)$ de la ecuación 1)' en el intervalo: $I=\left[4-\sqrt{3},\ 4+\sqrt{3}\right]\subset T$, está determinada por la siguiente expresión:

3). $x(t)=(t-4)^2-3$ $\qquad t\in I\subset T$

La cual es p-periódica en el intervalo I, siendo $P=2\sqrt{3}$ evaluando 3) en $t=4-\sqrt{3}$, $t=4+\sqrt{3}$ se tiene que:

4) $x(4-\sqrt{3})=0$

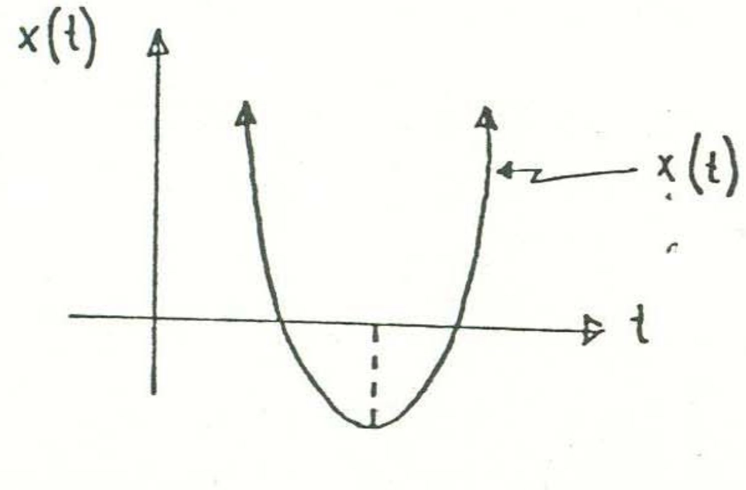
4) $x(4+\sqrt{3})=0$

Derivando la ecuación 3) se tiene que:

$\frac{dx}{dt}=2(t-4)=2\sqrt{x+3}$

1)' $\dot{x}=2\sqrt{x+3}$ $\qquad t\in I\subset T$

Graficando la ecuación 3):



Se pueden deducir las condiciones del Teorema de existencia de soluciones periódicas de la ecuación 1).

4.I. APLICACION DEL TEOREMA DE EXISTENCIA A LA EXISTENCIA DE SOLUCIONES PERIODICAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.

Sea $U \subset R^n$ un conjunto cerrado y conexo, y T un intervalo real, es decir:

$T = [a,+\infty) \subset R$, sea U^* un conjunto abierto y conexo- definido en el espacio R^{n+1} donde $U^* = T \times U \subset R^{n+1}$.

Consideremos una ecuación diferencial ordinaria por:

I).- $\dot{x} = f(t,x) \qquad t \in I \subset T$

donde $f(t,x)$ satisface las siguientes condiciones:

2).-
- i). $f(t,x)$ es una función continua y está definida en U^*.
- ii). $f(t,x)$ es una función p-periódica, es decir, existe un valor $P > 0$ tal que: $f(t,x) = f(t+P,x) \qquad \forall (t,x) \in U^*$.

DEFINICION DE EQUIVALENCIA ASINTOTICA.

Dadas dos ecuaciones diferenciales ordinarias, son -- equivalentemente asintóticas si para cada solución $x(t)$ - de una ecuación diferencial ordinaria existe una solución $y(t)$ de la otra ecuación diferencial ordinaria, tal que:

3).- $$\lim_{t \to +\infty} |x(t) - y(t)| = 0$$

TEOREMA DE EXISTENCIA DE SOLUCIONES PERIODICAS.

Dada una ecuación diferencial ordinaria I), donde --- $f(t,x)$ satisface 2), entonces existe una función continua- $x(t)$ la cual es solución de la ecuación I), en cierto in-- tervalo $I \subset T$, y es p-periódica si (y sólo si) es equiva-- lentemente asintótica a una ecuación diferencial ordina-- ria

4).- $\dot{y} = g(t,y) \qquad t \in I \subset T$

la cual posee una solución $y(t)$ que es p-periódica ó $\lim_{t \to +\infty} y(t)$ existe en R^n.

