

**U N I V E R S I D A D D E S O N O R A**  
**DIVISION DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS**

The seal of the University of Sonora is a circular emblem. It features a central shield with a book, a quill, and a lamp. Above the shield is an owl. The shield is divided into four quadrants with different patterns: a grid, a wavy line, a dotted pattern, and a horizontal line pattern. The shield is surrounded by a circular border with the text "UNIVERSIDAD DE SONORA" and the year "1942" at the bottom. The motto "TODO LO LUMINAN" is written across the middle of the shield.

**Las Trascendentes de Painlevé y su Relación con  
Algunas Ecuaciones Diferenciales Parciales No Lineales**

**T E S I S**

que para obtener el título de Licenciado en Matemáticas

presenta

**Jorge Alberto Valencia Yañez**

Hermosillo, Sonora, México

Enero de 2009

# Universidad de Sonora

Repositorio Institucional UNISON



**"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"**



Excepto si se señala otra cosa, la licencia del ítem se describe como openAccess

# Contenido

|                                                                                                |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| PRESENTACIÓN                                                                                   | III       |
| <b>1 Elementos Básicos</b>                                                                     | <b>1</b>  |
| 1.1 Ecuaciones Diferenciales . . . . .                                                         | 2         |
| 1.1.1 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias . . . . .                                            | 2         |
| 1.1.2 Ecuaciones Diferenciales Parciales . . . . .                                             | 4         |
| 1.2 Análisis Complejo . . . . .                                                                | 6         |
| 1.2.1 Fundamentos y Métodos de la Teoría de las Funciones Analíticas . . . . .                 | 7         |
| 1.2.2 Funciones Elípticas y Teoría de Weierstrass . . . . .                                    | 22        |
| <b>2 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en el Plano Complejo</b>                              | <b>31</b> |
| 2.1 Existencia y Unicidad de la Solución . . . . .                                             | 31        |
| 2.2 Ecuaciones Tipo Painlevé . . . . .                                                         | 40        |
| 2.3 Las Trascendentes de Painlevé . . . . .                                                    | 46        |
| 2.3.1 Primera, Segunda y Cuarta Ecuación de Painlevé . . . . .                                 | 47        |
| 2.3.2 Comentario sobre el Resto de las Ecuaciones de Painlevé . . . . .                        | 52        |
| <b>3 Ejemplos Clásicos de Ecuaciones Diferenciales Parciales Relacionadas con las Trascen-</b> |           |
| <b>    dentes de Painlevé</b>                                                                  | <b>53</b> |
| 3.1 Motivación . . . . .                                                                       | 53        |
| 3.2 Ecuaciones Tipo Korteweg-de Vries . . . . .                                                | 55        |
| 3.3 Ecuaciones Tipo Seno-Gordon . . . . .                                                      | 62        |
| 3.4 Ecuaciones Tipo Schrödinger . . . . .                                                      | 65        |
| 3.5 Ecuaciones Tipo Boussinesq . . . . .                                                       | 66        |

**CONCLUSION** **69**

**A Tópicos de Utilidad** **71**

    A.1 Símbolos de Orden . . . . . 71

    A.2 Solución de la Ecuación de Riccati . . . . . 75

    A.3 Nociones Elementales sobre la Teoría de Nevanlinna . . . . . 76

**B I B L I O G R A F I A** **81**

# PRESENTACIÓN



Paul Painlevé (\*5 de Diciembre de 1863, †29 de Octubre de 1933) fue un matemático y político Francés<sup>1</sup> que dedicó gran parte de su tiempo y trabajo académico a la clasificación y análisis de un tipo especial de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales en el plano complejo, las cuales son objeto de estudio del presente trabajo de tesis, sirviendo como base para una alternativa en la búsqueda de soluciones de cierto tipo de ecuaciones diferenciales parciales no lineales que surgen en la aplicación.

Es bien sabido que algunas ecuaciones diferenciales pueden resolverse mediante métodos elementales de cálculo y que sus soluciones involucran funciones comúnmente llamadas elementales, como por ejemplo trigonométricas, exponenciales, entre otras. Además, también es conocido que muchas de las llamadas funciones especiales surgen como soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden, formando una teoría bien establecida. El caso no lineal, en general, es más complicado, ya que cada tipo de ecuación implica un tratamiento diferente. En el presente trabajo intentaremos tener un primer acercamiento con las ecuaciones diferenciales no lineales mediante un enfoque particular.

A finales del Siglo XIX y principios del Siglo XX, P. Painlevé y sus estudiantes mostraron que existe una clase de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden no lineales que poseen una propiedad particular distintiva, originalmente propuesta por Émile Picard (1856-1941) y referida posteriormente como la “*Propiedad de Painlevé*”, las cuales pueden ser siempre transformadas en una de las *cincuenta formas canónicas* posibles, determinadas por ellos mismos. Seis de éstas 50 ecuaciones requieren nuevas funciones trascendentales para expresar su solución.

---

<sup>1</sup>Fue primer ministro de su país en dos ocasiones, 1917 y 1925, realizando una importante actividad política en Francia.

Las nuevas funciones especiales no lineales, que resuelven las seis ecuaciones referidas, son llamadas las “*Trascendentes de Painlevé*”, las cuales han encontrado hoy en día un amplio rango de aplicación, razón por la cual es importante su estudio y comprensión para fortalecer con éstas la caja propia de herramientas matemáticas de todo estudiante de ciencias.

Las Trascendentes de Painlevé son soluciones de cierto tipo de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de segundo orden en el plano complejo que poseen la propiedad de Painlevé (“las únicas singularidades móviles son polos”, esto es, la localización de posibles puntos rama y singularidades esenciales depende únicamente de la ecuación bajo estudio y no de las condiciones iniciales del problema en cuestión), las cuales en general no son solubles en términos de funciones elementales o especiales clásicas. Sin embargo, las Trascendentes de Painlevé tienen su origen en el estudio de las funciones especiales y en el análisis de la monodromía de ecuaciones diferenciales lineales. De hecho, una de las clases más importantes y útiles de funciones especiales son las *funciones elípticas*, las cuales son definidas por cierto tipo de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer y segundo orden que tienen la propiedad de Painlevé. Esta propiedad distintiva es compartida por todas las ecuaciones diferenciales lineales, pero es muy rara en las ecuaciones no lineales, lo cual reitera la importancia de su análisis.

Henri Poincaré (1854-1912) y Lazarus Fuchs (1833-1902) mostraron que cualquier ecuación diferencial de primer orden con la propiedad de Painlevé puede ser transformada en la *Ecuación de Weierstrass* o en la *Ecuación de Riccati*, las cuales pueden resolverse explícitamente en términos integrales o funciones especiales tradicionales. Por su parte, É. Picard precisó que para órdenes mayores que 1, existe la posibilidad de tener *singularidades esenciales móviles*, pero intentó y falló en encontrar nuevos ejemplos con la propiedad de Painlevé. Para órdenes más grandes que 2, en general, la situación se complica demasiado, y por lo mismo, no se aborda en el presente trabajo.

En el Capítulo 1 se introducen algunos conceptos y resultados básicos necesarios de la Teoría de Ecuaciones Diferenciales y del Análisis Complejo. En ésta parte introductoria se enfatiza el tema de las *funciones elípticas*, en particular lo básico de la *Teoría de Weierstrass*. En el Capítulo 2 se abordan las ecuaciones diferenciales ordinarias de una forma diferente a la comúnmente acostumbrada. Esto es, a partir de este punto se inicia el estudio de ecuaciones diferenciales en el plano complejo, concluyendo ésta parte con un breve análisis de las soluciones de las Ecuaciones Tipo Painlevé. En el Capítulo 3 se describen algunos ejemplos clásicos de ecuaciones diferenciales parciales no lineales y su relación con las Ecuaciones de Painlevé. Para finalizar, se concluye el trabajo y se plantean algunas preguntas relevantes que constituyen el punto de partida de una posible línea de investigación que permita la formación de una tesis de posgrado con un enfoque aplicado hacia una dirección específica.

Hermosillo, Sonora, México

**Jorge Alberto Valencia Yañez**

Enero de 2009





**A** mis padres que con su gran amor y sacrificio supieron apoyar en todo momento mis triunfos y mis derrotas, razón por la cual hoy les dedico orgullosamente este logro. De forma muy especial a mi hija Dammeris Yarazeth Valencia Armenta, que con su llegada me llenó de amor, fortaleza y valor para seguir adelante en esta etapa de mi vida que he terminado satisfactoriamente. Por otra parte, expreso mi más sincero agradecimiento al director de este trabajo de tesis, Rodrigo González González, por su apoyo incondicional durante mi carrera y que finalmente culminó con el presente trabajo de tesis.

¡A todos por su apoyo mil gracias!



# Capítulo 1

## Elementos Básicos

El primer punto al iniciar el estudio o la búsqueda de un “nuevo panorama”, en cualquier área elegida, es establecer la plataforma desde la cual se quiere partir. En particular, para el presente trabajo es importante recordar algunos aspectos básicos de la teoría de ecuaciones diferenciales tanto ordinarias como parciales y discutir la conveniencia de establecer un cambio de enfoque, ya que en específico, el interés se centra en el análisis de cierto tipo de ecuaciones diferenciales en el plano complejo y sus aplicaciones, lo cual a su vez implica la necesidad de un repaso general de la Teoría de las Funciones de Variable Compleja, que en el presente trabajo se introduce mediante el resumen de algunos conceptos y resultados importantes, además de otros tópicos necesarios que por lo regular no se cubren en los cursos curriculares de variable compleja a nivel licenciatura.

## 1.1 Ecuaciones Diferenciales

Sin lugar a dudas, pocas áreas de la Matemática son tan ampliamente aplicables como las *ecuaciones diferenciales*, razón por la cual merecen una atención especial. Es claro que cuando se intenta obtener información sobre algún proceso físico la mayor parte de las veces el modelo matemático involucra de una u otra forma por lo menos una ecuación diferencial y, por supuesto, lo más importante es tener un camino que permita obtener solución explícita o exacta. Desafortunadamente, tal camino no siempre está disponible: algunos son fáciles y otros relativamente difíciles, pero de cierta forma estos ya hayan han sido recorridos; otros son realmente complicados y posiblemente ni siquiera han sido del todo explorados. Es sabido que en el contexto real frecuentemente la maquinaria matemática encuentra obstáculos difíciles de sobrepasar por lo que es necesario un cambio de enfoque. También es cierto que, al menos en algún aspecto, en la búsqueda de solución de alguna ecuación diferencial se ha tenido la necesidad de utilizar algún tema de la Teoría de las Funciones de Variables Compleja. Sin embargo, en los cursos básicos sobre la materia, las ecuaciones diferenciales casi nunca se analizan completamente en el plano complejo, desde donde evidentemente se tiene mayor posibilidad de obtener información de los procesos involucrados.

### 1.1.1 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

En ésta parte se introducen algunas notaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias en el contexto real y solo se hace referencia al *Teorema de Existencia y Unicidad*<sup>1</sup>, un resultado local de gran importancia teórica y práctica, cuya demostración es extensa, mostrando que el enfoque real es complicado y limitado, incluso desde etapas muy tempranas.

---

<sup>1</sup>Este resultado se conoce como Teorema de Picard, debido al trabajo del matemático Francés Charles Émile Picard (1856–1941) en este campo.

Las *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* (EDO's) relacionan el (los) cambio(s) de una (o varias) variable(s) dependiente(s) respecto de una variable independiente, en combinación con constantes, parámetros y funciones específicas. Esto es, una ecuación diferencial ordinaria de orden  $n$  es una relación de la forma

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0. \quad (1.1.1)$$

Con restricciones adecuadas sobre  $F$  se puede despejar explícitamente  $\frac{d^ny}{dx^n} \equiv y^{(n)}$  para obtener  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ . Las EDO's se clasifican de acuerdo a su orden, linealidad y complejidad, lo cual permite establecer distintos métodos de solución. Además, mediante un proceso recursivo o una transformación canónica, la ecuación (1.1.1) es equivalente a un *Sistema de Ecuaciones Diferenciales* de primer orden.

Un problema importante en la Teoría de las Ecuaciones Diferenciales, es el llamado *Problema de Valor Inicial* (PVI o Problema de Cauchy)<sup>2</sup> de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), & t \geq 0 \\ \mathbf{x}|_{t=t_0} &= \mathbf{x}_0, \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Una de las cuestiones principales en el análisis del sistema dinámico (1.1.2) es sobre la *existencia* y *unicidad* de la solución, la cual se garantiza bajo algunas restricciones impuestas por la naturaleza de  $\mathbf{f}$ . Precisamente, el *Teorema de Existencia y Unicidad* establece las condiciones para la existencia de la solución (locales y globales)<sup>3</sup>.

---

<sup>2</sup>Este problema usualmente se conoce como **Sistema Dinámico**, el cual puede ser simple –como en el caso lineal, en dimensiones menores– o muy complicado.

<sup>3</sup>Referirse a cualquier texto de Teoría de Ecuaciones Diferenciales o Sistemas Dinámicos.

### 1.1.2 Ecuaciones Diferenciales Parciales

Las *Ecuaciones Diferenciales Parciales* (EDP's) principalmente surgen en problemas físicos y geométricos cuando las funciones involucradas en un proceso determinado dependen de dos o más variables independientes, considerando sus variaciones parciales hasta algún orden específico. Así, es usual encontrar EDP's en problemas de vibración y dispersión, difusión y conducción de calor, dinámica de fluidos y mecánica de sólidos, teoría electromagnética, elasticidad, mecánica cuántica, entre otras áreas físicas y de otras ciencias. Cabe señalar que las EDP's por supuesto son de gran interés teórico en Matemáticas.

Cuando se estudian las EDP's desde el punto de vista físico o aplicado es común que las variables independientes sean el tiempo y una o más variables espaciales. Así, en general, una EDP tiene la forma

$$F(t, x, y, z, \dots, u, u_t, u_x, u_y, u_z, \dots, u_{tt}, u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, u_{tx}, \dots) = 0, \quad (1.1.3)$$

donde  $F$  es una relación (o función) dada de las variables independientes  $t, x, y, z, \dots$ , la *función desconocida*  $u$  y un número finito de sus derivadas parciales.

Una función  $u(t, x, y, z, \dots)$  es *solución* de la ecuación (1.1.3) si al sustituir esta y todas sus derivadas parciales involucradas, reducen a la ecuación (1.1.3) en una identidad en alguna región  $\Omega$  del espacio de las variables independientes.

El *orden* de una EDP lo determina el orden más grande de las derivadas parciales que aparecen en la ecuación considerada. Una EDP se dice que es *lineal* si es lineal en la función desconocida y sus derivadas, con coeficientes dependiendo únicamente de las variables independientes. Una EDP de orden  $n$  es llamada *cuasi-lineal* si es lineal en la derivada de orden  $n$  y sus coeficientes dependen de las variables independientes, la función desconocida y derivadas parciales de órdenes menores o iguales que  $(n - 1)$ . En otro caso, la EDP es no lineal.

Las EDP's lineales y cuasi-lineales usualmente se estudian en los primeros cursos de Ecuaciones Diferenciales Parciales: se clasifican en varios tipos (primer y segundo orden y subclasifican como parabólicas, elípticas, hiperbólicas, etc.), para los cuales existe una gran variedad de métodos de solución (separación de variables, características, transformaciones integrales, funciones de Green, enfoque débil, etc.) dependiendo del problema considerado (Cauchy, Dirichlet, Neumann, mixto, etc.), estableciendo una teoría ampliamente desarrollada. Sin embargo, para las EDP's no lineales únicamente existen unos cuantos métodos de un nivel matemático elevado para un primer curso. En el Capítulo 3 se abordarán algunas EDP's no lineales de interés particular.

## 1.2 Análisis Complejo

El Análisis Complejo en teoría es extenso, pero mucho más extensos, poderosos y de gran alcance son sus métodos, los cuales son aplicables en distintas áreas de la ciencia y la tecnología. En esta parte se introducen varios conceptos relacionados con las *funciones analíticas, elípticas y trascendentales*, y solo se enuncian, con un bosquejo o referencia sobre su demostración, aquellos resultados que se utilizan posteriormente. Esto es, la Teoría de las Funciones de Variable Compleja, además de ser una área básica de las Matemáticas, es de gran aplicación práctica con métodos propios muy elegantes y poderosos. Un aspecto importante e incluso sorprendente es el hecho que para obtener solución de muchos problemas cuyos modelos provienen directamente de fenómenos reales sea necesario utilizar el “*Plano Complejo*” como plataforma. Precisamente esto representa una motivación *ad-hoc* para disfrutar del estudio del Análisis Complejo desde el principio hasta donde cada interés específico lo permita. En particular, en el presente trabajo se abordan dos tópicos muy importantes: aspectos fundamentales sobre funciones elípticas y trascendentales, así como el análisis de su comportamiento, con el fin de establecer una alternativa más de solución de cierto tipo de ecuaciones diferenciales aplicadas.

Aún cuando René Descartes (1596-1650) hablara de “*soluciones imaginarias*” de cierto tipo de ecuaciones algebraicas, que Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) manejara *números complejos* en sus cálculos, que Leonhard Euler (1707-1783) estableciera la *unidad imaginaria*  $-i-$  (con la propiedad distintiva  $i^2 = -1$ ) y que Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) trabajara arduamente con funciones de variable compleja, fue hasta 1825 la fecha del nacimiento formal de la *Teoría de las Funciones Analíticas* con la publicación de los trabajos de Augustin Louis Cauchy (1789-1857) y posteriormente con las grandes contribuciones de Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), Sir Willian Rowan Hamilton (1805-1865), Karl Weierstrass (1815-1897), entre otros.



### 1.2.1 Fundamentos y Métodos de la Teoría de las Funciones Analíticas

- ✓ Como preámbulo a la introducción de las Funciones de Variable Compleja, es necesario establecer propiedades adicionales de  $\mathbb{C}$ , por lo menos en lo que respecta a lo básico de la *topología euclideana estándar* obtenida del módulo y su identificación con  $\mathbb{R}^2$ . La circunferencia con centro en  $z_0$  y radio  $r$  está dada por  $|z - z_0| = r$ , mientras que una *vecindad* de  $z_0$  se define por  $\mathcal{D}_\epsilon(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \epsilon\}$ , con  $\epsilon$  un valor positivo pequeño y una *vecindad reducida* (o “agujerada”) cuando el centro es removido, esto es  $\mathcal{D}'_\epsilon(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \epsilon\}$ . Por su parte, un *anillo* centrado en  $z_0$  con radio interior y exterior  $r_1$  y  $r_2$ , respectivamente, se describe por  $r_1 < |z - z_0| < r_2$ . Por otro lado,  $z_0 \in \mathcal{S}$  se llama *punto interior* de un conjunto  $\mathcal{S}$  si existe una vecindad de  $z_0$  totalmente contenida en  $\mathcal{S}$ . Si todos los puntos de  $\mathcal{S}$  son interiores, entonces  $\mathcal{S}$  se dice ser un *conjunto abierto*. Esta definición implica que el conjunto vacío es abierto,  $\mathbb{C}$  es abierto, la unión de cualquier colección de subconjuntos abiertos en  $\mathbb{C}$  es abierta y la intersección de cualquier colección finita de subconjuntos abiertos en  $\mathbb{C}$  es abierta. Esto es, se tiene una *topología* para el plano complejo. Por otra parte, un punto  $z_0$  es un *punto frontera* de  $\mathcal{S}$ , si toda vecindad de  $z_0$  contiene al menos un punto en  $\mathcal{S}$  y al menos un punto que no está en  $\mathcal{S}$ . Intuitivamente, un conjunto es abierto si no contiene a ninguno de sus puntos frontera u “orilla”. Un conjunto que consiste de todos los puntos de un conjunto abierto y ninguno, algunos o todos sus puntos frontera, es referido como una *región*. Una región abierta  $\mathcal{D}$  es *acotada* si existe una constante  $M > 0$  tal que  $|z| \leq M \forall z \in \mathcal{D}$ . *i.e.*,  $\mathcal{D}$  puede ser encerrada por una circunferencia. Una región es *cerrada* si contiene a todos sus puntos frontera. Una región que es cerrada y acotada se llama *compacta*. Por ejemplo, una región circular  $|z| \leq a$  es compacta. El semi-plano superior,  $\text{Im}\{z\} > 0$  es abierto y no acotado. Para  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ , los  $n - 1$  segmentos de recta  $\overline{z_1 z_2}, \overline{z_2 z_3}, \dots, \overline{z_{n-1} z_n}$  tomados en sucesión forman una *poligonal* o línea quebrada.

Una región abierta se dice estar *conectada* si cualquiera dos de sus puntos pueden unirse por una poligonal totalmente contenida en la región. A groso modo, un conjunto *conexo* está formado por una sola pieza. Una región abierta y conexa es llamada *dominio*.

**Definición 1.2.1:** Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , donde  $\Omega \subset \mathbb{C}$  es un conjunto *abierto* no vacío. Entonces,  $f$  es *diferenciable* en  $z_0 \in \Omega$  si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{|z - z_0|} \quad (1.2.1)$$

existe, el cual se denota por  $f'(z_0)$  o  $\left. \frac{df}{dz} \right|_{z=z_0}$ .

**Teorema 1.2.1. (Diferenciación de Cauchy-Riemann):** Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  un abierto. Entonces,  $f'(z_0)$  existe si y solo si  $f$  es diferenciable en el sentido de las variables reales  $x, y$  en  $(x_0, y_0) = z_0$  y  $u(x, y) = \mathcal{R}e\{f\}$ ,  $v(x, y) = \mathcal{I}m\{f\}$  satisfacen las Condiciones de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1.2.2)$$

bajo la suposición de continuidad de las derivadas parciales involucradas. ■

En este caso,

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \equiv \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \quad (1.2.3)$$

**Definición 1.2.2:** Una función  $f(z)$  es *analítica* en un punto  $z_0$  si es diferenciable en una vecindad de  $z_0$ . La función  $f(z)$  es analítica en una región si es analítica en todo punto de la región.

Un sinónimo de analítica que frecuentemente se utiliza en la literatura es el término *holomorfa*, que significa de “de forma entera” o regular. Usualmente, el conjunto de las funciones analíticas en  $\Omega$  se denota por  $\mathcal{H}(\Omega)$ , mientras que  $\mathcal{H}(\mathbb{C})$  representa al conjunto de las “*funciones enteras*” (por ejemplo, las funciones polinomiales, la función exponencial, entre otras).