PRUEBA:

La ecuación I) se puede transformar a la siguiente- ecuación integral equivalente:

$$5).- \quad x(t) = x(a) + \int_a^t f(s,x(s))\, ds \qquad t \in [a,a+P] = I \subset T$$

donde todas las soluciones de la ecuación 5) en un - intervalo $I \subset T$, son también soluciones de la ecuación I) - en el intervalo $I \subset T$.

Sean P,R valores positivos que definen un rectángulo cerrado y conexo, donde $PM \leq R$:

$$B(P,R) = \{(t,x): t \in [a,a+P] = I \subset T, x(t) \in |x(t)-x(a)| \leq R = A \subset U\} \subset U^*$$

Por la continuidad de la función $f(t,x)$ se tiene -- que existe una constante positiva $M > 0$ tal que:

$$|f(t,x)| \leq M \qquad \forall (t,x) \in B(P,R) .$$

Sea $y(t)$ una solución de la ecuación diferencial -- ordinaria:

$$4).- \quad \dot{y}(t) = g(t,y) \qquad t \in I \subset T$$

donde $y(t)$ es una solución con las siguientes ca-- racterísticas:

a). $y(t)$ es una solución p-periódica de 4) en el-- intervalo I, ó :

b). $\lim_{t \to +\infty} y(t)$ existe en R^n

Ahora, por definición de equivalencia asintótica se- tiene que existe una solución $x(t)$ de la ecuación diferencial ordinaria:

$$I).- \quad \dot{x} \equiv f(t,x) \qquad t \in I \subset T \quad ;\text{tal que :}$$

$$3).- \quad \lim_{t \to +\infty} |x(t) - y(t)| = 0$$

Probemos que dadas las suposiciones anteriores $x(t)$ es una solución p-periódica de la ecuación diferencial ordinaria 1) en el intervalo ICT, donde para ello se usará el teorema anterior, T.4.

Tenemos que $\forall n \in Z^{+}$

4)' $|x(a+(n+1)p)-x(a+np)| = |x(a+(n+1)p - y(a+(n+1)p) +$
$+ y(a+(n+1)p) - y(a+np) + y(a+np) - x(a+np)| \leq$
$\leq |x(a+(n+1)p) - y(a+(n+1)p)| + |y(a+(n+1)p) - y(a+np)| +$
$+ |y(a+np) - x(a+np)|$.

Calculando $\lim\limits_{n \to \infty}$ a la ecuación 4)' :

4)'' $\lim |x(a+(n+1)p) - x(a+np)| \leq \lim |x(a+(n+1)p) -$
$- y(a+(n+1)p)| + \lim |y(a+(n+1)p) - y(a+np)| +$
$+ \lim |y(a+np) - x(a+np)|$

Revisando los términos que componen el miembro del lado lado derecho, y puesto que el

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \left| x(t)-y(t) \right| = 0$, entonces el lo. y tercer términos tienden a cero, es decir,

6). $\lim\limits_{n\to\infty} \left| x(a+(n+1)P) - Y(a+(n+1)P) \right| = 0$.

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \left| y(a+nP) - x(a+nP) \right| = 0$

En lo que respecta al 2o. término tenemos que:

a). Si $y(t)$ es una solución p-periódica, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \left| y(a+(n+1)P) - y(a+nP) \right| = 0$$

b). Si $y(t)$ tiene un $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$ existe en R^n entonces:

4)'' $\lim\limits_{n\to\infty} \left| y(a+(n+1)P) - y(a+nP) \right| = 0$ Por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \left| x(a+(n+1)P) - x(a+nP) \right| = 0$$

Donde se puede observar que se comprueba la parte ii) del teorema 1.

- Probemos i), usando la misma hipótesis:

Sea $\{U_n\} \subset x(I)$ entonces existe $\{t_n\} \subset I$ tal que $t_n \in I$, donde

8). $x(t_n) = U_n = x(a) + \int_a^{t_n} f(s, x(s))\,ds \qquad t_n \in I$

Si la sucesión t_n está acotada, por consiguiente está contenida en un conjunto compacto, entonces, la continuidad de la función x implica que existe un compacto que contiene a la sucesión $(U_n)_n$, lo que indica es que cualquier subsucesión de $(U_n)_n$ es convergente.

Si la sucesión t_n no está acotada, entonces por 5), implica la existencia de una subsucesión (t_{n_k}), tal que:

9). $\lim\limits_{t_{nk}\to+\infty} |x(t_{n_k}) - y(t_{n_k})| = 0$

Ahora, si y(t) es una solución p-periódica, entonces y(I) es un conjunto compacto y allí existe una subsucesión convergente $y(t_{n_k})$, por consiguiente (U_{n_k}) por 9).

Si y(t) tiene límite al infinito, entonces el $\lim\limits_{k\to\infty} y(t_{n_k})$ existe, y por consiguiente, por 9)., el $\lim\limits_{t_{nk}\to\infty} x(t_{n_k})$ existe también.

Por lo anterior tenemos que $\forall (U_n)_n$ en x(I) tiene una subsucesión convergente, lo cual implica que x(I) es un conjunto compacto, y por consiguiente la parte i) del teorema 1 se cumple, entonces por el teorema 1 la ecuación diferencial ordinaria $\dot{x}=f(t,x)$ $t \in I$ posee una solución continua x(t), la cual es p-periódica en el intervalo I.

-- Relación de existencia de soluciones periódicas con la existencia de soluciones al problema de condición de frontera de una ecuación diferencial ordinaria.-- 69

Sea $U \subseteq R^n$ un conjunto abierto y conexo, T es un intervalo real $T=[0+\infty) \subset R$, sea U^* un conjunto abierto y conexo definido por $U^*=T \times U \subset R^{n+1}$.

Consideramos una ecuación diferencial ordinaria por:

1). $\dot{x}=f(t,x)$ $\quad t \in I$, con condición de frontera

2). $x(0)=x(P)=0$ $\quad 0,\ P \in I=[0,P] \subset T$

Donde $f(t,x)$ satisface las siguientes proposiciones:

3). $\begin{cases} \text{i) } f(t,x) \text{ es una función continua y definida en } U^* \\ \text{ii) } f(t,x) \text{ es una función p-periódica, es decir, e-} \\ \text{xiste un valor } P > 0 \text{ tal que } f(t,x)=f(t+P,x)\ \forall (t,x)\in U^* \end{cases}$

-- Usando el teorema de existencia de soluciones periódicas.--

Dada una ecuación diferencial ordinaria 1), que esté sujeta a 2) y que satisfaga a 3), decimos que existe una función continua $\Psi(t)$ solución de 1) en ICT, la cual es p-periódica y satisface a 2), si y solo si existe una función solución $x(t)$ que satisface las siguientes condiciones:

i). $\overline{X(I)}$ es compacto y está contenida en U

ii). Existe una sucesión $(n_k)_k$ de enteros positivos tendiendo a $+\infty$, tales que:

$$\lim_{n_k \to \infty} \left| X(n_k P) - X((n_k - 1)P) \right| = 0 \quad , \quad n_k \geq 1$$

La ecuación 1) la podemos transformar en la siguiente ecuación integral equivalente:

4). $$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x(s))\, ds \qquad t \in [0, P] = I\subset T$$

Donde todas las soluciones $x(t)$ de la ecuación 4), en un intervalo $I \subseteq T$, son también soluciones de la ecuación 1) en el intervalo $I \subseteq T$, y satisfacen 2).