Un *punto singular*  $z_0$  es donde  $f$  deja de ser analítica. Los puntos singulares se clasifican en varios tipos, lo cual se hace mediante la representación de la función en Serie de Laurent, que se discute más adelante.

**Proposición 1.2.1.** Una función  $f(z)$  analítica en un punto  $z_0$  admite una expansión en serie de potencias

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad (1.2.4)$$

convergente por lo menos en  $|z - z_0| < \epsilon$  para algún  $\epsilon > 0$ . Dependiendo de la función, el radio de convergencia<sup>4</sup> de la serie (1.2.4), llamada *Serie de Taylor* alrededor del punto  $z_0$ , puede tener como valor máximo  $R \stackrel{\text{def}}{=} d(z_0, p_s)$ , donde  $R$  es el radio de convergencia y  $p_s$  es la singularidad de  $f(z)$  más próxima al punto de expansión  $z_0$ . En tal caso, los coeficientes de la serie (1.2.4) pueden calcularse mediante la derivada:  $a_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k f}{dz^k} \right|_{z=z_0}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  (ya que pueden también obtenerse mediante algún procedimiento más conveniente). ■

Una función de dos variables  $f(z, w)$  es analítica si se cumplen ambas condiciones de Cauchy-Riemann,  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$  y  $\frac{\partial f}{\partial \bar{w}} = 0$ . Si  $f(z, w)$  es analítica en el *polidisco*  $|z| < r$ ,  $|w| < \rho$ , entonces admite expansión en una serie doble convergente

$$f(z, w) = \sum_{k, l \geq 0} a_{kl} z^k w^l. \quad (1.2.5)$$

---

<sup>4</sup>Formalmente, el radio de convergencia se determina a partir de los coeficientes de la serie ya sea con el criterio del cociente o con el de la raíz.

En general, se considera el espacio complejo  $n$ -dimensional  $\mathbb{C}^n$  equipado con la topología euclidea estándar obtenida al identificarlo con  $\mathbb{R}^{2n}$ , donde un punto  $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \Omega \subset \mathbb{C}^n$  se denota por  $z_j = x_{j,1} + ix_{j,2}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . En este caso, una función  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es  $\mathcal{H}(\Omega)$  si

$$\bar{\partial}f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} (dx_{j,1} - idx_{j,2}) \equiv 0 \quad (1.2.6)$$

y se tiene la representación

$$f(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} a_{k_1, \dots, k_n} (z_1 - \beta_1)^{k_1} \dots (z_n - \beta_n)^{k_n}, \quad (1.2.7)$$

convergente uniformemente en subconjuntos compactos de un polidisco

$$\mathcal{D}(\vec{\beta}, \vec{r}) = \prod_{j=1}^n \mathcal{D}_{r_j}(\beta_j).$$

- ✓ Sin lugar a dudas, uno de los procesos más importantes y con un alcance muy amplio es la *integración de contorno*<sup>5</sup>,  $\int_{\mathcal{C}^+} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$  (donde el signo más significa orientación positiva y  $\gamma(t)$  es una parametrización de  $\mathcal{C}^+$ )<sup>6</sup>, ya que en base a las nuevas propiedades que posee (al introducir el ingrediente de analiticidad) se desprenden la mayor parte de los resultados fuertes del Análisis Complejo, algunos de los cuales se enuncian a continuación (la demostración respectiva puede encontrarse casi en cualquier texto sobre la materia).

**Teorema 1.2.2. (Cauchy-Goursat):** Si una función  $f(z)$  es analítica en un abierto  $U$  y  $\mathcal{C}$  es un contorno cerrado simple tal que  $\mathcal{C} \subset U$  y además  $f(z)$  es analítica en todos los puntos interiores y sobre  $\mathcal{C}$ , entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0. \quad (1.2.8)$$

---

<sup>5</sup>Un **contorno** es un arco suave por piezas, esto es, consiste de un número finito de arcos suaves (diferenciables) conectados, el cual frecuentemente es cerrado.

<sup>6</sup>En realidad la integración de contorno se reduce a la integración de línea en  $\mathbb{R}^2$  y todas las propiedades usuales de la integración (linealidad, aditividad, etc.) siguen siendo válidas.

**Nota:** La versión más simple, al imponer restricciones adicionales sobre la función y el contorno de integración se conoce simplemente como Teorema de Cauchy. En general, la importancia de este resultado consiste en la posibilidad de efectuar una deformación homotópica de la trayectoria de integración que deja invariante el valor de la integral.

**Teorema 1.2.3. (Fórmula Integral de Cauchy y sus Derivadas):** Sea  $f(z)$  una función analítica en un abierto  $U$  sea  $\mathcal{C}$  un contorno cerrado simple tal que  $\mathcal{C} \subset U$ . Entonces, en cualquier punto interior  $z$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (1.2.9)$$

■

**Nota:** La Fórmula Integral de Cauchy muestra que los valores de una función analítica  $f$  sobre la frontera de un dominio encerrado por un contorno cerrado  $\mathcal{C}$  determinan el valor de  $f$  en cualquier punto interior del dominio considerado.

Como corolario de este resultado, se tiene que todas las derivadas de todos los ordenes de  $f(z)$ ,  $f^{(k)}(z)$ , existen a cualquier orden en el dominio interior encerrado por  $\mathcal{C}$  y

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta. \quad (1.2.10)$$

Esto es, la analiticidad de  $f$  implica la analiticidad de las derivadas de cualquier orden.

**Teorema 1.2.4. (Liouville):** Si  $f$  es entera y acotada en el plano  $z$ , entonces  $f$  es constante.

■

**Teorema 1.2.5. de Morera (Recíproco de Liouville):** Si  $f$  es continua en un dominio  $\mathcal{D}$  y si  $\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0$  para todo contorno cerrado simple  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{D}$ , entonces  $f(z)$  es analítica en  $\mathcal{D}$ .

■

Como corolario del Teorema de Liouville se llega al *Teorema Fundamental del Álgebra*, el cual dice que para cualquier polinomio  $P(z)$  de grado  $n \geq 1$  existe un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $P(z_0) = 0$  y de aquí que  $P(z)$  tiene exactamente  $n$  raíces (contando multiplicidad), así como la posibilidad de su factorización. Otro resultado importante es

**Teorema 1.2.6. (Principio del Módulo Máximo):** Si  $f(z)$  es analítica sobre y en el interior a un contorno cerrado simple  $\mathcal{C}$ , entonces el valor máximo de  $|f(z)|$  ocurre sobre  $\mathcal{C}$  a menos que  $f$  sea constante. ■

**Nota:** Si  $f(z)$  no se anula en ningún punto dentro y sobre el contorno, considerando  $g(z) = 1/f(z)$  se tiene que  $|g(z)|$  alcanza su máximo sobre  $\mathcal{C}$  y por consiguiente  $|f(z)|$  también alcanza su mínimo en  $\mathcal{C}$ .

- ✓ Frecuentemente, una función de variable compleja requiere una representación en serie en algún dominio apropiado. La más conocida es la representación en Serie de Taylor, la cual se establece en (1.2.4). La representación en Serie de Taylor se interrumpe en puntos, curvas o regiones donde las funciones dejan de ser analíticas. Tales puntos suelen llamarse singulares o simplemente *singularidades* de la función y su estudio es de vital importancia para muchas aplicaciones. Cuando una función  $f(z)$  no es analítica en algún punto  $z_0$  (o región) del plano complejo la Serie de Taylor no puede aplicarse en la vecindad de tal punto. Sin embargo, puede determinarse otra representación en potencias positivas y negativas de  $(z - z_0)$ , llamada expansión en *Serie de Laurent*, válida en regiones anulares  $\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2$ , la cual resulta de gran utilidad.

**Teorema 1.2.7. (Series de Laurent):** Una función analítica  $f(z)$  en un anillo  $\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2$  se puede representar mediante la expansión

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (1.2.11)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1.2.12)$$

con  $\mathcal{C}$  cualquier contorno cerrado simple en la región de analiticidad encerrando la frontera interior  $|z - z_0| = \rho_1$ . La serie (1.2.11) converge uniformemente en  $R_1 < |z - z_0| < R_2$ , donde  $\rho_1 < R_1$  y  $\rho_2 > R_2$ .

Para su demostración referirse por ejemplo a [1]. ■

**Observación:** *i)* El coeficiente del término  $1/(z - z_0)$ , el cual es  $c_{-1}$  en (1.2.11), proporciona el *residuo* de  $f(z)$  debido a la singularidad  $z_0$ .

*ii)* La suma de las potencias negativas de la Serie de Laurent (1.2.11) se le conoce como la *parte singular* de  $f(z)$ .

*iii)* En la práctica, la Serie de Laurent frecuentemente se obtiene a partir de la Serie de Taylor de una función mediante sustituciones apropiadas (cierta clase de “trucos”), ya que obtener los coeficientes (1.2.12) directamente es una tarea muy complicada. Para muchas funciones (racionales sobretodo) la serie que más se utiliza es una adaptación de la serie geométrica.

*iv)* El resultado importante y de gran utilidad es que en el dominio de convergencia (uniforme) es posible diferenciar e integrar término a término. También, es posible aplicar las operaciones algebraicas elementales de adición, multiplicación, etc.

✓ La expansión de Laurent alrededor de una singularidad proporciona información sobre la naturaleza de dicho punto singular, lo cual implica una clasificación de las singularidades aisladas como sigue:

▷ Si la parte singular de  $f(z)$  en la expansión de Laurent (1.2.11) se anula (esto es  $c_n = 0$  para  $n < 0$ , lo cual implica que  $f(z)$  es acotada o que  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  existe), pero  $c_0 \neq f(z_0)$ , entonces  $z_0$  es una *singularidad removible*. En este caso,  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$ .

▷ Si  $z_0$  es una singularidad aislada de  $f$  y si todos los  $c_n$ ,  $n \leq -1$ , excepto un número finito en (1.2.11) son cero, entonces  $z_0$  se llama *polo* de  $f$ . Si  $m$  es el mayor entero tal que  $c_{-m} \neq 0$ ,  $z_0$  es llamado un *polo de orden  $m$* . Si  $m = 1$ , el polo es de primer orden, llamado también *polo simple*. Esto es equivalente a  $f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m}$ , con  $\phi$  una función analítica en una vecindad de  $z_0$  y  $\phi(z_0) \neq 0$ . En este caso,  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z)$  existe y

$$c_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = \text{Res}\{f(z); z_0\}$$

es el *residuo* de  $f$  en  $z_0$ .

▷ Si se tiene un número infinito de  $c_{-n}$ 's distintos de cero en la expansión de Laurent (1.2.11), entonces  $z_0$  es llamado *singularidad esencial* (esto es, para una singularidad esencial la Serie de Laurent tiene un desarrollo completo). Un resultado importante relacionado con las singularidades esenciales es el *Teorema de Picard*<sup>7</sup>, cuya versión más simple se conoce como *Teorema de Casorati-Weierstrass*.

---

<sup>7</sup>Este teorema, debido a C.É. Picard establece que en cualquier vecindad de una singularidad esencial de una función  $f(z)$ , ésta asume todos los valores, excepto posiblemente uno de ellos, un número infinito de veces.



Las funciones racionales se denotan por

$$\mathbb{C}[z] = \{R : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{C} \mid R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \text{ con } p \text{ y } q \text{ polinomios}\}, \quad (1.2.13)$$

donde  $\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid q(z) \neq 0\}$  es el dominio natural de cada  $R(z)$ . Esto es,  $\mathbb{C}[z]$  es  $\mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \mathcal{P})$ , donde  $\mathcal{P}$  es el conjunto de *polos* de  $R(z)$  (ceros del denominador  $q(z)$ ). Una función se denomina *meromorfa* en  $\Omega$  –“de forma racional”– si su conjunto singular está formado únicamente por polos, *i.e.*, es  $\mathcal{H}(\Omega \setminus \mathcal{P})$ .

- ✓ La representación en Serie de Taylor de una función analítica (por lo menos en alguna vecindad de un punto dado) permite establecer la noción de *continuación analítica*<sup>8</sup>, la cual se establece partiendo de uno de los resultados más bonitos y potentes del Análisis Complejo, que literalmente dice: *si dos funciones analíticas coinciden en cualquier parte de una región  $\Omega$  (por muy pequeña que sea), entonces estas coinciden en todo  $\Omega$  y por tanto representan a la misma función.* Esta propiedad se establece por el siguiente resultado.

**Teorema 1.2.8. (*Principio de Identidad*):** Sean  $f(z)$  y  $g(z)$  analíticas en un dominio común  $\Omega$ . Si  $f(z)$  coincide con  $g(z)$  en pedazo  $\mathcal{D} \subset \Omega$  (pudiera ser una curva  $\Gamma$  contenida en  $\Omega$  o inclusive una sucesión convergente de puntos en  $\Omega$ ), entonces  $f(z) \equiv g(z)$  en  $\Omega$ .

**Demostración.** Un bosquejo de la demostración es como sigue.

---

<sup>8</sup>De forma muy general, se dice que la **continuación analítica** es el procedimiento de extensión del dominio de analiticidad de una función al más grande posible, lo cual puede hacerse por medio de series, a lo largo de trayectorias, mediante continuidad, entre lo más comúnmente conocido. En esta parte, se introduce el proceso utilizando series y muy brevemente por medio de curvas. El procedimiento mediante series se debe a Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815 - 1897), matemático Alemán que suele citarse como el “padre del análisis moderno”.

Correspondiendo a cualquier  $z_0 \in \Omega$  (o sobre  $\Gamma$ ) consideremos la circunferencia más grande  $\mathcal{C}$  totalmente contenida en  $\Omega$ . Tanto  $f(z)$  como  $g(z)$  pueden representarse por una Serie de Taylor en el interior de  $\mathcal{C}$  y por la unicidad de las Series de Taylor,  $f(z) = g(z)$  en el interior a  $\mathcal{C}$ . Ahora, tomando un nuevo punto interior a  $\mathcal{C}$ , cercano a su frontera y repitiendo el argumento anterior para las nuevas Series de Taylor, se tiene que  $f(z) = g(z)$  en el dominio extendido. El procedimiento puede repetirse tantas veces como sea necesario para rellenar por completo el dominio común  $\Omega$  hasta que finalmente  $f \equiv g$  en  $\Omega$ . ■

**Teorema 1.2.9. (Continuación Analítica):** Sean  $f : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathbb{C}$  y  $g : \mathcal{D}_2 \rightarrow \mathbb{C}$  funciones analíticas. Supongamos que  $f = g$  en  $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \neq \emptyset$ . Entonces,

$$h(z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in \mathcal{D}_1 \\ g(z) & \text{si } z \in \mathcal{D}_2 \end{cases}$$

es analítica en  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$  y es la única función analítica en  $\mathcal{D}$  que es igual a  $f$  en  $\mathcal{D}_1$  (o a  $g$  en  $\mathcal{D}_2$ ). Se dice que  $h$  es una **continuación analítica** de  $f$  (o de  $g$ ).

**Demostración.** Consideremos un conjunto cerrado  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{D}$ . Si  $\mathcal{C}$  no intersecta a  $\Gamma$ , entonces  $\oint_{\mathcal{C}} h(z) dz = 0$ , porque  $\mathcal{C}$  está completamente ya sea en  $\mathcal{D}_1$  o en  $\mathcal{D}_2$ . Si  $\mathcal{C}$  intersecta a  $\Gamma$ , entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} h(z) dz = \int_{\mathcal{C}_1} f(z) dz + \int_{\Gamma(\alpha)}^{\Gamma(\beta)} f(z) dz + \int_{\Gamma(\alpha)}^{\Gamma(\beta)} g(z) dz + \int_{\mathcal{C}_2} g(z) dz = 0,$$

ya que  $f(z) = g(z)$  sobre  $\Gamma$ . El Teorema de Morera implica que  $h(z)$  es analítica en  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \Gamma \cup \mathcal{D}_2$ . La unicidad de  $h$  la establece el Teorema de Identidad. ■

La continuación analítica es importante porque proporciona un método para hacer el dominio de analiticidad de una función dada tan grande como sea posible. La forma más común es ir expandiendo mediante Series de Taylor (pero no es muy conveniente). Otra forma es hacerlo mediante trayectorias: la idea general se puede introducir como sigue.

**Definición 1.2.1.** Continuación Analítica a lo Largo de una Curva: Consideremos una curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ . Sea  $f$  analítica en  $\mathcal{D}_0(r)$ . Una continuación analítica del par  $(f, \mathcal{D}_0)$  a lo largo de  $\gamma$  es una colección de pares  $(f_t, \mathcal{D}_t)$  para  $0 \leq t \leq 1$  tal que

- i)  $f_0 = f$
- ii) Para cada  $t \in [0, 1]$  existe  $\epsilon > 0$  tal que para todo  $t' \in [0, 1]$  con  $|t - t'| < \epsilon$  se tiene que  $\gamma(t') \in \mathcal{D}_t$ . Esto es,  $\mathcal{D}_t$  y  $\mathcal{D}_{t'}$  no son ajenos y las funciones  $f_t$  y  $f_{t'}$  coinciden en  $\mathcal{D}_t \cap \mathcal{D}_{t'}$ .

La continuación analítica a lo largo de una curva es única, ya que si  $(f_t, \mathcal{D}_t)$  y  $(g_t, \mathcal{V}_t)$  son dos continuaciones analíticas de  $(f, \mathcal{D}_0)$  a lo largo de  $\gamma$ , entonces  $f_1$  y  $g_1$  necesariamente concidirán en  $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{V}_1$ . Así, dos continuaciones analíticas terminan con los mismos valores en una vecindad de  $\gamma(1)$ . El problema es cuando la curva es cerrada y la función es multivaluada. El resultado más importante es

**Teorema 1.2.10. (Principio de Monodromía):** Sean  $\mathcal{D}$  un dominio simplemente conexo y  $f(z)$  analítica en algún disco  $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ . Si  $f$  puede ser continuada analíticamente a un punto en  $\mathcal{D}$  a lo largo de dos contornos suaves diferentes y arbitrarios  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  y si no hay puntos singulares<sup>9</sup> encerrados por  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$ , entonces el resultado de cada continuación analítica es el mismo y la función es univaluada.

---

<sup>9</sup>De hecho, el teorema puede extenderse para cubrir el caso cuando la región encerrada por  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  contiene a lo más puntos singulares aislados, donde  $f(z)$  tiene expansiones de Laurent en la vecindad de cualquier punto. Esto es, la región encerrada puede contener polos y singularidades esenciales.

Cabe aclarar que existen funciones (o representaciones para estas) que evitan una continuación analítica (debido a singularidades no aisladas), las cuales se denominan *fronteras o barreras naturales*. Por ejemplo,  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ , la cual converge para  $|z| < 1$ , pero una continuación analítica a  $|z| > 1$  es imposible, implicando que  $|z| = 1$  forma una barrera natural para  $f(z)$ <sup>10</sup> Además de las barreras naturales, existen otros tipos de singularidades exóticas que aparecen frecuentemente en la solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales No Lineales, como por ejemplo *puntos cluster (aglutinamientos)*. Un cluster es un punto  $z_0$  en el que una infinidad de puntos singulares de una función univaluada  $f(z)$  se aglutinan alrededor, de tal forma que hay una infinidad de puntos aislados dentro de cualquier disco pequeño alrededor de  $z_0$ . Por ejemplo,  $f(z) = \tan\left(\frac{1}{z}\right)$ . Cuando  $z \rightarrow 0$  a lo largo del eje real  $f(z)$  tiene polos en  $z_n = 1/(\pi/2 + n\pi)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , los cuales se amontonan estrepitosamente alrededor del origen, ya que cualquier vecindad del origen, por muy pequeña que esta sea, contiene una infinidad de tales puntos. Cabe señalar que no es posible determinar expansión de Laurent válida en una vecindad de un cluster. Otra singularidad no común que surge en la aplicación es la llamada *discontinuidad de salto en la frontera*, la cual está asociada al caso cuando dos funciones analíticas están separadas por una curva cerrada o una curva infinita en  $\mathbb{C}$ . Por ejemplo,

$$f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f^+(z) & \text{para } z \text{ dentro de } \mathcal{C} \text{ (contorno cerrado)} \\ f^-(z) & \text{para } z \text{ fuera de } \mathcal{C}, \end{cases}$$

donde  $f_i$  y  $f_o$  son analíticas en sus dominios respectivos de definición y tienen límites que no son iguales cuando se acercan a  $\mathcal{C}$  desde el lado correspondiente.

---

<sup>10</sup>Ahlfors, Lars Valerian Ahlfors, matemático Finlandés (1907 - 1996), primero en recibir la medalla Fields, refiere a este tipo de funciones como *Lacunary functions*.

Más concretamente, por ejemplo,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} f_i(z) = 1 & z \text{ dentro de } \mathcal{C} \\ f_o(z) = 0 & z \text{ fuera de } \mathcal{C}. \end{cases}$$

(La *función característica* en  $\mathcal{D}$ , donde  $\mathcal{C} = \partial\mathcal{D}$ ). La discontinuidad depende por completo de la posición de  $\mathcal{C}$ , la cual es proporcionada en la definición de la función  $f(z)$  mediante la representación integral respectiva.

- ✓ Una extensión del Teorema de Cauchy para integrandos que no son funciones analíticas (en el caso cuando tienen singularidades aisladas) se llama *Teorema de los Residuos de Cauchy*, en el que cada punto singular contribuye al valor de la integral con un término proporcional a lo que es llamado su residuo (de ahí el nombre del teorema).

**Teorema 1.2.11. (Residuos):** Sea  $f(z)$  una función analítica dentro y sobre un contorno cerrado simple  $\mathcal{C}$ , excepto por un número finito de puntos singulares aislados  $z_1, z_2, \dots, z_N$  localizados dentro de la región encerrada por el contorno  $\mathcal{C}$ .

Entonces, 
$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^N \text{Res}\{f(z); z_j\}. \quad (1.2.14)$$
 ■

**Nota:** El cálculo de los residuos depende del tipo de singularidad de la que se trate: en el caso de una singularidad removible el residuo es cero y para los polos existen técnicas prácticas, pero para el caso de singularidades esenciales la única opción viable es la expansión de Laurent alrededor de la singularidad.