PRUEBA:

Sea P, R valores positivos donde PM<R que definen un rectángulo:

$$B(P, R) = \left\{ (t,x) : t \in [0, P] = I\subset T,\ X \in \left| x(t) - x(0) \right| \leq R = A\subset U \right\} \subset U^*,$$

Por la continuidad de la función $f(t,x)$, tenemos que existe un valor $M>0$, tal que $|f(t,x(t))|\leq M \quad \forall (t,x)\in B(P,R)$

- Necesidad:

Si $x(t)$ es una solución p-periódica de 1) en el intervalo $I=[0,P]\subset T$, es decir, $x(I)=x([0,P])$, donde:

4) $x(t)=x(0)+\int_0^t f(s,x(s))ds \quad , \quad t\in I=[0,P]\subset T,$

puesto que $x(I)$ es la imagen continua de un conjunto compacto $I=[0,P]$, entonces $x(I)$ es un conjunto compacto, y por consiguiente $x(I)=\overline{x(I)}$.

Probemos que $\overline{x(I)}\subseteq U$:

Sea $x(t)\in\overline{x(I)}$, $t\in I$, entonces calculemos:

$$|x(t)-x(0)|=\left|\int_0^t f(s,x(s))ds\right|\leq\left|\int_0^t |f(s,x(s))|ds\right|\leq M\left|\int_0^t ds\right|=$$

$$=M|t|\leq MP\leq R \quad \text{lo que implica es que:}$$

$x(t)\subseteq U$, $\forall t\in I$, entonces, $\overline{x(I)}\subseteq U$ vale i).

Si $x(t)$ es una solución p-periódica de la ecuación 1), en $I=[0,P]$, entonces $x(n_k P)=x((n_k-1)P) \quad n_k\geq 1$

y esto implica que $\lim_{n_k\to\infty}|x(n_k P)-x((n_k-1)P)|=0$

Por lo tanto vale ii). Entnces si $x(t)$ es una solución p-periódica de 1) en I, tenemos que $x(t)$ satisface la ecuación 2) en I, es decir, $x(0)=x(P)$ para $n_k=1$

- Suficiencia: Supongamos que existe una solución $x(t)$ que satisface i), ii), Tenemos que para cada $K\in Z^+$, definimos una sucesión de funciones continuas X_k, tal que $X_k:I\to R^n$, y $X_k(t)=x(t+n_k P)$, $n_k>1$,

X_K es una sucesión de funciones continuas que toma sus valores en el conjunto compacto $\overline{x(I)}$, ahora, dado que f es una función p-periódica, se tiene que X_K es una solución de la ecuación 1), es decir:

a) $$X_K(t) = X_K(0) + \int_0^t f(s, X_K(s))\,ds \qquad t \in I$$

Ahora, dado que cada una de las X_K toma sus valores en $\overline{x(I)}$, tenemos que existe un valor $M > 0$ tal que:

$$|f(t, X_K(t))| \leq M \qquad \forall (t, X_K) \in B(P;R)$$

Probemos que X_K es una sucesión equicontinua:

Sean $t, t_1 \in I$, calculemos

$$|X_K(t) - X_K(t_1)| = \left| X_K(0) + \int_0^t f(s, X_K(s))\,ds - X_K(0) - \int_0^{t_1} f(s, X_K(s))\,ds \right| =$$

$$\left| \int_0^t f(s, X_K(s))\,ds + \int_{t_1}^0 f(s, X_K(s))\,ds \right| = \left| \int_{t_1}^t f(s, X_K(s))\,ds \right| \leq$$

$$\left| \int_{t_1}^t |f(s, X_K(s))|\,ds \right| \leq M \left| \int_{t_1}^t ds \right| = M|t - t_1|, \quad \forall K \in Z^+$$

Dado que $X_K(t)$ toma sus valores en el conjunto compacto $\overline{x(I)}$ y es una sucesión equicontinua en $[0,P] \longrightarrow R^n$, por el teorema de Ascoli tenemos que es relativamente compacto en ese espacio de Banach, dado que $X_K : I \longrightarrow R^n$.