El Teorema de los Residuos es uno de los grandes pilares del Análisis Complejo, ya que gracias a este es posible evaluar una gran cantidad de integrales reales (imposibles de evaluar por métodos tradicionales de cálculo), determinar el valor al que convergen ciertas series numéricas, manipular transformaciones integrales (Fourier, Hankel, Mellin, etc.), establecer otros resultados importantes (como por ejemplo, el Principio del Argumento y Teorema de Rouché), entre otras aplicaciones de una larga lista.

**Funciones Enteras y Meromorfas:** Recordemos que una función se dice ser *entera* si es analítica en todo el plano complejo  $\mathbb{C}$  y se dice que una función es *meromorfa* si es analítica excepto por singularidades aisladas, las cuales son polos. Al igual que las funciones racionales, las funciones enteras tienen dos representaciones estándar (como expansión en fracciones parciales o factorización del numerador y denominador) y también se pueden representar mediante productos infinitos (tipo Weierstrass o canónicos, los cuales son fundamentales, pero no se incluyen aquí por no requerirse posteriormente, para información consultar por ejemplo [1]). Por otra parte, las funciones meromorfas se pueden representar por *expansiones de Mittag-Leffler*, lo cual es muy importante para el manejo de las funciones elípticas introducidas más adelante. Supongamos que  $f$  tiene un polo de orden  $m$  en  $z_0$  y consideremos la expansión de Laurent correspondiente

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots .$$

Denotando y denominando *parte singular* de  $f$  en  $z_0$  por

$$\text{Ps}(f, z_0) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} = P\left(\frac{1}{z - z_0}\right),$$

con  $P$  un polinomio, se establece el siguiente resultado, el cual es una factorización para las funciones meromorfas similar a las fracciones parciales.

**Teorema 1.2.12. (Mittag–Leffler)<sup>11</sup>:** Sea  $\{z_n\}$  una sucesión de números complejos distintos tales que  $|z_n| \rightarrow \infty$ . Sea  $\{P_n\}$  polinomios sin el término constante. Entonces, existe una función meromorfa  $f$  cuyos únicos polos están en  $\{z_n\}$  con parte singular  $P_n(1/(z - z_n))$ . La función más general de este tipo puede escribirse en la forma

$$f(z) = \sum_n \left[ P_n\left(\frac{1}{z - z_n}\right) - Q_n(z) \right] + \varphi(z), \quad (1.2.15)$$

---

<sup>11</sup>El Teorema de Mittag-Leffler es llamado así en honor al matemático sueco Magnus Gustaf (Gösta) Mittag-Leffler (1846-1927).

donde  $Q_n$  es algún polinomio y  $\varphi$  es una función entera. La serie converge absoluta y uniformemente sobre cualquier conjunto compacto que no contiene polos de la función.

**Demostración.** La demostración detallada se encuentra en [8]. ■

**Definición 1.2.3 (Funciones Periódicas):** Una función  $f(z)$  se dice ser *periódica* con período  $\omega \neq 0$  si  $f(z + \omega) = f(z)$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

**Nota:** Si  $\omega$  es un período para  $f(z)$ , entonces también lo es cualquier múltiplo entero,  $n\omega$ . En particular, es irrelevante si  $\omega$  es múltiplo de otro período, lo cual permite también llamar a  $f(z)$  *función simple periódica*.

**Afirmación:** Cualquier función con período  $\omega$  puede expresarse en términos de la función exponencial, la cual es el prototipo de función simple periódica, cuyo período es  $2\pi i$ .

**Demostración.** En efecto, la función más simple con periodo  $\omega$  es la función exponencial  $e^{2\pi iz/\omega}$ . Sea  $\Omega$  una región con la propiedad que  $z \in \Omega \Rightarrow z \pm \omega \in \Omega$  y sea  $\Omega'$  la región en el  $\zeta$ -plano, imagen de  $\Omega$  bajo el mapeo  $\zeta = e^{2\pi iz/\omega}$  (por ejemplo, si  $\Omega$  es la banda paralela definida por  $a < \text{Im}\{2\pi z/\omega\} < b$ , entonces  $\Omega'$  es la región anular  $e^{-b} < |\zeta| < e^{-a}$ ). Ahora,  $f(z)$  es meromorfa en  $\Omega$ , con periodo  $\omega$  si y solo si existe una única función meromorfa  $F$  en  $\Omega'$  tal que  $f(z) = F(e^{2\pi iz/\omega})$ . Observemos que  $z$  es único salvo un múltiplo aditivo de  $\omega$ , el cual no tiene influencia sobre el valor de  $f(z)$ . Suponiendo que  $\Omega'$  contiene un anillo  $r_1 < |\zeta| < r_2$  en el que  $F$  no tiene polos, entonces  $F$  tiene el desarrollo de Laurent  $F(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \zeta^n$ , el cual implica

que  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi inz/\omega}$ , un desarrollo de Fourier complejo para  $f(z)$  válido en la banda paralela correspondiente al anillo dado, donde los coeficientes están dados por

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{F(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta, & (r_1 < r < r_2) \\
&= \frac{1}{\omega} \int_a^{a+\omega} f(z) e^{-2\pi i n z / \omega} dz.
\end{aligned}$$

En la última integral,  $a$  es un punto arbitrario en la banda paralela considerada y la integración es a lo largo de cualquier contorno que conecta a  $a$  con  $a + \omega$  en la banda. Por otra parte, si  $f(z)$  es entera, entonces el mismo desarrollo de Fourier es válido en todas partes. ■

**Nota:** Cuando  $\Omega$  es todo el plano complejo,  $F(\zeta)$  tiene singularidades aisladas en  $\zeta = 0, \infty$ . Si ambas no son esenciales (pudieran ser removibles o polos), entonces  $F$  es una función racional y en este caso  $f$  tiene *orden finito*, igual al orden de  $F$ . Así, las funciones simple periódicas de orden finito tienen un compartamiento parecido al de las funciones racionales.

### 1.2.2 Funciones Elípticas y Teoría de Weierstrass

**Funciones Doble Periódicas:** A grandes rasgos, las *funciones elípticas* son funciones univaluadas definidas en el plano complejo, periódicas en dos direcciones, razón por la cual también son llamadas *doble periódicas*. Históricamente, las funciones elípticas se definieron en un principio como funciones inversas de integrales elípticas<sup>12</sup> y posteriormente se establecieron como una clase especial de funciones con propiedades teóricas muy interesantes y aplicaciones importantes. Formalmente, una función elíptica es una función meromorfa  $f$  definida en  $\mathbb{C}$  para la que existen dos números complejos, llamados *periodos fundamentales*,  $\omega_1$  (periodo 1) y  $\omega_2$  (periodo 2), tales que  $f(z + \omega_1) = f(z) = f(z + \omega_2) \forall z \in \mathbb{C}$  y tal que  $\omega_1/\omega_2$  no es real. Para el desarrollo formal de las funciones elípticas se utiliza la *función  $\wp$ -Weierstrass*, solución de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden no lineal, la cual se analiza en la última parte de ésta sección y tiene una amplia aplicación.

<sup>12</sup>Tipo especial de integrales, cuyos integrandos poseen puntos de ramificación específicos.



**Definición 1.2.4:** Sean  $\omega_1$  y  $\omega_2 \in \mathbb{C}$  linealmente independientes sobre  $\mathbb{R}$  (esto es, no es posible tener  $a\omega_1 + b\omega_2 = 0$  para  $a, b \in \mathbb{R}$  ambos no cero). Entonces, la *retícula* (malla o red) generada por  $\omega_1$  y  $\omega_2$  se define por

$$\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = m\omega_1 + n\omega_2, \text{ con } m, n \in \mathbb{Z}\} \equiv \square_{\omega_1, \omega_2}. \quad (1.2.16)$$

Esquemáticamente,  $\mathcal{R}$  se representa en la Figura 1.1,

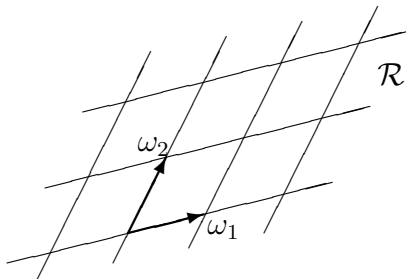


Fig.1.1 Retícula en  $\mathbb{C}$

**Nota:** Si  $\omega, \omega' \in \mathcal{R}$ , entonces  $\omega + \omega'$  y  $n\omega \in \mathcal{R}$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ . Esto es,  $\mathcal{R}$  es cerrada bajo adición y multiplicación por enteros. Matemáticamente significa que  $\mathcal{R}$  es un subgrupo de  $\mathbb{C}$  o mejor dicho es un *Módulo*, el módulo del periodo de  $f$ , el cual es discreto, ya que si  $f(\omega) = f(0)$  para todo  $\omega \in \mathcal{R}$  la existencia de un punto de acumulación implica que  $f(z)$  tiene que ser constante. Además, como  $\mathbb{C}$  es 2-dimensional, entonces  $\omega_1$  y  $\omega_2$  forman una base para  $\mathbb{C}$  sobre  $\mathbb{R}$ .

Sean  $z, w \in \mathbb{C}$ . Se define  $z \equiv w \pmod{\mathcal{R}}$  cuando  $z - w \in \mathcal{R}$ , la cual resulta ser una *relación de equivalencia*, llamada *congruencia módulo  $\mathcal{R}$* . El conjunto de clases de equivalencia  $\pmod{\mathcal{R}}$  se denota por  $\mathbb{C}/\mathcal{R}$  y se dice  $\mathbb{C}$  módulo  $\mathcal{R}$ . Observemos que si  $z \equiv w \pmod{\mathcal{R}}$  y  $n$  es un entero, entonces  $nz \equiv nw \pmod{\mathcal{R}}$ . Además, las clases de equivalencia se pueden sumar. No es cierto que  $\lambda\mathcal{R} \subset \mathcal{R}$  para  $\lambda \notin \mathbb{Z}$  (mucho menos que  $\lambda\mathcal{R} = \mathcal{R}$ ), pero si es cierto que si  $z \equiv w \pmod{\mathcal{R}}$ , entonces  $\lambda\mathcal{R}$  es también una retícula y  $\lambda z \equiv \lambda w \pmod{\lambda\mathcal{R}}$ .

**Definición 1.2.5:** Si  $\mathcal{R} = \square_{\omega_1, \omega_2}$  y  $\alpha \in \mathbb{C}$ , entonces

$$P_F = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \alpha + t_1\omega_1 + t_2\omega_2, \text{ con } 0 \leq t_i \leq 1, i = 1, 2\} \quad (1.2.17)$$

se llama *paralelogramo fundamental* para la retícula  $\mathcal{R}$  (con respecto a la base dada).

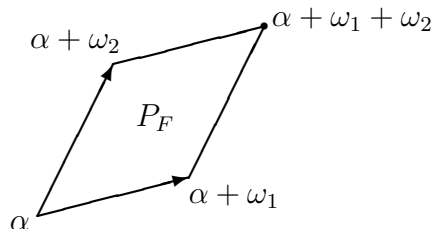


Fig.1.2 Un Paralelogramo Fundamental para la Retícula  $\mathcal{R}$

**Proposición 1.2.2.** Dado  $z \in \mathbb{C}$ , existe un único  $z_0 \in P_F$  tal que  $z \equiv z_0 \pmod{\mathcal{R}}$ .

**Demostración.** Primero, sea  $\alpha = 0$  y escribir  $z = a\omega_1 + b\omega_2$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ . Sea  $m$  el mayor entero menor o igual que  $a$  y sea  $n$  el mayor entero menor o igual que  $b$ . Escribiendo  $t_1 = a - m$  y  $t_2 = b - n$ , se tiene que  $z = m\omega_1 + n\omega_2 + t_1\omega_1 + t_2\omega_2 \equiv t_1\omega_1 + t_2\omega_2 \pmod{\mathcal{R}}$ . Para  $0 \leq t_i < 1$  la clase congruente de  $z \pmod{\mathcal{R}}$  tiene un representante el paralelogramo fundamental  $P_F$ . Por otra parte, suponiendo que  $t_1\omega_1 + t_2\omega_2 \equiv s_1\omega_1 + s_2\omega_2$ , con  $0 \leq s_i < 1$ , se tiene que  $|s_i - t_i| < 1$ , pero  $(s_1 - t_1)\omega_1 + (s_2 - t_2)\omega_2 \equiv 0 \pmod{\mathcal{R}}$ , así que  $s_i = t_i$  para  $i = 1, 2$ . Por lo tanto,  $z_0 = t_1\omega_1 + t_2\omega_2$  es el único elemento de  $P_F$  el cual es  $\equiv z \pmod{\mathcal{R}}$ . Si  $\alpha \neq 0$ , entonces se aplica el mismo argumento anterior a  $z - \alpha$  para obtener existencia y unicidad de un elemento  $z_0$  en el paralelogramo fundamental que sea  $\equiv z \pmod{\mathcal{R}}$ . ■

Como  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son L.I. sobre  $\mathbb{R}$  (no son múltiplo uno del otro), entonces  $\omega_1/\omega_2$  o  $\omega_2/\omega_1$  tiene parte imaginaria positiva. Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $\text{Im}\{\omega_2/\omega_1\} > 0$  (i.e.  $\omega_2/\omega_1$  está sobre el semi-plano superior  $\mathcal{S}^+ = \{z = x + iy, y > 0\}$ ).

**Definición 1.2.5:** Una *función elíptica*  $f$  (respecto a  $\mathcal{R}$ ) es una función  $\mathcal{R}$ -periódica y meromorfa en  $\mathbb{C}$ . Esto es,  $f(z + \omega) = f(z)$  para todo  $z \in \mathbb{C}$  y  $\omega \in \mathcal{R}$ .

Por el Teorema de Liouville, una función elíptica no puede ser entera (*i.e.* sin polos) a menos que sea constante, ya que de serlo es continua y acotada sobre el paralelogramo fundamental, y por la periodicidad sería acotada en todo  $\mathbb{C}$ . Por lo tanto, no hay funciones enteras doble periódicas y todo paralelogramo fundamental tiene un número finito (con al menos uno) de polos.

**Teorema 1.2.13.** Sea  $P_F$  un paralelogramo fundamental para la retícula  $\mathcal{R}$  y supóngase que la función elíptica  $f$  no tiene polos sobre la frontera  $\partial P_F$ . Entonces, la suma de los residuos de  $f$  en  $P_F$  es cero.

**Demostración.** Tenemos que  $2\pi i \sum \mathcal{R}es\{f\} = \int_{\partial P_F} f(z) dz = 0$ , donde la última igualdad se debe a la periodicidad de  $f$  de tal forma que las integrales a lo largo de los lados opuestos de  $P_F$  se cancelan mutuamente (ver Fig.1.2), lo cual prueba el Teorema. ■

**Corolario 1.2.14.** Una función elíptica tiene al menos dos polos (contando multiplicidad) en  $\mathbb{C}/\mathcal{R}$ . ■

Así, ninguna función elíptica puede tener orden 1. Las funciones elípticas son meromorfas al menos de orden 2. Además, una función analítica no constante tiene igual número de polos que de ceros, lo cual se demuestra en el siguiente resultado.

**Teorema 1.2.15.** Sea  $P_F$  un paralelogramo fundamental y supongamos que la función elíptica  $f$  no tiene ceros ni polos en  $\partial P_F$ . Sean  $\{a_i\}$  los puntos singulares (ceros y polos) de  $f$  dentro de  $P_F$  y sea  $m_i$  el orden de  $f$  en  $a_i$ . Entonces,

- i)  $\sum m_i = 0$ .
- ii)  $\sum m_i a_i \equiv 0 \pmod{\mathcal{R}}$ .

**Demostración.** *i)* Como  $f$  elíptica implica que  $f'$  y  $f'/f$  son elípticas, entonces se tiene que

$$0 = \int_{\partial P_F} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum \mathcal{R}\text{es}\left\{\frac{f'}{f}\right\} = 2\pi i \sum m_i,$$

lo cual prueba la primera parte del teorema.

*ii)* En este punto, tomamos la integral

$$\int_{\partial P_F} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum \mathcal{R}\text{es}\left\{\frac{f'}{f}\right\} = 2\pi i \sum m_i a_i,$$

ya que  $\mathcal{R}\text{es}\left\{z \frac{f'(z)}{f(z)}; a_i\right\} = m_i a_i$ , y por otro lado la evaluación de la integral a lo largo de  $\partial P_F$  se realiza considerando al mismo tiempo los lados opuestos, obteniendo para uno de los casos

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \int_{\alpha+\omega_2}^{\alpha+\omega_1+\omega_2} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -\omega_2 \int_{\alpha}^{\alpha+\omega_1} \frac{f'(u)}{f(u)} du = 2\pi i k \omega_2,$$

donde en la última integral se toma el cambio de variable  $u = z - \omega_2$ , para alguna constante  $k$ . La integral sobre el otro par de lados se determina de la misma forma, probando con esto la segunda parte del resultado. ■

**Nota:** Del resultado anterior se desprende que una función elíptica tiene tantos ceros como polos y es un buen ejercicio mostrar que la derivada de una función elíptica es a su vez otra función elíptica con los mismos períodos. En este contexto, el conjunto de las funciones elípticas con la misma red de períodos forman un campo.

**Teoría de Weierstrass:** Las funciones elípticas más simples son las de orden 2, las cuales tienen un polo doble con residuo cero o bien dos polos simples con residuos opuestos. El ejemplo clásico es el de la función elíptica de Weierstrass, llamada *función  $\wp$ -Weierstrass*,

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \mathcal{R}^*} \left[ \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right], \quad (1.2.18)$$

donde la suma se toma sobre el conjunto de todos los períodos diferentes de cero, denotado por  $\mathcal{R}^*$ . Por definición,  $\wp$  es meromorfa con un polo doble en cada punto de la retícula  $\mathcal{R}$  y ningún otro polo adicional. Además,  $\wp$  es una función par, esto es  $\wp(z) = \wp(-z)$ , lo cual se observa directamente de (??) o claramente del desarrollo de Laurent alrededor del origen para  $\wp(z)$ , obtenido por medio de fuerza bruta,

$$\begin{aligned}\wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \mathcal{R}^*} \left[ \frac{1}{\omega^2} \left( 1 + \frac{z}{\omega} + \left( \frac{z}{\omega} \right)^2 + \cdots \right)^2 - \frac{1}{\omega^2} \right] \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \mathcal{R}^*} \sum_{m=1}^{\infty} (m+1) \left( \frac{z}{\omega} \right)^m \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{z^2} + \sum_{m=1}^{\infty} c_m z^m,\end{aligned}\tag{1.2.19}$$

donde  $c_m = \sum_{\omega \in \mathcal{R}^*} \frac{m+1}{\omega^{m+2}}$ .

**Nota:** *i)* Si  $m$  es impar, se tiene que  $c_m = 0$ , ya que  $\wp$  es una función par.

*ii)* La parte singular en  $\omega$  es  $(z - \omega)^{-2}$  y se sustrae  $\omega^{-2}$  para producir convergencia.

**Proposición 1.2.3.** La serie que define a  $\wp(z)$  converge uniformemente sobre conjuntos compactos que no contienen puntos de la retícula  $\mathcal{R}$ .

**Demostración.** Si  $|\omega| > 2|z|$ , entonces  $\left| \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \left| \frac{z(2\omega - 1)}{\omega^2(z - \omega)^2} \right| \leq \frac{10|z|}{|\omega|^3}$ .

Por lo tanto, la serie converge uniformemente sobre todo conjunto compacto si se tiene que  $\sum_{\omega \in \mathcal{R}^*} \frac{1}{|\omega|^3} < \infty$ . Pero así es, ya que  $\omega_2/\omega_1$  no es real y entonces existe  $k > 0$  tal que  $|n_1\omega_1 + n_2\omega_2| \geq k(|n_1| + |n_2|)$  para todo par de números reales  $(n_1, n_2)$ . Si se consideran únicamente enteros, hay  $4n$  pares tal que  $|n_1| + |n_2| = n$ , lo cual da como resultado  $\sum_{\omega \in \mathcal{R}^*} |\omega|^{-3} \leq 4k^{-3} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < \infty$ . Ahora, solo falta verificar que (1.2.19) tiene períodos  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Hacerlo directamente es muy tedioso, en su lugar mejor calcularemos su derivada término a término, obteniendo

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \mathcal{R}} \frac{1}{(z - \omega)^3},\tag{1.2.20}$$

donde la suma ahora se toma para todo  $\omega \in \mathcal{R}$ . La última suma es obviamente doble periódica (además se observa que es impar,  $\wp'(z) = -\wp'(-z)$ ) y por consiguiente,  $\wp(z + \omega_1) - \wp(z)$  y  $\wp(z + \omega_2) - \wp(z)$  son una misma constante. Como  $\wp(z)$  es par, tomando  $z = -\omega_1/2$  y  $z = \omega_2/2$  concluimos que la constante es cero. Así, con lo anterior hemos probado que  $\wp(z)$  es doble periódica. ■

**Teorema 1.2.16.** *i)* Sea  $f$  una función elíptica, respecto a la retícula  $\mathcal{R}$ . Entonces,  $f$  puede expresarse como una función racional de  $\wp$  y  $\wp'$ .

*ii)* Si  $u \equiv -u \pmod{\mathcal{R}}$ , entonces la afirmación anterior es válida en el sentido fuerte, esto es  $f$  tiene un cero (o polo) de orden par en  $u$ .

**Demostración** *i)* Si  $f$  es elíptica, se puede expresar como la suma de una función par y una función impar,  $f(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2} + \frac{f(z) - f(-z)}{2}$ . Si  $f$  es impar, entonces  $f\wp'$  es par. Así que es suficiente probar que si  $f$  es par, entonces  $f$  es una función racional de  $\wp$ . Supongamos que  $f$  es una función par y tiene un cero de orden  $m$  en algún punto  $u$ . Entonces, claramente  $f$  también tiene un cero del mismo orden en  $-u$ , ya que  $f^{(k)}(u) = (-1)^k f^{(k)}(-u)$  y similarmente para los polos.

*ii)* Primero, notemos que  $u \equiv -u \pmod{\mathcal{R}}$  es equivalente a  $2u \equiv 0 \pmod{\mathcal{R}}$ . En  $\mathbb{C}/\mathcal{R}$  hay exactamente cuatro puntos con esta propiedad:  $0$ ,  $\frac{\omega_1}{2}$ ,  $\frac{\omega_2}{2}$  y  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  en un paralelogramo fundamental. Si  $f$  es par, entonces  $f'$  es impar. Esto es,  $f'(u) = -f'(-u)$ . Como  $u \equiv -u \pmod{\mathcal{R}}$  y  $f'$  es periódica, entonces  $f'(u) = 0$ , así que  $f$  tiene un cero de orden al menos 2 en  $u$ . Si  $u \equiv 0 \pmod{\mathcal{R}}$ , entonces el argumento anterior muestra que la función  $g(z) = \wp(z) - \wp(u)$  tiene un cero de orden al menos 2 (de hecho exactamente 2, por la primera parte del Teorema 1.2.5 y el hecho que  $\wp$  tiene únicamente un polo de orden 2 en  $\mathbb{C} \pmod{\mathcal{R}}$ . Entonces,  $f/g$  es par, elíptica y holomorfa en  $u$ . Si  $f(u)/g(u) \neq 0$ , entonces  $\text{ord}_u f = 2$ . Si  $f(u)/g(u) = 0$ , entonces  $f/g$  de nuevo tiene orden al menos 2 en  $u$  y podemos repetir el argumento. Si  $u \equiv 0 \pmod{\mathcal{R}}$ ,

utilizamos  $g = 1/\wp(z)$  y argumentamos similarmente, probando así que  $f$  tiene un cero de orden par en  $u$ . ■

La característica determinante que posee la función  $\wp$ -Weierstrass es que ésta es solución de la ecuación diferencial de primer orden no lineal,

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = 4w^3 - g_2w - g_3, \quad (1.2.21)$$

donde  $g_2 = 60s_4$  y  $g_3 = 140s_6$ , con  $s_m = s_m(\mathcal{R}) = \sum_{\omega \in \mathcal{R}^*} \frac{1}{\omega^m}$ . En efecto, con ésta

notación tenemos que  $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)s_{2n+2}z^{2n} = \frac{1}{z^2} + 3s_4z^2 + 5s_6z^4 + \dots$  y

diferenciando término a término  $\wp'(z) = \frac{-2}{z^3} + 6s_4z + 20s_6z^3 + \dots$ . Así, utilizando éstas

expansiones en la función auxiliar  $\varphi(z) = \wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + g_2\wp(z) + g_3$ , se observa que existe cancelación suficiente de la parte principal y términos constantes, de tal forma que entonces  $\varphi(z)$  es una función elíptica sin polos y con un cero en el origen, lo cual puede ocurrir únicamente si  $\varphi(z) \equiv 0$ , probando así que  $\wp(z)$  satisface la ecuación (??).

Equivalentemente, al derivar la expresión (??), se tiene que  $\wp$  es solución de la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2w}{dz^2} = 6w^2 - g_2/2. \quad (1.2.22)$$

Otros ejemplos importantes de funciones elípticas que están relacionadas con las función  $\wp$ -Weierstrass son las *funciones Zeta*  $\zeta(z)$  y *Sigma*  $\sigma(z)$  de Weierstrass, las funciones de Jacobi, entre otras.





## Capítulo 2

# Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en el Plano Complejo

El objetivo de esta parte es bosquejar algunas ideas fundamentales y describir las propiedades más importantes asociadas con las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias en el plano complejo. En específico, se analiza un tipo especial de EDO's no lineales de primer y segundo orden que comparten una característica distintiva, las *Ecuaciones de Painlevé* y se aborda de forma muy breve la naturaleza de sus soluciones, las *Trascendentes de Painlevé*.

### 2.1 Existencia y Unicidad de la Solución

En principio, es muy importante e interesante analizar la existencia y unicidad de la solución de una ecuación diferencial ordinaria definida en el plano complejo, el cual es un tópico de aplicación del Análisis Complejo que tiene un gran impacto. Además, se incluye de forma directa una respuesta parcial a la pregunta originalmente propuesta por É. Picard sobre el problema de clasificar un tipo especial de EDO's que comparten una propiedad específica, la cual es conocida ahora como la "*Propiedad de Painlevé*".

Para ecuaciones de primer y segundo orden, este trabajo de clasificación fue realizado por P. Painlevé y su escuela, el cual se introduce de forma resumida. El caso general, es un problema abierto.

En general, una ecuación diferencial no lineal de  $n$ -ésimo orden definida sobre un dominio  $\mathcal{D}$  del plano complejo  $\mathbb{C}$  se describe por la expresión

$$\frac{d^n w}{dz^n} = f \left( z; w, \frac{dw}{dz}, \dots, \frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}} \right), \quad (2.1.1)$$

con  $f$  una función localmente analítica de todos sus argumentos. Esto es,  $f$  posee posiblemente singularidades aisladas o puntos de ramificación en  $\mathcal{D}$ . Por su parte, un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden en el plano complejo es de la forma

$$\frac{dw_j}{dz} = f_j(z; w_1, \dots, w_n), \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.1.2)$$

donde de nuevo  $f_j$  son funciones determinadas, localmente analíticas de sus argumentos. Al igual que en el caso real, la ecuación (2.1.1) es equivalente a un sistema de primer orden, el cual se obtiene mediante el procedimiento recursivo:

$$\begin{aligned} w_{j+1} &= \frac{d^j w_1}{dz^j}, \quad j = 1, \dots, (n-1), \\ \frac{d^n w_1}{dz^n} &= F \left( z; w_1, \frac{dw_1}{dz}, \dots, \frac{d^{n-1}w_1}{dz^{n-1}} \right), \quad \text{con } w_1 \equiv w. \end{aligned}$$

o mediante algún otro tipo de transformación apropiada.

Una pregunta natural que surge inmediatamente después de establecer la ecuación objeto de estudio es acerca de si existe solución analítica, dados valores iniciales acotados, y si ésta es única. En el caso de la ecuación (2.1.2), por ejemplo, las condiciones iniciales en  $z = z_0$  están dadas por

$$w_j(z_0) = w_{j0} < \infty, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.1.3)$$

La respuesta a esta pregunta fundamental es afirmativa, la cual se establece inicialmente de forma local en el siguiente resultado clásico, debido a Cauchy, y posteriormente se extiende analíticamente a un dominio específico más grande.

**Teorema 2.1.1. (Cauchy):** El sistema (2.1.2) con valores iniciales (2.1.3) y con  $f_j(z; w_1, \dots, w_n)$  funciones localmente analíticas de cada uno de sus argumentos en un dominio  $\mathcal{D}$  que contiene a  $z = z_0$  tiene solución analítica única en una vecindad de  $z_0$ .

**Demostración.** La demostración de este resultado se basa en un método que utiliza *maximizadores acotados*, llamados “*Mayorantes de Cauchy*”, para la representación en serie de la solución. Esto es, se trata de determinar (de ser posible) una serie absolutamente convergente que domine en módulo, término a término, a la representación original de la posible solución. La idea básica se adquiere a partir del problema simple de Cauchy de la ecuación escalar no lineal de primer orden

$$\frac{dw}{dz} = f(z, w), \quad w(0) = 0. \quad (2.1.4)$$

El problema para otros valores iniciales  $w(z_0) = w_0$  se reduce a este caso mediante un cambio de variable simple. La función  $f(z, w)$  se supone que es analítica y por tanto acotada cuando  $z$  y  $w$  están dentro de los círculos  $|z| \leq a$  y  $|w| \leq b$ , con  $|f| \leq M$  para  $a, b$  y  $M$  constantes predeterminadas. La expansión en serie de la solución del problema (2.1.4), en caso de existir, se determina tomando derivadas sucesivas:

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{dw}{dz}, \quad \frac{d^3w}{dz^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial w} \frac{dw}{dz} + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{d^2w}{dz^2}, \quad \dots$$

lo cual permite calcular (con la relación  $\left( \frac{dw}{dz} \right)_0 = f(0, 0)$  como punto de partida)

$$w = \left( \frac{dw}{dz} \right)_0 z + \left( \frac{d^2w}{dz^2} \right)_0 \frac{z^2}{2!} + \left( \frac{d^3w}{dz^3} \right)_0 \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (2.1.5)$$

La técnica es considerar una ecuación de comparación con la misma condición inicial

$$\frac{dW}{dz} = F(z, W), \quad W(0) = 0 \quad (2.1.6)$$

en la cual cada término de la representación en serie de  $F(z, W)$  domine (en módulo) al término respectivo de la serie correspondiente a  $f(z, w)$ ,

$$f(z, w) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{jk} z^j w^k, \quad C_{jk} = \frac{1}{j!k!} \left( \frac{\partial^{j+k} f}{\partial z^j \partial w^k} \right)_0. \quad (2.1.7)$$

En  $z = a$  y  $w = b$  la función  $f$  es acotada,  $|f(z, w)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |C_{jk}| a^j b^k = M$  y como cada término de esta serie es acotado por  $M$ , entonces  $|C_{jk}| \leq M a^{-j} b^{-k}$ . Así, una expansión  $F$  dominante para  $f$ , lo cual se denota por  $f(z, w) \asymp F(z, W)$ , puede ser de la forma

$$F(z, W) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M}{a^j b^k} z^j W^k. \quad (2.1.8)$$

Claramente la solución expandida para  $W(z)$ , expresión (2.1.5) con  $w$  reemplazada por  $W$ , domina a la expansión para  $w$ . Ahora, es fácil mostrar que la ecuación (2.1.6) para  $W(z)$  tiene una solución en una vecindad de  $z = 0$ . En efecto, sumando la serie (2.1.8) da como resultado

$$F(z, W) = \frac{M}{\left(1 - \frac{z}{a}\right) \left(1 - \frac{W}{b}\right)},$$

la cual, al sustituirla en la ecuación (2.1.6), implica

$$\left(1 - \frac{W}{b}\right) \frac{dW}{dz} = \frac{M}{1 - \frac{z}{a}},$$

de donde, por integración directa, se obtiene

$$W(z) = b - b \left[ 1 + \frac{2aM}{b} \log \left( 1 - \frac{z}{a} \right) \right]^{1/2}. \quad (2.1.9)$$

En la expresión (2.1.9) se toma el valor positivo para la raíz y el valor principal para la función logaritmo para que  $W(0) = 0$ . La serie para  $W(z)$  converge absolutamente para  $|z| < R$ , es decir, hasta alcanzar la singularidad más cercana:  $z = R$ , ya que  $R = a(1 - e^{-b/2aM}) < a$  (esto es, donde  $[\cdot]^{1/2} = 0$ ). Por lo tanto, el criterio de comparación para series implica que la serie solución (2.1.5) para la ecuación (2.1.4) converge para  $|z| < R$ . Por lo tanto, la solución  $w(z)$  existe por lo menos en una vecindad de la condición inicial dada. Además, como se está trabajando exclusivamente sobre la clase de funciones analíticas, cualquier representación en serie obtenida de esta forma es única, ya que la serie de Taylor representa de forma única a una función analítica, lo cual garantiza la unicidad de la solución  $w(z)$ .

Este método se puede extender sin mayor complicación al sistema de ecuaciones (2.1.2). Sin pérdida de generalidad, tomando valores iniciales  $w_j = 0$  para  $j = 1, \dots, n$  en  $z = 0$  y funciones analíticas dentro del polidisco  $|z| \leq a$ ,  $|w_j| \leq b$ , se puede tomar  $|f_j| \leq M$  en este dominio, y entonces para las funciones dominantes se tiene que

$$\frac{dW_1}{dz} = \frac{dW_2}{dz} = \dots = \frac{dW_n}{dz} = \frac{M}{\left(1 - \frac{z}{a}\right) \left(1 - \frac{W_1}{b}\right) \dots \left(1 - \frac{W_n}{b}\right)}, \quad (2.1.10)$$

donde  $W_j(0) = 0$  para  $j = 1, \dots, n$ .

Resolviendo  $\frac{dW_j}{dz} = \frac{dW_{j+1}}{dz}$ , con  $W_j(0) = W_{j+1}(0) = 0$  para  $j = 1, \dots, n-1$ , implica que  $W_1 = W_2 = \dots = W_n = W$ , lo cual reduce a la ecuación (2.1.10) en

$$\frac{dW}{dz} = \frac{M}{\left(1 - \frac{z}{a}\right) \left(1 - \frac{W}{b}\right)^n}, \quad W(0) = 0, \quad (2.1.11)$$

cuya solución es de la forma

$$W = b - b \left[ 1 + \frac{(n+1)aM}{b} \log \left( 1 - \frac{z}{a} \right) \right]^{\frac{1}{n+1}}, \quad (2.1.12)$$

con un radio de convergencia dado por  $|z| < R$ , donde

$$R = a \left( 1 - e^{-b/(n+1)aM} \right). \quad (2.1.13)$$

Por lo tanto, la serie solución del sistema (2.1.2), con  $w_j(0) = 0$ , converge absoluta y uniformemente dentro del círculo de radio  $R$ . ■

Así, el Teorema 2.1.1 establece el hecho que para  $f_i(z; w_1, \dots, w_n)$ , en la ecuación (2.1.2), analítica de todos sus argumentos, existe una solución analítica única en una vecindad (aún por muy pequeña que pudiera ser) para el problema de valor inicial en  $z = z_0$ . Afortunadamente es posible dar una continuación analítica hasta encontrar una nueva singularidad, lo cual es posible en base al *principio de continuación*, establecido por el siguiente resultado.

**Teorema 2.1.2. (Principio de Continuación Analítica):** La función obtenida por continuación analítica de la solución del sistema (2.1.2), a lo largo de cualquier trayectoria en el plano complejo, es una solución de la continuación analítica de las ecuaciones diferenciales que conforman al sistema.

**Demostración.** Como  $g_j(z) = w'_j - f_j(z; w_1, \dots, w_n)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , es cero dentro del dominio donde se ha establecido la existencia de la solución, entonces cualquier continuación analítica de  $g_j(z)$  necesariamente tiene que ser cero. Dado que la solución  $w_j(z)$  satisface  $g_j(z) = 0$  dentro del dominio de existencia y dado que las operaciones en  $g_j(z)$  mantienen la analiticidad, entonces extendiendo analíticamente  $w_j(z)$  proporciona la extensión analítica de  $g_j(z)$ , la cual es idénticamente a cero. ■

**Nota:** El dominio de analiticidad y el comportamiento de las soluciones de las ecuaciones diferenciales analíticas se determina por sus *singularidades*, las cuales pueden ser de dos tipos distintos como se especifica a continuación. De hecho, el estudio sobre la posición de las singularidades y sus propiedades es una de las principales tareas de la Teoría Analítica de las ecuaciones diferenciales en el plano complejo. Por consiguiente, al tratar la ecuación (2.1.2), la pregunta inmediata es sobre dónde y cómo se localiza la “nueva” (siguiente) singularidad y de que tipo puede ser. La posibilidad es que se puede tener una *singularidad fija* (SF) o una *singularidad móvil* (SM). Una singularidad fija es la que se determina por las singularidades explícitas de las funciones  $f_j(z; \cdot)$ . Por ejemplo,  $\frac{dw}{dz} = \frac{w}{z^2}$  tiene una singularidad fija en el origen. La solución refleja este hecho:  $w = Ae^{-1/z}$  tiene una singularidad esencial en  $z = 0$ . Por otro lado, un punto singular móvil depende de la condición inicial impuesta. Por ejemplo, la ecuación  $\frac{dw}{dz} = w^2$  no tiene SF's, pero la solución  $w = -1/(z - z^*)$ , con  $z^*$  arbitrario tiene un polo simple móvil, ya que  $z^*$  depende de la condición inicial (para  $w(0) = w_0$ ,  $z^* = 1/w_0$ ). Otro ejemplo simple donde es posible observar esta situación es  $\frac{dw}{dz} = w^2 + 1$ , cuya solución general es  $w(z) = \tan(z - z_0)$ , con  $z_0$  una constante arbitraria. Esta tiene singularidades móviles (toda una sucesión de polos) cuando  $z = z_0 + (n + \frac{1}{2})\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Dependiendo de la ecuación considerada, es posible tener diferentes tipos de singularidades móviles. Por ejemplo, para  $p > 2$ ,  $\frac{dw}{dz} = w^p$ , cuya solución es  $w = [(p-1)(z^* - z)]^{1/(1-p)}$ , tiene un punto de ramificación móvil en  $z = z^*$ . Incluso, como se puede observar desde ejemplos muy sencillos, es posible encontrar puntos de ramificación y singularidades logarítmicas combinadas como en el caso de la ecuación de primer orden  $\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2zw}$ , cuya solución es  $w = \sqrt{\log z/C}$ , donde  $C \neq 0$  es una constante arbitraria de integración o el caso de la ecuación  $w \frac{d^2w}{dz^2} - \frac{dw}{dz} + 1 = 0$ , cuya solución general es  $w(z) = (z - z_0)[\ln(z - z_0) + K]$ , con  $K$  una constante arbitraria.

Las singularidades fijas pueden determinarse directamente de los coeficientes de la ecuación diferencial dada, pero la localización de las singularidades móviles es un poco más complicada. La situación es más simple para las ecuaciones diferenciales lineales.

**El Caso de las Ecuaciones Lineales:** El caso lineal general tiene la estructura

$$\frac{d\mathbf{w}}{dz} = \mathbf{A}(z)\mathbf{w}, \quad \mathbf{w}(z_0) = \mathbf{w}_0, \quad (2.1.14)$$

donde  $\mathbf{w}$  es un vector columna  $n \times 1$  con entradas complejas y  $\mathbf{A}(z)$  es una matriz  $n \times n$  cuyos elementos son funciones de la variable compleja  $z$ . El problema escalar lineal homogéneo tiene la expresión

$$\frac{d^n w}{dz^n} = p_1(z) \frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + p_2(z) \frac{d^{n-2} w}{dz^{n-2}} + \cdots + p_n(z) w, \quad (2.1.15)$$

el cual es un caso particular de la ecuación (2.1.14), con

$$\mathbf{A}(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ p_n(z) & p_{n-1}(z) & p_{n-2}(z) & \cdots & p_2(z) & p_1(z) \end{bmatrix} \quad (2.1.16)$$

y  $w_1 \equiv w$ ,  $w_2 = \frac{dw_1}{dz}$ ,  $\cdots$ ,  $w_n = \frac{dw_{n-1}}{dz}$ .

**Teorema 2.1.3.** Si  $\mathbf{A}(z)$  es analítica en un dominio simplemente conexo  $\mathcal{D}$  conteniendo a  $z_0$ , entonces el problema de valor inicial (2.1.14) tiene solución analítica única en  $\mathcal{D}$ .

**Demostración.** La demostración es directa, ya que al buscar la serie solución del problema lineal, digamos alrededor de  $z = 0$ ,  $w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ , es posible determinar explícitamente los coeficientes  $c_k$  y mostrar que la serie converge hasta la singularidad más cercana posible de  $\mathbf{A}(z)$ . ■

Una consecuencia que se deriva de este teorema es que la ecuación lineal general (2.1.14) tiene únicamente puntos singulares fijos, determinados por las singularidades de la matriz de coeficientes  $\mathbf{A}(z)$ . Por ejemplo, la ecuación escalar de primer orden

$$\frac{dw}{dz} = p(z)w, \quad w_0(z_0) = w_0 \quad (2.1.17)$$

tiene la solución explícita  $w(z) = w_0 \exp \left[ \int_{z_0}^z p(\xi) d\xi \right]$ , la cual es analítica si  $p(z)$  es analítica.

Por otra parte, una clase especial de ecuaciones lineales que surge frecuentemente en la aplicación consiste de aquellas ecuaciones que poseen *puntos singulares regulares*: la ecuación (2.1.14) tiene un punto singular regular en  $z^* \in \mathcal{D}$  si la matriz  $\mathbf{A}(z)$  tiene un polo simple en  $z = z^*$ . Esto es,

$$\mathbf{A}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_k (z - z^*)^{k-1}, \quad (2.1.18)$$

donde  $\mathbf{A}_0$  es una matriz no nula. Equivalentemente, la ecuación escalar (2.1.15) tiene un punto singular regular en  $z = z^*$  si  $p_k(z)$  tiene un polo de orden  $k$  en ese punto. En otro caso, el punto se dice ser *singular irregular*. Además, utilizando las relaciones  $Q_j(z) = -(z - z^*)^j p_j(z)$ , las cuales son analíticas en  $z = z^*$  para  $j = 1, \dots, n$ , la ecuación (2.1.15) se puede reescribir en la forma

$$(z - z^*)^n \frac{d^n w}{dz^n} + \sum_{j=1}^n Q_j(z) (z - z^*)^{n-j} \frac{d^{n-j} w}{dz^{n-j}} = 0. \quad (2.1.19)$$



Frobenius<sup>1</sup> mostró que la solución siempre contiene puntos de ramificación en  $z = z^*$ . En efecto, expandiendo  $Q_j(z)$  alrededor de  $z^*$ ,  $Q_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{jk}(z - z^*)^k$ , se tiene que la solución de la ecuación (2.1.19) tiene la forma

$$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z^*)^{k+r}, \quad (2.1.20)$$

donde  $r$  satisface la *ecuación indicial*

$$r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1) + \sum_{j=1}^{n-1} c_{j0}r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+j+1) + c_{n0} = 0. \quad (2.1.21)$$

Si las raíces de (2.1.21) no son múltiples o difieren entre sí por un entero, entonces se tienen  $n$  soluciones (2.1.20) linealmente independientes. De otra forma, la solución se complementa con términos apropiados que contienen potencias de  $\log(z - z^*)$ . Si  $Q_j(z) \equiv c_{j0}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , entonces (2.1.21) lleva a raíces asociadas con soluciones de la *Ecuación de Euler*. El caso estándar de este último tipo de ecuaciones es la ecuación de segundo orden, de la cual algunas ecuaciones bien conocidas que contienen puntos singulares regulares son

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - p^2)w = 0 \quad (\text{Ecuación de Bessel}),$$

$$(1 - z^2) \frac{d^2 w}{dz^2} - 2z \frac{dw}{dz} + p(p+1)w = 0 \quad (\text{Ecuación de Legendre}),$$

$$z(1-z) \frac{d^2 w}{dz^2} + [c - (a+b+1)z] \frac{dw}{dz} - abw = 0 \quad (\text{Ecuación Hipergeométrica}),$$

⋮ (entre otras de gran interés).

con  $a, b, c, p$  constantes, cuyas soluciones están dadas en términos de las respectivas *funciones especiales*, de gran importancia para la teoría lineal correspondiente.

---

<sup>1</sup>Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917), matemático Alemán que realizó grandes contribuciones a la matemática en diferentes áreas.