Por lo anterior, tenemos que existe una sub--sucesión $(X_K)_i$ de (X_K) la cual converge uniformemente sobre el intervalo I , a una función continua y, donde y está formado por las restricciones de la sucesión X_k y está definida $y: I \longrightarrow R^n$, usando el T.4. llegamos a que y es una solución p-periódica de 1) en el intervalo I, y que satisface 2), porque tenemos que:

$$y(P) = \lim x_{k_i}(o) = y(o).$$

APENDICE A_2

Una familia Φ de funciones ϕ, definidas sobre un segmento, se llama equiacotada, cuando existe un número K tal que:

$$|\phi(x)| \leqslant K$$

para todo $x\varepsilon$ [a,b] y toda $\phi\varepsilon\Phi$.

Una familia $\Phi = \{\phi\}$ se llama equicontinua, cuando para cada e>0 hay un δ>otal que:

$$|\phi(x_1)-\phi(x_2)|<\varepsilon$$

para todas las funciones $\phi\varepsilon\Phi$ y para todo par x_1, x_2 de [a,b] tal que $\rho(x_1,x_2)<\delta$.

TEOREMA 4 (ARZELA). Para que una familia Φ de funciones continuas definidas sobre el segmento [a,b], sea relativamente compacta en $C_{[a,b,]}$ es necesario y suficiente que esta familia sea equiacotada y equicontinua.

APENDICE A_1

DEFINICION DE LA FUNCION DE GREEN

Se llama función de Green del problema de condición de frontera 1), 2) a la función $G(x,t)$, construída para cualquier punto t, $a<t<b$, y que posee las cuatro propiedades siguientes:

1era. $G(x,t)$ es continua y tiene derivadas continuas con respecto a x hasta de orden $n-2$, inclusive para $a\leqslant x\leqslant b$.

2da. Su derivada de orden $n-1$ con respecto a x tiene una discontinuidad en el punto $x=t$, siendo el salto igual a $\frac{1}{P_0(x)}$, es decir:

$$\left.\frac{\partial^{n-1}G(x,t)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=t+0} - \left.\frac{\partial^{n-1}G(x,t)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=t-0} = \frac{1}{P_0(t)}$$

3era. En cada intervalo $[a,t)$ y $(t,b]$, la función $G(x,t)$ considerada como función de x, es una solución de la ecuación 1).

4ta. $G(x,t)$ satisface a las condiciones de frontera 2).

B I B L I O G R A F I A

[1] Makarenko, G. (1977). Ecuaciones Integrales. 2a. edición. Ed. MIR Moscú. URSS. Págs. 123-135.

[2] Kreider, Kuller y otros. (1971). Introducción al Análisis Lineal. Parte 2. Fondo Educativo Interamericano S.A. México. Págs. 607-623.

[3] Antosiewicz, H.A. (1977). Studies in Ordinary Differential Equations. Vol. 14. Ed. MAA. USA. Págs. 169-201.

[4] Hale, Jack. (1969). Ordinary Differential Equations. Vol. XXI. Ed. Wiley-Interscience. USA.

[5] Becker, Ronald.,Vidossich, Giovanni. (1974). Journal of Mathematical Analysis and Applications. Núm. 48. Academic Press, Inc. Págs. 51-60.

Article:

"Some Applications of a Simple Criterion for the Existence of Periodic Solutions of Ordinary Differential Equations".

[6] Spiegel, Murray. (1983). Ecuaciones Diferenciales Aplicadas. 1a. edición. Ed. Prentice-Hall Hispanoamericano. México.

[7] Haaser, N., Sullivan, J. (1978). Análisis Real. 1a. Edición. Ed. Trillas. México

[8] Kolmogorov, A. N. (1978). Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional. 3a. edición. Ed. MIR. Moscú. URSS.

[9] Imaz, C., Vorel, Z. (1968). Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. 1a. edición. Ed. LIMUSA. México.

[10] Iribarren, Ignacio. (1973). Topología de Espacios Métricos. 1a. edición. Ed. LIMUSA. México.

[11] Dugunoji, James. (1966). Topology. 1a. edición. Allyn and Bacon, Inc. USA.

[12] Bromberg, Shirley., Rivaud, J.José. (1976). Análisis Diferencial. 1a. edición. Fondo de Cultura Económica. México.