## 2.2 Ecuaciones Tipo Painlevé

Las *Ecuaciones de Painlevé* (EP) o *Ecuaciones Tipo-P* fueron establecidas entre 1895-1910 por P. Painlevé y su discípulo principal B. Gambier para dar respuesta al problema propuesto por É. Picard sobre “establecer un tipo especial de ecuaciones diferenciales no lineales que se caracterizan por poseer la propiedad de que sus únicas singularidades móviles sean polos”. Esta propiedad particular que aparentemente es muy simple es determinante, ya que permite linealización y obtención de la solución exacta de la ecuación bajo estudio, entre otras propiedades y conexiones importantes. Matemáticamente hablando estas ecuaciones diferenciales no lineales son de las más simples posibles, pues las soluciones además de sus singularidades fijas, las cuales se conocen a priori, únicamente tienen polos, es decir son de naturaleza casi meromorfa. Este tipo de ecuaciones surgen frecuentemente en problemas aplicados en diferentes contextos, como por ejemplo en Física en las áreas de dinámica de fluidos, mecánica cuántica, relatividad, por mencionar algunas.

Por su propia naturaleza, todas las ecuaciones diferenciales lineales comparten la propiedad de Painlevé. Sin embargo, esta propiedad es muy rara en las ecuaciones no lineales. El caso más simple ocurre por supuesto para las ecuaciones de primer orden, las cuales de acuerdo L. Fuchs (1884) son las que se pueden expresar en la forma

$$\frac{dw}{dz} = f(z, w) = \frac{p(z, w)}{q(z, w)}, \quad (2.2.1)$$

donde  $p$  y  $q$  son polinomios en  $w$  con coeficientes localmente analíticos de  $z$ . Tiempo después, se demostró formalmente que las únicas ecuaciones de primer orden del Tipo-P son las reducibles a la *Ecuación de Riccati*,

$$\frac{dw}{dz} = A_2(z)w^2 + A_1(z)w + A_0(z), \quad (2.2.2)$$

con  $A_2(z)$ ,  $A_1(z)$  y  $A_0(z)$  funciones racionales.

Si  $A_0(z) \neq 0$ , entonces la transformación  $w(z) = \alpha(z) \left( \frac{d\psi}{dz} \right)$ , con  $\alpha(z) = -1/A_2(z)$  lleva a la ecuación lineal de segundo orden

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} = [A_1(z) + A_2'(z)/A_2(z)] \frac{d\psi}{dz} - A_0(z)A_2(z)\psi. \quad (2.2.3)$$

**Nota:** Como las soluciones  $\psi(z)$  de (2.2.3) no tienen singularidades adicionales a los polos definidos por sus coeficientes racionales (singularidades fijas), entonces las únicas singularidades móviles de  $w(z)$  son polos (en los ceros de  $\psi(z)$ ). Otro tipo de singularidad móvil que no es polo se denomina *singularidad crítica*.

Lo anterior demuestra una de las implicaciones del teorema que a continuación se establece. La implicación recíproca se demuestra utilizando el siguiente lema (útil por sí mismo) que describe la estructura local de las soluciones de las ecuaciones diferenciales analíticas de primer orden,  $w' = f(z, w)$ , cerca de los polos del lado derecho.

**Lema 2.2.1.** Supongamos que el lado derecho  $f(z, w)$  de la ecuación diferencial  $w' = f(z, w)$  tiene un polo en el punto  $(z_0, w_0)$ . Es decir, la función  $1/f(z, w)$  es analítica cerca de  $(z_0, w_0)$  y  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z, w)} = 0$ . Entonces, la ecuación diferencial tiene una solución en serie de la forma de Puiseux

$$w = w_0 + a_1(z - z_0)^{1/k} + a_2(z - z_0)^{2/k} + \dots \quad (2.2.4)$$

para algún entero  $k > 1$  y convergente para  $|z - z_0| < r$ , para algún número positivo  $r$ .

**Demostración.** Reescribiendo la ecuación para la función inversa,  $\frac{dz}{dw} = \frac{1}{f(z, w)}$ ,  $z(w_0) = z_0$  y aplicando el Teorema de Cauchy, se obtiene la solución en la forma

$$z = z_0 + b_1(w - w_0) + b_2(w - w_0)^2 + \dots$$

Observando que  $b_1 = \frac{1}{f(z, w)} \Big|_{(z_0, w_0)} = 0$  y denotando por  $k \stackrel{\text{def}}{=} \min\{i | b_i \neq 0\}$  se tiene que  $z - z_0 = b_k(w - w_0)^k + b_{k+1}(w - w_0)^{k+1} + \dots$  se puede escribir como

$$z - z_0 = b_k(w - w_0)^k [1 + c_1(w - w_0) + c_2(w - w_0)^2 + \dots]^k,$$

donde  $1 + c_1(w - w_0) + c_2(w - w_0)^2 + \dots = \left[ 1 + \frac{b_{k+1}}{b_k}(w - w_0) + \frac{b_{k+2}}{b_k}(w - w_0)^2 + \dots \right]^{1/k}$ .

Ahora, aplicando la versión compleja del Teorema de la Función Implícita a la ecuación  $\zeta = \tilde{b}_1(w - w_0)[1 + c_1(w - w_0) + c_2(w - w_0)^2 + \dots]$ ,  $\tilde{b}_1 = b_k^{1/k}$ , se obtiene una función analítica  $w = w(\zeta)$  para  $|\zeta|$  lo suficientemente pequeña. Esto es,

$$w = w_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \dots, \quad a_1 = 1/\tilde{b}_1.$$

Por último, la sustitución  $\zeta = (z - z_0)^{1/k}$  da como resultado la solución requerida. ■

**Teorema 2.2.1. (Primer Teorema de Painlevé):** Una ecuación diferencial de la forma  $w' = f(z, w)$  con lado derecho racional

$$f(z, w) = \frac{\alpha_0(z)w^n + \alpha_1(z)w^{n-1} + \dots + \alpha_n(z)}{\beta_0(z)w^m + \beta_1(z)w^{m-1} + \dots + \beta_m(z)} = \frac{P_n(z, w)}{Q_m(z, w)} \quad (2.2.5)$$

no tiene singularidades críticas móviles *si y solo si* es una Ecuación de Riccati.

**Demostración.** Supongamos que el grado del denominador  $m > 1$ . Entonces, para cualquier  $z_0 \in \mathbb{C}$  tal que  $\beta_0(z_0) \neq 0$  existe un punto  $(z_0, w_0)$  para el cual  $Q_m(z_0, w_0) = 0$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $P_n(z_0, w_0) \neq 0$  ( $P_n$  y  $Q_m$  desde un principio se supone que no tienen factores en común) y que  $\partial_w Q_m(z, w)|_{(z, w_0)} \neq 0$ . Esta última condición asegura dependencia analítica sobre  $z_0$  de la raíz  $w = w_0$  de la ecuación polinomial  $Q_m(z_0, w) = 0$ . Así, de acuerdo al Lemma 2.1.1 existe una solución de la ecuación diferencial con una singularidad crítica en  $z = z_0$ . La posibilidad de pequeñas variaciones de  $z_0$  implica que esta singularidad es móvil. Por lo tanto,  $m = 0$  y entonces la ecuación diferencial debe tener la forma

$$w' = \alpha_0(z)w^n + \alpha_1(z)w^{n-1} + \dots + \alpha_n(z).$$

Ahora, sea  $\tilde{w} = 1/w$ , lo cual lleva a  $\tilde{w}' = -\frac{\alpha_0(z) + \alpha_1(z)\tilde{w} + \dots + \alpha_n(z)\tilde{w}^n}{\tilde{w}^{n-2}}$ . Si  $n - 2 > 0$ , entonces esta ecuación tiene singularidades críticas móviles. Por lo tanto,  $n = 2$ , obteniéndose de esta forma la Ecuación de Riccati. ■

Analizar el problema de clasificación para ecuaciones de orden grande es una tarea difícil y de hecho como ya se mencionó para ecuaciones de orden mayor que tres es un problema abierto; actualmente, para el caso de tercer orden solo existen resultados parciales específicos.

En los últimos años del Siglo XIX, el trío de matemáticos Franceses, Painlevé, Picard y Gambier, centraron su atención en la clasificación de la estructura de las singularidades de las ecuaciones diferenciales de segundo orden, con coeficientes polinomiales. Esto es, para  $R(z; w, w')$  racional en  $w, w'$  y localmente analítica en  $z$ , el problema era determinar la EDO de segundo orden de la forma

$$\frac{d^2w}{dz^2} = R\left(z; w, \frac{dw}{dz}\right), \quad (2.2.6)$$

con la propiedad que las singularidades adicionales a los polos de cualquier solución de la ecuación dependan únicamente de la ecuación considerada y no de las constantes de integración o condiciones iniciales dadas.

El método usado por Painlevé y su escuela para resolver el problema de clasificación propuesto por Picard descanza sobre una aplicación del Método Clásico de Poincaré acerca de la expansión de la solución en una serie de potencias de parámetros pequeños, llamado  $\alpha$ -Método (aproximaciones sucesivas). Como un logro sobresaliente, Painlevé y colegas encontraron que, salvo la necesidad de transformación, tales ecuaciones pueden ponerse en una de las *cincuenta formas canónicas* posibles que existen: a) ecuaciones lineales, b) ecuaciones de Riccati, c) ecuaciones que tienen por soluciones *funciones elípticas* y d) las “*seis nuevas*” *ecuaciones de Painlevé*, mejor conocidas como  $P_{1-6}$ , las cuales se enlistan a continuación.

Las “Seis Nuevas” Ecuaciones de Painlevé  $P_{1-6}$ :

$$(P_1): \frac{d^2w}{dz^2} = 6w^2 + z,$$

$$(P_2): \frac{d^2w}{dz^2} = 2w^3 + zw + \alpha,$$

$$(P_3): \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{w} \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 - \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} + \frac{(\alpha w^2 + \beta)}{z} + \gamma w^3 + \frac{\delta}{w},$$

$$(P_4): \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{2w} \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 + \frac{3}{2} w^3 + 4zw^2 + 2(z^2 - \alpha)w + \frac{\beta}{w},$$

$$(P_5): \frac{d^2w}{dz^2} = \left( \frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1} \right) \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 - \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} - \frac{(w-1)^2}{z^2} \left( \alpha w + \frac{\beta}{w} \right) + \frac{\gamma w}{z} + \frac{\delta w(w+1)}{w-1},$$

$$(P_6): \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-z} \right) \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 - \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{w-z} \right) \frac{dw}{dz} + \frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2} \left[ \alpha + \frac{\beta z}{w^2} + \frac{\gamma(z-1)}{(w-1)^2} + \frac{\delta z(z-1)}{(w-z)^2} \right],$$

con  $\alpha, \beta, \gamma$  y  $\delta$  constantes complejas arbitrarias.

**Afirmación:** *i)* La ecuación  $P_6$  contiene en principio a las otras cinco, lo cual se puede verificar tomando un proceso de límite apropiado en cada caso.

*ii)* Las soluciones de las seis nuevas ecuaciones diferenciales encontradas por Painlevé, las cuales en general no están dadas en términos de funciones elementales o especiales, tradicionalmente son conocidas como las *Trascendentes de Painlevé*. Para resolver este tipo de ecuaciones se requiere utilizar tópicos del Análisis Complejo de un nivel avanzado, como por ejemplo la *Transformación Conforme* de “poligonos panzones o circulares” sobre regiones simples del plano complejo o métodos aún más sofisticados utilizados para resolver problemas de Riemann-Hilbert, los cuales transforman a los problemas originales en *Ecuaciones Integrales Lineales*.

Es un hecho probado que las soluciones de 11 de las 44 ecuaciones del Tipo-P restantes pueden expresarse en términos de las soluciones de las EP, mientras que las otras 33 son solubles en términos de soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de segundo y tercer orden o en términos de funciones elípticas. La mayoría de las soluciones de las EP son de *naturaleza meromorfa* en el plano complejo.

*iii)* Respecto a la aplicación de las EP, es importante mencionar que la Teoría de Ondas en Medios No Lineales y la Teoría Analítica de Ecuaciones Diferenciales se desarrollaron simultáneamente de forma considerable bajo influencia mutua, en función de la necesidad física. De hecho, las ecuaciones del Tipo-P tienen una amplia aplicación en el campo de las *Ecuaciones Diferenciales Parciales* que gobiernan problemas no lineales de Hidrodinámica, Física de Plasmas, Óptica No Lineal, Física del Estado Sólido, Relatividad, entre otros. Ejemplos específicos de EDP's no lineales relacionadas con las EP son la *Ecuación de Burgers*, la *Ecuación KdV*, la *Ecuación Seno-Gordon*, etc, los cuales se abordarán en el último capítulo del presente trabajo.

La demostración de la Afirmación *i)* se trabaja a continuación, mientras que los puntos *ii)* y *iii)* conforman precisamente el objetivo de este trabajo, el cual se desarrolla parcialmente a lo largo de las Sección 2.2 y Capítulo 3, respectivamente.

**Demostración de la Afirmación *i)* (Coalescencia de las EP):** La sexta ecuación de Painlevé  $P_6$  es la más general en el sentido que las otras cinco EP,  $P_1 - P_5$ , pueden obtenerse mediante un proceso sucesivo de límite (tal como se establece en [7]) de la siguiente forma :

- ◇ Reemplazando  $z \rightarrow 1 + \varepsilon z$ ,  $\delta \rightarrow \frac{\delta}{\varepsilon^2}$ ,  $\gamma \rightarrow \frac{\gamma}{\varepsilon} - \frac{\delta}{\varepsilon^2}$  en  $P_6$  y tomando el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , se tiene que  $P_6 \rightarrow P_5$ .
- ◇ Ahora, si en  $P_5$  se reemplaza  $w \rightarrow 1 + \varepsilon w$ ,  $\beta \rightarrow -\frac{\beta}{\varepsilon^2}$ ,  $\alpha \rightarrow \frac{\alpha}{\varepsilon} + \frac{\beta}{\varepsilon^2}$ ,  $\gamma \rightarrow \gamma\varepsilon$  y  $\delta \rightarrow \delta\varepsilon$ , entonces en el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $P_5 \rightarrow P_3$ .

- ◇ Similarmente, si en  $P_5$  se reemplaza  $z \rightarrow 1 + \sqrt{2} \varepsilon z$ ,  $w \rightarrow \sqrt{2} \varepsilon w$ ,  $\alpha \rightarrow \frac{1}{2\varepsilon^4}$ ,  $\gamma \rightarrow -\frac{1}{\varepsilon^4}$  y  $\delta \rightarrow -\left(\frac{1}{2\varepsilon^4} + \frac{\delta}{\varepsilon^2}\right)$ , entonces en el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $P_5 \rightarrow P_4$ .
- ◇ Ahora, si en  $P_4$  se reemplaza  $z \rightarrow \frac{1}{2^{2/3}}\varepsilon z - \frac{1}{\varepsilon^3}$ ,  $w \rightarrow 2^{2/3}\varepsilon w$ ,  $\alpha \rightarrow -\frac{1}{2\varepsilon^6}$  y  $\beta \rightarrow -\frac{1}{2\varepsilon^{12}}$ , entonces  $P_4 \rightarrow P_2$ , cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .
- ◇ Similarmente, si en  $P_3$  se reemplaza  $z \rightarrow 1 + \varepsilon^2 z$ ,  $w \rightarrow 1 + 2\varepsilon w$ ,  $\gamma \rightarrow \frac{1}{4\varepsilon^6}$ ,  $\delta \rightarrow -\frac{1}{4\varepsilon^6}$ ,  $\alpha \rightarrow -\frac{1}{2\varepsilon^6}$  y  $\beta \rightarrow \frac{2\beta}{\varepsilon^3} + \frac{1}{2\varepsilon^6}$ , entonces  $P_3 \rightarrow P_2$ , cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .
- ◇ Finalmente, si en  $P_2$  se reemplaza  $z \rightarrow \varepsilon^2 z - \frac{6}{\varepsilon^{10}}$ ,  $w \rightarrow \varepsilon w + \frac{1}{\varepsilon^5}$  y  $\alpha \rightarrow \frac{4}{\varepsilon^{15}}$ , entonces  $P_2 \rightarrow P_1$ , cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

## 2.3 Las Trascendentes de Painlevé

Se ha mostrado que en general no es posible resolver las EP en términos de soluciones de ecuaciones diferenciales lineales, y por consiguiente, las Trascendentes de Painlevé definen, en un sentido genérico, nuevas funciones trascendentales, las cuales, de hecho, pueden considerarse como una clase de funciones especiales no lineales. Sin embargo, para valores específicos de los parámetros las EP admiten familias de soluciones en términos de funciones especiales, tales como *funciones de Bessel*, *funciones de Airy*, *la función error*, *funciones hipergeométricas*, etc., o en términos de otras funciones elípticas y trascendentales clásicas, las cuales se construyen mediante relaciones de recurrencia específicas, usualmente llamadas *Transformaciones de Bäcklund*<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>Una **Transformación de Bäcklund** es una relación de recurrencia no lineal entre una solución y otra de la misma ecuación diferencial (o posiblemente de otra ecuación), al cambiar los valores de los parámetros involucrados, una técnica muy interesante, pero fuera del alcance a este nivel.



El objetivo de esta parte en primer término es analizar de forma muy compacta y en segundo ilustrar las Trascendentes de Painlevé, por lo menos lo que respecta a algunas de las soluciones de  $P_1$  y  $P_2$ , ya que los otros casos son más complicados. Esto es, de forma muy rudimentaria se incluyen algunos resultados directos, bosquejos de demostración o se proporciona la referencia correspondiente para estos casos que son relativamente más simples. Se concluye comentando acerca de la naturaleza meromorfa de las soluciones de  $P_1$  y  $P_2$  y se proporcionan algunos ejemplos simples de familias de solución de la  $P_2$ .

### 2.3.1 Primera, Segunda y Cuarta Ecuación de Painlevé

A partir de la naturaleza de las EP respecto a las posibles singularidades, se demuestra que las soluciones de  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_4$  son meromorfas en el plano complejo. La ecuación  $P_1$  es única en el sentido que no incluye ningún parámetro tal como en el caso de  $P_2$  a  $P_6$ . Sin embargo,  $P_2$  al contener únicamente un parámetro puede considerarse como el caso piloto para varios fenómenos físicos que tienen tal dependencia, lo cual implica la existencia de soluciones tanto racionales como de otros tipos especiales que satisfacen ecuaciones diferenciales algebraicas de primer orden, que se determinan mediante Transformaciones de Bäcklund. Respecto a la ecuación  $P_4$ , debido a los dos parámetros que contiene, el caso es más complicado que para  $P_2$ . Sin embargo, también tiene soluciones racionales y otras relacionadas con la función error, que se obtienen mediante Transformaciones de Bäcklund.

**La Primera Ecuación de Painlevé:** Sea  $w(z)$  una solución local arbitraria del problema de Cauchy para  $P_1$ :

$$\begin{aligned} w'' &= 6w^2 + z, \quad z \in \mathcal{D}_r(z_0) \\ w(z_0) &= w_0 \neq \infty, \quad w'(z_0) = w'_0 \neq \infty. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

El Teorema 2.1.1 (existencia y unicidad de la solución) implica que  $w(z)$  es una función univaluada localmente analítica alrededor de  $z_0$ .

**Teorema 2.3.1.** Toda solución local de  $P_1$  puede ser analíticamente continuada a una solución univaluada, meromorfa en  $\mathbb{C}$ .

**Demostración.** Sea  $w(z)$  una solución local de (2.3.1) y sea  $\mathcal{D}_R(z_0)$  el disco más grande al cual  $w(z)$  puede ser continuada como una función meromorfa. Por la unicidad de las funciones meromorfas, la función extendida obviamente satisface a  $P_1$  en  $\mathcal{D}_R(z_0)$ . Si  $R = \infty$ , no resta nada más que probar. Así, supongamos que  $R < \infty$ . Si para cada  $z_1 \in \mathcal{S}_R(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \partial\mathcal{D}_R(z_0)$  existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $w(z)$  puede ser continuada como una función meromorfa al dominio  $\mathcal{D}_R(z_0) \cup \mathcal{D}_{\delta_1}(z_1)$ , entonces es posible cubrir  $\mathcal{S}_R(z_0)$  por un número suficiente de tales discos (es cuestión de ajustar los radios adecuadamente), donde cada uno intersecta exactamente a otros dos y tal que la unión de  $\mathcal{D}_R(z_0)$  con estos discos cubra a un disco  $\mathcal{D}_{R^*}(z_0)$  para algún  $R^* > R$ . Si dos discos  $\mathcal{D}_{\delta_1}(z_1)$  y  $\mathcal{D}_{\delta_2}(z_2)$  se traslapan, entonces las extensiones de  $w(z)$  a  $\mathcal{D}_R(z_0) \cup \mathcal{D}_{\delta_1}(z_1)$  y  $\mathcal{D}_R(z_0) \cup \mathcal{D}_{\delta_2}(z_2)$  coinciden en  $\mathcal{D}_R(z_0) \cap \mathcal{D}_{\delta_1}(z_1) \cap \mathcal{D}_{\delta_2}(z_2) \neq \emptyset$ , así que éstas coinciden en  $\mathcal{D}_{\delta_1}(z_1) \cap \mathcal{D}_{\delta_2}(z_2)$ . Por lo tanto,  $w(z)$  puede ser meromorficamente continuada sin ninguna restricción en  $\mathcal{D}_{R^*}(z_0)$  y como éste es simplemente conexo, el Principio de Monodromía establece que  $w(z)$  puede ser definida como una función meromorfa en  $\mathcal{D}_{R^*}(z_0)$ , lo cual contradice la definición de  $R$ . Así, existe un punto  $a \in \mathcal{S}_R(z_0)$  para el que no existe  $\delta > 0$  tal que  $w(z)$  pueda ser continuada como una función meromorfa de  $\mathcal{D}_R(z_0)$  a  $\mathcal{D}_R(z_0) \cup \mathcal{D}_\delta(a)$ .

Vamos entonces a buscar un par de funciones analíticas  $u, v$  definidas en una vecindad de un posible polo  $z_1$  de  $w(z)$ , las cuales se utilizarán como herramienta auxiliar en el resto de la demostración. La selección de  $u, v$  se hace en base a que en  $\mathcal{D}_R(z_0)$  debe haber únicamente polos dobles, así que sustituyendo en  $P_1$  la expansión de Laurent de  $w(z)$ , alrededor de  $z = z_1$ , denotando  $\zeta \stackrel{\text{def}}{=} z - z_1$ , se obtiene al igualar coeficientes

$$w(z) = \frac{1}{\zeta^2} - \frac{z_1}{10}\zeta^2 - \frac{1}{6}\zeta^3 + q\zeta^4 + \frac{z_1^2}{300}\zeta^6 + \frac{z_1}{150}\zeta^7 + \sum_{k=8}^{\infty} a_k \zeta^k, \quad (2.3.2)$$

donde el coeficiente  $q$  depende de las condiciones iniciales.

Además,

$$w'(z) = -2\zeta^{-3} - \frac{z_1}{5}\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2 + 4q\zeta^3 + \frac{z_1^2}{150}\zeta^5 + \frac{7z_1}{150}\zeta^6 + \sum_{k=8}^{\infty} ka_k\zeta^{k-1}. \quad (2.3.3)$$

Así, aproximadamente

$$\begin{cases} w(z) = \zeta^{-2} - \frac{z}{10}\zeta^2 - \frac{1}{15}\zeta^3 + q\zeta^4 + \dots \\ w'(z) = -2\zeta^{-3} - \frac{z}{5}\zeta - \frac{3}{10}\zeta^2 + 4q\zeta^3 + \dots \end{cases} \quad (2.3.4)$$

Como todos los polos de  $w(z)$  son dobles, es natural proponer a  $v$  de tal forma que  $w(z) = [v(z)]^{-2}$ , al menos localmente cerca de algún polo (digamos  $z_1$ ). Tomando una rama apropiada de  $v(z)$ , tenemos que

$$\zeta = v(z) \left[ 1 - \frac{z}{20}v(z)^4 - \frac{1}{30}v(z)^5 + \frac{q}{2}v(z)^6 + \dots \right]. \quad (2.3.5)$$

y

$$w'(z) = -2v(z)^{-3} - \frac{1}{2}zv(z) - \frac{1}{2}v(z)^2 + 7qv(z)^3 + \dots \quad (2.3.6)$$

Esto lleva a proponer a  $u, v$  como

$$w = v^{-2}, \quad w' = -2v^{-3} - \frac{1}{2}zv - \frac{1}{2}v^2 + uv^3. \quad (2.3.7)$$

De la ecuación  $P_1$  se tiene que

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{8}z^2v + \frac{3}{8}zv^2 + \left(\frac{1}{4} - zu\right)v^3 - \frac{5}{4}uv^4 + \frac{3}{2}u^2v^5 \\ v' = 1 + \frac{1}{4}zv^4 + \frac{1}{4}v^5 - \frac{1}{2}uv^6. \end{cases} \quad (2.3.8)$$

Lo que resta por probar es que si  $u, v$  son funciones meromorfas que satisfacen (2.3.8), entonces  $w = v^{-2}$  es una solución de  $P_1$ , pero antes de hacerlo consideremos la siguiente función auxiliar

$$\Phi(z) \stackrel{\text{def}}{=} (w')^2 + \frac{w'}{w} - 4w^3 - 2zw, \quad (2.3.9)$$

la cual después de sustituir (2.3.7), se transforma en

$$\Phi(z) = -\frac{1}{4w^2} + \frac{z^2}{4w} + \frac{u^2}{w^3} - \frac{zu}{w^2} - 4u. \quad (2.3.10)$$

Ahora, observemos que al multiplicar a  $P_1$  por  $2w'$  se tiene que

$$\frac{d}{dz} \left[ \Phi(z) - \frac{w'(z)}{w(z)} \right] = -2w(z). \quad (2.3.11)$$

Utilizando  $P_1$  una vez más, podemos verificar inmediatamente que  $\Phi(z)$  satisface la EDO lineal de primer orden no homogénea

$$\Phi'(z) + \frac{1}{w(z)^2} \Phi(z) = -\frac{z}{w(z)} + \frac{w'(z)}{w(z)^3}. \quad (2.3.12)$$

Consideremos ahora el segmento de recta  $\Gamma$  que une a  $z_0$  con  $a$ , suponiendo que éste evita ceros de  $w(z)$  (en caso de haberlos) mediante pequeñas semi-circunferencias alrededor de tales ceros, con radios adecuados de tal forma que la trayectoria modificada permanezca rectificable. Denotando por  $\Gamma(z_0, t)$  al primer pedazo de  $\Gamma$  que va de  $z_0$  a  $t$  y resolviendo (2.3.12) a lo largo de éste, tenemos

$$\Phi(z) = E(z_0, z)^{-1} \left[ \Phi(z_0) - \frac{E(z_0, z)}{2w(z)^2} + \frac{1}{2w(z_0)^2} - \int_{\Gamma(z_0, z)} \frac{E(z_0, t)}{2w(t)^4} (2tw(t)^3 - 1) dt \right], \quad (2.3.13)$$

donde  $E(z_0, t) = \exp \left( \int_{\Gamma(z_0, t)} w(\tau)^{-2} d\tau \right)$  es el factor integrante.

De (2.3.13) se concluye que

**Lema 2.3.1.** *Si  $|w(z)|^{-1}$  es acotada sobre  $\Gamma$ , entonces  $\Phi(z)$  es acotada en  $\Gamma$ .*

□

Para probar la afirmación del Teorema 2.1.1 denotemos por  $A \stackrel{\text{def}}{=} \liminf_{\Gamma \ni z \rightarrow a} |w(z)|$ , analizando los tres posibles casos.

**Caso I:**  $0 < A < +\infty$ .

Por el Lema 2.3.1,  $\Phi(z)$  es acotada en  $\Gamma$  cerca de  $z = a$ , ya que ahí  $|w(z)| \geq \frac{A}{2} > 0$ . Tomar entonces una sucesión  $\{z_n\}$  sobre  $\Gamma$ , tal que  $z_n \rightarrow a$  y que  $w(z_n)$ ,  $w(z_n)^{-1}$  permanezcan acotadas cuando  $n \rightarrow \infty$ . Considerando (2.3.9) con  $z = z_n$ , como una

ecuación cuadrática para  $w'(z)$  observamos que  $w'(z_n)$  es acotada cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por el Teorema Estándar de Cauchy 2.1.1 se concluye que el sistema

$$\begin{cases} w' = g \\ g' = 6w^2 + z \end{cases}$$

tiene solución analítica alrededor de  $z = a$ , lo cual es una contradicción.

**Caso II:**  $A = +\infty$ .

En este caso,  $\lim_{\Gamma \ni z \rightarrow a} w(z) = \infty$  y así por el Lema 2.3.1,  $\Phi(z)$  es acotada en  $\Gamma$  cerca de  $z = a$ . Recordando que  $w = v^{-2}$ , (2.3.10) se puede escribir en la forma

$$\Phi(z) = -\frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{4}z^2v^2 - u(z^2v^4 + 4 - uv^6), \quad (2.3.14)$$

de donde se desprende que  $u(z^2v^4 + 4 - uv^6)$  es acotada en  $\Gamma$  cerca de  $z = a$ . Si  $u(z_n)$  es acotada cerca de  $z = a$  para una sucesión  $z_n \rightarrow a$ , el Método de Estimación de Cauchy (Teorema 2.1.1) aplicado a (2.3.8) implica que  $w(z)$  tiene un polo en  $z = a$ , lo cual es una contradicción. Por consiguiente,  $\lim_{\Gamma \ni z \rightarrow a} u(z) = \infty$ , implicando que  $\lim_{\Gamma \ni z \rightarrow a} uv^6 = 4$ .

Escribiendo  $u(zv^4 + 4 - uv^6) = uv^6 \left( \frac{z}{v^2} + \frac{4}{v^6} - u \right)$  observamos que

$$g \stackrel{\text{def}}{=} u - \frac{4}{v^6} - \frac{z}{v^2} \quad (2.3.15)$$

permanece acotada sobre  $\Gamma$  cuando  $z \rightarrow a$ . Diferenciando ésta expresión, tenemos

$$g' = u' - \frac{24v'}{v^7} - \frac{1}{v^2} + \frac{2zv'}{v^3}. \quad (2.3.16)$$

En la segunda ecuación de (2.3.8), se puede expresar a  $u$  en términos de  $g$  y  $v$  utilizando (2.3.15), lo cual da como resultado

$$v' = -1 - \frac{1}{4}zv^4 + \frac{1}{4}v^5 - \frac{1}{2}gv^6. \quad (2.3.17)$$

Sustituyendo (2.3.17) en (2.3.15)

■

**La Segunda Ecuación de Painlevé ( $P_2$ ):** Ahora, sea  $w(z)$  una solución local arbitraria del problema de Cauchy para  $P_2$ :

$$\begin{aligned} w'' &= 2w^3 + zw + \alpha, & z \in \mathcal{D}_r(z_0), \alpha \in \mathbb{C}, \\ w(z_0) &= w_0 \neq \infty, \\ w'(z_0) &= w'_0 \neq \infty. \end{aligned} \tag{2.3.18}$$

**Teorema 2.3.2.** *Toda solución local de  $P_2$  puede ser analíticamente continuada a una solución univaluada, meromorfa en  $\mathbb{C}$ .*

■

La *Teoría de Nevanlinna* (Apéndice A.3) proporciona la razón de crecimiento y las propiedades básicas de la distribución de las Trascendentes de Painlevé, lo cual prácticamente se omite en el presente trabajo debido a la necesidad de una mayor fundamentación sobre este tópico.

### 2.3.2 Comentario sobre el Resto de las Ecuaciones de Painlevé

En lo que concierne a  $P_3$  y  $P_5$ , las cuales están relacionadas en muchos aspectos, son más complicadas en el sentido que no admiten soluciones meromorfas. Sin embargo, la transformación  $z = e^\zeta$ , las lleva a las ecuaciones modificadas correspondientes  $\tilde{P}_3$  y  $\tilde{P}_5$ , de tal forma que sus soluciones si tienen naturaleza meromorfa. La  $(P_6)$  tiene tres puntos singulares fijos,  $z = 0, 1, \infty$  y debido a la existencia de estas tres SF's, ninguna transformación de la forma  $z = \phi(\xi)$ , con  $\phi$  entera, puede aplicarse para producir una forma modificada de la  $P_6$  que tenga solo soluciones meromorfas. Sin embargo, el comportamiento local alrededor de las singularidades puede ser muy variado, lo cual es imposible de incluir en este trabajo. La ecuación  $P_6$  fue olvidada en los escritos de Painlevé, pero fue redescubierta en 1905 por R. Fuchs<sup>3</sup>, quien realizó la mayor parte del trabajo para determinar su solución.

---

<sup>3</sup>Richard Fuchs, hijo de Lazarus Fuchs.

## Capítulo 3

# Ejemplos Clásicos de Ecuaciones Diferenciales Parciales Relacionadas con las Trascendentes de Painlevé

En esta parte se establece de una forma muy general la relación que algunas ecuaciones diferenciales parciales no lineales clásicas de la Física-Matemática tienen con las Ecuaciones de Painlevé. Respecto a las soluciones, debido al nivel y objetivo del trabajo, sólo es posible analizar casos muy simples.

### 3.1 Motivación

La mayor parte de los modelos matemáticos derivados de problemas reales de la Física, así como también de otras áreas de la ciencia y la tecnología, son *no lineales*, propiedad que implica dificultad en el análisis y determinación de soluciones. Sin embargo, muchos de estos problemas poseen por naturaleza la *propiedad de integrabilidad*, lo cual hace atractivo el estudio, la apertura y fortalecimiento de líneas de investigación específicas de métodos matemáticos eficientes para determinar soluciones analíticas.

Bajo la primicia que ningún método es universal ni definitivo, un camino que parece ser prometedor es la aplicación de las Trascendentes de Painlevé en la determinación de soluciones de cierto tipo de EDP's no lineales. De hecho, se puede asegurar que *“las Trascendentes de Painlevé poseen para la Física Matemática No Lineal un papel similar al que tienen las funciones especiales, tales como las funciones de Bessel, Airy, entre otras, en la teoría lineal correspondiente”*.

Un método efectivo para determinar soluciones de cierto tipo de EDP's no lineales es el llamado *Método de Transformación Dispersiva Inverso*, referenciado como Método IST<sup>1</sup> por sus siglas en Inglés (Inverse Scattering Transformation), entre otros para analizar la “propiedad de integrabilidad” y una conjetura interesante es que *“las EDP's NL con la propiedad de integrabilidad están estrechamente relacionadas con las EP”*.

En esta parte se exponen de forma muy general algunos ejemplos clásicos de EDP's NL (“integrables”) y su correspondiente relación con las EP. En particular, se analizan algunos tipos de la Ecuación KdV, Ecuación Seno-Gordon y Ecuación de Schrödinger, se tiene un primer acercamiento con la Ecuación de Boussinesq y se verifica para éstos casos la conjetura citada. Finalmente, se plantean algunos problemas relacionados, estableciendo la base para una perspectiva importante de trabajo futuro a un nivel más profundo.

---

<sup>1</sup>Éste método fue desarrollado en los 1960's por V.E. Zakharov, A.B. Shabat, *et al*, para probar la propiedad de integrabilidad de problemas físicos específicos.



### 3.2 Ecuaciones Tipo Korteweg-de Vries

Las *ecuaciones tipo Korteweg-de Vries*<sup>2</sup> (Ecuaciones KdV) son un modelo matemático que aparece principalmente en la Dinámica de Fluidos para describir cierta clase de ondas no lineales en medios someros (de poca profundidad). Este es el prototipo de problemas integrables, es decir, EDP's no lineales cuyas soluciones se pueden especificar de forma exacta y precisa (por ejemplo, utilizando el Método IST o cualquier otro). Algunas de las ecuaciones que caen dentro de esta categoría son la *Ecuación de Burgers*, la Ecuación KdV Clásica, las ecuaciones KdV modificada, cilíndrica y de orden grande, las cuales se consideran de forma breve en ésta sección.

**Ecuación de Burgers:** quizás es el modelo no lineal más simple para describir ondas que exhiben difusión en un medio de poca profundidad. Son tres las ecuaciones de Burgers básicas: la *Ecuación General de Burgers*,

$$u_t + u \frac{\partial}{\partial t}(\log \tilde{\theta}) + \alpha u u_x + \beta u_{xx} = 0, \quad (3.2.1)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes y  $\tilde{\theta}$  surge de un cambio de coordenadas. La más simple de las Ecuaciones de Burgers es la *Ecuación de Burgers No Viscosa*, la cual se obtiene de (3.2.1) cuando  $\alpha = 1, \tilde{\theta} = 1$ , removiendo la difusión con  $\beta = 0$ ,

$$u_t + u u_x = 0. \quad (3.2.2)$$

Si  $\alpha, \tilde{\theta} = 1$  y  $\beta = -\nu$ , entonces se tiene la ecuación que típicamente se conoce como la *Ecuación de Burgers*,

$$u_t + u u_x = \nu u_{xx}, \quad (3.2.3)$$

donde  $u(t, x)$  es una función que representa, por ejemplo, una velocidad y  $\nu$  es la viscosidad cinemática (o un coeficiente de difusividad). Esta ecuación fue introducida a principios del Siglo XX, pero ganó popularidad después de los 1940's cuando fue así

---

<sup>2</sup>Reciben este nombre en honor a Diederik J. Korteweg (1848-1941) y Gustav de Vries (1866-1934) quienes fueron los primeros en estudiarla.

llamada por Johannes Martinus Burgers (1895-1981), quien acentuó su valor por su combinación de efectos difusivos y no lineales. Sin embargo, ésta ecuación fue aún más famosa una vez que Cole y Hopf<sup>3</sup> mostraron que la solución general podía obtenerse de forma explícita. Burgers utilizó ésta ecuación como una forma simplificada de la *Ecuación Navier-Stokes* como un modelo 1-dimensional de turbulencia para describir la formación y desaparición de choques en un fluido compresible y también como ecuación de difusión no lineal en muchos medios físicos, como por ejemplo, en dinámica de gases radiactivos, propagación de ondas en medios no homogéneos y flujo de transporte.

**Nota:** Para algunos casos de la Ecuación de Burgers Generalizada se han determinado soluciones, pero se ha mostrado que no es posible obtener una transformación similar para el caso general, así que no trataremos aquí este caso.

La solución de la Ecuación de Burgers No Viscosa, la cual es una EDP cuasilineal, se determina usando el clásico Método de las Características (regularmente como un ejemplo ilustrativo en un primer curso de Ecuaciones Diferenciales Parciales). Para la condición inicial  $u(0, x) = u_0(x)$  la solución es de la forma

$$u = u_0(\xi), \quad x = u_0(\xi)t + \xi. \quad (3.2.4)$$

Esta solución forma choques y se vuelve multivaluada en un tiempo muy corto, lo cual se puede en cierta medida prevenir sumando convenientemente un término dispersivo o difusivo. En el primer caso aparece la Ecuación KdV si se incorpora un término dispersivo ( $vu_{xxx}$ ), mientras que el segundo da origen a la Ecuación de Burgers, cuya solución se determina vía la *Transformación de Cole-Hopf* que la transforma en la *Ecuación de Difusión* clásica, también conocida como la *Ecuación de Calor*.

---

<sup>3</sup>Frank Nelson Cole (1861-1926) y Heinz Hopf (1894-1971).

Para ver el proceso de solución de la ecuación de Burgers, consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= \nu u_{xx} \\ u(0, x) &= u_0(x). \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

La ecuación anterior puede escribirse en la forma  $u_t - (\nu u_x - \frac{1}{2}u^2)_x = 0$ , que a su vez puede considerarse como una “condición de compatibilidad” para una función  $\Psi$  en la forma  $u = \Psi_x$ ,  $\nu u_x - \frac{1}{2}u^2 = \Psi_t$ , produciendo la ecuación  $\Psi_t + \frac{1}{2}\Psi_x^2 = \nu\Psi_{xx}$ . Aplicando a ésta última ecuación la Transformación de Cole-Hopf,  $\Psi = -2\nu \log \Phi$ , se obtiene  $\Psi_x = -2\nu\Phi_x/\Phi$ ,  $\Psi_{xx} = 2\nu \left[ \left(\frac{\Phi_x}{\Phi}\right)^2 - \frac{\Phi_{xx}}{\Phi} \right]$ ,  $\Psi_t = -2\nu\frac{\Phi_t}{\Phi}$ , lo cual lleva a la Ecuación de Difusión

$$\Phi_t = \nu\Phi_{xx}. \quad (3.2.6)$$

La condición inicial se transforma de una forma similar;  $u(0, x) = u_0(x) = -2\nu\frac{(\Phi_0)_x}{\Phi_0}$ , lo cual da como resultado  $\int_0^x u_0(\xi)d\xi = -2\nu \log \Phi_0$  y así  $\Phi_0(x) = \exp\left(-\frac{1}{2\nu} \int_0^x u_0(\xi)d\xi\right)$ , para  $t = 0$ .

La transformación nos da un problema de valor inicial para la Ecuación de Difusión, el cual podemos resolver usando la Transformada de Fourier, obteniendo

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0(s) \exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4\nu t}\right] ds, \quad (3.2.7)$$

la cual a su vez lleva a la elegante solución

$$u(t, x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-s)}{t} e^{-G/2\nu} ds}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-G/2\nu} ds}, \quad \text{donde } G(t, x; s) = \int_0^s u_0(\sigma) d\sigma + \frac{(x-s)^2}{2t}. \quad (3.2.8)$$

Equivalentemente, (3.2.8) se puede escribir de forma más compacta como

$$u(t, x) = -2\nu \frac{\partial}{\partial x} \ln \left\{ \frac{1}{4\nu\pi t} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-s)^2}{4\nu t} - \frac{1}{2\nu} \int_0^s u_0(s') ds'\right] ds \right\}. \quad (3.2.9)$$

**Nota:** Es obvio que  $u$  es univaluada. Esta es la solución explícita que incrementó el interés por la Ecuación de Burgers. Sin embargo, para fines prácticos es muy complicada de manipular. Pero, por lo menos establece la propiedad de integrabilidad para esta ecuación particular.

Ahora, si para la ecuación (3.2.5) se buscan soluciones del tipo  $u(t, x) = w(x + \nu t)$ , entonces se obtiene la ecuación  $\nu w' + ww' = \nu w''$ , donde  $w' = \frac{dw}{d\xi}$ ,  $\xi = x + \nu t$ , la cual al integrarla lleva a la ecuación diferencial de primer orden

$$w' = w + \frac{1}{2\nu}w^2 + K, \quad (3.2.10)$$

donde  $K$  es una constante arbitraria.

**Nota:** En este ejemplo se muestra de forma muy elemental la relación que existe entre la EDP no lineal (3.2.5) y la más simple de las ecuaciones tipo Painlevé, la *Ecuación de Riccati* (2.2.2), la cual se describe de forma general en la Sección 2.1.2. Por lo tanto, es posible obtener solución a partir de un problema previamente conocido.

De acuerdo a (1.2.2) de la Sección A.2, con la sustitución  $w = -2\nu\psi/\psi$ , donde  $\psi' = d\psi/dz$ , la ecuación (3.2.10) se reduce a la ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes

$$\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{du}{dz} + \frac{K}{2\nu}u = 0,$$

cuya solución se obtiene fácilmente con técnicas elementales de cálculo. En la Fig.3.2 se ilustra una solución particular correspondiente a  $K = 0$ .

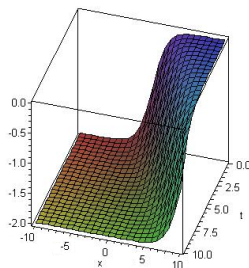


Fig.3.2 Una Solución Particular de la Ecuación de Burgers

**Ecuación KdV Clásica:** es utilizada en hidrodinámica para describir la evolución de ondas en aguas someras (poco profundas), en particular “solitones”, ya que también se utiliza para describir ondas de plasma en medios dispersivos, entre otras. Ésta ecuación describe el balance entre la evolución, la no linealidad y la dispersión, mediante la expresión

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (3.2.11)$$

La relación directa que tiene ésta ecuación con las EP se desprende del hecho que la KdV admite soluciones progresivas (“ondas viajeras”),  $u(t, x) = U(x - ct)$ , con  $U(z)$  solución de la EDO de segundo orden no lineal  $U'' - 3U^2 - cU = K_1$ , con  $K_1$  una constante arbitraria de integración. Si se multiplica por  $2U'$  a ésta última ecuación y luego se integra se obtiene  $(U')^2 - 2U^3 - cU^2 = 2K_1U + K_2$ , cuya solución se expresa en términos de las funciones  $\wp$ -Weierstrass (estudiadas en la Sección 1.2.2), lo cual lleva a que la solución progresiva de la KdV (3.2.11) tiene la forma

$$u(t, x) = -\frac{c}{6} + 2\wp\left(x - ct - x_0, \frac{c^2}{12} - K_1, -\frac{1}{4}K_2 + \frac{c}{12}K_1 - \left(\frac{c}{6}\right)^3\right). \quad (3.2.12)$$

En particular, si  $K_1 = K_2 = 0$ , se obtiene

$$u(t, x) = -\frac{c}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}(x - ct - x_0)}{2}\right). \quad (3.2.13)$$

En la Fig.3.3 se muestra la solución (3.2.13) para valores específicos de las constantes.

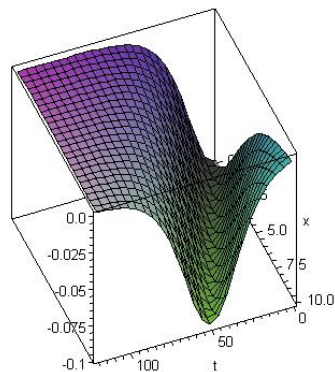


Fig.3.3 Solución Particular  $u(t, x)$  de la Ecuación KdV Clásica

Por otra parte, si sustituimos  $u(t, x) = -w(z) + \lambda t$ ,  $z = x + 3\lambda t^2$  en la KdV (3.2.11), obtenemos  $w''' - 6ww' + \lambda$ , la cual al integrarla lleva a la Primera Ecuación de Painlevé  $P_1$ :

$$w'' = -3w^2 + \lambda z + K. \quad (3.2.14)$$

Ahora, escribiendo la KdV en la forma

$$2u_t + 2uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (3.2.15)$$

y utilizando la transformación

$$\begin{cases} u = \frac{\beta}{2\alpha} + (3\alpha t + \delta)^{-2/3} f(\tau), \\ \tau = (3\alpha t + \delta)^{-1/3} \left( x - \frac{\beta t}{2\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta\delta}{2\alpha^2} \right), \end{cases}$$

se obtiene, por cálculo directo, la EDO de tercer orden no lineal

$$f''' + 2ff'' - 2\alpha\tau f' - 4\alpha f = 0, \quad (3.2.16)$$

misma que a su vez, mediante la transformación  $f = 3\alpha\tau - 6\alpha^{2/3}F$ ,  $z = -\alpha^{1/3}\tau$ , adquiere la forma

$$FF'' = (F')^2/2 + 4F^3 + 2zF^2 + K, \quad (3.2.17)$$

donde  $K$  es una constante arbitraria de integración. Sustituyendo  $F = (w^2 - w' - z)/2$  en (3.2.17), se obtiene

$$w'' = 2w^3 - 2zw + \alpha, \quad (3.2.18)$$

donde  $\alpha = (-8K)^{1/2} - 1$ . La ecuación (3.2.18) es una ligera modificación de la Segunda Ecuación de Painlevé  $P_2$ . Sin embargo, para  $K = 0$ , utilizando la sustitución  $F = w^2$ , se obtiene  $P_2$  en su forma estándar con  $\alpha = 0$ .

Como hemos visto, para diferentes tipos de solución es posible encontrar la conexión con las Trascendentes de Painlevé. El mismo trabajo se puede hacer para otras EDP's, solo que el problema de determinar la transformación apropiada es frecuentemente el problema más complicado.

**Ecuación KdV Modificada:** ligera variación de la KdV, establecida por

$$v_t - 6v^2v_x + v_{xxx} = 0, \quad (3.2.19)$$

al introducir la transformación de Miura  $u = v_x + v^2$ . En efecto, introduciendo ésta transformación en la KdV (3.2.11), se obtiene

$$2vv_t + v_{tx} - 6(v^2 + v_x)(2vv_x + v_{xx}) + 6v_xv_{xx} + 2vv_{xxx} + v_{xxxx} = 0,$$

la cual a su vez se puede escribir en la forma

$$\left(2v + \frac{\partial}{\partial x}\right) Mv = \left(2v + \frac{\partial}{\partial x}\right) (v_t - 6v^2v_x + v_{xxx}) = 0.$$

Observemos que si  $v$  satisface la KdVM, entonces  $u$  es solución de la KdV. La relación de la KdVM con las EP se debe a M.J. Ablowitz [1], asumiendo que su solución puede escribirse en la forma  $v(t, x) = (3t)^{-1/3}w(z)$ , donde  $z = x(3t)^{-1/3}$ , lo cual lleva a la ecuación  $w''' - 6w^2w' - (zw)' = 0$ , que al integrarla resulta en una Segunda Ecuación de Painlevé  $P_2$ .

**Ecuación KdV Cilíndrica:** la ecuación

$$2u_t + \frac{1}{t}u + 2uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (3.2.20)$$

se reduce a la Primera Ecuación de Painlevé  $P_1$ ,

$$f'' + f^2 - \delta\tau/(2\gamma) = K, \quad (3.2.21)$$

cuando se introduce la transformación

$$\begin{aligned} \tau &= xt^{-1/2} + (\delta + 2\beta t^{1/2})/(2\gamma t), \\ u(t, x) &= x/(2t) + \delta t^{-3/2}/(2\gamma) + \beta/(2\gamma t) + f(\tau)/t. \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Por su parte, una transformación que lleva la Segunda Ecuación de Painlevé  $P_2$  es

$$\begin{aligned} z &= \alpha t + 2\gamma t^{3/2}/3, \\ \tau &= (x + \delta/\alpha + 2\gamma(\delta/\alpha^2 - \beta/(\alpha\gamma))t^{1/2}) z^{-1/3}, \\ u(t, x) &= (\gamma x + (3\beta - 2\gamma\delta/\alpha)t^{1/2}(3z)^{-1} + z^{-2/3}f(\tau), \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

cuando se acompaña de la transformación  $w^2 = -6^{-1/3}\alpha^{-2/3}f$ ,  $\xi = (\alpha/6)^{1/3}\tau$ .

**KdV de Orden Grande:** las ecuaciones de Korteweg-de Vries de orden grande, denotadas por  $m$ KdV, están relacionadas con las análogas de orden grande de la  $P_2$ , lo cual no es posible de abordar en este punto porque sobrepasa el límite de dificultad del presente trabajo.

**Observación:** Muchas de las transformaciones aquí presentadas, así como otras que se han omitido, fueron determinadas por investigadores Japoneses, cuyos trabajos hasta hace muy pocos años no había salido de su país. Afortunadamente, ahora existe más publicación al respecto, lo cual permite formar una base sólida para una alternativa viable de solución de problemas de EDP's no lineales aplicadas.

### 3.3 Ecuaciones Tipo Seno-Gordon

Las *ecuaciones tipo Seno-Gordon* (Ecuaciones SG) fueron utilizadas primeramente en la Geometría Diferencial para analizar ciertas consideraciones de la teoría de superficies de curvatura constante negativa. De hecho, esto llevó a desarrollar la idea de las Transformaciones de Bäcklund, método que relaciona de forma especial EDP's y sus soluciones, muy importante por ejemplo en la teoría de solitones y sistemas integrables. Aún cuando las ecuaciones SG provienen de una base puramente matemática, en la práctica admiten un gran número de aplicaciones físicas, como por ejemplo en óptica no lineal, física del estado sólido, física de partículas elementales, entre otras.

**Ecuación de Liouville:** es el prototipo matemático para la Ecuación Seno-Gordon,

$$u_{tx} = e^u, \quad (3.3.1)$$

la cual aparece en varios procesos físicos, estableciendo distintos problemas según la geometría involucrada.



La ecuación (3.3.1) tiene solución exacta, que se obtiene introduciendo la transformación  $u = \ln w(z)$ ,  $z = tx$ , donde  $w(z)$  satisface la EDO no lineal de segundo orden

$$w'' = \frac{(w')^2}{w} - \frac{1}{z}w' + \frac{1}{z}w^2, \quad (3.3.2)$$

la cual es la Tercera Ecuación de Painlevé  $P_3$ , con parámetros  $\alpha = 1, \beta = \gamma = \delta = 0$ , para la cual se tiene solución en términos de funciones elementales.

**La Ecuación Seno-Gordon:** es la ecuación original

$$u_{\xi\xi} - \frac{1}{c^2}u_{\sigma\sigma} = \text{sen } u, \quad (3.3.3)$$

la cual puede expresarse, mediante la transformación  $x = \frac{1}{2}(\xi - c\sigma), t = \frac{1}{2}(\xi + c\sigma)$ , en la forma

$$u_{tx} = \text{sen } u. \quad (3.3.4)$$

No está demás observar que la ecuación (3.3.4) es invariante bajo  $u \mapsto u + 2n\pi$ . Además, aplicando la transformación  $\phi(\tau, \eta) = u(x, t)$ ,  $2x = \tau + \eta$ ,  $2t = \tau - \eta$ , la ecuación (3.3.4) puede representarse en la forma

$$u_{\tau\tau} - u_{\eta\eta} = \text{sen } \phi. \quad (3.3.5)$$

La transición de (3.3.4) a (3.3.5) se puede interpretar como un cambio del “cono”  $(t, x)$  a las coordenadas de “laboratorio”  $(\tau, \eta)$ . Por cálculo directo se muestra que

$$u(t, x) = -i \log w(z), \quad z = tx$$

es solución de (3.3.4), donde  $w(z)$  es solución de la Tercera Ecuación de Painlevé  $P_3$ ,

$$w'' = \frac{(w')^2}{w} - \frac{1}{z}w' + \frac{1}{2z}(w^2 - 1), \quad (3.3.6)$$

con parámetros  $\alpha = -\beta = 1/2, \gamma = \delta = 0$ .

**La Ecuación Seno-Gordon Hiperbólica:** es de la forma

$$u_{tx} = \sinh u. \quad (3.3.7)$$

Similarmente, la ecuación (3.3.7) también está relacionada con la ecuación  $P_3$ , solo que en este caso se tiene a  $u(t, x) = \ln w(z)$ ,  $z = tx$  como solución.

**La Ecuación Seno-Gordon Modificada:**

$$u_{tx} = \nu \sin u + \mu tx \sin 2u, \quad (3.3.8)$$

con  $\nu, \mu$  parámetros arbitrarios. Si  $\nu = 1$  y  $\mu = 0$ , tenemos la Ecuación Seno-Gordon original (3.3.4). Mientras que si  $\nu = 0$  y  $\mu \neq 0$ , digamos que  $\mu = 2$  sin pérdida de generalidad, entonces denotando  $z = tx$  y considerando una solución arbitraria  $u = u(z)$  de (3.3.8), es fácil checar que la función  $w(z) = e^{-iu(z)}$  es solución de la ecuación  $P_3$ , con parámetros  $2\alpha = -2\beta = \nu, \gamma = -\delta = 1$ .

**Ecuación Seno-Gordon 2-Dimensional:**

$$u_{tt} - \Delta u + \nu \sin u + \mu f(t, x, y) \sin 2u, \quad (3.3.9)$$

con  $\nu, \mu$  parámetros arbitrarios y  $f(t, x, y) \neq 0$  una función adicional tal que se tengan soluciones auto-similares (*i.e.*, soluciones que dependen de la variable  $\xi = f(t, x, y)$ ). En este caso, se ha probado que las soluciones auto-similares son  $u(\xi) = i \ln w(\xi)$ , donde  $w(\xi)$  es solución de la  $P_3$  con parámetros  $\alpha = -\beta = -\nu/8, \gamma = -\delta = -\mu/8$ , para el caso especial  $\xi = \varsigma_1 - \varsigma_2^2/h$ , donde  $\varsigma_1 = t^2 - x^2 - y^2, \varsigma_2 = Ct - Bx - Ay, h = C^2 - A^2 - B^2$ .

**Observación:** Para las ecuaciones tipo Seno-Gordon la exposición de la relación que tienen con las Trascendentes de Painlevé se hace de forma muy compacta, ya que el objetivo únicamente es mostrar que es posible para este caso particular de ecuaciones integrables afirmar la conjetura con la que iniciamos nuestro análisis.

### 3.4 Ecuaciones Tipo Schrödinger

La forma básica de la *Ecuación de Schrödinger* No Lineal (NLS) es

$$iu_t + u_{xx} + \gamma u^2 \bar{u} = 0, \quad (3.4.1)$$

donde  $\bar{u}$  es la conjugada compleja de  $u$  e  $i$  es la unidad imaginaria. El parámetro  $\gamma$ , físicamente representa a una constante de acoplamiento de las soluciones, diferente de acuerdo al signo. Matemáticamente, el parámetro  $\gamma$  tiene que ver con que el problema sea o no sea adjunto. La ecuación NLS es una de las ecuaciones fundamentales de la Física-Matemática, teniendo aplicación en la descripción de la evolución de ondas en hidrodinámica para aguas profundas, así como ondas superficiales en aguas someras. La NLS también aparece en la propagación de ondas ópticas en medios no lineales como cristales, fibra de vidrio y plasma, así como ondas térmicas en sólidos.

La NLS fue una de las ecuaciones en las que se aplicó por primera vez el Método IST, probando para ésta la propiedad de integrabilidad. En el presente trabajo únicamente describiremos brevemente la conexión de la NLS con la TP al buscar soluciones en la forma de Boiti-Pempinelli

$$u(t, x) = (2t)^{-1/2} v(\tau) e^{iQ(\tau)}, \quad \tau = \frac{1}{2} x t^{-1/2}, \quad (3.4.2)$$

con  $v(\tau)$  y  $Q(\tau)$  funciones reales, lo cual lleva a las ecuaciones

$$\begin{aligned} Q''v + 2v'Q' - 2\tau v' - 2v &= 0, \\ v'' - (Q')^2 v + 2\tau Q'v + 2\gamma v^3 &= 0. \end{aligned}$$

Ahora, la sustitución  $Q'(\tau) = t + g/g_\tau$ ,  $v^2 = 2g_\tau$  e integración da como resultado la ecuación para  $g$

$$(g'')^2 + 4(\tau g' - g)^2 + 8\gamma (g')^3 + 2\gamma \mu^2 g' = 0,$$

donde  $\mu$  es un parámetro arbitrario de integración. Sin pérdida de generalidad, fijando  $\gamma = -1$  y sustituyendo  $g = w(w - \tau)^2/2 + (w_\tau^2 - 2w_\tau + 1 - \mu^2)/(8w)$ .

Finalmente, la NLS es transformada en una  $P_4$  de la forma

$$ww'' = (w')^2/2 - 6w^4 + 8\tau w^3 - 2\tau^2 w^2 - (\mu - 1)^2/2. \quad (3.4.3)$$

Por otro lado, la ecuación de Schrödinger modificada

$$iu_t + u_{xx} + (-2\alpha x + 2|u|^2)u = 0 \quad (3.4.4)$$

se puede reducir mediante la transformación  $u(t, x) = f(x)e^{i\kappa t}$  en una ligera variante de la  $P_2$ :

$$f'' - (2\alpha x + \kappa)f + 2|f|^2 f = 0. \quad (3.4.5)$$

### 3.5 Ecuaciones Tipo Boussinesq

La *Ecuación de Boussinesq*<sup>4</sup>

$$u_{tt} = c^2 \left( u_{xx} + \frac{3}{2} \left( \frac{u^2}{h} \right)_{xx} + \frac{1}{3} h^2 u_{xxxx} \right), \quad (3.5.1)$$

la cual tiene una base hidrodinámica similar a la Ecuación KdV, es utilizada para describir la propagación de ondas de gran longitud (con velocidad  $c$ ) en aguas someras (de profundidad finita  $h$ ).

Una ecuación estrechamente relacionada con la Ecuación de Boussinesq, considerada como una generalización 2-dimensional de la Ecuación KdV, es la llamada *Ecuación de Kadomtsev-Petviashvili* (Ecuación KP),

$$(u_t - 6uu_x + u_{xxx})_x + 3\mu^2 u_{yy} = 0, \quad \mu^2 = 1, \quad (3.5.2)$$

la cual aparece en la descripción de ondas no lineales de variación lenta en medios dispersivos.

---

<sup>4</sup>Joseph Boussinesq (1842 - 1929), Físico-Matemático Francés, cuyos trabajos abarcaron campos muy diversos de la física, la matemática y la filosofía. Son especialmente interesantes sus estudios estadísticos sobre hidrodinámica, donde surgió ésta interesante EDP no lineal que describe verdaderos efectos de dispersividad.

Mediante normalización simple (adimensionando el problema), la Ecuación KP puede escribirse como

$$v_{tx} + (v^2 + v_{xx})_{xx} + v_{yy} = 0. \quad (3.5.3)$$

La transformación  $x \rightarrow x - \frac{1}{3}y - \frac{10}{9}t$ ,  $t \rightarrow y + \frac{2}{3}t$ ,  $v \rightarrow u$  lleva a (3.5.3) en

$$u_{tt} - u_{xx} + \varepsilon(u^2 + u_{xx})_{xx} = 0, \quad \varepsilon^2 = 1. \quad (3.5.4)$$

con  $\varepsilon = 1$ , mientras que para  $\varepsilon = -1$ , la ecuación (3.5.4) simple y sencillamente es la Ecuación de Boussinesq (3.5.1) con reescalamiento.

La relación que tiene la ecuación (3.5.4) con las EP se sigue de sustituir  $z = x - ct$  en (3.5.4). Esto es,

$$(c^2 - 1)u + \varepsilon(u^2 + u'') = K_1 z + K_2. \quad (3.5.5)$$

La solución de ésta ecuación o bien está dada en términos de las funciones  $\wp$ -Weierstrass o por las Primeras Trascendentes de Painlevé, dependiendo de las constantes de integración  $K_1, K_2$ . Por otro lado, mediante la sustitución  $\zeta = x - \left(\frac{\delta}{2\theta}\right)t^2$ ,  $f = \varepsilon\left(\frac{\delta}{\theta}\right)^2 + 2u$  en (3.5.5) e integrando una vez, obtenemos

$$f''' + ff' - \varepsilon f' - \varepsilon\left(\frac{\delta}{\theta}\right)f - 2\left(\frac{\delta}{\theta}\right)^2 \zeta = K_1, \quad (3.5.6)$$

la cual después de aplicarle la transformación

$$\begin{aligned} z &= -\varepsilon\left(\frac{\delta}{2\theta}\right)^{1/3} \left[ \zeta + \frac{\theta}{2\delta} \left( 1 + K_1 \frac{\theta}{\delta} \right) \right], \\ F &= -\frac{1}{12} \left( 2\frac{\theta}{\delta} \right)^{2/3} \left( f - 2\varepsilon \left( \frac{\delta}{\theta} \right) \zeta - 2\varepsilon - K_1 \varepsilon \frac{\theta}{\delta} \right) \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

se reduce a la ecuación (3.2.17), y por consiguiente a la Segunda Ecuación de Painlevé.

**Nota:** La Ecuación de Boussinesq tiene varias generalizaciones, dependiendo del problema físico en el que aparece, y se asegura que según sea el caso la generalización respectiva se relaciona de forma cercana con la Segunda, Tercera, Cuarta y Quinta Ecuación de Painlevé. Probar ésta afirmación no es un problema trivial y se deja para trabajo futuro por su importancia tanto teórica como aplicada.

**Observación:** En resumen, las ODE's reducciones de la Ecuación KdV son  $P_1$  y  $P_2$ , de la Seno-Gordon es la  $P_3$ , de la Schrödinger es la  $P_4$ , la Boussinesq es más variada, etc.

**Nota:** Además de las ecuaciones abordadas en ésta sección es posible analizar otros tipos de EDP's no lineales "típicas" (con la propiedad de integrabilidad, por supuesto) estrechamente relacionadas con las Trascendentes de Painlevé. Por ejemplo, las *ecuaciones tipo Einstein*, *ecuaciones tipo Toda*, *Ecuación de Ernst*, entre otras. También, mediante las trascendentes de Painlevé, es posible analizar EDP's lineales en el plano complejo. Por ejemplo, un problema muy interesante es el análisis de la *Ecuación de Helmholtz Complejificada*.

**La Ecuación de Helmholtz:**<sup>5</sup>, es la EDP lineal elíptica de segundo orden

$$(\Delta \pm k^2)u = 0, \quad (3.5.8)$$

donde  $\Delta$  es el operador Laplaciano (en las coordenadas correspondientes), que se obtiene como caso estacionario (después de una transformación en el tiempo) de la *Ecuación de Onda* clásica. Cuando  $k$  es real, el problema es bien conocido y la solución se obtiene por los métodos tradicionales de Separación de Variables o Transformación Integral. Sin embargo, cuando  $k$  es una constante (o función compleja) y la función desconocida  $u = u(\vec{x})$ ,  $\vec{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ , tales métodos tradicionales son muy limitados. Las Trascendentes de Painlevé ayudan en la búsqueda de su solución. Desafortunadamente, por razones de tiempo, espacio y objetivo del presente trabajo no es posible por el momento entrar en detalle sobre los diferentes tipos de solución que poseen estos problemas, pero bien podrían desarrollarse como un nuevo trabajo de tesis de licenciatura.

---

<sup>5</sup>Es llamada de ésta forma debido al Físico y Médico Alemán Hermann von Helmholtz (1821–1894).

## CONCLUSION:

A partir de los conceptos y resultados discutidos en este trabajo queda plenamente de manifiesto la importancia que tienen las Trascendentes de Painlevé *per se*, así como herramienta auxiliar analítica en el proceso de solución de muchos problemas reales, cuyos modelos de descripción involucran ecuaciones diferenciales no lineales.

Las TP (funciones especiales no lineales) juegan un papel fundamental en la Teoría No Lineal de las Ecuaciones Diferenciales, proporcionan soluciones exactas para cierto tipo de ecuaciones diferenciales parciales aplicadas, están estrechamente relacionadas con las Transformaciones de Bäcklund (relaciones de recurrencia no lineales) y los sistemas Hamiltonianos, así como también con el Método IST, el cual expresa a las EP como condiciones de compatibilidad de sistemas lineales que pueden utilizarse como fórmulas asintóticas o de conexión. Es decir, las TP están estrechamente relacionadas con las reducciones de las EDP's no lineales integrables.

En específico, una ecuación de interés particular, relacionada de forma cercana con el complejo *Problema de Tsunami*, es la Ecuación de Boussinesq. Esta ecuación describe el tipo de dispersión que exhiben las ondas tsunami en eventos reales, tal como fue observado por ejemplo en el catastrófico acontecimiento sucedido en Asia el 2004 mediante satélites y GPS. El estudio analítico como enfoque principal y numérico como herramienta auxiliar para ésta importante EDP no lineal forma parte del tema de tesis de maestría que estaré trabajando durante mis estudios de posgrado, mediante el estableciendo formal del *Problema de Conexión* para las Trascendentes de Painlevé con técnicas modernas del Análisis Complejo utilizando el *Método de Riemann-Hilbert*. Por consiguiente, el presente material establece el punto de partida de un trabajo que promete resultados relevantes para el siguiente nivel de estudios y trabajo futuro.





# Apéndice A

## Tópicos de Utilidad

En esta parte se introducen algunos conceptos y resultados auxiliares, con independencia relativa, los cuales son necesarios como apoyo en el establecimiento de algunos de los resultados particulares del trabajo elaborado.

### A.1 Símbolos de Orden

Las siguientes notaciones y propiedades de las relaciones asintóticas son útiles en varios contextos.

- Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  tal que  $0 \in \overline{\Omega}$  y sean  $f(z)$  y  $g(z)$  funciones definidas en  $\Omega \setminus \{0\}$ . Entonces, la relación asintótica

$$f(z) = O(g(z)), \quad z \in \Omega \tag{1.1.1}$$

significa que existe una constante positiva  $C$  tal que  $|f(z)| \leq C|g(z)| \quad \forall z \in \Omega$ .

- Sea  $\Omega$ ,  $f(z)$  y  $g(z)$  como en el punto anterior. Entonces, la relación asintótica

$$f(z) = O(g(z)), \quad z \rightarrow z_0, \quad z, z_0 \in \Omega \quad (1.1.2)$$

significa que existen constantes positivas  $C$  y  $\rho$  tal que  $|f(z)| \leq C|g(z)| \quad \forall z \in \Omega$ ,  $0 < |z - z_0| < \rho$ .

En este caso, se dice que “ $f$  es  $O$  grande de  $g$  cuando  $z \rightarrow z_0$ ” o que “ $f$  y  $g$  son del mismo orden cuando  $z \rightarrow z_0$ ”.

- Sea  $\Omega$ ,  $f(z)$  y  $g(z)$  como en el punto anterior. Entonces, la relación asintótica

$$f(z) = o(g(z)), \quad z \rightarrow z_0, \quad z, z_0 \in \Omega \quad (1.1.3)$$

significa que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\rho > 0$  tal que  $|f(z)| \leq \epsilon|g(z)| \quad \forall z \in \Omega$ ,  $0 < |z - z_0| < \rho$ .

En este caso, se dice que “ $f$  es  $o$  pequeña de  $g$  cuando  $z \rightarrow z_0$ ”.

Los símbolos de orden  $O$  y  $o$ , llamados también símbolos de Landau, se pueden definir también de la siguiente forma: supongamos que  $g(x) \neq 0$  en  $|x - x_0| < x_r$  para algún  $x_r > 0$  y consideremos el límite  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ . Entonces, por ejemplo, se dice que “ $f$  es  $O$  grande de  $g$  cuando  $x \rightarrow x_0$ ” si el límite existe y es finito. La relación entre las dos definiciones mencionadas se establece en el siguiente resultado.

### Teorema A.1.1.

1. Sí  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  existe y es finito, entonces  $f = O(g)$  cuando  $x \rightarrow x_0$ .
2. Sí  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ , entonces  $f = o(g)$  cuando  $x \rightarrow x_0$ .

**Demostración:**

1. Supongamos que  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = M$ . De la definición de límite  $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - M \right| < \epsilon$  para toda  $\epsilon > 0$ . Entonces,  $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| - |M| \leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} - M \right| < \epsilon$ , de donde se sigue que  $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - M \right| < \epsilon + |M|$ . Como  $\epsilon$  y  $M$  son positivos, haciendo  $k = \epsilon + M$  se tiene que  $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq k$ .
2. Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ , entonces existe  $\delta > 0$  tal que  $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < k$  para  $|x - x_0| < \delta$ . Sustituyendo  $x_1 = \delta$  se concluye que  $f = o(g)$ . ■

**Propiedades de los Símbolos de orden:**

$$\begin{array}{ll}
 i) O(O(f)) = O(f), & v) O(f) + O(f) = O(f), \\
 ii) o(o(f)) = o(f), & vi) o(f) + o(f) = o(f), \\
 iii) O(fg) = O(f)O(g), & vii) o(f) + O(f) = O(f), \\
 iv) O(f)o(g) = o(fg)O(g), & viii) O(o(f)) = o(O(f)) = o(f).
 \end{array}$$

**Nota:** Estas propiedades se deducen directamente de la definición.

**Derivadas e Integrales:** Sí se tiene una relación de orden entre dos funciones  $f$  y  $g$ , una pregunta natural es sí se hereda o no la misma propiedad para una derivada o una integral. La respuesta se describe después de la siguiente observación.

**Observación:** En el contexto real sí  $f = O(g)$  no necesariamente se sigue que  $f' = O(g')$ . Por ejemplo, sean  $f(x) = x + \sin(e^x)$  y  $g(x) = x + 1$ . Si  $x \gg 1$  se observa que  $f = O(x)$ , pero la derivada de  $f$  no es acotada (es decir,  $f'$  no es  $O(1)$ ). Sin embargo, desde el punto de vista complejo es posible establecer cierto tipo de relación para los símbolos de orden en referencia a la diferenciación de funciones. Respecto a la integral la situación es diferente.

**Teorema A.1.2.** Si  $f(x)$  y  $g(x)$  satisfacen  $f = O(g)$  cuando  $x \rightarrow x_0$  para toda  $x_0 \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| = O \left( \int_{x_0}^x |g(t)| dt \right), \quad x \rightarrow x_0.$$

**Demostración.** Sea  $k$  una constante tal que  $|f(t)| \leq k|g(t)|$  con  $t$  suficientemente cercana a  $x_0$ , entonces existe una  $\delta > 0$  tal que  $|t - x_0| < \delta$  y

$$-k|g(t)| \leq f(t) \leq k|g(t)|, \quad \text{para } |t - x_0| < \delta.$$

Aplicando la propiedad de monotonía de la integral se obtiene la conclusión. ■

A continuación se establece el resultado en el contexto complejo para las derivadas.

**Teorema A.1.3.** Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa en una región que contiene al sector anular cerrado  $S = \{z : \alpha \leq \arg(z - z_0) \leq \beta, |z - z_0| \geq R \geq 0\}$  y supóngase que  $f(z) = O(z^v)$  (respectivamente,  $f(z) = o(z^v)$ ) cuando  $z \rightarrow \infty$  en el sector, para  $v$  real y fijo. Entonces  $f^{(n)}(z) = O(z^{v-n})$  cuando  $z \rightarrow \infty$  en cualquier sector anular cerrado contenido en  $S$  con vértice común  $z_0$ . ■

## A.2 Solución de la Ecuación de Riccati

La solución de la *Ecuación de Riccati*,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x), \quad (1.2.1)$$

se obtiene mediante transformación simple, ya sea reduciéndola a la ecuación lineal de segundo orden

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(P - \frac{Q'}{Q}\right) \frac{du}{dx} - RQu = 0, \quad (1.2.2)$$

con la sustitución  $y = u'/(Qu)$ , donde  $u' = du/dx$ , o a la ecuación lineal de primer orden

$$\frac{dv}{dx} - (P + 2Qy_1)v = Q, \quad (1.2.3)$$

con la sustitución  $y = y_1 + 1/v$ , donde  $y_1(x)$  es cualquier solución particular conocida de la ecuación original. Por ejemplo, la solución general de la ecuación de Riccati más popular,

$$x^2 \frac{dy}{dx} + xy + x^2 y^2 = 1$$

es  $y = \frac{x^2 - k^2}{x(x^2 + k^2)}$ , con  $k$  una constante arbitraria, cuya gráfica se ilustra en la Fig.A1

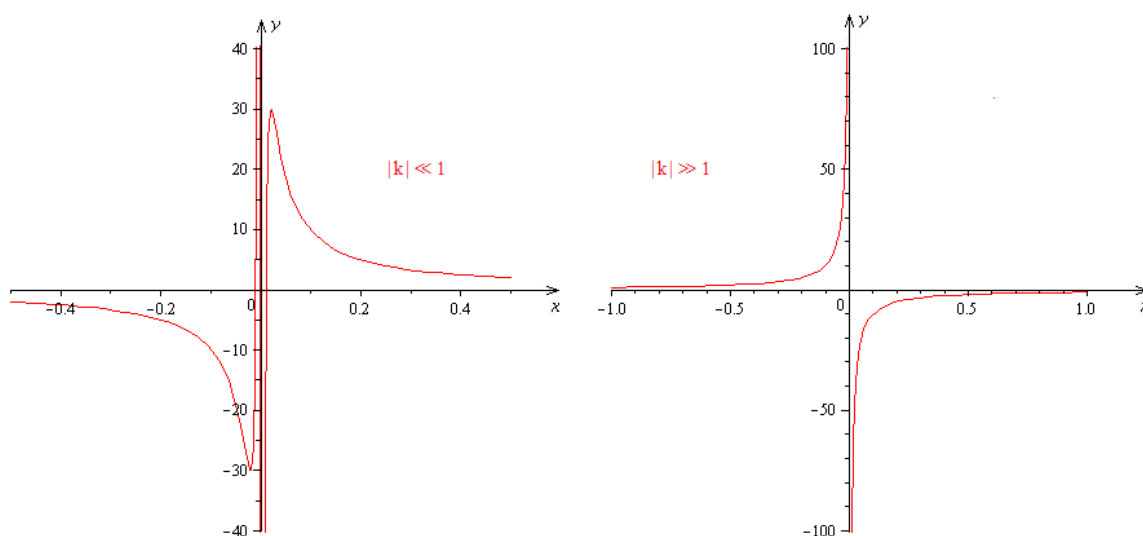


Fig.A1 Solución de una Ecuación de Riccati Específica

Nótese que en este caso  $y_1 = 1/x$ .

### A.3 Nociones Elementales sobre la Teoría de Nevanlinna

El objetivo de introducir esta importante, pero no muy conocida, parte del Análisis Complejo es para describir de forma muy general algunos aspectos básicos de la *Teoría de Nevanlinna*<sup>1</sup>, los cuales en específico son necesarios para el análisis del comportamiento de las Trascendentes de Painlevé. Además, se establecen algunas notaciones que se utilizan posteriormente.

Para  $\Phi, \Psi : [r_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ , se denota por  $\Phi(r) \ll \Psi(r)$  siempre que para algún  $r_0 \geq 0$ ,  $\Phi(r) = O(\Psi(r))$  cuando  $r \rightarrow +\infty$  y  $\Phi(r) \asymp \Psi(r)$  si  $\Phi(r) \ll \Psi(r)$  y  $\Psi(r) \ll \Phi(r)$  se cumplen simultáneamente.

Sea  $f(z)$  una función meromorfa arbitraria. Para  $r > 0$ , se denota por  $n(r, f)$  el número de polos de  $f(z)$  en el disco  $|z| \leq r$  (contando multiplicidad). Entonces, la *función de conteo de polos* de  $f(z)$  se define por

$$N(r, f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^r \frac{1}{\xi} [n(\xi, f) - n(0, f)] d\xi + n(0, f) \log r, \quad (1.3.1)$$

la cual también es llamada *N-Función* y se utiliza para medir la frecuencia promedio de polos en el disco  $|z| < r$ . Para contar los polos múltiples en tal disco se escribe  $n_m(r, f) = \sum_{|\tau| \leq r} (\mu(\tau) - 1)$ , donde  $\mu(\tau)$  denota la multiplicidad del polo  $\tau$  y  $\sum_{|\tau| \leq r}$  denota la suma sobre todos los polos en el disco  $|z| \leq r$ . Entonces,

$$N_m(r, f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^r \frac{1}{\xi} [n_m(\xi, f) - n_m(0, f)] d\xi + n_m(0, f) \log r \quad (1.3.2)$$

mide la frecuencia de los polos múltiples.

---

<sup>1</sup>Rolf Herman Nevanlinna (1895–1980), matemático Finlandés reconocido particularmente por su trabajo en la Teoría de Funciones Analíticas.

Para  $x > 0$ , se escribe como  $\log^+ x = \max\{\log x, 0\}$  y con ésta se define la segunda funcional de Nevanlinna, la *función de proximidad* de  $f(z)$ ,

$$m(r, f) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta, \quad (1.3.3)$$

para medir la magnitud promedio sobre la circunferencia  $|z| = r$ . Entonces, se define la expresión

$$T(r, f) \stackrel{\text{def}}{=} m(r, f) + N(r, f), \quad (1.3.4)$$

llamada *Función Característica de Nevanlinna* de  $f(z)$ , para medir la complejidad del comportamiento, esto es, la *trascendencia* de  $f(z)$ .

**Observación:** Para funciones meromorfas  $f(z)$  y  $g(z)$  se cumple

$$\begin{aligned} m(r, \alpha f + \beta g) &\leq m(r, f) + m(r, g) + O(1), & m(r, fg) &\leq m(r, f) + m(r, g), \\ T(r, \alpha f + \beta g) &\leq T(r, f) + T(r, g) + O(1), & T(r, fg) &\leq T(r, f) + T(r, g), \end{aligned}$$

para  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .

Ahora, sean  $a_j$  y  $b_k$  los ceros y los polos, respectivamente, de  $g(z)$  en el disco  $|z| < r$  repitiéndose de acuerdo a sus multiplicidades. La Fórmula de Poisson-Jensen (??) implica que para todo  $z$  en el disco  $|z| < r$  se tiene

$$\begin{aligned} \log |g(z)| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(re^{i\theta})| \cdot \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} d\theta \\ &\quad + \sum_{|a_j| < r} \log \left| \frac{r(z - a_j)}{r^2 - \bar{a}_j z} \right| - \sum_{|b_k| < r} \log \left| \frac{r(z - b_k)}{r^2 - \bar{b}_k z} \right|. \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Sustituyendo  $g(z) = z^{-p} f(z) = c_p + O(z)$ , con  $c_p \neq 0$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  y  $z = 0$  en (1.3.5) se tiene

$$m(r, f) + N(r, f) = m(r, 1/f) + N(r, 1/f) + \log |c_p|. \quad (1.3.6)$$

Reemplazando  $f(z)$  por  $f(z) - a$ ,  $a \in \mathbb{C}$ , obtenemos el primer teorema principal de Nevanlinna.

**Teorema A.3.1.** Para una función meromorfa arbitraria  $f(z)$  y  $a \in \mathbb{C}$  una constante arbitraria,

$$T(r, 1/(f - a)) = T(r, f) + O(1). \quad (1.3.7)$$

■

**Nota:** Por ejemplo,  $T(r, e^z) \asymp r$  y  $T(r, e^{z^2}) \asymp r^2$ .

**Proposición A.3.1.** Una función meromorfa  $f(z)$  satisface  $T(r, f) = O(\log r)$  si y solo si  $f(z)$  es una función racional.

■

El *orden analítico* de  $f(z)$  se define por

$$\rho(f) \stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}. \quad (1.3.8)$$

Por ejemplo,  $\rho(e^z) = 1$ ,  $\rho(e^{z^2}) = 2$  y  $\rho(q) = 0$  para cualquier función racional  $q(z)$ . De una identidad debida a Cartan<sup>2</sup>

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(r, 1/(f - e^{i\theta})) d\theta + \log^+ |f(0)|, \quad (1.3.9)$$

se obtiene

$$\frac{dT(r, f)}{d \log r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n(r, 1/(f - e^{i\theta})) d\theta, \quad (1.3.10)$$

siempre que  $|f(0)| \neq \infty$ . En otro caso,  $f(0) = \infty$ , combinando (1.3.9) con la relación  $T(t, f) = T(r, 1/f) + \log |c_p|$  se establecen los siguientes resultados.

**Proposición A.3.2.**  $T(r, f)$  es creciente y convexa con respecto a  $\log r$ .

■

Ademas, se tiene que

**Proposición A.3.3.** Una función meromorfa  $f(z)$  es trascendente si y solo si

$$\log r/T(r, f) = o(1), \quad \text{cuando } r \rightarrow \infty.$$

---

<sup>2</sup>Henri Cartan (1904-2008).



**Demostración.** Suponer que  $f(z)$  es trascendente y considerar que  $T(r, f) = T_*(r)$  es una función que depende de  $\log r$ . Si  $dT_*(r)/d \log r \leq \beta$  para algún  $\beta > 0$ , entonces  $T_*(r) \leq \beta \log r + O(1) \ll \log r$ , lo cual contradice la suposición. Como  $dT_*(r)/d \log r$  es creciente con respecto a  $r$ , entonces por la Proposición A.3.3  $dT_*(r)/d \log r \rightarrow \infty$  cuando  $r \rightarrow \infty$ . Para cualquier  $\epsilon > 0$ , existe  $r_\epsilon > 0$  tal que  $dT_*(r)/d \log r \geq 1/\epsilon$ ,  $r \geq r_\epsilon$ , y por lo tanto,  $T_*(r) \geq \epsilon^{-1} \log r + O(1)$ ,  $r \geq r_\epsilon$ , lo cual implica que  $\log r/T(r, f) \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$ . ■

Sea  $\phi(r)$  una función definida en un intervalo  $[r_0, +\infty)$ , con  $r_0 > 1$ . Entonces, se escribe  $\phi(r) = S(r, f)$  si  $\phi(r) = o(T(r, f))$  cuando  $r \rightarrow +\infty$ . Aplicando el operador barra  $(\partial/\partial x - i\partial/\partial y)$  a (1.3.5) (con  $g = f$ ), se tiene que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| \cdot \frac{re^{i\theta}}{(re^{i\theta} - z)^2} d\theta + \sum_{|a_j| < r} \left( \frac{1}{z - a_j} + \frac{\bar{a}_j}{r^2 - \bar{a}_j z} \right) - \sum_{|b_k| < r} \left( \frac{1}{z - b_k} + \frac{\bar{b}_k}{r^2 - \bar{b}_k z} \right)$$

para  $|z| < r$ , de donde se obtiene un estimado básico para las derivadas logarítmicas.

**Proposición A.3.4.** Para una función meromorfa arbitraria  $f(z)$  y para un  $k \in \mathbb{N}$  arbitrario,  $m(r, f^{(k)}/f) = S(r, f)$ . En particular, si  $\rho(f) < \infty$ , entonces  $m(r, f^{(k)}/f) = O(\log r)$ . ■

**Corolario A.3.2.** *i)* Para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $T(r, f^{(k)}) \leq (k+1)T(r, f) + S(r, f)$ .

*ii)* Para  $p, q$  enteros arbitrarios con  $p < q$ , se cumple  $m(r, f^{(q)}/f^{(p)}) = S(r, f)$ .

**Demostración.** *i)* Si  $z_0$  es un polo de  $f(z)$  con multiplicidad  $\mu_0$ , entonces  $z_0$  es un polo de  $f^{(k)}(z)$  con multiplicidad  $\mu_0 + k$ . Por lo tanto,  $N(r, f^{(k)}) \leq (k+1)N(r, f)$ . Por la Proposición A.3.4,  $m(r, f^{(k)}) \leq m(r, f) + m(r, f^{(k)}/f) = m(r, f) + S(r, f)$ , de donde  $T(r, f^{(k)}) \leq (k+1)T(r, f) + S(r, f)$ .

*ii)* Por el punto *i)*, observando que  $m(r, f^{(q)}/f^{(p)}) \leq \sum_{j=p}^{q-1} m(r, f^{(k+1)}/f^{(j)})$ , se obtiene el resultado. ■

A continuación se establece el segundo teorema principal de la Teoría de Nevanlinna.

**Teorema A.3.3.** Para un función meromorfa arbitraria  $f(z)$  y para un número arbitrario de puntos distintos  $a_1, \dots, a_q \in \mathbb{C}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , se tiene que

$$m(r, f) + \sum_{j=1}^q m(r, 1/(f - a_j)) + N(r, 1/f') + N_m(r, f) \leq 2T(r, f) + S(r, f). \quad (1.3.11)$$

■

Por último, cerraremos esta parte enunciando uno de los principales resultados de la Teoría de Nevanlinna, el cual se conoce como *Teorema de Valiron-Mohon'ko*, cuya demostración se encuentra en [9].

**Teorema A.3.4.** Sea  $f$  una función meromorfa y sea

$$R(z, f) = \frac{a_0(z) + a_1(z)f + \dots + a_p(z)f^p}{b_0(z) + b_1(z)f + \dots + b_q(z)f^q}$$

una función racional e irreducible en  $f$  con coeficientes meromorfos  $a_j(z)$ ,  $b_k(z)$  y de crecimiento lento  $S(r, f)$ . Entonces,

$$T(r, R(z, f(z))) = \max\{p, q\}T(r, f(z)) + S(r, f). \quad (1.3.12)$$

■

# Bibliografía

- [1] ABLOWITZ M.J., FOKAS A.S., *Complex Variables. Introduction and Applications*.  
Cambridge University Press (2006).
- [2] AHLFORS L.V., *Complex Analysis*.  
Mc.Graw-Hill Book Co. (1979).
- [3] ARFKEN G., *Mathematical Methods for Physicists*.  
Academic Press, (1985).
- [4] COURANT H., HILBERT D., *Methods of Mathematical Physics*.  
Interscience, **Vol.I** (1953), **Vol.II** (1962).
- [5] GROMAK V.I., LAINE I., SHIMOMURA S., *Painlevé Differential Equations in the  
Complex Plane*. Walter de Gruyter Publications (2002).
- [6] HILLE E., *Ordinary Differential Equations in the Complex Plane*.  
Dover Publications, Inc. (1976).
- [7] INCE E.L., *Ordinary Differential Equations*.  
Dover Publications, Inc. (1956).
- [8] LANG S., *Complex analysis*.  
Springer-Verlag (1999).
- [9] LAINE I., *Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations*.  
Walter de Gruyter Publications (1992).

- [10] MARSDEN J.E., HOFFMAN M.J., *Análisis Básico de Variable Compleja*. Editorial Trillas, (1996).
- [11] NEVANLINNA R., PAATERO V., *Introduction to Complex Analysis*. Addison-Wesley, (1986).